Математическая физика

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ

Главный редактор

Л. Д. ФАДДЕЕВ

Редакционная коллегия

В. И. БИТЮЦКОВ (заместитель главного редактора),
Н. Н. БОГОЛЮБОВ, В. С. БУСЛАЕВ, А. М. КУРБАТОВ,
В. П. МАСЛОВ, С. П. НОВИКОВ (заместитель главного редактора), Д. П. САНКОВИЧ

Научно-редакционный совет

В. И. АРНОЛЬД, О. И. БОГОЯВЛЕНСКИЙ,
А. А. ГОНЧАР, Ю. Н. ДРОЖЖИН, Б. А. ДУБРОВИН,
В. В. ЖАРИНОВ, О. И. ЗАВЬЯЛОВ, Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ,
Ю. М. ЗИНОВЬЕВ, Д. Н. ЗУБАРЕВ, В. Г. КАДЫШЕВСКИЙ,
Д. И. КАЗАКОВ, А. А. КИРИЛЛОВ, И. М. КРИЧЕВЕР,
Ю. И. МАНИН, В. А. МАРЧЕНКО, Б. В. МЕДВЕДЕВ,
Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, А. В. МИХАЙЛОВ, А. С. МОНИН,
В. П. ПАВЛОВ, С. В. ПЕЛЕТМИНСКИЙ, Д. Я. ПЕТРИНА,
М. К. ПОЛИВАНОВ, В. Н. ПОПОВ, Я. Г. СИНАЙ,
А. А. СЛАВНОВ, А. Н. ТАВХЕЛИДЗЕ, А. С. ХОЛЕВО,
О. А. ХРУСТАЛЕВ, Д. В. ШИРКОВ

НАУЧНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

51-7
М34

Председатель
Научно-редакционного совета издательства
«Большая Российская энциклопедия»
А. М. ПРОХОРОВ

Главный редактор, директор издательства
А. П. ГОРКИН

Первый заместитель директора издательства
Н. С. АРТЕМОВ

РЕДАКЦИЯ МАТЕМАТИКИ:

Зав. редакцией В. И. БИТЮЦКОВ, ведущие научные редакторы
М. И. ВОЙЦЕХОВСКИЙ, А. Б. ИВАНОВ, научные редакторы
О. А. ИВАНОВА, Л. Р. СЕМЕНОВА, Е. Г. СОБОЛЕВСКАЯ

В подготовке издания принимали участие:

Редакция иллюстраций – гл. художник А. В. АКИМОВ, художественное оформление С. С. ВОДЧИЦ, художественный редактор О. И. ЗОБНИНА.

Техническая редакция – зав. редакцией О. Д. ШАПОШНИКОВА, ст. технический редактор Т. А. ХЛЕБНОВА.

Издательско-компьютерный отдел – зав. отделом И. Н. КОНОВАЛОВА, операторы И. С. ЖУРАВЛЕВА, Л. В. КОРОТКОВА, В. М. ТРОФИМОВА, Р. А. ЯКУБОВА.

Корректорская – зав. корректорской Ж. А. ЕРМОЛАЕВА, ст. корректоры Л. С. ВАЙНШТЕЙН, В. Н. ИВЛЕВА, Е. А. КУЛАКОВА, С. Ф. ЛИХАЧЕВА, А. В. МАРТЫНОВА, А. С. ШАЛАЕВА, М. Д. ШТРАМЕЛЬ, корректор А. А. ВОЛЧЕНКОВА.

Производственный отдел – зав. отделом И. А. ВЕТРОВА, ведущий специалист Г. С. ШУРШАКОВА.

Копировально-множительная лаборатория – зав. лабораторией В. И. КЛИМОВА, операторы Л. Ф. ДОЛГОПОЛОВА, Г. В. МЕЩАНИНОВА.

Гл. экономист – А. И. СОЛОДОВНИКОВА.

Гл. бухгалтер – О. И. СМИРНОВА.

ISBN 5-85270-304-4

© Научное издательство
«Большая Российская энциклопедия», 1998.

А

АБЕЛЕВ ДИФФЕРЕНЦИАЛ – комплексно аналитическая 1-форма на компактной *римановой поверхности*. В голоморфных картах (U_i, z_i) римановой поверхности P А. д. задается функциями $h_i : U_i \to \overline{\mathbb{C}}$ такими, что

$$h_j(p) = h_i(p)\frac{dz_{ij}}{dz}(z_i(p)),$$

где $z_{ij} = z_i z_j^{-1}$ и $z \in \mathbb{C}$. В локальной карте (U_i, z_i) А. д. обычно записывается в виде $\omega = f dz$, где $f = h_i z_j^{-1}$.

Мероморфный во всех локальных картах А. д. называется мероморфным А. д., или А. д. III рода. В локальной карте (U_i, z_i) мероморфный А. д. имеет вид

$$\omega = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n (z - z_i)^n dz,$$

где $\alpha_m \neq 0$. Если $m > 0$, то говорят, что ω имеет в точке $a_0 = z_i^{-1}(z_0)$ нуль кратности m. Если $m < 0$, то говорят, что ω имеет в a_0 полюс кратности m. Для любого мероморфного А. д. на поверхности рода g сумма кратностей нулей минус сумма кратностей полюсов равна $2g - 2$. Число α_{-1} называется вычетом А. д. в полюсе. Сумма вычетов по всем полюсам равна нулю. Мероморфный А. д., вычет к-рого в каждом полюсе равен нулю, называется А. д. II рода, а мероморфный А. д. без полюсов – I рода, или голоморфным А. д. (см. также *Голоморфная форма*). Голоморфные дифференциалы на компактной римановой поверхности рода g образуют комплексное векторное пространство размерности g. Напр., голоморфные А. д. римановой поверхности гиперэллиптич. кривой $y^2 = F(x)$, где $F(x)$ – многочлен степени $2g+1$, имеют вид $\frac{f(z)dz}{\sqrt{F(z)}}$, где $f(z)$ – любые многочлены степени меньше g.

Интеграл А. д.

$$\int_l f(z)dz$$

корректно определен для любого пути l, на к-ром дифференциал конечен. Интеграл по замкнутому контуру a называется периодом А. д. по контуру a. Для А. д. II рода он зависит лишь от гомотопич. класса контура. Пусть $\{a_i, b_i, i = 1, ..., g\}$ – базис группы гомологий поверхности со стандартной матрицей пересечений $(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$. Тогда периоды

$$A_i = \oint_{a_i} \omega, \quad B_i = \oint_{b_i} \omega, \quad A_i' = \oint_{a_i} \omega', \quad B_i' = \oint_{b_i} \omega'$$

любой пары голоморфных дифференциалов ω, ω' удовлетворяют билинейным соотношениям Римана

$$\sum_{i=1}^{g} (A_i B_i' - A_i' B_i) = 0.$$

Если все A_i равны нулю, то $\omega = 0$. Если голоморфные А. д. $\omega_1, ..., \omega_g$ нормированы условием

$$\oint_{a_k} \omega_j = 2\pi i \delta_{kj},$$

то матрица

$$B_{jk} = \oint_{b_k} \omega_j, \quad j, k = 1, 2, ..., g,$$

называется якобиевой. Она является матрицей Римана. Построенная по матрице B_{jk} тета-функция называется тета-функцией римановой поверхности. Векторы $e_j = 2\pi i(\delta_{j1}, ..., \delta_{jg})$ и базисные векторы $b_j = (b_{j1}, ..., b_{jg})$ линейно независимы над полем $\mathbb{R}$ и порождают дискретную группу параллельных переносов Г. Абелево многообразие $\mathbb{C}^g/\Gamma$ называется многообразием Якоби, или якобианом римановой поверхности P. Согласно теореме Торелли, римановы поверхности изоморфны, если и только если изоморфны их якобианы. *С. М. Натанзон.*

АБЕЛЕВ ИНТЕГРАЛ – интеграл от *абелева дифференциала* ω, то есть многозначная функция на компактной *римановой поверхности*, ветви $F_1(z)$, $F_2(z)$ которой в любой локальной карте (u, z) таковы, что $\frac{\partial F_i(z)}{\partial z} = \omega$. В зависимости от того, является ли абелев дифференциал ω дифференциалом I, II или III рода, А. и. присваивают соответствующий род. А. и. I рода голоморфны, II рода мероморфны, а III рода могут иметь логарифмич. особенности. Если риманова поверхность задается уравнением $\Phi(v, z) = 0$, то А. и. III рода имеет вид

$$\int_{z_0}^{z} R(v, z)\, dz,$$

где $R(v, z)$ – рациональная функция. Функции, обратные к А. и., исследуются с помощью *абелевых функций*. Напр., функция, обратная к А. и.

$$z(y) = \int_0^y \frac{dw}{v}$$

на кривой

$$v^2 = (1 - w^2)(1 - k^2 w^2),$$

является эллиптич. функцией Якоби $y = \operatorname{sh} z$. *С. М. Натанзон.*

АБЕЛЕВА ГРУППА, коммутативная группа, – *группа*, операция в которой коммутативна (переместановочна).

АБЕЛЕВА ФУНКЦИЯ – *мероморфная функция* $f(z)$ на комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^g$, $g \geqslant 1$, имеющая $2g$ линейно независимых над полем $\mathbb{R}$ периодов. Периодом А. ф. $f(z)$ называется вектор $e \in \mathbb{C}^g$ такой, что $f(z + e) = f(z)$. Периоды образуют группу Г; порождающий ее набор линейно независимых над $\mathbb{R}$ векторов $e_1, ..., e_{2g}$ называется множеством примитивных периодов. В этом случае g-мерный тор $\mathbb{C}^g/\Gamma$ является полным алгебраич. многообразием. Такая конструкция дает все комплексные абелевы многообразия.

После линейной замены переменных $z = (z_1, ..., z_g) \in \mathbb{C}^g$ можно считать, что векторы $e_j = (e_{j1}, ..., e_{jg})$ удовлетворяют условию $e_{jm} = 2\pi i \delta_{jm}$ при $j \leqslant g$. Матрица $B = \{b_{ij}\}$, где $b_{jm} = e_{j+g,m}$ является матрицей Римана, то есть симметрической с отрицательно определенной вещественной частью. Для любой матрицы Римана $B = \{b_{im}\}$ су-

ществует А. ф. с множеством примитивных периодов $e_j = 2\pi i(\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jg})$, $e_{j+g} = (b_{j1}, \ldots, b_{jm})$. Такие А. ф. строятся с помощью тета-функции

$$\theta = (z|B) = \sum_{n_1,\ldots,n_g=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{g} b_{ij}n_in_j + \sum_{i=1}^{g} n_iz_i\right\}$$

и ее модификаций.

Матрицей Римана является якобиева матрица любой компактной римановой поверхности (см. *Абелев дифференциал*). При $g \leqslant 3$ всякая матрица Римана является якобиевой нек-рой компактной римановой поверхности. Для $g > 3$ это не так.

При $g = 1$ А. ф. называются также *эллиптическими функциями*. Напр., эллиптич. функция Вейерштрасса $\wp(z)$ с периодами 2ω, $2\omega'(\operatorname{Im}\omega'/\omega > 0)$ задается формулой

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m^2+n^2\neq 0}\left[\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right].$$

Она обращает абелев интеграл

$$\int_{\infty}^{p}\frac{dx}{y}$$

на алгебраич. кривой $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, где

$$g_2 = 60\sum_{m^2+n^2\neq 0}\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^4},$$

$$g_3 = 140\sum_{m^2+n^2\neq 0}\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^6}.$$

Лит.: [1] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с нем., М., 1954; [2] Маркушевич А. И., Введение в классическую теорию абелевых функций, М., 1979.
С. М. Натанзон.

АБЕРЛОВИЦА – ЛАДИКА УРАВНЕНИЕ – см. *Нелинейное уравнение Шредингера.*

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР – см. *Спектральная теорема.*

АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО – см. *Механика.*

АБСОЛЮТНЫЙ ИНВАРИАНТ – см. *Вейерштрасса эллиптические функции, Модулярная функция.*

АБСТРАКТНАЯ РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Тайхмюллера пространство.*

АБСТРАКТНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Векторное пространство.*

АБСТРАКТНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ – теория абстрактных рядов Фурье и интегралов Фурье. Классич. *гармонический анализ* – теория рядов и интегралов Фурье – интенсивно развивался под влиянием физич. задач в 18–19 вв. и оформился в самостоятельную математич. дисциплину.

Дальнейшее развитие гармонич. анализа привело к установлению разнообразных связей гармонич. анализа с общими вопросами теории функций и функциональным анализом. Открытие *Хаара меры* и развитие теории *представлений* бесконечных групп поставили вопрос о естественных границах основных результатов классич. гармонич. анализа. Эта задача основана на следующей интерпретации обычного ряда Фурье в комплексной форме. Пусть $f(x)$ – комплекснозначная суммируемая с квадратом функция на окружности единичной длины (или на отрезке $[0, 1]$), c_n – ее коэффициенты Фурье по системе $\{e^{2\pi inx}, n$ – целое$\}$:

$$c_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx.$$

Тогда ряд Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_ne^{2\pi inx}$$

функции $f(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ в $L^2[0, 1]$. Мера Лебега на $[0, 1]$ порождает меру Хаара на окружности (единичной длины) G, рассматриваемой как группа вращений плоскости, а функции $x \to e^{2\pi inx}$ представляют собой полный набор неприводимых *унитарных представлений* топологич. группы G. Поэтому все величины, входящие в определение ряда Фурье, получают теоретико-групповой смысл и появляется возможность обобщения понятия ряда Фурье, основанная на теории неприводимых унитарных представлений топологич. групп. При этом А. г. а. не только позволяет найти естественную форму результатов классич. гармонич. анализа на прямой или окружности, но и установить новые результаты, относящиеся к бо́льшим классам топологич. групп.

А. г. а. как гармонический анализ на группах зародился в значительной мере на основе теории характеров локально бикомпактных абелевых групп, созданной Л. С. Понтрягиным (1934). А. г. а. является одной из естественных областей приложения методов теории банаховых алгебр и может до нек-рой степени рассматриваться как одна из ветвей этой теории. С другой стороны, рамки А. г. а. являются естественными для ряда классич. задач теории функций и функционального анализа.

Приложения А. г. а. весьма многообразны. Результаты А. г. а. применяются в общей теории локально бикомпактных групп, в теории динамич. систем, в теории представлений бесконечных групп (к-рая, в свою очередь, служит одним из основных инструментов А. г. а.) и во многих других математич. теориях.

Наиболее разработанным разделом А. г. а. является теория интеграла Фурье на локально бикомпактной абелевой группе. Среди некоммутативных групп особое положение занимают бикомпактные группы, теория представлений к-рых имеет сравнительно простой и законченный вид: для бикомпактных групп получен ответ на многие классич. вопросы гармонич. анализа. В случае небикомпактных некоммутативных групп общая теория далека от завершения. Однако и в этом случае известны естественные границы ряда фундаментальных результатов классич. гармонич. анализа.

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, кол. 880–886.
Е. А. Горин, А. И. Штерн.

АВТОДУАЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЕ – см. *Алгебро-геометрические методы* в теории поля, *Инстантон.*

АВТОКОЛЕБАНИЯ – незатухающие колебания в нелинейной *динамической системе*, амплитуда и частота которых в течение длительного промежутка времени могут оставаться постоянными, не зависят в широких пределах от начальных условий и определяются свойствами самой системы.

Динамич. системы, способные совершать А., называются автоколебательными системами. К таковым относятся часы, генераторы электрич. колебаний, электрич. звонок, духовые и смычковые музыкальные инструменты и т. п. При определенных условиях А. могут возникать и в динамич. системах, нормальным состоянием работы к-рых является отсутствие А. (напр., А. в передней подвеске автомобиля – «шимми»; флаттер крыла самолета, А. в системах автоматич. регулирования и управления). Простейшую автоколебательную систему можно представить состоящей из постоянного источника энергии, устройства, регулирующего поступление энергии в колебательную систему, и колебательной системы. Существенным является наличие обратной связи: регулирующее устройство, с одной стороны, управляет движением колебательной системы, а с другой – управление работой регулирующего устройства осуществляется движением колебательной системы. С математич. точки зрения, напр., автономные автоколебательные системы с одной степенью свободы можно определить как такие системы, уравнения движения к-рых характеризуются наличием на фазовой плоскости одного или нескольких *предельных циклов.*

Важным характерным свойством А. является независимость их амплитуды в широких пределах от начальных условий, то есть существование одной или нескольких областей начальных условий таких, что любым начальным условиям, принадлежащим какой-либо из этих областей, будет соответствовать одна и та же амплитуда А. Это значит,

что в колебательных системах может существовать несколько стационарных процессов с различными амплитудами, каждый из к-рых устанавливается в системе в зависимости от выбранной области начальных условий. Рассмотренное свойство является основным отличием периодич. движения в автоколебательной системе от периодич. движения в консервативной системе. Характерным свойством автоколебательных систем является также то, что период А. определяется свойствами самой системы, а не навязывается извне. Это – основное отличие А. от *вынужденных колебаний*.

Для А. существенно то, что для восполнения потерь энергии должен существовать постоянный источник энергии, к-рый в автономной системе, не имеющей сил, явно зависящих от времени, должен создавать силу, не являющуюся заданной функцией времени и определяемую самой системой. Постоянными источниками энергии могут быть: заводной механизм в часах, вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью, непрерывная движущаяся с постоянной скоростью лента, струя жидкости или газа, имеющая постоянную скорость, а в системах, где движущая сила – электрич. ток, таким источником энергии является, напр., батарея.

Примером простейшей автоколебательной системы может служить маятник, находящийся в среде с вязким трением, на к-рый действует постоянная по величине сила, всегда направленная в сторону движения. Дифференциальное уравнение этой динамич. системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = F\operatorname{sign}\dot{x},$$

где $h>0$, $F>0$, k^2 – постоянные коэффициенты. При любых начальных условиях в системе устанавливается периодич. движение, причем максимальное отклонение маятника от положения равновесия (амплитуда) равно

$$x_0 = \frac{1+e^{-hT}}{1-e^{-hT}}\frac{F}{k^2},$$

где $T=\pi/\sqrt{k^2-h^2}$ – полупериод периодич. движения. На фазовой плоскости $x\dot{x}$ этому движению соответствует устойчивый предельный цикл.

Характерной особенностью всех автоколебательных систем является такая связь между постоянным источником энергии и системой, когда энергия, отдаваемая источником, периодически изменяется, причем период этого изменения определяется свойствами системы. Можно сказать, что автоколебательная система представляет собой систему, к-рая за счет непериодич. источника энергии создает периодич. процесс. А. могут быть по форме близки к *гармоническим колебаниям*, но могут и существенно отличаться от последних. А., существенно отличающиеся от гармонических, называются релаксационными. А., близкие по форме к гармоническим, обычно бывают в системах, потери энергии в к-рых за один период малы, и, следовательно, поступление энергии также мало. А., близкие по форме к гармоническим, могут быть и в том случае, когда потери в системе за один период велики, но при надлежащем подборе параметров происходит компенсация потерь не только за период, а и за каждую малую долю периода в отдельности. При релаксационных колебаниях обычно потери энергии велики и за период компенсируются почти всей энергией колебательной системы.

Возникновение А. может быть «мягким» и «жестким». Мягкое возникновение А. характеризуется тем, что в системе, находящейся в положении устойчивого равновесия, при изменении какого-либо параметра возникают А., амплитуда к-рых непрерывно возрастает от нуля при непрерывном изменении параметра. При обратном изменении параметра амплитуда А. непрерывно уменьшается до нуля и состояние равновесия системы становится устойчивым. При жестком возникновении А. система при медленном и непрерывном изменении параметра переходит из состояния устойчивого равновесия к А. конечной амплитуды; при дальнейшем изменении параметра амплитуда возрастает уже равномерно. При обратном изменении параметра амплитуда непрерывно уменьшается до определенного значения, после чего система переходит к состоянию устойчивого равновесия. Существенно при этом, что система переходит к А. и от А. при различных значениях параметра.

Автоколебательные системы обладают интересным и важным свойством – явлением принудительной синхронизации, называемым иногда «захватыванием». Оно состоит в том, что при достаточно малой разности между частотой автоколебательной системы и частотой внешней силы, действующей на эту систему, устойчивое периодич. движение системы приобретает частоту внешней силы, то есть внешняя сила навязывает свой темп автоколебательной системе.

Лит.: [1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [2] Бутенин Н.В., Элементы теории нелинейных колебаний, Л., 1962; [3] Харкевич А.А., Автоколебания, М., 1953. *Н. В. Бутенин.*

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА – см. *Автоколебания*.

АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ, *корреляционная функция* действительного случайного процесса $\{\xi(t);\ t\in T\}$,– функция аргументов t, $t'\in T$, определяемая равенством

$$k(t,t') = \mathsf{E}[\xi(t) - \mathsf{E}\xi(t)][\xi(t') - \mathsf{E}\xi(t')],$$

где E – математическое ожидание по распределению вероятностей процесса $\{\xi(t)\}$. Если T – подмножество действительной прямой, то часто в математич. физике параметр t интерпретируется как время. Аналогично А. ф. определяется для действительной случайной функции на множествах любой природы, в частности, если $k(t,t')$ – А. ф. случайного поля, то T – подмножество конечномерного пространства либо *периодического графа*.

Для того чтобы А. ф. была определена, необходимо, чтобы процесс $\{\xi(t)\}$ при всех $t\in T$ имел конечный второй момент $\mathsf{E}\xi^2(t)<\infty$.

Если $\{\xi(t)\}$ – комплексный случайный процесс (что имеет место в задачах квантовой оптики, см., напр., *Фотоотсчетов статистика*), то есть $\xi(t)=\zeta(t)+i\eta(t)$, где $\{\zeta(t)\}$, $\{\eta(t)\}$ – два экземпляра статистически независимых и статистически эквивалентных случайных процессов, то А. ф. определяется формулой

$$k(t,t') = \mathsf{E}[\xi(t) - \mathsf{E}\xi(t)][\xi(t') - \mathsf{E}\xi(t')]^*.$$

В случае же, если $\xi(t)=(\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ – многомерный действительный случайный процесс, то для его характеристики вводится корреляционная матричнозначная функция

$$k(t,t') = \left\|k_{ij}(t,t')\right\|_{i,j=1}^{n} = \mathsf{E}[\xi(t) - \mathsf{E}\xi(t)] \otimes [\xi(t') - \mathsf{E}\xi(t')],$$

диагональные элементы к-рой при $i=1, \ldots, n$ собственно и являются А. ф. соответственно для процессов $\{\xi_i(t)\}$, а недиагональные элементы при $i\neq j$ носят название взаимнокорреляционных функций процессов $\{\xi_i(t)\}$ и $\{\xi_j(t)\}$.

Характеристич. свойствами А. ф. являются симметрия

$$k(t,t') = k(t',t)$$

и положительная определенность

$$\sum_{i,j=1}^{n} k(t_i,t_j)z_i z_j^* \geqslant 0$$

для любого n, любых комплексных $z_1, \ldots, z_n$ и любых $t_1, \ldots, t_n\in T$, что непосредственно следует из определения. Для многомерного случайного процесса эти свойства А. ф. соответственно записываются в виде

$$k(t,t') = k^*(t',t),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(k(t_i,t_j)a_i, a_j\right) \geqslant 0,$$

где a_i, $i=1, \ldots, n$,– любые векторы из $\mathbb{C}^n$. В случае стационарного процесса $\{\xi(t)\}$

$$k(t,t') = k|t-t'|.$$

А. ф. является важной статистич. характеристикой случайного процесса, хотя и не определяет его полностью. Скорость убывания корреляций при $|t-t'|\to\infty$ дает представление об эргодич. свойствах процесса. В частности, для стационарного процесса условие $k(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$ влечет за собой свойство определяемости процесса $\{\xi(t)\}$ с вероятностью 1 одной реализацией.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1977; [2] Пугачев В. С., Синицын И. Н., Стохастические дифференциальные системы, М., 1985.

Ю. П. Вирченко.

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ – особая симметрия физической системы, состоящая в том, что изменение масштабов независимых переменных может быть скомпенсировано преобразованием подобия других динамических переменных. А. приводит к эффективному сокращению числа независимых переменных. Напр., если состояние системы характеризуется функцией $u(x, t)$, где x – координата, t – время, то условие инвариантности относительно изменения масштабов $x'=kx$, $t'=lt$ и преобразования подобия таково:

$$u(x,t) = k^{1/\alpha} l^{\beta} u(kx, lt),$$

где α, β – числа. Выбор $k^{1/\alpha}=l=m/t$, где m – критерий (параметр) подобия, придает первоначальной функции автомодельный вид

$$u(x,t) = m^{(1+\beta)} t^{-(1+\beta)} u(m^{\alpha_t - \alpha_x}, m).$$

Таким образом, функция u при постоянном m зависит только от комбинации x/t^{α}. А. возможна, если набор параметров, определяющих состояние системы, не содержит характерных масштабов независимых переменных. Поскольку в большинстве задач форма преобразования подобия заранее неизвестна, автомодельную подстановку надо в каждом случае находить отдельно. Для этого имеются три способа:

1. Анализ размерностей. Состояние системы характеризуется набором размерных параметров и функций, зависящих от координат x, y, z и времени t. Если один из безразмерных критериев подобия имеет вид $m = X_0 / bT_0^{\alpha}$, где b – параметр, имеющий размерность $[b]=LT^{-\alpha}$, X_0, T_0 – характерные длина и промежуток времени, L, T – единицы длины и времени соответственно, то в качестве автомодельных переменных можно выбрать безразмерные комбинации x/bt^{α}, y/bt^{α}, z/bt^{α}. В том случае, когда имеется не более двух определяющих параметров с независимыми размерностями, отличными от длины и времени, переход к автомодельным переменным превращает уравнение с частными производными в обыкновенное дифференциальное уравнение.

2. Непосредственный подбор. Формально вводится автомодельная замена переменных $u=t^{\beta}f(x/t^{\alpha})$ или, в более общем виде, $u=\varphi(t)\psi(\chi)$, $\chi=x/\eta(t)$. Уравнения, начальные и граничные условия должны иметь структуру, допускающую такую замену. Решение существует не для любых значений α, β и не для любых функций $\varphi(t)$, $\eta(t)$. Для получения подходящих значений необходимо решить нелинейную задачу на собственные значения.

3. Исследование групповых свойств уравнений. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка $f_j(x_i, u_k, p_{ik})=0$, где x_i – независимые переменные, u_k – искомые функции, $p_{ik}=\partial u_k/\partial x_i$. Всевозможные замены переменных x_i, u_k, допускаемые системой, образуют группу Ли. Автомодельные замены являются ее однопараметрич. подгруппой растяжений. В нек-рых случаях найти такие замены позволяет следующая процедура.

В пространстве переменных x_i, u_k группа Ли задается своими генераторами, имеющими общий вид

$$X = \xi_i \partial/\partial x_i + \eta_k \partial/\partial u_k,$$

где ξ_i, η_k – нек-рые функции переменных x, u; по повторяющимся индексам производится суммирование. В пространстве переменных x_i, u_k, p_{ik} группа Ли задается генераторами

$$\tilde{X} = X + \xi_{ik} \partial/\partial p_{ik},$$

где

$$\xi_{ik} = D_i \eta_k - p_{lk} D_i \xi_l, \quad D_i = \partial/\partial x_i + p_{ik} \partial/\partial u_k.$$

Система уравнений $f_j=0$ определяет гиперповерхность в пространстве переменных x_i, u_k, p_{ik}, к-рая является инвариантом группы при условии $Xf_j=0$, когда $f_j=0$; эти условия служат для определения функций $\xi_i(x, u)$ и $\eta_k(x, u)$. Комбинации переменных, дающие искомую замену, являются первыми интегралами уравнения

$$X\varphi \equiv \xi_i \partial\varphi/\partial x_i + \eta_k \partial\varphi/\partial u_k = 0.$$

Напр., для двух независимых переменных x, t и одной искомой функции u оператор растяжений имеет вид

$$X = \alpha x \partial/\partial x + \beta t \partial/\partial t + \gamma u \partial/\partial u,$$

α, β, γ – числа. Набор первых интегралов уравнения $X\varphi=0$ таков:

$$I_1 = x/t^{\alpha/\beta}, \; I_2 = u/t^{\gamma/\beta},$$

поэтому автомодельное решение уравнений, допускающих группу растяжений, будет иметь вид

$$u = t^{\gamma/\beta} \psi(x/t^{\alpha/\beta}),$$

ψ – новая искомая функция.

Рассмотрим, напр., *Кортевега – де Фриса уравнение*

$$\partial u/\partial t + u\,\partial u/\partial x + \mu \partial^3 u/\partial x^3 = 0,$$

где μ – постоянный параметр; оно инвариантно относительно преобразования

$$t \to kt, \; x \to k^{1/3} x, \; u \to k^{2/3} u.$$

Генератор

$$X = x\partial/\partial x + 3t\partial/\partial t - 2u\partial/\partial u$$

– оператор растяжений, и автомодельное решение имеет вид

$$u(x,t) = \mu(3\mu t)^{-2/3} \psi(z), \quad z = (3\mu t)^{-1/3} x.$$

Подставляя это решение в исходное уравнение, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\psi(z)$:

$$\psi''' - z\psi' + \psi\psi' - 2\psi = 0.$$

Однопараметрич. группа растяжений абелева. Если система допускает решения, построенные на других однопараметрич. абелевых подгруппах, то подходящей заменой этим решениям можно придать автомодельный вид, что является следствием подобия этих групп. В частности, автомодельные движения тесно связаны с нелинейными бегущими волнами, то есть решениями вида $u=f(x-\lambda t+a)$, для к-рых место преобразования подобия занимает преобразование сдвига. Замена

$$x = \ln\xi, \; t = \ln\tau, \; a = \ln b$$

переводит волновое решение f в автомодельное:

$$f\left[\ln\left(\xi/bt^{\lambda}\right)\right] = F\left(\xi/bt^{\lambda}\right).$$

А., отражающая внутреннюю симметрию, присуща многим явлениям и используется при решении различных физич. задач, особенно в механике сплошных сред.

Метод *ренормализационной группы* в квантовой теории поля, по существу, также основан на использовании автомодельного преобразования переменных. Интересно, что в автомодельных переменных уравнение ренормализационной группы оказывается тождественным одномерному уравнению переноса излучения. В физике элементарных частиц А. выражается в том, что сечения нек-рых процессов при высоких энергиях зависят лишь от безразмерных автомодельных комбинаций импульсов. Общие принципы кванто-

вой теории поля допускают широкий класс таких автомодельных асимптотик.

См. также *Масштабная инвариантность*.

Лит.: [1] Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, 9 изд., М., 1981; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [3] Биркгоф Г., Гидродинамика, пер. с англ., М., 1963; [4] Овсянников Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978; [5] Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978, гл. 1; [6] Баренблатт Г. И., Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика, 2 изд., Л., 1982. *В. Е. Рокотян.*

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ турбулентности — см. *Колмогоровская автомодельность.*

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ — решение дифференциального уравнения с частными производными, инвариантное относительно абелевой подгруппы группы Ли, допускаемой уравнением. Эта подгруппа, как правило, состоит из преобразований растяжения или сдвига (см. *Автомодельность*). Для многих уравнений математич. физики (теория поля, волновые процессы, газодинамика) А. р. представляют собой предельные или промежуточные режимы, к к-рым асимптотически стремятся классы общих решений.

Лит.: [1] Овсянников Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978. *В. Ю. Новокшенов.*

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС — см. *Устойчивое распределение.*

АВТОМОРФИЗМ — см. *Изоморфизм.*

АВТОМОРФИЗМ алгебры — взаимно однозначное отображение φ алгебры A в себя, удовлетворяющее условиям:

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b) \text{ для любых } a,\ b\in A;$$

$$\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a) \text{ для любого } a\in A \text{ и любого скаляра } \lambda;$$

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b).$$

Ю. А. Неретин.

АВТОМОРФИЗМ группы — взаимно однозначное отображение φ группы в себя, удовлетворяющее условию

$$\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

для любых элементов g_1, g_2 группы. *Ю. А. Неретин.*

АВТОМОРФИЗМ пространства с мерой — взаимно однозначное отображение T пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ на себя, измеримое вместе с обратным и сохраняющее меру P, то есть такое, что $T^{-1}A\in\mathcal{F}$, $TA\in\mathcal{F}$ и $\mathsf{P}(T^{-1}A)=\mathsf{P}(TA)=\mathsf{P}(A)$ для любого $A\in\mathcal{F}$. Таким образом, А. пространства с мерой — это *эндоморфизм* пространства с мерой, обладающий обратным отображением, к-рое также является эндоморфизмом. Отображение, превращающееся в А. после удаления из пространства подходящего множества нулевой меры, называется автоморфизмом по модулю нуль (автоморфизмом mod 0). В тех вопросах эргодич. теории, к-рые касаются конечных или счетных семейств преобразований, различие между автоморфизмами и автоморфизмами mod 0 несущественно. Примером А. вероятностного пространства может служить сдвиг в пространстве реализаций двусторонней стационарной в узком смысле случайной последовательности x_n, $-\infty<n<\infty$. *Б. М. Гуревич.*

***K*-АВТОМОРФИЗМ** — см. *K-система.*

АВТОМОРФНАЯ ФОРМА — *мероморфная функция* в ограниченной области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая относительно некоторой дискретной группы Γ, действующей в этой области, уравнению:

$$f(\gamma(x))=j_\gamma^{-m}(x)f(x),\quad x\in D,\quad \gamma\in\Gamma,$$

где $j_\gamma(x)$ — якобиан отображения $x\to\gamma(x)$, а m — целое число, называемое весом А. ф. С помощью А. ф. можно строить нетривиальные *автоморфные функции*. Оказывается, что если $g(x)$ — голоморфная и ограниченная в области D функция, то ряд

$$\sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma(x))j_\gamma^m(x)$$

сходится при больших m, давая тем самым нетривиальную А. ф. веса m. Эти ряды называются тета-рядами Пуанкаре. *А. Н. Паршин.*

АВТОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ — *мероморфная функция* нескольких комплексных переменных, инвариантная относительно некоторой дискретной группы Γ аналитических преобразований данного комплексного многообразия M:

$$f(\gamma(x))=f(x),\quad x\in M,\quad \gamma\in\Gamma.$$

Часто под А. ф. понимают лишь функции, определенные в ограниченной связной области D n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, инвариантные относительно дискретной группы Γ автоморфизмов этой области.

Наиболее подробно исследованы А. ф. одного переменного. Основы их теории заложены в 19 в. Ф. Клейном (F. Klein) и А. Пуанкаре (H. Poincaré). В качестве многообразия M здесь обычно рассматривают односвязную область. Различаются три случая: $M=P^1(\mathbb{C})$ (комплексная проективная прямая, или сфера Римана), $M=\mathbb{C}$ и $M=H$ (верхняя полуплоскость $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$).

Примерами А. ф. в случае $M=\mathbb{C}$ служат периодич. функции (так, функция $e^{2\pi iz}$ инвариантна относительно группы сдвигов $\{z\to z+n,\ n\in\mathbb{Z}\}$) и, в частности, эллиптич. функции. Для последних кривая M/Γ компактна и является эллиптич. кривой. Поле $K(\Gamma)$ в этом случае будет полем всех алгебраич. функций на M/Γ. Наконец, для $M=H$ и дискретных групп Γ таких, что H/Γ компактно или имеет конечный объем (в метрике Пуанкаре), H/Γ — алгебраич. кривая, а $K(\Gamma)$ — также поле всех алгебраич. функций на M/Γ. Род g этой кривой можно определить, построив для группы Γ фундаментальную область в виде многоугольника на верхней полуплоскости H (рассматриваемой как плоскость Лобачевского). Основной способ построения А. ф. в этой ситуации состоит в рассмотрении отношения двух *автоморфных форм* одинакового достаточно большого веса. Аналогом этой конструкции для эллиптич. функций является представление их в виде отношения тета-функций.

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, кол. 79–81; [2] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.–Л., 1936; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье, пер. с англ., М., 1967. *А. Н. Андрианов, А. Н. Паршин.*

АВТОМОРФНОСТИ УСЛОВИЕ — см. *Модулярная форма.*

АВТОНОМНАЯ ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА — см. *Гамильтонова система.*

АДАМАРА — ПЕРРОНА ТЕОРЕМА об устойчивом многообразии: дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+\varepsilon g(x,t),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $g(x,\ t)\in\mathbb{C}^1$, $g(0,\ t)=0$, нормы матрицы $A(t)$ и вектор-функций $g(x,\ t)$, $g_x(x,\ t)$ равномерно ограничены при $t\geqslant 0$; предполагается, что линейная система $\dot{x}=A(t)x$ обладает свойством экспоненциальной дихотомии решений; тогда при малом ε в нек-рой окрестности U нуля существует такое гладкое многообразие V, что решения $x(t)$ с $x(0)\in V$ остаются в V и $x(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ с экспоненциальной скоростью (более того, все такие решения начинаются на V). Эта теорема разными методами была доказана Ж. Адамаром [1] и О. Перроном [2]. Она используется для построения локальных устойчивых многообразий (см. *Гиперболичность, Центральное многообразие*).

Лит.: [1] Hadamard J., «Bull. Soc. math. France», 1901, t. 29, p. 224–28; [2] Perron O., «Math. Z.», 1930, Bd 32, S. 703–28. *Я. Б. Песин.*

АДИАБАТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ ЗВУКА — см. *Звуковые волны.*

АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ – теория квантовой механики, основанная на разложении решений уравнения Шредингера в ряд по некоторому малому параметру, допускающему приближенное разделение «быстрых» и «медленных» переменных динамической системы. В частности, в [2] впервые использована А. т. в. для приближенного решения нестационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом, медленно изменяющимся во времени; в *Борна – Оппенгеймера методе* (см. [3]) малым параметром является отношение массы электрона к массе ядра и А. т. в. позволяет приближенно разделить электронное, колебательное и вращательное движения в молекулах; в физике атомно-молекулярных столкновений адиабатичность определяется малой скоростью относительного движения атомов или молекул (см. [4]); А. т. в. в задаче о сильном взаимодействии частицы с квантовым полем эквивалентна разложению по обратным степеням константы связи (см. [5]); при обосновании модели независимых частиц в теории ферми-жидкости также используется А. т. в. (см. [6]).

Адиабатич. приближение в квантовой теории восходит к адиабатич. теореме Эренфеста (см. [1]), к-рая была доказана им в рамках классич. механики, а затем использована при обосновании условий квантования Бора – Зоммерфельда. Физич. содержание адиабатич. теоремы связано с ответом на вопрос о преобразовании спектра состояний гамильтониана при его бесконечно медленном изменении под влиянием внешнего воздействия. Пусть гамильтониан системы изменяется непрерывным образом от нек-рого начального $\hat{H}_0$ в момент времени t_0 до конечного $\hat{H}_1$ в момент t_1. Если

$$T = t_1 - t_0 \quad \text{и} \quad s = \frac{t-t_0}{T}$$

– безразмерная переменная, то

$$\hat{H}(0) = \hat{H}_0; \quad \hat{H}(1) = \hat{H}_1; \quad \hat{H}(s) = \hat{H}(t).$$

Эволюция системы от $s=0$ до $s=1$ зависит теперь от параметра T, к-рый определяет скорость перехода от $\hat{H}_0$ и $\hat{H}_1$.

Адиабатич. базис определяется (см. [1]) набором собственных функций $\{\Psi_i\}$ и собственных значений $\{\varepsilon_i\}$, найденных при решении стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}(s)\Psi_i(s) = \varepsilon_i(s)\Psi_i(s),$$

в к-ром s рассматривается как параметр и предполагается, что $\varepsilon_i(s)$ и $\Psi_i(s)$ являются непрерывными функциями s.

Еще одним условием применимости адиабатич. теоремы является отсутствие «пересечения» уровней, то есть на всем интервале $0 \leqslant s \leqslant 1$, $\varepsilon_i(s) \neq \varepsilon_j(s)$, каковы бы ни были $i \neq j$.

При выполнении указанных условий из адиабатич. теоремы вытекает следующее предельное соотношение:

$$\lim_{T\to\infty}\left[\Phi_i(s) - \Psi_i(s)\exp\left(-\frac{iT}{\hbar}\int_0^s \varepsilon_i(u)\,du\right)\right] = 0,$$

где $\Phi_i(s)$ – точное решение нестационарного уравнения Шредингера

$$\frac{i\hbar}{T}\frac{\partial\Phi_i(s)}{\partial s} = \hat{H}(s)\Phi_i(s)$$

с начальным условием $\Phi_i(0) = \Psi_i(0)$. Этот результат означает, что при бесконечно медленном изменении гамильтониана система, первоначально находившаяся в состоянии с энергией $\varepsilon_i(0)$, при дальнейшей эволюции остается в том же состоянии несмотря на то, что само состояние и его энергия могут изменяться с течением времени. В то же время форма временного уравнения Шредингера указывает на асимптотич. характер А. т. в., поскольку параметр соответствующего разложения содержится в слагаемом со старшей производной.

Приведенная теорема лежит в основе предположения об адиабатич. включении взаимодействия, к-рое используется при конкретных расчетах сечений рассеяния частиц в квантовой теории поля. В этом случае предполагается, что в начальном ($|\text{in}\rangle$) состоянии, к-рому отвечает время $t \to -\infty$, частицы находятся далеко друг от друга и взаимодействие между ними полностью отсутствует. По мере сближения частиц взаимодействие бесконечно медленно «включается», достигает наибольшей силы при максимальном сближении частиц, а затем так же медленно «выключается», когда частицы разлетаются после рассеяния, и система переходит в конечное ($|\text{out}\rangle$) состояние при $t \to +\infty$.

Следует, однако, учитывать, что после проведения процедуры перенормировки при построении матрицы рассеяния в современной квантовой теории поля частицы в начальном и конечном состояниях описываются не свободным гамильтонианом, то есть гамильтонианом без взаимодействия, а представляют собой так наз. «одетые» частицы, физич. характеристики к-рых (массы, заряды и др.) зависят от взаимодействия частиц с вакуумом, как с физич. средой. Тогда адиабатич. включение относится только к взаимодействию между «одетыми» частицами.

При конечном, но достаточно большом значении T основной результат адиабатич. теоремы можно рассматривать как асимптотич. приближение для волновой функции одного из возможных состояний системы в произвольный момент времени:

$$\Phi_i(s) = \Psi_i(s)\exp\left(-i\frac{T}{\hbar}\int_0^s \varepsilon_i(u)\,du\right) + O(\xi),$$

причем точность приближения определяется адиабатич. параметром

$$\xi = \left[T\{\omega_{ij}\}_{\min}\right]^{-1},$$

где $\{\omega_{ij}\}_{\min}$ – наименьшее из возможных значений боровских частот переходов:

$$\omega_{ij}(s) = \frac{\varepsilon_i(s)-\varepsilon_j(s)}{\hbar}.$$

Таким образом, А. т. в. представляет собой способ вычисления точного вектора состояния системы $\Phi_i(s)$ в виде ряда по степеням параметра ξ, физич. смысл к-рого зависит от конкретных свойств рассматриваемого процесса взаимодействия и не обязательно связан с адиабатичностью включения внешнего поля. Так, напр., при медленных столкновениях атомно-молекулярных систем ξ определяется отношением v/v_0 (см. [4]), v – относительная скорость центров масс систем, v_0 – характерная скорость электронов в атомах.

Для вычисления следующих членов ряда А. т. в. функция $\Phi_i(s)$ представляется в виде разложения по адиабатич. базису:

$$\Phi_i(s) = \sum_j C_j^{(i)}(s)\Psi_j(s)\exp\left(-i\frac{T}{\hbar}\int_0^s \varepsilon_j(u)\,du\right)$$

с начальным условием для коэффициентов разложения

$$C_j^{(i)}(0) = \delta_{ij}.$$

В произвольный момент времени коэффициенты $C_j^{(i)}(s)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dC_j^{(i)}(s)}{ds} = \sum_{k\neq j} w_{jk}(s)\exp\left(\frac{iT}{\hbar}\int_0^s\left[\varepsilon_j(u)-\varepsilon_k(u)\right]du\right)C_k^{(i)}(s).$$

Матрица неадиабатич. переходов w_{jk} может быть представлена в двух эквивалентных формах

$$w_{jk}(s) = \left\langle\Psi_j(s)\left|\frac{d}{ds}\right|\Psi_k(s)\right\rangle = \frac{\left\langle\Psi_j(s)\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial s}\right|\Psi_k(s)\right\rangle}{\left[\varepsilon_k(s)-\varepsilon_j(s)\right]},$$

где усреднение $\langle\cdot\rangle$ выполняется по всем, кроме времени, динамич. переменным системы.

Энергетич. уровни $\varepsilon_i(s)$, рассматриваемые как функции времени, называются адиабатическими термами. В условиях применимости А. т. в. ($\xi \ll 1$) вероятности переходов между ними можно найти с помощью последовательных итераций системы уравнений для $C_j^{(i)}$. В частности, в первом порядке А. т. в. амплитуда перехода с начального терма i в конечное состояние j за все время взаимодействия определяется формулой

$$A_{ij} = C_j^{(i)}(1) = \int_0^1 w_{ji}(s) \exp\left[\frac{iT}{\hbar}\int_0^s \Delta\varepsilon_{ij}(u)\,du\right]ds,$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}(u) = \varepsilon_j(u) - \varepsilon_i(u).$$

При $\xi \ll 1$ интеграл содержит быстроосциллирующую функцию и его можно вычислить с рассматриваемой точностью методом стационарной фазы, что приводит к следующему выражению для вероятности перехода:

$$P_{ij} = |A_{ij}|^2 \simeq \frac{2\pi\hbar}{T}|w_{ij}(s_0)|^2\left|\frac{d}{ds}\Delta\varepsilon_{ij}(s)\right|_{s_0}^{-1}.$$

Здесь s_0 – точка стационарной фазы, к-рая определяется из условия «квазипересечения» термов $\varepsilon_i(s_0) = \varepsilon_j(s_0)$. В общем случае решение этого уравнения существует при комплексном значении $s_0 = s_0' + is_0''$, и расчет вероятности перехода требует специального рассмотрения эволюции системы вблизи точки s_0, поскольку приведенная выше функция $w_{ij}(s)$, вообще говоря, имеет особенность в этой точке. Вблизи s_0 А. т. в. необходимо модифицировать по аналогии с обычной квантовомеханич. теорией возмущений при вырождении уровней невозмущенной задачи, используя «правильную» линейную комбинацию адиабатич. функций (см. [7]):

$$\Phi(s) \simeq a_1\varphi_1(s) + a_2\varphi_2(s).$$

В этом выражении для удобства введены такие комбинации невозмущенных функций, соответствующих пересекающимся термам, к-рые удовлетворяют следующим условиям

$$\langle\varphi_1^2\rangle = \langle\varphi_2^2\rangle = 0; \quad \langle\varphi_1\varphi_2\rangle = 1,$$

что всегда можно сделать при определенном выборе коэффициентов в выражениях

$$\varphi_{1,2}(s) = C_{1,2}^{(i)}(s)\Psi_i(s) + C_{1,2}^{(j)}(s)\Psi_j(s).$$

Тогда уравнение Шредингера для определения термов вблизи точки s_0 сводится к системе уравнений для коэффициентов a_1, a_2:

$$H_{11}(s)a_1 + H_{12}(s)a_2 = \varepsilon a_2,$$

$$H_{12}(s)a_1 + H_{22}(s)a_2 = \varepsilon a_1,$$

то есть

$$\varepsilon_{1,2}(s) = H_{12} \pm \sqrt{H_{11}H_{22}}; \quad a_2/a_1 = \pm\sqrt{H_{11}/H_{12}},$$

где

$$H_{\alpha\beta}(s) = \langle\varphi_\alpha\hat{H}\varphi_\beta\rangle, \ \alpha, \beta = 1, 2.$$

Так как, по предположению, $\varepsilon_1(s_0) = \varepsilon_2(s_0)$, то один из матричных элементов (для определенности H_{11}) обращается в нуль в этой точке, причем в силу регулярности гамильтониана как функции времени при $s \to s_0$

$$H_{11}(s) \simeq \text{const}\,(s - s_0).$$

Следовательно, пересечению термов соответствует точка ветвления в комплексной плоскости переменной s

$$\varepsilon_{1,2} \simeq \varepsilon(s_0) \pm \text{const}\sqrt{s - s_0},$$

причем $\varepsilon_1(s)$ является аналитич. продолжением функции $\varepsilon_2(s)$ при обходе вокруг точки s_0.

Задача вычисления вероятности перехода между термами при «квазипересечении» эквивалентна задаче о расчете надбарьерного отражения в квазиклассич. приближении (см. [7]). В частности, вероятность того, что система, находившаяся на терме ε_i при $s = 0$, перейдет на терм ε_j при $s = 1$, определяется формулой

$$P_{ij} = \exp\left\{-\frac{2T}{\hbar}\left|\text{Im}\int_{\text{Re}\,s_0}^{s_0}\left[\varepsilon_i(u) - \varepsilon_j(u)\right]du\right|\right\} \equiv \exp\left\{-\frac{2T}{\hbar}\Delta\right\},$$

причем параметр Месси Δ вычисляется по контуру, проходящему вдоль линии разреза, проведенного через точку s_0.

Более сложный случай N-уровнего пересечения термов также можно исследовать в рамках А. т. в. (см. [4]). Специального рассмотрения требует применение А. т. в. в случае, когда адиабатич. термы в нек-рой области параметров гамильтониана переходят в непрерывный спектр, как, напр., при описании процесса ионизации в медленных столкновениях атомов (см. [8]). В этом случае удобно (см. [4]) осуществить замену переменных s на ε с помощью функций $s_i(\varepsilon)$, обратных по отношению к адиабатич. термам $\varepsilon_i(s)$. Тогда с помощью аналитич. продолжения адиабатич. функций $\Psi_i[s_i(\varepsilon)]$ в комплексную плоскость переменной ε удается в рамках А. т. в. вычислить вероятности переходов системы в состояния непрерывного спектра в виде разложения по параметру

$$\xi = \frac{1}{T}\left|\frac{\partial s}{\partial\varepsilon}\right|.$$

Лит.: [1] Эренфест П., Относительность. Кванты. Статистика, М., 1974; [2] Born M., Fock V., «Z. Phys.», 1928, Bd 51, S. 165; [3] Born M., Oppenheimer R., «Ann. Phys.», 1927, Bd 84, S. 457; [4] Соловьев Е. А., «Успехи физических наук», 1989, т. 157, вып. 3, с. 437; [5] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 2, Киев, 1970; [6] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Статистическая физика, ч. 2, М., 1978; [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [8] Никитин Е. Е., Уманский С. Я., Неадиабатические переходы при медленных атомных столкновениях, М., 1979.

И. Д. Феранчук.

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ – физическая величина, остающаяся практически неизменной при медленном (адиабатическом), но не обязательно малом, изменении внешних условий, в которых находится система, либо самих характеристик системы (внутреннее состояние, масса, электрический заряд и пр.). Отмеченное изменение должно происходить за времена (τ), значительно превышающие характерные периоды движения системы (T).

В классич. механике А. и. являются переменные *действия*

$$I_k = \oint p_k\,dq_k,$$

где p_k – обобщенный импульс, q_k – обобщенная координата, интегрирование производится по периоду (или квазипериоду).

Для гармонич. осциллятора А. и. является отношение его энергии к частоте. Характерно, что при адиабатич. изменении условий становятся связанными между собой физич. величины, к-рые вообще независимы, напр. амплитуда колебаний маятника и его длина.

Физически важным примером А. и. служит магнитный момент, создаваемый током заряженной частицы при ее движении в медленно меняющемся (в пространстве или во времени) магнитном поле: $p_\perp^2/H = \text{const}$, где $p_\perp$ – проекция импульса заряженной частицы на плоскость, перпендикулярную направлению магнитного поля ($\boldsymbol{H}$) в данной точке пространства.

На сохранении А. и. основано так наз. дрейфовое приближение, широко используемое в физике плазмы, а также действие «магнитных пробок» и основанных на них адиабатич. ловушек – пробкотронов, применяемых в исследованиях по удержанию горячей плазмы для целей управляемого термоядерного синтеза и осуществляющихся, напр., в магнитном поле Земли.

Количество А. и. не превышает числа степеней свободы, по к-рым движение системы финитно (ограничено в пространстве). Так, в магнитных ловушках, кроме магнитного момента, может сохраняться продольный А. и., соответствующий движению вдоль магнитных силовых линий:

$$\int_a^b p_\parallel dl,$$

где $p_\parallel$ – проекция импульса частицы на направление $\boldsymbol{H}$, а интеграл берется вдоль траектории между точками поворота частицы.

Расчеты, проводимые в небесной механике, а также исследования длительности удержания заряженных частиц в адиабатич. ловушках вызвали вопрос о точности, с к-рой сохраняются А. и. Строго говоря, А. и. может изменяться в значительных пределах, если во временно́й зависимости внешних условий присутствуют частоты, кратные частотам самой системы (*параметрический резонанс*). Если не рассматривать такие ситуации, то А. и. сохраняется с точностью большей, чем любая степень малого параметра T/τ.

Интерес к А. и. сильно возрос в годы установления понятий квантовой механики. В квантовой механике А. и. являются те из квантовых чисел (n), для к-рых частоты $\omega=(\mathscr{E}_{n+1}-\mathscr{E}_n)\hbar$ (где $\mathscr{E}$ — энергия) удовлетворяют условию адиабатичности ($\omega\tau\gg 1$). Иными словами, квантовая система, находящаяся под адиабатич. воздействием, остается в одном и том же состоянии (хотя само состояние меняется, адиабатически следуя за изменением внешнего воздействия). Все переходы такой системы из одного состояния в другое называются неадиабатическими переходами и связаны с пересечением соответствующих уровней энергии ($\omega=0$).

Лит.: [1] Шифф Л., Квантовая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1959; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 3 изд., М., 1973; [3] Нортроп Т., Адиабатическая теория движения заряженных частиц, пер. с англ., М., 1967; [4] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979.

А. М. Дыхне.

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ТЕРМ — см. *Адиабатическая теория возмущений.*

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ в теории рассеяния — приближение, основанное на существовании в задаче переменных двух типов, имеющих различный масштаб изменения. В задаче рассеяния — это кинематич. переменные, описывающие движение тяжелых и легких частиц. Обычно А. п. используется в задаче рассеяния для системы, состоящей из легкой частицы массы m и двух тяжелых частиц массы M. Решение уравнения Шредингера

$$\Big\{-\frac{1}{M}\Delta_R-\frac{1}{\mu}\Delta_x+V_1\Big(x-\frac{R}{2}\Big)+ \\ +V_2\Big(x+\frac{R}{2}\Big)+V_3(R)-E\Big\}\Psi(x,R)=0,$$

где $\mu=2mM(2M+m)^{-1}$, R — относительная координата тяжелых частиц массы M, x — координата частицы массы m относительно центра масс пары тяжелых частиц, представляется в виде

$$\Psi(x,R)=\sum_n\varphi_n(x,R)f_n(R);$$

здесь $\varphi_n(x,R)$ — собственные функции задачи двух центров:

$$\Big\{-\frac{1}{\mu}\Delta_x+V_1\Big(x-\frac{R}{2}\Big)+V_2\Big(x+\frac{R}{2}\Big)\Big\}\varphi_n(x,R)=\varepsilon_n(R)\varphi_n(x,R).$$

Для функций $f_n(R)$ получается система связанных уравнений

$$\Big\{-\frac{1}{M}\Delta_R+V_3(R)+\varepsilon_n(R)-E\Big\}f_n(R)-\sum_m C_{nm}(R)f_m(R)=0, \quad (1)$$

где

$$C_{nm}(R)=\frac{1}{M}\{(\nabla_R\varphi_n,\varphi_m)\nabla_R+(\nabla_R\varphi_n,\varphi_m)\},$$

с асимптотич. условиями

$$f_n(R)=\exp\{ik_nR\}\delta_{nn_0}+A_{nn_0}(\hat{R},k_n)\frac{\exp\{i|k_n||R|\}}{|R|}(1+o(1)), \quad (2)$$

где

$$k_n^2=M[E-\varepsilon_n(\infty)], \quad \varepsilon_n(\infty)=\lim_{|R|\to\infty}\varepsilon_n(R).$$

Решение системы уравнений (1) по теории возмущений относительно операторов c_{nm}, имеющих порядок $O\left(\frac{1}{M}\right)$, называется асимптотическим приближением. Первое приближение, соответствующее диагональному приближению в системе (1), то есть переходу от матрицы $c_{nm}(R)$ к матрице $c_{nn}(R)\delta_{mn}$, называется приближением Борна — Оппенгеймера.

Лит.: [1] Мотт Н., Месси Г., Теория атомных столкновений, пер. с англ., М., 1969; [2] Ву Т. Ю., Омура Т., Квантовая теория рассеяния, пер. с англ., М., 1969.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, метод Борна—Оппенгеймера,— метод нахождения квазиклассических асимптотик для уравнений, в которых часть производных по медленным переменным $x=(x_1,\dots,x_n)$ входит с малым параметром h, а другая часть по быстрым переменным $y=(y_1,\dots,y_e)$ без параметра (уравнения с операторнозначным символом):

$$\hat{L}\psi\equiv L\Big(-ih\frac{\partial}{\partial x},x,-i\frac{\partial}{\partial y},y,h\Big)\psi=0. \quad (1)$$

Пусть $\lambda(p,x)$ — изолированное и имеющее постоянную при каждом (x,p) кратность m собственное значение оператора

$$\mathscr{L}(p,x)=L\Big(p,x,-i\frac{\partial}{\partial y},y,0\Big)$$

(операторнозначного символа) в подходящем гильбертовом пространстве $H\left(\mathbb{R}^m_y\right)$; $u_1(x,p,y),\dots,u_m(x,p,y)$ — линейно независимые собственные функции, отвечающие λ, $\|u_j\|_H=1$; λ и u_j гладко зависят от своих аргументов. Тогда при отсутствии фокальных точек А. п. дает асимптотич. решения уравнений (1) в виде:

$$\Psi=e^{iS(x)/h}A(x)(\varphi_1(x)u_1+\dots+\varphi_m(x)u_m). \quad (2)$$

Здесь решение S уравнения Гамильтона—Якоби $\lambda(\nabla S,x)=0$ и $A(x)$ в (2) выражаются через траектории гамильтоновой системы $\dot{p}=-\lambda_x$, $\dot{x}=\lambda_p$, функции $(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))$ определяются из линейной обыкновенной системы дифференциальных уравнений. Дополнительные (начальные или краевые) условия для указанных систем индуцируются дополнительными к (1) условиями. При наличии фокальных точек асимптотика решения, обобщающая (2), дается с помощью канонич. оператора Маслова (см. [2], [3]). А. п. используется в различных эволюционных и спектральных задачах квантовой механики и химии (квантовой теории молекул), физики твердого тела (электронные волны в кристаллах), гидродинамики (внутренние волны в океане) и т. д. (см., напр., [4]—[6]). В ряде задач в асимптотике (2) фаза S может быть комплекснозначной, $\operatorname{Im}S\geqslant 0$. Напр., в «осцилляторном» приближении

$$S=\langle P,x-X\rangle+\langle x-X,Q(x-X)\rangle/2,$$

где (P,X) — устойчивая в линейном приближении точка покоя $\lambda(p,x)$, $Q=(n\times n)$-симметричная матрица с $\operatorname{Im}Q>0$ (именно к таким задачам впервые был применен *Борна—Оппенгеймера метод* (см. [1])). При нек-рых дополнительных предположениях на λ главный член асимптотики имеет вид (2) и в том случае, когда $\lambda(p,x)$ меняет кратность в нек-рых точках (p,x) (см. [7]).

Если спектр оператора $\mathscr{L}(p,x)$ имеет существенно непрерывную компоненту, то роль термов λ могут играть комплексные полюса резольвенты оператора $\mathscr{L}$ (квазистационарные состояния — теория распада тяжелых ядер Гамова, см. [8]) или граничные точки непрерывной компоненты спектра оператора $\mathscr{L}$ (см. *Короткие волны* в быстроменяющихся средах); аккуратное математич. исследование здесь еще далеко от завершения.

Лит.: [1] Борн М., Лекции по атомной механике, пер. с нем., т. 1, Харьков—Киев, 1934; [2] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [3] его же, Асимптотические методы и теория возмущений, М., 1988; [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [5] их же, Статистическая физика, 3 изд., ч. 1, М., 1976; ч. 2, М., 1978; [6] Митропольский Ю. З., Динамика внутренних гравитационных волн в океане, Л., 1981; [7] Кучеренко В. В., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1974, т. 38, № 3, с. 625—62; [8] Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М., Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, 2 изд., М., 1971.

С. Ю. Доброхотов.

АДЛЕРА–ВАЙСБЕРГЕРА СООТНОШЕНИЕ – см. *Токов алгебра.*

АДРОН – элементарная или составная частица, принимающая участие в сильных, а также слабых и электромагнитных взаимодействиях. А. классифицируются в соответствии с их квантовыми числами: массой, спином, внутренней четностью, изоспином, странностью и др. Адроны с целым спином называются мезонами (π, K, η, ρ и др.), а с полуцелым спином – барионами (p, n, Λ и др.). К настоящему времени открыты сотни адронных состояний, многие из к-рых представляют собой короткоживущие резонансы (со временем жизни порядка 10^{-23} сек). Спектр масс известных А. простирается от 140 МэВ (π-мезоны) до ~10 МэВ (γ-частицы). Сильные взаимодействия А. и их статич. свойства удовлетворяют ряду приближенных симметрий: изоспиновая $SU(2)$, адронная $SU(3)$, киральные $SU(2)_L \times SU(2)_R$ и $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Большое число свойств А. и их взаимодействий объясняется *квантовой хромодинамикой*, согласно к-рой А. состоят из *кварков*, обладающих *цветом* и *ароматом*, а взаимодействие между А. происходит за счет обмена безмассовыми *глюонами* – квантами $SU(3)^c$ калибровочного поля. Однако ряд проблем не получил еще своего окончательного решения в рамках квантовой хромодинамики, напр. проблема невылета (конфайнмента) кварков на расстояниях порядка 10^{-13} см.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., в кн.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц, Киев, 1967, с. 5–112; [2] Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н., «Физика элементарных частиц и атомных ядер», 1971, т. 2, с. 5–32; [3] там же, 1982, т. 13, с. 542–612. *А. Ю. Игнатьев.*

АДРОННЫЙ ТОК – см. *Ток.*

АКСИАЛЬНАЯ АНОМАЛИЯ – см. *Аномалия.*

АКСИАЛЬНАЯ КАЛИБРОВКА – *калибровочное условие* вида $A_3 = 0$, или в более общем случае $(n_\mu, A_\mu) = 0$, где n_μ – единичный пространственноподобный вектор. В А. к. эффективное действие не содержит *Фаддеева–Попова духов*, что упрощает вид взаимодействия. Ее основным недостатком является отсутствие явной релятивистской инвариантности. *А. А. Славнов.*

АКСИАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ – см. *Отбора правило.*

АКСИАЛЬНЫЙ ВЕКТОР, псевдовектор,– величина, преобразующаяся как обычный (полярный) *вектор* при вращениях в евклидовом или псевдоевклидовом пространстве и (в отличие от обычного вектора) не меняющая знака при отражении координатных осей. Простейший пример А. в. в трехмерном пространстве – векторное произведение обычных векторов; напр., вектор момента импульса $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}$, где вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ – обычный вектор. *В. П. Павлов.*

АКСИАЛЬНЫЙ ТОК – см. *Ток.*

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – *квантовая теория поля*, построенная по образцу аксиоматической теории, то есть таким образом, чтобы все ее результаты выступали как строгие следствия единой системы фундаментальных физических предположений – аксиом.

Возможность представления квантовой теории поля в такой форме требует определенных условий. В отличие от аксиоматич. теорий в математике, физич. теория не может сразу строиться в виде аксиоматич. формализма. Если в математике система объектов и система аксиом для них прямо берутся в качестве исходных данных теории, то в физике исходят из определенного запаса экспериментальных фактов и нек-рой совокупности закономерностей, подмеченных в этих фактах. Неизбежным образом различные участки изучаемой области явлений (релятивистских явлений в микромире в случае квантовой теории поля) сначала описываются различными теоретич. схемами, к-рые часто не вполне согласуются между собой и, кроме того, как правило, являются лишь приближенными, а не точными. На таком этапе физич. теория еще не подготовлена к представлению в строгой аксиоматич. форме. Лишь когда надежно установлены главные закономерности, управляющие данной областью явлений, выяснена степень их общности и точные закономерности отделены от приближенных, становится целесообразным выразить их в виде системы фундаментальных аксиом и представить основные результаты теории как строгие следствия из этой системы аксиом. Таким образом, «если в математике мы аксиоматизируем, чтобы понять, то в физике нам нужно сначала понять, чтобы аксиоматизировать» (Ю. Вигнер).

Эти особенности аксиоматич. метода в физике отразились и в формировании А. к. т. п. Оно происходило в середине 50-х гг., когда после создания теории перенормировок возникли надежды на последовательность квантовополевого описания хотя бы на уровне теории возмущений, и шло одновременно в нескольких направлениях. В каждом из них построение аксиоматич. схемы включает в себя те же основные этапы. Сначала выбираются исходные физич. объекты, в терминах к-рых и идет дальнейшее развитие теории. Затем находится (а иногда и строится заново) математич. аппарат, пригодный для описания объектов. Последние два этапа – формулировка системы аксиом и вывод следствий из них.

Физич. содержание, вносимое в теорию ее аксиомами, практически одинаково для всех направлений А. к. т. п. По существу системы аксиом – это одни и те же строго сформулированные предположения, из к-рых исходит традиционная квантовая теория поля. Прежде всего сюда входит аксиома релятивистской инвариантности: в соответствии с принципом относительности Эйнштейна, все физич. законы не должны зависеть от выбора начала отсчета, направления осей координат и времени и от равномерного прямолинейного (поступательного) движения системы отсчета. Аксиома локальности (причинности) требует, чтобы какое-либо событие, происшедшее в физич. системе, могло повлиять на поведение системы лишь в моменты времени, следующие за этим событием. Наконец, аксиома спектральности утверждает, что энергии всех допустимых состояний физич. системы (ее спектр энергий) должны быть положительны. Эта аксиома отражает фундаментальный факт положительности масс частиц, подтверждаемый всей физич. практикой. В конкретных вариантах к этим фундаментальным принципам добавляют также в качестве аксиом дополнительные требования, прежде всего положительность нормы векторов, представляющих физич. состояния. Отличия между разными вариантами А. к. т. п. определяются выбором исходных физич. величин. Возможности этого выбора весьма разнообразны, однако можно выделить три основных варианта, к к-рым сводятся все остальные.

В аксиоматическом подходе Боголюбова (предложен в 1955 Н. Н. Боголюбовым) в качестве основного физич. объекта выбрана *рассеяния матрица*, состоящая из набора величин (амплитуд процессов), определяющих вероятности всех возможных переходов системы из состояний до начала взаимодействия в состояния после его окончания (такие состояния называются асимптотическими).

В аксиоматическом подходе Уайтмена [предложен в 1956 А. С. Уайтменом (A. S. Wightman)] исходным физич. объектом служит взаимодействующее квантованное поле (поле, описывающее взаимодействия). В принципе – это ненаблюдаемая величина, являющаяся обобщением развитой еще при зарождении квантовой теории поля концепции квантованного поля свободных частиц.

В алгебраическом подходе [развит в 1957–64 Р. Хаагом (R. Haag), Х. Араки (H. Araki), Д. Кастлером (D. Kastler)] фундаментальным объектом является совокупность всех наблюдаемых – набор всех физич. величин, к-рые могут быть непосредственно измерены в эксперименте (или последовательности экспериментов). Алгебраич. подход – наиболее широкий и общий из всех направлений А. к. т. п., поскольку в нем не налагается никаких ограничений на то, какими физич. характеристиками может обладать описываемая система (тем самым в форме теории локальных наблюдаемых может быть представлена, вообще гово-

ря, любая физич. теория, как квантовая, так и классическая). Аксиомы Хаага – Араки формулируются для совокупности локальных наблюдаемых, к-рые можно определить с помощью измерений в фиксированной ограниченной области пространства-времени. Для элементов такой совокупности можно ввести алгебраич. операции сложения, умножения и умножения на число, в связи с чем ее называют алгеброй локальных наблюдаемых, или локальной алгеброй (данной области пространства-времени). Концепция локальных наблюдаемых и правила действий с ними фактически обобщают формализм операторов обычной квантовой механики и вполне естественны для квантовой физики. Алгебраич. подход эффективен при изучении наиболее общих свойств квантовой теории поля. Так, в его рамках дано простое и компактное описание свойств причинности в релятивистской квантовой теории, найдены строгие критерии эквивалентности физич. теорий и выяснено, при каких дополнительных условиях теория локальных наблюдаемых включает в себя квантованные поля.

Все перечисленные подходы приспособлены, в первую очередь, для описания квантовых систем, не включающих частиц нулевой массы. Сюда относится прежде всего теория сильного взаимодействия в ее традиционной форме. Реалистич. теории с безмассовыми частицами (и наиболее важная из них – квантовая электродинамика), как правило, принадлежат к разряду теорий калибровочных полей. Для таких теорий строго доказаны теоремы запрета, согласно к-рым принципы локальности и релятивистской инвариантности несовместимы с постулатом положительности нормы в пространстве физич. состояний. Поэтому здесь возникает необходимость существенной модификации схемы А. к. т. п. Попытки построения подобной модификации связываются с использованием пространств состояний, допускающих отрицательную норму для векторов состояний (пространств с индефинитной метрикой).

Подход Уайтмена – наиболее разработанное и изученное из направлений А. к. т. п., давшее самый большой вклад в ее развитие. Именно на его основе полностью выяснено, каким математич. аппаратом следует пользоваться для описания релятивистской квантовой системы с помощью взаимодействующего квантового поля. Этот аппарат позволил строго вывести из аксиом А. к. т. п. нетривиальные физич. следствия. Первым из них явилось обобщение *CPT-теоремы*, полученное Р. Йостом (R. Jost). *CPT*-теорема Йоста раскрывает глубокую связь причинных свойств теории со свойствами симметрии пространства-времени и допускает непосредственную проверку на опыте. Следующее крупное достижение подхода Уайтмена – построение теории рассеяния Хаага–Рюэля [Р. Хааг, Д. Рюэль (D. Ruelle), 1958–62], установившей, что в схеме Уайтмена, исходящей из понятия поля, а не частицы, асимптотич. состояния поля обладают свойствами частиц. Тем самым была успешно решена проблема корпускулярной интерпретации полевой теории, то есть доказано, что теория поля одновременно способна служить и теорией частиц.

Аксиоматич. подход Боголюбова, первый по времени появления, оказал наибольшее влияние на развитие квантовой теории поля и вообще теории элементарных частиц (в частности, тем, что выработал понятие об амплитуде процесса в его различных каналах как о единой аналитич. функции своих переменных). Хотя в систему его аксиом входят дополнительные предположения (по-видимому, вытекающие из основных аксиом), оправданием таких допущений служит то, что с их помощью существенно сокращается путь к результатам, к-рые могут быть непосредственно проверены на опыте. Результаты такого рода в А. к. т. п. немногочисленны, но обладают особой ценностью, поскольку могут служить критериями справедливости основ квантовой теории поля. Значительная их часть получена в рамках аксиоматики Боголюбова. Прежде всего к ним относится доказательство дисперсионных соотношений в квантовой теории поля (Н. Н. Боголюбов, 1956; см. *Дисперсионных соотношений метод*). Использование дисперсионных соотношений развилось в широкий метод изучения взаимодействия элементарных частиц, являющийся одним из основных рабочих средств квантовой теории поля. Другой принципиальный результат – доказательство аналитичности амплитуды рассеяния в нек-ром эллипсе в комплексной плоскости угла рассеяния [Х. Леман (H. Lehmann), 1958; А. Мартен (A. Martin), 1966]. Далее, для произвольных стабильных масс доказана аналитичность амплитуды (при фиксированной передаче импульса) вне окрестности начала координат разрезанной комплексной плоскости инвариантной энергии [Ж. Брос (J. Bros), В. Глазер (V. Glaser), А. Эпштейн (H. Epstein), 1965]. Последние результаты приводят к многочисленным, непосредственно проверяемым следствиям А. к. т. п.

На рубеже 60–70-х гг. принципиальные проблемы этой традиционной А. к. т. п. были в основном решены. Однако в то же время наметились новые проблемы для квантовой теории поля в целом, связанные с обнаружением новых особенностей процессов взаимодействия элементарных частиц. Большую, если не главную роль в них играют структуры, недостаточно учитывавшиеся или совсем не учитывавшиеся традиционной квантовой теорией поля: правила суперотбора различных типов, калибровочные поля, фазовые переходы и топологич. заряды. Аксиоматич. подход пока не занимает в их изучении видного места. Но и на этом новом этапе квантовой теории поля фундаментальные аксиомы, лежащие в основе прежней А. к. т. п., и ее результаты сохраняют силу и ценность для современных исследований. Новая А. к. т. п. должна быть не отменой, а обогащением прежней, включив в себя положения, к-рые отражают специфику новой структуры (что, возможно, потребует и перехода на новый математич. язык). К этому направлению относятся нек-рые результаты конструктивной квантовой теории поля, поиски строгого аппарата для теории калибровочных полей, алгебраич. теория правил суперотбора (см. *Алгебраический подход*). Наиболее актуальная задача в данный период – создание аксиоматич. формулировки калибровочной квантовой теории поля.

Лит.: [1] Йост Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [2] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [3] Общие принципы квантовой теории поля и их следствия, М., 1977.

В. П. Павлов, С. С. Хоружий.

АКСОИД – см. *Винтовое движение, Вращательное движение.*

АКТИВНОСТЬ – термодинамический параметр, играющий роль эффективной концентрации. Термин «активность» был введен в начале 20 в. Г. Льюисом (G. Lewis). А. характеризует различие свойств идеальных и реальных систем частиц (газов, растворов). Так, зависимость химич. потенциала μ от концентрации для идеального газа (раствора) имеет вид:

$$\mu_{\text{ид}}(c,\beta) = \mu(c_0,\beta) + \beta^{-1}\ln\frac{c}{c_0}, \qquad (1)$$

где c, c_0 – концентрации, $\beta = (kT)^{-1}$ – обратная температура; А. (объема a) определяется так, чтобы зависимость химич. потенциала от концентрации для реальных газов (растворов) имела вид, аналогичный (1):

$$\mu(c,\beta) = \mu(c_0,\beta) + \beta^{-1}\ln\frac{a(c,\beta)}{c_0},$$

и, следовательно (при достаточно малой c_0),

$$a(c,\beta) = c_0 \exp\beta[\mu(c,\beta) - \mu(c_0,\beta)].$$

А. имеет размерность концентрации. При $c = \rho = N/V$ (ρ – плотность частиц) А. объема z определяется соотношением

$$z = e^{\beta\mu}\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{\nu/2}, \qquad (2)$$

где ν – размерность пространства, m – масса частиц. Вели-

чина $\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{\nu/2}$ называется длиной тепловой волны де Бройля. В конфигурационной большой статистич. сумме А. появляется в результате интегрирования по импульсам. В случае наличия у частиц внутренних степеней свободы правую часть (2) необходимо умножить на внутреннюю статистич. сумму Q_i. Величина $z_0 = e^{\beta\mu}$ называется абсолютной активностью.

Лит.: [1] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1980; [2] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., М., 1973. *П. В. Малышев.*

АЛГЕБРА – действительное (комплексное) *векторное пространство* (соответствующая алгебра также называется действительной или комплексной), на котором введена дополнительно операция умножения, обладающая следующими свойствами:

1) $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$ (дистрибутивность);

2) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$,

где x, y, z – элементы алгебры, а λ – скаляр.

Пусть $e_1,...,e_n$ – базис векторного пространства алгебры A. Произведение базисных элементов может быть единственным образом записано в виде

$$e_i e_j = \sum c_{ij}^k e_k.$$

Числа c_{ij}^k называются структурными константами алгебры A. В силу свойств 1) и 2) набор структурных констант полностью определяет алгебру.

Среди действительных алгебр ранее других были рассмотрены два важнейших примера так наз. «гиперкомплексных систем» – алгебра кватернионов и алгебра Кэли.

Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ – это 4-мерная А. с базисом 1, i, j, k и с умножением, определяемым соотношениями:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad ki = -ik = j, \quad jk = -kj = i.$$

Для каждого элемента $q = a + bi + cj + dk$ алгебры $\mathbb{H}$, называемого кватернионом, определен сопряженный кватернион $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. Модулем кватерниона q называется число

$$|q| = (q\bar{q})^{1/2} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}.$$

Для всякого ненулевого кватерниона q существует обратный кватернион q^{-1} (то есть $q^{-1}q = qq^{-1} = 1$), причем $q^{-1} = \bar{q}/|q|$.

Алгебра Кэли – это 8-мерная А., любой элемент к-рой записывается в виде $p_1 + p_2 l$, где p_1, p_2 – кватернионы, а умножение определяется равенством

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 - p_2 \bar{q}_1) l.$$

Сопряженный элемент, модуль и обратный элемент определены так же, как в А. кватернионов. В отличие от А. кватернионов, алгебра Кэли не ассоциативна (то есть не выполнено тождество $(xy)z = x(yz)$). Впрочем $(xy)z = x(yz)$, если: а) хотя бы два из чисел x, y, z равны; б) хотя бы два из них сопряжены; в) хотя бы два из них взаимообратны.

Почти все известные сколько-нибудь интересные А. относятся к одному из следующих типов.

Ассоциативные алгебры. Любая конечномерная ассоциативная А. является подалгеброй А. всех матриц. Если в А. выполнено тождество $xy = yx$, то она называется коммутативной. Многочисленные примеры коммутативных ассоциативных А. дают А. функций на нек-ром пространстве (с обычной операцией умножения). Полезна точка зрения (к-рую не следует понимать совсем буквально), состоящая в том, что любая коммутативная ассоциативная А. может быть реализована как А. функций.

Алгебры Кэли (см. выше). Это по существу единственный в своем роде объект; они тесно связаны с различными геометриями малой размерности и с особыми группами (см. *Простая группа*).

Наконец, еще три важных типа – алгебры Ли, супералгебры Ли и йордановы алгебры.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Алгебра. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 11, М., 1986. *Ю. А. Неретин.*

АЛГЕБРА НАБЛЮДАЕМЫХ – см. *Наблюдаемых алгебра.*

АЛГЕБРА ТОКОВ – см. *Токов алгебра.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА – см. *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТАТИКА – см. *Статика.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ – см. *Особая точка* аналитической функции.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – функция

$$y = f(x_1,...,x_n)$$

от n переменных, удовлетворяющая алгебраическому уравнению

$$P(y, x_1,...,x_n) = 0,$$

где P – неприводимый многочлен от y, $x_1,...,x_n$, часто записываемый по степеням переменного y в виде

$$P_k(x_1,...,x_n)y^k + P_{k-1}(x_1,...,x_n)y^{k-1} + ...$$
$$...+ P_0(x_1,...,x_n) = 0,$$

где $P_k(x_1,...,x_n)$, ..., $P_0(x_1,...,x_n)$ – многочлены от $x_1,...,x_n$, причем $P_k(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$. Число k – степень многочлена P относительно y, называется степенью А. ф. При $k=1$ А. ф. может быть выражена через переменные с помощью сложения, вычитания, умножения, деления и представлена в виде отношения многочленов

$$y = -\frac{P_0(x_1,...,x_n)}{P_1(x_1,...,x_n)};$$

такая А. ф. называется *рациональной функцией* от $x_1,...,x_n$. При $k=2$, 3, 4 А. ф. всегда может быть выражена через переменные с помощью арифметич. действий и извлечения корня (квадратного или кубического); при $k \geqslant 5$ такое представление даже с привлечением корней степени выше трех в общем случае невозможно. Если такое представление оказывается возможным, то получающаяся А. ф. называется иррациональной. Общая теория А. ф. представляет обширную математич. дисциплину, имеющую важные связи с теорией аналитич. функций (А. ф. составляют специальный класс аналитич. функций), алгеброй и алгебраич. геометрией. *В. И. Битюцков.*

АЛГЕБРАИЧЕСКИ НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ T группы G в бесконечномерном пространстве H – *представление*, не имеющее нетривиальных инвариантных подпространств. Это означает, что любое, не обязательно замкнутое, подпространство в пространстве H, инвариантное относительно всех операторов T_g, где $g \in G$, совпадает со всем пространством H или нулевым подпространством. *Ю. А. Неретин.*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД в квантовой теории поля – направление, использующее аппарат теории алгебр для исследования квантовополевых систем, описываемых в естественных для квантовой механики терминах наблюдаемых и состояний. Эти два понятия возникли при выяснении алгебраич. структуры нерелятивистской квантовой механики в конце 20-х гг. в работах Дж. Неймана (J. Neumann), П. Дирака (P. Dirac), П. Йордана (P. Jordan). А. п., возникший на рубеже 50-х и 60-х гг., явился нетривиальным обобщением идей и построений этих работ на релятивистскую квантовую теорию. В первоначальный период своего развития он выступал в качестве одного из направлений *аксиоматической квантовой теории поля* и, подобно другим направлениям, строился в виде аксиоматич. формализма, в к-ром принимают лишь минимальное число фундаментальных физич. положений (аксиом) и стремятся вывести наиболее полную систему строгих следствий из этих аксиом. В этот период были сформулированы два варианта аксиоматич. А. п.: конкретный, или подход Хаага – Араки [Р. Хааг

(R. Haag), Х. Араки (H. Araki), 1957–62], и абстрактный, или подход Хаага – Кастлера [Р. Хааг, Д. Кастлер (D. Kastler), 1964]. Прямым обобщением квантовомеханич. соответствия

наблюдаемая ↔ эрмитов оператор

является центральное понятие обоих подходов – так наз. алгебра локальных наблюдаемых, ее самосопряженные элементы представляют собой физич. наблюдаемые, измеримые в заданной ограниченной области пространства Минковского M (обычная локальная квантовая теория поля оперирует не только с наблюдаемыми величинами и относит их не к конечной области, а к точке). Физич. теория определяется заданием фундаментального соответствия $O \to \mathfrak{A}(O)$, где O – любая открытая ограниченная область из M, $\mathfrak{A}(O)$ – алгебра локальных наблюдаемых данной области. В подходе Хаага – Араки $\mathfrak{A}(O)$ выбирается из класса алгебр Неймана, а в подходе Хаага – Кастлера – из класса абстрактных C^*-алгебр. На фундаментальное соответствие $O \to \mathfrak{A}(O)$ и налагается система аксиом, включающая физич. требования причинности, релятивистской ковариантности и спектральности.

Набор алгебр $\mathfrak{A}(O)$, удовлетворяющих системе аксиом, называется сетью локальных алгебр. Изучение таких сетей ставит двоякую задачу: выяснение свойств отдельной алгебры $\mathfrak{A}(O)$ и связей между алгебрами различных областей. Результаты первого рода включали в себя анализ свойств центра $\mathfrak{A}(O) \cap \mathfrak{A}(O)'$ алгебры $\mathfrak{A}(O)$, выяснение ее типа (по классификации алгебр Неймана). Важным результатом явилась здесь, в частности, теорема Рее – Шлидера [Х. Рее (H. Reeh), З. Шлидер (S. Schlieder), 1962], утверждающая, что, совершая операции, локализованные в произвольной, сколь угодно малой области, можно получить состояние, сколь угодно близкое к любому заданному состоянию. Среди разнообразных связей между алгебрами $\mathfrak{A}(O)$ физич. интерес представляют, в первую очередь, так наз. причинные соотношения, связывающие между собой алгебры взаимно пространственноподобных областей и выражающие взаимную независимость процессов, протекающих в таких областях, а также «соотношения зависимости», утверждающие, что все физич. наблюдаемые нек-рой области O в действительности исчерпываются наблюдаемыми определенной подобласти $O_1 \subset O$, то есть $\mathfrak{A}(O) = \mathfrak{A}(O_1)$. Обширный набор таких соотношений, полученных в рамках А. п., позволил дать подробное описание причинной структуры квантовополевой теории и обнаружить ряд закономерностей релятивистских квантовых процессов.

При большой общности и строгости результатов аксиоматич. А. п. не передавал, однако, многих важных особенностей структуры и поведения квантовополевых систем. Главным пробелом в его схеме было отсутствие представлений о квантованном поле: последнее не входило в аксиоматику наблюдаемых ни в качестве первичного, независимого объекта, ни в качестве вторичного, как-то определяемого через наблюдаемые. Преодоление этого пробела стало центральной задачей А. п. на следующем этапе его развития, связанном, в первую очередь, с циклом работ Р. Хаага, С. Доплихера (S. Dopplicher) и Дж. Робертса (J. Roberts) 1969–74. Было выяснено, что наблюдаемые и квантованные поля связаны между собой прежде всего посредством правил суперотбора. Явление правил суперотбора (открытое в 1952, но в то время не причислявшееся к ключевым свойствам квантовополевых систем) заключается в существовании особого класса наблюдаемых, измерения к-рых совместимы с измерениями любых других наблюдаемых; «суперотборные операторы», отвечающие таким наблюдаемым, должны коммутировать с операторами всех наблюдаемых. Подобными наблюдаемыми являются, напр., полный электрич. заряд квантовой системы, ее тип статистики. При наличии в системе правил суперотбора ее пространство состояний разбивается на так наз. когерентные суперотборные секторы, так что состояния, лежащие в каждом секторе, представляются собственными векторами всех суперотборных операторов; при этом состояния из разных секторов различаются между собой собственными значениями суперотборных операторов – так наз. суперотборными квантовыми числами. Именно здесь и возникает понятие поля: в полном согласии с интуитивным представлением о квантованном поле как переносчике заряда и других квантовых чисел поле оказывается оператором переплетения когерентных суперотборных секторов – оператором, к-рый переводит векторы состояния из одного сектора в другой и, кроме того, удовлетворяет определенным перестановочным соотношениям с другими подобными операторами (что связано с требованиями определенного спина и статистики полей). В упомянутом цикле работ были развиты методы, дающие принципиальную возможность строить такие поля, исходя из заданной совокупности суперотборных квантовых чисел (затем, что ее задание выводит теорию за рамки чисто аксиоматич. А. п.) и сети алгебр локальных наблюдаемых. Для возникающей алгебраич. схемы оказывается возможным установить все важнейшие «специфически полевые» свойства релятивистских квантовых систем: ввести операцию зарядового сопряжения, доказать наличие античастицы для каждой из присутствующих в теории частиц, определить тип статистики физич. системы и доказать обобщенную теорему о связи спина и статистики (см. *Паули теорема*) и др. В итоге формализм А. п. получает нетривиальное углубление и развитие, превращаясь из чистой аксиоматики локальных наблюдаемых в реалистич. теорию квантовых полей.

Перечисленные результаты были первоначально получены только для квантовополевых систем с короткодействующими взаимодействиями и глобальными калибровочными симметриями. Дальнейшая работа ставит задачи распространить развитые методы в первую очередь на системы, представляющие наибольший интерес с точки зрения современной теории элементарных частиц: модели с локальными калибровочными симметриями, с топологич. зарядами и фазовыми переходами. Как удалось выяснить, А. п., дополненный теорией правил суперотбора, не только допускает обобщение на такие модели, но и позволяет рассматривать весьма широкий их спектр с единой физич. и математич. точки зрения. (Здесь, напр., была строго доказана *Голдстоуна теорема* о спонтанном нарушении симметрии.) Оказывается возможным (и плодотворным) дать общую классификацию квантовополевых систем по типам присущих им правил суперотбора и для каждого из таких типов сформулировать методику построения строгой теории, опирающуюся на алгебраич. аппарат, а также на методы *евклидовой квантовой теории поля* и *конструктивной квантовой теории поля*. Таким образом, на современном этапе А. п. более не является обособленным научным направлением. В тесном сочетании с евклидовой и конструктивной квантовой теорией поля он входит в единую основу современной техники строгого исследования квантовополевых систем.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [2] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [3] Хоружий С. С., Введение в алгебраическую квантовую теорию поля, М., 1986.

С. С. Хоружий.

АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ в теории поля – методы, связанные с работами по вполне интегрируемым системам и методу обратной задачи рассеяния (см. [11], [8]), а также твисторного преобразования Пенроуза – Уорда (см. [14], [10]), сохраняющие многообразные связи и с классическими работами. Алгебраические аспекты методов связаны с унификацией и прояснением классич. приемов конструкций точных решений (напр., кноидальных волн и волчка Ковалевской). В этом они согласованы с методами теории симметрий, теории представлений, интегральных преобразований типа Радона, Гильберта и др. Геометрич. аспекты можно рассматривать как вариант методики качественной теории дифференциальных уравне-

ний, в к-ром — и это характерно — вещественная и локальная ситуация заменяется на комплексную и глобальную. Если первые успехи А.-г. м. были связаны с более или менее явным описанием больших классов точных решений классич. нелинейных уравнений солитонного, квазипериодического, инстантонного или монопольного типа, то в последнее десятилетие к этому кругу вопросов добавились квантовый метод обратной задачи ([12], [13]) и проблематика квантовой теории струн и суперструн и двумерной квантовой теории поля ([17], [18]). В последнем круге вопросов язык алгебраич. геометрии является не просто технич. средством, но отвечает существу дела: основные величины теории (статсумма и корреляторы) пишутся в терминах пространств модулей алгебраич. кривых (комплексных римановых поверхностей). Наконец, запросы физики оказали серьезное обратное влияние на саму алгебраич. геометрию, а также топологию: была сформулирована и доказана гипотеза Новикова ([3], [2]), дающая новый подход к классич. задаче о выделении якобианов среди всех абелевых многообразий; произошли заметные сдвиги в проблеме классификации алгебраич. векторных расслоений; были построены новые инварианты в топологии трех- и четырехмерных многообразий.

Нелинейные волны. *Кортевега — де Фриса уравнение*

$$u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0$$

описывает волны в одномерной среде со слабой дисперсией и слабой нелинейностью. Учет слабых трансверсальных возмущений приводит к *Кадомцева — Петвиашвили уравнению*

$$(3/4)u_{yy} + u_{xt} + (1/4)(u_{xxx} + 6uu_x)_t = 0.$$

А.-г. м. получения точных решений иллюстрируются на этих двух классич. примерах.

Простейшие решения уравнения Кортевега — де Фриса имеют вид бегущей волны:

$$u(x,t) = U(x - vt);$$

после подстановки в уравнение Кортевега — де Фриса и интегрирования (дважды) получают

$$U'^2 = 2U^3 + vU^2 + aU + b.$$

Общее решение этого уравнения задается $\wp$-функцией Вейерштрасса:

$$U(x - vt) = c_1\wp(x - vt) + c_2.$$

Функция Вейерштрасса мероморфна на комплексной плоскости и имеет два независимых периода. Она и ее производная порождают поле мероморфных функций на одномерном комплексном торе или, что то же, на комплексной алгебраич. кривой рода единица. Оказывается, аналогичные решения уравнения Кортевега — де Фриса можно строить по любой гиперэллиптич. кривой, задаваемой уравнением $y^2 = F(x)$ (F — многочлен). Причина этого в том, что данное уравнение допускает представление Лакса

$$L_t = [P, L],$$

где

$$L = -\partial^2/\partial x^2 + u(x,t),$$

$$P = -4\partial^3/\partial x^3 + 3(u\partial/\partial x + \partial/\partial x \circ u).$$

Алгебро-геометрич. решения уравнения Кортевега — де Фриса суть совместные решения уравнений $L_t = [P, L]$ и $[Q, L] = 0$, где Q — вспомогательный оператор (это дополнительное условие играет роль нетривиального обобщения условия «бегущей волны»). Уравнение $[Q, L] = 0$ является стационарным: время в него не входит. Два коммутирующих линейных одномерных дифференциальных оператора связаны полиномиальным соотношением с постоянными коэффициентами. Это соотношение определяет аффинную алгебраич. кривую C_0. Пусть g — род ее неособой модели C. По C определяется g-мерный комплексный тор — якобиан C, являющийся обобщением эллиптич. кривой. Во многих важных случаях эволюция L со временем в силу уравнения Кортевега — де Фриса может быть описана как линейное движение точки по якобиану. Именно, для точки (q, l) кривой C_0 рассматривается пространство функций $\Psi(x)$, собственных для (Q, L) с этими собственными значениями. Пусть оно одномерно. Получающаяся система линейных пространств в благоприятных условиях продолжается до линейного одномерного расслоения над C. Но такое расслоение и есть точка якобиана; остается включить пространственно-временную зависимость и показать, что она линейна. Функция Ψ, записанная в подходящей тривиализации, называется функцией Бейкера — Ахиезера.

Аналитич. описание ситуации требует введения классич. функций, необходимых также в теории струн и конформной теории поля на римановых поверхностях. На компактной римановой поверхности C рода g можно выбрать базис группы гомологий $H_1(C, \mathbb{Z})$ вида (a_i, b_j), $i, j = 1,...,g$, так, что $\langle a_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$ (классич. система разрезов). Голоморфные формы ω_j на C образуют базис Римана, если их a-периоды образуют единичную матрицу. Пусть B — матрица соответствующих b-периодов. По ней строится тета-функция Римана

$$\theta(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\langle Bk, k\rangle + 2\pi i\langle p, k\rangle), \quad p \in \mathbb{C}^g.$$

Фиксируем теперь точку на бесконечности $P_0 \in C$, локальный параметр k^{-1} в ее окрестности, два многочлена $R, Q \in \mathbb{C}(k)$ и неспециальный дивизор

$$D = \sum_{i=1}^g P_i.$$

По определению, функция Бейкера — Ахиезера $\Psi(x,y,t,P)$ — это единственная мероморфная функция на $\mathbb{C}^3(C - P_0)$, у к-рой дивизор полюсов по P совпадает с D при любых x,y,t и к-рая в P_0 имеет существенную особенность вида

$$\Psi(x,y,t,P) = \exp[xk(P) + yR(k(P)) + tQ(k(P))](1 + O(k^{-1}(P)),$$

причем $\Psi(0,0,0,P) = 1$. Она допускает следующее выражение через тета-функцию Римана $\theta(\cdot)$:

$$\Psi(x,y,t,P) =$$

$$= \frac{\theta(\omega(P) - e(x,y,t))\theta(-e(0,0,0))}{\theta(\omega(P) - e(0,0,0))\theta(-e(x,y,t))} \exp\left(\int_{P_0}^P \omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 t\right).$$

Здесь e — нек-рая линейная функция, к-рую можно выписать явно; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — нормированные дифференциалы второго рода с единственным полюсом в P_0 и главными частями $d(k + c\log k)$, $dR(k)$, $dQ(k)$ соответственно.

Метод Кричевера конструкции алгебро-геометрич. решений уравнений типа Лакса состоит в серии следующих замечаний. Пусть A — кольцо мероморфных функций на C с полюсом в P_0. Тогда по любой $f \in A$ однозначно определяется дифференциальный оператор (по x) L_f такой, что $L_f\Psi = f\Psi$. Это следует из сравнения сингулярностей в левой и правой частях и теоремы единственности. Все операторы L_f попарно коммутируют, что доставляет решения серии стационарных уравнений Лакса. Исследование эволюции этих решений по t показывает, что они удовлетворяют нестационарным уравнениям Лакса. Наконец, включение y приводит к уравнению Захарова — Шабата

$$\partial_y P - \partial_t L = [L, P],$$

частным случаем к-рого является уравнение Кадомцева — Петвиашвили. Условие $L = -\partial^2 + u$ приводит к тому, что C — гиперэллиптич. кривая, а потенциал u выражается в виде

$$-2\partial_x^2 \log\theta(ax + bt + c) + d,$$

где θ — тета-функция Римана этой кривой. Метод Кричевера применим к большому количеству других уравнений.

Центральная роль функции Ψ связывает его с методом обратной задачи теории рассеяния, где аналогом Ψ является решение уравнения Шредингера, имеющее на бесконечности асимптотику плоской волны. Далее показано, что и твисторное преобразование может быть описано по параллельной схеме.

Поля Янга – Миллса и инстантоны. Поле Янга – Миллса над римановым многообразием M – это связность в векторном расслоении E над M со структурной группой G. Выбрав систему координат и тривиализацию E, можно задать поле коэффициентами формы связности A_a и формы кривизны F_{ab}. Действие этого поля есть

$$-\int \mathrm{Tr} F_{ab}F^{ab}\,\mathrm{vol}.$$

Соответствующие динамич. уравнения имеют вид

$$\partial_a F^{ab} + \left[A_a, F^{ab}\right] = 0,$$

то есть представляют собой некоммутативное обобщение уравнений Максвелла. В отличие от последних, классич. поля Янга – Миллса физически не интерпретируются и интересны главным образом с точки зрения квантовой теории поля. Один из математически интересных классов решений уравнения Янга – Миллса – инстантоны; это – поля на S^4 (или на более общем компактном римановом многообразии). Поскольку 2-формы на четырехмерном римановом многообразии распадаются в прямую сумму правых и левых, из тождества Бианки видно, что поле с чисто левой (автодуальное) или чисто правой (антиавтодуальное) формой кривизны является экстремумом действия. Инстантоном называется автодуальное поле Янга – Миллса на $\mathbb{R}^4$ со следующими свойствами: а) группа G простая компактная; б) поле Янга – Миллса продолжается до связности на расслоении $\hat{E}$ на компактификации S^4 пространства $\mathbb{R}^4$. Число Понтрягина $\hat{E}$ называется топологическим зарядом инстантона. С точностью до множителя оно совпадает с его действием. Инстантоны доставляют минимумы евклидова действия и потому, возможно, дают существенный вклад в континуальный интеграл.

Описание инстантонов состоит из двух частей – редукции к алгебро-геометрич. задаче и решения этой задачи. Первая часть сводится к теореме Атьи – Уорда: инстантоны с группой G и топологич. зарядом k взаимно однозначно отвечают голоморфным векторным расслоениям над CP^3, структурная группа к-рых редуцирована до G (посредством голоморфной билинейной формы и вещественной либо кватернионной структуры, продолжающей стандартную структуру без неподвижных точек на CP^3) и к-рые тривиальны на всех вещественных прямых CP^3. Вторая часть состоит в классификации соответствующих голоморфных расслоений. Они автоматически оказываются алгебраич. многообразиями, и методы алгебраич. геометрии позволяют явно описать их, сведя к данным линейной алгебры: нескольким числовым матрицам, связанным квадратными уравнениями.

К описанию автодуальных решений уравнений Янга – Миллса, но с другими условиями на бесконечности, сводятся также уравнения Богомольного для магнитных монополей с неабелевой структурной группой. Их решение алгебро-геометрич. средствами также включает в качестве первого шага редукцию к алгебро-геометрич. задаче методами типа Радона – Пенроуза – Уорда. Ниже описана общая схема этого метода, родственного методам Кричевера и обратной задачи теории рассеяния.

Метод обратной задачи теории рассеяния известен во многих вариантах; общие черты большинства из них состоят в следующем. Пусть задана нек-рая нелинейная система уравнений $F(u,x)=0$, где u – поля, x – пространственно-временные координаты. Эта система прежде всего представляется в виде необходимого (часто и достаточного) условия интегрируемости вспомогательной линейной системы $G(u,x,\Psi,\lambda)=0$. Здесь Ψ – неизвестные функции линейной задачи (скажем, функция Бейкера – Ахиезера), а λ означает нек-рое семейство параметров, часто называемых спектральными. Когда такое представление установлено, решения вспомогательной линейной системы либо строятся явно, либо характеризуются своими свойствами, напр. асимптотиками или сингулярностями. При такой характеризации на первый план выступает зависимость Ψ от параметров λ; более того, область значений λ обычно комплексифицируется. Типичный пример – данные рассеяния в обратной задаче теории рассеяния или точка кривой C в методе Кричевера.

Однако и для теории твисторного преобразования и для геометрич. описания метода Кричевера полезнее другой способ описания зависимости Ψ от λ, в терминах голоморфной геометрии векторного расслоения пространств решений линейной задачи над пространством спектральных параметров L. Точнее, пусть $E(\lambda)$ – векторное пространство решений $\Psi(x,\lambda)$ системы $G(u,x,\Psi,\lambda)=0$ при фиксированных u. Тогда $E=\cup_{\lambda\in L}E(\lambda)$ есть нек-рое векторное расслоение, к-рое естественно назвать «обобщенными данными рассеяния». Теперь на геометрич. языке получается следующая схема.

Пусть $p_1: Z\to X$, $p_2: Z\to U$ – двойное расслоение комплексных многообразий (или даже супермногообразий). Точки $u\in U$ параметризуют нек-рое семейство подмногообразий $Y(u)=p_1p_2^{-1}(u)$ в X, обычно компактных. Ставится задача: построить голоморфные векторные расслоения на X, к-рые при ограничении на каждое $Y(u)$ изоморфны расслоениям данного типа (обычно тривиальным). Связь с предыдущим описанием такова.

а) X играет роль спектрального пространства, а допустимые расслоения E на нем суть обобщенные данные рассеяния.

б) Решения линейной задачи – это сечения Ψ расслоения $p_1^*(E)$ на Z, поднятые с X. Необходимое, а локально и достаточное, условие этого – уравнение горизонтальности $\nabla_{Z/X}(\Psi)=0$, где $\nabla_{Z/X}$ – канонич. относительная связность на $p_1^*(E)$, то есть дифференцирование вдоль слоев. Это и есть уравнение $G(u,x,\Psi,\lambda)=0$.

в) Поля u на U кодируются коэффициентами связности $\nabla_{Z/X}$, а также, возможно, глобальными характеристиками расслоения E. Априори они определены на Z, а не на U, так что на этом этапе появляется операция спуска на U, к-рая может быть не вполне тривиальной. В применении к полям Янга – Миллса это переход к $p_2^*(\nabla_{Z/X})$; тот факт, что при этом получается поле Янга – Миллса, то есть связность на $p_2^*p_1^*(E)$, не очевиден и верен лишь для расслоений, допустимых на Z, в данном случае тривиальных на слоях p_1.

г) Наконец, нелинейная система $F(u,x)=0$ есть спуск на U условия интегрируемости $\nabla^2_{Z/X}=0$. То обстоятельство, что при таком спуске получаются физически интересные уравнения, и является замечательным свойством метода твисторного преобразования. Слои проекции p_2, возможно, имеют физич. смысл. В другом контексте они появились (под названием гармонич. пространств) в теории супергравитации (в работах В. И. Огиевецкого с сотрудниками).

Далее описана геометрия тех двойных расслоений, к-рые приводят к физически интересным задачам над комплексифицированным пространством-временем – грассманианом $G(2,T)$ двумерных плоскостей в четырехмерном пространстве твисторов T.

1) Уравнения автодуальности. Здесь $X=CP^3$, $Y(u)=CP^1$, $U=G(2,T)$ или область в этом пространстве. Реализуя X как пространство прямых в T, а Z – как пространство $F(1,2;T)$ (1,2)-флагов, получают двойное расслоение. Голоморфным решениям уравнения автодуальности в

U отвечают допустимые, то есть тривиальные вдоль $Y(u)$ расслоения на части X, параметризуемой U.

2) Полные вакуумные уравнения Янга – Миллса. Здесь $X \subset P(T) \times P(T^*)$ – график отношения инцидентности, изоморфный пространству флагов $F(1,3;T)$, $Y(u) = P^1 \times P^1$, $U = G(2;T)$, $Z = F(1,2,3;T)$. Локально по U голоморфные поля Янга – Миллса взаимно однозначно соответствуют расслоениям на X, тривиальным вдоль $Y(u)$. Решения вакуумных уравнений Янга – Миллса отвечают расслоениям, продолжаемым на третью инфинитезимальную окрестность X. Этот результат допускает серию важных обобщений на различные системы уравнений для полей Янга – Миллса с полями Хиггса, для суперсимметричных полей Янга – Миллса и др.

Аналогичное описание допускают поля Янга – Миллса в десятимерном пространстве, а также нек-рые поля, взаимодействующие с супергравитацией.

Кроме редукции к алгебро-геометрич. задаче конструкции расслоений определенного типа методы алгебраич. геометрии применяются и к решению этой задачи. Известно несколько подходов. Метод монад, строящий расслоение в виде когомологий трехчленного комплекса простого вида, оказался весьма успешным в задаче описания инстантонов. Метод расширений применялся к исследованию монополей. Метод многомерных функций Бейкера применим ко всем рассмотренным выше системам уравнений. Метод задачи Римана наиболее близок к исходной идеологии обратной задачи теории рассеяния и эффективен во многих двумерных задачах.

Статистическая сумма бозонной струны. Квантовая теория бозонных струн в варианте Полякова основана на континуальном интегрировании по функциональному пространству метризованных поверхностей в пространстве-времени. Учет взаимодействия струн происходит путем суммирования по поверхностям всех родов. При фиксированном роде классич. действие инвариантно относительно бесконечномерной калибровочной группы, включающей группу репараметризаций поверхности и группу конформных преобразований метрики. Все квантовые аномалии исчезают, если размерность пространства-времени принимает классич. значение 26. Факторизация функционального пространства g-петлевого вклада в ряд теории возмущений приводит к алгебраич. многообразию конечной размерности $3g-3$ (1 при $g=1$), к-рое является классич. пространством модулей Римана M_g. Сам этот вклад оказывается интегралом от квадрата модуля голоморфной формы, к-рая однозначно определяется своими полюсами на границе (см. [18]) и была ранее построена Д. Мамфордом (D. Mumford) из чисто алгебро-геометрич. соображений. В явном виде форму Мамфорда можно записать через тета-функцию Римана.

Аналогичная теория существует для корреляционных функций двумерной конформной квантовой теории поля. Весьма важным развитием алгебро-геометрич. методов являются недавние работы нескольких групп исследователей, установивших связь геометрич. картины с операторной техникой. В общих чертах эта связь состоит в том, что на подходящие пространства модулей действует комплексная алгебра Вирасоро (а также алгебры Каца – Муди) и между представлениями этих алгебр в пространствах состояний, с одной стороны, и пучками D-модулей на пространстве модулей, с другой, существует соответствие того же типа, как соответствие Бореля – Вейля в теории представлений комплексных групп Ли и его современные варианты.

Другие приложения. Алгебро-геометрич. методы применяются также к интегрированию многих конкретных физически важных уравнений, развитию теории Пенлеве уравнений с неподвижными особенностями, точно решаемым в эллиптич. функциях статистич. моделям и всей проблематике уравнений Янга – Бакстера и др.

Лит.: [1] Белавин А. А., Дринфельд В. Г., «Функциональный анализ и его приложения», 1982, т. 16, в. 3, с. 1–29; [2] Дубровин Б. А., «Успехи математических наук», 1981, т. 36, в. 2, с. 11–80; [3] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., там же, 1976, т. 31, в. 1, с. 55–136; [4] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980; [5] Капранов М. М., Манин Ю. И., «Успехи математических наук», 1986, т. 41, в. 5, с. 85–107; [6] Кричевер И. М., там же, 1977, т. 32, в. 6, с. 183–208; [7] Кричевер И. М., Новиков С. П., «Функциональный анализ и его приложения», 1978, т. 12, в. 4, с. 42–52; [8] их же, «Успехи математических наук», 1980, т. 35, в. 6, с. 47–68; [9] Кричевер И. М., в сб.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), М., 1983, т. 23, с. 79–136; [10] Манин Ю. И., Калибровочные поля и комплексная геометрия, М., 1984; [11] Новиков С. П., «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, в. 3, с. 54–76; [12] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., «Успехи математических наук», 1979, т. 34, в. 5, с. 13–63; [13] их же, Гамильтонов подход в теории солитонов, М., 1986; [14] Твисторы и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1983; [15] Atiyah M. F., Drinfeld V. G., Hitchin N. G., Manin Yu. I., «Phys. Lett.», 1978, v. 65A, № 3, p. 185–87; [16] Atiyah M. F., Hitchin N. G., The geometry and dinamics of magnetic monopoles, Princeton, 1988; [17] Beilinson A. A., Manin Yu. I., «Comm. Math. Phys.», 1986, v. 107, p. 359–76; [18] Belavin A. A., Knizhnik V. A., «Phys. Lett.», 1986, v. 168B, p. 201–206; [19] Gawedzki K., «Sem. Bourbaki», 1988–89, № 704; [20] Friedan D., Shenker S., «Nucl. Phys.», 1987, v. 281B, p. 509–45; [21] Polyakov A. M., «Phys. Lett.», 1981, v. 103B, p. 207–10; [22] Ward R., «Phys. Lett.», 1977, v. 61A, p. 81–82; [23] Witten E., «Phys. Lett.», 1978, v. 78B, № 4, p. 394–98. *Ю. И. Манин.*

АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ – см. *Конечнозонное интегрирование.*

АЛЬФВЕНОВСКАЯ ВОЛНА – см. *Магнитной гидродинамики уравнения, Магнитогидродинамические волны.*

АЛЬФВЕНОВСКИЙ РАЗРЫВ – см. *Ударные волны.*

АЛЬФОРСА НЕРАВЕНСТВО – см. *Длины и площади принцип.*

АМЕНАБЕЛЬНАЯ ГРУППА – топологическая группа G, на которой существует инвариантное среднее. Иными словами, любой непрерывной функции f на группе G можно поставить в соответствие число $L(f)$ так, что:

1) $L(\alpha f) = \alpha L(f)$, если α – скаляр;

2) $L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$;

3) $L(f(g_1 g)) = L(f(g))$, то есть функционал L инвариантен относительно левых сдвигов;

4) если $f \geqslant 0$ всюду, то $L(f) \geqslant 0$;

5) $L(1) = 1$.

Это определение самое простое из многочисленных эквивалентных определений аменабельности.

Лит.: [1] Гринлиф Ф., Инвариантные средние на топологических группах, пер. с англ., М., 1973. *Ю. А. Неретин.*

АМПЛИТУДА вероятности – см. *Волновая функция.*

АМПЛИТУДА колебания – см. *Гармоника, Свободное гармоническое колебание.*

АМПЛИТУДА осциллирующего интеграла – см. *Осциллирующий интеграл.*

АМПЛИТУДА процесса в квантовой теории поля – величина, квадрат модуля которой определяет вероятность (или эффективное сечение) данного процесса (упругого или неупругого). Совокупность всех возможных процессов описывается *рассеяния матрицей.* *М. И. Войцеховский.*

АМПЛИТУДА рассеяния – величина, определяющая вероятность процессов рассеяния при столкновении элементарных частиц (или частиц, которые в задачах рассеяния могут рассматриваться как элементарные, например ядер). А. рассеяния определяется матричным элементом T-матрицы, связанной с S-матрицей соотношением: $S = I + iT$. Если начальное состояние задано вектором $|\alpha\rangle$, а конечное – вектором $|\beta\rangle$, то амплитуда рассеяния $F_{\alpha\beta}$ выражается формулой:

$$F_{\alpha\beta} = (2\pi)^4 \delta\Big(\sum p_i - \sum p'_j\Big) T_{\alpha\beta};$$

$$T_{\alpha\beta} = \langle\beta|T|\alpha\rangle,$$

где p_i – импульсы частиц в начальном состоянии, p'_j – в конечном.

С помощью редукционных формул А. рассеяния выражается через интеграл от T-произведения токов. Основным мето-

дом вычисления А. рассеяния является *возмущений теория*, однако и в рамках аксиоматич. квантовой теории поля получен ряд ограничений на А. рассеяния различных процессов.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория поля, т. 2, пер. с англ., М., 1978.

Ю. С. Вернов.

АМПЛИТУДА эллиптического интеграла – см. *Эллиптический интеграл.*

АНАЛИЗ ДАННЫХ – дисциплина, посвященная построению и исследованию процедур, осуществляющих преобразование от «исходных данных» к «результату». Ранее вместо термина «А. д.» употреблялся термин «обработка результатов наблюдений (измерений)». Математич. аппаратом А. д. является математич. статистика.

Под «исходными данными» обычно понимают нек-рый первичный набор чисел, получаемых в процессе проведения исследования: результаты измерений какой-либо физич. величины; совокупность параметров, характеризующих какое-либо событие или состояние системы, установки, физич. тела; число случаев осуществления какого-либо события; счет наличия или отсутствия какого-либо признака и т. п.

«Результатами» А. д. обычно являются либо итоговые показатели (напр. при обработке многократных измерений каких-либо физич. величин), либо параметры модели (физич. закономерности), описывающей исследуемое явление (напр. размеры ядер при исследовании распределений углов рассеяния частиц на ядрах), либо вывод о справедливости какой-либо теории и т. п.

Погрешности данных. Как исходные данные, так и результаты помимо своей величины характеризуются ошибкой, или погрешностью. Под ошибкой обычно понимают разницу между наблюдаемой или вычисляемой величиной и фактич. величиной. Ошибки в исходных данных могут от опыта к опыту систематически повторяться (систематические ошибки) либо меняться случайным образом (случайные ошибки).

Систематич. ошибки, как правило, связаны с неправильно откалиброванным измерительным прибором (или невозможностью калибровки), с неправильно учтенными внешними условиями проведения опыта (или невозможностью их учета), с неправильной методикой измерения и т. п. Исследование систематич. ошибок играет важную роль в анализе экспериментальных данных. После выявления природы систематич. ошибок и определения их величины они перестают быть ошибками и становятся поправками. Если систематич. ошибки устранить не удается, то обычно оценка систематич. ошибки приводится совместно с результатом.

Случайные ошибки измерений – флуктуации в наблюдениях (измерениях) – являются следствием конечной точности эксперимента (измерительного прибора) и (или) случайного характера наблюдаемой (измеряемой) величины. Получению численных результатов по данным измерений, содержащим случайные ошибки, посвящен раздел математич. статистики, называемый теорией ошибок. В исходных данных и в результатах анализа могут быть также и грубые ошибки (промахи) – следствие неправильных записей, неумелого применения прибора, применения испорченного прибора, арифметич. ошибок в вычислениях и т. п. Такие ошибки исправляют при более тщательном повторении опытов или расчетов.

Из-за наличия в реальных исходных данных всевозможных ошибок неизвестного характера на практике сложно сформулировать и построить такую процедуру, к-рая приведет к окончательному результату. Поэтому А. д. обычно подразделяют на два раздела (этапа): исследование данных и обработка данных.

Исследование данных (или разведочный анализ) – это такие операции, выполнение к-рых существенно зависит от конкретных данных. При исследовании данных определяющую роль играет человек, к-рый решает: как дальше поступать с этими данными; какие точки выбросить, какие оставить; какую конкретную процедуру применить для улучшения качества исходных данных; нужно ли сгруппировать ряд данных и как это сделать и т. п. В разведочном анализе обычно используют простые методы преобразования и представления данных, позволяющие качественно оценить имеющиеся данные и повысить их надежность (достоверность). Из основных процедур разведочного анализа следует особенно отметить процедуру «сглаживания», устранение грубых ошибок.

Обработка данных – это собственно процедура получения результатов по выбранной схеме. Математич. статистика в основном посвящена именно обработке данных.

Статистический анализ. Из-за конечной точности измерений и наличия случайных ошибок или из-за статистич. природы экспериментальных данных ряд измерений $\{x\}$, проведенных независимо, рассматривают как случайные переменные, распределенные с плотностью вероятности $p(x)$, к-рая может быть дискретной либо непрерывной.

Задача экспериментальных исследований – получить $p(x)$ по наблюдениям x, задача теории – придумать (вычислить) $p(x)$. При таком рассмотрении почти все задачи А. д. сводятся к оцениванию плотности вероятности и к определению согласия между теоретич. и эмпирич. распределениями. В математич. статистике задачам оценивания посвящен раздел статистич. оценивания, а задачам определения согласия – раздел статистич. проверки гипотез. По способу оценивания плотности вероятности и определения ее согласия с теоретической А. д. подразделяют на параметрический и непараметрический.

В непараметрическом анализе предполагается, что нет никакой априорной информации относительно вида функции $p(x)$. Заключение о функции $p(x)$ или о ее свойствах делается непосредственно из исходных данных.

В параметрическом анализе предполагается, что $p(x)$ входит в параметрич. семейство распределения $p(x) = p(\alpha, x)$, где α – конечный набор параметров (дискретных или непрерывных), к-рые выделяют отдельные распределения из семейства. Здесь проблема оценивания функции $p(x)$ сводится к выбору подходящих значений α. Простейшая задача параметрич. анализа – получение результата для какой-либо физич. величины по данным ее многократных измерений со случайной ошибкой, соответствующей *Гаусса распределению* ошибок. Пусть имеется ряд x_i, $i = 1, 2, ..., N$, измерений одной и той же физич. величины с дисперсией σ^2. Вероятность одиночного наблюдения x_i равна

$$p_i = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-(x_i - \mu)^2/2\sigma^2\right],$$

тогда вероятность N независимых наблюдений x_i, $i = 1, 2, ..., N$, равна произведению вероятностей

$$p(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{N} p_i = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2/2\sigma^2\right].$$

В качестве оценки результата измерений физич. величины x, при постоянной дисперсии σ^2, следует взять такую величину μ^*, к-рая дает максимум вероятности $p(\mu, \sigma)$. Максимум предыдущего выражения достигается при минимуме показателя экспоненты, откуда следует, что

$$\mu^* = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Проверка гипотез. Результатом А. д. может быть также оценка справедливости какой-либо теоретич. модели или гипотезы (статистической гипотезы) в смысле применимости ее к экспериментально наблюдаемому явлению. Такой результат сам по себе не дает доказательства справедливости теории, он дает лишь возможность выбора альтернатив и степень согласия теории и эксперимента.

Пусть надо проверить гипотезу H_0 по отношению к гипотезе H_1 на основании нек-рых экспериментальных наблюдений $\{x\}$. Пусть $X(x|H)$ есть функция наблюдений и проверяемой гипотезы (X обычно называют проверочной статистикой) и пусть Ω есть пространство всевозможных значений X. Пространство Ω делят на две области: ω и

$\Omega-\omega$, к-рые соответственно называются критической и допустимой. Считают, что при попадании проверочной статистики X в критич. область ω гипотеза H_0 неверна (верна H_1), а при попадании X в допустимую область гипотеза H_0 верна (H_1 ошибочна).

Разделение пространства Ω на критическую и допустимую области обычно производится так, чтобы вероятность отвергнуть гипотезу, когда она верна (то есть вероятность потери), была бы малой. Величину этой вероятности называют уровнем значимости, или величиной критерия. Таким образом, уровень значимости α равен вероятности попадания X в ω, когда гипотеза H_0 верна, то есть

$$\mathsf{P}\{X \in \omega | H_0\} = \alpha.$$

С другой стороны, целесообразно потребовать также малости вероятности принятия ложной гипотезы, то есть вероятности примеси β:

$$\mathsf{P}\{X \in \Omega - \omega | H_1\} = \beta.$$

Для оценки критерия проверки альтернативных гипотез служит величина, называемая мощностью критерия, к-рая определяется как вероятность $1-\beta$ попадания X в критич. область пространства Ω, когда верна гипотеза H_1, то есть

$$\mathsf{P}\{X \in \omega | H_1\} = 1 - \beta.$$

При выборе гипотезы исследователь обычно решает, какие потери α он может допустить, а затем выбирает проверочную статистику и критич. область так, чтобы максимизировать мощность критерия $1-\beta$.

Одна из наиболее общих проверяемых гипотез при А. д. состоит в том, что плотность вероятности $p(\boldsymbol{x})$ есть данная функция $\boldsymbol{x}$, то есть $p(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$. Здесь обычно нет определенной альтернативной гипотезы, то есть фактически имеется набор всевозможных альтернативных гипотез, к-рые явно не определены. В этом случае невозможно вычислить примесь и определить мощность критерия. Такая задача возникает при проверке совпадения экспериментальных данных с какой-либо теоретич. моделью и решается на основе критерия согласия. Как при обычной проверке гипотез, начинают с выбора проверочной статистики, однако пространство Ω не делится на критич. и допустимую области. Уровень значимости здесь определяется как вероятность того, что при условии H_0 проверочная статистика X будет иметь значение, превышающее величину T, наблюдаемую из данных,

$$\mathsf{P}\{X \geqslant T | H_0\} = \alpha(T).$$

В данном контексте величина $\alpha(T)$ называется также уровнем достоверности.

Критерий согласия конструируется при помощи меры различия между непараметрич. оценкой плотности вероятности и теоретич. функцией плотности вероятности проверяемой гипотезы. Наиболее популярной является квадратич. мера, нормированная на дисперсию. В достаточно общих предположениях проверочная статистика сводится к сумме квадратов независимых, нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, к-рая имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы, равным количеству членов в сумме. В этом случае критерием согласия является χ^2-критерий Пирсона.

Современные экспериментальные исследования в области ядерной физики, геофизики, физики атмосферы, океана и др. характеризуются огромным объемом получаемой первичной информации (до 10^{12} бит/с и более). Результаты эксперимента обычно составляют $\sim 10^3$ бит/с. Таким образом, в процессе А. д. происходит значительное сжатие информации (в 1 млрд. раз и более). А. д. таких экспериментальных исследований немыслим без использования средств автоматизации и быстродействующей вычислительной техники.

Лит.: [1] Митропольский А. К., Техника статистических вычислений, 2 изд., М., 1971; [2] Статистические методы в экспериментальной физике, пер. с англ., М., 1976; [3] Тьюки Дж., Анализ результатов наблюдений, пер. с англ., М., 1981; [4] Мостеллер Ф., Тьюки Дж., Анализ данных и регрессия, пер. с англ., в. 1–2, М., 1982.

С. В. Клименко, А. А. Лебедев.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА – см. *Перенормировка* в квантовой механике.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯЦИЯ – см. *Расходимость* в квантовой теории поля, *Ультрафиолетовая расходимость.*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, голоморфная функция,– функция, которую можно разложить в *степенной ряд.* Класс А. ф. охватывает большинство функций, встречающихся в основных вопросах математики и физики; основные операции арифметики, алгебры и анализа не выводят за пределы класса А. ф.; наконец, А. ф. обладают свойством единственности, то есть каждая А. ф. образует одно органически связное единое целое во всей своей естественной области определения.

Пусть D – область в плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$ (то есть открытое связное множество точек $\mathbb{C}$). Если каждой точке $z = x + iy \in D$ соответствует комплексное число $w = u + iv$, то в области D определена (однозначная) функция $w = f(z)$ (или $f: D \to \mathbb{C}$) комплексного переменного z. Иначе говоря, функцию $w = f(z) = f(x+iy)$ можно рассматривать как комплексную функцию двух действительных переменных x и y, определенную в области $D \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость). Или, еще, задание такой комплексной функции f равносильно заданию двух действительных функций

$$u = \varphi(x, y),\ v = \psi(x, y),\ (x, y) \in D.$$

При фиксированном $z \in D$ каждому приращению $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $z + \Delta z \in D$, соответствует приращение функции

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u(x,y) + i\Delta v(x,y).$$

Если при $\Delta z \to 0$

$$\Delta f(z) = A\Delta z + o(\Delta z)$$

или, что то же, если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = A,$$

то функция f называется дифференцируемой в смысле $\mathbb{C}$ (или в смысле комплексного анализа) в точке z и $A = f'(z)$ – производная функции f в точке z, а $A\Delta z = f'(z)dz\,(dz = \Delta z)$ – дифференциал f в точке z. Функция f дифференцируема в области D, если она дифференцируема в каждой точке D.

Если функция f рассматривается как функция двух действительных переменных (то есть в смысле $\mathbb{R}^2$), то ее дифференциал имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

– частные производные функции f в точке z. Здесь можно перейти от независимых переменных x, y к переменным $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, то есть записать f в виде $f(z, \bar{z})$, причем тогда

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2},$$

$$dx = \frac{dz+d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz-d\bar{z}}{2},$$

и получается запись дифференциала df в комплексной форме

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}, \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

– (формальные) производные f по z и $\bar{z}$.

Формула (1) показывает, что функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, если она дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ и справедливо дополнительное равенство $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, в развернутой форме имеющее вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Если функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в области D, то соотношения (2) выполняются всюду в D, они называются условиями Коши–Римана.

Уточненное исходное определение аналитичности: функция f, определенная в области D, называется аналитической в точке $z_0 \in D$, если существует (комплексная) окрестность точки z_0, в к-рой функция f представима степенным рядом

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_k(z - z_0)^k + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{3}$$

Если такое представление выполняется в каждой точке $z_0 \in D$, то функция f называется аналитической, или голоморфной, в области D.

Функция f, голоморфная в точке $z_0 \in D$, дифференцируема в этой точке. Более того, сумма степенного ряда $f(z)$ имеет производные всех порядков по комплексному переменному z и коэффициенты a_k ряда (3) выражаются через производные функции f в точке z_0 по формулам:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots;$$

при этом ряд (3) записывается в виде ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k. \tag{4}$$

Голоморфность функции f в области D означает, что в каждой точке $z_0 \in D$ функция f бесконечно дифференцируема и ее ряд Тейлора сходится к ней в нек-рой окрестности точки z_0. С другой стороны, если функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в области D, то она голоморфна в области D (в отдельной точке это утверждение неверно). Аналитичность функции f в области D равносильна дифференцируемости f в смысле $\mathbb{C}$ в области D и равносильна дифференцируемости в смысле $\mathbb{R}^2$ вместе с условиями Коши–Римана.

Интеграл от функции $f = \varphi + i\psi$ вдоль кривой $\Gamma: z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (ориентированной и кусочно гладкой) определяется формулой

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t)\,dt = \\ = \int_\Gamma \varphi\,dx - \psi\,dy + i\int_\Gamma \psi\,dx + \varphi\,dy,$$

где последние два интеграла – обычные криволинейные действительные интегралы. Наиболее важна интегральная теорема Коши: если f – А. ф. в области D, то

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

для любой замкнутой кривой $\Gamma \subset D$, ограничивающей область, принадлежащую D. Наоборот, справедлива также теорема Мореры: если функция f непрерывна в области D и

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

для любой кривой Γ указанного типа, то f – А. ф. в области D. В частности, в односвязной области D аналитичны те и только те непрерывные функции f, у к-рых интеграл по любой замкнутой кривой $\Gamma \subset D$ равен нулю; иначе говоря, интеграл

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

по любой кривой, соединяющей точки z_1, z_2, зависит только от точек z_1, z_2 и не зависит от формы кривой, соединяющей эти точки.

Из интегральной теоремы Коши вытекает интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{5}$$

выражающая значения А. ф. внутри области D через ее значения на границе ∂D этой области; предполагается, что граница ∂D состоит из конечного числа непересекающихся кусочно гладких кривых, положительно ориентированных относительно D, и что $f(z)$ непрерывна во всей замкнутой области

$$\overline{D} = D \cup \partial D.$$

Важное свойство А. ф. выражается теоремой единственности: если две функции f_1, f_2, аналитические в области D, совпадают на нек-ром множестве E, имеющем предельную точку в D, то $f_1(z) = f_2(z)$ всюду в D.

В частности, А. ф. $f(z)$, $z \in D$, отличная от тождественного нуля, может иметь в D только изолированные нули. Если z_0 – нуль А. ф. f, то в нек-рой окрестности $U(z; z_0)$ точки z_0 справедливо соотношение $f(z) = (z - z_0)^\nu g(z)$, где ν – натуральное число (кратность нуля), $g(z)$ – А. ф. в $U(z; z_0)$, $g(z) \neq 0$ всюду в $U(z; z_0)$.

Особые точки А. ф. f – это точки, в к-рых нарушается свойство аналитичности; они определяют, в нек-ром смысле, всю А. ф. f. Здесь рассматривается только простейший случай изолированных особых точек однозначной А. ф. Если f – А. ф. в кольце $G = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < \rho\}$, то она разлагается в G в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{6}$$

содержащий, вообще говоря, положительные и отрицательные степени разности $z - z_0$. Если в ряде (6) отрицательные степени $z - z_0$ отсутствуют ($a_k = 0$ при $k = -1, -2, \ldots$), то z_0 называется правильной точкой (устранимая особая точка); в такой точке существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0;$$

полагая $f(z_0) = a_0$, получают А. ф. во всем круге $\{|z - z_0| < \rho\}$. Если ряд (6) имеет лишь конечное число отрицательных степеней $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{k=\mu}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \mu < 0, \quad a_\mu \neq 0,$$

то z_0 называется полюсом А. ф. f кратности $|\mu|$; здесь

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

А. ф. f имеет в точке z_0 полюс кратности $|\mu|$ тогда и только тогда, когда функция $1/f$ имеет в точке z_0 нуль кратности $|\mu|$. Наконец, если ряд (6) содержит бесконечно много отрицательных степеней $z - z_0$, $a_k \neq 0$ для бесконечно многих отрицательных индексов k, то точка z_0 называется существенно особой точкой; в таких точках не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции f.

Коэффициент a_{-1} ряда Лорана (6) называется вычетом функции f в точке z_0:

$$a_{-1} = \operatorname*{res}_{z = z_0} f(z); \tag{7}$$

вычет в точке z_0 выражается также формулой

$$\operatorname*{res}_{z = z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz,$$

где $\gamma = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = \rho\}$ – окружность настолько малого радиуса $\rho > 0$, что круг $|z - z_0| \leqslant \rho$ не содержит особых точек

А. ф. f, кроме z_0. Важную роль при вычислении интегралов от А. ф. f играет теорема о вычетах: если f – А. ф. в области G, кроме нек-рого множества изолированных особых точек, а $\Gamma \subset G$ – контур, ограничивающий область $D \subset G$, содержащую лишь конечное число особых точек $z_1,\dots,z_m$, то

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Вообще, часть ряда Лорана

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k,$$

содержащая все члены ряда (6) с отрицательными степенями разности $z-z_0$, называется главной частью ряда Лорана функции f в окрестности точки z_0; она определяет характер особенности z_0. Члены ряда (6) с неотрицательными степенями разности $z-z_0$ составляют правильную часть ряда Лорана.

Функция f называется мероморфной в области D, если она представима в D в виде отношения двух голоморфных функций. В окрестности каждой точки $z_0 \in D$ главная часть ряда Лорана такой функции состоит из конечного числа отрицательных степеней разности $z-z_0$, то есть мероморфная функция f в области D имеет в качестве особенностей в D только не более чем счетное множество полюсов.

А. ф., голоморфные во всей плоскости $\mathbb{C}$, называются целыми. Ряды Тейлора таких функций сходятся во всей плоскости. Напр.,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Какова бы ни была последовательность комплексных чисел a_k, $k=1, 2, \dots$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$, существует целая функция f, для к-рой точки a_k и только они являются нулями функции f (теорема Вейерштрасса). Функции, мероморфные в $\mathbb{C}$, обычно называются просто мероморфными. Таковы, напр., все рациональные функции, $\operatorname{tg} z = \sin z/\cos z$, $\operatorname{ctg} z = \cos z/\sin z$, эллиптич. функции. Согласно теореме Миттаг-Леффлера, какова бы ни была последовательность комплексных чисел, b_k, $k=1, 2, \dots$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$, существует мероморфная функция g с полюсами в точках b_k и только в них, главные части к-рых в точках b_k суть заранее заданные многочлены от $z-b_k$. Теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера верны и для произвольной области $D \subset \mathbb{C}$.

Если $f: D \to \mathbb{C}$ – А. ф., то образ $f(D)$ также является областью (принцип сохранения области). При $f'(z_0) \neq 0$ отображение, устанавливаемое А. ф. $w=f(z)$, сохраняет углы в точке z_0 (как по величине, так и по знаку), то есть является *конформным отображением*. Если f – однолистная А. ф. в области D (то есть $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$), то $f'(z) \neq 0$ в D и f дает взаимно однозначное и конформное отображение области D на область $f(D)$. Основная теорема теории конформных отображений (теорема Римана): в любой односвязной области D, граница к-рой содержит более одной точки, существует однолистная А. ф., конформно отображающая область D на круг.

Действительная и мнимая части φ и ψ голоморфной в области D функции $f=\varphi+i\psi$ являются *гармоническими функциями*, то есть непрерывны и имеют непрерывные частные производные до второго порядка и удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Две гармонич. функции, связанные условиями Коши–Римана, называются сопряженными. В односвязной области D любая гармонич. функция φ имеет сопряженную ψ, а значит, φ есть действительная часть нек-рой А. ф. f.

Все изложенное выше относится к однозначным А. ф. f, заданным в области D. Степенные ряды дают возможность аналитически продолжить функцию f во всю ее естественную область существования G (к-рая может оказаться совпадающей с D), то есть перейти от заданной в D А. ф. f к полной А. ф. $\tilde{f}$ в G. Однако при этом полная А. ф. $\tilde{f}$ может оказаться многозначной; напр., А. ф. $\sqrt{z}$ в ее естественной области существования $\mathbb{C}$ двузначна. Избавиться от многозначности можно, рассматривая А. ф. f не как функцию точки плоскости $\mathbb{C}$, а как А. ф. точки нек-рой *римановой поверхности*. Другой метод перехода к однозначным функциям состоит в рассмотрении различных ветвей А. ф., получающихся при *аналитическом продолжении* только в пределах нек-рой области Δ, принадлежащей естественной области существования D.

Переходя к функциям $w=f(z): \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ нескольких комплексных переменных $z=(z_1,\dots,z_n)$, $n>1$, $z_k=x_k+iy_k$, следует, прежде всего, отметить, что комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ отличается от $2n$-мерного действительного векторного пространства $\mathbb{R}^{2n}$ комплексной структурой: координаты x_k, y_k выступают в комплексах $z_k=x_k+iy_k$. Это создает существенную асимметрию.

Пусть комплексная функция $f=\varphi+i\psi$ задана в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и дифференцируема в D в смысле $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда ее дифференциал записывается в виде

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

где dz_k, $d\bar{z}_k$ и $\frac{\partial f}{\partial z_k}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}$ определяются аналогично плоскому случаю. Дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}^n$ означает, что при этом

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k.$$

Таким образом, дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}^n$, или голоморфность, или аналитичность в области $D \subset \mathbb{C}^n$ означает, что к дифференцируемости в смысле $\mathbb{R}^{2n}$ добавляются $2n$ уравнений с частными производными первого порядка (система Коши–Римана)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial\psi}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_k} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \quad k=1,2,\dots,n, \tag{8}$$

к-рые равносильны n комплексным уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k=1,\dots,n. \tag{9}$$

Система (8), или (9), при $n>1$ переопределена: число неизвестных функций меньше числа уравнений. Переопределенность остается и при переходе к отображениям $f: D \to \mathbb{C}^n$, так как $2n$ действительных функций должны удовлетворять $2n^2$ действительным уравнениям. Вследствие этого теорема Римана о конформном отображении не имеет аналога при $n>1$.

Функция f голоморфна в точке $a \in \mathbb{C}^n$, если она голоморфна в нек-рой окрестности точки a. При этом функция f будет голоморфной по каждому переменному $z_1,\dots,z_n$. Наоборот, если f голоморфна по каждому переменному $z_1,\dots,z_n$ (при фиксированных остальных), то она будет голоморфной в точке a (теорема Гартогса).

Подобно плоскому случаю, голоморфность функции f в точке $a=(a_1,\dots,a_n)$ равносильна ее разложимости в кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{|k|>0} c_k (z-a)^k, \tag{10}$$

где $k=(k_1,\dots,k_n)$ – целочисленный векторный индекс, $k_i \geqslant 0$, $|k|=k_1+\dots+k_n$,

$$(z-a)^k = (z_1-a_1)^{k_1}\dots(z_n-a_n)^{k_n}.$$

Голоморфная функция f бесконечно дифференцируема, ряд (10) есть ее ряд Тейлора, коэффициенты к-рого выражаются формулами

$$c_k = \frac{1}{k_1!\dots k_n!}\frac{\partial^{k_1+\dots k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}}\Big|_a$$

через значения производных функции f в точке a.

Основная интегральная теорема Коши–Пуанкаре для голоморфной функции f в области $D\subset\mathbb{C}^n$ имеет вид:

$$\int_{\partial G} f\,dz = 0,$$

где G – произвольная $(n+1)$-мерная поверхность, $G\subset\overline{G}\subset D$, ∂G – кусочно гладкая граница G; в плоском случае $n+1=2n$, а при $n>1$ $n+1<2n$. Аналог интегральной формулы Коши просто выписывается для поликруговой области $D=D_1\times\dots\times D_n$, D_k – плоская область:

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Здесь $\Gamma=\partial D_1\times\dots\times\partial D_n$ – n-мерный остов границы ∂D, $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$,

$$\frac{d\zeta}{\zeta - z}=\frac{d\zeta_1\dots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\dots(\zeta_n-z_n)}.$$

Однако в областях общего вида разделение переменных невозможно и интегральные формулы усложняются.

Изучение особенностей А. ф. нескольких переменных представляет значительный интерес. Основное отличие от плоского случая состоит в следующем (теорема Осгуда–Брауна): если f – голоморфная функция в $D\setminus K$, где D – область в $\mathbb{C}^n$, $n>1$, K – компакт в D, не разбивающий D, то f голоморфно продолжается во всю область D. Следовательно, голоморфные функции f нескольких переменных не могут иметь изолированных особенностей. Поэтому основная задача многомерной теории вычетов значительно сложнее одномерной. Она состоит в вычислении интеграла

$$\int_\sigma f\,dz$$

от функции f, голоморфной в области D, кроме (аналитического) множества M, по значениям f на n-мерной поверхности σ, не пересекающейся с M. Если σ не зацеплена с M, то есть ограничивает $(n+1)$-мерную поверхность G такую, что $G\subset\overline{G}\subset D\setminus M$, то по теореме Коши–Пуанкаре

$$\int_\sigma f\,dz = 0.$$

В общем случае нужно выяснить характер зацепления σ с M и вычислить интегралы по специальным n-мерным поверхностям, определяемым множеством M, к-рые теперь играют роль вычетов (см. [3], [4]).

Какова бы ни была область $D\subset\mathbb{C}$, можно построить А. ф. f, к-рая голоморфна в D и не продолжается аналитически вне D, то есть D является для f естественной областью существования. В случае $D\subset\mathbb{C}^n$, $n>1$, может оказаться, что D не является областью голоморфности, то есть любая А. ф. в области D продолжается голоморфно за пределы D.

Для того чтобы область $D\subset\mathbb{C}^n$ была областью голоморфности, необходимо и достаточно, чтобы она была псевдовыпуклой. Последнее означает, что действительная функция $u(z)=-\ln d(z;\partial D)$ должна быть плюрисубгармонической (см. [4]). Здесь d – евклидово расстояние точки $z\in D$ до границы ∂D. Наконец, для того чтобы действительная функция $u(z)$ класса $\mathbb{C}^2(D)$, $u(z)<+\infty$, была плюрисубгармонической, необходимо и достаточно, чтобы форма Леви

$$H_z(u;\omega)=\sum_{\mu,\nu=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_\mu \partial\overline{z}_\nu}\Big|_z \omega_\mu\omega_\nu$$

была неотрицательно определенной при всех $\omega\in\mathbb{C}^n$, $z\in D$. Простейшее достаточное условие области голоморфности D состоит в том, что D должна быть выпуклой.

Основной в этом круге вопросов является следующая задача: если область D не является областью голоморфности, то требуется построить ее оболочку голоморфности, то есть наименьшую область голоморфности, в к-рую аналитически продолжается любая функция, голоморфная в D. При этом следует иметь в виду, что при аналитич. продолжении (как и в плоском случае) область голоморфности А. ф. может оказаться многозначной (см. [4]).

Важное значение (как и в плоском случае) имеют задачи построения в данной области голоморфной с заданным нулями или мероморфной функции с заданными главными частями особенностей (проблема Кузена). В плоском случае эти задачи решаются в произвольной области, согласно теоремам Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера. В областях $D\subset\mathbb{C}^n$, $n>1$, требуется выполнение нек-рых дополнительных условий (см. [4]).

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1967; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., М., 1967; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1–2, 3 изд., М., 1985.

Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВЕКТОР в пространстве представлений T группы Ли G – вектор $\xi\in V$, для которого отображение $g\to T(g)\xi$ является вещественно аналитической вектор-функцией на G со значениями в V. Если T – слабо непрерывное *представление* группы Ли G в банаховом пространстве V, то множество V^ω аналитич. векторов плотно в V (см. [1] – [3]). Существует обобщение этой теоремы на широкий класс представлений в локально выпуклых пространствах (см. [5]). Было доказано (см. [6]), что представление связной группы Ли G в банаховом пространстве V однозначно восстанавливается по соответствующему представлению алгебры Ли группы G в пространстве V^ω.

Аналитический вектор для неограниченного оператора A в банаховом пространстве V с областью определения $D(A)$ определяется как вектор

$$\xi\in\bigcap_{n=1}^\infty D\left(A^n\right),$$

для к-рого ряд

$$\sum \frac{x^n}{n!}\left\|A^n\xi\right\|$$

имеет положительный радиус сходимости. Это понятие, введенное в [2], является частным случаем общего понятия А. в.– здесь в качестве группы Ли G выступает множество точек действительной прямой с операцией сложения. Оно оказалось полезным в теории операторов в банаховых пространствах и в теории эллиптич. дифференциальных операторов.

Лит.: [1] Cartier P., Dixmier J., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, p. 131–45; [2] Нелсон Э., «Математика», 1962, т. 6, № 3, с. 89–131; [3] Гординг Л., «Математика», 1965, т. 9, № 5, с. 78–94; [4] Cartier P., Vecteurs analytiques. Séminaire Bourbaki, Mai 1959; [5] Moore R. T., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 78; [6] Harish-Chandra, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, p. 185–243.

А. А. Кириллов.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОЙ ФРОНТ – см. *Волновой фронт.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ (в широком смысле) – линейный непрерывный функционал на основном пространстве (см. *Обобщенная функция*), состоящем из аналитических функций. А. ф. различных классов используются в нелокальной аксиоматич. квантовой теории поля, в теории псевдодифференциальных операторов (диф-

ференциальных операторов бесконечного порядка), в теории *гиперфункций*, *Фурье гиперфункций*, *Фурье ультрагиперфункций* и т. д.

Аналитический функционал в узком смысле — элемент из $\mathscr{H}'(O)$, то есть линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathscr{H}(O)$ всех аналитич. функций в области $O \subset \mathbb{C}^n$ с топологией равномерной сходимости на компактах в O, задаваемой полунормами

$$|\Phi|_K = \sup\{|\Phi(\zeta)|;\ \zeta \in K\},\ \Phi \in \mathscr{H}(O),$$

где K пробегает семейство всех компактов в O, так что $\mathscr{H}(O)$ — пространство Фреше — Шварца. Говорят, что А. ф. $g \in \mathscr{H}'(O)$ сосредоточен на компакте $K \subset O$, если для любой ограниченной области Ω ($K \subset \Omega$, замыкание $\overline{\Omega} \subset O$) существует постоянная C такая, что

$$|(g,\Phi)| \leqslant C|\Phi|_{\overline{\Omega}},\ \Phi \in \mathscr{H}(O).$$

Каждый А. ф. $g \in \mathscr{H}'(O)$ сосредоточен на нек-ром компакте, лежащем в O, однако нельзя определить *носитель* g, поскольку не существует наименьшего компакта, на котором g сосредоточен. Для всякого А. ф. $g \in \mathscr{H}'(O)$ существует мера μ с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu \subset O$ такая, что

$$(g,\Phi) = \int \Phi(z)\, d\mu(z),\ \Phi \in \mathscr{H}(O).$$

На $\mathscr{H}'(O)$ определены *Лапласа преобразование* и *свертка*.

Вещественный аналитический функционал в области $\omega \subset \mathbb{R}^n$ есть, по определению, элемент из $\mathscr{A}'(\omega)$, то есть линейный непрерывный функционал на основном пространстве

$$\mathscr{A}(\omega) = \liminf_{\Omega \supset \omega} \mathscr{H}(\Omega),$$

где индуктивный предел определенных выше пространств $\mathscr{H}(\Omega)$ берется по всем областям $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, содержащим ω. Для всякой области $\omega \subset \mathbb{R}^n$ имеется плотное непрерывное вложение $\mathscr{A}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{A}(\omega)$, так что $\mathscr{A}'(\mathbb{R}^n)$ — естественное объемлющее пространство всех вещественных А. ф. Говорят, что вещественный А. ф. $g \in \mathscr{A}'(\omega)$ сосредоточен на вещественном компакте $K \subset \omega$, если для всякой ограниченной области $(\Omega) \subset \mathbb{C}^n$, содержащей K, существует постоянная C такая, что

$$|(g,\Phi)| \leqslant C|\Phi|_{\overline{\Omega}},\ \Phi \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n).$$

Каждый вещественный А. ф. сосредоточен на нек-ром вещественном компакте, определен носитель $\operatorname{supp} g$ всякого вещественного А. ф. g как наименьший вещественный компакт, на к-ром он сосредоточен. Множество вещественных А. ф., носители к-рых лежат в компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, отождествляется с сопряженным пространством $\mathscr{A}'[K]$, где

$$\mathscr{A}[K] = \liminf_{\Omega \supset K} \mathscr{H}(\Omega),$$

индуктивный предел берется по всем комплексным открытым множествам Ω, содержащим K. Для вещественных А. ф. определены преобразование Лапласа и свертка.

Лит.: [1] Хермандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [2] Шапира П., Теория гиперфункций, пер. с франц., М., 1972; [3] Ефимов Г. В., Нелокальные взаимодействия квантованных полей, М., 1977.

В. В. Жаринов.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ, элемент аналитической функции,— см. *Полная аналитическая функция.*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ обобщенной функции — представление *обобщенной функции* в виде суммы обобщенных *граничных значений* аналитических функций. Широко применяется в теории обобщенных функций, в теории линейных уравнений с частными производными, в аксиоматич. квантовой теории поля, явилось мотивировкой введения понятия *гиперфункции* как дальнейшего расширения классич. понятия функции.

Пусть O — область в $\mathbb{R}^n$ и $\mathscr{F}(O)$ — основное пространство, состоящее из функций, определенных в области O. Аналитическим представлением обобщенной функции $f \in \mathscr{F}'(O)$ называется всякое равенство вида

$$f = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{bv} f_j,$$

где справа стоят обобщенные граничные значения $\operatorname{bv} f_j$ в $\mathscr{F}'(O)$ функций $f_j(z)$, аналитических в тубоидах $D_j(O)$. Во всех разумных пространствах всякая обобщенная функция обладает А. п. Неоднозначность А. п. обобщенной функции описывается *Боголюбова теоремой «острие клина»*, точнее, ее вариантом:

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{bv} f_j = 0$$

тогда и только тогда, когда существуют функции $f_{jk}(z) = -f_{kj}(z)$, аналитические в тубоидах $D_{jk}(O) = D_{kj}(O) \supset D_j(O) \cup D_k(O)$, $j,k = 1, \ldots, N$, имеющие обобщенные граничные значения в $\mathscr{F}'(O)$, и такие, что

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{N} f_{jk}(z),\quad z \in D_j(O),\quad j = 1,\ldots,N.$$

Приведенные результаты справедливы, напр., в классах *Шварца распределений*, *ультрараспределений*, *Фурье гиперфункций* и *Фурье ультрагиперфункций*.

В. В. Жаринов.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ функции — доопределение функции $f_0(z)$, голоморфной в области D_0 плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, то есть однозначной и аналитической в D_0, до функции $f(z)$, голоморфной в более обширной области D, содержащей D_0, причем в исходной области D_0 функция $f(z)$ совпадает с $f_0(z)$. Отправным понятием в теории А. п. является понятие аналитического элемента, или просто элемента (D_0, f_0), состоящего из области D_0 и голоморфной в D_0 функции f_0. При этом теоретически всегда возможно ограничиться рассмотрением простейших канонических элементов (K_0, f_0), состоящих из степенного ряда

$$f_0 = f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

и его круга сходимости $K_0 = \{z: |z - z_0| < R_0\}$ с центром $z_0 \in \mathbb{C}$ и радиусом $R_0 > 0$. Приняв за центр ряда другую точку $z_1 \neq z_0$ этого круга и пересчитав коэффициенты, напр. по формулам Тейлора $b_n = f^{(n)}(z_1)/n!$, получают новый элемент (K_1, f_1), состоящий из степенного ряда

$$f_1 = f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n$$

и его круга сходимости $K_1 = \{z: |z - z_1| < R_1\}$. Может оказаться (см. рис. 1), что $R_1 > R_0 - |z_1 - z_0|$, то есть круг K_1

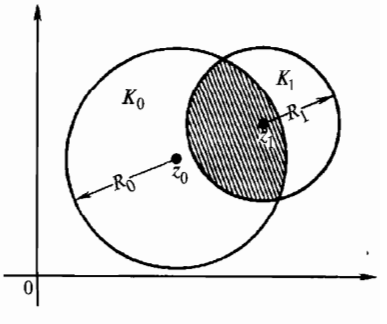


Рис. 1. Непосредственное аналитическое продолжение.

выходит за пределы круга K_0. Тогда говорят, что канонич. элементы (K_1, f_1) и (K_0, f_0) составляют непосредственное А. п. друг друга через общую (заштрихованную) часть кругов K_0 и K_1. Элемент (K_0, f_0) допускает А. п. в граничную точку ζ его круга сходимости, $|\zeta - z_0| = R_0$, если для нек-рого непосредственного А. п. (K_1, f_1) эта точка ζ попадает в

круг K_1; граничная точка ζ называется особой точкой, если А. п. в нее невозможно. На границе круга сходимости любого степенного ряда имеется, по крайней мере, одна особая точка.

Выбрав на плоскости $\mathbb{C}$ какую-либо кривую L, соединяющую центр исходного элемента z_0 с нек-рой точкой z_N (см. рис. 2), и постепенно осуществляя процесс непосред-

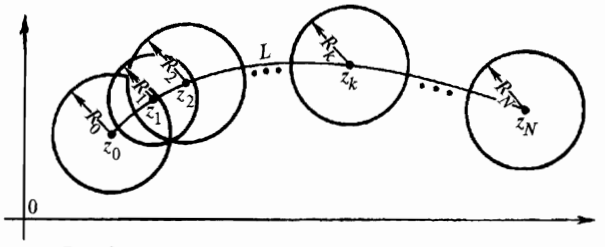


Рис. 2. Аналитическое продолжение вдоль кривой L.

ственного А. п. вдоль кривой L, получают цепочку канонич. элементов (K_0, f_0), (K_1, f_1), ..., (K_N, f_N), осуществляющую А. п. исходного элемента (K_0, f_0) в общую часть всех кругов цепочки $K_0, K_1, ..., K_N$ и позволяющую, в частности, вычислить значение функции f в точке z_N. Следует иметь, однако, в виду, что этот процесс А. п. осуществим не всегда (не для всех кривых L и не для всех точек z_N). Во-первых, все граничные точки исходного круга сходимости K_0 могут оказаться особыми; в этом случае говорят, что окружность $|z-z_0| = R_0$ круга сходимости K_0 есть естественная граница функции f_0. Во-вторых, при А. п. вдоль кривой L точка z_N может оказаться особой, то есть радиусы сходимости R_k при приближении к z_N будут настолько быстро уменьшаться, что z_N не попадает ни в один из кругов R_k. В-третьих, при А. п. вдоль различных кривых L в одну и ту же точку z_N могут получаться различные канонич. элементы (K_N, f_N) с центром z_N, то есть при А. п. исходной однозначной функции f_0 может возникнуть многозначная аналитич. функция f.

Несмотря на свою теоретич. простоту, процесс А. п. с помощью канонич. элементов малоэффективен. Поэтому с давних пор в вопросах А. п. прибегают к самым разнообразным иным методам А. п. Сущность этих методов сводится к тому, что используются различные аналитич. представления исходной функции, позволяющие так или иначе расширить ее область определения (в виде рациональных дробей; интегралов, зависящих от параметра; различных функциональных рядов), или же используются функциональные и дифференциальные уравнения, характерные для данной функции, свойства периодичности, четности и т. п.

Напр., степенной ряд

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

определяет аналитич. функцию $f_0(z)$ в его круге сходимости $K_0 = \{z: |z| < 1\}$. Пользуясь формулой суммы бесконечной геометрич. прогрессии, получают выражение для f_0 в виде рациональной дроби

$$f_0(z) = 1/(1-z),$$

к-рое в данном простейшем примере и дает А. п. функции f_0 на всю плоскость $\mathbb{C}$ с выброшенной одной особой точкой $z=1$. Несколько более сложный пример доставляет гамма-функция $\Gamma(z)$, обобщающая понятие факториала $n!$ на комплексные числа z и первоначально определяемая эйлеровым интегралом второго рода:

$$\Gamma(z) = \int_0^z x^{z-1} e^{-x}\, dx$$

всюду в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$ (заштрихована на рис. 3). А. п. гамма-функции можно постепенно осуществить, используя характерное для нее функциональное уравнение

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$$

для вычисления значений $\Gamma(z)$ сначала в точках полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > -1$, затем $\mathrm{Re}\, z > -2$ и т. д. При этом гамма-функция оказывается уже определенной всюду на плоскости $\mathbb{C}$, кроме точек $z = 0, -1, -2, ...$, к-рые для нее являются особыми.

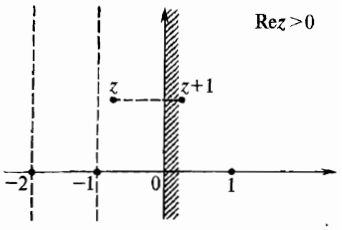


Рис. 3. Аналитическое продолжение гамма-функции $\Gamma(z)$.

Вообще, вопрос об определении положения особых точек при А. п. является одним из основных в этой теории.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

Е. Д. Соломенцев.

АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР – см. *Осциллятор.*

АНДРОНОВА – ХОПФА БИФУРКАЦИЯ – см. *Турбулентности возникновение.*

АННУЛЯТОР (левый) множества X в R – множество $\mathfrak{Z}_l(X)$ всех таких элементов y из R, что $yX = 0$. Здесь R – кольцо, или полугруппа с нулем. Аналогично определяется правый А. множества X в R: это есть множество

$$\mathfrak{Z}_r(X) = \{z \in R | Xz = 0\}.$$

Двусторонний А. множества X есть множество

$$\mathfrak{Z}(X) = \mathfrak{Z}_l(X) \cap \mathfrak{Z}_r(X).$$

В ассоциативном кольце (или полугруппе) R левый А. любого множества X будет левым идеалом, а если X является левым идеалом R, то $\mathfrak{Z}_l(X)$ – двусторонний идеал R; в неассоциативном случае эти утверждения, вообще говоря, не имеют места.

К. А. Жевлаков.

АНОМАЛИЯ в квантовой теории поля – свойство, состоящее в том, что некоторые законы сохранения, справедливые в классической теории, перестают выполняться при правильном учете квантовых эффектов. Происхождение А. связано с *ультрафиолетовыми расходимостями* квантовой теории поля, нуждающимися в регуляризации. Конкретный выбор процедуры регуляризации в квантовой теории поля, как правило, неоднозначен. При этом в нек-рых случаях регуляризацию невозможно провести так, чтобы удовлетворить одновременно всем требованиям симметрии исходной классич. теории поля. В результате нек-рые симметрии оказываются нарушенными. Напр., в квантовой электродинамике выполняется закон сохранения векторного тока $\partial j_\mu / \partial x_\mu = 0$, где $j_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ – 4-вектор тока, $\mu = 0,1,2,3$, $\psi(x)$ – *Дирака поле* электрона (x – пространственно-временная точка), γ_μ – *Дирака матрицы*, $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$ – эрмитово сопряженное поле. Наряду с векторным полем, в квантовой электродинамике можно также рассмотреть аксиальный ток $j_{\mu 5} = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)$, где $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. В силу *Дирака уравнения* дивергенция аксиального тока

$$\partial j_{\mu 5}/\partial x_\mu = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi,$$

где m – масса электрона (используется система единиц, в к-рой $\hbar = c = 0$). Из этого уравнения следует, что в пределе нулевой массы электрона аксиальный ток сохраняется, что является отражением теории *киральной симметрии.* Однако более аккуратное исследование показывает, что этот вывод неверен. Действительно, в определении аксиального тока стоит произведение антикоммутирующих операторов ψ и $\bar{\psi}$, взятых в одной точке x. Такое произведение нуждается в доопределении (регуляризации). Если ее провести так, чтобы не нарушить закон сохранения векторного тока, то

оказывается, что правильное выражение для дивергенции аксиального тока принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_{\mu 5}(x) = 2im\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) + \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}, \qquad (1)$$

где e – заряд электрона ($e^2 \approx 1/137$), $F_{\alpha\beta}$ – тензор напряженности электромагнитного поля, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ – абсолютно антисимметричный тензор, $\varepsilon^{0123} = 1$. Таким образом, аксиальный ток не сохраняется даже в пределе безмассового электрона. Это явление называется аксиальной аномалией (см. [1]).

Аналогичная аксиальная А. возникает в любой калибровочной теории поля и, в частности, в квантовой хромодинамике, где дивергенция аксиального тока кварков имеет вид, аналогичный (1) с напряженностью глюонного поля $G^a_{\mu\nu}(x)$ ($a = 1, ..., 8$ – цветовой индекс) и безразмерной константой связи сильного взаимодействия (цветовым зарядом) g вместо напряженности электромагнитного поля и электрич. заряда.

Другой важный пример – дилатационная аномалия. Любая квантовая теория поля, в лагранжиане к-рой нет размерных констант, обладает масштабной инвариантностью (скейлингом), то есть инвариантностью относительно растяжения координат $x_\mu \to \lambda x_\mu$ с одновременным умножением операторов полей на множитель λ в степени, равной размерности поля. Согласно *Нетер теореме*, такой инвариантности в классич. теории поля отвечает сохраняющийся дилатационный ток

$$D_\mu(x) = x^\nu \theta_{\mu\nu}(x),$$

где $\theta_{\mu\nu}$ – симметрич. тензор энергии-импульса теории. Действительно, в силу уравнений движения тензор энергии-импульса сохраняется ($\partial\theta_{\mu\nu}/\partial x_\mu = 0$), так что дивергенция дилатационного тока равна следу тензора энергии-импульса, $\partial D_\mu/\partial x_\mu = \theta^\mu_\mu$, причем последняя величина равна нулю. Однако квантовая теория с безразмерной константой связи содержит логарифмич. ультрафиолетовые расходимости, к-рые необходимо регуляризовать и перенормировать. В результате конечные регуляризованные выражения оказываются зависящими от нек-рой размерной величины – импульса нормировки, или параметра шкалы, и масштабная инвариантность нарушается. Таким образом, с учетом квантовых эффектов $\partial D_\mu/\partial x_\mu = \theta^\mu_\mu \neq 0$. Напр., в квантовой хромодинамике (в пределе нулевой массы кварков) след тензора энергии-импульса пропорционален квадрату напряженности глюонного поля (см. [2]).

В современной теории элементарных частиц и квантовой теории поля А. играют важную роль. В частности, аксиальная А. типа (1) позволяет вычислить вероятность распада π^0-мезона на два фотона, поскольку, согласно *токов алгебре*, поле π^0 совпадает с дивергенцией аксиального поля кварков. Так как, согласно (1), амплитуда процесса пропорциональна сумме квадратов зарядов кварков, составляющих π^0-мезон, то из сравнения теоретически вычисленного времени жизни π^0 с его экспериментальным значением можно определить заряды кварков. Это сопоставление было одним из аргументов в пользу введения дополнительного квантового числа, характеризующего кварки, – *цвета*.

Другой пример – аксиальная А. в электрослабом взаимодействии. В отличие от квантовой электродинамики, в этой теории аксиальный ток непосредственно входит в лагранжиан взаимодействия и, таким образом, взаимодействует с калибровочным полем. Поэтому наличие А. ведет к внутренней противоречивости теории, напр. к отсутствию перенормируемости. Между тем в стандартной теории электрослабого взаимодействия лептоны и кварки внутри одного поколения фермионов вносят в А. вклады, равные по величине, но противоположные по знаку. Необходимость внутренней согласованности теории (то есть ее перенормируемости) требует сокращения А. Отсюда вытекает, что должно быть одинаковое число дублетов кварков и лептонов. В настоящее время действительно обнаружено по три дублета лептонов и кварков. Необходимость существования c-кварка, а позднее t-кварка, вытекающая из требования сокращения А., была осознана до экспериментального обнаружения этих частиц. Аналогичные ограничения возникают и для моделей *великого объединения взаимодействий*.

В квантовой хромодинамике существует проблема нонета псевдоскалярных мезонов. Из них восемь ($\pi^\pm$, π^0, $K^\pm$, K^0, $\bar{K}^0$, η) находят как псевдоголдстоуновские бозоны (см. *Голдстоуна теорема*), связанные со спонтанным нарушением почти точной киральной симметрии исходного лагранжиана квантовой хромодинамики. Девятый псевдоскалярный мезон η' гораздо тяжелее остальных восьми и не укладывается в эту схему. Трудность разрешается тем, что аксиальный ток, имеющий квантовые числа η'-мезона, не сохраняется даже в пределе безмассовых кварков из-за аксиальной А. Большая масса η'-мезона является указанием на то, что в вакууме квантовой хромодинамике существенны такие флуктуации глюонного поля $G^a_{\mu\nu}$, для к-рых величина

$$Q_f = \frac{g^2}{64\pi^2}\int dt\,d\boldsymbol{x}\,\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}G^a_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x})G^a_{\rho\sigma}(t,\boldsymbol{x}), \qquad (2)$$

называемая *топологическим зарядом*, отлична от нуля. Эти флуктуации не учитываются обычной теорией возмущений, для к-рой величина $Q_f = 0$. Таким образом, в вакууме квантовой хромодинамики существенную роль должны играть флуктуации нового типа, напр. *инстантоны*.

Лит.: [1] Джекив Р., Теоретико-полевые исследования в алгебре токов, пер. с англ., в сб.: Лекции по алгебре токов, М., 1977; [2] Collins J., Duncan A., Joglecar S.,«Phys. Rew.», 1977, v. 16 D, p. 438; [3] Nieuwenhuizen P. van, «Phys. Rep.», 1981, v. 68 C, p. 189; [4] Fradkin E.S., Tseytlin A.A., «Nucl. Phys.», 1982, v. 201 B, p. 469; [5] Polyakov A.M., «Phys. Lett.», 1981, v. 103 B, p. 207; [6] Морозов А. Ю., «Успехи физич. наук», 1986, т. 150, с. 337; [7] Бардин У. А., Аномалии, там же, с. 449.

Д. И. Дьяконов.

АНОМАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ – число, равное отклонению степени однородности взаимодействующего перенормированного квантового поля при масштабных преобразованиях 4-координат $x_\mu \to \lambda^{-1}x_\mu$ или 4-импульсов $p_\mu \to \lambda p_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ (где λ – некоторая постоянная величина) от обычной (канонической) размерности свободного поля (в системе $\hbar = c = 1$). Каноническая размерность поля определяется его одновременными перестановочными соотношениями; в импульсных единицах она равна 1 для скалярного поля и 3/2 для *Дирака поля*. Если для взаимодействующего поля $\varphi(p)$ справедливо соотношение $\varphi(\lambda p) = \lambda^d\varphi(p)$ (где число d характеризует степень однородности поля φ), то А. р. для скалярного поля $\gamma = d - 1$, а для поля Дирака $\gamma = d - 3/2$.

А. р. имеет динамич. природу – зависит от величины и характера действующих сил. Это можно проиллюстрировать на примере поведения волновой функции частицы на малых расстояниях r от центра сил в квантовой механике. Если потенциал $V(r)$ в уравнении Шредингера растет при $r \to 0$ как gr^{-2} (где g – нек-рая постоянная), что соответствует масштабной инвариантности на малых расстояниях, то волновая функция частицы в состоянии с орбитальным квантовым числом l ведет себя как $\psi_l(r) \sim r^{l+\gamma}$, где А. р.

$$\gamma = \sqrt{(l+1/2)^2 + 2mg} - 1/2 - l$$

(m – масса), то есть существенно отличается от поведения волновой функции свободной частицы

$$\psi_l(r) \sim r^l.$$

Квантовая теория поля обладает масштабной инвариантностью, если уравнение движения поля φ не содержит размерных параметров (типа массы), а константа связи g

принимает критич. значение g_0, при к-ром *бета-функция* в уравнении *ренормализационной группы* обращается в нуль. В конформно-инвариантной теории поля, характеризующейся исчезновением следа тензора энергии-импульса при $g=g_0$, А. р. является сохраняющейся величиной, зависящей от константы g_0.

Из уравнений ренормализационной группы следует, что поведение n-частичной *Грина функции* $\Gamma(p_1, ..., p_n)$ при изменении масштаба импульсов в области, где все скалярные произведения $p_i p_j$, $i,j=1, ..., n$, одного порядка ($\sim p^2$) и много больше квадратов масс частиц, эквивалентно (с точностью до изменения константы взаимодействия) поведению при изменении нормировочного импульса $\varkappa$. Если в пределе $p^2 \to \infty$ *инвариантный заряд* $\bar{g} \to g_0$, то

$$\Gamma(p^2, g) \to \left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right)^{\gamma\left(g_0^2\right)} \Gamma\left(\varkappa^2, g_0\right), \qquad (1)$$

а показатель степени γ выражается через А. р. операторов всех полей, образующих данную функцию Грина.

Понятие А. р. в обобщенном смысле широко используется также в *квантовой хромодинамике*, несмотря на то, что эта теория не имеет фиксированной критич. точки g_0, а обладает свойством *асимптотической свободы*. А. р. приближенно имеет смысл, если можно пренебречь массами частиц по сравнению с характерными масштабами внешних импульсов, входящих в задачу. В такой области будет осуществляться масштабная инвариантность. Так, амплитуды M в квантовой хромодинамике, определенные на масштабах $\varkappa_0^2$, преобразуются при изменении масштаба $\varkappa_0^2 \to \varkappa^2$ в соответствии с требованиями ренормализационной группы:

$$M\left(\varkappa^2\right) = M\left(\varkappa_0^2\right) \exp \int_{\varkappa_0^2}^{\varkappa^2} \bar{\gamma}(\varkappa'^2) \frac{d\varkappa'^2}{\varkappa'^2}. \qquad (2)$$

Зависимость $\bar{\gamma}$ от $\varkappa^2$ определяется инвариантным зарядом теории, и если он меняется медленно, то $\bar{\gamma}$ тоже меняется медленно. В частности, при постоянном $\bar{\gamma}$ формула (2) переходит в формулу (1). Поэтому в обобщенном смысле $\bar{\gamma}$ также может быть названа аномальной размерностью. Так же, как в формуле (1), эта величина выражается через А. р. всех операторов, входящих в амплитуду M.

В квантовой хромодинамике принято и несколько иное определение А. р. Поскольку $\bar{\gamma}$ обращается в нуль при отсутствии взаимодействия, то удобно определить

$$\gamma = \lim_{\alpha_s \to 0} \frac{\bar{\gamma}(\alpha_s)}{\alpha_s} 4\pi, \qquad (3)$$

где $\alpha_s(\varkappa^2)$ — *эффективный заряд* квантовой хромодинамики, а величина γ в первом приближении уже не зависит от импульсов. Выражение (2) при этом приобретает вид

$$M\left(\varkappa^2\right) = M\left(\varkappa_0^2\right)\left(\frac{\alpha_s\left(\varkappa_0^2\right)}{\alpha_s\left(\varkappa^2\right)}\right)^{\gamma/b}, \qquad (4)$$

где $b=11-(2/3)N_f$, а N_f — число ароматов кварков.

А. р. может проявиться при изучении функций Грина квантовой теории поля в глубоко евклидовой области, то есть при больших пространственноподобных импульсах. Примером физич. процесса, при к-ром наблюдалась приближенная масштабная инвариантность, может служить глубоко неупругий процесс рассеяния электрона на протоне. В этом случае моменты структурной функции протона изменяются в зависимости от квадрата переданного 4-импульса согласно формуле (4).

Существует, однако, ряд величин, к-рые не могут приобретать А. р. Таковы все сохраняющиеся величины и их локальные токи, дивергенция к-рых равна нулю (напр. 4-вектор электромагнитного тока или тензор энергии-импульса).

Понятие А. р. широко используется также в статистич. физике (в теории конденсированных сред) для описания поведения характеристик системы (плотности, теплоемкости, магнитной восприимчивости и др.) вблизи температуры фазового перехода $T=T_c$, когда длина корреляций $\xi \sim (T-T_c)^{-\nu}$ становится значительно больше атомных размеров и является единственным существенным параметром длины. Изучение А. р. различных характеристик позволяет судить о степени их зависимости от $(T-T_c)$, то есть о критич. индексах.

Лит.: [1] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [2] Ма Ш., Современная теория критических явлений, пер. с англ., М., 1980; [3] Андреев И. В., Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях, М., 1981; [4] Wilson K., «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1499; [5] Индурайн Ф., Квантовая хромодинамика, пер. с англ., М., 1986.

А. В. Ефремов.

АНОСОВА ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ — см. *Усреднения метод.*

АНОСОВА СИСТЕМА — см. *Гиперболическая динамическая система, У-система.*

АНОСОВА ТЕОРЕМА об усреднении — теорема, дающая обоснование методу усреднения для *быстро-медленных систем*. См. *Усреднения метод.*

АНСАМБЛЬ в статистической механике — см. *Большой канонический ансамбль, Канонический ансамбль, Классический ансамбль, Микроканонический ансамбль, Статистический ансамбль, Эквивалентность ансамблей.*

АНСАМБЛЬ динамических систем — см. *Динамическая система.*

АНТИАВТОДУАЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЕ — см. *Инстантон.*

АНТИГРУППИРОВКА ФОТОНОВ, разгруппировка фотонов,— не имеющий классических аналогов квантовый эффект преимущественного излучения одиночных фотонов, противоположный *группировке фотонов*. Описывается условием

$$G^{(2)}(0) \leqslant G^{(2)}(\tau)$$

для степени когерентности (см. *Излучения статистика*).

А. С. Шумовский.

АНТИДЕСИТТЕРОВСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — см. *Де Ситтера группа.*

АНТИДУАЛЬНОЕ ПОЛЕ — см. *Дуальность.*

АНТИИНСТАНТОН — см. *Инстантон.*

АНТИКВАРК — см. *Кварк.*

АНТИКИНК — см. *Кинк.*

АНТИКОММУТАТИВНОСТЬ — см. *Ли алгебра.*

АНТИКОММУТАТОР — билинейная операция, заданная в векторном пространстве L с определенным для его элементов возведением в целую степень и сопоставляющая паре элементов A, B из L третий элемент $[A, B]_+$, вычисляемый по следующему правилу:

$$[A,B]_+ = [(A+B)^2 - A^2 - B^2].$$

Круглые скобки можно раскрывать, только если в L определена операция умножения, тогда

$$[A,B]_+ = AB + BA.$$

Пространство L с заданным на нем А. называется йордановой алгеброй. Такие алгебры используют в алгебраич. теории наблюдаемых для физич. системы. В терминах А. формулируются канонич. перестановочные соотношения операторов рождения и гибели для статистики Ферми—Дирака.

В. Н. Сушко.

АНТИКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение в окрестности точки комплексной плоскости, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через данную точку, и меняющее ориентацию. А. о. задается комплексно сопряженной к аналитич. функции и обладает свойствами *конформного отображения* с вполне естественными уточнениями.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 2. *Ю. Е. Хохлов.*

АНТИСАМОДУАЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЕ – см. *Инстантон.*

АНТИСИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР, кососимметрический тензор,– ковариантный (либо контравариантный) *тензор*, координаты которого меняют знак при нечетной перестановке индексов и не меняют при четной перестановке. *В. В. Трофимов.*

АНТИСИММЕТРИЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО ФОКА – см. *Фока пространство.*

АНТИСОЛИТОН – см. *Кинк.*

АППЕЛЯ УРАВНЕНИЯ – обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие движение как голономных, так и неголономных систем, установленные П. Аппелем [1]. Иногда А. у. называются уравнениями Гиббса – Аппеля, так как для голономных систем ранее их установил Дж. Гиббс [3]. А. у. в независимых лагранжевых координатах q_s, $s=1, \ldots, n$, имеют вид уравнений 2-го порядка

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i^*, \ i=1, \ldots, k \leqslant n. \qquad (1)$$

Здесь

$$S = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu w_\nu^2$$

(m_ν и w_ν – массы и ускорения N точек системы) – энергия ускорения системы, выраженная таким образом, чтобы она содержала вторые производные только от координат q_i, $i=1, \ldots, k$, вариации к-рых рассматриваются как независимые, Q_i^* – обобщенные силы, соответствующие координатам q_i, получаемые как коэффициенты при независимых вариациях δq_i в выражении суммы элементарных работ заданных активных сил F_ν на возможных перемещениях δr_ν:

$$\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \delta r_\nu = \sum_{i=1}^{k} Q_i^* \delta q_i.$$

При вычислении S и Q_i^* зависимые $\dot{q}_i$ (δq_j), $j=k+1, \ldots, n$, выражаются через независимые скорости (вариации) разрешением $n-k$ уравнений неголономных связей (см. *Неголономная система*), выраженных в обобщенных координатах q_s (и уравнений для δq_s, получаемых из последних). Дифференцированием по времени t найденных выражений для $\dot{q}_j$ получаются выражения $\ddot{q}_j$ через $\ddot{q}_i$.

Уравнения (1) совместно с $n-k$ уравнениями неинтегрируемых связей образуют систему (порядка $n+k$) n дифференциальных уравнений для n неизвестных q_s.

В случае голономной системы $k=n$ все скорости q_s и вариации δq_s независимы, $Q_i^*=Q_i$ и уравнения (1) представляют собой иную запись *Лагранжа уравнений* 2-го рода.

А. у. в квазикоординатах π_r, где

$$\dot{\pi}_r = \sum_{i=1}^{n} a_{r_i} \dot{q}_i, \quad r=1, \ldots, k, \qquad (2)$$

имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_r} = \Pi_r, \quad r=1, \ldots, k \leqslant n. \qquad (3)$$

Здесь S – энергия ускорений, выраженная через вторые производные $\ddot{\pi}_r$ по времени от квазикоординат, Π_r – обобщенные силы, соответствующие квазикоординатам. Уравнения (3) совместно с $n-k$ уравнениями неинтегрируемых связей и k уравнениями (2) образуют систему $n+k$ дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно такого же числа неизвестных q_s, $s=1, \ldots, n$ и $\dot{\pi}_r$, $r=1, \ldots, k$.

А. у. являются наиболее общими уравнениями движения механич. систем.

Лит.: [1] Appell P. E., «Comp. Rend.», 1899, t. 129; [2] его же, «J. reine und angew. Math.», 1900, Bd 122, S. 205–08; [3] Gibbs J. W., «Amer. J. Math.», 1879, v. 2, p. 49–64. *В. В. Румянцев.*

АППРОКСИМИРУЮЩИЙ ГАМИЛЬТОНИАН – *гамильтониан* системы многих тел, который строится по определенным правилам из исходного модельного гамильтониана, является термодинамически эквивалентным ему и имеет более простую структуру. В ряде случаев удается построить А. г., к-рый допускает явное вычисление статистич. суммы и корреляционных функций в термодинамич. пределе. Интерес может представлять также сведéние исходной задачи к исследованию более простой, хотя и не точно решаемой модели.

Метод А. г. является математически строгим методом исследования в статистич. механике. Он включает в себя следующие взаимосвязанные компоненты: 1) описание классов модельных гамильтонианов, допускающих существенно более простой А. г.; 2) правила построения соответствующего данному классу А. г.; 3) технику получения асимптотич. оценок, доказывающих термодинамич., а если возможно, и статистич. эквивалентность А. г. исходному гамильтониану; 4) исследование термодинамич. и статистич. свойств системы, описываемой А. г.

Идея А. г. впервые высказана Н. Н. Боголюбовым в 1947 в его работе по теории слабо неидеального бозе-газа (см. [1]). Она состояла в том, что в модельном гамильтониане операторы рождения и гибели частиц с нулевым импульсом, при условии наличия в системе бозе-конденсата, заменялись на c-числа. Величина последних определялась из термодинамич. соображений. Таким образом, для модельного гамильтониана строился А. г., зависящий от термодинамич. параметров, к-рый диагонализируется с помощью канонич. $(u-v)$-преобразования, впервые введенного в этой же работе. Были приведены убедительные аргументы в пользу того, что оба эти гамильтониана термодинамически эквивалентны. В 1960 Н. Н. Боголюбов (см. [1]) математически строго показал, что в термодинамич. пределе плотности энергии основного состояния и функции Грина для нулевой температуры, соответствующие модельному и аппроксимирующему гамильтонианам модели БКШ – Боголюбова (см. *БКШ-модель*) в теории сверхпроводимости, совпадают. Тем самым была строго доказана термодинамич. и статистич. эквивалентность этих гамильтонианов для нулевой температуры. Здесь был использован метод включения внешних источников, нарушающих симметрию исходного гамильтониана, к-рый впоследствии получил дальнейшее развитие в фундаментальной работе о *квазисредних* в задачах статистич. механики. Вывод асимптотич. оценок для функций Грина и корреляционных средних при отличном от нуля источнике существенно основывался на *асимптотической коммутативности* нек-рых операторных конструкций, входящих в гамильтониан взаимодействия, со всеми операторами Ферми рождения и гибели. Математич. структуру модели БКШ – Боголюбова с точки зрения асимптотич. коммутативности этих операторных конструкций между собой и со всеми операторами алгебры, порождаемой канонич. переменными, проанализировал Р. Хааг [2]. Он показал, что для придания смысла сходимости этих операторов, представляющих собой пространственные средние от локальных (квазилокальных) операторов, к c-числам в термодинамич. пределе, а также соответствующей сходимости модельного гамильтониана к А. г., необходимо тонкое исследование структуры пространства представлений канонич. переменных для бесконечной системы. Независимо от трудностей алгебраич. обоснования выделение в гамильтониане взаимодействия подобных операторных конструкций, к-рые асимптотически коммутируют со всеми канонич. переменными, и их замена по определенным правилам на c-числа утвердились в качестве основного эвристич. принципа построения А. г. в общем случае.

Основания современной формулировки метода А. г. были положены в 1965–66 в работах Н. Н. Боголюбова (мл.) (см. [3]). Он развил метод прямого доказательства термоди-

намич. эквивалентности модельного и А. г. при произвольных температурах и для целого класса модельных систем (см. [3]). (О дальнейшем развитии и обобщении метода А. г. см. [4]–[6].)

В качестве иллюстрации опишем нек-рые общие классы моделей, допускающих асимптотически точное решение (или существенное упрощение) методом А. г., и приведем соответствующую каждому классу форму А. г. Везде будет подразумеваться, что гамильтониан H (статистич. оператор $H=\Gamma-\mu N$, где Γ – гамильтониан, μ – химич. потенциал, N – оператор числа частиц) задан как самосопряженный оператор в подходящем гильбертовом пространстве и описывает систему частиц, заключенных в области Λ конечного объема $|\Lambda|$ в ν-мерном пространстве $\mathbb{R}^\nu$ или $\mathbb{Z}^\nu$. Введем обозначения: $\|\cdot\|$ – норма оператора, $[\cdot,\cdot]$ – коммутатор, A^+ – оператор, сопряженный A, $A^\#$ обозначает либо A^+, либо A,

$$f_\Lambda[H]=-(\beta/\Lambda)^{-1}\ln \mathrm{Tr}\exp(-\beta H)$$

– плотность термодинамич. потенциала и

$$\langle A\rangle_H=\mathrm{Tr}(Ae^{-\beta H})/\mathrm{Tr}e^{-\beta H}$$

– среднее значение наблюдаемой A в канонич. (большом канонич.) ансамбле Гиббса для системы с гамильтонианом (статистич. оператором) H, $\mathrm{Tr}(\cdot)$ – след оператора, $\beta=(K_Б T)$, $K_Б$ – константа Больцмана, T – абсолютная температура, t-lim – термодинамич. предел.

1. Гамильтонианы с квадратичной по ограниченным интенсивным операторам формой (см. [4], [5], [7]). Для простоты предполагается, что квадратичная форма дана в канонич. виде:

$$H=T-|\Lambda|\sum_{k=1}^{r} g_k A_{\Lambda,k}A_{\Lambda,k}^+ +|\Lambda|\sum_{k=r+1}^{s} g_k A_{\Lambda,k}A_{\Lambda,k}^+,$$

где $g_k>0$, $T=T^+$, $|f_\Lambda[\mathrm{T}]|\leqslant M_0$ и для всех k, k', $k''=1,\ldots,s$:

$$\left\|A_{\Lambda,k}^\#\right\|\leqslant M_1,\quad \left\|\left[A_{\Lambda,k},A_{\Lambda,k'}^\#\right]\right\|\leqslant M_2|\Lambda|^{-1},$$
$$\left\|\left[A_{\Lambda,k}^\#,[A_{\Lambda,k'}T]\right]\right\|\leqslant M_{2T}|\Lambda|^{-1},$$
$$\left\|\left[A_{\Lambda,k}^\#,[A_{\Lambda,k'}^\#,A_{\Lambda,k''}]\right]\right\|\leqslant M_3|\Lambda|^{-2},$$

и, если $r<s$, то для всех $k=r+1,\ldots,s$ выполнено условие кластеризации

$$t\text{-}\lim\left\{\left\langle A_{\Lambda,k}A_{\Lambda,k}^+\right\rangle_{H_0(a,\bar b_\Lambda(a))}-\left|\left\langle A_{\Lambda,k}\right\rangle_{H_0(a,\bar b_\Lambda(a))}\right|^2\right\}=0,$$

где $\bar b_\Lambda(a)=\{\bar b_{\Lambda,k}(a)\}$ – решение системы уравнений $b_k=\langle A_{\Lambda,k}\rangle_{H_0(a,b)}$. В этом случае А. г. имеет вид

$$H_0(a,b)=T-|\Lambda|\sum_{k=1}^{r} g_k\left(a_kA_{\Lambda,k}^+ + a_k^*A_{\Lambda,k}-a_ka_k^*\right)+$$
$$+|\Lambda|\sum_{k=r+1}^{s} g_k\left(b_kA_{\Lambda,k}^+ + b_k^*A_{\Lambda,k}-b_kb_k^*\right),$$

причем (принцип минимакса):

$$t\text{-}\lim\left|\inf_{a\in\mathbb{C}^r}\sup_{b\in\mathbb{C}^{(s-r)}} f_\Lambda[H_0(a,b)]-f_\Lambda[H]\right|=0.$$

Для существования термодинамич. предела для $f_\Lambda[H]$ необходимо потребовать существование t-lim$f_\Lambda[H_0(a,b)]$ поточечно. Тогда

$$t\text{-}\lim f_\Lambda[H]=t\text{-}\lim\left\{\inf_{a\in\mathbb{C}^r}\sup_{b\in\mathbb{C}^{(s-r)}} f_\Lambda[H_0(a,b)]\right\}=$$
$$=\inf_{a\in\mathbb{C}^r}\sup_{b\in\mathbb{C}^{(s-r)}}\{t\text{-}\lim f_\Lambda[H_0(a,b)]\}.$$

Примером системы с квадратичной формой общего вида является модель сверхпроводника с магнитным фазовым переходом, в к-рой учитывается как взаимодействие типа БКШ, так и редуцированное обменное взаимодействие коллективизированных электронов с локализованными магнитными моментами (см. [4]). Следует заметить, что в частном случае $r=s$, когда нет взаимодействия типа отталкивания, необходимость в условии кластеризации отпадает. К случаю $r=s=1$ относятся, напр., модели БКШ – Боголюбова и Кюри – Вейсса.

2. Гамильтонианы с функцией от ограниченной, самосопряженной интенсивной наблюдаемой (см. [4]): $H=T-|\Lambda|\varphi(A_\Lambda)$, где $T=T^+$, $f_\Lambda[T]<\infty$, $A_\Lambda=A_\Lambda^+$, $\|A_\Lambda\|\leqslant M_1$, $\|[T,A_\Lambda]\|\leqslant M_2$. Функция $\varphi(x)$ дважды дифференцируема на интервалах $x\in \mathrm{I}\equiv[-M_1,M_1]$, причем $|\varphi''(x)|\leqslant K$, $x\in\mathrm{I}$. Кроме того, для $a\in S_\Lambda\subset\mathbb{R}^1$:

$$t\text{-}\lim\left\langle(A_\Lambda-a)^2\right\rangle_{H_0(a)}=0,$$

где А. г. имеет вид

$$H_0(a)=T-|\Lambda|\varphi'(a)(A_\Lambda-a)-|\Lambda|\varphi(a),$$

а S_Λ есть множество всех решений уравнения

$$a=\langle A_\Lambda\rangle_{H_0(a)}.$$

Тогда

$$t\text{-}\lim\left\{f_\Lambda[H]-\inf_{a\in S_\Lambda} f_\Lambda[H_0(a)]\right\}=0.$$

Если потребовать существование термодинамич. предела

$$F(x)=t\text{-}\lim f_\Lambda[T-x|\Lambda|A_\Lambda],$$

для всех $x\in\mathbb{R}^1$, то существует

$$t\text{-}\lim f_\Lambda[H]=\inf_{a\in S}\{t\text{-}\lim f_\Lambda[H_0(a)]\},$$

где $S\subset\mathbb{R}^1$ есть множество решений неравенств

$$-F'(\varphi'(a)-0)\leqslant a\leqslant -F'(\varphi'(a)+0).$$

Эти неравенства впервые получены в [8] как обобщение уравнения самосогласования на случай, когда $F(x)$ не дифференцируема. Если $F(x)$ – дифференцируемая функция $x\in\mathbb{R}^1$, то

$$S=\left\{a\in\mathbb{R}^1: a=t\text{-}\lim\langle A_\Lambda\rangle_{H_0(a)}\right\}.$$

Можно показать, что частный случай $\varphi''(a)>0$, $a\in\mathrm{I}$, описывает взаимодействие типа притяжения, а $\varphi''(a)<0$, $a\in\mathrm{I}$, – типа отталкивания. Нетривиальным примером системы этого класса служит модель, в к-рой A_Λ есть гамильтониан плоской модели Изинга со взаимодействием ближайших соседей. Случай аналитич. функции многих переменных рассмотрен в [8].

3. Гамильтонианы вида (см. [4]):

$$H=H_L+\sum_{k=1}^{M}\omega_kb_k^+b_k+|\Lambda|^{-1/2}\sum_{k=1}^{M}\lambda_k\left(b_kL_k^+ + b_k^+L_k\right),$$

где $H_L=H_L^+$, $f_\Lambda[H_L]<\infty$, b_k^+ и b_k, $k=1,\ldots,M$, – бозе-операторы рождения и гибели, $\omega_k\geqslant\omega_0>0$, $\lambda_k\geqslant 0$, $\|L_k^\#\|\leqslant C|\Lambda|$. А. г. имеет вид

$$H_0(\eta)=H_L+|\Lambda|\sum_{k=1}^{M}\left\{\omega_k\left(|\Lambda|^{-1/2}b_k^+ +\lambda_k\omega_k^{-1}\eta_k^*\right)\left(|\Lambda|^{-1/2}b_k+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\lambda_k\omega_k^{-1}\eta_k\right)-\lambda_k^2(\omega_k|\Lambda|)^{-1}\left(\eta_kL_k^+ +\eta_k^*L_k\right)+\lambda_k^2\omega_k^{-1}|\eta_k|^2\right\},$$

где $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_M)\in\mathbb{C}^M$. Тогда

$$0\leqslant\inf_{\eta\in\mathbb{C}^M} f_\Lambda[H_0(\eta)]-f_\Lambda[H]\leqslant O\left(|\Lambda|^{-1/3}\right),$$

причем $O(|\Lambda|^{-1/3})$ при $|\Lambda|\to\infty$ равномерно по температуре в любом ограниченном интервале.

Гамильтонианы этого типа используются для описания взаимодействия бозонного поля (фононы, фотоны) с веще-

ством, напр. *Дикке модель*, модель структурной неустойчивости типа удвоения периода, в к-рой зонные электроны взаимодействуют с выделенной фононной модой, модель сверхпроводника со структурной неустойчивостью (см. [4]).

4. Другие модели, к к-рым применим метод А. г. Вопрос об асимптотич. точности результатов, получаемых методом А. г. для давления в большом канонич. ансамбле Гиббса для системы многих взаимодействующих бозонов, исследовался Дж. Жинибром [9]. Используя идеи метода А. г., П. Хертел и В. Тирринг [10] показали, что для свободной энергии F_N системы из N фермионов с потенциалом взаимодействия типа гравитационного притяжения существует конечная при $N\to\infty$ плотность вида $N^{-7/3}F_N$, к-рая в точности воспроизводит уравнение Томаса–Ферми. Л. А. Пастур и А. Л. Фиготин [11] применили вариант метода А. г. в теории неупорядоченных спиновых систем. Н. М. Плакида и Н. С. Тончев [12] построили А. г. для модели кристалла с ангармонич. взаимодействием специального вида, в к-рой существенны как классич., так и квантовые флуктуации. С помощью новой техники асимптотич. оценок было показано, что эта модель точно решаема для произвольной размерности пространства и при наличии внешнего поля.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, тт. 1–3, К., 1970; [2] Haag R., «Nuovo Cim.», 1962, v. 25, p. 287–99; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974; [4] Боголюбов Н. Н. (мл.) и др. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике, София, 1981; [5] Боголюбов Н. Н. (мл.) и др., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 6, с. 3–45; [6] Боголюбов Н. Н. (мл.), Курбатов А. М., Петрина Д. Я., Санкович Д. П., в кн.: Советские научные обзоры, сер. С, Математическая физика, 1980, I; [7] Tindemans P. A. J., Capel H. W., «Physica», 1974, v. 75, p. 407–53; [8] Den Ouden L. W. J., Capel H. W., Perk J. H. H., «Physica», 1976, v. 85 A, p. 425–56; [9] Ginibre J., «Comm. Math. Phys.», 1968, v. 8, p. 26–51; [10] Hertel P., Thirring W., «Comm. Math. Phys.», 1971, v. 24, p. 22–36; [11] Пастур Л. А., Фиготин А. Л., «Теоретич. и математич. физика», 1978, т. 35, с. 193–210; [12] Плакида Н. М., Тончев Н. С., «Теоретич. и математич. физика», 1987, т. 72, с. 269–76.

Й. Г. Бранков.

АРНОЛЬДА ДИФФУЗИЯ – явление, связанное с неустойчивостью траекторий вполне интегрируемой *гамильтоновой системы* под действием малого гамильтонового возмущения. Для системы с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi,\varepsilon),\quad I\in\mathbb{R}^n,\quad \varphi \bmod 2\pi \in T^n,\quad 0<\varepsilon\ll 1,$$

где I, φ – сопряженные канонич. переменные, H_0 – невозмущенный гамильтониан, εH_1 – возмущение; явление А. д. состоит в том, что для сколь угодно малого ε существуют траектории, вдоль к-рых изменение переменной I превышает наперед заданную, не зависящую от ε величину. Гипотеза В. И. Арнольда (см. [1]) состоит в том, что в многомерной ($n\geqslant 3$) системе общего положения начальные данные для таких траекторий всюду плотны. Первый пример А. д. построен в [2], обсуждались и др. примеры (см. [5]).

Согласно *КАМ-теории*, если невозмущенный гамильтониан H_0 изоэнергетически невырожден, то большая часть фазового пространства и каждого многообразия уровня энергии заполнена инвариантными торами, близкими к торам $I=\text{const}$. Поэтому мера множества, на к-ром происходит А. д., стремится к 0 при $\varepsilon\to 0$. При двух степенях свободы ($n=2$) эти двумерные инвариантные КАМ-торы разделяют 3-мерное многообразие уровня энергии и А. д. невозможна. При $n\geqslant 3$ эти n-мерные торы не препятствуют А. д., поскольку не разделяют $(2n-1)$-мерное многообразие уровня энергии. Согласно *Нехорошева теореме*, в системе общего положения с аналитич. гамильтонианом средняя скорость А. д. экспоненциально мала ($O(\exp(-1/\varepsilon^a))$, в примере, приведенном в [2], порядка $\exp(-1/\sqrt{\varepsilon})$. Численные эксперименты показывают, что изменение переменных I при А. д. не имеет, по-видимому, направленного характера, а представляет собой более или менее случайное блуждание по резонансам вокруг инвариантных торов (см. [3], [4]). С этим и связано название «диффузия».

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Успехи математических наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 91–192; [2] его же, «Доклады АН СССР», 1964, т. 156, № 1, с. 9–12; [3] Лихтенберг А., Либерман М., Регулярная и стохастическая динамика, пер. с англ., М., 1984; [4] Chirikov B. V., «Phys. Rep.», 1979, v. 52, № 5, p. 265–379; [5] Wiggins S., Global bifurcations and chaos. Analytical methods, N. Y., 1988.

А. И. Нейштадт.

АРОМАТ – характеристика типа *кварка* или квантовое число, обозначающее сорт кварка (см. *Кварковая модель*). В настоящее время считается, что существует шесть сортов кварков. Это легкие u-, d-, s-кварки с массами

$$m_u\approx 5\text{МэВ},\ m_d\approx 10\text{МэВ},\ m_s\approx 150\text{МэВ},$$

тяжелые c-, b-кварки с массами

$$m_c\approx 1{,}5\text{ГэВ},\ m_b\approx 5\text{ГэВ},$$

и пока еще экспериментально не обнаруженный t-кварк. Для s-кварка соответствующее квантовое число носит название странность, c-кварка – очарование и b-кварка – красота. Кваркам приписывается значение этих квантовых чисел -1, а антикваркам $+1$. Кварки, имеющие одинаковые А., могут отличаться лишь *цветом* и образуют триплет относительно цветовой группы $SU(3)_{\text{color}}$. Странность, очарование и красота связаны с аналогично называемыми квантовыми числами *адронов*. Их численные значения определяются суммой соответствующих квантовых чисел, входящих в их состав кварков и антикварков. Суммарное значение этих характеристик адронов сохраняется в сильном и электромагнитном взаимодействиях и нарушается в процессах слабого взаимодействия.

А. Л. Катаев.

АСИММЕТРИЧНЫЙ ВОЛЧОК – см. *Волчок*.

АСИМПТОТИКА ПО ГЛАДКОСТИ обобщенной функции $f(x)$ на гладком многообразии M – асимптотическое разложение, ассоциированное с фильтрацией

$$D'(M)\supset\ldots\supset H^s(M)\supset\ldots$$

C^∞-модулей $H^s(M)$-пространств Соболева порядка s. В качестве фильтрации также используется фильтрация

$$C^0(M)\supset C^1(M)\supset C^2(M)\supset\ldots$$

пространствами гладких функций с равномерными нормами и др.

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ временна́я – асимптотические разложения при больших временах решений эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными.

Для линейных уравнений основными методами построения временных А. р. служат метод функций Грина, метод Фурье и другие способы интегрального представления решений. Функция Грина линейного дифференциального оператора

$$L(x,t,D)=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t)\,D^\alpha,\quad D=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\ldots,\partial/\partial x_n,\partial/\partial t),$$

с заданными (однородными) краевыми условиями на границе области Ω изменения переменных (x,t) удовлетворяет при каждом $(\xi,\tau)\in\Omega$ уравнению

$$L(x,t,D)G(x,t;\xi,\tau)=\delta(x-\xi,\,t-\tau).$$

В случае операторов с гладкими коэффициентами и нормальных граничных условий, обеспечивающих единственность решения краевой задачи $Lu=f$, последнее представляется в виде:

$$u(x,t)=\int_\Omega G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \qquad (1)$$

Асимптотика интеграла (1) при $t\to\infty$ может быть исследована методом перевала (Лапласа, стационарной фазы), для чего необходимы соответствующие оценки функции Грина. В случае постоянных коэффициентов L и отсутствия граничных условий роль G играет фундаментальное решение, выписываемое явно для классич. уравнений математич. физики (волнового, теплопроводности и др.).

Метод Фурье эффективен для построения временных А. р. при условии, что коэффициенты уравнения и граничные условия не зависят от времени. Так, задача рассеяния для нестационарного уравнения Шредингера с финитным потенциалом

$$iu_t + \Delta u - V(x)u = k^2 u,\ x \in \mathbb{R}^3,$$

имеет решение

$$u(x,t) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} C(k,\omega)\tilde{u}(x,\hat{k}) \exp(-ik^2 t)d\hat{k},\ \omega = \frac{\hat{k}}{k}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{u}(x,\hat{k}) = e^{ik\hat{x}} - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} V(y)\tilde{u}(y,\hat{k})\,dy$$

удовлетворяет интегральному *Липпмана—Швингера уравнению*. Его асимптотика при $r \to \infty$, $r = |x|$, дается формулой

$$\tilde{u}(x,\hat{k}) = \frac{2\pi i}{kr}\left(e^{-ikr}\delta(\omega + x/r) - e^{ikr}\left(\delta(\omega - x/r) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{ik}{2\pi} f(k, x/r)\right) + o\left(r^{-1}\right).\right.$$

Считая величину $s = r/2t$ ограниченной и используя метод стационарной фазы для интеграла (2), получаем главные члены временной А. р.:

$$u(x,t) = (2|t|)^{-3/2} C(-s,-x/r)e^{ir^2/4t} + O(|t|^{-2}), \quad t \to -\infty,$$

$$u(x,t) = (2t)^{-3/2}\left(C(s,x/r) + \frac{is}{2\pi} f(s,x/r)\int_{S^2} C(k,\omega)\,d\omega\right)e^{ir^2/4t} +$$
$$+ O(t^{-2}), \quad t \to +\infty.$$

Для нелинейных уравнений математич. физики процедуры построения временных А. р. связаны, в основном, с анализом устойчивости тех или иных автомодельных решений, а также с методом обратной задачи. Примером первого подхода может служить простейшее уравнение реакции — диффузии

$$u_t = u(1-u) + u_{xx},$$

известное как уравнение Колмогорова—Петровского—Пискунова. Ими было доказано, что временная А. р. задачи Коши с монотонным начальным условием $0 \leqslant u(x,\ 0) \leqslant 1$ представляет собой бегущую волну

$$u(x,\ t) = f(z) + o(1),$$

где

$$z = x + ct,\ c = 2 + O(\ln t/t),$$

а f является устойчивым решением уравнения

$$f'' - 2f' + f(1-f) = 0$$

с условиями $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = 1$.

Метод обратной задачи используется для асимптотич. интегрирования солитонных уравнений таких, как уравнение Кортевега—де Фриса, уравнение синус-Гордона, нелинейное уравнение Шредингера и др. Задача Коши для них в классе быстроубывающих начальных условий имеет временную А. р. в виде суммы N солитонов плюс убывающая по t быстроосциллирующая часть. Последняя строится явно в терминах матрицы рассеяния, отвечающей непрерывному спектру задачи рассеяния, порожденному начальным условием. Затем методом одевания добавляется N-солитонное решение, отвечающее дискретному спектру. В случае отсутствия дискретного спектра временная А. р. имеет следующий главный член (для нелинейного уравнения Шредингера $iu_t + u_{xx} - 2|u|^2 u = 0$):

$$u(x,t) = t^{-1/2}A(s)\exp\left\{it\left[s^2 - 2A^2(s)\frac{\ln t}{t} + \frac{\phi(s)}{t}\right]\right\} +$$
$$+ O(t^{-3/2}\ln t), \quad t \to \infty,$$

где $s = x/2t$, а функции $A(s)$, $\phi(s)$ явно выражаются через элементы матрицы рассеяния S для начального условия $u(x,\ 0)$, напр.

$$A^2(s) = -\frac{1}{2\pi}\ln|S_{11}(s)|.$$

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [2] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [4] Нейман Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [5] Николис Г., Пригожин И., Самоорганизация в неравновесных системах, пер. с англ., М., 1979; [6] Абловиц М., Сигур Х., Солитоны и метод обратной задачи, пер. с англ., М., 1987.

В. Ю. Новокшенов.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КОММУТАТИВНОСТЬ в статистической механике,— свойство операторов, коммутатор которых обращается в нуль в термодинамическом пределе. В методе *аппроксимирующего гамильтониана* представляет интерес А. к. нек-рых операторов между собой и со всеми операторами алгебры, порождаемой канонич. переменными.

На важность А. к. впервые указал Н. Н. Боголюбов в своей работе о слабо неидеальном бозе-газе (см. [1]). Пусть дана система одинаковых частиц, подчиняющихся *Бозе — Эйнштейна статистике* и занимающих пространственную область Λ объема $|\Lambda|$. В представлении вторичного квантования обозначим через b_p^+, b_p операторы рождения и гибели частицы в состоянии с импульсом p. Н. Н. Боголюбов заметил, что операторы $|\Lambda|^{-1/2}b_0$, $|\Lambda|^{-1/2}b_0^+$ коммутируют со всеми операторами b_p, b_p^+, $p \neq 0$, и асимптотически коммутируют между собой при $|\Lambda| \to \infty$. Поэтому он предположил, что если в термодинамич. пределе плотность бозе-конденсата n_0 отлична от нуля, то эти операторы будут вести себя в нек-ром смысле как классич. величины (*c*-числа) $n_0^{1/2}e^{i\alpha}$, $n_0^{1/2}e^{-i\alpha}$ соответственно. Ввиду градиентной инвариантности первого рода действительный фазовый угол α здесь произволен. Это представление позволило вывести эффективный гамильтониан, описывающий слабовозбужденные состояния системы как идеальный бозе-газ квазичастиц. Аналогично, в своей работе [2] о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости (см. *БКШ-модель*) Н. Н. Боголюбов заметил, что при определенных условиях, как *c*-числа себя ведут операторы

$$L = |\Lambda|^{-1}\sum_f \lambda(f)a_{-f}a_f$$

и

$$L^+ = |\Lambda|^{-1}\sum_f \lambda(f)a_f^+ a_{-f}^+,$$

где a_f^+, a_f — операторы рождения и гибели электрона в состоянии $f = (p,\ \sigma)$, p — вектор квазиимпульса, $\sigma = \pm 1/2$ — проекция спина, а $\lambda(f) = -\lambda(-f)$ — действительная кусочно непрерывная и равномерно ограниченная функция такая, что

$$|\Lambda|^{-1}\sum_f |\lambda(f)| \leqslant \text{const}$$

при $|\Lambda| \to \infty$. Поэтому в модельном гамильтониане можно пренебречь членом вида

$$-\frac{1}{2}|\Lambda|(L^+ - C^*)(L - C),$$

к-рый при подходящем выборе параметра $C \in \mathbb{C}$ дает асимптотически исчезающий вклад в термодинамику системы. Это позволило построить аппроксимирующий гамильтониан, к-рый допускает строгое и точное решение.

В 1962 Р. Хааг [3] исследовал математич. структуру модели БКШ — Боголюбова в термодинамич. пределе с точки зрения А. к. нек-рых операторов с операторами алгебры R, определенной как кольцо Неймана, порожденное всеми операторами вида

$$\Psi_\sigma(f) = \int \psi_\sigma(x)f(x)\,dx, \quad \Psi_\sigma^+(f) = \int \psi_\sigma^+(x)f(x)\,dx,$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x)$ — произвольная квадратично интегрируемая функция, $\psi_\sigma^+(x)$, $\psi_\sigma(x)$ — локальные операторы Ферми рождения и гибели, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$\psi_\sigma(x)\psi_{\sigma'}(x') + \psi_{\sigma'}(x')\psi_\sigma(x) = 0,$$
$$\psi_\sigma(x)\psi_{\sigma'}^+(x') + \psi_{\sigma'}^+(x')\psi_\sigma(x) = \delta_{\sigma\sigma'}\delta(x - x').$$

Лемма. Если «квазилокальная» величина $Q(x)$ содержит четное число операторов Ферми, то пространственное среднее

$$\overline{Q} = \lim_{|\Lambda|\to\infty} |\Lambda|^{-1}\int_\Lambda Q(x)\,dx$$

коммутирует со всеми операторами алгебры R. Квазилокальные величины, по Хаагу, имеют вид

$$Q(x) = \int F(z_1,\dots,z_n; z'_1,\dots,z'_m)\psi^+_{\sigma_1}(x+z_1)\dots$$

$$\dots\psi^+_{\sigma_n}(x+z_n)\psi_{\sigma'_1}(x+z'_1)\dots\psi_{\sigma'_m}(x+z'_m)\,dz_1\dots dz'_m,$$

где $F(z, z')$ – быстро убывающая по каждому из аргументов функция.

Для системы с бесконечным числом степеней свободы вырождение основного состояния означает, что гамильтониан допускает неэквивалентные приводимые представления основной алгебры, порождаемой канонич. переменными. В этом случае из А. к. нек-рых операторов со всей алгеброй не следует, что в термодинамич. пределе они переходят в c-числа.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., «Изв. АН СССР. Сер. физическая», 1947, т. 11, с. 77; [2] его же, Избранные труды в трех томах, т. 3, Киев, 1971; [3] Haag R., «Nuovo cim.», 1962, v. 25, p. 287–99.

Й. Г. Бранков.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СВОБОДА – свойство квантовой теории неабелевых *калибровочных полей*, состоящее в том, что интенсивность взаимодействия, переносимого неабелевыми калибровочными полями, стремится к нулю при неограниченном увеличении переданного при взаимодействии импульса. В координатном представлении это соответствует исчезновению взаимодействия при уменьшении расстояния, на к-ром оно происходит, до нуля.

Именно такой характер поведения интенсивности взаимодействия между кварками наилучшим образом согласуется с наблюдаемой на опыте партонной картиной строения адронов. В этой картине адроны, участвующие в высокоэнергетич. процессах с большими передачами импульса, представляются как состоящие из точечных дискретных рассеивающих центров – партонов, к-рые с определенной степенью точности можно считать невзаимодействующими друг с другом. После открытия явления А. с. сложилась современная кварковополевая модель межкварковых взаимодействий, получившая название *квантовая хромодинамика*. В этой теории переносчиками сильного взаимодействия между кварками являются кванты неабелева калибровочного поля, связанного с наличием в природе локальной (цветовой) $SU(3)$-симметрии. При сопоставлении с партонной картиной кварки отождествляются с заряженными партонами, а кванты калибровочного поля – с электрически нейтральными партонами, переносящими около половины импульса адрона.

Интенсивность взаимодействия в квантовой теории поля определяется величиной эффективной константы связи ($\bar\alpha$), зависящей от отношения квадрата переданного импульса (Q^2) к размерному параметру шкалы (μ^2), к-рый возникает в теории в результате явления так наз. *размерной трансмутации* и совместно с затравочной константой связи (α) параметризует теорию.

Полученное методом ренормализационной группы с учетом первого порядка теории возмущений выражение для эффективной константы связи в квантовой хромодинамике имеет вид

$$\bar\alpha_s\left(Q^2/\mu^2,\alpha_s\right) = \frac{\alpha_s}{1+\alpha_s\beta_1\ln\left(Q^2/\mu^2\right)}, \quad \beta_1 = \frac{11}{4\pi} - \frac{n}{6\pi},$$

где n – число различных сортов кварков.

Современные экспериментальные данные указывают, что $n\leqslant 6$, поэтому коэффициент β_1 заведомо положителен и

$$\bar\alpha_s(Q^2/\mu^2,\,\alpha_s)\to 0$$

при $Q^2\to\infty$.

Как видно, коэффициент β_1 слагается из двух слагаемых. Одно из них, пропорциональное n, происходит из *Фейнмана диаграмм* с внутренними фермионными петлями и, имея отрицательный знак, благоприятствует росту $\bar\alpha_s$ при увеличении Q^2. Второе, положительное слагаемое $11/4\pi$ определяется диаграммами только с самодействием калибровочного поля, не содержащими виртуальных фермионов. Поэтому явление А. с. целиком обусловлено нелинейными эффектами самого квантового калибровочного поля.

Вместо параметризации теории затравочной константой α_s и размерным параметром μ удобно использовать параметризацию с помощью размерного параметра шкалы

$$\Lambda = \mu\exp\left(-1/2\beta_1\alpha_s\right).$$

В этой параметризации

$$\bar\alpha_s\left(Q^2\right) = \left[\beta_1\ln\left(Q^2/\Lambda^2\right)\right]^{-1}.$$

Строго говоря, последняя формула описывает лишь асимптотику эффективной константы связи при $Q\gg\Lambda$. Для определения характера поведения $\bar\alpha_s$ в более широкой области требуется использовать информацию, полученную в двухпетлевом приближении теории возмущений. В этом случае решение ренормгруппового уравнения представляется в виде

$$\bar\alpha_s^{(2)}\left(Q^2\right) = \frac{1}{\beta_1\ln\left(Q^2/\Lambda^2\right)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{\ln\ln\left(Q^2/\Lambda^2\right)}{\ln\left(Q^2/\Lambda^2\right)},$$

где двухпетлевой коэффициент $\beta_2 = (153-19n)/24\pi^2$. Указанная формула передает не только феномен А. с. при больших Q^2, но и указывает на выход в область сильной связи ($\bar\alpha_s(Q^2)\geqslant 1$) при $Q\sim\Lambda$. Таким образом, физич. смысл параметра шкалы Λ состоит в том, что числовое значение Λ, к-рое, как следует из обработки экспериментальных данных, оказывается величиной порядка 100 МэВ, дает характерный масштаб области сильной связи. *В. В. Белокуров.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ – см. *Устойчивость, Устойчивость по Ляпунову.*

АСИМПТОТИЧЕСКИ НУЛЕВОЙ ЭЛЕМЕНТ – см. *Асимптотическое разложение* элемента.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ПРЕДСКАЗУЕМОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ – см. *Сингулярности пространства-времени.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ в методе аппроксимирующего гамильтониана – используемые для доказательства термодинамической (или статистической) эквивалентности модельного гамильтониана и *аппроксимирующего гамильтониана* оценки, мажорирующие разность соответствующих плотностей термодинамических потенциалов (корреляционных функций) величинами, исчезающими в термодинамическом пределе. Впервые применялись Н. Н. Боголюбовым в 1960 (см. [1]) для оценки разности плотностей энергий основных состояний модельного и аппроксимирующего гамильтонианов БКШ – Боголюбова модели (см. *БКШ-модель*), а также и для оценки разностей соответствующих функций Грина и корреляционных средних при нулевой температуре. В общем случае ненулевой температуры специальная техника А. о. развита Н. Н. Боголюбовым (мл.) (см. [2]) для целого класса модельных систем, гамильтониан к-рых содержит квадратичную форму, построенную на ограниченных операторах. В дальнейшем техника А. о. развивалась в двух направлениях: 1) обобщения с целью применения к другим классам систем, напр. с неполиномиальным взаимодействием или взаимодействием, содержащим неограниченные (Бозе) операторы (см. [3]); 2) получение более быстро сходящихся мажорационных оценок (см. [4]).

А. о. для разности плотностей термодинамических потенциалов. В основе А. о. этого типа

лежит *Боголюбова неравенство* для плотностей свободных энергий, соответствующих модельному и аппроксимирующему гамильтонианам. Пусть $H = H_0 + H_1$ и H_0 – произвольные самосопряженные операторы, удовлетворяющие условию существования плотности термодинамич. потенциала

$$f_\Lambda[\Gamma] = -(\beta|\Lambda|)^{-1} \ln \mathrm{Tr} \exp(-\beta\Gamma), \quad \Gamma = H, H_0,$$

где $\beta = (k_Б T)^{-1}$, $k_Б$ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, $|\Lambda|$ – объем области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ (или $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ в случае решеточной системы), занимаемой частицами системы. Тогда:

$$|\Lambda|^{-1}\langle H_1\rangle_H \leqslant f_\Lambda[H] - f_\Lambda[H_0] \leqslant |\Lambda|^{-1}\langle H_1\rangle_{H_0},$$

где $\langle\cdot\rangle_\Gamma = \mathrm{Tr}(\cdot e^{-\beta\Gamma})/\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\Gamma}$ – гиббсовское среднее, $\mathrm{Tr}(\cdot)$ – след оператора. Технику А. о. проще всего проиллюстрировать на примере модельной системы с гамильтонианом вида

$$H(h) = T_\Lambda - \frac{1}{2} J|\Lambda| A_\Lambda^2 - h|\Lambda| A_\Lambda,$$

где $J > 0$, $h \in \mathbb{R}^1$, $T_\Lambda = T_\Lambda^+$ – самосопряженный оператор, для к-рого существует $|f_\Lambda[T_\Lambda]| < \infty$, A_Λ – самосопряженный и ограниченный оператор, $\|A_\Lambda\| \leqslant M$, коммутирующий с T_Λ. В этом случае аппроксимирующий гамильтониан имеет вид

$$H_0(c,h) = T_\Lambda - |\Lambda|(Jc + h)A_\Lambda + \frac{1}{2} J|\Lambda|c^2,$$

где c – действительный параметр. Применение неравенства Боголюбова приводит к цепочке неравенств

$$0 \leqslant \frac{1}{2} J\left\langle (A_\Lambda - c)^2\right\rangle_{H_0(c,h)} \leqslant$$

$$\leqslant f_\Lambda[H_0(c,h)] - f_\Lambda[H(h)] \leqslant \frac{1}{2} J\left\langle (A_\Lambda - c)^2\right\rangle_{H(h)}.$$

Из условия наилучшей аппроксимации $f_\Lambda[H(h)]$ получают вариационный принцип минимума свободной энергии:

$$0 \leqslant \inf_{c\in\mathbb{R}^1} f_\Lambda[H_0(c,h)] - f_\Lambda[H(h)] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} J\left\langle \left(A_\Lambda - \langle A_\Lambda\rangle_{H(h)}\right)^2\right\rangle_{H(h)} = -\frac{\beta J}{2|\Lambda|}\frac{\partial^2 f_\Lambda[H(h)]}{\partial h^2}.$$

Можно показать, что при любом $h \in \mathbb{R}^1$

$$\inf_c f_\Lambda[H_0(c,h)]$$

достигается в нек-рой конечной точке $c = \bar{c}_\Lambda(h)$. Обозначим

$$\Delta_\Lambda(h) \equiv f_\Lambda[H_0(\bar{c}_\Lambda(h),h)] - f_\Lambda[H(h)]$$

и проинтегрируем это неравенство по h в интервале $[h_1, h_1 + l] \in \mathbb{R}^1$. Применяя теорему о средней точке и учитывая, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial h} f_\Lambda[H(h)]\right| = \left|\langle A_\Lambda\rangle_{H(h)}\right| \leqslant M,$$

получают оценку

$$0 \leqslant \Delta_\Lambda(\xi) = l^{-1}\int_{h_1}^{h_1+l} dh\, \Delta_\Lambda(h) \leqslant \frac{\beta J}{|\Lambda| l},$$

где $\xi \in (h_1, h_1 + l)$, справедливую при любых $h_1 \in \mathbb{R}^1$ и $l > 0$. Далее, принимая во внимание, что

$$f_\Lambda[H_0(\bar{c}_\Lambda(h_1),h_1)] - f_\Lambda[H_0(\bar{c}_\Lambda(\xi),\xi)] \leqslant$$
$$\leqslant f_\Lambda[H_0(\bar{c}_\Lambda(\xi),h_1)] - f_\Lambda[H_0(\bar{c}_\Lambda(\xi),\xi)] \leqslant M|h_1 - \xi|,$$

можно вывести неравенства

$$\Delta_\Lambda(h_1) \leqslant \Delta_\Lambda(\xi) + 2M|h_1 - \xi| \leqslant \frac{\beta J}{|\Lambda| l} + 2Ml.$$

Оптимальную мажорационную оценку получают, минимизируя правую часть по $l > 0$, что, в силу произвольности h_1, приводит к окончательной А. о.:

$$|\Delta_\Lambda(h)| \leqslant 2^{3/2}(M\beta J)^{1/2}|\Lambda|^{-1/2} \to 0$$

при $|\Lambda| \to \infty$.

В случае, когда операторы T_Λ и A_Λ не коммутируют, среднее $\langle(\delta A_\Lambda)^2\rangle_{H(h)}$, где $\delta A_\Lambda = A_\Lambda - \langle A_\Lambda\rangle_{H(h)}$ мажорируется выражением, содержащим вторую производную функции $f_\Lambda[H(h)]$ по параметру h (см. [2], [3]).

Случай наличия в гамильтониане члена со взаимодействием типа отталкивания:

$$H(h) = T_\Lambda + \frac{1}{2} g|\Lambda| A_\Lambda^2 - h|\Lambda| A_\Lambda,$$

где $g > 0$, принципиально отличается от рассмотренного выше случая притяжения тем, что неравенство Боголюбова дает

$$0 \leqslant f_\Lambda[H(h)] - f_\Lambda[H_0(c,h)] \leqslant \frac{1}{2} g\left\langle (A_\Lambda - c)^2\right\rangle_{H_0(c,h)}$$

и предыдущая техника А. о. становится неприменимой. Условие наилучшей аппроксимации приводит теперь к принципу максимума

$$0 \leqslant f_\Lambda[H(h)] - \sup_{c\in\mathbb{R}^1} f_\Lambda[H_0(c,h)] \leqslant \frac{1}{2} g\left\langle A_\Lambda - \bar{c}_\Lambda(h)^2\right\rangle_{H_0(\bar{c}_\Lambda(h),h)},$$

где $c = \bar{c}_\Lambda(h)$ – точка, в к-рой достигается

$$\sup_c f_\Lambda[H_0(c,h)].$$

Условие асимптотич. малости коррелятора в правой части последнего неравенства (условие кластеризации) необходимо для асимптотически точной аппроксимации $f_\Lambda[H(h)]$.

Технику получения А. о. в более общем случае, приводящем к принципу минимакса, а также для других классов модельных гамильтонианов см. в [3] и в приведенной там литературе.

А. о. для разности корреляционных функций. С появлением метода аппроксимирующего гамильтониана был поставлен вопрос о возможности асимптотически точного вычисления термодинамич. средних величин и корреляционных функций для модельной системы, усредняя не по исходному, а по более простому аппроксимирующему гамильтониану. Положительный ответ на этот вопрос следовал бы из более сильной, статистич. эквивалентности модельного и аппроксимирующего гамильтонианов, к-рая в общем виде пока не установлена. Большинство полученных А. о. позволяет доказать совпадение в термодинамич. пределе только определенного типа средних или квазисредних величин.

В одной из наиболее общих постановок задачи исследуемые корреляционные функции представляются как производные от плотности термодинамич. потенциала по нек-рым, специально введенным в гамильтониан системы, внешним полям. При условии, что имеется А. о. для близости плотностей термодинамич. потенциалов для модельного и аппроксимирующего гамильтонианов, и что нек-рые высшие производные ограничены, А. о. для близости соответствующих корреляционных функций можно получить с помощью *Колмогорова теоремы*. В случае, когда задача сводится к изучению сходимости первых производных, более сильный результат можно получить с помощью леммы (см. [2], [3]), основанной на односторонней ограниченности (сверху, либо снизу) второй производной от разности плотностей термодинамич. потенциалов.

Другая общая методика получения А. о. для одно- и многовременных корреляционных функций, T-произведений и функций Грина была развита в [2]. Ее идею можно проиллюстрировать на примере модельной системы с гамильтонианом

$$H = T_\Lambda - |\Lambda| \sum_{k=1}^s g_k A_{\Lambda,k} A_{\Lambda,k}^+,$$

где $g_k > 0$ и операторы T_Λ, $A_{\Lambda,k}$, $A_{\Lambda,k}^+$ удовлетворяют условиям термодинамич. эквивалентности аппроксимирующего гамильтониана $H_0(a)$, зависящего от комплексных парамет-

ров $a=(a_1, ..., a_s)\in\mathbb{C}^s$. Тогда имеет место оценка

$$0\leqslant f_\Lambda[H_0(\bar a_\Lambda)]-f_\Lambda[H]\leqslant\varepsilon_\Lambda\to 0$$

при $|\Lambda|\to\infty$, где $\bar a_\Lambda=(\bar a_{\Lambda,1},...,\bar a_{\Lambda,s})$ — точка, в к-рой достигается $\inf f_\Lambda[H_0(a)]$. Предположим еще существование предельной функции $t\text{-}\lim f_\Lambda[H_0(a)]$ для всех $|a_k|\leqslant 2M$, $k=1, ..., s$. Можно показать, что эта функция достигает абсолютного минимума по $a\in\mathbb{C}^s$ в нек-рой точке $\bar a_\infty$ такой, что все $|\bar a_{\infty,k}|\leqslant 2M_1$. Пусть имеет место равномерная по всем a_k: $|a_k|\leqslant 2M_1$ оценка

$$|f_\Lambda[H_0(a)]-t\text{-}\lim f_\Lambda[H_0(a)]|\leqslant\delta_\Lambda,$$

где $\delta_\Lambda\to 0$ при $|\Lambda|\to\infty$. Из уже сделанных предположений следует, что

$$|t\text{-}\lim f_\Lambda[H_0(\bar a_\infty)]-f_\Lambda[H]|\leqslant\delta_\Lambda+\varepsilon_\Lambda.$$

Рассмотрим теперь гамильтониан

$$\Gamma(\tau)=H+|\Lambda|\sum_{k=1}^s\tau_k g_k\left(A_{\Lambda,k}-\bar a_{\infty,k}\right)\left(A^+_{\Lambda,k}-\bar a^*_{\infty,k}\right).$$

Заметим, что $\Gamma(\{\tau_k=1\})=H_0(\bar a_\infty)$ и при $0<\tau_k<1$, $k=1, ..., s$, имеют место неравенства

$$f_\Lambda[H]\leqslant f_\Lambda[\Gamma(\tau)]\leqslant f_\Lambda[H_0(\bar a_\infty)].$$

Поэтому

$$0\leqslant f_\Lambda[H_0(\bar a_\infty)]-f_\Lambda[H]\leqslant 2\delta_\Lambda+\varepsilon_\Lambda,$$

откуда следует, что

$$f_\Lambda[\Gamma(\tau)]-f_\Lambda[H]\leqslant 2\delta_\Lambda+\varepsilon_\Lambda.$$

Применяя неравенство Боголюбова

$$|\Lambda|^{-1}\langle\Gamma(\tau)-H\rangle_{\Gamma(\tau)}\leqslant f_\Lambda[\Gamma(\tau)]-f_\Lambda[H],$$

получают окончательно А. о.:

$$\left\langle\left(A_{\Lambda,k}-\bar a_{\infty,k}\right)\left(A^+_{\Lambda,k}-\bar a^*_{\infty,k}\right)\right\rangle_{\Gamma(\tau)}\leqslant\frac{2\delta_\Lambda+\varepsilon_\Lambda}{g_k\tau_k}\to 0,\quad |\Lambda|\to\infty,$$

для всех $k=1, ..., s$.

О методах получения А. о. для разностей квазисредних в моделях систем, взаимодействующих с бозонным полем, см. [3], [5].

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды в трех томах, т. 3, Киев, 1971; [2] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.) и др., Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике, София, 1981; [4] Плечко В. Н., «Теоретич. и математич. физика», 1976, т. 28, с. 127; [5] Боголюбов Н. Н. (мл.), Плечко В. Н., «Докл. АН СССР», 1976, т. 228, № 5, с. 1061–64.

Й. Г. Бранков.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД — см. *Асимптотическое разложение.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД в квантовой механике — ряд, возникающий при решении уравнения Шредингера с помощью теории возмущений в тех случаях, когда нулевое значение малого параметра изменяет характер особых точек этого уравнения или его порядок (см. [1]). Типичный и широко используемый пример А. р.— решение уравнения Шредингера в квазиклассич. приближении или по методу Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (*ВКБ-методу*, см. [2]–[4]).

Пусть в одномерном стационарном уравнении Шредингера

$$\frac{d\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U(x))\psi(x)=0 \qquad (1)$$

малый параметр — постоянная Планка $\hbar$. Подстановкой

$$\psi(x)=\exp\left(\frac{1}{\hbar}\int dx\varphi(x)\right) \qquad (2)$$

уравнение (1) сводится к уравнению Риккати

$$\frac{1}{\hbar}\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{1}{\hbar^2}\varphi^2(x)+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U(x))=0, \qquad (3)$$

формальное решение к-рого ищется в виде ряда

$$\varphi(x)=\sum_{s=0}^\infty\varphi_s(x)\hbar^s. \qquad (4)$$

Для функций $\varphi_s(x)$ получаются рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(x)=\pm i\sqrt{2m(E-U(x))},\\&\varphi_1(x)=-\frac{1}{2\varphi_0(x)}\frac{d\varphi_0(x)}{dx},\\&\varphi_{s+1}(x)=-\frac{1}{2\varphi_0(x)}\left[\frac{d\varphi_s(x)}{dx}+\sum_{t=1}^s\varphi_t(x)\varphi_{s+1-t}(x)\right],\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$s=1, 2, ...$$

С физич. точки зрения $p(x)=\sqrt{2m(E-U(x))}$ представляет собой импульс классич. частицы с энергией E, движущейся в потенциальном поле $U(x)$. «Классически доступными» областями пространства являются области, в к-рых $E>U(x)$. Точки, являющиеся решениями уравнения $U(x)=E$, называются точками поворота. В физич. приложениях из ряда (4) обычно сохраняют два первых члена, что приводит к так наз. квазиклассич. волновой функции

$$\psi(x)\simeq\frac{c_1}{\sqrt{p(x)}}e^{\frac{i}{\hbar}\int^x d\xi\, p(\xi)}+\frac{c_2}{\sqrt{p(x)}}e^{-\frac{i}{\hbar}\int^x d\xi\, p(\xi)} \qquad (6)$$

в классически доступных областях пространства. При этом условие применимости приближения (6) есть

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\hbar}{p(x)}\right)\ll 1, \qquad (7)$$

то есть длина волны де Бройля $\lambda(x)=2\pi\hbar/p(x)$ должна мало меняться на расстоянии порядка ее самой. Это условие нарушается вблизи точек поворота. Если имеется только одна точка поворота $x=a$ и $U(x)>E$ при $x>a$, то исследование (см. [5]) решения уравнения (1), представленного в виде (2) и (4), приводит к следующему приближенному выражению для волновой функции во всем пространстве за исключением областей, близких к точке поворота.

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x)\simeq\frac{c}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^a d\xi\, p(\xi)+\frac{\pi}{4}\right),\quad x<a,\\&\psi(x)\simeq\frac{1}{2}c\frac{1}{[2m(U(x)-E)]^{1/4}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^x d\xi\sqrt{2m(U(x)-E)}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$x>a,$$

где c — нормировочная постоянная. Из (8) можно получить квазиклассич. оценку квантовых уровней энергии. Если классически доступная область пространства ограничена двумя точками поворота $a<x<b$, то

$$\frac{1}{\hbar}\int_a^b dx\, p(x)+\frac{\pi}{2}=(n+1)\pi, \qquad (9)$$

где $n=0, 1, 2, ...$ Условие (9) называется условием квантования Бора — Зоммерфельда.

А. р., получающиеся вышеописанным образом, можно строить и для многомерного уравнения Шредингера. Они находят применение во многих физич. задачах (напр. при рассмотрении высоковозбужденных состояний атомных и молекулярных систем, в теории излучения, в описании многоэлектронных систем и т. п.).

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., М., 1971; [2] Brillouin L., «C. r. Acad. sci. Paris», 1926, t. 183, p. 24; [3] Kramers H. A., «Z. Phys.», 1926, Bd 39, S. 828; [4] Wentzel G., «Z. Phys.», 1926, Bd 38, S. 518; [5] Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), пер. с англ., М., 1965.

Л. И. Комаров.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — представление функции $f(x)$ в виде ряда

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^\infty a_k\Phi_k(x), \qquad (1)$$

где a_k – постоянные, $\{\Phi_k(x)\}$ – асимптотическая при $x\to x_0$ последовательность (то есть $\Phi_{k+1}(x)=o(\Phi_k(x))$, $k=0,1,2,...$, $x\to x_0$), причем при любом целом $N\geqslant 0$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\Phi_k(x)=o(\Phi_N(x)),\quad x\to x_0. \qquad (2)$$

Ряд (1) называется асимптотическим разложением функции $f(x)$ по асимптотич. последовательности $\{\Phi_k(x)\}$ в смысле Пуанкаре.

В квантовой теории поля А. р. (1) применяется в различных ситуациях. Как правило, об А. р. говорят в тех случаях, когда не интересуются точными оценками на остаточный член ряда, либо когда известно, что для любого $x\neq x_0$ асимптотич. ряд (1) не сходится к значению $f(x)$. Именно вторая из перечисленных ситуаций оказывается типичной для степенных рядов теории возмущений по константе взаимодействия, для коэффициентов к-рых характерен факториальный рост при $n\to\infty$. Напр., функция

$$I(g,m)=m(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\exp\left(-m^2z^2/2-gz^4/4!\right),$$

к-рая может рассматриваться как функциональный интеграл евклидовой Φ^4-теории поля при нулевой пространственно-временной размерности, обладает при $g\to 0$ А. р.

$$I(g,m)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_ng^n,$$

$$a_n=\pi^{-1/2}\left(-1/6m^4\right)^n\Gamma(2n+1/2)\Big/\Gamma(n+1)=$$

$$=\left(-2/3em^4\right)^n n^n(\pi n)^{-1/2}(1+O(1/n))$$

при $n\to\infty$.

Несмотря на расходимость рядов, их частичные суммы вплоть до нек-рого порядка обеспечивают достаточно точное приближение, что и объясняет применимость метода теории возмущений для многих физически осмысленных моделей. Разработаны различные методы суммирования расходящихся асимптотич. рядов (суммирование по Борелю, по Зоммерфельду – Ватсону и т. д.). Однако применимость этих методов в квантовой теории поля в значительной степени зависит от того, насколько точно угадан тип неаналитич. зависимости функции, к-рую нужно восстановить по ее А. р. Поэтому результат суммирования, вообще говоря, зависит от применяемого метода суммирования.

Другим примером А. р. в квантовой теории поля являются различного рода операторные разложения в режимах больших импульсов (малых расстояний) и (или) больших масс. Исторически первое из них – разложение произведения двух составных операторов (см. *Перенормировка* в квантовой теории поля) на малых расстояниях – предложено К. Вильсоном (K. Wilson) в конце 60-х гг. Оно имеет вид

$$J_1(x+\xi_1)J_2(x+\xi_2)=\sum_n C_n(\xi_1,\xi_2)O_n(x).$$

Здесь C_n – коэффициентные функции, а $\{O_n\}$ – нек-рый базис составных операторов. Разложение является асимптотическим при стремлении аргументов исходных составных операторов J_i друг к другу, то есть при $\xi_i\to\rho\xi_i$ и $\rho\to 0$. Разложение на малых расстояниях успешно применяется в физике высоких энергий, напр. в анализе глубоконеупругого рассеяния лептонов на адронах. С начала 70-х гг. стали эффективно использоваться и операторные разложения в других режимах в рамках метода правил сумм квантовой хромодинамики – современной теории сильных взаимодействий. Напр., в пределе, когда нек-рые массы существенно больше остальных масс и всех импульсов, А. р. матрицы рассеяния, составных операторов и их произведений описываются переходом к эффективной низкоэнергетич. теории, включающей лишь поля с малыми массами. В низшем порядке разложения при больших массах вклад «тяжелых» полей (то есть соответствующих частицам с большими массами) учитывается переопределением параметров эффективной теории.

Лит.: [1] Kazakov D. I., Shirkov D. V., «Fortschr. Phys.», 1980, Bd 28, S. 465; [2] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979; [3] Смирнов В. А., Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд, М., 1990.

В. А. Смирнов.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ элемента e A-модуля E, ассоциированное с фильтрацией

$$E\supset\ldots\supset E_k\supset E_{k+1}\supset E_{k+2}\supset\ldots,$$

– (формальный) ряд

$$e\sim\sum_{k=k_0}^{\infty}e_k,$$

для которого $e_k\in E_k$, $e\equiv\sum_{k=k_0}^{n}e_k(\mathrm{mod}\,E_{n+1})$; последнее означает, что $e-\sum_{k=k_0}^{n}e_k\in E_{n+1}$. Элементы модуля $E_\infty=\bigcap_{k=-\infty}^{\infty}E_k$ называются асимптотически нулевыми элементами. Примерами А. р. являются А. р. по гладкости (см. *Асимптотика по гладкости*) и А. р. по малому (большому) параметру. *Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, формально асимптотическое решение, уравнения $\hat{P}u=f$, где $\hat{P}:E\to F$ – линейное отображение пространств, ассоциированное с фильтрациями $\{E_k\}$, $\{F_k\}$ (см. *Асимптотическое разложение* элемента), – такое асимптотическое разложение

$$u\sim\sum_{k=k_0}^{\infty}u_k,$$

что $\hat{P}u-f$ является асимптотически нулевым в фильтрации $\{F_k\}$. Оператор $\hat{P}$ должен быть совместим с фильтрациями, то есть $P(E_k)\subset F_{k-s}$ для нек-рого s. Следует отличать А. р. от асимптотики решения u уравнения $\hat{P}u=f$, то есть от такого элемента $\tilde{u}$, для к-рого элемент $u-\tilde{u}$ асимптотически нулевой в фильтрации $\{E_k\}$. *Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ – см. *Аксиоматическая квантовая теория поля.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОММУТАТИВНОСТИ УСЛОВИЕ – условие

$$\lim_{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|\to\infty}\left\langle\left[\hat{\varphi}(t_1,\boldsymbol{r}_1;\sigma_1),\hat{\varphi}(t_2,\boldsymbol{r}_2;\sigma_2)\right]\right\rangle=0,$$

где $\hat{\varphi}(t,\boldsymbol{r};1)=\hat{\psi}^+(t,\boldsymbol{r})$, $\hat{\varphi}(t,\boldsymbol{r},-1)=\hat{\psi}(t,\boldsymbol{r})$; $\hat{\psi}^+,\hat{\psi}$ – полевые операторы в гейзенберговом представлении, t_1 и t_2 – фиксированные моменты времени, $\langle\ldots\rangle$ – гиббсовское среднее в бесконечном объеме, $[\ldots,\ldots]$ – коммутатор. А. к. у. постулируется в статистич. механике и тесно связано с принципом ослабления корреляций.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Квазисредние в задачах статистической механики, Препринт, *R*-1451, ОИЯИ, Дубна, 1963.

Д. П. Санкович.

АССОЦИИРОВАННОЕ РАССЛОЕНИЕ – см. *Расслоение.*

АСТАТИЧЕСКИЙ ГИРОСКОП – см. *Гироскоп.*

АТЛАС многообразия – см. *Многообразие.*

АТТРАКТОР – инвариантное притягивающее множество траекторий в фазовом пространстве *динамической системы.* Траектории, лежащие в А., отвечают установившимся движениям физич. (химич. и пр.) системы с диссипацией и накачкой энергии, математич. моделью к-рой служит динамич. система; траектории, не принадлежащие А. и стремящиеся к нему при $t\to+\infty$, отвечают переходным процессам. Статическому, периодическому, n-частотному квазипериодическому установившимся режимам отвечают устойчивое положение равновесия, устойчивый предельный цикл, притягивающий n-мерный тор соответственно.

Непериодическим, нерегулярным установившимся колебаниям отвечает *странный аттрактор* – подмножество фазового пространства M, не представляющееся в виде конечного объединения гладких подмногообразий.

Существуют различные определения А., в зависимости от требований к «количеству» траекторий, обязанных к нему притягиваться. Требование, чтобы через все точки окрестности А. проходили траектории, стремящиеся к нему при $t \to +\infty$, приводит к следующему, наиболее обиходному, определению. Область $U \subset M$ называется поглощающей, если $f^t \overline{U} \subset U$ для любого $t > 0$; здесь f^t – отображение сдвига по траекториям динамич. системы на время t, $\overline{U}$ – замыкание U. Аттрактор – пересечение всех сдвигов поглощающей области U:

$$A = \bigcap_{t \geqslant 0} f^t U.$$

Множество всех точек M, через каждую из к-рых проходит стремящаяся к A траектория, называется областью притяжения аттрактора A.

Лит.: [1] Странные аттракторы. Сб. переводов с англ., под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова, М., 1980; [2] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., 1985, с. 11–150.

В. С. Афраймович.

АТТРАКТОРА КРИЗИС – бифуркация гибели *аттрактора*, не сопровождаемая рождением нового аттрактора в малой окрестности исчезнувшего. Пусть $\{f_\varepsilon^t, M\}$ – семейство гладких динамич. систем, зависящих от параметра $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ (f_ε^t – отображение сдвига на время t по траекториям динамич. системы, непрерывно зависящее от ε, M – фазовое пространство динамич. системы); U_ε – поглощающая область для f_ε^t, $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon^*)$, причем граница U_ε непрерывно зависит от ε; $\{A_\varepsilon \subset U_\varepsilon\}$ – соответствующее семейство аттракторов; ε^* – бифуркационное значение параметра. Тогда ε^* отвечает А. к., если в сколь угодно малой окрестности множества

$$B \equiv \overline{\lim_{\varepsilon \uparrow \varepsilon^*}} A_\varepsilon$$

предельных точек семейства A_ε найдется точка траектории динамич. системы $\{f_{\varepsilon^*}^t, M\}$, уходящей на конечное, не зависящее от размеров этой окрестности, расстояние от B. Иначе говоря, А. к. (точнее, кризис в семействе аттракторов) реализуется, когда аттрактор при изменении ε пересекает границу своей области притяжения.

Лит.: [1] Афраймович В. С., в кн.: Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации, М., 1987, с. 189–213.

В. С. Афраймович.

АТЬИ–УОРДА ТЕОРЕМА – см. *Алгебро-геометрические методы* в теории поля.

АТЬИ–ХИТЧИНА–ДРИНФЕЛЬДА–МАНИНА ТЕОРЕМА – см. *Твистор.*

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ – см. *Связность.*

Б

БАБА–РАМАКРИШНАНА УРАВНЕНИЯ – уравнения, описывающие *ветвящийся процесс* $\{\xi(t, \varepsilon), t \geqslant 0, \varepsilon \geqslant 0\}$, состоящий из последовательности реакций элементарных частиц, взаимодействующих с веществом-поглотителем (каскадов частиц). Случайные реализации $\xi(t, \varepsilon)$ интерпретируются как число частиц с энергией меньшей ε, проникающих на глубину t, то есть фазовое пространство процесса состоит из разрывных монотонно неубывающих функций от ε, принимающих целые неотрицательные значения. Б.–Р. у. составляются для плотностей n-го порядка:

$$f_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; t) = \frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1 \partial\varepsilon_2 \ldots \partial\varepsilon_n} \mathsf{E}[\xi(t, \varepsilon_1) \ldots \xi(t, \varepsilon_n)].$$

Определение всех плотностей f_n позволяет восстановить распределение вероятностей $\mathsf{P}\{\xi(t, \varepsilon) = n\}$ одномерного сечения *случайного процесса*, так как характеристич. функция $\varphi(s)$ этого распределения равна

$$\varphi(s) = \mathsf{E} \exp[is\xi(t, \varepsilon)] =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(is)^l}{l!} \int_0^\varepsilon f_l(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l; t)\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_l.$$

Если в каскаде присутствуют k типов частиц, то Б.–Р. у. составляются для многокомпонентных плотностей n-го порядка

$$f_{i_1 \ldots i_n}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; t) = \frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1 \ldots \partial\varepsilon_n} \mathsf{E}\left[\xi_{i_1}(\varepsilon_1, t) \ldots \xi_{i_n}(\varepsilon_n, t)\right],$$

где $i_1, \ldots, i_n = 1, \ldots, k$, и случайная реализация $\xi_i(t, \varepsilon)$ многомерного процесса $\{\xi_j(t, \varepsilon_j), j = 1, \ldots, k\}$ является числом частиц i-го типа с энергией меньшей ε на глубине t.

В частности, для электронно-фотонного каскада имеются только два типа частиц: электроны ($i = 1$) и фотоны ($i = 2$) (здесь позитроны не отличаются от электронов). Б.–Р. у. для плотностей 1-го порядка этого каскада имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} f_1(\varepsilon; t) = \int_\varepsilon^\infty d\varepsilon' (w_1 + w_3)(\varepsilon', \varepsilon) f_1(\varepsilon'; t) - \\ &- f_1(\varepsilon; t) \int_0^\varepsilon d\varepsilon' (w_1 + w_3)(\varepsilon, \varepsilon') + 2\int_\varepsilon^\infty d\varepsilon'\, f_2(\varepsilon'; t) w_2(\varepsilon', \varepsilon), \\ &\frac{\partial}{\partial t} f_2(\varepsilon; t) = \int_\varepsilon^\infty d\varepsilon'\, f_1(\varepsilon', t) w_1(\varepsilon', \varepsilon' - \varepsilon) - \\ &- f_2(\varepsilon; t) \int_0^\varepsilon d\varepsilon' w_2(\varepsilon', \varepsilon). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Здесь $w_i(\varepsilon, \varepsilon')$, $i = 1, 2, 3$, – интенсивности в единицу времени следующих реакций с начальной частицей при энергии ε; $i = 1$ – электрон излучает фотон с энергией $(\varepsilon - \varepsilon')$; $i = 2$ – фотон рождает электрон-позитронную пару с энергией ε' для электрона и позитрона; $i = 3$ – электрон в результате столкновения с частицей вещества-поглотителя теряет энергию $(\varepsilon - \varepsilon')$. При подстановке явных выражений для w_i уравнения (2) переходят в *Ландау–Румера уравнения.*

Лит.: [1] Bhabhá H., «Proc. Roy. Soc., ser. A», 1950, v. 202, № 2, p. 995–1005; [2] Ramakrishnan A., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1950, v. 46, № 3, p. 596–602; [3] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

Ю. П. Вирченко.

БАЗИС векторного пространства – см. *Векторное пространство.*

БАЗИС периодов – см. *Периодическая функция, Двоякопериодическая функция.*

БАЛАНСА УРАВНЕНИЕ – см. *Энтропия.*

БАНАХОВА АЛГЕБРА – *топологическая алгебра* A над полем комплексных чисел, топология которой определяется нормой, превращающей A в банахово пространство (полное нормированное *векторное пространство*), причем умножение элементов непрерывно по каждому из сомножителей. Б. а. называется коммутативной, если $xy=yx$ для всех $x, y\in A$. Б. а. A называется алгеброй с единицей, если A содержит такой элемент e, что $ex=xe=x$ для любого $x\in A$. Если в Б. а. A нет единицы, то ее можно присоединить, то есть построить Б. а. $\tilde{A}$ с единицей такую, что $\tilde{A}$ содержит исходную алгебру A в качестве замкнутой подалгебры коразмерности 1. В любой Б. а. A с единицей e можно так изменить норму на эквивалентную, чтобы в новой норме выполнялись соотношения $\|ab\|\leqslant\|a\|\|b\|$, $\|e\|=1$.

Лит.: Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977. *Е. А. Горин.*

БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Банахова алгебра.*

БАРГМАНА–МИШЕЛЯ–ТЕЛЕГДИ УРАВНЕНИЕ – классическое уравнение движения спина заряженной частицы во внешнем поле (см.[1]):

$$\frac{da^\mu}{d\tau}=\frac{ge}{2mc}F^{\mu\nu}a_\nu-\frac{e}{mc}\left(\frac{g}{2}-1\right)u^\mu F^{\nu\lambda}u_\nu a_\lambda, \qquad (1)$$

$$\mu,\nu,\lambda=0,1,2,3,$$

где $F^{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля, $u^\mu(\tau)$ – 4-скорость, a^μ – псевдовектор поляризации частицы, m – масса, e – заряд, g – приведенное гиромагнитное отношение (для электрона $g=2$). В другом виде подобное уравнение было впервые найдено Я. И. Френкелем (см. [2], подробнее в [3]).

В рамках квантовой теории строгий вывод уравнения (1) основан на квазиклассич. приближении в уравнении Дирака с аномальным взаимодействием Паули. Для произвольного (необязательно однородного, см. [4]) медленно меняющегося внешнего поля, напряженности к-рого малы по сравнению с величиной критич. поля (см. [5]), уравнение (1) возникает в классич. пределе при $h\to 0$ – при усреднении гейзенберговских уравнений движения для спинового оператора – псевдовектора поляризации Баргмана по квазиклассич. траекторно-когерентным состояниям (см. [6]).

Лит.: [1] Bargman V., Michel L., Telegdi V. L., «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, № 10, p. 435–36; [2] Френкель Я. И., Собрание избранных трудов, т. 2, М.– Л., 1958, с. 460–76; [3] Тернов И. М., Бордовицын В. А., «Успехи физических наук», 1980, т. 132, в. 2, с. 345–52; [4] Fradkin D. M., Good R. H., «Rev. Mod. Phys.», 1961, v. 33, № 2, p. 343–52; [5] Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С., Излучение релятивистских электронов, М., 1973; [6] Белов В. В., Маслов В. П., «Доклады АН СССР», 1989, т. 305, № 3, с. 574–80.

В. В. Белов.

БАРДИНА–КУПЕРА–ШРИФФЕРА МОДЕЛЬ – см. *БКШ-модель.*

БАРДИНА–КУПЕРА–ШРИФФЕРА–БОГОЛЮБОВА УРАВНЕНИЕ – см. *БКШ–Боголюбова уравнение.*

БАРИОН – *адрон* с полуцелым *спином.*

БАРОКЛИННОСТЬ СРЕДЫ – зависимость плотности среды не только от давления, но и от других геофизических параметров. См. *Геофизическая турбулентность.*

БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА – см. *Больцмана распределение.*

ББГКИ-УРАВНЕНИЯ – см. *Боголюбова цепочка уравнений.*

БЕЙКЕРА–АХИЕЗЕРА ФУНКЦИЯ – см. *Алгебро-геометрические методы* в теории поля.

БЕКЕНШТЕЙНА ТЕОРЕМА – см. *Черная дыра*; теоремы единственности.

БЕКЛУНДА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – способ конструирования точных решений некоторых *математической физики нелинейных уравнений.* Предложен А. Беклундом (A. Bäcklund, 1875) в связи с изучением поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Для этих поверхностей элемент длины в подходящих координатах u, v можно записать в виде

$$ds^2=du^2+2\cos\omega\,dudv+dv^2,$$

где ω подчиняется *синус-Гордона уравнению*

$$\partial^2\omega/\partial u\,\partial v=\sin\omega. \qquad (1)$$

Если $\omega_0(u, v)$ – произвольное решение этого уравнения, то $\omega_1(u, v)$, подчиняющееся уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\partial(\omega_1-\omega_0)/\partial u&=2a\sin[(\omega_1+\omega_0)/2],\\ \partial(\omega_1+\omega_0)/\partial v&=2a^{-1}\sin[(\omega_1-\omega_0)/2]\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

при произвольном a, также оказывается решением уравнения (1). Уравнения (2) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями и принципиально проще уравнения с частными производными (1). Если известны два Б. п. ω_1, ω_2 с параметрами a_1, a_2, то можно построить третье решение ω_3, минуя квадратуры, по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{\omega_3-\omega_0}{4}=\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\operatorname{tg}\frac{\omega_1-\omega_2}{4}.$$

Если $\omega_0=0$, Б. п. порождает важное частное решение уравнения (1) – кинк, или единичный солитон,

$$\omega=4\operatorname{arctg}\exp(au+a^{-1}v+\varphi).$$

Полагая a_1, a_2 комплексно сопряженными:

$$a_1=a_2^*=\lambda+i\eta,$$

получаем другое важное решение уравнения (1) – брезер, или осциллирующий солитон,

$$\omega_3=4\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{i\eta}\frac{z-z^*}{1+|z|^2},\quad z=\exp(au+a^{-1}v+\varphi).$$

Последовательное применение Б. п., начиная с $\omega_0=0$, позволяет найти в явном виде N-солитонные решения уравнения (1), описывающие рассеяние кинков и брезеров друг на друге.

Совершая на фоне произвольного ω_0 последовательное Б. п. и полагая $a_2=-a_1+\delta a$, можно добиться инфинитезимальной (бесконечно малой) вариации решения

$$\omega_2=\omega_0+\delta\omega.$$

Отсюда следует, что уравнение (1) инвариантно относительно бесконечной группы преобразований и в силу *Нетер теоремы* обладает бесконечным набором интегралов движения (интегрируемо).

Интерес к Б. п. повысился в связи с развитием *обратной задачи рассеяния метода.* Б. п. найдены для большинства нелинейных уравнений, интегрируемых при помощи этого метода, в том числе для *нелинейного уравнения Шредингера*, для *Янга–Миллса уравнений*, для интегрируемых вариантов уравнений Эйнштейна в пустоте. Для *Кортевега–де Фриса уравнения*

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$$

Б. п. имеет вид ($u=w_x$):

$$-2(w_0+w_1)_x=4a^2+(w_0-w_1)^2,$$

$$(w_0-w_1)_t+3(w_{0x}^2-w_{1x}^2)+(w_0-w_1)_{xxx}=0.$$

С точки зрения метода обратной задачи рассеяния Б. п. представляет собой перестройку решения нелинейного уравнения, соответствующую появлению в спектре интегрируемого линейного уравнения дополнительного дискретного собственного значения и добавлению солитона к исходному решению нелинейного уравнения.

Лит.: [1] Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; [2] Ибрагимов Н. Х., Группы преобразований в математической физике, М., 1983.

В. Е. Захаров.

БЕЛАЯ ДЫРА – гипотетический космический объект, эволюция которого представляет собой обращенный во времени гравитационный коллапс небесного тела с образованием *черной дыры*. Предсказание возможности существования Б. д. (И. Д. Новиков, 1964) следует из общей теории относительности. Вещество, находившееся первоначально внутри Б. д., с течением времени расширяется и выходит из-под *гравитационного радиуса* Б. д. («взрыв» Б. д.); весь этот процесс является видимым для удаленного наблюдателя. Б. д. в расширяющейся Вселенной могут реализовываться как ядра вещества, задержавшиеся в общем космологич. расширении из-за локальной неоднородности начальных условий. В первоначальных, идеализированных моделях Б. д. величина задержки расширения вещества Б. д., отсчитанная от начала общего космологич. расширения, могла быть произвольной. В связи с этим в прошлом делались попытки привлечь Б. д. к объяснению таких явлений, как активность квазаров и ядер галактик. Однако в 1974 было выяснено, что аккреция Б. д. окружающего ее вещества и квантово-гравитационные эффекты, возникающие в сильных гравитационных полях внутри Б. д. (см. *Квантовая теория гравитации*), препятствуют взрыву Б. д. и заставляют вещество Б. д. оставаться внутри нее, если время задержки существенно превышает r_g/c, где r_g – гравитационный радиус Б. д. [Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, А. А. Старобинский, Д. Эрдли (D. Eardley)]. Образующийся при этом объект совпадает по своим наблюдательным свойствам с черной дырой, отличаясь от нее только историей своего происхождения и нек-рыми деталями внутреннего строения; применительно к нему название «Б. д.» приобретает условный характер. Те Б. д., к-рые могли бы существовать во Вселенной в настоящее время, принадлежат к объектам последнего типа и не взрываются. *А. А. Старобинский.*

БЕЛЫЙ ШУМ – см. *Гауссово случайное поле, Случайный процесс.*

БЕЛЫХ АТТРАКТОР – *аттрактор* динамической системы, порождаемой разрывным отображением

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}(\lambda x-\lambda+1,\gamma y-\gamma+1) & \text{при } y>kx,\\ (\lambda x+\lambda-1,\gamma y+\gamma-1) & \text{при } y<kx,\end{cases}$$

квадрата $\{(x,y), |x|<1,\ |y|<1\}$ в себя при $0<\lambda<1/2<1<\gamma<2$ и $|k|<(2-\gamma)/\gamma$ (см. [1]). Б. а.– нетривиальный пример из приложений *стохастического аттрактора* нецелой хаусдорфовой размерности (см. [2]).

Лит.: [1] Белых В. Н., О качественных структурах и бифуркациях некоторых конкретных динамических систем. IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 2. Качественные методы теории нелинейных колебаний, Киев, 1984, с. 46–48; [2] Бунимович Л. А., Песин Я. Б., Синай Я. Г., Якобсон М. В., Эргодическая теория гладких динамических систем, в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., 1985, с. 113–231. *В. С. Афраймович.*

БЕЛЬТРАМИ УРАВНЕНИЕ – см. *Лапласа – Бельтрами уравнение.*

БЕЛЯЕВА–БУДКЕРА УРАВНЕНИЕ – обобщение кинетического *Ландау уравнения* на случай релятивистской плазмы:

$$\frac{dF(\boldsymbol{p},t)}{dt}=\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial p_i}\int w_{ij}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\left(\frac{\partial}{\partial p_j}-\frac{\partial}{\partial p'_j}\right)F(\boldsymbol{p},t)F(\boldsymbol{p}',t)d\boldsymbol{p}'.$$

Здесь F – функция распределения, w_{ij} – симметрич. тензор.

Лит.: [1] Беляев С. Т., Будкер Г. И., «Доклады АН СССР», 1950, т. 107, № 6, с. 807–10. *И. А. Кузин, В. П. Политюков.*

БЕННЕКЕНА ИНВАРИАНТ – целое число, отвечающее контактной структуре в $\mathbb{R}^3$ или S^3 и замкнутой трансверсальной кривой γ. Б. и. равен коэффициенту зацепления γ с кривой, полученной из γ малым сдвигом вдоль невырожденного векторного поля, являющегося сечением контактного распределения. Если кривая γ незаузлена, а контактная структура стандартная (см. *Контактная геометрия*), Б. и. отрицателен (теорема Беннекена). Нек-рые явно заданные контактные структуры не диффеоморфны стандартной. *С. А. Табачников.*

БЕННЕКЕНА ТЕОРЕМА – см. *Беннекена инвариант, Контактная геометрия.*

БЕРЕЗИНА ИНТЕГРАЛ – см. *Квантовое евклидово поле*; решетчатые модели.

БЕРЕЗИНИАН, супердетерминант, – характеристика блочной матрицы $M=\begin{Vmatrix}A & B\\ C & D\end{Vmatrix}$ (где A и D – невырожденные матрицы); обозначается $\mathrm{Ber}(M)$ или $\mathrm{S\,det}(M)$. Вычисляется по формуле

$$\mathrm{Ber}(M)=\det(A-BD^{-1}C)\det D^{-1}.$$

Б. служит аналогом якобиана при замене переменных в интеграле по коммутирующим и антикоммутирующим переменным (см. [2], [3]). При этом элементы матрицы M являются функциями от грассмановых переменных, причем элементы матриц A и D – четные, а матриц B и C – нечетные элементы грассмановой алгебры.

Б.– важное понятие теории функций от антикоммутирующих переменных – суперматематики, развитой в работах Ф. А. Березина (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Березин Ф. А., Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными, М., 1983; [2] его же, Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [3] Владимиров В. С., Волович И. В., «Теор. и матем. физика», 1984, т. 60, № 2, с. 169–98. *С. А. Федотов.*

БЕРЛИНГА КЛАСС – см. *Ультрараспределение.*

БЕРНУЛЛИ АВТОМОРФИЗМ – см. *Бернулли сдвиг.*

БЕРНУЛЛИ ИНТЕГРАЛ – см. *Бернулли уравнение.*

БЕРНУЛЛИ ПОТОК – см. *Бернулли сдвиг.*

БЕРНУЛЛИ СДВИГ – преобразование сдвига в пространстве реализаций последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Б. с. T действует в прямом произведении $\prod_{i\in\mathcal{I}}(Y_i,\ \mathcal{B},\ \nu_i)$ счетного числа экземпляров вероятностного пространства $(\mathcal{I},\ \mathcal{B},\ \nu)$ (при этом $\mathcal{I}=\mathbb{Z}^+$ или $\mathbb{Z}$) и переводит последовательность $\omega=(\omega_i,\ i\in\mathcal{I})$ в последовательность $\omega'=(\omega'_i,\ i\in\mathcal{I})$, где $\omega'_i=\omega_{i-1}$. Если $\mathcal{I}=\mathbb{Z}^+$, то T называется односторонним сдвигом Бернулли (или эндоморфизмом Бернулли), если $\mathcal{I}=\mathbb{Z}$, то – двусторонним сдвигом Бернулли (автоморфизмом Бернулли); $(\mathcal{I},\ \mathcal{B},\ \nu)$ называется пространством состояний. Среди всех динамич. систем Б. с. выделяются наиболее сильными свойствами стохастичности (перемешивания); в частности, односторонний Б. с. является точным эндоморфизмом, а двусторонний – K-автоморфизмом. Часто термин «Б. с.» (а также термины «эндоморфизм Бернулли» и «автоморфизм Бернулли») употребляется по отношению к любому эндоморфизму (автоморфизму) вероятностного пространства, к-рый изоморфен Б. с., понимаемому в указанном выше смысле. Для сдвига в пространстве реализаций стационарной в узком смысле случайной последовательности x_n, $-\infty<n<\infty$, с конечным числом состояний такой изоморфизм существует в том и только в том случае, когда последовательность x_n удовлетворяет условию «очень слабой бернуллиевости» Орнстейна (см. [1], [2]), занимающему промежуточное положение между условиями регулярности и абсолютной регулярности по Колмогорову (см. [3]).

Все Б. с. с одинаковой энтропией изоморфны (см. *Изоморфизм* динамических систем). Всякий Б. с. T может быть включен в нек-рый измеримый поток $\{T^t,\ -\infty<t<\infty\}$ так, что $T=T^{-1}$. Каждое преобразование, входящее в такой поток, изоморфно Б. с. с соответствующей энтропией, а сам поток называется потоком Бернулли.

Лит.: [1] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [2] Ornstein D., Weiss B., «Isr. J. Math.», 1974, v. 17, № 1, p. 94–104; [3] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970. *Б. М. Гуревич.*

БЕРНУЛЛИ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ – см. *Случайное блуждание.*

БЕРНУЛЛИ СХЕМА – см. *Символическая динамика.*

БЕРНУЛЛИ УРАВНЕНИЕ, интеграл Бернулли, в гидроаэромеханике – результат интегрирования дифференциальных уравнений установившегося движения идеальной (невязкой и нетеплопроводной) баротропной жидкости, записанных в переменных Эйлера (см. *Эйлера уравнение*). В баротропной жидкости плотность ρ зависит только от давления p, то есть

$$p = p(\rho),$$

и Б. у. имеет вид

$$U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C, \qquad (1)$$

где U – потенциал поля объемных (массовых) сил, действующих на жидкость, v – скорость течения, C – величина, постоянная на каждой линии тока или вихревой линии, но в общем случае изменяющая свое значение при переходе от одной линии к другой.

Если потенциал U и вид функции $p(\rho)$ известны, Б. у. выражается алгебраич. соотношением. В простейшем случае несжимаемой тяжелой жидкости, когда $U = gh$ (h – высота жидкой частицы над нек-рой горизонтальной плоскостью, g – ускорение свободного падения), а $\rho = \text{const}$, имеем

$$gh + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C. \qquad (2)$$

Для этого случая уравнение было выведено Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1738).

Умножив уравнение (2) на $\rho = \text{const}$, получим, что сумма первых двух членов равна потенциальной энергии жидкости, а 3-й член $\rho v^2/2$, называемый скоростным напором, или динамическим давлением, равен кинетич. энергии движущейся жидкости. Таким образом, Б. у. в виде (2) выражает закон сохранения энергии и устанавливает связь между давлением и скоростью движущейся жидкости: если вдоль линии тока скорость увеличивается, давление падает, и наоборот. Когда в нек-рых точках потока жидкости давление вследствие роста скорости должно стать ниже нек-рой малой положительной величины, близкой к давлению насыщенного пара этой жидкости, возникает так наз. кавитация – образование в капельной среде полостей, заполненных газом, паром или их смесью.

В случае обратимых адиабатных течений совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей $c_p/c_v = \gamma$ имеем $p/\rho^\gamma = \text{const}$ и из уравнения (1), пренебрегая влиянием силы тяжести, получим:

$$\frac{\nu}{\nu - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} \qquad (3)$$

или, в силу термодинамич. соотношения

$$\frac{\nu}{\nu - 1}\frac{p}{\rho} = c_p T = H,$$

где T – абсолютная температура, H – энтальпия:

$$H + v^2/2 = H_0. \qquad (4)$$

Б. у. для газов в форме (3) и (4) определяет параметры изоэнтропийного торможения: H_0, $T_0 = H_0/c_p$, p_0, ρ_0 на каждой линии тока, к-рых газ достигает при $v = 0$. Они называются соответственно полной энтальпией, температурой торможения, полным давлением или давлением торможения и плотностью торможения. Б. у. в форме (4) также выражает закон сохранения энергии для газов.

В технич. приложениях для осредненных по поперечному сечению параметров потока применяют так наз. обобщенное Б. у.: сохраняя форму уравнений (2)–(4), в левую часть включают работу сил трения (гидравлич. потери) и механич. работу (работу компрессора или турбины) с соответствующим знаком. Обобщенным Б. у. пользуются в гидравлике при расчете течений жидкостей и газов в трубопроводах и в машиностроении при расчете компрессоров, турбин, насосов и других гидравлич. и газовых машин.

Лит.: [1] Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, 5 изд., М., 1978; [2] Абрамович Г. Н., Прикладная газовая динамика, 4 изд., М., 1976; [3] Седов Л. И., Механика сплошной среды, 4 изд., т. 2, М., 1984. *С. Л. Вишневецкий.*

БЕРНУЛЛИ ЭНДОМОРФИЗМ – см. *Бернулли сдвиг.*

БЕРНШТЕЙНА МНОГОЧЛЕН ростка f голоморфной функции – унитарная образующая идеала, состоящего из таких многочленов $B(\lambda)$, для которых существует дифференциальный оператор $P(x, \lambda, \partial/\partial x)$ со свойством

$$P(x, \lambda, \partial/\partial x) f^\lambda = B(\lambda) f^{\lambda - 1}.$$

Коэффициенты P должны быть голоморфны по x и полиномиальны по λ. *С. В. Чмутов.*

БЕСКОНЕЧНО ДАЛЬНИЙ ПОРЯДОК – см. *Динамический дальний порядок.*

БЕСКОНЕЧНО МАЛОЕ ИЗГИБАНИЕ – см. *Изгибание поверхности.*

БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО – *векторное пространство*, базис к-рого состоит из бесконечного числа элементов.

БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ – классические или квантовые системы частиц такие, что объем V занимаемой ими области пространства $\mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, и число частиц в них N (или среднее число $\langle N \rangle$) бесконечно. В статистич. механике устанавливается, что математически строгое описание свойств статистич. систем (напр., их термодинамич. поведения) возможно лишь при переходе к Б. с., к-рые могут быть получены как *термодинамический предел* соответствующей последовательности конечных систем. Состояния Б. с. определяются либо с помощью задания вероятностной меры, удовлетворяющей *ДЛР-уравнению*, непосредственно на бесконечномерном фазовом пространстве системы (предельное гиббсовское состояние), либо как термодинамич. предел для бесконечной последовательности частичных (приведенных) функций распределения, удовлетворяющих *Боголюбова уравнениям* (*Майера уравнению, Кирквуда–Зальцбурга уравнению*). Серьезной проблемой является построение гамильтоновой динамики бесконечных систем. *П. В. Малышев.*

БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ – см. *Цилиндрические функции.*

БЕССЕЛЯ НЕРАВЕНСТВО – см. *Ортогональная система функций.*

БЕССЕЛЯ УРАВНЕНИЕ – линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \nu = \text{const}, \qquad (1)$$

или в самосопряженной форме:

$$(xy')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0.$$

Число ν называется индексом Б. у.; величины x, y, ν в общем случае могут принимать комплексные значения. После подстановки $y = ux^{-1/2}$ получается приведенная форма уравнения (1):

$$u'' + \left[1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}\right] u = 0. \qquad (2)$$

Первым систематическое изучение решений уравнения (1) предпринял Ф. Бессель [2], но еще раньше они встречались в работах Д. Бернулли (D. Bernoulli), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Лагранжа (J. Lagrange).

Б. у. возникает при разделении переменных во многих задачах математич. физики (см. [3]), в частности в краевых задачах теории потенциала для цилиндрич. области.

Решения Б. у. называются *цилиндрическими функциями* (или бесселевыми функциями). Среди них выделяют цилиндрич. функции 1-го рода (*Бесселя функции*) $J_\nu(x)$, цилиндрич. функции 2-го рода (*Неймана функции*) $Y_\nu(x)$, цилиндрич. функции 3-го рода (*Ганкеля функции*) $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$.

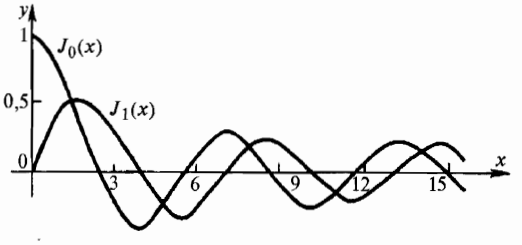
См. также *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория, *Специальные функции*.

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, с. 460–62; [2] Bessel F., «Abhandl. der Königlichen Akad. Wiss. Berlin», 1824, S. 1–52; [3] Грей Э., Мэтьюз Г., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [4] Ватсон Г., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1–2, М., 1949; [5] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976. *Н. Х. Розов.*

БЕССЕЛЯ ФУНКЦИИ – *цилиндрические функции* 1-го рода. Б. ф. индекса p может быть определена рядом

$$J_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k} = \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \qquad (*)$$

сходящимся на всей плоскости. Б. ф. индекса p является решением соответствующего *Бесселя уравнения*. При действительных положительных значениях аргумента и индекса ($p=\nu$ – действительное число) Б. ф. действительна, график ее имеет вид затухающего колебания (см. рис.); при четном



Графики функций Бесселя $y=J_0(x)$ и $y=J_1(x)$.

индексе Б. ф. четна, при нечетном – нечетна. Поведение Б. ф. в окрестности нуля дается первыми слагаемыми ряда (*); при больших x справедливо асимптотич. представление

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right).$$

Нули Б. ф. [корни уравнения $J_\nu(x)=0$] – простые, при этом нули $J_\nu(x)$ лежат между нулями $J_{\nu+1}(x)$. Б. ф. «полуцелого» порядка $\nu = n + 1/2$ выражаются через тригонометрич. функции; в частности,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Б. ф. $J_\nu(\mu_n^\nu x/l)$, μ_n^ν – положительные нули $J_\nu(x)$, $\nu > -1/2$, образуют ортогональную с весом x в промежутке $(0, l)$ систему. При определенных условиях имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu\left(\mu_n^\nu x/l\right),$$

$$c_n = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2\left(\mu_n^\nu\right)}\int_0^l f(x) J_\nu\left(\mu_n^\nu x/l\right)x\,dx, \quad 0<x<l.$$

В бесконечном промежутке его заменяет интеграл Фурье – Бесселя

$$f(x) = \int_0^\infty c_\lambda J_\nu(\lambda x)\,d\lambda, \quad c_\lambda = \int_0^\infty f(x) J_\nu(\lambda x)x\,dx, \quad 0<x<\infty.$$

Важную роль в теории Б. ф. и их применений играют:

1) интегральное представление

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi,$$

2) производящая функция

$$e^{\frac{z}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\xi^n,$$

3) теорема сложения для Б. ф. нулевого индекса

$$J_0\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}\right) = J_0(a)J_0(b) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(a)J_k(b)\cos k\varphi,$$

4) рекуррентные формулы

$$J_{p-1}(z) + J_{p+1}(z) = \frac{2p}{z}J_p(z),$$

$$\left[J_p(z)\right]' = \frac{1}{2}\left[J_{p-1}(z) - J_{p+1}(z)\right].$$

Лит. см. при статье *Цилиндрические функции*. *П. И. Лизоркин.*

БЕТА-ФУНКЦИЯ, B-функция, B-функция Эйлера, – функция двух переменных p и q, определяемая при $p>0$, $q>0$ равенством

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (*)$$

Значения Б.-ф. при различных значениях параметров p и q связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathrm{B}(p, q) = \mathrm{B}(q, p),$$

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p, q-1), \quad q>1.$$

Справедлива формула

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0<p<1.$$

В случае комплексных p и q интеграл (*) сходится, когда $\mathrm{Re}\,p>0$ и $\mathrm{Re}\,q>0$. Б.-ф. выражается через *гамма-функцию*:

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

В. И. Битюцков.

БЕТА-ФУНКЦИЯ в квантовой теории поля – функция, определяющая поведение эффективной константы связи (или *инвариантного заряда*) $\bar{g}$ в зависимости от квадрата переданного 4-импульса Q^2. Б.-ф. стоит в правой части дифференциального уравнения *ренормализационной группы*, к-рое в простейшей, безмассовой квантовополевой модели с одной константой связи g имеет вид

$$\frac{\partial\bar{g}(x)}{\partial \ln x} = \beta(\bar{g}),$$

где $x = Q^2/\mu^2$, μ – параметр размерности массы, возникающий при *перенормировке* теории (используется система единиц, в к-рой $\hbar = c = 1$). В этом случае Б.-ф. оказывается функцией лишь одного аргумента, $\beta(g)$. При учете масс частиц Б.-ф. зависит также от соответствующих этим массам безразмерных аргументов. В ренормгрупповом формализме для моделей квантовой теории поля с несколькими константами связи $g_1, \ldots, g_k$ возникает несколько Б.-ф. по одной на каждый эффективный заряд g_i. Такие Б.-ф. зависят от нескольких зарядовых аргументов и входят в правые части системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для $g_1, \ldots, g_k$.

Знание безмассовой Б.-ф. $\beta(g)$ в принципе позволяет решить задачу определения асимптотич. ультрафиолетового (то есть на малых расстояниях) поведения *эффективной константы связи* и, как следствие, основных характеристик (*Грина функций*, нек-рых матричных элементов) данной модели квантовой теории поля. Однако, как правило, Б.-ф. вычисляется с помощью перенормирований теории возмущений в виде степенного разложения по g и поэтому известна лишь при достаточно малых значениях g. Этого оказывается достаточно для надежного определения ультрафиолетовой асимптотики лишь для случая $\beta(g)<0$ (случай *асимптотической свободы*), когда при $Q^2 \to \infty$ инвариантный заряд стремится к нулю, как

$$\bar{g}(Q^2) \to \mathrm{const}/\ln Q^2.$$

Лит. см. при статье *Ренормализационная группа*. *Д. В. Ширков.*

БЕТЕ–СОЛПИТЕРА УРАВНЕНИЕ – релятивистское соотношение для двухчастичной *Грина функции* $D(x_1, x_2; x_1', x_2')$ системы двух частиц (или полей):

$$D(x_1,x_2;x_1',x_2') = \overline{D}(x_1,x_2;x_1',x_2') + \\ +\int K(x_1,x_2;x_3,x_4)D(x_3,x_4;x_1',x_2')d^4x_3d^4x_4 \qquad (*)$$

(x_1, x_2, x_1', x_2' – начальные и конечные 4-мерные координаты частиц). Сформулировано Х. Бете (H. Bethe) и Э. Солпитером (E. Salpeter) в 1951 для описания связанных состояний системы частиц *1* и *2*, к-рым отвечают полюсы функции D [в этом случае в уравнении (*) отсутствует неоднородный член $\overline{D}$, не содержащий этих полюсов], и опирается на инвариантную теорию возмущений в форме *Фейнмана диаграмм*. Б.–С. у. связывает полную функцию Грина двух частиц $D(x_1, x_2; x_1', x_2')$, понимаемую как сумма всех диаграмм Фейнмана (рис. 1, левая часть), с определенной, топологически выделенной частью этой суммы $\overline{D}$ (x_1, x_2; x_1', x_2') (рис. 1, первое слагаемое правой части), представляющей собой сумму всех двухчастично неприводимых диаграмм в t-канале [в к-ром кинематич. переменная $t=(p_1+p_2)^2$, где p_1, p_2 – 4-импульсы частиц *1*, *2*], то есть таких диаграмм, к-рые нельзя разбить на две связные части, содержащие точки x_1, x_2 и x_1', x_2', разорвав только две линии, идущие в направлении t-канала.

Ядро K Б.–С. у. явным образом выражается через сумму двухчастично неприводимых диаграмм $\overline{D}$ и функции Грина свободных частиц [второе слагаемое в правой части рис. 1

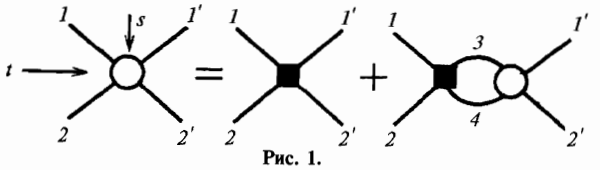
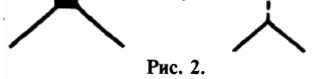


Рис. 1.

отвечает интегральному члену в уравнении (*)]. Оно строится на основе лагранжиана взаимодействия частиц с полем, но само поле в уравнение (*) явно не входит. Поскольку, кроме теории возмущений, других конструктивных методов вычисления ядра (так же, как и неоднородного члена) точного Б.–С. у. не существует, его следует рассматривать только как удобное соотношение, позволяющее неявным образом выразить всю сумму диаграмм Фейнмана через их двухчастично неприводимую часть.

Часто под Б.–С. у. понимают приближенное уравнение (так наз. лестничное приближение), к-рое получается, если ограничиться в сумме двухчастично неприводимых диаграмм низшим порядком теории возмущений, то есть однократным обменом квантом поля между двумя взаимодействующими частицами (рис. 2). В этом приближении Б.–С. у. обычно используется для релятивистского описания связанных состояний системы двух слабо взаимодействующих частиц. В нерелятивистском пределе Б.–С. у. перестает зависеть от двух различных времен и переходит в уравнение Шредингера с соответствующим потенциалом.


Рис. 2.

Уравнение (*) можно понимать и как уравнение непосредственно для амплитуды рассеяния двух частиц. В этом случае D следует считать амплитудой, а $\overline{D}$ – ее неприводимой частью. Упомянутое выше соотношение между функциями $\overline{D}$ и K сохраняется. Учитывая *перекрестную симметрию* амплитуды рассеяния, связывающую различные каналы реакции (этому свойству удовлетворяют диаграммы Фейнмана во всех порядках теории возмущений), можно использовать Б.–С. у. для описания взаимодействия частиц в *s*-канале [в к-ром кинематич. переменная $s=(p_1-p_1')^2$; см. рис. 1], то есть рассматривать с его помощью столкновение частицы *1* с античастицей $\widetilde{1}'$ с превращением их в частицу *2* и античастицу $\widetilde{2}'$. Такая трактовка Б.–С. у. положена в основу мультипериферич. модели процессов множественного рождения частиц при высоких энергиях. В этом случае из Б.–С. у. удается получить аналогичное, но более простое уравнение для мнимой части амплитуды рассеяния частиц *1* и $\widetilde{1}'$ в *s*-канале, к-рая посредством *оптической теоремы* связана с полным сечением упомянутых процессов.

Лит.: [1] Salpeter E. E., Bethe H. A., A relativistic equation for bound-state problems, «Phys. Rev.», 1951, v. 84, p. 1232; [2] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, пер. с англ., М., 1963, гл. 17, § 6; [3] Дунаевский А. М., Ройзен И. И., О виковском повороте в рамках уравнения Бете – Солпитера, «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 855; [4] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Релятивистская квантовая теория, ч. 2, М., 1971. *И. И. Ройзен.*

БИАНКИ ТОЖДЕСТВО для тензора кривизны $R^i_{j,kl}$ симметричной связности, согласованной с метрикой,– тождество

$$\nabla_m R^n_{i,kl} + \nabla_l R^n_{i,mk} + \nabla_k R^n_{i,lm} = 0 \ .$$

(см. [1], [2]). Аналогичное равенство имеет место для связностей в расслоениях, а именно:

$$D_{[\gamma}R_{\alpha\beta]} = 0$$

(см. [3]).

См. также *Кривизны форма*.

Лит.: [1] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, v. 1, 3 ed., Bologna, 1923; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967; [3] Трофимов В. В., Введение в геометрию многообразий с симметриями, М., 1989. *В. В. Трофимов.*

БИБЕРБАХА ГИПОТЕЗА – см. *Однолистности условия*.

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – функция

$$u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$$

действительных переменных, определенная в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеющая непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно и удовлетворяющая в D уравнению

$$\Delta^2 u \equiv \Delta(\Delta u) = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа. Это уравнение называется *бигармоническим уравнением*. Класс Б. ф. включает класс *гармонических функций* и является подклассом класса *полигармонических функций*. Каждая Б. ф. есть аналитич. функция от координат x_i.

Наибольшее значение с точки зрения приложений имеют Б. ф. $u(x_1, x_2)$ двух переменных. Такие Б. ф. представимы при помощи гармонич. функций u_1, u_2 или v_1, v_2 в виде

$$u(x_1,x_2) = x_1u_1(x_1,x_2) + u_2(x_1,x_2)$$

или

$$u(x_1,x_2) = (r^2 - r_0^2)v_1(x_1,x_2) + v_2(x_1,x_2),$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, а r_0^2 – постоянная. Основная краевая задача для Б. ф. состоит в следующем: найти Б. ф. в области D, непрерывную вместе с производными 1-го порядка в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$ и удовлетворяющую на границе C условиям

$$u|_C = f_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_C = f_2(s), \qquad (*)$$

где $\partial u/\partial n$ – производная по нормали к C, а $f_1(s)$, $f_2(s)$ – заданные непрерывные функции дуги s на контуре C. Указанные выше представления Б. ф. позволяют получить решение задачи (*) в явном виде в случае круга D, исходя из интеграла Пуассона для гармонич. функций.

Б. ф. двух переменных допускают также представление

$$u(x_1,x_2)=\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)\}=\frac{1}{2}\left\{\bar{z}\varphi(z)+z\overline{\varphi(z)}+\right.$$
$$\left.+\chi(z)+\overline{\chi(z)}\right\},\quad \bar{z}=x_1-ix_2,$$

при помощи двух аналитич. функций $\varphi(z)$, $\chi(z)$ комплексного переменного $z=x_1+ix_2$. Это представление позволяет свести краевую задачу (*) для произвольной области D к системе краевых задач для аналитич. функций, метод решения к-рой подробно разработан Г. В. Колосовым и Н. И. Мусхелишвили. Эта методика получила развитие при решении различных *плоских задач* теории упругости, в к-рых основной Б. ф. является функция напряжений, или так наз. функция Эйри. *Е. Д. Соломенцев.*

БИГАРМОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – дифференциальное уравнение с частными производными

$$\Delta^2u\equiv\Delta(\Delta u)\equiv\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4u}{\partial y^4}=0.$$

К Б. у. приводят плоская задача теории упругости и задача об изгибе пластин. Основная задача для Б. у.: найти его решение (*бигармоническую функцию*), если заданы значения функции $u(x, y)$ и ее нормальной производной на границе области. Для этой задачи доказана теорема единственности решения. В теории упругости рассматриваются также задачи в постановке, отличной от основной.

Лит.: [1] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966; [2] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С., Пластинки и оболочки, М., 1963. *В. В. Подалков, В. А. Романов.*

БИГОЛОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Голоморфное отображение.*

БИЕНИЕ – см. *Свободное гармоническое колебание.*

БИЕНИЙ РЕЖИМ – см. *Вынужденные колебания.*

БИКАУСТИКА – гиперповерхность, возникающая при изучении особенностей семейства *каустик*, зависящих от времени. Она является множеством точек, заметаемых особенностями мгновенных каустик, отличными от точек самопересечения. Другими словами, Б.– это образ проекции на физич. пространство вдоль оси времени ребра возврата большой каустики семейства, лежащей в пространстве-времени. Понятие «Б.» введено В. И. Арнольдом в [1], где получены списки нормальных форм типичных Б. на плоскости (этот список состоит из 4 кривых, одна из к-рых содержит модуль) и в трехмерном пространстве, где встречаются гладкие поверхности, зонтики Уитни и ростки особенностей на линиях, заметаемых точечными особенностями мгновенных каустик типа A_4 и D_4. Близкое понятие – полная бикаустика, являющаяся множеством критич. значений проекции вдоль одномерных слоев большой каустики, определяет особую гиперповерхность с несколькими компонентами, связанную с особенностями проектирований полных пересечений (см. [2]). Полная Б. видна на фотографии (то есть на двумерной проекции) оптич. каустики в пространстве.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Перестройки особенностей потенциальных потоков невзаимодействующих частиц и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве, «Труды семинара И. Г. Петровского», 1982, т. 8, с. 21–57; [2] Щербак О. П., Волновые фронты и группы отражений, «Успехи математич. наук», 1988, т. 43, в. 3, с. 125–60. *В. М. Закалюкин.*

БИКОММУТАНТ – см. *Неймана алгебра.*

БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА – см. *Классические группы и алгебры Ли.*

БИЛЛИАРД – *динамическая система*, отвечающая движению по инерции материальной точки в ограниченной замкнутой области Q, лежащей в евклидовом или римановом пространстве, с кусочно гладкой границей, от которой точка отражается по следующему закону: угол падения равен углу отражения. Б. возникают в нек-рых моделях статистич. механики (см., напр., *Лоренца газ*). Рассеивающий Б. (биллиард Синая), характеризующийся тем, что область Q имеет строго выпуклую внутрь Q границу, представляет собой пример динамич. системы с сильными стохастич. свойствами: он является K-системой и метрически изоморфен *Бернулли сдвигу.*

Лит.: [1] Синай Я. Г., «Успехи математич. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 141–92; [2] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [3] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, Динамические системы – 2, с. 12, 174–97, М., 1985. *Л. А. Бунимович.*

БИЛЛИАРДНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Симплектическая геометрия.*

БИНАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Корреляционная функция.*

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Распределение.*

БИОН – термин, эквивалентный *бризеру* и использующийся в основном в теории магнитных *солитонов.* *В. П. Котляров.*

БИРКГОФА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА – см. *Каноническое преобразование*; нормальная форма; *Гамильтона функция*; нормальная форма.

БИРКГОФА–ХИНЧИНА ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА – исторически первая индивидуальная *эргодическая теорема*, доказанная при некоторых ограничениях Дж. Биркгофом [1] и в полной общности А. Я. Хинчиным [2]: для любой стационарной в узком смысле случайной последовательности

$$\ldots,X_{-1},X_0,X_1,\ldots\mathsf{E}|X_0|<\infty$$

с вероятностью 1 существуют пределы

$$\mathsf{E}(X_0|\mathcal{I}_X)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}X_k=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=-m}^{0}X_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}X_k,$$

где $\mathcal{I}_X$ – σ-алгебра событий, инвариантных относительно сдвигов последовательности $\{X_i\}$. Аналогичное утверждение справедливо и для стационарных в узком смысле процессов $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, с $\mathsf{E}|X(0)|<\infty$ (при этом суммы заменяются интегралами). Эта теорема в дальнейшем была обобщена в различных направлениях.

Лит.: [1] Birkhoff G., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1931, v. 17, p. 656–60; [2] Chintschin A., «Math. Ann.», 1932, Bd 107, S. 485–88. *А. А. Темпельман.*

БИРКГОФА – ХОФФМАНА ТЕОРЕМА – см. *Черная дыра*; теоремы единственности.

БИСПИНОР – дираковский *спинор* в представлении, где матрица γ^5 диагональна (см. *Дирака уравнение*). Б. является четырехкомпонентным столбцом – парой двухкомпонентных столбцов:

$$\psi=\begin{Vmatrix}\varphi^{\alpha}\\ \chi^{\beta'}\end{Vmatrix},$$

где индексы α (нештрихованный) и β' (штрихованный) пробегают значения 1 и 2. По отношению к группе трехмерных вращений φ^{α} и $\chi^{\beta'}$ являются обычными спинорами, преобразующимися по представлению $D^{1/2}$ со спином 1/2. Различие между ними проявляется при преобразованиях Лоренца: спиноры φ и χ преобразуются по представлениям, к-рые комплексно сопряжены друг другу, по так наз. представлениям $D^{(1/2,0)}$ и $D^{(0,1/2)}$ группы Лоренца. В квантовой теории поля Б. удобны для единообразного описания массивных и безмассовых релятивистских частиц со спином 1/2.

Лит.: [1] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Квантовая электродинамика, 2 изд., М., 1980; [2] Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1978. *А. И. Оксак.*

БИФУРКАЦИИ ТОЧКА – см. *Бифуркация, Катастроф теория.*

БИФУРКАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО в динамике твердого тела – множество, образованное наборами констант интегралов, вычисленных вдоль стационарных движений. В этот набор могут входить и постоянные параметры уравнений движения. Изображения Б. м. (или его плоских сечений) иногда называются бифуркационными диаграммами. Они состоят, как правило, из кусков гладких кривых. *В. А. Самсонов.*

БИФУРКАЦИЯ – термин, употребляемый в некоторых разделах математики и физики применительно к ситуации, когда некоторый объект $D = D(\lambda)$ зависит от параметра λ (не обязательно скалярного) и в любой окрестности некоторого значения λ_0 последнего (бифуркационное значение, или точка бифуркации) исследуемые качественные свойства объекта $D(\lambda)$ не являются одинаковыми для всех λ. Соответствующие точные определения различны в различных случаях, но в общем они следуют (с теми или иными модификациями) двум вариантам.

а) Изучаемые качественные свойства объекта D состоят в существовании других объектов O, определенным образом связанных с ним. Б. состоит в том, что при изменении λ объекты O возникают или исчезают (в частности, они могут сливаться друг с другом или из одного объекта может «рождаться» несколько). См. ниже – п. 1).

б) Сначала для объектов $D(\lambda)$ определяется, когда два таких объекта считаются эквивалентными. (Определение должно быть таким, чтобы у эквивалентных объектов все интересующие нас качественные свойства были одинаковыми.) Изменение качественных свойств $D(\lambda)$ в окрестности точки Б. λ_0, по определению, понимается в том смысле, что там имеются значения λ с неэквивалентными $D(\lambda)$. См. ниже – п. 2).

1) В теории операторов исходный объект $D(\lambda)$ – это нелинейный оператор $\Phi(x, \lambda)$ в действительном банаховом пространстве, с действительным параметром λ, определенный в окрестности точки $x = 0$ и такой, что $\Phi(0, \lambda) \equiv 0$. Ему при каждом фиксированном λ сопоставляются другие объекты O – решения x нелинейного операторного уравнения $\Phi(x, \lambda) = 0$. Точка Б.– это точка, в к-рой происходит рождение нового, нетривиального решения этого уравнения. Именно, это такая точка λ_0, что для любого $\varepsilon > 0$ существует λ, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, при к-ром уравнение $x = \Phi(x, \lambda)$ имеет решение $x(\lambda)$, удовлетворяющее условиям $0 < \|x(\lambda)\| < \varepsilon$. Если $\Phi(x, \lambda) \equiv \lambda A x$, где A – линейный вполне непрерывный оператор, то понятие точки Б. совпадает с понятием собственного значения оператора A.

Если $\Phi(x, \lambda)$ – нелинейный вполне непрерывный оператор, непрерывно дифференцируемый в смысле Фреше и такой, что $\Phi_x(0, \lambda) \equiv \lambda A$, то точками Б. оператора Φ могут служить лишь собственные значения оператора A. Топологич. методом (см. [1], [2]) установлено, что каждое нечетнократное (в частности, простое) собственное значение оператора A является точкой Б. оператора Φ. Аналогичное достаточное условие для случая четнократных собственных значений формулируется с помощью понятия вращения векторного поля.

Если $x = 0$ – неизолированное решение уравнения $x = \Phi(x, \lambda)$, то λ_0 есть точка Б. оператора Φ. Вариационным методом доказано (см. [1], [2]), что если $\Phi(x)$ – нелинейный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала, а $A = \Phi'(0)$ – вполне непрерывный самосопряженный оператор, то каждое собственное значение оператора A является точкой Б. оператора Φ. Понятие точки Б. видоизменяется также на случай больших решений $x(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \lambda_0$. Важное значение этих понятий и результатов состоит в том, что при сравнительно слабых ограничениях удается установить ветвление решения $x = 0$, в частности доказать неединственность решения нелинейной задачи. В ряде случаев более точную информацию дают аналитич. методы теории ветвления решений нелинейных уравнений (см. [5]).

2) В теории гладких динамич. систем рассматриваются однопараметрические (и отчасти двупараметрические [6]) семейства потоков (и каскадов; здесь рассматриваются лишь первые), причем выясняется, когда Б. «типичная», то есть сохраняет свой характер при малом изменении рассматриваемого семейства [9]; употребительны оба варианта а) и б). При втором два потока считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм фазового пространства, переводящий траектории одного из них в траектории другого с сохранением направления движения. Имеется вполне удовлетворительная теория Б. однопараметрич. семейств потоков с двумерным фазовым многообразием [7], [9], а также локальный вариант, относящийся к окрестности положения равновесия или периодич. решения в n-мерном случае [6].

В варианте а) изучаемые объекты O, к-рые сопоставляются данной динамич. системе,– это положения равновесия и периодич. решения, а иногда также нек-рые инвариантные многообразия (преимущественно торы) и гиперболич. инвариантные множества. Рассматривается «рождение» этих объектов, происходящее как «локально», возле нек-рого положения равновесия или периодич. решения, так и «полулокально», в окрестности «замкнутого контура», образованного несколькими траекториями, к-рые при $t \to \pm\infty$ стремятся к положению равновесия или к периодич. решениям. Возможен случай Б., к-рая в определенном смысле связана с подобным контуром, но к-рая происходит (с изменением параметра λ) еще до его возникновения [8]. Часто рождение периодич. решений бывает удобно рассматривать, переписывая дифференциальное уравнение и условие периодичности в виде интегрального уравнения и применяя к нему соответствующие методы [5].

3) В теории особенностей отображений встречаются разнообразные Б. различных объектов (как исходных, так и сопоставленных им), в связи с чем имеются различные случаи использования этого термина (вернее, производных от него) (см. [10], [6], [11]), но еще чаще соответствующие понятия получают самостоятельные названия. Таковы, напр., версальные семейства (или деформации) (см. [6], [11], [12]), к-рые (в нек-ром смысле) описывают все возможные Б., могущие произойти при малой деформации рассматриваемого объекта, в частности сюда относятся семь элементарных катастроф (см. [12]), к-рые представляют собой «типичные» k-параметрич. ($k \leqslant 4$) семейства функций, включающие функцию с вырожденной критич. точкой и определенные в окрестности последней; тем самым они описывают соответствующую Б. (Вообще, в иностранной литературе по теории особенностей вместо Б. часто говорят о «катастрофах».)

См. также *Бифуркация* инвариантных торов, *Бифуркация* рождения тора, *Динамическая бифуркация, Нелокальная бифуркация.*

Лит.: [1] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [2] Функциональный анализ, М., 1964; [3] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [4] Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [5] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [6] Арнольд В. И., «Успехи математич. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 119–84; [7] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [8] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П., «Математич. сб.», 1972, т. 88, № 4, с. 475–92; 1973, т. 90, № 1, с. 139–56; [9] Peixoto M. M., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematics, Vancouver, 1974, v. 2, p. 315–19; [10] Том Р., «Успехи математич. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 51–57; [11] Арнольд В. И., там же, 1975, т. 30, в. 5, с. 3–65; [12] Brocker P., Lander L., Differentiable germs and catastrophes, Cambrige, 1975.

Д. В. Аносов, В. А. Треногин.

БИФУРКАЦИЯ инвариантных торов – *бифуркация* (рождение, смерть или смена устойчивости) в семействе

инвариантных торов при изменении параметров динамической системы. Рождение (или смерть при обратном изменении параметров) гладкого тора, неустранимым образом встречающееся в конечнопараметрич. семействах, возможно лишь при смене устойчивости положения равновесия или предельного цикла. Негладкие торы могут рождаться и умирать и в однопараметрич. семействах в результате нелокальных бифуркаций. Б. же смены устойчивости торов (иногда сопровождаемые возникновением торов более высокой размерности) возможны лишь в бесконечно вырожденных семействах динамич. систем.

Лит.: [1] Chenciner A., Iooss G., «Arch. Ration. Mech. and Anal.», 1979, v. 69, № 2, p. 109–98. *В. С. Афраймович.*

БИФУРКАЦИЯ рождения тора – перестройка в фазовом пространстве одно- или многопараметрического семейства динамических систем, в результате которой возникает и устойчиво существует в некоторой области параметров *инвариантный тор*.

Пусть семейство динамич. систем непрерывно зависит от параметра ε, принадлежащего топологич. пространству E; $G \subset E$ – область существования тора; $\varepsilon_0 \in \overline{G}$ – бифуркационное значение параметра, отвечающее его рождению; $L = \overline{\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0}} T_\varepsilon$ – верхний топологич. предел (множество всех предельных точек) семейства торов $\{T_\varepsilon\}$. Если L – положение равновесия или предельный цикл, то тор рождается в результате локальной Б., в противном случае – нелокальной. Рождение тора из положения равновесия неустранимым образом встречается в двухпараметрич. семействах динамич. систем (см. таблицу).

Собственные значения в положении равновесия при	Примеры семейств	Рождающиеся торы
$\{0, \pm i\omega\}$, $\omega \neq 0$; $\dim W^c = 3$	$\dot u = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 u \pm u^2 + r^2 + u^3$, $\dot r = -2ur$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$	двумерный неустойчивый
$\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2\}$, $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$; $\dim W^c = 4$	$\dot r_1 = r_1(\varepsilon_1 + r_1^2 \pm br_2^2)$, $\dot r_2 = r_2(\varepsilon_2 + cr_1^2 \pm r_2^2)$, $bc - 1 < 0$	двумерные: неустойчивый и седловой
	$\dot r_1 = r_1(\varepsilon_1 + r_1^2 - br_2^2)$, $\dot r_2 = r_2(\varepsilon_2 + cr_1^2 - r_2^2 + f(r_1^2, r_2^2, \varepsilon_1))$, $bc - 1 > 0$	двумерные: неустойчивый, седловой и устойчивый; трехмерные: устойчивый и неустойчивый

В первом столбце таблицы указана размерность центрального многообразия W^c положения равновесия L, претерпевающего бифуркацию, во втором – приведены семейства динамич. систем на соответствующих центральных многообразиях ($r_{1,2}$ – амплитудные переменные, циклич. переменные опущены, а f – однородный многочлен 2-й степени от r_1^2, r_2^2, ε_1), содержащие основную информацию о структуре и Б. динамич. систем в окрестности L (так наз. главные семейства).

Рождение тора при смене устойчивости предельного цикла встречается неустранимым образом уже в однопараметрич. семействах динамич. систем. Для типичного семейства мультипликатор L при $\varepsilon = 0$ равен $e^{i\omega}$, $\omega \neq 2\pi p/q$; p, q – целые, $q \in \{1; 2; 3; 4\}$, а отображение Пуанкаре на центральном многообразии в нек-рых полярных координатах имеет вид:

$$(r, \theta) \mapsto \left(r + ar^3 + o(r^3), \theta + \omega + br^2 + o(r^2)\right), \quad a \neq 0.$$

При изменении ε рождается двумерный тор – устойчивый при $a < 0$ и неустойчивый при $a > 0$.

Инвариантные, вообще говоря, негладкие двумерные торы могут возникать также и в результате нелокальных бифуркаций – напр., выражаясь из странного аттрактора (при обратном изменении параметра негладкий тор разрушается, порождая странный аттрактор) или склеиваясь из сепаратрис появляющихся предельных циклов седло-узлового типа. При изменении параметров эти торы могут приобретать и увеличивать гладкость и становиться эргодическими.

Лит.: [1] Марсден Дж., Мак Кракен М., Бифуркация рождения цикла и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; [2] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П., Теория бифуркаций, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., 1986, т. 5, с. 3–218. *В. С. Афраймович.*

БИХАРАКТЕРИСТИКА – см. *Разностное уравнение*; асимптотика решения, *Характеристика* дифференциального оператора.

БКШ-МОДЕЛЬ, Бардина – Купера – Шриффера модель, – модель для микроскопического объяснения сверхпроводимости (см. [1]). Исходит из *Фрелиха модели* электрон-фононного взаимодействия. Взаимодействие H_I ведет к эффективному притяжению электронов при разности энергий между электронными состояниями

$$\left|\varepsilon_{\vec k} - \varepsilon_{\vec{k+q}}\right| < \hbar\omega_q.$$

Критерий существования сверхпроводящей фазы – доминирование H_I над экранированным кулоновским отталкиванием.

Л. Купер [2] показал, что основное состояние системы из двух электронов с полным нулевым импульсом, взаимодействующих через постоянные отрицательные матричные элементы в малой ячейке над поверхностью Ферми, отделено от континуума энергетич. щелью. Это позволило для получения основного состояния БКШ-м. вариационным способом использовать редуцированную задачу с включением лишь конфигураций, занятых парами электронов с противоположными спинами и импульсами:

$$H_{\text{БКШ}} = \sum\nolimits_{\vec k,\sigma} (\varepsilon_{\vec k} - \mu) a^+_{\vec k,\sigma} a_{\vec k,\sigma} -$$

$$-(2V)^{-1} \sum\nolimits_{\vec k,\vec{k'},\sigma,\sigma'} \gamma(k,k') a^+_{\vec k,\sigma} a^+_{-\vec k,-\sigma} a_{-\vec{k'},-\sigma'} a_{\vec{k'},\sigma'}.$$

В БКШ-м. взаимодействие $\gamma(k, k')$ факторизуется $\gamma(k, k') = \lambda(k)\lambda(k')g$, $g > 0$, и отлично от нуля лишь в окрестности поверхности Ферми:

$$\lambda(k) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma, & \left|\varepsilon_{\vec k} - \mu\right| \leqslant \hbar\omega_D, \\ 0, & \left|\varepsilon_{\vec k} - \mu\right| > \hbar\omega_D. \end{cases}$$

Основное состояние сверхпроводящего типа не возникает в теории возмущений ни в каком порядке. Его энергия выражается через плотность состояний на поверхности Ферми $N(0)$:

$$W_0 = -2N(0)(\hbar\omega_D)^2 / [\exp(2/N(0)g) - 1],$$

и в пределе слабой связи вычислена критич. температура

$$\theta_c = \hbar\omega_D \exp(-1/N(0)g).$$

В случае сильной связи существование малого параметра в теории обеспечивается теоремой Мигдала. Спектр элементарных возбуждений над основным состоянием имеет вид:

$$E_k = \left(\varepsilon_k^2 + \varepsilon_0^2\right)^{1/2},$$

где

$$\varepsilon_0 = \hbar\omega_D (\sinh[1/N(0)g])^{-1}$$

– щель при нуле температур.

Основное состояние БКШ-м. исследовалось также Н. Н. Боголюбовым [3] на основе канонич. преобразования, вводящего суперпозицию дырки и электрона, с последующей компенсацией диаграмм с $q=0$ в приближении, отвечающем методу среднего поля Хартри–Фока. Поэтому БКШ-м. часто называют также БКШ–Боголюбова моделью.

Термодинамич. свойства БКШ-м. были вычислены методом *аппроксимирующего гамильтониана* (см. [4]). В температурном случае спектр элементарных возбуждений имеет вид

$$E_k = \left(\varepsilon_k^2 + 4g^2\lambda^2(k)|S|^2\right)^{1/2},$$

а параметр S, определяющий щель, определяется из уравнения

$$S = \frac{g}{2V}\sum_{\vec{k}} \frac{\lambda^2(k)S}{\sqrt{4g^2\lambda^2(k)|S|^2+\varepsilon_k^2}} \tanh\frac{\sqrt{4g^2\lambda^2(k)|S|^2+\varepsilon_k^2}}{2\theta}.$$

Свободная энергия БКШ-м. и корреляционные функции (квазисредние) в термодинамич. пределе совпадают со свободной энергией и средними, вычисленными для квадратичного аппроксимирующего гамильтониана.

БКШ-м. позволяет объяснить:

1) фазовый переход 2-го рода при θ_c;

2) электронный ход теплоемкости вида $\exp(-\theta_0/\theta)$ в окрестности $\theta=0$ и существование энергетич. щели в спектре;

3) эффект Мейсснера ($\vec{B}=0$);

4) бесконечную проводимость ($\vec{E}=0$);

5) зависимость θ_c от изотопич. массы $\theta_c\sqrt{M}=\text{const}$.

Лит.: [1] Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 1175; [2] Cooper L. N., там же, 1956, v. 104, p. 1189; [3] Боголюбов Н. Н., «Журнал экспер. и теоретич. физики», 1958, т. 34, с. 58; [4] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974. *В. Н. Нескоромный.*

БКШ–БОГОЛЮБОВА МОДЕЛЬ – см. *БКШ-модель.*

БКШ–БОГОЛЮБОВА УРАВНЕНИЕ, Бардина–Купера–Шриффера–Боголюбова уравнение,– уравнение самосогласования для параметра энергетической щели $\Delta_{\vec{p}}$ ($\vec{p}$ – импульсная переменная) в последовательной микроскопической теории сверхпроводимости, построенной Дж. Бардиным (J. Bardeen), Л. Купером (L. Cooper), Дж. Шриффером (J. Schrieffer) и Н. Н. Боголюбовым в 1957–58. Энергетич. спектр возбуждений сверхпроводящего состояния отличается от соответствующего спектра нормального состояния тем, что для перевода системы из основного состояния в состояние с одночастичными возбуждениями необходимо затратить количество энергии, большее, чем 2Δ. Указанное отличие в спектрах сверхпроводящего и нормального состояний, как было показано Л. Купером, обязано неустойчивости нормального основного состояния газа свободных электронов, подчиняющихся принципу Паули, по отношению к образованию связанных пар электронов с противоположными импульсами и спинами при наличии между ними притяжения. Руководствуясь идеей Л. Купера о притяжении между электронами, находящимися в окрестности сферы Ферми, Дж. Бардин, Л. Купер и Дж. Шриффер рассмотрели простую модель сверхпроводящей системы с гамильтонианом, учитывающим только взаимодействие $V_{\vec{p}\vec{p}'}$ пар электронов с противоположными импульсами и спинами. При этом они выбирали волновую функцию основного состояния в виде произведения парных функций. Используя вариационную процедуру отыскания минимума энергии, они определили параметры этих парных функций и получили интегральное уравнение самосогласования для $\Delta_{\vec{p}}$:

$$\Delta_{\vec{p}} = -\sum_{\vec{p}'} V_{\vec{p}\vec{p}'} \frac{\Delta_{\vec{p}'}}{2E_{\vec{p}'}}, \qquad (*)$$

где $E_{\vec{p}} = \sqrt{(\varepsilon_{\vec{p}}-\mu)^2+\Delta_{\vec{p}}^2}$ – энергия квазичастицы с импульсом $\vec{p}$ в сверхпроводящем состоянии, $\varepsilon_{\vec{p}}$ – энергия электрона, μ – химич. потенциал.

Уравнение типа (*) было получено Н. Н. Боголюбовым в более строгой постановке задачи, в к-рой ему удалось обосновать законность процедуры, используемой в БКШ-методе, и правильность теории БКШ. Исходным пунктом метода Боголюбова является гамильтониан Фрелиха, содержащий в себе взаимодействие электронов с фононами решетки. Этот метод во многом аналогичен методу, развитому Н. Н. Боголюбовым в 1947 для построения микроскопич. теории сверхтекучести, так как сверхпроводимость можно рассматривать как сверхтекучесть системы заряженных фермионов. В этом подходе к теории сверхпроводимости с помощью канонич. преобразования (преобразования Боголюбова) переходят от операторов рождения и гибели электронов с противоположными импульсами и противоположными спинами к соответствующим операторам рождения и гибели новых квазичастиц и в результате компенсации «опасных» диаграмм (приводящих к расходимостям при интегрировании по импульсам) для матричных элементов гамильтониана находят параметры вышеупомянутого канонич. преобразования и, тем самым, получают уравнение самосогласования, частным случаем к-рого является уравнение (*).

Лит.: [1] Теория сверхпроводимости. Сб. статей, М., 1960; [2] Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Новый метод в теории сверхпроводимости, М., 1958.

В. В. Красильников.

БЛИЖНИЙ ПОРЯДОК – см. *Дальний и ближний порядок.*

БЛИЗКОДЕЙСТВИЕ – см. *Взаимодействие.*

БЛОК-СПИНОВАЯ ПЕРЕМЕННАЯ – см. *Ренормализационная группа*; метод Монте-Карло.

БЛОХА ВЕКТОР – 1) операторный вектор

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \left\{\hat{R}^\alpha\Big|_{\alpha=x,y,z}\right\}, \quad \hat{R}^\alpha \equiv \sum_{i=1}^N \lambda_i \hat{S}_i^\alpha,$$

где λ_i – константы, $\hat{S}_i^\alpha$ – компоненты оператора спина i-й частицы;

2) классический вектор

$$\boldsymbol{R} = \langle\hat{\boldsymbol{R}}\rangle,$$

являющийся средним значением операторного Б. в.

При $\lambda_i \equiv 1$ Б. в. совпадает с полным спином системы N частиц. При $\lambda_i = \mu_i$, где μ_i – магнитный момент i-й частицы, Б. в. имеет смысл вектора намагниченности системы. В теории конечноуровневых систем вектор $\hat{\boldsymbol{S}} = \{\hat{S}_i^\alpha\}$ называется вектором псевдоспина.

В большинстве случаев классич. Б. в. можно определить как решение уравнения Блоха

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{R}(t) = \Omega(t)\times\boldsymbol{R}(t) - \Gamma(t),$$

в к-ром $\Omega(t)$ – обобщенный вектор вращательного момента, $\Gamma(t) \equiv \{R^\alpha(t)/T_\alpha\}$, T_α – время релаксации соответствующей компоненты Б. в. Уравнение Блоха отличается от *Ландау – Лифшица уравнения* для магнитного момента учетом затухания.

Ф. Блох [1] рассматривал уравнения движения для ядерных спинов. В квантовой оптике уравнения движения для Б. в., имеющего смысл псевдоспина, называются оптическими уравнениями Блоха.

Лит.: [1] Bloch F., «Phys. Rev.», 1946, v. 70, № 7, p. 460–74; [2] Уайт Р., Квантовая теория магнетизма, пер. с англ., 2 изд., М., 1985; [3] Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А., Кооперативные явления в оптике, М., 1988.

В. И. Юкалов.

БЛОХА ЗАКОН ДИСПЕРСИИ $E(\boldsymbol{k})$ – зависимость энергии E квантовой частицы, движущейся в периодическом потенциале, от *квазиимпульса* $\boldsymbol{k}$, характеризующего неприводимое представление группы трансляций потенциала, по которому преобразуется волновая функция квантовой час-

тицы. Б. з. д. является основным понятием квантовой теории кристаллич. твердых тел.

Математически корректно функция $E(\boldsymbol{k})$ определяется следующим образом. Оператор $T_{\boldsymbol{a}}$ сдвига на вектор $\boldsymbol{a}$ решетки Λ:

$$(T_{\boldsymbol{a}}\psi)(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

имеет в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R}^N)$ спектральное разложение

$$T_{\boldsymbol{a}} = \int e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}}\, dE_{\boldsymbol{k}},$$

где $\boldsymbol{k}$ – квазиимпульс, характеризующий неприводимое представление группы трансляций. Оператор Шредингера квантовой частицы в периодич. потенциале $-\Delta + u(\boldsymbol{x})$, $u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) = u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a}\in\Lambda$, коммутирует со всеми операторами $T_{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{a}\in\Lambda$, и поэтому в гильбертовом пространстве H имеет спектральное разложение

$$-\Delta + u(x) = \int \varepsilon(\boldsymbol{k})\, dE_{\boldsymbol{k}}.$$

Определенная таким образом функция $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ и называется законом дисперсии Блоха.

Функция $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ обладает рядом симметрий. Прежде всего, для самосопряженного оператора Шредингера эта функция четная: $\varepsilon(-\boldsymbol{k}) = \varepsilon(\boldsymbol{k})$. Поскольку квазиимпульс $\boldsymbol{k}$ определен с точностью до произвольного вектора $\boldsymbol{b}$ обратной решетки Λ^*, $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ является периодич. функцией с периодами $\boldsymbol{b}$, $\varepsilon(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{b}) = \varepsilon(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{b}\in\Lambda^*$, и поэтому может рассматриваться как функция на фундаментальной области обратной решетки, называемой *Бриллюэна зоной*. Если потенциал $u(\boldsymbol{x})$ инвариантен относительно пространственной группы G, подгруппой к-рой является решетка сдвигов Λ, то $\varepsilon(r\boldsymbol{k}) = \varepsilon(\boldsymbol{k})$, $r\in R$, где R – точечная группа G, то есть закон дисперсии инвариантен относительно точечной группы.

$\varepsilon(\boldsymbol{k})$ является многозначной аналитич. функцией компонент квазиимпульса. Различные ветви этой функции $\varepsilon_n(\boldsymbol{k})$, $n\in\mathbb{N}$, называются энергетическими зонами. Расположение точек ветвления в ряде случаев может быть определено из соображений симметрии. Напр., точка $\boldsymbol{k}$ является точкой ветвления p-го порядка, если группа вектора $\boldsymbol{k}$, к-рая есть $R_{\boldsymbol{k}} = \{r \mid r\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\}$, имеет p-мерное представление. Изоэнергетич. поверхность $\Gamma_{\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{k} \mid \varepsilon(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{a} - \text{const}\}$ не может содержать кусков поверхностей, параметризованных рациональными функциями, в частности куски плоскостей, прямых цилиндров, конусов, параболоидов, гиперболоидов. При $N>1$ области значений функций $\varepsilon_n(\boldsymbol{k})$ всегда перекрываются при достаточно больших ε. При $N=1$ последовательность функций $\varepsilon_n(k)$, $k\in[0, \pi/a]$, $n\in\mathbb{N}$, состоит из поочередно монотонно возрастающих и убывающих функций, области значений этих функций могут лишь попарно касаться друг друга, и если они касаются всегда, за исключением конечного множества зон, то соответствующий оператор Шредингера называется конечнозонным.

Для гладких потенциалов спектр оператора Шредингера является абсолютно непрерывным. Плотность состояний спектра $p(E)$ выражается через закон дисперсии $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ по формуле

$$p(E) = (2\pi)^{-N}\int \delta(\varepsilon(\boldsymbol{k}) - E)\, d\boldsymbol{k} =$$

$$= (2\pi)^{-N}\int_{\varepsilon(\boldsymbol{k})=E} |\operatorname{grad}_{\boldsymbol{k}}\varepsilon(\boldsymbol{k})|^{-1}\, ds.$$

Особенности плотности состояний определяются критич. точками закона дисперсии, где $\operatorname{grad}_{\boldsymbol{k}}\varepsilon(\boldsymbol{k}) = 0$. Характер особенности $p(E)$ в невырожденной критич. точке определяется индексом критич. точки (то есть числом отрицательных собственных значений матрицы $\|\partial^2\varepsilon/\partial k_i \partial k_j\|$ в критич. точке) и размерностью пространства N. Поскольку функцию $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ можно считать заданной на зоне Бриллюэна или, что то же самое, на N-мерном торе, числа μ_λ критич. точек индекса λ этой функции удовлетворяют неравенствам Морса $\mu_\lambda \geqslant b_\lambda$, где b_λ – числа Бетти тора. В частности, для $N=3$ плотность состояний спектра $p(E)$ может иметь только корневые особенности, а $b_0 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 3$, $b_3 = 1$.

С помощью Б. з. д. можно рассчитать асимптотич. методами спектр оператора Шредингера, учитывающего помимо периодического также произвольное слабое поле (слабое в том смысле, что характеристики поля мало меняются на длине векторов элементарных трансляций). Напр., для слабого однородного магнитного поля $\boldsymbol{H}$ спектр оператора Шредингера $\varepsilon(n, K_H)$, где $n\in\mathbb{N}$, K_H – проекция квазиимпульса на направление магнитного поля $\nu = \boldsymbol{H}/|H|$, определяется неявным образом при помощи уравнения

$$S(\varepsilon, K_H) = (e\boldsymbol{H}/\hbar c)n,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, c – скорость света, e – заряд электрона, а $S(\varepsilon, K_H)$ – площадь сечения изоэнергетич. поверхности плоскостью $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\nu}) = K_H$.

Название термина связано с именем Ф. Блоха (F. Bloch), к-рый в 20-е гг. сформулировал основы квантовой теории кристаллич. твердых тел.

Лит.: [1] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 4, Анализ операторов, М., 1982.

Е. Д. Белоколос.

БЛОХА ТЕОРЕМА – фундаментальная теорема квантовой теории твердого тела, устанавливающая вид волновой функции электрона, находящегося в поле с периодическим потенциалом U, в частности в кристаллической решетке. Сформулирована Ф. Блохом (F. Bloch) в 1929. Б. т. утверждает, что если потенциал $U(\boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{r}$ – пространственная координата) – функция с периодом $\boldsymbol{a}$ кристаллич. решетки: $U(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) = U(\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{a} = n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2 + n_3\boldsymbol{a}_3$; $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ – основные (базисные) векторы решетки; n_1, n_2, n_3 – целые числа, то решения $\psi(\boldsymbol{r})$ одноэлектронного *Шредингера уравнения* (*адиабатическое приближение*)

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{r}) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r}) = \mathscr{E}\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (1)$$

($\mathscr{E}$ – энергия частицы) имеют вид:

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}). \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор, характеризующий состояние электрона, $u_{\boldsymbol{k}}$ – периодич. функция с периодом решетки, m – масса электрона. Б. т. является следствием трансляционной инвариантности кристаллич. решетки. Если $\psi(\boldsymbol{r})$ – решение уравнения (1), соответствующее стационарному состоянию электрона с энергией $\mathscr{E}$, то $\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})$ также является его решением, причем $\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) = C_{\boldsymbol{a}}\psi(\boldsymbol{r})$, где $C_{\boldsymbol{a}} = \pm 1$.

Если стационарному состоянию с энергией $\mathscr{E}$ соответствует несколько различных волновых функций $\psi(\boldsymbol{r})$ (то есть состояние с энергией $\mathscr{E}$ – вырожденное), то волновая функция $\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})$ является линейной комбинацией всех собственных функций $\psi(\boldsymbol{r})$, отвечающих вырожденному уровню $\mathscr{E}$. В этом случае $C_{\boldsymbol{a}} = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}}$. Таким образом, в случае вырождения имеем:

$$\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}}\psi(\boldsymbol{r}). \qquad (3)$$

Функции, удовлетворяющие условию (3) (условию Блоха), называются функциями Блоха.

Подставляя (2) в уравнение Шредингера (1), получим уравнение для $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(i\nabla + \boldsymbol{k})^2 + U(\boldsymbol{r})\right]u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \mathscr{E}_{\boldsymbol{k}}U(\boldsymbol{r}), \qquad (4)$$

которое имеет бесконечный ряд решений $u_{s\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$. Индекс s нумерует решения при заданном $\boldsymbol{k}$. Волновым функциям (2) при заданном $\boldsymbol{k}$, таким образом, соответствуют дискретные значения энергии: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_s(\boldsymbol{k})$, $s = 1, 2, \ldots$ Индекс s – номер энергетич. зоны; зависимость $\mathscr{E}_s$ от $\boldsymbol{k}$ при фиксированном s называется *Блоха законом дисперсии* частицы в s-й зоне.

Лит.: [1] Займан Дж., Принципы теории твердого тела, пер. с англ., М., 1974; [2] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Статистическая физика, ч. 2, М., 1978.

В. М. Винокур.

БЛОХА УГОЛ – угол отклонения $\Theta(t)$ классического *Блоха вектора* $\boldsymbol{R}(t)$ от оси $(-z)$ в сферической системе координат. Б. у. определяется равенствами

$$R^x(t)=\rho(t)\sin\Theta(t)\cos\varphi(t),$$
$$R^y(t)=\rho(t)\sin\Theta(t)\sin\varphi(t),$$
$$R^z(t)=-\rho(t)\cos\Theta(t).$$

Функции $\rho(t)$, $\Theta(t)$ и $\varphi(t)$ находятся из уравнений, получающихся при подстановке данного представления вектора Блоха в уравнения Блоха. *В. И. Юкалов.*

БЛОХА УРАВНЕНИЕ – см. *Блоха вектор, Плотности матрица.*

БЛОХА УСЛОВИЕ – см. *Блоха теорема.*

БЛОХА ФУНКЦИЯ – см. *Блоха теорема.*

БЛОХА – МАКСВЕЛЛА УРАВНЕНИЯ – основная система уравнений полуклассической теории взаимодействия электромагнитного излучения с резонансной двухуровневой системой атомов (молекул, спинов и т. п.).

Как известно, алгебра двухуровневых излучателей является алгеброй матриц Паули σ_1, σ_2, σ_3:

$$\sigma_1=\begin{Vmatrix}0&1\\1&0\end{Vmatrix},\quad \sigma_2=\begin{Vmatrix}0&-i\\i&0\end{Vmatrix},\quad \sigma_3=\begin{Vmatrix}1&0\\0&-1\end{Vmatrix}.$$

Квантовомеханич. среднее $\langle\sigma_3\rangle$ имеет смысл разности населенностей уровней, а средние $\langle\sigma_1\rangle$, $\langle\sigma_2\rangle$, равные нулю в чистом состоянии, в суперпозиционном состоянии имеют смысл компонент тока перехода. Удобнее вместо σ_1 и σ_2 использовать $\sigma_\pm={}^1\!/_2(\sigma_1\pm i\sigma_2)$. Они связаны следующим образом с операторами плотности тока атомного перехода

$$\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{i=1}^{N}\left\{\left\langle+\left|\hat{\boldsymbol{j}}_0^{+}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\right|-\right\rangle\sigma_{i+}(t)+\left\langle-\left|\hat{\boldsymbol{j}}_0^{-}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\right|+\right\rangle\sigma_{i-}(t)\right\},$$

где N – число атомов в системе, $|+\rangle$, $|-\rangle$ – волновые функции возбужденного и основного состояний атома, $\hat{\boldsymbol{j}}_0^{+}(\boldsymbol{r})$ – положительно-частотная часть оператора плотности тока перехода отдельного атома в модели точечных атомов

$$\langle+|\hat{\boldsymbol{j}}_0^{+}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)|-\rangle=\boldsymbol{m}_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i),$$

где $\boldsymbol{m}_i$ – матричный элемент тока перехода.

Система Б.– М. у. для векторного потенциала $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ и средних $\langle\sigma_\pm\rangle$, $\langle\sigma_3\rangle$ имеет вид

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t),$$

$$\frac{\partial\langle\sigma_{i+}\rangle}{\partial t}=i\omega_{0i}\langle\sigma_{i+}\rangle+\frac{i}{\hbar c}\boldsymbol{m}_i^{*}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i,t)\langle\sigma_{i3}\rangle,$$

$$\frac{\partial\langle\sigma_{i3}\rangle}{\partial t}=\frac{2i}{\hbar c}\left(\boldsymbol{m}_i\langle\sigma_{i+}\rangle-\boldsymbol{m}_i^{*}\langle\sigma_{i-}\rangle\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i,t),$$

где $\hbar\omega_{0i}$ – энергия возбуждения i-го атома.

Часто используется приближение медленно меняющихся амплитуд, состоящее в пренебрежении вторыми производными от медленно меняющихся амплитуд $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\pm}(\boldsymbol{r},t)$, определяющихся выражением

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{+}(\boldsymbol{r},t)e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}+\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{-}(\boldsymbol{r},t)e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}.$$

Тогда первое уравнение системы принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{+}(\boldsymbol{r},t)=-i\frac{2\pi}{k}\boldsymbol{m}R_{\boldsymbol{k}}^{+},$$

где

$$R_{\boldsymbol{k}}^{+}=\frac{1}{V_1}\sum_{i\in V_1(\boldsymbol{r})}\langle\sigma_{i+}\rangle e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_i}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}$$

и положено, что в атомной системе снято вырождение, так что все $\boldsymbol{m}_i=\boldsymbol{m}$. *А. В. Андреев.*

БЛУЖДАЮЩАЯ ТОЧКА – см. *Неблуждающая точка.*

БЛЯШКЕ МНОЖИТЕЛЬ – см. *Бляшке произведение.*

БЛЯШКЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, Бляшке функция,– регулярная аналитическая функция комплексного переменного z, определенная в единичном круге $K=\{z;\ |z|<1\}$ в виде конечного или бесконечного произведения

$$B(z)=z^n\prod_k\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_kz},\qquad(*)$$

где n – целое неотрицательное число, $\{a_k\}$, $k=1,2,...,$– последовательность точек $a_k\in K\setminus\{0\}$ такая, что произведение в правой части (*) сходится (условие сходимости необходимо лишь в случае бесконечного произведения). Б. п. было введено В. Бляшке (W. Blaschke, 1915), установившим следующее утверждение: последовательность $\{a_k\}$ точек $a_k\in K\setminus\{0\}$ определяет функцию вида (*) тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_k(1-|a_k|).$$

Каждый множитель вида

$$b_k(z)=\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_kz},$$

называемый множителем Бляшке для a_k, осуществляет однолистное конформное отображение круга K на себя, переводящее точку $z=a_k$ в нуль, с нормировкой $b_k(-a_k/|a_k|)=1$. Множители вида $b_0(z)=z$ можно интерпретировать как множители Бляшке, соответствующие нулю $z=0$ и нормировке $b_0(1)=1$. Определение множителей Бляшке и Б. п. легко переносится на круг произвольного радиуса, а также на любую односвязную область, конформно эквивалентную кругу. *П. М. Тамразов.*

БЛЯШКЕ ФУНКЦИЯ – см. *Бляшке произведение.*

БОБЫЛЕВА–СТЕКЛОВА СЛУЧАЙ – см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки.

БОГОЛЮБОВА АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД в квантовой теории поля – см. *Аксиоматическая квантовая теория поля.*

БОГОЛЮБОВА ДУАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ – цепочка эволюционных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t}f_s(t,x_1,\dots,x_s)=[f_s(t,x_1,\dots,x_s),H_s]-$$
$$-\sum_{i\neq j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial q_i}\Phi(q_i-q_j)\frac{\partial}{\partial\overset{\vee}{p}_j}f_{s-1}(t,x_1,\dots,x_s),\quad s=1,2,\dots,$$

где $x_i\equiv(q_i,p_i)\in\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}$, H_s – гамильтониан системы частиц, взаимодействующих посредством потенциала $\Phi(q)$, $[\cdot,\cdot]$ – скобка Пуассона. Б. д. у. являются сопряженными к *Боголюбова уравнениям.* Решение задачи Коши для Б. д. у. представляется формулой (см. [1]):

$$f_s(t,x_1,\dots,x_s)=\sum_{n=0}^{s}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\times$$
$$\times\sum{}^{*}S^{s-k}(t,x_1,\overset{i_1}{\vee}\dots\overset{i_k}{\vee},x_s)f_{s-n}^{0}(x_1,\overset{i_1}{\vee}\dots\overset{i_n}{\vee},x_s),$$

где $S^{s-k}(t)$ – *эволюционный оператор уравнения Лиувилля*, а суммирование $\sum^{*}$ проводится от 1 до s по $i_1,\dots,i_n=1$, $i_1\neq i_n$.

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985. *В. И. Герасименко.*

БОГОЛЮБОВА КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ – линейные преобразования операторов уничтожения и рождения частиц к операторам уничтожения и рождения квазичастиц для неидеальных ферми- и бозе-газов. Предложены Н. Н. Боголюбовым в 1947 для бозе-газа и в 1958 для ферми-газа.

Для неидеального бозе-газа Б. к. п. таковы:

$$b_{\boldsymbol{k}}=u_{\boldsymbol{k}}\xi_{\boldsymbol{k}}+v_{\boldsymbol{k}}\xi_{-\boldsymbol{k}}^{+},$$
$$b_{\boldsymbol{k}}^{+}=u_{\boldsymbol{k}}\xi_{\boldsymbol{k}}^{+}+v_{\boldsymbol{k}}\xi_{-\boldsymbol{k}},\qquad(1)$$

где $b_{\boldsymbol{k}}$, $b_{\boldsymbol{k}}^{+}$ – операторы уничтожения и рождения частиц в состоянии с импульсом $\boldsymbol{k}$, удовлетворяющие перестановоч-

ным соотношениям Бозе статистики, ξ_k, ξ_k^+ – операторы уничтожения и рождения элементарных возбуждений с импульсом k. Функции u_k, v_k связаны соотношением $u_k^2 - v_k^2 = 1$, к-рое обеспечивает бозевский характер операторов. Б. к. п. (1) позволяют получить энергетич. спектр слабо возбужденных состояний неидеального бозе-газа и объяснить его сверхтекучесть.

Для неидеального ферми-газа из электронов, взаимодействующих между собой посредством обмена фононами, Б. к. п. имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} a_{k,1/2} &= u_k\alpha_{k0} + v_k\alpha_{k1}^+, \\ a_{-k,-1/2} &= u_k\alpha_{k1} - v_k\alpha_{k0}^+, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $a_{\pm k,\pm 1/2}$ – операторы уничтожения электрона с импульсом $\pm k$ и спином $\pm 1/2$, α_{k0}, α_{k1} – операторы уничтожения элементарных возбуждений с импульсом k. Функции u_k, v_k вещественны и связаны соотношением $u_k^2 + v_k^2 = 1$, к-рое обеспечивает фермиевский характер операторов α_k. Даже в случае слабого взаимодействия электронов с фононами теория возмущений по степеням константы связи неприменима, так как электронфононное взаимодействие оказывается существенным вблизи поверхности Ферми, где образуются коррелированные пары электронов с противоположно направленными импульсами и спинами. После проведения Б. к. п. можно применять теорию возмущений с соответствующими предосторожностями, исключив «опасные» члены, приводящие к расходимостям. Б. к. п. (2) позволяют получить спектр элементарных возбуждений системы и объяснить явление сверхпроводимости.

Лит.: [1] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Статистическая физика, ч. 2, М., 1978; [2] Боголюбов Н. Н., Избранные труды по статистической физике, М., 1979. *Д. Н. Зубарев.*

БОГОЛЮБОВА ЛЕММА – см. *Исключения бозонных переменных метод.*

БОГОЛЮБОВА НЕРАВЕНСТВО – неравенство, используемое в теории фазовых переходов. Пусть H – симметрич. оператор в конечномерном векторном пространстве L. Положим

$$\langle X\rangle = (\mathrm{Tr}\exp(-\beta H))^{-1}\mathrm{Tr}\,X\exp(-\beta H)$$

для оператора X в L. Тогда для операторов A, C в L имеет место неравенство Боголюбова:

$$\frac{1}{2}\beta\left\langle AA^* + A^*A\right\rangle\left\langle\left[[C,H]C^*\right]\right\rangle \geqslant |\langle[C,A]\rangle|^2,$$

$$[C,H] = CH - HC.$$

Это неравенство обобщается на случай бесконечномерного гильбертова пространства.

См. также *Боголюбова–Пайерлса неравенство.*

В. И. Скрипник.

БОГОЛЮБОВА СИСТЕМА в стандартной форме – см. *Усреднения метод.*

БОГОЛЮБОВА ТЕОРЕМА – теорема статистической физики об особенностях типа $1/q^2$ у *Грина функций* для бозе- и ферми-систем при малых импульсах q. Доказана Н. Н. Боголюбовым в 1961.

Согласно Б. т., для квантовых бозе-систем с калибровочно инвариантным взаимодействием между частицами фурье-компоненты функций Грина, соответствующие энергии $E=0$, удовлетворяют неравенству

$$\left|\langle\langle a_q, a_q^+\rangle\rangle_{E=0}\right| \geqslant A/q^2,$$

где a_q, a_q^+ – бозе-операторы, A – константа, пропорциональная плотности бозе-конденсата. Функции Грина понимаются в смысле *квазисредних*, то есть предполагается, что снято вырождение состояния статистич. равновесия, связанное с законом сохранения числа частиц (неустойчивость относительно образования бозе-конденсата). В этом случае особенность $1/q^2$ свидетельствует о появлении бозе-конденсата и ветви возбуждений без энергетич. щели.

Аналогичная теорема имеет место и для ферми-систем, для к-рых возможен переход в сверхпроводящее состояние, напр. для электронов в металле. В этом случае для построения квазисредних нужно снять вырождение относительно появления связанных пар фермионов с противоположно направленными спинами. Тогда

$$\left|\langle\langle\beta_q, \beta_q^+\rangle\rangle_{E=0}\right| \geqslant B/q^2,$$

где β_q, β_q^+ – операторные фурье-компоненты, соответствующие импульсу q, от произведений ферми-операторов

$$\psi(x,\sigma)\psi(x',-\sigma),$$

$$\psi^+(x,\sigma)\psi^+(x',-\sigma),$$

σ – спин, B – константа, пропорциональная плотности конденсата из парных «квазимолекул», то есть коррелированных пар фермионов с противоположно направленными спинами. Б. т. для ферми-систем указывает на появление ветви коллективных возбуждений в энергетич. спектре, что отвечает спонтанному нарушению симметрии.

Аналогичные особенности появляются у соответствующих функций Грина для систем с другими видами вырождения. Такие же соотношения справедливы и в квантовой теории поля, где в случае спонтанного нарушения симметрии возникают частицы нулевой массы.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 3, Киев, 1971; [2] Статистическая физика и квантовая теория поля. [Сб. ст.], М., 1973; [3] Форстер Д., Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции, пер. с англ., М., 1980, гл. 7; [4] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984. *Д. Н. Зубарев.*

БОГОЛЮБОВА ТЕОРЕМА «острие клина» – принцип *аналитического продолжения* для голоморфных функций многих комплексных переменных, заданных в трубчатых областях над конусами; установлена Н. Н. Боголюбовым (1956) при доказательстве *дисперсионных соотношений* в квантовой теории поля.

Пусть C^+ – открытый острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле, $C^- = -C^+$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$; через $H(\Omega + iC_R^\pm)$ обозначаются пространства функций, голоморфных в клиньях

$$\Omega + iC_R^\pm = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \middle| x \in \Omega, y \in C_R^\pm\right\},$$

где $C_R^\pm = C^\pm \cap \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R\}$. Если обобщенные граничные значения функций $f_\pm \in H(\Omega + iC_R^\pm)$ существуют и совпадают на острие Ω, то существует функция f, голоморфная в области

$$\left(\Omega + iC_R^+\right)\cup\left(\Omega + iC_R^-\right)\cup\tilde{\Omega}$$

такая, что сужения f на $\Omega + iC_R^\pm$ совпадают с $f_\pm$. Здесь комплексная окрестность острия

$$\tilde{\Omega} = \bigcup\nolimits_{x\in\Omega}\left\{z \in \mathbb{C}^n \middle| z - x < \theta\Delta_\Omega(x)\right\}$$

характеризуется расстоянием $\Delta_\Omega(x)$ от x до границы Ω и константой θ, $0<\theta<1$, не зависящей от функции f. Во многих физически интересных случаях число θ эффективно вычисляется.

Имеются многочисленные доказательства и обобщения Б. т., нашедшей широкие применения в квантовой теории поля, теории дифференциальных уравнений с частными производными, многомерном комплексном анализе.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. *В. В. Жаринов, Ю. Е. Хохлов.*

БОГОЛЮБОВА ТЕОРЕМЫ об усреднении – три теоремы, дающие обоснование метода усреднения для систем в стандартной форме Боголюбова. См. *Усреднения метод.*

БОГОЛЮБОВА УРАВНЕНИЯ – система дифференциальных уравнений для параметров $u(\boldsymbol{r})$, $v(\boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{r}$ – пространственная переменная) канонического преобразования Боголюбова в случае сверхпроводящих пространственно неоднородных состояний систем заряженных частиц (электронов). Эти уравнения были получены Н. Н. Боголюбовым [1] в результате обобщения принципа компенсации «опасных» (приводящих к расходимостям при интегрировании по импульсам) диаграмм, примененного ранее к однородному электронному газу при наличии притяжения между частицами. Неоднородное состояние в сверхпроводящей системе возникает, когда на электрон действует магнитное поле

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

($\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ – вектор-потенциал). В этом случае система описывается гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \int d^3\boldsymbol{r}\Big[\sum_\alpha \Psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\mathscr{H}_e(\boldsymbol{r})\Psi_\alpha(\boldsymbol{r}) + U(\boldsymbol{r})\Psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\Psi_\alpha(\boldsymbol{r}) + \Delta(\boldsymbol{r})\Psi_{1/2}^+(\boldsymbol{r})\Psi_{-1/2}^+(\boldsymbol{r}) + \Delta^*(\boldsymbol{r})\Psi_{-1/2}(\boldsymbol{r})\Psi_{1/2}(\boldsymbol{r})\Big], \quad (1)$$

где

$$\mathscr{H}_e(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2m}\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\Big)^2 - E_F,$$

$\Psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})$, $\Psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ – операторы рождения и гибели электрона в точке $\boldsymbol{r}$ с проекцией спина $\alpha = \pm 1/2$; $U(\boldsymbol{r})$ – средний потенциал, к-рый можно выбрать самосогласованным образом, $\Delta(\boldsymbol{r})$ – так наз. потенциал спаривания, E_F – энергия Ферми; m, e – масса и заряд электрона. Диагонализуя гамильтониан (1) с помощью обобщенного канонич. преобразования

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{1/2}(\boldsymbol{r}) &= \sum_n\big(\gamma_{n,1/2}u_n(\boldsymbol{r}) - \gamma_{n,-1/2}^+ v_n^*(\boldsymbol{r})\big),\\ \Psi_{-1/2}(\boldsymbol{r}) &= \sum_n\big(\gamma_{n,-1/2}u_n(\boldsymbol{r}) + \gamma_{n,1/2}^+ v_n^*(\boldsymbol{r})\big)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

($\gamma_{n,\alpha}^+$, $\gamma_{n,\alpha}$ – операторы рождения и гибели новых квазичастиц; суммирование выполняется по полному набору квантовых чисел квазичастиц), Н. Н. Боголюбов из принципа компенсации опасных диаграмм пришел к уравнениям для коэффициентов $u_n(\boldsymbol{r})$, $v_n(\boldsymbol{r})$ канонич. преобразования (2)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_n u_n(\boldsymbol{r}) &= \big(\mathscr{H}_e + U(\boldsymbol{r})\big)u_n(\boldsymbol{r}) + \Delta(\boldsymbol{r})v_n(\boldsymbol{r}),\\ \varepsilon_n v_n(\boldsymbol{r}) &= -\big(\mathscr{H}_e^* + U(\boldsymbol{r})\big)v_n(\boldsymbol{r}) + \Delta^*(\boldsymbol{r})u_n(\boldsymbol{r}).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

На уравнения (3) можно смотреть как на волновые уравнения для квазичастичной двухкомпонентной волновой функции $\begin{Vmatrix} u_n \\ v_n \end{Vmatrix}$, отвечающей собственному значению ε_n.

Потенциалы $U(\boldsymbol{r})$ и $\Delta(\boldsymbol{r})$, вычисленные из условия минимума плотности свободной энергии $F = \langle\mathscr{H}\rangle - TS$ (T – температура, S – плотность энтропии системы, $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по состояниям, диагонализующим $\mathscr{H}$), имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}U(\boldsymbol{r}) &= -V\sum_n\big(|u_n(\boldsymbol{r})|^2 f_n + |v_n(\boldsymbol{r})|^2(1-f_n)\big),\\ \Delta(\boldsymbol{r}) &= V\sum_n u_n(\boldsymbol{r})v_n^*(\boldsymbol{r})(1-2f_n),\\ f_n &= \Big(\exp\frac{\varepsilon_n}{T}+1\Big)^{-1},\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

V – константа взаимодействия электронов друг с другом. Уравнения (3) вместе с выражениями (4) для потенциалов играют фундаментальную роль в микроскопич. теории сверхпроводимости. Эти уравнения широко используются при исследовании эффекта Джозефсона в сверхпроводящих контактах. В теории сверхпроводимости, основанной на уравнениях (3)–(4), лежит обобщение приближения Хартри – Фока на тот случай, когда в системе появляются аномальные средние типа $\langle\psi_{-1/2}\psi_{1/2}\rangle$, $\langle\psi_{1/2},\psi_{-1/2}\rangle$, связанные со спонтанным нарушением симметрии состояния статистич. равновесия относительно фазовых преобразований.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., «Успехи физич. наук», 1959, т. 7, в. 4, с. 549.

В. В. Красильников.

БОГОЛЮБОВА УРАВНЕНИЯ систем квантовой статистической механики – интегро-дифференциальные уравнения для последовательности статистических операторов. В квантовой статистич. механике рассматриваются системы, состоящие из бесконечного числа частиц, распределенных с плотностью $1/\rho$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1,2,3$. Состояние такой бесконечной системы описывается бесконечной последовательностью статистич. операторов

$$F(t) = \big(F_s(t,(q)_s;\ (q')_s)\big)_{s\geqslant 1},\ (q_1,\ \ldots,\ q_s) = (q)_s,$$

к-рые определяются как решения уравнений Боголюбова:

$$i\frac{\partial F_s(t,(q)_s;(q')_s)}{\partial t} = [H_s, F_s(t,(q)_s;(q')_s)] + \int\big[H_{s+1,s}, F_{s+1}(t,(q)_s,q_{s+1};(q')_s,q_{s+1})\big]dq_{s+1},\ s = 1,2,\ldots \quad (1)$$

при заданных начальных данных

$$F_s(t,(q)_s;\ (q')_s)|_{t=0} = F_s(0,(q)_s;\ (q')_s),\ s = 1,2,\ \ldots$$

Здесь H_s – гамильтониан системы s частиц, к-рый в s-частичном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_s$ функций $f_s((q)_s)$, интегрируемых по модулю в квадрате, задается выражением

$$H_s = -\sum_{i=1}^s\frac{\Delta_i}{2m} + \sum_{i<j=1}^s\Phi(q_i - q_j),$$

где $\Delta_i = \Delta_{q_i}$ – лапласиан, Φ – парный потенциал взаимодействия, постоянная Планка полагается равной единице $\hbar = 1$, m – масса частицы, $[H_s, F_s(t,(q)_s;\ (q')_s)]$ – квантовая скобка Пуассона, $H_{s+1,s}$ – потенциальная энергия взаимодействия $(s+1)$-й частицы с s-ми,

$$H_{s+1,s} = \sum_{i=1}^s\Phi(q_i - q_{s+1}).$$

Статистич. операторы задаются своими ядрами $F_s(t,(q)_s;\ (q')_s)$ и действуют в $\mathscr{H}_s$ как интегральные операторы

$$(F_s(t)f_s)(q)_s = \int F_s(t,(q)_s;(q')_s)f_s((q')_s)\,d(q')_s, \quad (2)$$

они положительно определены и удовлетворяют условиям согласованности. На потенциал взаимодействия накладываются условия, обеспечивающие существенную самосопряженность гамильтонианов.

Б. у. естественно рассматривать как одно эволюционное уравнение для состояния $F(t)$:

$$i\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(t)|_{t=0} = F(0), \quad (3)$$

где оператор A формально определен правой частью уравнений (1). Возникает задача: подобрать функциональное пространство B, чтобы в нем Б. у. (3) имели единственное решение, и построить эволюционный оператор $U(t)$, с помощью к-рого решение представляется в виде $F(t) = U(t)F(0)$. Уравнение (3) имеет единственное решение в банаховом пространстве B последовательностей ядерных операторов, к-рое может быть представлено с помощью эволюционного оператора

$$F(t) = U(t)F(0) = e^{\Omega}S(-t)e^{-\Omega}F(0), \quad F(0)\in B, \quad (4)$$

где Ω – оператор, действующий в пространстве согласно формуле

$$(\Omega f)_s((q)_s;(q')_s) = \int f_{s+1}((q)_s,q_{s+1};(q')_s,q_{s+1})\,dq_{s+1},$$
$$f = (f_s((q)_s;\ (q')_s))_{s\geqslant 1}, \quad f\in B,$$

а оператор $S(t)$ есть прямая сумма s-частичных операторов

$$(S(t)f)_s((q)_s;(q')_s) = \left(e^{itH_s} f_s e^{-itH_s}\right)((q)_s;(q')_s)$$

и образует сильно непрерывную группу в B, инфинитезимальный оператор к-рой совпадает со скобкой Пуассона. Оператор Ω ограничен в B, $\|\Omega\| = 1$, оператор $S(t)$ сильно непрерывен в B, $\|S(t)\| = 1$ и образует группу, ядра $f_s((q)_s; (q')_s)$ симметричны по обеим группам переменных $(q)_s$ и $(q')_s$.

Теорема. Оператор $U(t)$ ограничен в B, сильно непрерывен и образует группу, инфинитезимальный оператор к-рой совпадает с оператором A на определенном всюду плотном в B множестве.

Эта теорема дает обоснование выводу Б. у. как эволюционных уравнений в пространстве B с оператором A, являющимся инфинитезимальным оператором группы $U(t)$.

Решения Б. у. в пространствах B описывают состояния конечных систем. Чтобы получить состояния бесконечных систем, необходимо решить Б. у. в пространствах, отличных от B, перейти в решениях к термодинамич. пределу и придать им смысл в пространствах ограниченных операторов, ибо такому пространству принадлежат равновесные состояния, а неравновесные состояния $F(t)$ являются возмущениями равновесных.

Состояния $F_\Lambda(t)$ конечных систем частиц в области Λ можно определить как решения Б. у. для статистич. операторов $F_{s,\Lambda}(t,(q)_s; (q')_s)$, сосредоточенных в Λ. Для этого достаточно в (1) и (4) ввести интегрирование по Λ.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Лекции по квантовой статистике, в кн.: Избранные труды, т. 2, Киев, 1970; [2] Петрина Д. Я. и др., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1975, т. 136, с. 370–78.

Д. Я. Петрина.

БОГОЛЮБОВА УРАВНЕНИЯ систем классической статистической механики – интегро-дифференциальные уравнения для последовательности функций распределения. В классич. статистич. механике рассматриваются системы, состоящие из бесконечного числа частиц, распределенных с плотностью $1/\rho$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\nu$ и с произвольными импульсами в $\mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$. Состояние такой бесконечной системы описывается бесконечной последовательностью частичных функций распределения

$$F(t) = \left(F_s(t,(x)_s)\right)_{s\geqslant 1},\ (x_1, \ldots, x_s) = (x)_s,$$

заданных на фазовых пространствах. Через $x = (p, q)$ обозначена точка фазового пространства частицы, p – импульс, q – координата, $p \in \mathbb{R}^\nu$, $q \in \mathbb{R}^\nu$. Частичные функции распределения (или просто функции распределения) $F_s(t,(x)_s)$ имеют смысл плотности распределения вероятностей в фазовом пространстве s частиц при произвольном расположении остальных частиц. Они инвариантны относительно перестановок аргументов, что отражает неразличимость тождественных частиц, неотрицательны и удовлетворяют условию согласованности.

Состояние $F(t)$ определяется как решение уравнений Боголюбова для функций распределения

$$\frac{\partial F_s(t,(x)_s)}{\partial t} = [H_s, F_s(t,(x)_s)] +$$

$$+\int\left[\sum_{i=1}^{s}\Phi(q_i - q_{s+1}), F_{s+1}(t,(x)_s, x_{s+1})\right]dx_{s+1},\ s = 1,2,\ldots, \quad (1)$$

при заданных начальных данных

$$F_s(t,(x)_s)\big|_{t=0} = F_s(0,(x)_s),\ F(t)\big|_{t=0} = F(0).$$

Здесь

$$H_s = \sum_{i=1}^{s}\frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j=1}^{s}\Phi(q_i - q_j)$$

– гамильтониан s-частичной подсистемы, m – масса частицы, Φ – парный потенциал взаимодействия, $[\cdot,\cdot]$ – скобка Пуассона

$$[H_s, F_s] = -\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial H_s}{\partial p_i}\frac{\partial F_s}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial H_s}{\partial q_i}\frac{\partial F_s}{\partial p_i}. \quad (2)$$

Б. у. можно рассматривать как одно эволюционное уравнение для состояния $F(t)$:

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(t)|_{t=0} = F(0), \quad (3)$$

где оператор A формально определен правой частью (1). Естественно возникает задача: подобрать функциональное пространство, в к-ром Б. у. (3) имеют единственное решение, и построить эволюционный оператор $U(t)$, с помощью к-рого решение представляется в виде $F(t) = U(t)F(0)$. Уравнение (3) имеет единственное решение в банаховом пространстве B последовательностей симметричных суммируемых функций (их прямой сумме), к-рое может быть представлено через эволюционный оператор в виде

$$F(t) = U(t)F(0) = e^{\int dx}S(-t)e^{-\int dx}F(0), \quad F(0) \in B, \quad (4)$$

где оператор $\int dx$ определен в B согласно формуле

$$\left(\int dx f\right)_s(x)_s = \int f_{s+1}((x)_s, x_{s+1})dx_{s+1};$$

он ограничен и норма его равна единице. Оператор $S(t)$ равен прямой сумме s-частичных операторов

$$(S_s(t)f_s)(x)_s = f_s(X_1(t,(x)_s), \ldots, X_s(t,(x)_s)),$$

где $X_1(t,(x)_s), \ldots, X_s(t,(x)_s)$ – решения уравнений Гамильтона для s частиц при начальных данных $(x)_s$. Если потенциал взаимодействия Φ дважды непрерывно дифференцируем и содержит твердую сердцевину, то они существуют, непрерывно дифференцируемы по t и $(x)_s$ и обладают групповым свойством. Операторы $S_s(t)$ изометричны, а вместе с ними изометричен оператор $S(t)$, они образуют сильно непрерывную группу, инфинитезимальный оператор к-рой совпадает со скобкой Пуассона.

Теорема. Эволюционный оператор $U(t)$ ограничен и сильно непрерывен в B, образует группу, а его инфинитезимальный оператор совпадает с оператором A на определенном всюду плотном в B множестве.

Теорема дает обоснование выводу Б. у. как эволюционных уравнений в пространстве B, причем под оператором A подразумевается инфинитезимальный оператор группы $U(t)$.

Состояния $F(t)$ в B описывают только конечные системы, у к-рых среднее число частиц конечно. Чтобы получить состояния бесконечных систем, нужно совершить в $F(t) \in B$ термодинамич. предел и придать им смысл в отличном от B пространстве последовательностей функций, ограниченных по координатам и убывающих как распределение Максвелла по импульсам, ибо равновесные состояния бесконечных систем принадлежат этому пространству, а неравновесное состояние $F(t)$ является возмущением равновесного. Состояния конечных систем частиц в конечной области Λ можно определить через решения Б. у. для функций распределения $F_{s,\Lambda}(t,(x)_s) = F_\Lambda(t)$, сосредоточенных в области Λ. Для этого в (1) и (4) следует ввести интегрирования по координатам в области Λ.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.–Л., 1946; [2] Петрина Д. Я. и др., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1981.

Д. Я. Петрина.

БОГОЛЮБОВА ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ [ББГКИ-уравнения – Н. Н. Боголюбов, М. Борн (M. Born), Дж. Грин (G. Green), Дж. Кирквуд (J. Kirkwood), Дж. Ивон (J. Yvon)] – цепочка уравнений (иерархия) для одночастичных, двухчастичных и т. д. функций распределения классической статистической системы. Эти функции определяются так:

$$F_s(t,r_1,\ldots,r_s,p_1,\ldots,p_s) =$$

$$= V^s\int w_N dr_{s+1}\ldots dr_N dp_{s+1}\ldots dp_N, \quad (1)$$

где $s=1, 2, ..., V$ – объем системы, а w_N есть N-частичная нормированная на единицу функция распределения, удовлетворяющая *Лиувилля уравнению*

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} = \{H, w_N\}, \qquad (2)$$

где фигурные скобки – скобки Пуассона, а H – гамильтониан системы. Б. ц. у. в предельном статистич. случае $V\to\infty$, $V/N=v=\text{const}$ имеет вид уравнения для F_s со специфическим «зацеплением» с функцией F_{s+1} более высокого ранга:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} - \{H_s, F_s\} = \frac{1}{v}\int\left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{s+1}|), F_{s+1}\right\} d\boldsymbol{r}_{s+1} d\boldsymbol{p}_{s+1}, \quad (3)$$

где $\Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{s+1}|)$ – потенциал взаимодействия i-й и $(s+1)$-й частиц, а H_s – гамильтониан s частиц системы.

В термодинамически равновесном случае, когда распределение по импульсам каждой частицы является *Максвелла распределением*, рассматриваются s-частичные функции распределения по координатам частиц, к-рые определяются соотношениями типа (1) через N-частичную функцию

$$w_N = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \frac{1}{Q}\exp\left(-\frac{H_1}{Q}\right), \qquad (4)$$

где $H_1 = H - H_0$, причем H_0 есть сумма кинетич. энергий частиц системы, а конфигурационный интеграл Q определяется из условия нормировки (4). Б. ц. у. для этих функций имеет вид:

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} + \frac{1}{Q}\frac{\partial U_s}{\partial x_1}F_s + \frac{1}{Q}\frac{1}{v}\int\frac{\partial\Phi(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{s+1}|)}{\partial x_1}F_{s+1}\,d\boldsymbol{r}_{s+1} = 0, \qquad (5)$$

где U_s – потенциальная энергия взаимодействия s частиц системы.

При помощи функций распределения, главным образом F_1 и F_2, могут быть выражены все специфические характеристики статистич. систем. Основные трудности исследования Б. ц. у. (3) или (5) связаны с проблемами замыкания системы (расцепление Б. ц. у.) и решения замкнутой системы со специальными предельными условиями для функций F_s. Это исследование специфично для физич. систем различного типа и наиболее разработано для случаев короткодействия, когда $r_0^3/v \ll 1$, где r_0 – эффективный радиус взаимодействия частиц друг с другом, и для случаев дальнодействия, когда $r_0^3/v \gg 1$, в частности для системы с кулоновским взаимодействием. Во временной теории это приводит непосредственно к кинетич. *Больцмана уравнению* для одночастичной функции F_1 или к *Власова кинетическому уравнению*, а в равновесной теории – к *вириальному разложению* для термодинамич. потенциала или к специфическим кулоновским поправкам.

При рассмотрении квантовых статистич. систем Б. ц. у. составляется для s-частичных статистич. квантовых операторов $\langle x_1, ..., x_s|F_s|x_1', ..., x_s'\rangle$, являющихся следами по переменным $s+1, ..., N$ частиц общего N-частичного оператора – матрицы плотности. Эти уравнения имеют вид, аналогичный уравнениям (3), в к-рых классич. скобки Пуассона заменены квантовыми скобками.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 2, Киев, 1970, с. 99–196, 227–493; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965. *И. А. Квасников.*

БОГОЛЮБОВА – КРЫЛОВА ТЕОРЕМА об инвариантной мере: динамическая система с непрерывным или дискретным временем на компактном фазовом пространстве имеет хотя бы одну инвариантную меру.

Лит.: [1] Bogoluboff N. N., Krylov N. M., «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 65–113. *Я. Б. Песин.*

БОГОЛЮБОВА – ПАЙЕРЛСА НЕРАВЕНСТВО – неравенство

$$\mathrm{Tr}\,e^{A+h}\Big/\left(\mathrm{Tr}\,e^{A}\right) \geqslant \exp\left\{\mathrm{Tr}\left(he^{A}\right)\Big/\left(\mathrm{Tr}\,e^{A}\right)\right\}$$

для самосопряженных операторов A, h, $A+h$ при существовании соответствующих следов. В статистич. механике часто используется конкретный вид с $A=-\beta H_0$, $h=-\beta V$. Тогда для функционала плотности свободной энергии в конечном объеме

$$f_\Lambda[H] = -|\Lambda|^{-1}\beta^{-1}\ln\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}$$

справедлива оценка:

$$f_\Lambda[H_0+V] - f_\Lambda[H_0] \leqslant |\Lambda|^{-1}\langle V\rangle_{H_0,\Lambda}.$$

Неравенство Боголюбова, основанное на выпуклой функции $f_\Lambda[H_0+\lambda V]$ по $\lambda\in\mathbb{R}$, дает также оценку снизу:

$$|\Lambda|^{-1}\langle V\rangle_{H_0+V,\Lambda} \leqslant f_\Lambda[H_0+V] - f_\Lambda[H_0].$$

В. Н. Нескоромный.

БОГОЛЮБОВА – ПАРАСЮКА *R*-ОПЕРАЦИЯ (в узком смысле) – перенормировочная схема (см. *Перенормировка* в квантовой теории поля), то есть процедура устранения ультрафиолетовых расходимостей, основанная на вычитании из фейнмановских интегралов (диаграмм) нескольких первых членов разложения в ряд Тейлора при нулевых 4-мерных импульсах. В рамках этой перенормировочной схемы в середине 50-х гг. Н. Н. Боголюбов и О. С. Парасюк развили математич. основы теории перенормировок. В частности, они доказали, что R-операция обеспечивает конечность перенормированных фейнмановских амплитуд. Это и подобные утверждения для других перенормировочных схем принято называть теоремами Боголюбова – Парасюка. После работ 60-х гг. К. Хеппа (K. Hepp) и В. Циммермана (W. Zimmerman) Б.– П. R-о. стала также называться БПХЦ-перенормировкой.

Б.– П. R-о. представляется в виде

$$R(\gamma) = \sum\nolimits_{\gamma=\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_k}\Lambda(\gamma_1)\ldots\Lambda(\gamma_k) \equiv R'(\gamma) + \Lambda(\gamma). \qquad (1)$$

Здесь производится суммирование по разбиениям множества вершин γ данного графа (диаграммы) Γ на непустые непересекающиеся подмножества. Б. – П. R-о. основана на устранении расходимостей из полных подграфов (к-рые включают любую линию вместе с ее концами). Поэтому можно не делать различия между множеством вершин γ и полным подграфом $\Gamma(\gamma)$, построенным на этом множестве. В (1) R' – это «R-операция без последнего вычитания», а $\Lambda(\gamma_i)$ – контрчленные операции. Действуя на фейнмановскую амплитуду G_Γ, операция $\Lambda(\gamma_i)$ превращает ее в фейнмановскую амплитуду для редуцированного графа Γ/γ_i, причем вершине, в к-рую стянулся подграф γ_i, сопоставляется полином по импульсам («диаграммный контрчлен»). Контрчленные операции задаются рекуррентными соотношениями

$$\Lambda(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } V=1, \\ -M_{\Gamma(\gamma)}R'(\gamma), & \text{если } V>1, \text{ а } \Gamma(\gamma) \text{ – сильно связный граф} \\ 0 & \text{– в остальных случаях,} \end{cases} \qquad (2)$$

где V – число элементов во множестве γ, а M_γ – вычитающий оператор Б. – П. R-о. При действии на фейнмановскую амплитуду он выделяет несколько первых членов разложения поддиаграммы γ в ряд Тейлора при нулевых импульсах и вставляет полученный полином в редуцированном графе Γ/γ в вершину, в к-рую стянулся подграф γ. Явное разрешение этих рекуррентных соотношений дает лесная формула

$$R_\Gamma = 1 + \sum\nolimits_{F\neq\varnothing}\prod\nolimits_{\gamma\in F}(-M_\gamma), \qquad (3)$$

полученная О. И. Завьяловым и Б. М. Степановым и переоткрытая В. Циммерманом. Суммирование здесь ведется по лесам графа Γ, состоящим из полных сильно связных подграфов. (Множество подграфов F называется лесом, если любые два подграфа из F либо не пересекаются, либо содержатся один в другом.) Как и в случае любой другой перенормировочной процедуры, применение Б. – П. R-о. эквивалентно переопределению (перенормировке) пара-

метров лагранжиана заданной теории – констант взаимодействия, масс и констант перенормировки волновой функции.

Процедура устранения ультрафиолетовых расходимостей содержит конечный произвол. Если задана нек-рая перенормировочная процедура, то из нее можно получить любые другие схемы, добавляя к контрчленам конечные слагаемые. Точнее говоря, для этого можно изменить заданный вычитающий оператор M_γ на $M_\gamma - P_\gamma$, где P_γ – оператор конечной перенормировки. Оператор P_γ при действии на фейнмановскую амплитуду G_Γ превращает ее в фейнмановскую амплитуду $G_{\Gamma/\gamma}$, в к-рой редуцированной вершине сопоставлен нек-рый конечный полином по импульсам. В частности, указанный произвол предусматривался и в работах Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка. Поэтому в широком смысле термин «Б.– П. *R*-о.» служит для обозначения *R*-операции общего вида.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1984; [2] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979. *В. А. Смирнов.*

БОГОЛЮБОВА – ПАРАСЮКА ТЕОРЕМА – см. *Боголюбова – Парасюка R-операция, Перенормировка* в квантовой механике.

БОГОМОЛЬНОГО ТЕОРЕМА – см. *Твистор.*

БОЗЕ-ГАЗ – см. *Бозе – Эйнштейна статистика.*

БОЗЕ-КОНДЕНСАТ – см. *Бозе – Эйнштейна конденсация.*

БОЗЕ-СИСТЕМА – см. *Бозе – Эйнштейна статистика.*

БОЗЕ-СТАТИСТИКА – см. *Бозе–Эйнштейна статистика.*

БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА КОНДЕНСАЦИЯ, бозе-конденсация, – квантовое явление, состоящее в том, что в системе из большого числа частиц, подчиняющихся *Бозе – Эйнштейна статистике* (бозе-газ, бозе-жидкость), при температуре ниже температуры вырождения, в состоянии с нулевым импульсом оказывается конечная доля всех частиц. Это состояние называется бозе-конденсатом.

Термин «Б.–Э. к.» основан на аналогии этого явления с конденсацией газа в жидкость, хотя эти явления совершенно различны, так как Б.–Э. к. происходит в импульсном пространстве, а не в координатном. Теория Б.–Э. к. построена А. Эйнштейном (A. Einstein, 1925) и развита далее Ф. Лондоном (F. London, 1938).

Б.–Э. к. происходит даже в идеальном бозе-газе, так как ее причиной являются свойства симметрии и интерференции волновых функций частиц, а не взаимодействия между ними.

Для идеального бозе-газа из вида функции Бозе–Эйнштейна распределения

$$n_{\boldsymbol{p}} = \left\{\exp\left[\left(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \mu\right)/kT\right] - 1\right\}^{-1}$$

(где T – абсолютная температура, $\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$ – энергия частиц с импульсом $\boldsymbol{p}$, μ – химич. потенциал) следует, что в низшем энергетич. состоянии с $\boldsymbol{p}=0$ находятся

$$N_0 = \{\exp(-\mu/kT) - 1\}^{-1}$$

частиц. Из положительности N_0 следует, что $\mu < 0$. Если фактор вырождения $\lambda = \exp(\mu/kT)$ близок к 1, то в состоянии с $\boldsymbol{p}=0$ может быть очень много частиц. Поэтому нельзя пренебрегать вкладом частиц с $\boldsymbol{p}=0$ при вычислении средних величин.

Из условия постоянства полного числа частиц $\sum_{\boldsymbol{p}} n_{\boldsymbol{p}} = N$ в объеме V следует уравнение для N_0:

$$N = N_0 + V\Lambda^{-3}G_{3/2}(\lambda), \quad G_s(\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l l^{-s},$$

где $\Lambda = (h^2/2\pi mkT)^{1/2}$ – длина волны де Бройля, соответствующая энергии kT, m – масса частицы. Отсюда следует, что

$$\frac{N_0}{N} = \left[1 - (T/T_0)^{3/2}\right],$$

где T_0 – температура бозе-конденсации (или температура вырождения), к-рая находится из условия $\mu = 0$ или $N_0 = 0$. Это условие записывают в виде

$$\frac{N}{V} = \Lambda^{-3}G_{3/2}(1), \quad G_{3/2}(1) = 2{,}612.$$

При $T < T_0$ все частицы находятся в конденсате, при $T > T_0$ в нем находятся лишь N_0 частиц, а остальные подчиняются распределению Бозе – Эйнштейна с $\mu = 0$. При $T < T_0$ давление оказывается функцией только температуры

$$\frac{P}{kT} = \Lambda^{-3}G_{5/2}(1)$$

и не зависит от объема, так как частицы конденсата, не обладая импульсом, не дают вклада в давление. При $T = T_0$ производная теплоемкости испытывает конечный скачок, а сама теплоемкость, энергия и давление остаются непрерывными, следовательно система совершает своеобразный фазовый переход.

Для жидкого ^{4}He в модели идеального газа температура вырождения $T_0 = 3{,}13$ K близка к температуре перехода в сверхтекучее состояние, равной 2,18 K, но это не означает, что переход в сверхтекучее состояние есть Б.–Э. к. идеального газа, так как для явления сверхтекучести существенно взаимодействие между атомами. В неидеальном бозе-газе Б.–Э. к. сохраняется, а неидеальность приводит к появлению частиц с ненулевым импульсом даже при $T = 0$, в слабонеидеальном бозе-газе, как показано Н. Н. Боголюбовым,

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{8}{3}\right)\left(Na^3/\pi V\right)^{1/2}$$

при $Na^3/V \ll 1$, где a – длина рассеяния для потенциала взаимодействия. Если плотность не мала, то число частиц в конденсате можно оценить вариационным методом. Для бозе-жидкости с взаимодействием молекул как твердых сфер диаметра b по оценке Пенроуза и Онсагера (см. [5], [6])

$$\frac{N_0}{N} = \exp\left[-1 - 4\pi Nb^3/3V\right].$$

Для ^{4}He $b = 2{,}56 \cdot 10$ см$^{-8}$, $V/N = 46{,}2 \cdot 10^{-24}$ см^3, поэтому $N_0/N \sim 0{,}08$. По оценкам, основанным на рассеянии нейтронов, плотность конденсата в ^{4}He несколько процентов и обладает примерно такой же температурной зависимостью, как и плотность сверхтекучей компоненты. Однако плотность части конденсата и плотность сверхтекучей компоненты нельзя отождествить, так как при $T = 0$ вся жидкость является сверхтекучей, хотя не все ее частицы находятся в конденсате.

Б.–Э. к. связана с квантовой когерентностью волн де Бройля на макроскопич. масштабах длины. При Б.–Э. к. происходит спонтанное нарушение симметрии относительно калибровочных преобразований, к-рое приводит к появлению бозе-конденсата и явлению сверхтекучести (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Квазисредние в задачах статистической механики, в сб.: Боголюбов Н. Н., Избранные труды по статистической физике, М., 1979; [2] Форстер Д., Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции, пер. с англ., М., 1980; [3] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., М., 1973; [4] Пайнс Д., Нозьер Ф., Теория квантовых жидкостей, пер. с англ., М., 1967; [5] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966, гл. 18; [6] Penrose O., Onsager L., «Phys. Rev.», 1966, v. 104, p. 576. *Д. Н. Зубарев.*

БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – функция распределения по квантовомеханическим состояниям тождественных частиц с нулевым или полуцелым спином (в единицах $\hbar$) при условии, что взаимодействие слабо и им можно пренебречь.

В случае статистич. равновесия среднее число частиц $\bar{n}_i$ определяется Б.–Э. р.

$$\bar{n}_i = \left[\exp\left(\varepsilon_i - \mu\right)/kT - 1\right]^{-1},$$

где i – квантовые числа, характеризующие состояние частицы, ε_i – ее энергия в состоянии i, $k = 1{,}3804$ – постоянная

Больцмана, T – абсолютная температура, μ – химич. потенциал, определяемый из условия нормировки: сумма всех $\bar{n}_i$ равна полному числу частиц в системе $\sum_i \bar{n}_i = N$.

Б.–Э. р.– функция распределения идеального газа из частиц, подчиняющихся квантовой *Бозе – Эйнштейна статистике*. В отсутствие внешнего поля Б.–Э. р. частиц идеального газа по абсолютной величине импульса $\boldsymbol{p}$ в узком слое $d\boldsymbol{p}$ в объеме V имеет вид

$$dN_{\boldsymbol{p}} = \left[\exp\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \mu\right)\Big/ kT - 1\right]^{-1} \frac{gV\boldsymbol{p}^2}{2\pi^2\hbar^3},$$

где m – масса частицы, s – ее спин, $g = 2s+1$ – фактор вырождения квантовых состояний.

Из условия нормировки следует, что μ при $N \to \infty$ конечен лишь при температуре

$$T > T_0 = 3{,}31\frac{\hbar^2}{mk}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3},$$

T_0 – температура вырождения.

При $T < T_0$ химич. потенциал μ обращается в нуль в термодинамич. пределе (когда $V \to \infty$, $N \to \infty$, N/V – конечно) и в состоянии $\boldsymbol{p} = 0$ (для покоящегося газа) оказывается макроскопически большое число частиц N_0:

$$N_0 = N\left(1 - (T/T_0)^{3/2}\right).$$

При температуре T_0 длина волны де Бройля становится порядка среднего расстояния между частицами. При $T < T_0$ Б.–Э. р. имеет вид

$$dN_{\boldsymbol{p}} = \left[\exp\left(\boldsymbol{p}^2/2mkT\right) - 1\right]^{-1} \frac{gV\boldsymbol{p}^2 d\boldsymbol{p}}{2\pi^2\hbar^3}.$$

Б.–Э. р. применимо к фотонам и квазичастицам, напр. фононам в кристаллич. решетке и в He II. Для газов малой плотности, когда можно пренебречь квантовым эффектом, Б.–Э. р. переходит в *Больцмана распределение*.

Лит.: [1] Bose S. N., «Z. Phys.», 1924, Bd 27, S. 384–93; [2] Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. 3, М., 1966, с. 481–502.

Д. Н. Зубарев.

БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА СТАТИСТИКА, бозе-статистика,– квантовая статистика, применяемая к системам тождественных частиц с нулевым или целым спином (в единицах $\hbar$). Предложена Ш. Бозе (Sh. Bose, 1924) для фотонов и обобщена А. Эйнштейном (A. Einstein, 1924) для одноатомного идеального газа. Характерная особенность Б.–Э. с. заключается в том, что в одном и том же квантовом состоянии может находиться любое число частиц.

В. Паули (W. Pauli, 1940) доказал, что тип квантовой статистики однозначно связан со значением спина частиц, так что совокупности частиц с нулевым или целым спином (ядра с четным числом нуклонов, фотоны, π-мезоны и другие так наз. бозоны) подчиняются Б.–Э. с., а системы частиц с полуцелым спином (электроны, нуклоны, ядра с нечетным числом нуклонов и другие так наз. фермионы) подчиняются *Ферми – Дирака статистике*.

При квантовомеханич. описании состояние системы описывается волновой функцией, к-рая в случае тождественных частиц либо симметрична по отношению к перестановкам любой пары частиц (для частиц с целым или нулевым спином), либо антисимметрична (для частиц с полуцелым спином). Для системы частиц, подчиняющихся Б.–Э. с., состояния описываются симметричными функциями, что является другой, эквивалентной формулировкой Б.–Э. с. Подобные системы называются бозе-системами, напр. бозе-газ – газ из частиц, подчиняющихся Б.–Э. с.

Для идеального бозе-газа среднее число частиц $\bar{n}_i$ в состоянии i определяется *Бозе – Эйнштейна распределением*. Формула для $\bar{n}_i$ следует из *Гиббса распределения* для идеального квантового газа с уровнями энергии

$$E_n = \sum_i E_i n_i,$$

где n_i согласно Б.–Э. с. могут принимать лишь значения 0, 1, 2, ... Распределение Бозе–Эйнштейна можно получить другим методом, если рассматривать статистически равновесное состояние квантового идеального газа как наиболее вероятное состояние и с помощью комбинаторики, учитывая неразличимость частиц, найти термодинамич. вероятность (статистический вес) такого состояния, то есть число способов реализации данного квантового состояния газа с заданной энергией E и числом частиц N. Для больших систем, когда N велико, уровни энергии расположены очень плотно и стремятся к непрерывному распределению при стремлении числа частиц и объема к бесконечности. Пусть уровни сгруппированы по малым ячейкам, содержащим G_i уровней в ячейке, число G_i предполагается очень большим. Каждой i-й ячейке соответствует средняя энергия E_i и число частиц N_i. Состояние системы определяется набором чисел N_i, где N_i – сумма n_i по уровням ячейки. Для Б.–Э. с. атомы предполагаются неразличимыми и в каждой ячейке может находиться произвольное число частиц. Поэтому статистич. вес $W(N_i)$ равен числу различных распределений частиц по ячейкам:

$$W(N_i) = \prod_i \frac{(G_i + N_i - 1)!}{N_i!(G_i - 1)!},$$

он определяет вероятность распределения частиц по ячейкам. Энтропия такого состояния равна

$$S = k \ln W,$$

где k – постоянная Больцмана. Наиболее вероятному состоянию соответствует максимум энтропии (при заданных $E = \sum_i E_i N_i$ и $N = \sum_i N_i$) распределения Бозе–Эйнштейна

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{N}_i}{G_i} = \left[\exp\left((E_i - \mu)/kT\right) - 1\right]^{-1},$$

где μ – химич. потенциал, определяемый из условия, что сумма всех n_i равна полному числу частиц в системе. Энтропия идеального газа, подчиняющегося Б.–Э. с., равна

$$S = \sum_i G_i\left[(1 + \bar{n}_i)\ln(1 + \bar{n}_i) - \bar{n}_i \ln \bar{n}_i\right].$$

Тепловые колебания кристаллич. решетки твердого тела описываются как возбуждения совокупности осцилляторов, соответствующих ее нормальным колебаниям. Их можно рассматривать как идеальный газ квазичастиц *фононов*, подчиняющихся Б.–Э. с. На основании этого представления удается правильно описать поведение твердых тел при низких температурах. К важным приложениям Б.–Э. с. относится теория излучения черного тела, опирающаяся на представление о квантах электромагнитного поля – *фотонах*. Последние подчиняются Б.–Э. с.: в этом случае $\mu = 0$, $E_i = h\nu$ (ν – частота равновесного излучения в полости объема V). При этом распределение Бозе–Эйнштейна дает *Планка закон излучения* для спектрального распределения энергии излучения абсолютно черного тела.

Б.–Э. с. для системы взаимодействующих частиц основана на методе Гиббса для квантовых систем. Она может быть реализована, если известны квантовые уровни системы E_n и может быть вычислена статистич. сумма

$$Z = \sum_n \exp\left(E_n / kT\right),$$

где суммирование ведется по всем квантовым уровням n системы для состояний, удовлетворяющих условиям квантовой симметрии. Последнее условие определяет тип квантовой статистики. Задача вычисления Z не сводится к простой комбинаторной задаче и очень сложна, если взаимодействие между частицами не мало. Ее можно несколько упростить, если выразить гамильтониан системы в представлении *вторичного квантования* (в представлении чисел заполнения квантовых уровней) через операторы вторично-

го квантования $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$, удовлетворяющие перестановочным соотношениям Б.–Э. с.

$$\psi(x)\psi^+(x') - \psi^+(x')\psi(x) = \delta(x - x'),$$

где $\delta(x-x')$ – дельта-функция. Тогда требования Б.–Э. с. оказываются выполненными и в статистич. сумме будут учитываться лишь симметричные состояния. Но в такой постановке задача вычисления статистич. суммы, а следовательно, и термодинамич. функций очень сложна и допускает приближенное решение лишь для слабо взаимодействующих систем (слабоидеальный бозе-газ) (см. [4]–[7]).

Лит.: [1] Bose S., «Z. Phys.», 1924, Bd 27, S. 384–92; [2] Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. 3, М., 1966 (там же в Приложении ст. Бозе Ш.– [1]); [3] Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, пер. с англ., М., 1947 (в Дополнении ст. Pauli W., «Phys. Rev.», 1940, v. 58, p. 716–22); [4] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [5] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [6] Боголюбов Н. Н., Лекции по квантовой статистике, Избранные труды, т. 2, Киев, 1970; [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 3 изд., ч. 1, М., 1976.

Д. Н. Зубарев.

БОЗОН – квантовая частица или квазичастица, подчиняющаяся *Бозе – Эйнштейна статистике*. Б.– частица с целым спином. Пространством состояний системы N тождественных Б. является гильбертово пространство квадратично интегрируемых симметричных функций N переменных. В случае большого канонич. ансамбля Б. описываются алгеброй операторов рождения – уничтожения, действующей в симметричном *Фока пространстве* (см. также *Вторичное квантование*).

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1986; [2] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984.

Д. П. Санкович.

БОЗОННАЯ ЛАВИНА – термин, принятый для описания начальной стадии процесса сверхизлучения, когда происходит лавинообразное (напр., экспоненциальное) нарастание числа квантов, испущенных атомной системой. Иногда термин «Б. л.» применяется как аналог термина *сверхизлучение*, как правило, в случаях, когда испускаемые системой частицы отличаются от квантов электромагнитного поля, напр. фотонное сверхизлучение.

А. В. Андреев.

БОЗОННОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Квантовое стохастическое исчисление.*

БОЛЬЦМАНА КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют неравновесные одночастичные *распределения функции* системы из большого числа частиц, например функция распределения $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t)$ молекул газа по скоростям $\boldsymbol{v}$ и координатам $\boldsymbol{r}$, функции распределения электронов в металле, фононов в кристалле. Б. к. у.– основное уравнение микроскопич. теории неравновесных процессов (физич. кинетики), в частности кинетич. теории газов. Б. к. у. в узком смысле называют выведенное Л. Больцманом (L. Boltzmann) кинетич. уравнение для газов малой плотности, молекулы к-рых подчиняются классич. механике. Б. к. у. для квазичастиц в кристаллах, напр. для электронов в металле, называют также кинетическими уравнениями, или уравнениями переноса.

Б. к. у. представляет собой уравнение баланса числа частиц (точнее, точек, изображающих состояние частиц) в элементе фазового объема $d\boldsymbol{v}d\boldsymbol{r}$ ($d\boldsymbol{v} = dv_x dv_y dv_z$; $d\boldsymbol{r} = dxdydz$) и выражает тот факт, что изменение функции распределения частиц $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t)$ со временем t происходит вследствие движения частиц под действием внешних сил и столкновений между ними. Для газа, состоящего из частиц одного сорта, Б. к. у. имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}}, \qquad (1)$$

где $\partial f/\partial t$ – изменение плотности числа частиц в элементе фазового объема $d\boldsymbol{v}d\boldsymbol{r}$ за единицу времени, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$ – сила, действующая на частицу (может зависеть также и от скорости), $(\partial f/\partial t)_{\text{ст}}$ – изменение функции распределения вследствие столкновений (интеграл столкновений). Второй и третий члены уравнения (1) характеризуют соответствующие изменения функции распределения в результате перемещения частиц в пространстве и действия внешних сил. Ее изменение, обусловленное столкновениями частиц, связано с уходом частиц из элемента фазового объема при так наз. прямых столкновениях и пополнением объема частицами, испытавшими «обратные» столкновения. Если рассчитывать столкновения по законам классич. механики и считать, что нет корреляции между динамич. состояниями сталкивающихся молекул, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \int (f'f_1' - ff_1)u\sigma(u,\vartheta)\,d\Omega\,d\boldsymbol{v}_1. \qquad (2)$$

Здесь

$$f = f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t), \quad f_1 = f(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{r},t),$$
$$f' = f(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r},t), \quad f_1' = f(\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{r},t);$$

$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$ – скорости частиц до столкновения, $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}_1'$ – скорости тех же частиц после столкновения, $u = |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1|$ – величина относительной скорости сталкивающихся частиц, $\sigma(u, \vartheta)$ – дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц в телесный угол $d\Omega$ в лабораторной системе координат, ϑ – угол между относительной скоростью и линией центров. Напр., для жестких упругих сфер, имеющих радиус R,

$$\sigma = 4\pi R^2 \cos\vartheta,$$

для частиц, взаимодействующих по закону центральных сил,

$$\sigma d\Omega = bdbd\varepsilon$$

(b – прицельный параметр, ε – азимутальный угол линии центров).

Б. к. у. учитывает только парные столкновения между молекулами; оно справедливо при условии, что длина свободного пробега молекул значительно больше линейных размеров области, в к-рой происходит столкновение (для газа из упругих частиц это область порядка диаметра частиц). Поэтому Б. к. у. применимо для не слишком плотных газов. Иначе будет несправедливо основное предположение об отсутствии корреляции между состояниями сталкивающихся частиц (гипотеза молекулярного хаоса). Если система находится в статистич. равновесии, то интеграл столкновений (2) обращается в нуль и решением Б. к. у. является *Максвелла распределение.*

При более строгом подходе для построения Б. к. у. исходят из *Лиувилля уравнения* для плотности распределения всех молекул газа в фазовом пространстве, из к-рого получают систему уравнений для функций распределения одной, двух и т. д. молекул (*Боголюбова уравнения*). Эту цепочку уравнений решают с помощью разложения по степеням плотности частиц с использованием граничного условия ослабления корреляций, заменяющего гипотезу молекулярного хаоса.

Решение Б. к. у. при различных предположениях о силах взаимодействия между частицами – предмет кинетич. теории газов, к-рая позволяет вычислить кинетич. коэффициенты и получить макроскопич. уравнения для процессов переноса (вязкости, диффузии, теплопроводности).

Для квантовых газов значения эффективных сечений рассчитывают на основе квантовой механики с учетом неразличимости одинаковых частиц и того факта, что вероятность столкновения зависит не только от произведения функций распределения сталкивающихся частиц, но и от функций распределения частиц после столкновения. Для фермионов в результате этого вероятность столкновения будет уменьшаться, а для бозонов – увеличиваться. Оператор столкновения в квантовом случае принимает вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{g}{h^2}\int \{f'f_1'(1 \mp f)(1 \mp f_1) -$$
$$-ff_1(1 \mp f')(1 \mp f_1')\}u\sigma(u,\vartheta)\,d\Omega\,d\boldsymbol{p}_1, \qquad (3)$$

где знак минус соответствует *Ферми – Дирака статистике*, а знак плюс – *Бозе – Эйнштейна статистике*, g – статистич. вес состояния ($g = 1$ для частиц со спином, равным нулю, и $g = 2$ для частиц со спином 1/2), $\boldsymbol{p}$ – импульс частицы. Функции $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t)$ нормированы так, что представляют

среднее число частиц в точке ($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$). Равновесные функции распределения Ферми и Бозе обращают в нуль оператор столкновения (3).

Важным частным случаем Б. к. у. является кинетич. уравнение для нейтронов, к-рые рассеиваются и замедляются ядрами среды. В этом случае внешних сил нет и в уравнении (1) надо положить $\boldsymbol{F}=0$. Плотность числа нейтронов обычно мала, так что можно пренебречь столкновениями между ними и учитывать лишь их столкновения с ядрами среды.

Процессы переноса, связанные с движением электронов в металле, также можно исследовать с помощью Б. к. у. В отсутствие колебаний решетки электроны свободно распространяются в металле и описываются плоскими волнами, модулированными с периодом решетки и зависящими от волнового вектора $\boldsymbol{k}$ и номера энергетич. зоны l. Тепловое движение атомов решетки нарушает периодичность и приводит к рассеянию электронов (столкновениям между электронами и фононами). Функция распределения электронов $n(\boldsymbol{k}, l, t)$ удовлетворяет Б. к. у. типа (1), в к-ром

$$\boldsymbol{F}=e\{\boldsymbol{E}+c^{-1}[\boldsymbol{v},\boldsymbol{H}]\}$$

($\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ – напряженности электрич. и магнитных полей, e – заряд электрона), а интеграл столкновений имеет вид

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{\text{ст}}=\sum_{\boldsymbol{k}',l',s}|(\boldsymbol{k}'l'|A|\boldsymbol{k}l,s)|^2\,\delta(\mathscr{E}'-\mathscr{E}-\hbar\omega)\times$$
$$\times\{(N+1)n'(1-n)-Nn(1-n')\},\qquad(4)$$

где $n=n(\boldsymbol{k},l)$, $n'=n(\boldsymbol{k}',l')$; $\boldsymbol{k}$, l, $\boldsymbol{k}'$ и l' – волновые векторы и номера зон до и после столкновения, $N=N(\boldsymbol{f},s)$ – функция распределения фононов, $\boldsymbol{f}$ и s – волновой вектор и поляризация фононов, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ – начальная и конечная энергии электрона при возбуждении фонона с энергией $\hbar\omega$; δ – дельта-функция, $(\boldsymbol{k}'l'\,|\,A\,|\,\boldsymbol{k}l,\,s)$ – матричные элементы перехода электрона из состояния $\boldsymbol{k}$, l в состояние $\boldsymbol{k}'$, l', к-рые оценивают, исходя из определенных гипотез о механизме взаимодействия электронов с решеткой. Выражение (4) получено в предположении, что время свободного пробега электронов значительно больше неопределенности для времени столкновения. Теория электропроводности, термоэлектрич. и гальваномагнитных явлений в металлах и полупроводниках основана на решении Б. к. у.

В нек-рых случаях конденсированных систем, когда известен характер теплового движения, можно построить Б. к. у. для элементарных возбуждений (квазичастиц). Напр., теория процессов переноса энергии в кристаллич. решетке основана на уравнении такого типа. Если в выражении для потенциальной энергии решетки ограничиться квадратичными относительно смещений атомов членами, то тепловое движение атомов в кристалле описывается свободно распространяющимися фононами – квантами нормальных колебаний решетки. Учет членов 3-й степени приводит к возможности столкновений между фононами. В результате функция распределения фононов $N(\boldsymbol{f},s)$ будет изменяться во времени согласно кинетич. уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{f}}\frac{\partial N}{\partial\boldsymbol{r}}\right)=\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{ст}},\qquad(5)$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{ст}}=\frac{\hbar}{32\pi^2\rho}\int d\boldsymbol{f}\Big\{\sum_{s',s''}|b(\boldsymbol{f}s;\boldsymbol{f}'s';s'')|^2\,\omega\omega'\omega''\times$$
$$\times\delta(\omega+\omega'-\omega'')[(N+1)(N'+1)N''-NN'(N''+1)]+$$
$$+\sum_{s',s''}\frac{1}{2}|b(\boldsymbol{f}s;\boldsymbol{f}'s';s'')|^2\,\omega\omega'\omega''\delta(\omega-\omega'-\omega'')\times$$
$$\times[(N+1)N'N''-N(N'+1)(N''+1)]\Big\},$$

где

$$N=N(\boldsymbol{f},s),\ N'=N(\boldsymbol{f}',s'),\ N''=N(\boldsymbol{f}'',s''),$$
$$\omega=\omega(\boldsymbol{f},s),$$
$$\omega'=\omega(\boldsymbol{f}',s'),\ \omega''=\omega(\boldsymbol{f}'',s''),\ b(\boldsymbol{f}s;\boldsymbol{f}'s';s'')$$

– коэффициенты при кубич. членах в разложении потенциальной энергии кристалла по отклонениям атомов из положения равновесия, ρ – плотность. Уравнение (5) описывает тройные столкновения фононов с гибелью двух фононов и рождением одного (и обратные им процессы). Оно является уравнением баланса фононов, движущихся в волновом пакете с групповой скоростью $\partial\omega/\partial\boldsymbol{f}$ и сталкивающихся между собой. Теория теплопроводности непроводящих кристаллов основана на решении уравнения (5) при малых отклонениях от статистич. равновесия.

Б. к. у. применимо также к процессам, в к-рых частицы испытывают взаимные превращения, напр. в теории ливней, образующихся при попадании космич. частиц больших энергий в атмосферу. В этом случае кинетич. уравнения составляются как система уравнений баланса для заряженных частиц и фотонов в данном интервале энергии и импульса. Эти уравнения выражают тот факт, что изменение функции распределения (кроме эффектов рассеяния) происходит вследствие образования пар заряженных частиц фотонами и испускания заряженных частицами фотонов в виде тормозного излучения в поле ядер. На решении этих уравнений основана каскадная теория ливней.

Лит.: [1] Больцман Л., Лекции по теории газов, пер. с нем., М., 1953; [2] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.– Л., 1946; [3] Зубарев Д. Н., Неравновесная статистическая термодинамика, М., 1971. *Д. Н. Зубарев.*

БОЛЬЦМАНА НЕРАВНОВЕСНАЯ ЭНТРОПИЯ – см. *Неравновесная энтропия.*

БОЛЬЦМАНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – статистически равновесная функция $f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$ распределения по импульсам $\boldsymbol{p}$ и координатам $\boldsymbol{r}$ частиц идеального газа, молекулы которого подчиняются классической механике, во внешнем потенциальном поле:

$$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=A\exp\left\{-\frac{\frac{p^2}{2m}+U(\boldsymbol{r})}{kT}\right\}.\qquad(1)$$

Здесь k – постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k=1{,}38\cdot10^{-16}$ эрг/град), T – абсолютная температура, $p^2/2m$ – кинетич. энергия частицы, $U(\boldsymbol{r})$ – потенциальная энергия частицы в поле, константа A определяется из условия нормировки по безразмерному фазовому объекту:

$$\int\!\!\int f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\frac{d^3p\,d^3r}{h^3}=N,$$

где N – полное число частиц, h – постоянная Планка (универсальная постоянная $h=6{,}62\cdot10^{-27}$ эрг·сек),

$$d^3\boldsymbol{p}=dp_xdp_ydp_z,\ d^3\boldsymbol{x}=dxdydz,$$

или из более обычного в кинетич. теории газов условия нормировки в пространстве скоростей и координат:

$$\int\!\!\int f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{v}d^3\boldsymbol{r}=N,$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}/m,\quad d^3\boldsymbol{v}=dv_xdv_ydv_z.$$

Б. р. есть следствие *Больцмана статистики* идеального газа; представляет собой частный случай *Гиббса распределения*

$$\rho(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_N,\boldsymbol{r}_N)=\frac{1}{z}e^{-\frac{H(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_N,\boldsymbol{r}_N)}{kT}}$$

для идеального газа, когда

$$H=\sum_i\frac{p_i^2}{2m}+\sum_i u(\boldsymbol{r}_i)$$

и канонич. распределение Гиббса распадается на произведение Б. р. для отдельных частиц. Б. р.– предельный случай квантовых статистик идеального газа при достаточно высоких температурах, когда можно пренебречь квантовыми эффектами. При этом среднее число заполнения i-го квантового состояния частицы равно

$$\overline{n}_i=e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{kT}},\qquad(2)$$

где ε_i – энергия, соответствующая i-му квантовому состоянию частицы, μ – химич. потенциал, определяемый из условия

$$\sum_i n_i=N.$$

Формула (2) справедлива при таких температурах и плотностях, когда среднее расстояние между частицами больше отношения постоянной Планка h к модулю средней тепловой скорости

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \frac{h}{\sqrt{mkT}}.$$

Частным случаем Б. р. (1) при $U=0$ является *Максвелла распределение*

$$f(\boldsymbol{p}) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{\boldsymbol{p}^2}{2mkT}\right\}. \qquad (3)$$

Функцию распределения (1) иногда называют распределением Максвелла – Больцмана, а распределением Больцмана называют функцию распределения (1), проинтегрированную по всем импульсам частиц, представляющую плотность числа частиц в точке $\boldsymbol{r}$:

$$n(\boldsymbol{r}) = n_0 \exp\left\{-\frac{U(\boldsymbol{r})}{kT}\right\}, \qquad (4)$$

n_0 – плотность числа частиц, соответствующая точке, где $U=0$. Отношение плотностей числа частиц в различных точках зависит от разности потенциальных энергий, соответствующей этим точкам:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\Delta U}{kT}},$$

где $\Delta U = U(r_1) - U(r_2)$. В частном случае из (4) следует барометрическая формула, определяющая распределение плотности числа частиц в поле тяжести над земной поверхностью

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}, \qquad (5)$$

где g – ускорение силы тяжести, m – масса частицы, z – высота над земной поверхностью, n_0 – плотность при $z=0$.

Для смеси газов с различной массой Б. р. показывает, что распределение парциональных плотностей частиц для каждой из компонент независимо от других компонент. Для газа во вращающемся сосуде $U(\boldsymbol{r})$ есть поле центробежных сил:

$$U(\boldsymbol{r}) = -\frac{m\omega^2 \boldsymbol{r}^2}{2},$$

где ω – угловая скорость вращения.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976; [2] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980.

Д. Н. Зубарев.

БОЛЬЦМАНА СООТНОШЕНИЕ – см. *Статистический вес.*

БОЛЬЦМАНА СТАТИСТИКА – статистика систем, содержащих большое число невзаимодействующих частиц (то есть классического идеального газа). Предложена Л. Больцманом (L. Boltzmann, 1868–71). В более общем смысле Б. с.– предельный случай квантовых статистик идеальных газов (*Бозе – Эйнштейна статистики* и *Ферми – Дирака статистики*) для газа малой плотности, когда можно пренебречь квантовым вырождением газа, но следует учитывать квантование уровней энергии частиц.

Основа Б. с.– распределение частиц идеального газа по состояниям. Поскольку частицы не взаимодействуют между собой, гамильтониан системы можно представить в виде суммы гамильтонианов отдельных частиц и рассматривать состояния не в фазовом пространстве всех частиц, как в статистич. механике Гиббса, а в фазовом пространстве координат и импульсов одной частицы. Это фазовое пространство разбивается на большое число малых ячеек с таким фазовым объемом G_i, чтобы каждая из них включала много близких состояний. Это возможно, так как уровни энергии макроскопич. системы расположены очень плотно и стремятся к непрерывному распределению с увеличением числа частиц N и объема тела V (отношение N/V принимается постоянным). Состояние одной частицы соответствует определенной ячейке фазового пространства, а состояние всей системы из N частиц – набору чисел N_i, характеризующему распределение состояний частиц по ячейкам G_i. Фазовый объем ячеек выражается в единицах h^3, где h – постоянная Планка, а число 3 соответствует числу степеней свободы одной частицы. Согласно квантовой механике, координату и импульс частицы можно определить лишь с точностью, допускаемой соотношением неопределенностей, отсюда h^3 – минимальный размер фазового объема одной частицы (до создания квантовой механики единица фазового объема выбиралась произвольно). Объем G_i, выраженный в единицах h^3, имеет смысл максимально возможного числа макроскопич. состояний в ячейке.

В Б. с. предполагается, что частицы распределяются по различным состояниям совершенно независимо друг от друга и что они различимы между собой. Число различных возможных микроскопич. состояний, соответствующих заданному макроскопич. состоянию газа с энергией $\mathscr{E}$ и числом частиц N (*статистический вес* $W_Б$ макросостояния по Больцману), определяется числом различных способов, к-рыми можно распределить N частиц по состояниям в ячейках размером G_i при N_i частиц в каждой ячейке:

$$W_Б\{N_i\} = N! \prod_i \frac{G_i^{N_i}}{N_i!}, \quad \sum_i N_i = N, \quad \sum_i \mathscr{E}_i N_i = \mathscr{E},$$

где учитывается, что перестановка частиц в пределах каждой ячейки не меняет состояния. При правильном больцмановском подсчете статистич. веса надо, однако, учитывать, что перестановки тождественных частиц не меняют состояния, и поэтому $W_Б$ следует уменьшить в $N!$ раз:

$$W\{N_i\} = \prod_i \frac{G_i^{N_i}}{N_i!}.$$

Это правило подсчета состояний лежит в основе Б. с. При таком определении статистич. веса для энтропии системы S получим:

$$S = k \ln W.$$

В основе статистич. физики лежит предположение, что все микроскопич. состояния, реализующие данное макроскопич. состояние, равновероятны, поэтому вероятность макроскопич. состояния пропорциональна величине статистич. веса W. В статистич. равновесии энтропия максимальна при заданной энергии и числе частиц, что соответствует наиболее вероятному распределению. Его, следовательно, можно найти из условия экстремума S (или W) при фиксированных $\mathscr{E}$ и N. Из этого условия следует *Больцмана распределение* для средних чисел заполнения i-го состояния с энергией $\mathscr{E}_i$:

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{N}_i}{G_i} = \exp\left[\frac{\mu - \mathscr{E}_i}{kT}\right],$$

где μ – химич. потенциал, T – абсолютная температура. Энтропия идеального газа, подчиняющегося Б. с., равна

$$S = \sum_i (N_i \ln G_i - \ln N_i!) = -\sum_i N_i \ln \frac{N_i}{G_i e},$$

так как $\ln N_i! \approx N_i \ln (N_i/e)$.

Б. с. применима к разреженным атомным и молекулярным газам и плазме, но для плотных газов и плазмы, когда существенно взаимодействие между частицами, надо применять не Б. с., а статистику Гиббса, то есть *Гиббса распределение.* Б. с. применима к электронам в невырожденных полупроводниках, для металлов надо учитывать вырождение и применять статистику Ферми – Дирака.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976, § 37, 38; [2] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980, гл. 7; [3] Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, пер. с нем., М., 1955, § 29.

Д. Н. Зубарев.

БОЛЬЦМАНА *H*-ТЕОРЕМА – одно из следствий *Больцмана кинетического уравнения*, согласно которому функция

$$H(t) = \int h(t, \vec{p}, \vec{q}) d^3\vec{p} d^3\vec{q} = -\int f \ln f d^3\vec{p} d^3\vec{q}$$

(где $f(t, \vec{p}, \vec{q})$ – одночастичная функция распределения, удовлетворяющая уравнению Больцмана) является неубы-

вающей функцией времени t. Временная эволюция плотности $h(t,\vec{p},\vec{q})$ определяется релаксацией функции $f(t,\vec{p},\vec{q})$ к локальному *Максвелла распределению*. Предельное значение H-функции при $t\to\infty$ равно среднему по *Гиббса распределению* энтропии статистич. системы. На временных интервалах, больших времени установления локального распределения Максвелла, величины $h(t,\vec{p},\vec{q})$ и $H(t)$ имеют смысл, соответственно, плотности энтропии и энтропии неравновесной статистич. системы.

См. также *Энтропии закон возрастания*.

Лит.: [1] Зубарев Д. Н., Неравновесная статистическая термодинамика, М., 1971.

М. А. Сташенко.

БОЛЬЦМАНА УРАВНЕНИЕ – нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию частиц разреженного газа. Б. у. имеет вид:

$$\frac{\partial f(t,\vec{p},\vec{q})}{\partial t}+(\vec{p}\circ\nabla_{\vec{q}}f)+(\vec{F}\circ\nabla_{\vec{p}}f)=j(f,f),$$

где $(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times D\ni(t,\vec{p},\vec{q})\to f(t,\vec{p},\vec{q})$ – плотность функции распределения числа частиц, $\vec{p},\vec{q}$ – соответственно импульс и координата частицы, $D\subset\mathbb{R}^3$ – область, в к-рой содержится газ, $\vec{F}$ – массовая плотность внешних сил. Билинейный оператор $j(f,f)$ – интеграл столкновений, задаваемый в точке $(t,\vec{p},\vec{q})$ формулами:

$$j(f,f)=\int_{\mathbb{R}^3\times\Sigma}[f(t,\vec{p},\vec{q})f(t,\vec{p}_1,\vec{q})-f(t,\vec{p},\vec{q})f(t,\vec{p}_1,\vec{q})]\times$$

$$\times B\left(|\vec{p}-\vec{p}_1|,\ |\vec{p}-\vec{p}_1|^{-1}((\vec{p}-\vec{p}_1)\circ\vec{n})\right)d\vec{p}_1\,d\vec{n},$$

$$\Sigma=\left\{\vec{n}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,|\vec{n}|=1\right\},$$

$$\vec{p}'=\vec{p}-\vec{n}\left((\vec{p}-\vec{p}_1)\circ\vec{n}\right),\quad \vec{p}_1'=\vec{p}_1+\vec{n}\left((\vec{p}-\vec{p}_1)\circ\vec{n}\right).$$

Неотрицательная непрерывная на $(0,\infty)\times(0,1)$ функция B, называемая дифференциальным сечением рассеяния, однозначно определяется межчастичным потенциалом взаимодействия. Б. у. получается при предельном переходе малой плотности, называемом также пределом (предельным переходом) Больцмана – Грэда. Имеются строгие результаты для нек-рых классов взаимодействий решения задачи Коши для Б. у. (см. [3]).

См. также *Линеаризованное уравнение Больцмана*.

Лит.: [1] Больцман Л., Лекции по теории газов, пер. с нем., М., 1956; [2] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 2, Киев, 1970, с. 99–196; [3] Неравновесные явления. Уравнение Больцмана, пер. с англ., М., 1986.

М. А. Сташенко.

БОЛЬЦМАНА ФОРМУЛА – см. *Дебая – Хюккеля теория*.

БОЛЬЦМАНА ФУНКЦИИ – функции вида

$$\psi_{\nu,s}(x_1,\dots,x_s)=\exp\left\{-\beta\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{p_i^2}{2}-\mu\right)-\right.$$

$$\left.-\beta\sum_{1=i<j}^{s}\Phi(q_i-q_j)-\beta\sum_{i=1}^{s}U^{\Lambda}(q_i)\right\},$$

где $x_i=(p_i,q_i)$, $p_i\in\mathbb{R}^{\nu}$ и $q_i\in\Lambda$ – соответственно импульс и координата i-й частицы, движущейся в области $\Lambda\in\mathbb{R}^{\nu}$, β – параметр, характеризующий среднюю энергию системы S частиц, имеет смысл обратной температуры, μ – химич. потенциал, Φ – межчастичный потенциал,

$$U^{\Lambda}(q)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } q\in\partial\Lambda,\\ 0, & \text{если } q\in\Lambda.\end{cases}$$

Б. ф. определяют бесконечную последовательность частичных функций распределения

$$F_{\nu}=\{1,\ F_{\nu,1}(x_1),\ \dots,\ F_{\nu,s}(x_1,\dots,x_s),\ \dots\}$$

большого канонич. ансамбля, к-рые описывают стационарное состояние нефиксированного числа частиц

$$F_{\nu}=\left(e^{\int_{\nu}dx}\psi_{\nu}\right)_0^{-1}e^{\int_{\nu}dx}\psi_{\nu},$$

где

$$\psi_{\nu}=\{1,\psi_{\nu,1}(x_1),\dots,\psi_{\nu,s}(x_1,\dots,x_s),\dots\},$$

$$\left(e^{\int_{\nu}dx}\psi_{\nu}\right)_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{n!}\int_{\nu}dq_1\dots dq_n\exp\left\{-\beta\sum_{1=i<j}^{n}\Phi(q_i-q_j)-\right.$$

$$\left.-\beta\sum_{i=1}^{n}U^{\Lambda}(q_i)\right\}$$

– большая статистич. сумма, а Z – активность ($Z=e^{\beta\mu}(2\pi/\beta)^{\nu/2}$), к-рая вводится после интегрирования по импульсным переменным.

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985.

М. А. Сташенко.

БОЛЬЦМАНА ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – см. *Максвелла – Больцмана распределение*.

БОЛЬЦМАНА – ГРЭДА ПРЕДЕЛ, предел малой плотности,– кинетический предельный переход в статистической механике. В таком пределе эволюция одночастичных состояний статистич. систем описывается *Больцмана уравнением*. В Б.– Г. п. описываются системы частиц, у к-рых радиус сил взаимодействия мал по сравнению с величиной их средней длины свободного пробега. Строго математически Б.– Г. п. обоснован для системы упругих шаров (см. [1]).

См. также *Равновесные состояния*; кинетический предел.

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., «Доклады АН СССР», 1987, т. 297, № 2, с. 336–40.

В. И. Герасименко.

БОЛЬЦМАНА – ЭНСКОГА УРАВНЕНИЕ – кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения $F(t,x)$, $x\equiv(q,p)$, системы упругих шаров вида (при $t\geqslant 0$):

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,x)=-p\frac{\partial}{\partial q}F(t,x)+$$

$$+\sigma^2\int_{(p-p_1)n\geqslant 0}dnd p_1(p-p_1)n\{F(t,q,p-n(n(p-p_1)))\times$$

$$\times F(t,q+\sigma n,p_1+n(n(p-p_1)))-F(t,q,p)F(t,q-\sigma n,p_1)\},$$

где σ – диаметр частиц, масса принята равной единице, dn – элемент телесного угла, $n\in\mathbb{R}^3$ – единичный вектор.

Б.– Э. у. обладает «микроскопическим» решением (см. [1]):

$$F(t,x)=\sum_{i=1}^{N}\delta(q-q_i(t))\delta(p-p_i(t)),$$

где $\{q_i(t),p_i(t)\}$ – фазовая траектория i-й частицы системы N упругих шаров. Обобщенное *Больцмана уравнение*, построенное Н. Н. Боголюбовым (см. [2]) для системы упругих шаров, совпадает с Б.– Э. у.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., «Теоретич. и математич. физика», 1975, т. 24, № 2, с. 242–47; [2] его же, Проблемы динамической теории в статистической физике, М.–Л., 1946.

В. И. Герасименко.

БОЛЬШАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА – см. *Статистический ансамбль, Термодинамический предел* для равновесных состояний.

БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ПРИНЦИП – принцип, формулируемый для последовательности вероятностных мер и позволяющий исследовать асимптотическое поведение соответствующих континуальных интегралов (см. *Варадана теорема*).

Пусть E – полное сепарабельное метрич. пространство и $\{\mu_n\}_1^{\infty}$ – последовательность вероятностных мер на борелевских множествах в E. Пусть $\{V_n\}_1^{\infty}$ – сходящаяся к бесконечности последовательность чисел $V_n\to 0$ при $n\to\infty$. Последовательность вероятностных мер $\{\mu_n\}_1^{\infty}$ удовлетворяет

принципу больших уклонений с константами $\{V_n\}_1^\infty$ и функцией уклонения $I(x)$, если существует отображение $I: E \to \mathbb{R}_+^1$ такое, что:

1) функция $I(x)$ полунепрерывна снизу на E;

2) для каждого $M < \infty$ множество $\{x \in E: I(x) \leqslant M\}$ образует компакт в E;

3) для каждого замкнутого множества $C \subset E$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{V_n} \ln \mu_n[C] \leqslant -\inf_C I(x);$$

4) для каждого открытого множества $D \subset E$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{V_n} \ln \mu_n[D] \geqslant -\inf_D I(x).$$

А. Л. Ребенко.

БОЛЬШОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ МАСШТАБ – масштаб масс калибровочных *лептокварков* в *великого объединения моделях*. Если единая группа G нарушается до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ на масштабе M, то оценка M получается из решения системы трех ренормгрупповых уравнений для констант g_1, g_2, g_3 соответственно (см. [1]):

$$\mu \frac{\partial g_1}{\partial \mu} = -\frac{g_1^3}{16\pi^2}\left(-\frac{2}{3}f\right),$$

$$\mu \frac{\partial g_2}{\partial \mu} = -\frac{g_2^3}{16\pi^2}\left(\frac{22}{3} - \frac{2}{3}f\right),$$

$$\mu \frac{\partial g_3}{\partial \mu} = -\frac{g_3^3}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}f\right),$$

где f – число кварковых ароматов. Эту систему нужно дополнить граничными условиями

$$g_1 = g_2 = g_3\big|_{\mu=M}, \quad g_3^2/4\pi\big|_{\mu=m} = \alpha_s(m),$$

$$\frac{1}{\alpha_2} - \frac{5}{3\alpha_1}\bigg|_{\mu=m} = \frac{1}{\alpha_{EM}},$$

где $m \sim M_w$. Решение определяет масштаб объединения и перенормированное значение *Вайнберга угла*

$$\ln(M/m) = \frac{\pi}{11}\left(\frac{1}{\alpha_{EM}} - \frac{8}{3\alpha_s(m)}\right), \quad M \sim 10^{16}\,\text{ГэВ},$$

$$\sin^2\theta_w(m) = 1/6 + 5\alpha_{EM}/9\alpha_s(m) \approx 0{,}2.$$

Для более точного определения масштаба необходимо использование конкретной структуры модели великого объединения.

Лит.: [1] Georgi H., Glashow S., «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 438–41.

М. Е. Шапошников.

БОЛЬШОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – см. *Объединенные теории поля.*

БОЛЬШОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Гиббса распределения.*

БОЛЬШОЙ КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ – системы статистической механики, состоящие с определенной вероятностью из произвольного числа частиц (при фиксированном среднем их числе $\overline{N}$), расположенных в конечной области Λ. Они возникают, когда системы обмениваются с термостатом энергией и частицами и находятся в одинаковых условиях. Состояния систем в рамках Б. к. а. описываются функциями распределения на фазовых пространствах, к-рые удовлетворяют *Лиувилля уравнениям*, или частичными функциями распределения, удовлетворяющими *Боголюбова уравнениям.*

См. также *Статистический ансамбль, Статистической механики математические задачи, Термодинамические функции.*

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Петрина Д. Я. и др., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985.

Д. Я. Петрина.

БОППА – ПОДОЛЬСКОГО УРАВНЕНИЯ – *Максвелла уравнения* для поля точечных источников в «вакууме» с нулевой проводимостью и материальными уравнениями

$$\boldsymbol{D} = (1 + l^2\Box)\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} = (1 + l^2\Box)\boldsymbol{B},$$

где $\Box = \partial^2/c^2\partial t^2 - \Delta$ и l – константа порядка 10^{-13} см. Для 4-потенциала $\boldsymbol{A}_\mu = (-\boldsymbol{A}, \varphi)$, для к-рого

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{c\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{c\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0,$$

Б.– П. у. имеют вид:

$$\Box A_\mu = -l^{-2}F_\mu,$$

где $(\Box + l^{-2})F_\mu = -J_\mu$ и $J_\mu = (-4\pi\boldsymbol{J}/c, 4\pi\rho)$ – 4-вектор плотности тока источников. Поле F_μ подчинено условию отсутствия излучения. Применение Б.– П. у. для микроскопич. полей в системе уравнений электродинамики приводит к сходящимся интегралам энергии, что позволяет использовать гипотезу об электромагнитной природе массы.

Лит.: [1] Bopp F., «Ann. d. Phys.», 1940, v. 38, № 5, p. 345–84; [2] Podolsky B., Schwed P., «Rev. Mod. Phys.», 1948, v. 20, № 1, p. 40–46.

А. И. Кириллов.

БОРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА УСЛОВИЕ КВАНТОВАНИЯ – приближенная система уравнений для определения квантовых уровней (собственных значений) энергии $E_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ квантовомеханической системы в квазиклассическом приближении. Б.– З. у. к. имеет вид

$$\oint_{\gamma_i(E)} \sum_{i=1}^n p_i dq_i = 2\pi\hbar\left(m_j + \frac{1}{4}\mu(\gamma_j)\right), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (*)$$

Здесь n – число степеней свободы соответствующей классич. гамильтоновой системы, p_i, q_i – канонич. переменные, $\hbar$ – постоянная Планка, m_j – целые (квантовые) числа. Интегрирование в (*) происходит по базисным циклам $\gamma_j = \gamma_j(E)$ n-мерного инвариантного лагранжева тора классич. системы, расположенного в гиперповерхности постоянной энергии E (лагранжевость тора эквивалентна постоянству интеграла в (*) при деформации контура); $\mu(\gamma_j)$ – целочисленный индекс Маслова (см. [5], [6]) замкнутого контура γ_j. Доказано (см. [5], [7]), что числа $E_{m_1 m_2 \ldots m_n}$, полученные с помощью Б.–З. у. к., являются главными членами асимптотики при $\hbar \to 0$ собственных значений энергии квантовой задачи.

Прообразом Б.–З. у. к. явилось условие Н. Бора для квантования круговых орбит в планетарной модели атома (см. [1]). Оно было обобщено А. Зоммерфельдом [2] на эллиптич. орбиты, уточнялось рядом других ученых, в том числе А. Эйнштейном (см. [3]). Имеется подробный анализ ранней истории Б.–З. у. к. (см. [4]).

Вопрос о существовании инвариантных торов требуемого вида является сложным. Б.–З. у. к. формулируется обычно для случая, когда классич. система интегрируема, то есть ее фазовое пространство расслаивается на инвариантные торы таким образом, что система (*), рассматриваемая относительно неизвестных: E и инвариантный тор, имеет решения для любого заданного набора m_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, квантовых чисел, взятого из нек-рой n-мерной области. Если классич. система близка к интегрируемой, то, согласно теории возмущений КАМ, у нее имеется разрывное семейство инвариантных лагранжевых торов, заполняющее положительный фазовый объем. В этом случае также можно сформулировать Б.–З. у. к., требуя выполнения равенства (*) приближенно с погрешностью $\hbar^\alpha$, $\alpha > 1$ (см. [7]).

Лит.: [1] Бор Н., Избранные научные труды, т. 1, М., 1970, с. 84–148; [2] Sommerfeld A., «Ann. Phys.», 1916, Bd 51, S. 1–94, 125–67; [3] Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. 3, М., 1966, с. 407–16; [4] Джеммер М., Эволюция понятий квантовой механики, пер. с англ., М., 1985; [5] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [6] Арнольд В. И., «Функциональный анализ и его приложения», 1967, т. 1, № 1, с. 1–14; [7] Лазуткин В. Ф., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 34, М., 1988, с. 135–74.

В. Ф. Лазуткин.

БОРА – ПАЙЕРЛСА – ПЛАЧЕКА СООТНОШЕНИЕ – см. *Оптическая теорема.*

БОРЕЛЕВСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Равномерно пригодные приближения* в квантовой механике.

БОРЕЛЯ МЕТОД – метод суммирования *асимптотических рядов.* См. *Равномерно пригодные приближения* в квантовой механике.

БОРНА – ГРИНА – ИВОНА УРАВНЕНИЕ – приближенное замкнутое нелинейное уравнение для парной функции распределения (см. *Парная корреляционная функция*) классической равновесной системы. Система представляет собой ансамбль N тождественных точечных частиц массой m каждая, находящихся в ящике объема V. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} + \sum\sum_{1\leqslant j<n\leqslant N} v(r_{jn}),$$

где $r_{jn} = |\vec{q_j} - \vec{q_n}|$, $\vec{q_1}, ..., \vec{q_N}$, $\vec{p_1}, ..., \vec{p_N}$ – координаты и импульсы частиц системы. Б.– Г.– И. у. получается из цепочки уравнений для частичных функций распределения после применения феноменологич. *суперпозиционного приближения* Кирквуда, когда трехчастичную конфигурационную функцию распределения выражают через двухчастичную

$$n_3(\vec{q_1},\vec{q_2},\vec{q_3}) = n_2(\vec{q_1},\vec{q_3})n_2(\vec{q_2},\vec{q_3})n_2(\vec{q_1},\vec{q_2}).$$

Б.– Г.– И. у. имеет вид:

$$-\theta\vec{\nabla}_1\left[\ln n_2(r_{12})\right] = \vec{\nabla}_1 v(r_{12}) +$$

$$+n\int d\vec{q_3}[\vec{\nabla}_1 v(r_{13})]n_2(r_{13})n_2(r_{23}),$$

где θ – температура, n – средняя плотность числа частиц, $\vec{\nabla}_1 \equiv \partial/\partial\vec{q_1}$. Б.– Г.– И. у. впервые приведено в [1]..

Лит.: [1] Born M., Green H. S., «Proc. Roy. Soc.», A 188, 1946, v. 10; [2] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978. *Д. П. Санкович.*

БОРНА – ИНФЕЛЬДА УРАВНЕНИЯ – *Максвелла уравнения* для поля точечных источников в «вакууме» с нулевой проводимостью и материальными уравнениями

$$\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{E} - G\boldsymbol{B}}{L}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B} - G\boldsymbol{E}}{L},$$

где $L = \sqrt{1 + F - G^2}$ – лагранжиан Б.– И. у., $F = \frac{B^2 - E^2}{b^2}$, $G = \frac{\boldsymbol{BE}}{b^2}$ и b – константа порядка 10^{10} к/м^2. Б.– И. у.– модель электродинамики, в к-рой источники отождествляются с сингулярными точками D, так что траектории источников определяются из уравнений порождаемого ими поля. При этом энергия, импульс и спин источников принимаются равными соответствующим величинам его поля.

Лит.: [1] Born M., Infeld L., «Proc. Roy. Soc. Ser. A», 1934, v. 144, № 852, p. 425–52; v. 147, № 862, p. 522–47; 1935, v. 150, № 869, p. 141–66; [2] Pryce M. H. L., там же, 1935, v. 150, № 869, p. 166–72. *А. И. Кириллов.*

БОРНА – ОППЕНГЕЙМЕРА МЕТОД – метод, впервые сформулированный в [1] и являющийся основным методом описания и классификации молекулярных спектров, медленных атомно-молекулярных столкновений. Используется также в динамич. теории кристаллич. решеток. Представляет собой один из вариантов *адиабатической теории возмущений* и основан на выделении в квантовой системе «быстрой» (электроны) и «медленной» (ядра) подсистем (см. *Адиабатическое приближение*). Такое разделение становится возможным вследствие большой разницы в массах электронов и ядер. В результате исходная задача решается в два этапа: вначале определяются состояния электронов при фиксированных координатах ядер (*электронные термы*), а затем учитывается движение последних.

Пусть имеется квантовая система, состоящая из нек-рого числа электронов с массой m и атомных ядер, в общем случае с различными массами M_α. Совокупность координат всех электронов относительно центра инерции системы $\boldsymbol{r} \equiv \{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_i, ...\}$, а $\boldsymbol{R} \equiv \{\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, ..., \boldsymbol{R}_\alpha, ...\}$ – совокупность координат ядер. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{T}_r + \hat{T}_R + \hat{V}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}), \qquad (1)$$

где

$$\hat{T}_r = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}_i^2}; \quad \hat{T}_R = -\hbar^2 \sum_\alpha \frac{1}{M_\alpha}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{R}_\alpha^2}$$

– соответственно операторы кинетич. энергии электронов и ядер, а $V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$ – оператор потенциальной энергии взаимодействия между частицами.

Поскольку в реальных системах выполнено условие $M_\alpha \gg m$, то оператор кинетич. энергии $\hat{T}_R$ тяжелых частиц (ядер) можно рассматривать как малое возмущение, что и отличает Б.– О. м. от более распространенных схем квантовомеханич. теории возмущений, в к-рых малой предполагается потенциальная энергия взаимодействия. Рассматриваемое возмущение имеет сингулярный характер и, как следствие, асимптотич. характер связанных с ним разложений, поскольку малый параметр входит в ту часть гамильтониана, к-рая содержит старшие производные по группе переменных системы.

В нулевом порядке Б.– О. м. задача определения стационарных состояний системы сводится к решению уравнения Шредингера для волновых функций электронов

$$\left[\hat{T}_r + V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})\right]\varphi_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = \varepsilon_n(\boldsymbol{R})\varphi_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}), \qquad (2)$$

в к-ром координаты ядер являются параметрами, входящими как в волновые функции, так и в энергетич. уровни $\varepsilon_n(\boldsymbol{R})$, определяющие электронный терм рассматриваемой системы. Здесь индекс n определяет совокупность квантовых чисел, соответствующих стационарному состоянию системы электронов.

Если предположить, что полный набор решений уравнения (2) при произвольных значениях $\boldsymbol{R}$ известен, то собственные функции полного гамильтониана (1), то есть решения уравнения

$$(\hat{H} - E)\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = 0 \qquad (3)$$

можно искать в виде разложения по функциям $\varphi_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$:

$$\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = \sum_n \Phi_n(\boldsymbol{R})\varphi_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}),$$

причем в общем случае суммирование по n включает в себя как дискретный, так и непрерывный спектры «быстрой» подсистемы.

Подстановка указанного разложения в уравнение (3) приводит к следующей системе уравнений для коэффициентных функций $\Phi_n(\boldsymbol{R})$ (см. [2]):

$$\left[\hat{T}_R + \varepsilon_n(\boldsymbol{R}) + \hat{\Omega}_{nn}(\boldsymbol{R}) - E\right]\Phi_n(\boldsymbol{R}) = \sum_{m\neq n} \hat{\Omega}_{mn}(\boldsymbol{R})\Phi_m(\boldsymbol{R}), \quad (4)$$

где матричный оператор

$$\hat{\Omega}_{mn}(\boldsymbol{R}) = \sum_\alpha \frac{\hbar^2}{M_\alpha}\int \varphi_m^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}_\alpha}\varphi_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})\,d\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}_\alpha} -$$

$$-\int \varphi_m^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})\hat{T}_R\varphi_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})\,d\boldsymbol{r}.$$

В точных уравнениях (4) адиабатич. разложение Б.– О. м. для построения состояний «медленной» подсистемы определяется рядом по степеням оператора $\hat{\Omega}$, причем в первом порядке система (4) распадается на независимые уравнения

$$\left[\hat{T}_R + \varepsilon_n(\boldsymbol{R}) + \hat{\Omega}_{nn}(R) - E_{n\nu}^{(0)}\right]\Phi_{n\nu}^{(0)}(R) = 0$$

для каждого электронного терма. Здесь ν – совокупность квантовых чисел, определяющих энергетич. уровни системы ядер в поле

$$\hat{U}_n(\boldsymbol{R}) = \varepsilon_n(\boldsymbol{R}) + \hat{\Omega}_{mn}(\boldsymbol{R}),$$

а стационарная волновая функция всей системы сводится к произведению

$$\Psi_{n\nu}^{(0)}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}) = \Phi_{n\nu}^{(0)}(\boldsymbol{R})\varphi_n(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}), \qquad (5)$$

к-рое и соответствует представлению о разделении движений «быстрой» и «медленной» подсистем.

В работе [1] в уравнениях первого приближения для функций $\Phi_{n\nu}^{(0)}(\boldsymbol{R})$ не учитывался дополнительный вклад в энергию $\hat{U}_n(\boldsymbol{R})$, обусловленный диагональным матричным элементом $\hat{\Omega}_{nn}(\boldsymbol{R})$. Однако в прецизионных расчетах свойств молекулярных систем учет этого слагаемого позволяет существенно улучшить точность результатов.

Дальнейшее упрощение уравнений (2) и (4) в Б.– О. м. связано с существенной разницей в порядках характерных величин энергии различных видов движений в молекулах. Для оценки этих величин можно использовать простые качественные соображения (см. [2]). Пусть линейные размеры молекулы определяются параметром d. Тогда в силу соотношения неопределенностей энергия электронов в ней будет иметь порядок

$$E_{\text{эл}} \sim \frac{\hbar}{m}(\Delta p)^2 \sim \frac{\hbar^2}{md^2}.$$

Энергию колебаний ядер $E_{\text{кол}}$ вблизи равновесных положений, определяемых координатами $\boldsymbol{R}_0$, при к-рых энергия $\hat{U}_n(\boldsymbol{R})$ имеет минимум, можно оценить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{кол}} &\equiv \hbar\omega_{\text{кол}} = \hbar\sqrt{k/M}; \\ k = \left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial \boldsymbol{R}^2}\right)_{\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0} &\sim \frac{E_{\text{эл}}}{d^2}, \quad E_{\text{кол}} = \hbar\sqrt{\frac{E_{\text{эл}}}{Md^2}} \sim E_{\text{эл}}\sqrt{\frac{m}{M}}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Энергия вращательного движения определяется моментом инерции системы ядер, то есть

$$E_{\text{вр}} \sim \frac{\hbar^2}{Md^2} \sim E_{\text{эл}}\frac{m}{M}.$$

С такой же точностью можно оценить отношение характерной амплитуды колебаний $\sqrt{\langle x^2\rangle}$ ядер к размерам молекулы

$$\eta = \frac{\sqrt{\langle x^2\rangle}}{d} \sim \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_{\text{кол}}}} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}.$$

Величина η и является тем безразмерным параметром, разложение по к-рому используется в Б.– О. м. Если считать, что координаты $\boldsymbol{R}_0 = \{\boldsymbol{R}_{s0}, ..., \boldsymbol{R}_{\alpha 0}, ...\}$ найдены из уравнений

$$\frac{\partial U_0(\boldsymbol{R})}{\partial \boldsymbol{R}_{\alpha 0}} = 0,$$

определяющих точки минимума основного электронного терма, то с точностью до величины $\sim\eta^3$

$$U_n(\boldsymbol{R}) \simeq \frac{\hbar}{2}\sum_s \omega_{sn}(\xi_s - \xi_{sn})^2 + U_n(\boldsymbol{R}_0),$$

причем ξ_s и ω_{sn} – соответственно нормальные координаты и частоты малых колебаний ядер, параметры ξ_{sn} учитывают смещение положений равновесия ядер при переходе от одного терма к другому.

Кроме того, оператор кинетич. энергии $\hat{T}_R$ можно представить в виде суммы

$$\hat{T}_n = \hat{H}_{\text{вр}} + \hat{T}_{\text{кол}} \equiv \frac{\hbar^2}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{K}_k^2}{I_k} - \frac{\hbar^2}{2}\sum_s \omega_{sn}\frac{\partial}{\partial\xi_s^2},$$

где $\hat{K}_k$ – компоненты оператора полного момента молекулы в системе координат, определяемой главными моментами I_k тензора инерции молекулы в состоянии, соответствующем основному терму, $\hat{T}_{\text{кол}}$ – оператор кинетич. энергии нормальных колебаний. Тогда в разложении по параметру η можно использовать более простую, чем в (5), адиабатич. волновую функцию, вычисляя ее при равновесных положениях ядер, а в энергии состояний молекулы провести полное разделение движений

$$E_{n\nu s}^{(0)} = E_{\text{эл}} + E_{\text{кол}} + E_{\text{вр}},$$

где ν и s – совокупности квантовых чисел, определяющих соответственно колебательные и вращательные возбуждения молекул. Переходы между этими энергетич. уровнями приводят к излучению фотонов с частотами, лежащими в трех существенно различных диапазонах, и образуют так наз. линейчато-полосатые спектры молекул. В частности, в соответствии с оценкой (6) частоты электронных переходов лежат в оптич. диапазоне, колебательные переходы образуют инфракрасный спектр, а вращательные – радиочастотный. Существенно, что все переходы удовлетворяют принципу Франка – Кондона, то есть происходят при фиксированных положениях ядер. В последующих порядках разложения решений уравнения (1) по параметру появляются поправки, к-рые интерпретируются как результат «взаимодействия» различных типов движения в молекуле, и для их вычисления можно построить схему, аналогичную обычной квантовомеханич. теории возмущений (см. [3]).

Применение Б.– О. м. для описания медленных атомно-молекулярных столкновений также основано на использовании адиабатич. волновых функций (5), однако координаты ядер рассматриваются как функции времени $\boldsymbol{R}_\alpha(t)$, определяемые решениями классич. уравнений движения ядер в поле потенциала $U_n(\boldsymbol{R})$. В результате гамильтониан электронной подсистемы молекулы становится функцией времени и при описании ее эволюции можно использовать адиабатич. теорию возмущений (см. [4]).

В динамич. теории кристаллич. решеток (см. [5]) Б.– О. м. также позволяет выделить «быструю» и «медленную» подсистемы, причем величина $U_0(\boldsymbol{R}_0)$, соответствующая энергии основного электронного терма, определяет энергию связи кристалла, вращательным вкладом в оператор $\hat{T}_R$ можно пренебречь, а оператор

$$\hat{H}_\Phi = \frac{\hbar}{2}\sum_s \omega_s\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_s^2} + \xi_s^2\right) \qquad (7)$$

описывает малые колебания ионов решетки в так наз. гармоническом приближении, применимом в том случае, когда среднеквадратичная амплитуда колебаний ионов мала по сравнению с периодом решетки. Поскольку в кристалле величина $\langle x^2\rangle$ зависит не только от квантовых флуктуаций, но и от температуры, то поправки к энергии, найденной в гармонич. приближении, определяются не только адиабатич. параметром η, но и температурой кристалла. Если в гамильтониане (7) перейти к представлению вторичного квантования, то задача сводится к рассмотрению системы невзаимодействующих квазичастиц – фононов, а поправки к гармонич. приближению определяют взаимодействие между фононами.

Лит.: [1] Born M., Oppenheimer R., «Ann. Phys.», 1927, Bd 84, S. 457; [2] Давыдов А. С., Квантовая механика, М., 1973; [3] Гейликман Б. Т., «Успехи физических наук», 1975, т. 115, вып. 3, с. 403; [4] Соловьев Е. А., там же, 1989, т. 157, вып. 3, с. 437; [5] Борн М., Хуан Кунь, Динамическая теория кристаллических решеток, М., 1958.

И. Д. Феранчук.

БОРНА–ОППЕНГЕЙМЕРА ПРИБЛИЖЕНИЕ – см. *Адиабатическое приближение.*

БОРНОВСКИЙ РЯД – итерационный ряд для решения интегрального *Липпмана–Швингера уравнения*:

$$\Psi^{(\pm)}(x,k) = \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n^{(\pm)}(x,k), \quad x,k \in \mathbb{R}^3, \qquad (1)$$

где

$$\Psi_n^{(\pm)}(x,k) = -(4\pi)^{-1}\int \exp\{\pm i|k||x-y|\}|x-y|^{-1}v(y)\times$$
$$\times\,\Psi_{n-1}^{(\pm)}(y,k)\,dy,$$
$$\Psi_0(x,k) = \exp\{i(k,x)\}.$$

Сходимость Б. р. определяется свойствами потенциала $v(x)$. Для любых *короткодействующих потенциалов* Б. р. сходится при достаточно больших $|k|$. Если же потенциал $v(x)$ удовлетворяет условию

$$\int |v(x)||v(y)||x-y|^{-2}\,dx\,dy<4\pi,$$

то Б. р. сходится при всех значениях параметра k. При $|x|\to\infty$ формула (1) дает Б. р. для амплитуды рассеяния $f^{(\pm)}(\hat{x},k)$:

$$\Psi^{(\pm)}(x,k)=\Psi_0(x,k)+f^{(\pm)}(\hat{x},k)\left[\frac{\exp\{i|k||x|\}}{|x|}+o(1)\right],$$

$$f^{(\pm)}(\hat{x},k)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(\pm)}(\hat{x},k), \qquad (2)$$

$$f_n^{(\pm)}(\hat{x},k)=-(4\pi)^{-1}\int\exp\left\{\mp i|k|(\hat{x},k)\right\}v(y)\Psi_n^{(\pm)}(y,k)\,dy.$$

Первое слагаемое в (2)

$$f_0^{(\pm)}(\hat{x},k)=-(4\pi)^{-1}\int\exp\left\{\mp i|k|(\hat{x}-k,y)\right\}v(y)\,dy$$

называется борновским приближением для амплитуды рассеяния.

Лит.: [1] Born M., «Z. Phys.», 1926, Bd 38, S. 803; [2] Мотт Н., Месси Г., Теория атомных столкновений, пер. с англ., 3 изд., М., 1969; [3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 3. Теория рассеяния, М., 1982.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ в квантовой механике и квантовой теории поля – приближенный метод вычисления амплитуд упругого рассеяния и неупругого взаимодействия микрочастиц в рамках *возмущений теории* в первом приближении по потенциалу взаимодействия. Метод сформулирован М. Борном (M. Born, 1926). Применимость Б. п. для короткодействующих потенциалов определяется условием $UR/\hbar v\ll 1$, где R – размер области действия потенциала, v – относительная скорость рассеиваемых частиц, $\overline{U}$ – среднее значение потенциала (в случае квантовой теории поля – энергии взаимодействия) в области с размером $\sim R$. Это условие означает, что время $\sim R/v$, к-рое частицы проводят в области взаимодействия, мало по сравнению со временем $\sim\hbar/U$, за к-рое взаимодействие успевает сильно изменить состояние частиц. Для кулоновского поля Б. п. справедливо при условии $Z\alpha/\hbar v\ll 1$, где Z – атомный номер, $\alpha\approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры. Это означает, что скорость v частиц должна превышать скорость $v_K=Z\alpha/\hbar$ движения электрона на первой боровской орбите. Б. п. лучше выполняется при больших скоростях частиц. При произвольных v оно справедливо, если $|U(R)|\ll\hbar^2/mR^2$.

В нерелятивистской квантовой механике при справедливости Б. п. амплитуда упругого рассеяния действительна и равна

$$f=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,dV,$$

где $\hbar\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f$ – изменение импульса в процессе рассеяния, $\boldsymbol{p}_i$ и $\boldsymbol{p}_f$ – импульсы рассеиваемых частиц до и после рассеяния, m – масса рассеиваемой частицы, $U(\boldsymbol{r})$ – потенциал взаимодействия (dV – элемент объема).

Поскольку в общем случае амплитуда рассеяния является комплексной величиной, ее действительность в Б. п. означает, что фазы рассеяния δ_l в состоянии с орбитальным квантовым числом l должны быть малы. Для них в Б. п. справедливо выражение:

$$\delta_l=-\frac{\pi m}{2\hbar}\int_0^{\infty}U(\boldsymbol{r})\left[J_{l+1/2}(kr)\right]^2\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r},$$

где $J_{l+1/2}$ – функция Бесселя.

Б. п. широко используется при анализе упругого и неупругого рассеяния и служит основным методом извлечения информации о формфакторах элементарных частиц, атомов и атомных ядер.

См. также *Борновский ряд.*

Л. И. Лапидус, М. В. Терентьев.

БОУЭНА–МАРКУСА–МАРГУЛИСА МЕРА – см. *Орициклический поток.*

БОХНЕРА ИНТЕГРАЛ – интеграл от функции со значениями в банаховом пространстве по скалярной мере. Пусть $\{x_n(s)\}$ – последовательность функций на измеримом пространстве $(S,\mathfrak{B},m)$, принимающих конечное число значений, со значением в банаховом пространстве, сильно сходящаяся к функции $x(s)$ почти всюду. Интеграл Бохнера функции $x(s)$ по мере $m(ds)$ определен как сильный предел последовательности интегралов $x_n(s)$ по мере $m(ds)$, то есть

$$\int_S x(s)m(ds)=st\lim_{n\to\infty}\int_S x_n(s)m(ds).$$

В. И. Скрипник.

БРАГИНСКОГО УРАВНЕНИЯ – система гидродинамических уравнений для полностью ионизованной плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов с зарядом e. Они состоят из уравнений непрерывности:

$$\frac{\partial n^{(\alpha)}}{\partial t}+\operatorname{div}\left(n^{(\alpha)}\boldsymbol{V}^{(\alpha)}\right)=0,$$

уравнений движения:

$$m^{(\alpha)}n^{(\alpha)}\frac{\partial^{(\alpha)}V_p^{(\alpha)}}{\partial t}=-\frac{\partial p^{(\alpha)}}{\partial x_p}-\frac{\partial\pi_{pq}^{(\alpha)}}{\partial x_q}+$$
$$+e^{(\alpha)}n^{(\alpha)}\left\{E_p+\frac{1}{c}\left(\boldsymbol{V}^{(\alpha)}\times\boldsymbol{B}\right)_p\right\}+R_p^{(\alpha)}$$

и уравнений теплового баланса:

$$\frac{3}{2}n^{(\alpha)}\frac{\partial^{(\alpha)}T^{(\alpha)}}{\partial t}+p^{(\alpha)}\operatorname{div}\boldsymbol{V}^{(\alpha)}=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}^{(\alpha)}-\pi_{pq}^{(\alpha)}\frac{\partial V_p^{(\alpha)}}{\partial x_q}+Q^{(\alpha)}.$$

Здесь индекс α означает сорт частиц ($\alpha=e$ для электронов и $\alpha=i$ для ионов), $n^{(\alpha)}$ – плотность, $\boldsymbol{V}^{(\alpha)}$ – скорость, $m^{(\alpha)}$ – масса, $\frac{d^{(\alpha)}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{V}^{(\alpha)}\nabla)$, $p^{(\alpha)}=n^{(\alpha)}T^{(\alpha)}$ – давление, $T^{(\alpha)}$ – температура в энергетич. единицах, $e^{(e)}=-e$, $e^{(i)}=e$, $\boldsymbol{R}^{(\alpha)}$ – передача импульса из-за столкновений с частицами другого сорта,

$$\boldsymbol{R}^{(e)}=-\boldsymbol{R}^{(i)}=\boldsymbol{R}^{j}+\boldsymbol{R}^{T}\equiv\boldsymbol{R},$$

$\boldsymbol{R}^{j}$ – сила трения, $\boldsymbol{R}^{T}$ – термосила,

$$\boldsymbol{R}^{j}=en\left(\frac{\boldsymbol{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}}+\frac{\boldsymbol{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}}\right),$$

$$\boldsymbol{R}^{T}=-0{,}71n\nabla_{\parallel}T^{(e)}-\frac{3}{2}\frac{n}{\omega^{(e)}\tau^{(e)}}\frac{\boldsymbol{B}}{B}\times\nabla T^{(e)}.$$

Значки $\parallel$ и $\perp$ означают параллельное и перпендикулярное вектору направления, $\omega^{(\alpha)}=\frac{e^{(\alpha)}B}{m^{(\alpha)}c}$, $\frac{1}{\tau^{(\alpha)}}$ – частота столкновений частиц сорта α друг с другом, $|\omega^{(\alpha)}|\tau^{(\alpha)}\gg 1$. Во всех соотношениях, кроме уравнения Максвелла

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi e(n^{(i)}-n^{(e)}),$$

предполагается выполненным условие квазинейтральности

$$n^{(e)}=n^{(i)}\equiv n;$$

$\boldsymbol{q}^{(\alpha)}$ – плотность потока тепла:

$$\boldsymbol{q}^{(\alpha)}=\boldsymbol{q}^{(\alpha)j}+\boldsymbol{q}^{(\alpha)T},$$

$$\boldsymbol{q}^{(e)j}=-0{,}71\frac{T^{(e)}}{e}\boldsymbol{j}_{\parallel}-\frac{3}{2}\frac{T^{(e)}}{e\omega^{(e)}\tau^{(e)}}\frac{\boldsymbol{B}}{B}\times\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{q}^{(i)j}\approx 0,$$

$$\boldsymbol{q}^{(\alpha)T}=-\varkappa_{\parallel}^{(\alpha)}\nabla_{\parallel}T^{(\alpha)}-\varkappa_{\perp}^{(\alpha)}\nabla_{\perp}T^{(\alpha)}+\frac{5}{2}\frac{nT^{(\alpha)}}{\omega^{(\alpha)}m^{(\alpha)}}\frac{\boldsymbol{B}}{B}\times\nabla T^{(\alpha)},$$

$Q^{(\alpha)}$ – тепло, получаемое частицами сорта α вследствие столкновений с частицами другого сорта,

$$Q^{(i)}=\frac{3m^{(e)}}{m^{(i)}}\frac{n}{\tau^{(e)}}\left(T^{(e)}-T^{(i)}\right),$$

$$Q^{(e)}=\frac{1}{en}\boldsymbol{R}\boldsymbol{j}-Q^{(i)}.$$

Тензоры вязких напряжений $\pi_{pq}^{(e)}$ и $\pi_{pq}^{(i)}$ имеют аналогичный вид, поэтому в выражениях для них мы опускаем индекс α. Компоненты π_{pq} определяются из уравнений:

$$\pi_{zz} = -2\eta_0 V_{zz}, \quad (1)$$

$$\pi_{xx} + \pi_{yy} = -2\eta_0 (V_{xx} + V_{yy}), \quad (2)$$

$$\pi_{xx} - \pi_{yy} \pm 2i\pi_{xy} = 2(-\eta_1 \pm i\eta_3)(V_{xx} - V_{yy} \pm 2iV_{xy}), \quad (3)$$

$$\pi_{xz} \pm i\pi_{yz} = 2(-\eta_2 \pm i\eta_4)(V_{xz} \pm iV_{yz}), \quad (4)$$

$$V_{pq} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_p}{\partial x_q} + \frac{\partial V_q}{\partial x_p}\right) - \frac{1}{3}\delta_{pq}\,\mathrm{div}V.$$

Ось z направлена вдоль магнитного поля. [Выражения (1)–(4) соответствуют неприводимым представлениям группы аксиального вектора $\boldsymbol{B}$, то есть группы $C_{\infty,h}$.] Диссипативные коэффициенты $\sigma_\parallel$, $\sigma_\perp$, $\varkappa_\parallel$, $\varkappa_\perp$, η_0, η_1, η_2 и дисперсионные коэффициенты η_3, η_4 определяются с помощью кинетич. теории.

Лит.: [1] Брагинский С. И., Явления переноса в плазме, в кн.: Вопросы теории плазмы, М., 1963, вып. 1, с. 183–272; [2] Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ., М., 1960. *В. П. Демуцкий, Р. В. Половин.*

БРАДИОН – см. *Тахион.*

БРЕЗЕР – частицеподобное решение нелинейного эволюционного уравнения с внутренними степенями свободы. Напр., это решение уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (*)$$

к-рое имеет вид:

$$u(x,t) = 4\mathrm{arctg}\left\{\frac{\nu}{\mu}\frac{\sin\left[(\omega_1(1-v^2)^{-1/2})(t-vx+\varphi_0)\right]}{\mathrm{ch}\left[(\omega_2(1-v^2)^{-1/2})(x-vt-x_0)\right]}\right\},$$

где $\mu = \mathrm{Re}\,E$, $\nu = \mathrm{Im}\,E$, $\omega_1 = \mathrm{Re}\,E/|E|$, $\omega_2 = \mathrm{Im}\,E/|E|$, $v = (1-|E|^2)/(1+|E|^2)$, E – комплексное число ($\mathrm{Im}\,E > 0$). Такое решение уравнения (*) называется также двойным солитоном и интерпретируется как релятивистское связанное состояние *кинка* и *антикинка*. Топологический заряд Б. уравнения (*) равен нулю.

См. также *Беклунда преобразование.*

Лит.: [1] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., Гамильтонов подход в теории солитонов, М., 1986. *В. П. Котляров.*

БРЕЙТА–ВИГНЕРА ФОРМУЛА – см. *Рассеяния теория.*

БРОДУЭЛЛА УРАВНЕНИЯ – система полулинейных уравнений с частными производными первого порядка, описывающая дискретную модель *Больцмана уравнения*:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + v_i \nabla_{\bar{x}} N_i = \sum_{j,k,m}\left(A_{km}^{ij} N_k N_m - A_{ij}^{km} N_i N_j\right) \equiv Q_i,$$

где A_{km}^{ij} – вероятность переходов $(i,j) \to (k,m)$, p – количество дискретов скорости; $v_i \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, 3$. В случае $p = 6$:

$$v_1 = i,\ v_2 = j,\ v_3 = k,$$

$$Q_1 = Q_2 = N_3N_4 + N_5N_6 - 2N_1N_2,$$

$$Q_3 = Q_4 = N_1N_2 + N_5N_6 - 2N_3N_4,$$

$$Q_5 = Q_6 = N_1N_2 + N_3N_4 - 2N_5N_6.$$

Лит.: [1] Broadwell T., «The Phys. of Fluids», 1964, v. 7, № 8. *И. А. Кузин, В. П. Политюков.*

БРЮА РАЗЛОЖЕНИЕ – представление группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ всех обратимых комплексных матриц порядка n в виде объединения

$$G = U_{w_i \in W}\ G_{w_i}$$

непересекающихся множеств $G_{w_i} = Bw_iB$. Здесь B – подгруппа верхнетреугольных матриц (с произвольными числами на главной диагонали), W – группа всех матриц, у к-рых в каждом столбце и в каждой строке ровно одна единица, а остальные – нули, $w_i \in W$, а Bw_iB – множество всех $g \in G$, представимых в виде $g = b_1w_ib_2$, где $b_1, b_2 \in B$. Для произвольной простой комплексной группы Ли G Б. р. определяется аналогично, в качестве B выступает наибольшая разрешимая (так наз. борелевская) подгруппа в G, а в качестве W – *Вейля группа.* *Ю. А. Неретин.*

БУДУЩЕГО ГОРИЗОНТ КОШИ – см. *Коши горизонт будущего.*

БУДУЩЕГО ТРУБА – см. *Труба будущего.*

БУДУЩЕЕ в теории относительности – см. *Пространство-время* в теории относительности.

БУМЕРАНГ – легкий метательный снаряд, который демонстрирует существенное влияние вращения тела на траекторию его полета в воздухе. Вращающийся Б. из-за асимметрии его лопастей относительно набегающего потока воздуха испытывает момент аэродинамич. сил, приводящий к повороту плоскости вращения. Так как сопротивление скольжению Б. в этой плоскости существенно меньше, чем движению в поперечном направлении, то происходит искривление траектории полета тела. При умелом броске Б., пролетевший мимо цели, возвращается к метателю. *В. А. Самсонов.*

БУСТ, чистое преобразование Лоренца,– гиперболический поворот в плоскости, содержащей ось времени. Точнее, Б. в направлении оси z (со скоростью, направленной вдоль этой оси) – *Лоренца преобразование*, оставляющее на месте точки, лежащие в плоскости x, y. Б. не образуют группы, но образуют так наз. йорданову алгебру относительно закона композиции

$$B_1 \circ B_2 = \frac{B_1B_2 + B_2B_1}{2},$$

где B_1, B_2 – нек-рые Б., B_1B_2 – их последовательная композиция. Действие трех Б. с непараллельными векторами скоростей может дать обычный пространственный поворот – так наз. прецессию Томаса.

Всякое преобразование Лоренца представляется в виде композиции Б. и пространственного поворота (подобно тому, как комплекснозначная (2×2)-матрица представляется в виде произведения эрмитовой и унитарной матриц).

Лит.: [1] Эллиот Дж., Добер П., Симметрия в физике, т. 2, пер. с англ., М., 1983; [2] Стриттер Р., Вайтман А., PCT, спин и статистика и все такое, пер. с англ., М., 1966; [3] Румер Ю. Б., Фет А. И., Теория групп и квантованные поля, М., 1971. *М. И. Войцеховский.*

БЫСТРО УБЫВАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ – парный *взаимодействия потенциал*, для к-рого существуют такие $R_0 > 0$, $A \geqslant 0$ и $\lambda > \nu$, где ν – размерность пространства, что

$$|\Phi(|x|)| \leqslant A|x|^{-\lambda} \text{ при } |x| \geqslant R_0.$$

Иногда используется другое определение Б. у. п. в.:

$$\Phi(|x|) \leqslant A|x|^{-\lambda} \text{ при } |x| \geqslant R_0,$$

в этом случае условие убывания накладывается только на положительную часть Б. у. п. в., а отрицательная может быть произвольной. Примерами Б. у. п. в. могут служить *Леннард–Джонса потенциал взаимодействия* и *Юкавы потенциал взаимодействия.*

Частным случаем Б. у. п. в. является потенциал конечного радиуса действия (финитный) такой, что $\Phi(|x|) \equiv 0$ при $|x| > R$, где $R > 0$ – нек-рая постоянная.

Б. у. п. в. абсолютно интегрируем вне нек-рого множества конечной лебеговской меры и является *регулярным потенциалом взаимодействия.*

Обобщение на случай n-частичного взаимодействия имеет вид: пусть $U_{n_1n_2}\left(x_1, ..., x_{n_1};\ y_1, ..., y_{n_1}\right)$ – потенциальная энергия взаимодействия систем, соответственно, n_1 и n_2 частиц. Взаимодействие называется быстро убывающим, если существуют такие $\lambda > \nu$, $R_0 > 0$ и $A \geqslant 0$, что

$$\left|U_{n_1n_2}\left(x_1, ..., x_{n_1};\ y_1, ..., y_{n_2}\right)\right| \leqslant An_1n_2r^{-\lambda},$$

если только $|y_i - y_j| \geqslant r \geqslant R_0$ для всех $i \in \{1, ..., n_1\}$ и $j \in \{1, ..., n_2\}$. Условие быстрого убывания – одно из условий, накладываемых на потенциал в статистич. механике при доказательстве существования *термодинамического предела.*

Лит. см. при ст. *Взаимодействия потенциал.* *П. В. Малышев.*

БЫСТРОЕ ПЕРЕМЕННОЕ – см. *Быстрые и медленные переменные, Быстро-медленные системы, Усреднения метод.*

БЫСТРОЕ ПОЛЕ – см. *Интегрирования метод.*

БЫСТРОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Быстро-медленные системы, Понтрягина–Родыгина теоремы.*

БЫСТРО-МЕДЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ, системы с быстрыми и медленными движениями, с быстрыми и медленными переменными,– системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon),\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon),\ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Переменные x называются быстрыми, а y – медленными (см. *Быстрые и медленные переменные*). Б.-м. с. изучаются различными методами *возмущений теории* в зависимости от свойств быстрого уравнения, то есть уравнения для x при $y = \text{const}$, $\varepsilon = 0$.

Частный случай Б.-м. с.– системы с быстро вращающимися фазами, то есть системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon),$$
$$I \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{\mathrm{mod} 2\pi} \in T^m, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Такие системы возникают в задачах, где на вполне интегрируемую систему, фазовое пространство к-рой расслоено на инвариантные торы, действует малое порядка ε возмущение. Компоненты вектора φ называются быстрыми переменными или фазами, компоненты I – медленными переменными, компоненты $\omega(I)$ – частотами невозмущенного движения; правые части системы предполагаются 2π-периодическими по фазам. Для исследования поведения рассматриваемых систем используют *усреднения метод.*

См. *Усреднения метод, Релаксационные колебания, Понтрягина–Родыгина теоремы.*

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 5, М., 1986, с. 5–218; [2] то же, т. 3, М., 1985, с. 5–303; [3] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975. *А. И. Нейштадт.*

БЫСТРЫЕ ВОЛНЫ – см. *Фазовая скорость.*

БЫСТРЫЕ И МЕДЛЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ – переменные, возникающие в задачах с малым параметром h в том случае, когда независимые переменные входят в дифференциальные (или псевдодифференциальные) операторы неравноправно – производные по части переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ входят в уравнение в виде $h\partial/\partial x_j$ (то есть с параметром), а по другой части переменных $y = (y_1, ..., y_l)$ – в виде $\partial/\partial y_k$ (то есть без параметра). Тогда переменные x называются медленными, а y – быстрыми переменными. Б. и м. п. возникают также при нахождении асимптотич. решений вида

$$\psi(S_1(x)/h, ..., S_m(x)/h, x)$$

в различных вариантах многомасштабных разложений. При регуляризации задачи возникают переменные $y_j = S_j(x)/h$, к-рые также называются быстрыми, в отличие от медленных переменных x. *С. Ю. Доброхотов.*

БЫСТРЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ – см. *Ударные волны.*

БЬЕРКЕНА СКЕЙЛИНГ – *масштабная инвариантность*, характеризующая глубоко-неупругие столкновения лептонов с адронами; заключается в том, что глубоко-неупругие факторы (некие безразмерные функции, характеризующие дифференциальные сечения этих процессов) зависят лишь от одной безразмерной переменной $x = -q^2/2\nu$. Здесь q^2 – квадрат четырехмерного импульса q, переданного от лептона нуклону, а $\nu = qp$, где p – 4-импульс нуклона.

В лабораторной (собственной) системе координат, где нуклон покоится, $p = m$ и $\nu/m = E - E'$; здесь m – масса нуклона, E – энергия начального лептона, а E' – конечного. Следовательно, в лабораторной системе ν/m – это энергия, переданная от лептона нуклону. Как само явление Б. с., так и наблюдаемые на опыте отклонения от него объясняются квантовой хромодинамикой. *Л. Б. Окунь.*

БЮРГЕРСА УРАВНЕНИЕ – нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u\partial u}{\partial x} = \frac{\mu \partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x, t)$ – неизвестная функция, $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, $\mu > 0$ – параметр. Является модельным уравнением при исследовании волновых процессов в газовой динамике, гидродинамике, акустике и т. д. На Б. у. как на простейшее уравнение, объединяющее типичную нелинейность и тепловую диффузию (или вязкость), указал Й. Бюргерс (J. Burgers) в 1942, хотя оно фигурировало и ранее в работах других ученых, в частности Г. Бейтмена (H. Bateman). Обнаруженная Э. Хопфом (E. Hopf) и Дж. Коулом (J. Cole) в 1950 замена

$$u = -\frac{2\mu \partial \ln \varphi(x, t)}{\partial x}$$

позволяет свести Б. у. к уравнению теплопроводности

$$\partial\varphi/\partial t = \mu \partial^2 \varphi/\partial x^2$$

для функции φ и получить решение задачи Коши $u(x, 0) = u_0(x)$ для Б. у. в виде:

$$\varphi(x, t) = (4\pi\mu t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\{-F(x, \eta, t)/2\nu\},$$

$$F(x, \eta, t) = \int_0^{\eta} u_0(\xi)\, d\xi + (x - \eta)^2/2t.$$

С помощью этой формулы можно детально проследить, как из гладких начальных данных образуются и распространяются ударные волны в нелинейной среде, описываемые уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v \partial v}{\partial x} = 0,$$

если понимать под обобщенным решением последнего функцию

$$v(x, t) = \lim_{\mu \to +0} u(x, t)$$

– предел по «исчезающей» вязкости решения задачи Коши $u(x, 0) = v(x, 0)$ для Б. у. Исходная задача имеет интеграл движения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, dx.$$

См. также *Статистическая гидродинамика, Хопфа уравнение.*

Лит.: [1] Карпман В. И., Нелинейные волны в диспергирующих средах, М., 1973; [2] Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., 1977; [3] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. Н., Теория волн, М., 1979.

С. Ю. Доброхотов.

БЮРГЕРСА – КОРТЕВЕГА – де ФРИСА УРАВНЕНИЕ – см. *Кортевега – де Фриса уравнение.*

В

ВАЙНБЕРГА УГОЛ – угол θ_w смешивания нейтральных калибровочных полей в *Глэшоу–Вайнберга–Салама модели*. В результате этого смешивания из исходных полей B_μ и $A_{3\mu}$, отвечающих калибровочным группам $U(1)$ и $SU(2)$, образуются физич. поля: электромагнитное поле A_μ и поле промежуточного Z^0-бозона Z_μ:

$$A_\mu = \cos\theta_w B_\mu + \sin\theta_w A_{3\mu},$$
$$Z_\mu = -\sin\theta_w B_\mu + \cos\theta_w A_{3\mu}.$$

Величина θ_w входит в ряд важнейших соотношений электрослабой модели: в соотношение между константами связи групп $U(1)$ и $SU(2)$ и электромагнитной константы связи, в отношение масс W- и Z^0-бозонов и др.

Значение θ_w моделью не предсказывается, а определяется из реакций с участием нейтральных токов (то есть реакций с обменом Z^0-бозоном): глубоконеупругое рассеяние нейтрино на изоскалярной мишени, упругое рассеяние

$$\nu_\mu e \to \nu_\mu e, \quad \bar\nu_\mu e \to \bar\nu_\mu e, \quad \nu_\mu p \to \nu_\mu p, \quad \bar\nu_\mu p \to \bar\nu_\mu p,$$

и др., а также из измерения масс W- и Z^0-бозонов. Современное значение составляет: $\sin^2\theta_w = 0{,}230 \pm 0{,}0048$.

Лит.: [1] Квантовая теория калибровочных полей, пер. с англ., М., 1977.

А. Ю. Игнатьев.

ВАЙТМАНА СИСТЕМА АКСИОМ – формулировка основных принципов релятивистской локальной квантовой теории поля, предложенная А. Вайтманом и Л. Гордингом [1]. Состоит в следующем.

1) Физич. состояния описываются единичными лучами гильбертова пространства H, в к-ром реализуется унитарное представление $U_{a,\Lambda}$ собственной группы Пуанкаре (a – трансляции, Λ – преобразования Лоренца). Ввиду унитарности

$$U_{a,\Lambda} = \exp\{ia^\mu P_\mu\},$$

где эрмитов оператор P интерпретируется как оператор энергии-импульса.

2) Спектр оператора P сосредоточен в замкнутом верхнем световом конусе.

3) Существует вакуум – единственное пуанкаре-инвариантное состояние $\Psi_0 \in H$.

4) Поле A является операторнозначной обобщенной функцией. Это означает, что имеется линейное отображение $\varphi \to A(\varphi)$ из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^4)$ пробных функций в пространство действующих в H операторов с общей инвариантной областью определения $D \ni \Psi_0$, причем матричные элементы $\langle \Phi, A(\varphi)\Psi\rangle$, где $\Phi, \Psi \in D$, непрерывны по φ.

5) Трансформационные свойства поля задаются формулой

$$U_{a,\Lambda} A_i(\varphi) U^{-1}_{a,\Lambda} = \sum_j R_{ij}(\Lambda^{-1}) A_j(\varphi_{a,\Lambda}),$$

где i – индекс лоренцевой компоненты,

$$\varphi_{a,\Lambda}(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x-a))$$

и R – матричное представление группы Лоренца.

6) Причинность выражается требованием перестановочности или антиперестановочности любых двух полевых операторов, когда носители соответствующих пробных функций φ_1, φ_2 пространственноподобно отделены.

7) Вакуум цикличен, то есть линейная оболочка векторов, получаемых из Ψ_0 последовательным применением конечного числа полевых операторов, плотна в H.

Аксиоматич. подход позволил дать строгий вывод таких фундаментальных свойств квантовой физики, как связь спина со статистикой, *TCP*-инвариантность, существование асимптотич. состояний и унитарной матрицы рассеяния (см. [3]–[5]). Он лег в основу конструктивной квантовой теории поля, где построены удовлетворяющие В. с. а. модели взаимодействующих квантовых полей в 2- и 3-мерном пространстве-времени. Одна из возможностей расширения В. с. а. состоит в замене S другим пространством пробных функций. Универсальным для локальных полей служит пространство S^1 Гельфанда – Шилова, допускающее формулировку аксиомы 6) в терминах теории гиперфункций (см. [6]). При обобщении В. с. а. на калибровочные поля используется псевдогильбертово пространство, имеющее индефинитную метрику (см. [5]). В случае неабелевой калибровочной симметрии перспективной считается формулировка аксиом для протяженных калибровочно-инвариантных объектов типа петель Вильсона (см. [7]).

Лит.: [1] Wightman A. S., Gärding L., «Ark. f. Fys.», v. 28, p. 129–89; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1978; [3] Стритер Р., Вайтман А., PCT, спин и статистика и все такое, пер. с англ., М., 1968; [4] Йост Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [5] Боголюбов Н. Н. и др., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987; [6] Соловьев М. А., «Труды Физич. ин-та АН СССР», 1991, т. 209; [7] Зайлер Э., Калибровочные теории, пер. с англ., М., 1985.

М. А. Соловьев.

ВАЙТМАНА ФУНКЦИЯ – вакуумное среднее конечного произведения операторов квантового поля, а также обобщенная функция, порождаемая этим полилинейным функционалом по теореме Шварца о ядре. Содержание *Вайтмана системы аксиом* выражается в виде линейных и нелинейных соотношений для В. ф. Благодаря спектральному условию В. ф. локального поля является граничным значением голоморфной функции, ковариантной относительно комплексной группы Лоренца $L_+(\mathbb{C}) \approx SO(4, \mathbb{C})$. В область голоморфности входят точки с чисто мнимыми временами, что позволяет перейти к евклидовой формулировке теории поля.

М. А. Соловьев.

ВАКУУМ, вакуумное состояние,– основное состояние квантовых полей, обладающее минимальной энергией, нулевым импульсом, угловым моментом, электрическим зарядом и другими квантовыми числами. Часто В. определяют также как состояние, в к-ром отсутствуют какие-либо реальные частицы, то есть состояние, действие на к-рое операторов уничтожения дает нулевой результат (так наз. математический вакуум). Возможность виртуальных процессов в В. приводит к ряду специфич. эффектов при взаимодействии с ними реальных частиц. Для физич. В., в отличие от математического, *вакуумное среднее* от произведения двух операторов полей в одной точке пространства-времени может быть не равным нулю. Понятие В. является одним из основных в том смысле, что его свойства определяют свойства всех остальных состояний, так как любой вектор состояния в представлении вторично-

го квантования может быть получен из вакуумного действием на него оператора рождения частиц. В ряде случаев, напр. при спонтанном нарушении симметрии, вакуумное состояние оказывается не единственным, вырожденным,– существует непрерывный спектр таких состояний, отличающихся друг от друга числом так наз. голдстоуновских бозонов. *А. В. Ефремов.*

ВАКУУМНАЯ ДИАГРАММА ФЕЙНМАНА – см. *Фейнмана диаграмма.*

ВАКУУМНОЕ КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ – см. *Кластерное разложение.*

ВАКУУМНОЕ СОСТОЯНИЕ – см. *Вакуум.*

ВАКУУМНОЕ СРЕДНЕЕ в квантовой теории поля – комплексное число, равное среднему значению какого-либо оператора (или произведения операторов A, B,...) в вакуумном состоянии поля $|0\rangle$ (см. *Вакуум*). Обозначается символом $\langle 0|A;\ B;\ldots|0\rangle$. В. с. операторов энергии, импульса, момента импульса, электрич. заряда и др. сохраняющихся квантовых чисел равны нулю. Особенно большую роль играет В. с. *локальных операторов* поля $\varphi(x)$, зависящих от пространственно-временных точек x. Так, ненулевое значение $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle$ свидетельствует о *спонтанном нарушении симметрии* и *вырождении вакуума*. В. с. от хронологич. произведения операторов полей или локальных токов дает матричные элементы матрицы рассеяния и определяет все процессы взаимопревращения частиц. *А. В. Ефремов.*

ВАКУУМНЫЙ КОНДЕНСАТ – см. *Квантовая хромодинамика*; правила сумм.

ВАЛЕНТНОСТЬ тензора – см. *Тензорное поле.*

ВАН ДЕР ПОЛЯ УРАВНЕНИЕ – нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad \dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}. \qquad (1)$$

Является важным частным случаем *Льенара уравнения*. В. д. П. у. описывает свободные *автоколебания* одной из простейших нелинейных колебательных систем (осциллятора Ван дер Поля). В частности, уравнение (1) служит математич. моделью (при ряде упрощающих предположений) лампового генератора на триоде в случае кубич. характеристики лампы. Характер решений уравнения (1) был впервые подробно изучен Б. Ван дер Полем (B. Van der Pol, 1922–26).

Уравнение (1) эквивалентно системе двух уравнений относительно фазовых переменных x, v:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x + \mu(1 - x^2)v. \qquad (2)$$

Иногда вместо x удобнее ввести переменную

$$z(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau;$$

тогда уравнение (1) приведется к уравнению

$$\ddot{z} - \mu\left(\dot{z} - \frac{\dot{z}^3}{3}\right) + z = 0,$$

являющемуся частным случаем *Рэлея уравнения*. Если вместе с переменной x рассмотреть переменную

$$y = -x + \frac{x^3}{3} + \frac{\dot{x}}{\mu},$$

ввести новое время $\tau = t/\mu$ и положить $\varepsilon = \mu^{-2}$, то вместо уравнения (1) получим систему

$$\varepsilon x' = y - x + \frac{x^3}{3}, \quad y' = -x, \quad {}' = \frac{d}{d\tau}. \qquad (3)$$

При любом $\mu > 0$ в фазовой плоскости системы (2) существует единственный устойчивый предельный цикл, к к-рому при $t \to \infty$ приближаются все остальные траектории (кроме положения равновесия в начале координат); этот предельный цикл адекватен автоколебаниям осциллятора Ван дер Поля (см. [1]–[3]).

При малых μ автоколебания осциллятора (1) близки к простым гармонич. колебаниям с периодом 2π и с определенной амплитудой. Для вычисления колебательного процесса с большей точностью применяются асимптотич. методы. При возрастании μ автоколебания осциллятора (1) все более отклоняются от гармонич. колебаний. При больших μ уравнение (1) описывает *релаксационные колебания* с периодом (в первом приближении) 1,614 μ. Известны более точные асимптотич. разложения величин, характеризующих релаксационные колебания (см. [4]); изучение этих колебаний равносильно исследованию решений системы (3) с малым параметром ε при производной (см. [5]).

Уравнение

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = E_0 + E \sin \omega t$$

описывает поведение осциллятора Ван дер Поля под воздействием внешнего периодич. возмущения. Здесь наиболее важны изучение явления захватывания частоты (существования периодич. колебаний) и исследование биений (возможности почти периодич. колебаний; см. [1], [3]).

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [2] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [3] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [4] Дородницын А. А., «Прикл. математика и механика», 1947, т. 11, с. 313–28; [5] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975. *Н. Х. Розов.*

ВАН ХОВА ТЕОРЕМА – теорема, устанавливающая отсутствие фазовых переходов в одномерных непрерывных статистических системах частиц с парным потенциалом взаимодействия.

Пусть парный потенциал взаимодействия $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

а) непрерывен при $|x| > R$;

б) имеет твердую сердцевину [$\Phi(x) = +\infty$ при $|x| < R$, $x \in \mathbb{R}$];

в) имеет конечный радиус действия (финитен) $\Phi(x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant R_0 > R$.

В этом случае предельное ($V(\Lambda) \to \infty$, $V(\Lambda)$ – объем области Λ, в к-рой находится система) давление

$$p(z, \beta) = \beta^{-1} \lim_{\Lambda \to \infty} V(\Lambda)^{-1} \ln \Xi(\Lambda, z, \beta),$$

где Ξ – большая статистич. сумма, является действительной аналитич. функцией активности z (при $z > 0$). Следовательно, в таких системах фазовые переходы отсутствуют.

Впоследствии класс потенциалов взаимодействия, для к-рых справедлива В. Х. т., был существенно расширен. Так, в частности, В. Х. т. справедлива (см. [3], [5]) для быстро убывающих потенциалов взаимодействия с твердой сердцевиной, удовлетворяющих условию $|\Phi(x)| \leqslant \varphi(|x|)$ при $|x| < A$, где $\varphi(r)$ – монотонно невозрастающая функция такая, что

$$\int_A^\infty r\varphi(r)\, dr < \infty,$$

а также (см. [6]) для финитных потенциалов взаимодействия, быстро растущих в нуле.

Существует также В. Х. т., устанавливающая наличие и характер особых точек в энергетич. зонах кристаллов.

Лит.: [1] Van Hove L., «Physica», 1950, t. 16, p. 137–43; [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971, теоремы 5, 6, 7 и § 4 прилож.; [3] Добрушин Р. Л., «Функциональный анализ и его прилож.», 1969, № 1, с. 27; [4] его же, «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 3, с. 469; [5] Gallavotti G., Miracle-Sole S., «J. Math. Phys.», 1970, v. 1, p. 147; [6] Сухов Ю. М., «Успехи математич. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 277. *П. В. Малышев.*

ВАРАДАНА ТЕОРЕМА – теорема, определяющая асимптотическое поведение интегралов по последовательности вероятностных мер, удовлетворяющих *больших уклонений принципу*. Фактически она обобщает метод Лапласа на бесконечномерный случай. Наиболее удобным для различных приложений в физике является следующий вариант В. т.

Пусть последовательность вероятностных мер $\{\mu_n[dx]\}_1^\infty$ на E удовлетворяет принципу больших уклонений с константами $\{V_n\}_1^\infty$ и функцией уклонения $I(x)$. И пусть $G: E \to \mathbb{R}^1$ является непрерывной функцией, к-рая ограничена сверху на множестве $\cup_n \operatorname{supp}\mu_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{V_n} \ln \int_E \mu_n[dx] \exp\{V_n G(x)\} = \sup_{x\in E}[G(x) - I(x)].$$

Подробное доказательство содержится в работе [1]. Физич. примеры, использующие В. т., наиболее полно приведены в [2].

Лит.: [1] Varadhan S. R. S., «Comm. Pure Appl. Math.», 1966, v. 19, p. 261; [2] Ellis R. S., Entropy, large deviations and statistical mechanics, B.– Hdlb.– N. Y., 1985. *А. Л. Ребенко.*

ВАРИАЦИОННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ – см. *Вариационное исчисление.*

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ – раздел математики, обобщающий элементарную теорию экстремума функций. В В. и. речь идет об экстремуме функционалов – величин, зависящих от выбора одной или нескольких функций $f_1,\dots,f_m$, к-рые играют для функционала $F[f_1,\dots,f_m]$ роль аргументов. Аналогично тому, как в задаче об экстремуме функции $f(x_1,\dots,x_n)$ необходимо указать область G изменения ее аргументов, для функционала следует задать класс допустимых функциональных аргументов (напр. класс функций, непрерывных вместе с первыми производными в области D и удовлетворяющих нек-рым условиям на границе D). Если задача об экстремуме непрерывной функции всегда имеет решение (такая функция достигает экстремальных значений внутри G или на ее границе), то существование экстремума функционала для данного класса функциональных аргументов не гарантировано априори и требует каждый раз особого исследования. Одну из первых задач В. и. сформулировал И. Бернулли (J. Bernoulli, 1696), окончательно В. и. сформировалось в 18 в. благодаря работам Л. Эйлера (L. Euler).

Необходимым условием экстремума функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^0,\dots,x_n^0)$ является равенство нулю ее производной по любому направлению $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_n)$:

$$df(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{a})/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = (\boldsymbol{a}\nabla f) = 0,$$

то есть

$$\nabla f = 0.$$

Малому смещению аргумента для функционалов соответствует вариация (отсюда название «В. и.») функций:

$$f_j \to f_j + \varepsilon\eta_j,$$

где η_j – функции из допустимого класса, обращающиеся в нуль на границе D. Аналогом производной по направлению служит первая вариация функционала:

$$\delta F = \frac{d}{d\varepsilon} F\left[f_j + \varepsilon\eta_j\right]\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_j \int_D \frac{\delta F}{\delta f_j}\eta_j\, dx_1\dots dx_n,$$

где определяемая последней формулой вариационная, или функциональная, производная $\delta F/\delta f_j$ является аналогом градиента ∇f. Необходимое условие экстремума функционала:

$$\delta F/\delta f_j = 0,$$

следует из основной леммы В. и.: если для всех функций $\eta(x_1,\dots,x_n)$ из допустимого класса, обращающихся в нуль на границе D,

$$\int_D \varphi(x_1,\dots,x_n)\eta(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = 0,$$

то непрерывная функция $\varphi(x) = 0$

На практике функционал F задается в виде интеграла по области D от нек-рой комбинации L функций $f_1, \dots, f_m$ и их производных; в простейших случаях

$$F = \int_D L\left(f_i, \partial f_j/\partial x_i\right)dx_1\dots dx_n.$$

Вычисление функциональной производной приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа – системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial f_j} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial(\partial f_j/\partial x_i)} = 0, \quad j = 1,\dots,m,$$

с соответствующими граничными условиями.

Решения этой системы называются экстремалями функционала F. Экстремаль соответствует минимуму F при выполнении условия Лежандра [обобщающего требование неотрицательности квадратичной формы

$$\sum_{i,j} a_i a_j\, \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j,$$

гарантирующего минимум функции $f(x)$]. Согласно этому условию, всюду на экстремали должна быть неотрицательна квадратичная форма с коэффициентами $\partial^2 L/\partial\dot f_i \partial\dot f_j$ (в простейшем случае одномерной области D, когда $\dot f_j = df_j/dx$).

До сих пор шла речь о вариационных задачах, в к-рых допустимый функциональный аргумент подчинялся лишь граничным условиям. В более общей постановке задачи требуется найти экстремали функционала F с дополнительными условиями, налагаемыми на функциональные аргументы во всей области D их определения. Эти условия могут быть интегральными:

$$K = \int_D C\left(f_i, \partial f_j/\partial x_i\right)dx_1\dots dx_n = 0$$

или алгебраическими:

$$C\left(f_i, \partial f_j/\partial x_i\right) = 0.$$

В обоих случаях задача сводится к обычной введением множителей Лагранжа λ. В первом случае переходят к новому функционалу

$$\tilde F = F + \lambda K,$$

решают уравнения Эйлера–Лагранжа, а множитель λ находят из условия $K = 0$ на экстремали. Во втором случае вводят новый функционал

$$\tilde F = F + \int_D C\lambda(x)\, dx_1\dots dx_n$$

и неизвестную функцию $\lambda(x)$ находят из уравнений Эйлера–Лагранжа.

В. и. используют в различных областях физики. Фактически все законы, формулируемые обычно в локальном дифференциальном виде, можно сформулировать на вариационном языке. Фундаментальным примером является *наименьшего действия принцип* в классич. механике. Здесь роль переменной x играет время t, меняющееся в заданном интервале $[a, b]$, функциональными аргументами являются обобщенные координаты $q_j(t)$, а называемый действием функционал

$$S[q_j] = \int_a^b L(q_j, \dot q_j)\, dt$$

задается *Лагранжа функцией* L. Согласно принципу наименьшего действия, движение с заданными граничными условиями для $q_j(a)$ и $q_j(b)$ осуществляется по экстремали функционала S. В физике используют также другие вариационные принципы (см. *Вариационные принципы классической механики*).

Лит.: [1] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., т. 1, 3 изд., М.– Л., 1951; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.– Л., 1950; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979. *А. В. Смилга.*

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЦЕЛОМ – раздел современной математики и математической физики, изучающий глобальные свойства (свойства в целом) экстремалей различных функционалов. Каждая вариационная задача разбивается на следующие этапы: 1) поиск экстремалей,

2) описание геометрич. и аналитич. свойств отдельных экстремалей (как геометрич. объектов), 3) изучение взаимодействий между различными экстремалями, 4) связь между геометрией пространства, на к-ром определен данный функционал, и взаимным расположением экстремалей функционала в этом пространстве. В современном вариационном исчислении часто выделяют нульмерные, одномерные, двумерные и многомерные задачи, имея в виду число параметров, описывающих аргумент исследуемого функционала (функционал может быть определен на пространстве точек, кривых, поверхностей и т. д.).

1. Нульмерные вариационные задачи в целом.

1а. Классическая теория Морса. Здесь функционал – это скалярная функция $f(x)$, заданная на конечномерном пространстве, напр. на гладком многообразии M размерности n. В качестве M может выступать конфигурационное или фазовое пространство той или иной физич. системы, тогда функция f может быть потенциалом или полной энергией данной системы. Здесь экстремали – это *критические точки* функции f, то есть точки x, в к-рых первый дифференциал функции обращается в нуль: $df(x)=0$. Во многих физич. задачах критич. точки потенциала соответствуют положениям равновесия данной системы (напр. в задаче о колебании маятника). Критич. точки могут быть изолированными и неизолированными. Изолированные критич. точки могут быть невырожденными и вырожденными. Если функция f имеет лишь невырожденные критич. точки, она называется функцией Морса (морсовской функцией). Критич. точка (экстремаль) невырождена в том и только в том случае, когда матрица второго дифференциала (гессиан) d^2f невырождена в этой точке. Каждая невырожденная критич. точка характеризуется индексом λ. Индекс критич. точки – это число отрицательных собственных чисел у матрицы

$$d^2f(x)=\left\|\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j\right\|,$$

составленной из вторых частных производных функции f по переменным $x_1,\ldots,x_n$, задающим положение точки $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Критич. точки нулевого индекса соответствуют устойчивым положениям системы и задают локальные минимумы функции f. Остальные критич. точки (то есть когда $\lambda>0$) отвечают неустойчивым положениям системы. Точки максимально возможного индекса (то есть $\lambda=n$) являются точками локальных максимумов функции, а точки с промежуточными значениями индекса (то есть $0<\lambda<n$) являются седловыми. Оказывается, количество и тип критич. точек функции, заданной на многообразии M, в значительной мере определяют глобальную (топологическую) структуру этого многообразия. И наоборот, топологич. структура многообразия (напр. фазового пространства или пространства состояний физич. системы) накладывает серьезные ограничения на количество и тип экстремалей каждой функции Морса, областью определения к-рой является это многообразие (см. [1]).

Теорема. Любое гладкое компактное связное замкнутое многообразие M имеет гомотопич. тип клеточного комплекса, в к-ром каждой критич. точке x_λ индекса λ соответствует клетка размерности λ, где $\{x_\lambda\}$ – критич. точки нек-рой гладкой функции Морса на многообразии M.

В частности, имеется тесная связь между числом критич. (стационарных) точек функции $f(x)$ на гладком замкнутом многообразии M и топологич. инвариантами многообразия – группами гомологий, эйлеровой характеристикой (см. [2]). Пример такой связи – неравенства Морса. А именно, для любой гладкой функции, имеющей лишь невырожденные критич. точки на многообразии M, выполняются неравенства:

$$\mu_\lambda(f)\geqslant\beta_\lambda(f),$$

где μ_λ – число критич. точек индекса λ для функции f, а β_λ – ранг группы гомологий $H_\lambda(M)$ многообразия M (так наз. число Бетти в размерности λ). О различных современных обобщениях неравенств Морса, связанных с математич. физикой, см., в частности, [1], [3].

1б. Точки бифуркации функции и теория Люстерника–Шнирельмана.

Картина усложняется, если необходимо оценить число критич. точек для функции f, не являющейся морсовской. Напр., при деформации функции f невырожденные особенности могут сливаться друг с другом, образуя вырожденные особенности (вырожденные критич. точки). Такие взаимные слияния уменьшают число критич. точек и прежние неравенства Морса уже не выполняются. Полезным обобщением понятия критич. точки функции является понятие *бифуркации точки* функции f на пространстве (многообразии) M. В частности, такие стационарные состояния естественно возникают в небесной механике, в плоской задаче n тел (движение n материальных точек в одной плоскости, управляемое ньютоновским потенциалом согласно законам классич. механики) (см. [7]). Во многих конкретных примерах можно представлять себе точки бифуркации функции как результат слияния нескольких невырожденных особенностей (см., напр., [1]). Оказывается, существует топологич. инвариант многообразия M, называемый категорией Люстерника–Шнирельмана $\operatorname{cat}(M)$, оценивающий снизу число точек бифуркации любой функции f, заданной на данном многообразии M (см. [5]).

Категорией пространства M называется наименьшее число замкнутых подмножеств в M, стягиваемых по M в точку и образующих покрытие M (то есть объединение всех таких подмножеств покрывает все пространство).

Теорема. Пусть M – гладкое компактное связное многообразие без границы и f – любая гладкая функция на M. Тогда всегда $k\geqslant\operatorname{cat}(M)$, где k – число различных точек бифуркации функции f.

Теорема, в частности, оценивает снизу число различных критич. точек функции f (вообще говоря, вырожденных).

1в. Критические многообразия. Важным случаем вырожденных критич. точек являются «невырожденные критические многообразия». Это означает следующее: уравнение $\operatorname{grad} f=0$ задает набор гладких подмногообразий W_i в многообразии M; кроме того, дифференциал d^2f в любой точке подмногообразий W_i должен быть невырожден на векторном пространстве векторов, нормальных к W_i в M относительно нек-рой римановой (положительной) метрики. Индексом связного критич. многообразия W_i называется число λ отрицательных квадратов формы d^2f. Функции такого типа естественно возникают в случае, если на пространстве действует группа Ли, и функция инвариантна относительно преобразований группы. Для функций с невырожденными критич. подмногообразиями справедливы аналоги теорем, сформулированных выше для функций Морса (выполняются также аналоги неравенств Морса).

2. Одномерные вариационные задачи в целом. Естественный аналог теории Морса и Люстерника–Шнирельмана возникает на бесконечномерных гладких многообразиях M^∞. Одним из таких «многообразий» является, напр., пространство кусочно гладких путей Ω, идущих на конечномерном многообразии M от точки p до точки q. На «многообразии» M^∞ можно рассмотреть функцию $F(\gamma)$, где γ – пути, соединяющие точки p и q. Такие «функции» называются одномерными функционалами. С каждой точкой γ из пространства Ω можно связать нек-рое бесконечномерное векторное пространство $T_\gamma\Omega$, к-рое можно естественно представлять себе как «касательное пространство» к Ω в «точке» γ. Это пространство состоит из всех кусочно гладких векторных полей v вдоль пути γ, обращающихся в нуль в точках p и q. Поле $v(t)$ (где t – параметр вдоль кривой γ) в вариационном исчислении обычно обозначается через $\partial\gamma$. Тогда, копируя «конечномерное» определение производной по направлению от гладкой функции на конечномерном многообразии, можно дать определение вариационной производной $\partial F/\partial\gamma$. Путь γ_0 из Ω называется

критическим для функционала F, если $\partial F/\partial\gamma=0$ для любой вариации $\partial\gamma$ пути γ_0. При определенных предположениях о функционале F можно определить индекс λ критич. пути γ_0, опять копируя «конечномерное» определение и беря в качестве λ размерность максимального подпространства в пространстве $T_\gamma\Omega$, на к-ром гессиан ∂^2F отрицательно определен. Таким образом, «критич. точки» γ для функционала F находятся как решения дифференциального уравнения $\partial F/\partial\gamma=0$, называемого уравнением Эйлера–Лагранжа. Среди важнейших функционалов F, естественно возникающих в механике, математич. физике, следует отметить: действие пути γ, то есть

$$E(\gamma)=\int_0^1|d\gamma/dt|^2\,dt$$

и длина пути γ, то есть

$$L(\gamma)=\int_0^1|d\gamma/dt|\,dt.$$

Теорема. Путь γ_0 является критическим («критич. точкой») для функционала $E(\gamma)$ тогда и только тогда, когда γ_0 – это геодезическая (при этом параметром t вдоль геодезической служит длина дуги).

Так как при определении функционалов E и L предполагается наличие на многообразии римановой метрики, то геодезические могут быть также охарактеризованы как кривые локально минимальной длины. Экстремали (критические пути) для функционала длины L – это пути, получающиеся из геодезических $\gamma(t)$ гладкими заменами параметра t. Векторное поле $v(t)$ вдоль геодезической γ_0 называется якобиевым, если оно удовлетворяет дифференциальному уравнению Якоби:

$$\left(\nabla_{\dot\gamma_0}\right)^2 v+R(\dot\gamma_0,v)\dot\gamma_0=0,$$

где ∇ – оператор ковариантного дифференцирования, R – оператор, соответствующий тензору кривизны Римана. Две точки на геодезической γ_0 называются сопряженными, если существует ненулевое якобиево поле вдоль γ_0, обращающееся в нуль в обеих этих точках.

Теорема. Индекс квадратичной формы ∂^2E в критич. точке γ_0 равен числу точек на геодезической γ_0, сопряженных вдоль γ_0 начальной точке $p=\gamma_0(0)$. При этом каждая сопряженная точка учитывается столько раз, какова ее кратность.

Поступая по аналогии с конечномерным случаем, рассмотрим функционал действия $E(\gamma)$ на пространстве Ω. Этот функционал будет «функцией Морса», если все его критич. точки (то есть геодезические из точки p в точку q) будут невырождены. Это будет в том и только в том случае, когда точки p и q не сопряжены друг другу (вдоль любой геодезической, соединяющей p и q).

Теорема. Пусть M – компактное многообразие, p и q – пара точек на M, не сопряженных ни вдоль какой геодезической длины, не превосходящей a. Тогда множество $\Omega^a=(E\leqslant a^2)$ гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу, в к-ром каждая клетка размерности λ взаимно однозначно соответствует геодезической индекса λ (и длины, не превосходящей a).

Если теперь «устремить a в бесконечность», то в результате получим, что пространство всех непрерывных путей на M, соединяющих p с q, имеет гомотопич. тип счетного клеточного комплекса, в к-ром каждой геодезической из p в q с индексом λ соответствует в точности одна клетка размерности λ.

Изложенная вариационная задача называется «задачей с закрепленными концами». Важное значение имеют «замкнутые экстремумы», возникающие в периодич. задаче В. и. в ц. Рассматривается пространство $\Pi(M)$ всех замкнутых гладких кривых на многообразии M. Анализ периодич. задачи сложнее, чем изучение геодезических с закрепленными концами. Напр., задача о нахождении количества простых (то есть некратных) замкнутых геодезических далеко не тривиальна (см. [1]). Каждая точка пространства $\Pi(M)$ есть гладкое отображение окружности S^1 в M. Множество линейно связных компонент пространства $\Pi(M)$ – это, по определению, множество «свободных» гомотопич. классов отображений $S^1\to M$.

Теорема. Если M – компактное римановo гладкое многообразие отрицательной кривизны, то в каждом свободном гомотопич. классе замкнутых путей существует единственная замкнутая геодезическая.

Одномерная задача общего типа изучает величину (функционал)

$$S(\gamma)=\int_p^q L(x(t),\dot x(t),t)\,dt$$

и ее экстремали. Функция L – лагранжиан. Экстремали γ_0 – это решения уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\left(\partial L/\partial\dot x^i\right)'=\partial L/\partial x^i.$$

Энергия – это $\dot x^i\partial L/\partial\dot x^i-L$; импульс – это $p_i=\partial L/\partial\dot x^i$; сила – это $f_i=\partial L/\partial x^i$.

Пример 1. Траектории движения частицы массы m в потенциальном силовом поле $f=-\operatorname{grad}U$ – это экстремали функционала

$$S=\int\left(\frac{m}{2}\sum(\dot x^i)^2-U(x)\right)dx$$

(принцип наименьшего действия).

Пример 2. Движение релятивистской (свободной) частицы ненулевой массы $m>0$ определяется в пространстве Минковского с координатами $(x^0=ct,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ одним из двух функционалов (действий) на времениподобных кривых:

$$S_1=\frac{mc}{2}\int\langle\dot x,\dot x\rangle\,d\tau,$$

где

$$\langle\dot x,\dot x\rangle=(x^0)^2-\sum_{\alpha=1}^3(\dot x^\alpha)^2;$$

$$S_2=-mc\int\langle\dot x,\dot x\rangle^{1/2}\,d\tau.$$

Мировые линии массивных частиц в пространстве Минковского – это экстремали функционалов S_1 и S_2 (релятивистский принцип наименьшего действия). Основным постулатом общей теории относительности является тезис (или гипотеза) Эйнштейна, согласно к-рому гравитационное поле – это метрика g_{ij} в 4-мерном пространстве-времени [в каждой точке к-рого метрика имеет тип $(+---)$]. При отсутствии других сил пробная частица в гравитационном поле движется по времениподобным геодезическим, определяемым функционалом S_1. Частица нулевой массы движется по изотропным геодезическим.

Лагранжиан L называется невырожденным, если $\det(\partial^2L/\partial\dot x^i\partial\dot x^j)\neq0$, и называется сильно невырожденным, если уравнения $p_i=\partial L(x,\dot x)/\partial\dot x^i$ можно взаимно однозначно и гладко решить в виде $\dot x^i=v^i(x,p)$ для всех $x,\dot x$. Гамильтонианом $H(x,p)$ (для сильно невырожденных лагранжианов) называется энергия E, выраженная через x и p.

Теорема. Пусть $L(x,\dot x)$ – сильно невырожденный лагранжиан и $H(x,p)$ – гамильтониан, где $p=\partial L(x,\dot x)/\partial\dot x$ и $\dot x=v(x,p)$. Уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\partial L/\partial x-\frac{d}{dt}(\partial L/\partial\dot x)=0$$

эквивалентны уравнениям Гамильтона, в к-рых x и p считаются независимыми переменными:

$$\dot p=-\partial H/\partial x,\quad \dot x=-\partial H/\partial p.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала

$$\int [p\dot{x} - H(x,p)]dt$$

в фазовом пространстве переменных (x, p) совпадают с уравнениями Гамильтона.

Вариационное исчисление для указанных функционалов составляет важную часть гамильтоновой механики и симплектич. геометрии (см. [1], [8], [11]).

3. Многомерные вариационные задачи в целом. Здесь рассматриваются функционалы вида

$$I[f] = \int \dots \int L\left(x^k, f^i(x^k), f^{i_k}_x(x^p)\right) dx^1 \dots dx^n,$$

где параметры $x^1,\dots,x^n$ меняются в нек-рой области D, f^i – функции от этих параметров и $f^{i_k}_x$ – частные производные. Общие уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид:

$$\partial L/\partial f^i - \sum_{\alpha=1}^{n} \partial/\partial x^\alpha \left(\partial L/\partial f^i_x \alpha\right) = 0.$$

Функция является стационарной (критической) для функционала I тогда и только тогда, когда она удовлетворяет этой системе уравнений.

Пример 1. Уравнения электромагнитного поля. Уравнения Максвелла – это уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала

$$S = S_f + S_m + S_{mf}.$$

Здесь

$$S_m = -\sum mc \int_a^b dl,$$

где сумма берется по всем частицам, движущимся в поле, m – масса частицы, c – скорость света, интеграл берется вдоль мировой линии в пространстве Минковского между двумя фиксированными событиями, l – длина дуги. Слагаемое S_{mf} – это та часть действия, к-рая обусловлена взаимодействием между частицей и полем, то есть

$$S_{mf} = -\sum_{\langle j \rangle} \frac{e_j}{c} \int A_k^{\langle j \rangle} dx^k,$$

где сумма берется по всем частицам j, e_j – заряды, интеграл берется вдоль мировой линии частицы; свойства поля характеризуются 4-вектором $\{A_i\}$, называемым 4-потенциалом. Слагаемое S_f – это часть действия, зависящая лишь от свойств самого поля.

Пример 2. Уравнения гравитационного поля, то есть уравнения Эйнштейна, можно получить как уравнения Эйлера–Лагранжа при варьировании функционала

$$S_g = \int R\, d\Omega,$$

где R – это скалярная кривизна 4-мерного многообразия M^4, снабженного псевдоримановой метрикой типа $(+---)$, а $d\Omega$ – стандартная 4-форма объема.

Пример 3. Уравнение минимальной поверхности (подмногообразия) в объемлющем римановом пространстве – это уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала площади или объема (см. *Минимальная поверхность*).

Пример 4. Гармонические поверхности (отображения) – это экстремали многомерного функционала Дирихле.

Элементы общей теории многомерного В. и. в ц. и соответствующие примеры см. в [1], [6], [11].

Лит.: [1] Дубровин Б. В., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, т. 1, 2 изд., М., 1986, т. 2, М., 1984; [2] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [3] Теория солитонов, М., 1979; [4] Зейферт Т., Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом, пер. с англ., М., 1947; [5] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, Труды научно-исследовательского ин-та математики и механики, М., 1930; [6] Фоменко А. Т., Вариационные методы в топологии, М., 1982; [7] Смейл С., «Успехи математич. наук», 1972, т. 27, в. 2, с. 77–133; [8] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [9] Фоменко А. Т., Топологические вариационные задачи, М., 1984; [10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 5 изд., М., 1967; [11] Фоменко А. Т., Симплектическая топология. Методы и приложения, М., 1988; [12] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б., Курс гомотопической топологии, М., 1989. *А. Т. Фоменко.*

ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО – неравенство, возникшее как обобщение уравнений Эйлера из задач минимизации выпуклых функционалов. Наиболее распространены следующие постановки В. н.:

найти $u \in K$: $\langle Au,\ v-u\rangle \geqslant 0$ для всех $v \in K$, (1)

найти $u \in V$: $-Au \in dg(u)$. (2)

Здесь V – рефлексивное банахово пространство, V' – его двойственное, K – выпуклое замкнутое множество в V, оператор $A: V \to V'$, $\partial g: V \to 2^{V'}$ – субдифференциал выпуклого полунепрерывного снизу функционала $g: V \to \mathbb{R}$. Если существует выпуклый функционал $I: V \to \mathbb{R}$, такой, что A совпадает с его производной по Гато, то (1) и (2) эквивалентны задачам о

$$\min_{v \in K} I(v) \quad \text{и} \quad \min_{v \in V} (I(v) + g(v))$$

соответственно.

Разрешимость В. н. установлена для широкого класса операторов A (не обязательно потенциальных) при произвольных K, g. Если A связан с дифференциальным эллиптич. оператором L', а $V = V(D)$ – подходящее пространство Соболева функций, определенных в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, то В. н. можно трактовать как слабую постановку краевой задачи в D для L. Вид краевой задачи зависит от выбора K или g. Для приложений важны В. н. с множествами K вида

$$K = \left\{ v \in [V(D)]^N \,|\, v(x) \in K_1(x) \text{ для почти всех } x \in E \right\} \quad (3)$$

(задачи с препятствием на E)

$$K = \left\{ v \in V(D) : \nabla v(x) \in K_2(x) \text{ для почти всех } x \in E \right\} \quad (4)$$

(задачи с ограничениями на градиент), где $K_1(x)$ $[K_2(x)]$ – выпуклые замкнутые множества в $\mathbb{R}^N$ $[\mathbb{R}^n]$, $E \subseteq \overline{D}$.

При нек-рых K В. н. эквивалентны задачам с односторонними условиями на E, к-рые можно записать в виде

$$\min\{B_1 u(x),\ B_2 u(x)\} = 0, \quad x \in E.$$

В *Синьорини задаче* односторонние условия ставятся на границе области ∂D.

В. н. имеют многочисленные приложения в физике, механике. Большой интерес к В. н. вызван тем, что разрешимость в обобщенном смысле задачи, допускающей постановку в виде В. н., зачастую легко получить из общих теорем разрешимости В. н. Однако если существование обобщенного решения обусловлено лишь свойствами оператора A, то его дифференциальные свойства зависят также от вида K или g. Для В. н. (1) с K вида (3) или (4) имеют место пороги гладкости: решение u обладает гладкостью более высокой, чем класс $V(D)$ в целом, но не выше нек-рого порога. Наличие порогов гладкости, неприменимость стандартных методов, а также необходимость выяснения максимально возможной регулярности решения при численном анализе В. н. и исследовании неизвестной границы создают особый интерес к проблемам регулярности решений В. н. В этом направлении получено много результатов, наиболее полно изучены *препятствия задачи*.

Кроме эллиптич. В. н. [вида (1), (2)] рассматривают эволюционные (параболические) В. н. Многие результаты по разрешимости и регулярности для эллиптич. В. н. распространяются на параболич. случай. Обобщения В. н. на случай, когда K зависит от решения, приводят к *квазивариационным неравенствам*.

Лит.: [1] Лионс Ж. Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [2] Дюво Г., Лионс Ж. Л., Неравенства в механике и физике, пер. с франц., М., 1980; [3] Киндерлерер Д., Стампаккья Г., Введение в вариационные неравенства и их приложения, пер. с англ., М., 1983; [4] Фридман А., Вариационные принципы и задачи со свободными границами, пер. с англ., М., 1990; [5] Уральцева Н. Н., «Успехи математич. наук», 1987, т. 42, в. 6, с. 151–74. *Т. Н. Рожковская.*

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ в теории рассеяния – вариационные принципы для определения амплитуды рассеяния и фаз рассеяния. Уравнение Шредингера:

$$(H-E)\psi \equiv (-\Delta + V(x) - E)\psi(x,k) = 0, \quad k^2 = E, \quad k, x \in \mathbb{R}^3,$$

рассматриваемое на классе функций с асимптотич. поведением:

$$\psi(x,k) \sim \exp\{i(x,k)\} + f(\hat{x},\hat{k},E)\exp\left\{i\sqrt{E}|x|\right\}|x|^{-1},$$

является уравнением Эйлера для функционала

$$I(k_1,k_2) - 4\pi f(\hat{k}_1,\hat{k}_2,E),$$

где

$$I(k_1,k_2) = \int \overline{\psi}_1(x,k_1)(H-E)\psi_2(x,k_2)\,dx.$$

Стационарное значение функционала

$$f(\hat{k}_1,\hat{k}_2,E) - \frac{1}{4\pi} I(k_1,k_2)$$

совпадает с истинной амплитудой рассеяния.

Аналогично, радиальное уравнение Шредингера:

$$\left(H_l - k^2\right)\psi_l \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2\right)\psi_l(r,k) = 0, \quad r,k \in \mathbb{R}^1,$$

рассматриваемое на классе функций с условиями

$$\psi_l(0,k) = 0, \quad \psi_l(r,k) \sim \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l\right), \quad r \to \infty,$$

является уравнением Эйлера для функционала

$$I_l - k\eta_l, \quad I_l \equiv \int_0^\infty \psi_l\left(H_l - k^2\right)\psi_l\,dr,$$

а стационарное значение $I_l - k\eta_l$ совпадает с $k\delta_l$, где δ_l – точный фазовый сдвиг. Сформулированные В. п. называются вариационными принципами Хюльтена – Коона.

Лит.: [1] Мотт Н., Месси Х., Теория атомных столкновений, пер. с англ., 3 изд., М., 1969.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ – основные, исходные положения аналитической механики, математически выраженные в форме вариационных соотношений, из которых как логические следствия вытекают дифференциальные уравнения движения, а также все положения и законы механики. В В. п. к. м. действительные движения материальной системы, происходящие под действием заданных сил, сравниваются с кинематически возможными движениями, допускаемыми наложенными на систему связями и удовлетворяющими определенным условиям. В большинстве случаев признаком, по к-рому действительное движение выделяется из рассматриваемого класса кинематически возможных движений, служит условие экстремальности (стационарности) нек-рой скалярной функции или функционала, обеспечивающее инвариантность описания.

В. п. к. м. отличаются один от другого как по форме и способам варьирования, так и по общности, но каждый из них, в рамках его приложимости, образует единую основу и как бы синтезирует всю механику соответствующих материальных систем. Иными словами, тот или иной из В. п. к. м. потенциально заключает в себе все содержание этой области науки и объединяет все ее положения в единой формулировке.

Классич. механика основывается на законах Ньютона, установленных для свободных материальных точек, и аксиомах связей. Справедливость В. п. к. м. доказывается, исходя из этих законов и аксиом. В свою очередь, любой из В. п. к. м. можно принять за аксиому и из нее логически вывести законы механики.

В. п. к. м. по форме подразделяются на дифференциальные и интегральные принципы. К дифференциальным принципам, характеризующим свойства движения для любого данного момента времени, относятся: принцип возможных перемещений, принципы Д'Аламбера – Лагранжа, Гаусса, Герца, Четаева и Журдена. Интегральными принципами, характеризующими свойства движения на любых конечных промежутках времени, являются принципы наименьшего действия в формах Гамильтона – Остроградского, Лагранжа, Якоби и нек-рые другие.

Первый из В. п. к. м.– принцип возможных (виртуальных) перемещений, применялся еще Г. Галилеем (G. Galilei, 1665). Первым, кто понял общность этого принципа и его полезность для решения задач статики, был И. Бернулли (J. Bernoulli, 1717). Принцип получил обоснование, существенное развитие и применение в «Аналитической механике» Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1788), считавшего его основным для всей механики. Этот принцип позволяет находить положения равновесия системы материальных точек, то есть такие положения $r_i = r_i(t_0)$, в к-рых система будет оставаться все время, если она помещена в эти положения с нулевыми начальными скоростями $v_i(t_0) = 0$ при условии, что $r_i(t_0)$ – возможные положения и $v_i = 0$ – кинематически возможные скорости при любом t. Здесь и далее r_i – радиус-векторы точек системы относительно начала O инерциальной системы координат $Oxyz$, причем $v_i = \dot{r}_i$; δr_i – возможные (виртуальные) перемещения, допускаемые в данный момент времени наложенными на систему связями, $F_i(t, r_j, \dot{r}_j) \in C^1$ – заданные активные силы, R_i – реакции связей. Связи предполагаются идеальными и удерживающими, то есть

$$\sum_i R_i \delta r_i = 0.$$

См. также *Возможных перемещений принцип.*

Для вывода уравнений динамики методами статики применяется так наз. принцип Д'Аламбера: если к действующим на точки материальной системы заданным (активным) силам и силам реакций связей присоединить силы инерции $-m_i w_i$, то такая система сил будет находиться в равновесии. Здесь m_i – масса i-й точки, $w_i = \ddot{r}_i$ – ее ускорение.

Обобщение принципа Д'Аламбера и принципа возможных перемещений было получено Ж. Лагранжем (1788).

Общие теоремы динамики системы характеризуют нек-рые свойства движения, но, в отличие от В. п. к. м., ни одна из них в общем случае не в состоянии заменить всю систему дифференциальных уравнений движения и вполне охарактеризовать движение системы.

Принцип Д'Аламбера – Лагранжа является одним из наиболее общих В. п. к. м., справедливым как для голономных, так и для неголономных систем. Все другие В. п. к. м. представляют собой или иные формулировки этого принципа или следствия из него. Принцип Д'Аламбера – Лагранжа не связан, однако, с понятием экстремума какой-либо функции. В нем фигурирует бесконечно малая величина – сумма элементарных работ заданных сил и сил инерции на бесконечно малом возможном перемещении из заданной конфигурации, не представляющая собой вариации какой-либо функции,

$$\sum_i (F_i - m_i w_i)\delta r_i = 0. \tag{1}$$

См. также *Д'Аламбера – Лагранжа принцип.*

К. Гаусс (C. Gauss, 1829) предложил новый вариационный принцип, представляющий собой модификацию принципа Д'Аламбера–Лагранжа (Гаусса принцип). Среди всех кинематически возможных движений рассматриваются мыслимые по Гауссу движения, удовлетворяющие условиям наложенных на систему связей и условиям постоянства r_i и v_i для рассматриваемого момента времени t. В момент $t + dt$:

$$\delta r_i = \frac{1}{2}\Delta w_i (dt)^2, \quad \Delta w = \frac{\delta v_i}{dt} - \frac{dv_i}{dt},$$

где dv_i и δv_i обозначают изменения скоростей за промежуток времени dt для действительного и какого-либо мыслимого движений; при этом уравнение (1) приводится к виду

$$\Delta Z = 0, \quad Z = \frac{1}{2}\sum_i \frac{m_i}{2}\left(w_i - \frac{F_i}{m_i}\right)^2, \tag{2}$$

причем $\Delta^2 Z > 0$.

Из принципа Гаусса при выражении Z через независимые ускорения системы получаются *Аппеля уравнения*. Принцип Гаусса представляет собой физич. аналогию предложенному К. Гауссом методу наименьших квадратов теории ошибок. Принцип Гаусса эквивалентен принципу Д'Аламбера – Лагранжа, однако при рассмотрении нелинейных дифференциальных связей вида

$$\varphi_s(t, r_i, \dot{r}_i) = 0$$

эти принципы по П. Аппелю (P. Appell) и Э. Делассю (E. Delassus, 1911–13) оказались несовместимыми. Этот вопрос был разрешен Н. Г. Четаевым (1932–33), предложившим определять возможные перемещения для нелинейных связей условиями вида

$$\sum_i \operatorname{grad} r_i \varphi_s \cdot \delta r_i = 0.$$

См. также *Гаусса принцип* наименьшего принуждения, *Гаусса принцип* наименьших реакций.

К принципу Гаусса тесно примыкает принцип прямейшего пути (принцип Герца), постулированный Г. Герцем (G. Hertz, 1894) в качестве основного закона разработанной им механики, в к-рой, в отличие от механики Ньютона, вместо понятия силы введены представления о скрытых связях, скрытых массах и скрытых движениях. Принцип Герца эквивалентен принципу Гаусса для систем, стесненных стационарными связями и не подверженных действию активных сил (см. *Герца принцип* прямейшего пути).

Н. Г. Четаев (1941) предложил видоизменение принципа Гаусса (см. *Четаева принцип* максимума работы).

Изложенные принципы по способам варьирования подразделяются на две группы: в принципах возможных перемещений и Д'Аламбера – Лагранжа варьируется в нек-рый момент времени положение r_i системы, а в принципах Гаусса, Герца и Четаева варьируются ускорения $\ddot{r}_i$ системы при постоянных r_i и $\dot{r}_i$.

Промежуточное место между этими двумя группами занимает принцип Журдена, в к-ром в момент t варьируются скорости $\dot{r}_i$ при постоянных r_i. В момент $t+dt$ возможные перемещения $\delta\dot{r}_i = \delta\ddot{r}_i dt$, и уравнение (1) принимает вид:

$$\sum_i (F_i - m_i w_i) \cdot \delta\dot{r}_i = 0.$$

В интегральных В. п. к. м. сравнение действительного и кинематически возможных движений производится для конечных промежутков времени. Именно, сравниваются значения нек-рых определенных интегралов (называемых *действием*), вычисляемых для действительного и кинематически возможных движений, удовлетворяющих определенным условиям, между нек-рыми двумя конечными положениями системы. Интегральные В. п. к. м. менее общи по сравнению с дифференциальными принципами и применимы главным образом к голономным системам, находящимся под действием потенциальных сил. Наиболее общим из них является принцип, установленный У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1834–35) для случая стационарных голономных связей и обобщенный М. В. Остроградским (1848) на нестационарные геометрич. связи (см. *Гамильтона–Остроградского принцип* стационарного действия).

Если уравнения геометрич. связей представить в виде

$$r_i = r_i(t, q_1, \ldots, q_n), \quad n = 3N - k,$$

где k – число связей, и ввести *Лагранжа функцию*

$$L(t, q_i, \dot{q}_i) = T + U,$$

то действие

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt.$$

При этом в расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве $(t, q_1, \ldots, q_n)$ равенство

$$\delta S = 0 \qquad (3)$$

соответствует обычной (непараметрической) задаче вариационного исчисления при закрепленных концах. В $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве с координатами t, q_i, $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ равенство (3) соответствует вариационной задаче со свободными концами (t_0, t_1 и q_i – фиксированы, p_i – свободны), причем

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt,$$

где

$$H(t, q_i, p_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

– *Гамильтона функция*.

Из уравнения (3) выводятся *Лагранжа уравнения*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и канонич. *Гамильтона уравнения*:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Для решения основной задачи динамики достаточно знания функции действия

$$v(t, q_i, q_{i0}) = \int_{t_0}^{t} L\, dt. \qquad (5)$$

Однако для определения функции действия по формуле (5) необходимо знание закона движения. Чтобы обойти эту трудность, У. Гамильтон нашел дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial v}{\partial q_i}\right) = 0, \qquad (6)$$

к-рому удовлетворяет функция действия.

К. Якоби (C. Jacobi, 1837) показал, что если известен полный интеграл $v(t, q_i, \alpha_i)$ уравнения (6), зависящий от n произвольных постоянных α_i, из к-рых ни одна не является аддитивной, то общее решение уравнений (4) дается равенствами:

$$p_i = \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial v}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где β_i – произвольные постоянные.

Для систем, стесненных стационарными связями и находящихся под действием потенциальных сил, не зависящих явно от времени, существует интеграл энергии

$$E = T - U = h. \qquad (7)$$

Его существование позволяет ограничить множество сравниваемых кинематически возможных движений, переводящих систему из положения P_0 в положение P_1, движениями, при к-рых полная механич. энергия E имеет одно и то же фиксированное значение h. В этом случае интеграл (7) можно рассматривать как неголономное условие и искать принцип механики в виде условного вариационного принципа. Эту задачу разрешил Ж. Лагранж (см. *Лагранжа принцип* стационарного действия).

Для рассматриваемых систем исключением времени t с помощью интеграла энергии (5) К. Якоби (1837) получил новый В. п. к. м. (см. *Якоби принцип* стационарного действия).

Уравнения Лагранжа или уравнения экстремалей вариационных принципов Гамильтона – Остроградского, Лагранжа и Якоби являются необходимыми условиями экстремума соответствующего интеграла, или действия по Гамильтону, Лагранжу, Якоби. В случаях, когда выполняются достаточные условия минимума, эти интегралы в действительных движениях принимают минимальные значения. Вследствие этого интегральные В. п. к. м. называют также принципами наименьшего действия.

Использование интегральных В. п. к. м. естественным образом приводит к понятию обобщенных решений и расширению классов функциональных пространств, в к-рых разыскиваются решения задач математич. физики.

В. п. к. м. оказались применимыми не только к дискретным материальным системам, но и к системам с распределенными параметрами, к сплошным средам; они играют

важную роль в теории поля и в математич. физике. С В. п. к. м. тесно связаны оптико-механич. аналогия, теория канонич. преобразований, теория групп Ли и законы сохранения. В. п. к. м. обладают большой эвристической ценностью, они распространены и на другие области физики, в частности на теорию относительности и на квантовую и волновую механику, где важную роль играют принципы наименьшего действия и связанные с ними *лагранжев формализм* и *гамильтонов формализм*.

Лит.: [1] **Вариационные принципы механики**, сб. статей, М., 1959; [2] Полак Л. С., Вариационные принципы механики, М., 1960; [3] Ланцош К., Вариационные принципы механики, пер. с англ., М., 1965; [4] Новоселов В. С., Вариационные методы в механике, Л., 1966; [5] Парс Л. А., Аналитическая динамика, пер. с англ., М., 1971; [6] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1971. *В. В. Румянцев.*

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД для конформных отображений – совокупность алгоритмов, способов и приемов исследования свойств плоских *конформных отображений*, которые проявляются в сравнении со свойствами близких отображений.

Основу В. м. образуют вариационные формулы двух типов: граничные и внутренние, качественно различающиеся свойствами множеств, на к-рых производится оценка остаточного члена. Пусть в нек-рой области D заданы голоморфная *однолистная функция* $f(z)$ и зависящие от действительного параметра $t\in[0,\ T]$, $T>0$, семейство функций $F(z,\ t)$, голоморфных и однолистных в D при каждом $t\in[0,\ T]$, причем $F(z,\ 0)=f(z)$. Вариацией n-го порядка функции f (по семейству $F(z,\ t)$) называется коэффициент $q_n(z)$ при t^n в разложении $F(z,\ t)-f(z)$ по степеням параметра t, при условии, что остаточный член

$$\Phi_n(z,\ t)=F(z,\ t)-f(z)-q_1(z)t-\ldots-q_n(z)t^n$$

имеет порядок малости более высокий, чем t^n, равномерно относительно z на границе области D (случай граничных вариаций) или на любом замкнутом ограниченном множестве из D (случай внутренних вариаций). Формула

$$F(z,\ t)=f(z)+q_1(z)t+\ldots+q_n(z)t^n+\Phi_n(z,\ t)$$

называется соответственно граничной, или внутренней, вариационной формулой для $f(z)$. Сумма

$$f(z)+q_1(z)t+\ldots+q_n(z)t^n$$

дает приближенное отображение области D на область $F(D,\ t)$.

Получение вариационных формул в нек-ром заданном классе однолистных функций нередко (поскольку семейство таких функций нелинейно) составляет непростую самостоятельную задачу. Для односвязных областей многие вариационные формулы можно вывести, пользуясь следующим результатом (см. [8]). Пусть $D_1\ni 0$ – односвязная конечная область с аналитич. границей. Пусть семейство областей $D_1(t)\ni 0$, $t\in[0,\ T]$, $D_1(0)=D_1$, с жордановыми границами

$$\Gamma_1(t)=\{z_1\in\mathbb{C}\,|\,z_1=\Omega(\lambda,t),\ 0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi\},\quad \Omega(0,t)=\Omega(2\pi,t),$$

где $\Omega(\lambda,\ t)$ равномерно относительно λ дифференцируема по t при $t=0$, параметризуется однолистным отображением $F(z_1,\ t)$, $F(0,\ t)=0$, $F'_{z_1}(0,\ t)>0$ области $D_1(t)$ на круг $D_2=\{z_2\in\mathbb{C}\,||z_2|<1\}$, а $\Phi(z_2,\ t)$ – обратная к $F(z_1,\ t)$ функция при фиксированном t. Тогда

$$F(z_1,t)=F(z_1,0)-tK(F(z_1,0))+\gamma_1(z_1,t),$$
$$\Phi(z_2,t)=\Phi(z_2,0)+t\Phi'_{z_2}(z_2,0)K(z_2)+\gamma_2(z_2,t),$$

где

$$K(z)=\lim_{r\to 1-0}\frac{z}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\partial\ln|F(\Omega(\lambda,t),0)|}{\partial t}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{\partial\zeta}{\zeta}$$

и $\gamma_k(z_k,\ t)/t$ равномерно внутри D_k, $k=1,\ 2$, стремится к нулю при $t\to 0$.

В простейшем случае отображения звездной (относительно точки $z_1=0$) области $D_1(t)$ с границей

$$z_1(t)=[1-t\delta(\lambda)]e^{i\lambda},\ \ 0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi,$$

близкой к окружности $|z_1|=1$ (то есть при достаточно малых $t\delta(\lambda)$), на круг D_2 имеем внутреннюю вариационную формулу

$$z_2=z_1+t\frac{z_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z_1}{e^{i\lambda}-z_1}\delta(\lambda)\,d\lambda+\Phi_1(z_1,t)$$

(превращающуюся в граничную при дополнительных предположениях о $\delta(\lambda)$, см. [5]).

Впервые граничные вариации 1-го порядка для однолистных функций найдены и применены Ж. Адамаром [1] и М. А. Лаврентьевым [2] (см. также [3]). В. м. широко применяется в исследованиях экстремальных задач теории конформных отображений, во-первых, к теоремам существования конформных отображений заданной многосвязной области на одну из канонич. областей (напр. на плоскость с прямолинейными параллельными разрезами, на плоскость с разрезами по дугам концентрических окружностей, см. [4]) и, во-вторых, к нек-рому функционально-дифференциальному уравнению для экстремальной функции или к квадратичному дифференциалу данной экстремальной задачи (см. [6], [7]). Нек-рые постоянные, входящие в уравнение для экстремальной функции, обычно зависят от значения этой функции и ее производных в фиксированных точках, что существенно затрудняет доведение решения до конца. В ряде конкретных задач указанные постоянные удается определить, применяя *параметрический метод, симметризации метод, площадей метод* в сочетании с простейшими вариационными формулами для функций, удовлетворяющих необходимому условию экстремальности.

В. м. для конформных отображений нашли применения в исследованиях задач электростатики, теории фильтрации, в том числе задач о перемещении контуров нефтеносности, в теории струйных течений, в математич. теории горения и т. д.

Лит.: [1] **Hadamard J.**, Leçons sur calcul des variations, P., 1910; [2] Лаврентьев М. А., «Математич. сб.», 1938, т. 4, в. 3, с. 391–458; [3] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, М.–Л., т. I, ч. 2, 1935; [4] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, с. 210–226; [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М.–Л., 1951; [6] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976; [7] Кузьмина Г. В., Модули семейства кривых и квадратичные дифференциалы, «Труды Математич. ин-та АН СССР», Л., 1980; [8] Куфарев П. П., «Математич. сб.», 1943, т. 13, № 1, с. 87–118. *И. А. Александров.*

ВАРИАЦИЯ – термин, введенный в математику Ж. Лагранжем [1] для обозначения малого смещения независимого переменного или функционала. Метод В.– метод исследования экстремальной задачи, основанный на малых смещениях аргумента и изучении того, как в зависимости от них изменяются функционалы. Этот метод является одним из основных методов при решении задач на экстремум. В механике понятие В. лежит в основе разработки вариационных принципов (см. *Вариационные принципы классической механики*).

Лит.: [1] Lagrange J., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, Turin, 1762.

ВАРИНЬОНА ТЕОРЕМА: если система скользящих векторов $\boldsymbol{F}_\nu$ приводится к одной равнодействующей $\boldsymbol{F}$, то момент равнодействующей относительно нек-рой точки O (или оси l) равен сумме моментов векторов системы относительно той же точки O (или оси l):

$$\mathrm{mom}_O\,\boldsymbol{F}=\sum_\nu\mathrm{mom}_O\,\boldsymbol{F}_\nu,$$
$$\mathrm{mom}_l\,\boldsymbol{F}=\sum_\nu\mathrm{mom}_l\,\boldsymbol{F}_\nu.$$

В. т. установлена П. Вариньоном (P. Varignon, 1687) для случая сходящейся системы сил.

ВАТСОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – преобразование выражения для амплитуды рассеяния:

$$A(k,\cos\theta)=-ik^{-1}\sum_{l=0}\left(l+\frac{1}{2}\right)(-1)^l(S_l(k)-1)P_l(-\cos\theta),$$
$$\theta=(\hat{k},\hat{k'}),$$

к интегралу в плоскости комплексного углового момента $\lambda = l + 1/2$

$$A = \frac{1}{2k}\int_C d\lambda\lambda[S(\lambda,k)-1]P_{\lambda-1/2}(-\cos\theta)\sec\pi\lambda,$$

где $P_{\lambda-1/2}$ – аналитич. интерполяция многочленов Лежандра, а $S(\lambda, k)$ – аналитич. интерполяция парциальных матриц рассеяния $S_l(k)$ в плоскость комплексного углового момента. Впервые В. п. использовано Дж. Ватсоном (G. Watson, 1918) в электромагнитной теории рассеяния. В квантовой теории рассеяния В. п. впервые применено Т. Редже (T. Regge, 1959). В. п. допустимо, в частности, для амплитуд рассеяния на аналитич. экспоненциально убывающих потенциалах.

Лит.: [1] Ньютон Р., Теория рассеяния волн и частиц, пер. с англ., М., 1969.

Ю. Б. Мельников.

ВЕБЕРА УРАВНЕНИЕ – линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)y = 0, \quad \nu = \text{const}; \qquad (*)$$

точка $x = \infty$ является для него сильно особой точкой. Уравнение этого вида впервые было рассмотрено Г. Вебером [1] в теории потенциала в связи с параболич. цилиндром; оно возникает при разделении переменных в уравнении Лапласа в параболич. координатах. Замена $y = u\exp(-x^2/4)$ приводит В. у. к виду

$$u'' - xu' + \nu u = 0.$$

Решения уравнения (*) называются функциями параболического цилиндра, или функциями Вебера–Эрмита. В частности, если ν – целое неотрицательное число, то уравнению (*) удовлетворяет функция

$$y = \exp\left(-x^2/4\right)H_\nu(x),$$

где $H_\nu(x)$ – *Эрмита многочлен.*

Лит.: [1] Weber H., «Math. Ann.», 1869, Bd 1, S. 1–36; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [4] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968.

Н. Х. Розов.

ВЕБЕРА ФУНКЦИИ – см. *Неймана функции, Цилиндрические функции.*

ВЕБЕРА–ЭРМИТА ФУНКЦИИ – см. *Вебера уравнение.*

ВЕЙЕРШТРАССА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА эллиптического интеграла – см. *Эллиптический интеграл.*

ВЕЙЕРШТРАССА ТЕОРЕМА для целых функций – см. *Аналитическая функция.*

ВЕЙЕРШТРАССА ТЕОРЕМА для эллиптических функций – см. *Эллиптическая функция.*

ВЕЙЕРШТРАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ – функции, положенные К. Вейерштрассом (см. [1]) в основу его общей теории *эллиптических функций.*

Вейерштрасса $\wp$-функция определяется рядом

$$\wp(z) = \wp(z;2\omega,2\omega') = \frac{1}{z^2} + \sum{}'\left(\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right),$$

где $\Omega_{mn} = 2m\omega + 2n\omega'$, $\operatorname{Im}\omega'/\omega > 0$ и суммирование $\sum'$ распространяется на все пары целых чисел m, n, за исключением $m = n = 0$. $\wp(z)$ есть четная эллиптич. функция порядка 2 с примитивными периодами 2ω, $2\omega'$, имеющая в каждом параллелограмме периодов единственный полюс порядка 2 с нулевым вычетом. Ее производная $\wp'(z)$ есть нечетная эллиптич. функция порядка 3 с теми же примитивными периодами. Отображение $x(z) = \wp(z)$, $y(z) = \wp'(z)$ устанавливает изоморфизм комплексного тора $T^2 = \mathbb{C}/\Omega_{mn}$ с римановой поверхностью рода 1 (см. [2]):

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad g_2 = 60\sum{}'\Omega_{mn}^{-4}, \quad g_3 = 140\sum{}'\Omega_{mn}^{-6}.$$

Модулярные формы g_2 и g_3 называются относительными инвариантами. Абсолютным инвариантом называется всякая рациональная функция от g_2^3/Δ, где $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ есть дискриминант. При действительных g_2, g_3 различают два случая: $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$. В первом из них параллелограмм периодов является прямоугольником со сторонами $2m\omega$, $2n\omega'$, m и n – целые, ω – действительное, а ω' – мнимое числа; а во втором случае – ромбом с диагоналями $m(\omega+\omega')$, $n(\omega-\omega')$, m,n – целые, а числа ω и ω' комплексно сопряжены (см. [3]).

Вейерштрасса сигма-функция $\sigma(z)$ и Вейерштрасса дзета-функция $\zeta(z)$ определяются по формулам

$$\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z), \quad \wp(z) = -\zeta'(z).$$

Не являясь, в отличие от $\wp(z)$, двоякопериодическими, они следующим образом преобразуются при сдвигах на периоды $2\omega_k$, $k = 1, 2, 3$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \omega'$, $\omega_3 = \omega'$:

$$\zeta(z + 2\omega_k) = \zeta(z) + \eta_k,$$
$$\sigma(z + 2\omega_k) = -\sigma(z)\exp(\eta_k(z + \omega_k)),$$

где $\eta_k = \zeta(2\omega_k)$ и выполняется соотношение Лежандра $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pi i/2$.

Произвольная эллиптич. функция выражается через $\wp$- и $\wp'$-функции, через ζ-функции или через σ-функции. $\wp$-функция связана с якобиевыми тета-функциями:

$$\wp(z) = -\left(\partial^2/\partial_z^2\right)\ln\vartheta_1(z) + \eta_1$$

(см. [3], а также *Якоби эллиптические функции*).

Для любого набора комплексных чисел $z_1,\ldots,z_n$ справедлива фундаментальная теорема сложения (см. [4]):

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \wp(z_1) & \wp'(z_1) & \ldots & \wp^{(n-2)}(z_1) \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 1 & \wp(z_n) & \wp'(z_n) & \ldots & \wp^{(n-2)}(z_n) \end{bmatrix} =$$
$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}k!\,\frac{\sigma(z_1+\ldots+z_n)\prod_{i<j}\sigma(z_i-z_j)}{\sigma^n(z_1)\sigma^n(z_2)\ldots\sigma^n(z_n)}.$$

$\wp$-функция имеет многочисленные приложения. Так, $g(g+1)\wp(z)$, где g – натуральное число, есть g-зонный потенциал Ламе для уравнения Шредингера, $\wp$-функция служит стационарным решением уравнения Кортевега–де Фриса, функции вида $2\sum\wp(z-z_j)$ порождают классы конечнозонных решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили (см. [5]).

Лит.: [1] Weierstrass K., Mathematische Werke, Bd 1–2, B., 1894–1895; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, ч. 2, пер. с англ., М., 1968; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. 3, пер. с англ., М., 1967; [4] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. 2, пер. с англ., 2 изд., М., 1963; [5] Теория солитонов, М., 1980.

В. З. Энольский.

ВЕЙЛЕВСКИЙ СИМВОЛ – см. *Вейля правило соответствия.*

ВЕЙЛЕВСКИЙ СПИНОР – см. *Спинор.*

ВЕЙЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА – формула, описывающая распределение собственных значений дифференциального оператора. На компактном n-мерном многообразии G с $(n-1)$-мерным краем Γ рассматривается регулярно эллиптич. самосопряженная полуограниченная снизу задача на собственные значения для системы s линейных дифференциальных уравнений

$$Au = \lambda u, \quad (B_ju)_\Gamma = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, sm.$$

Здесь $u(x)$ – столбец неизвестных функций, A – сильно эллиптич. матричный дифференциальный оператор порядка $2m$ с главным символом $\hat{A}(x, \xi)$, B_j – строчные дифференциальные операторы краевых условий. Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ и $\hat{\lambda}_1(x, \xi) \leqslant \hat{\lambda}_2(x, \xi) \leqslant \ldots \leqslant \hat{\lambda}_s(x, \xi)$ – собственные значения исходной задачи и матрицы $\hat{A}(x, \xi)$ соответственно, $N(\lambda)$ и $\hat{N}(x, \xi, \lambda)$ – соответствующие функции распределения (число собственных значений, меньших данного λ). Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$N(\lambda) = a\lambda^{n/2m} + O\left(\lambda^{(n-1)/2m}\right), \qquad (1)$$

где

$$a = (2\pi)^{-n} \int_{T^*G} \hat{N}(x, \xi, 1)\, dx\, d\xi.$$

При нек-рых дополнительных предположениях, призванных по сути дела исключить случаи с особо сильной симметрией (см. также *Кластеры собственных значений*), справедлива (см. [2], [3]) уточненная двучленная асимптотика

$$N(\lambda) = a\lambda^{n/2m} + b\lambda^{(n-1)/2m} + o\left(\lambda^{(n-1)/2m}\right), \qquad (2)$$

где коэффициент b учитывает краевые явления. Для основных задач математич. физики коэффициенты a и b выписаны в [4].

Появление асимптотик типа (1), (2) связано с именем Г. Вейля (см. [1]). Для оператора Лапласа он доказал (1) с остатком $O(\lambda^{(n-1)/2} \ln \lambda)$ и предложил (2) в качестве гипотезы.

Лит.: [1] Weyl H., «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 143, S. 177–202; [2] Иврий В. Я., «Функциональный анализ и его предложения», 1980, т. 14, в. 2, с. 25–34; [3] Васильев Д. Г., там же, 1984, т. 18, в. 4, с. 1–13; [4] Васильев Д. Г., Гольденвейзер А. Л., в кн.: Механика и научно-технический прогресс, т. 3, М., 1988, с. 223–36. *Д. Г. Васильев.*

ВЕЙЛЯ ГРУППА – см. *Масштабная инвариантность.*

ВЕЙЛЯ КАНОНИЧЕСКИЕ КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ – см. *Канонические коммутационные соотношения, Перестановочные соотношения.*

ВЕЙЛЯ КРИВИЗНА, конформная кривизна, кривизна направлений, – величина, характеризующая отклонение *риманова пространства* от конформно-евклидова пространства (то есть такого, которое может быть конформно отображено на евклидово пространство). В. к. описывается *Вейля тензором.*

ВЕЙЛЯ ПРАВИЛО СООТВЕТСТВИЯ – правило, определяющее оператор $\hat{f}$ квантовой динамической системы, соответствующий данной классической динамической функции $f(p, q)$, называемой вейлевским символом $\hat{f}$, с помощью интеграла Фурье. Пусть L – фазовое пространство классич. механич. системы с N степенями свободы и $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ – канонич. координаты в L. Выражения qx, qp и т. п. служат сокращенными обозначениями для $\sum_{i=1}^N q_i x_i$, $\sum_{i=1}^N q_i p_i$ и т. п., выражения dp, dx и т. п. – сокращенные обозначения для $dp_1 \ldots dp_N$, $dx_1 \ldots dx_N$ и т. п. Через L_2 обозначается гильбертово пространство функций $f(x)$ со скалярным произведением $\int fg^* dx$. Операторы координаты $\hat{q}_k$ и импульса $\hat{p}_k$ в L_2 имеют вид

$$(\hat{q}_k f)(x) = x_k f(x), \quad (\hat{p}_k f)(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

При В. п. с. каждой классич. наблюдаемой величине

$$f(p, q) = \int dx dy\, \alpha(x, y) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(xq + yp)\right\}$$

ставится в соответствие квантовая наблюдаемая, то есть самосопряженный оператор

$$\hat{f} = \int dx dy\, \alpha(x, y) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(x\hat{q} + y\hat{p})\right\},$$

$\alpha(x, y)$ – числовая, возможно сингулярная функция от x и y. При В. п. с. каждому полиному

$$f(p, q) = \sum_{f_{m_1, \ldots, m_N, m'_1, \ldots, m'_N}} p_1^{m_1} \ldots p_N^{m_N} q_1^{m'_1} \ldots q_N^{m'_N}$$

в L_2 сопоставляется оператор

$$\hat{f} = \sum_{f_{m_1, \ldots, m_N, m'_1, \ldots, m'_N}} \left(\hat{p}_1^{m_1} \hat{q}_1^{m'_1}\right) \ldots \left(\hat{p}_N^{m_N} \hat{q}_N^{m'_N}\right),$$

где $(\hat{A}^k \hat{B}^l)$ – симметричное произведение операторов $\hat{A}^k$ и $\hat{B}^l$. Символ f произведения операторов $\hat{f}_1 \hat{f}_2$ выражается через символы f_1 и f_2 этих операторов по формуле

$$f(p, q) = (\pi\hbar)^{-2N} \int f_1(p_1, q_1) f_2(p_2, q_2) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{2}{i\hbar} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q \\ p_1 & p_2 & p \end{vmatrix}\right\} dp_1 dp_2 dq_1 dq_2.$$

След оператора $\hat{f}$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{Tr}\, \hat{f} = (2\pi\hbar)^{-N} \int f(p, q)\, dp dq.$$

Самосопряженному оператору $\hat{f}$ отвечает действительный символ. В. п. с. является одним из возможных способов линейного квантования.

Лит.: [1] Weyl H., «Z. Phys.», 1927, Bd 46, № 1, S. 1; [2] Moyal J. G., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1949, v. 45, № 1, p. 99; [3] Березин Ф. А., «Теоретич. и математич. физика», 1971, т. 6, № 2, с. 194. *Д. П. Санкович.*

ВЕЙЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – соответствие между функциями и ограниченными операторами в гильбертовом пространстве H, определяемое формулой

$$f(x, y) \to A_f = (2\pi)^{-n} \int \ldots \int f(x, y) \times$$

$$\times \exp\left[-i \sum_{j=1}^n (x_j P_j + y_j Q_j)\right] \prod_{j=1}^n dx_j dy_j.$$

Здесь $f(x, y)$ – интегрируемая функция переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, а P_j, Q_j – канонич. наблюдаемые, возникающие из неприводимого представления $x \to V_x$, $y \to U_y$ *канонического коммутационного соотношения* Вейля в H. Имеет место формула Парсеваля

$$\int \ldots \int \overline{f_1(x, y)} f_2(x, y) \prod_{j=1}^n dx_j dy_j = (2\pi)^{-n} \mathrm{Tr}\, A_{f_1}^* A_{f_2},$$

в силу к-рой В. п. продолжается до изоморфизма гильбертова пространства функций $f(x, y)$, квадратично интегрируемых по мере Лебега в $\mathbb{R}^{2n}$, и пространства операторов Гильберта–Шмидта в H. Если A_f – ядерный оператор, то имеет место формула обращения

$$f(x, y) = \mathrm{Tr}\, A_f \exp\left[i \sum_{j=1}^n (x_j P_j + y_j Q_j)\right].$$

В частности, если A_f – *плотности оператор*, то соответствующая функция f называется его характеристической функцией. Обратное преобразование Фурье характеристич. функции совпадает с *Вигнера функцией.* *А. С. Холево.*

ВЕЙЛЯ СВЯЗНОСТЬ – *связность* Γ^i_{jk} на многообразии M^n, снабженном симметричным тензорным полем a_{ij} (то есть $a_{ij} = a_{ji}$ и $\det \|a_{ij}\| \neq 0$), определяемая из условий:

а) связность Γ^i_{jk} симметрична, то есть $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$;

б) $\nabla_k a_{ij} = v_k a_{ij}$.

Многообразие с тензорным полем a_{ij}, снабженное такой связностью, называется пространством с угловой метрикой, тензор a_{ij} – основным тензором этого пространства, а ковектор $v = \{v_k\}$ – дополнительным

ковектором. В.с. в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ вычисляется по формуле

$$\Gamma^h_{jt} = \frac{1}{2}a^{hj}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^t} + \frac{\partial a_{it}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{jt}}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{2}\left(v_j\delta^h_t + v_i\delta^h_j - v_i a^{ih}a_{jt}\right),$$

где $a^{ij}a_{js} = \delta^i_s$.

Лит.: [1] Базылев В. Т., Геометрия дифференцируемых многообразий, М., 1989. *В. В. Трофимов.*

ВЕЙЛЯ ТЕНЗОР, тензор конформной кривизны,— *тензор*, определяемый равенством

$$c^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon} = R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon} + \frac{1}{n-2}\left(\delta^\alpha_\gamma R_{\beta\varepsilon} - \delta^\alpha_\varepsilon R_{\beta\gamma} + R^\alpha_\gamma g_{\beta\varepsilon} - R^\alpha_\varepsilon g_{\beta\gamma}\right) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^\alpha_\varepsilon g_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma g_{\beta\varepsilon}\right)$$

на (псевдо)римановом многообразии (M^n, g_{ij}) размерности n. Здесь R — скалярная кривизна, $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи, $R^\alpha_\varepsilon = g^{\alpha\beta}R_{\beta\varepsilon}$, $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$.

В. т. является конформным инвариантом римановой метрики, то есть не меняется при умножении метрики на положительную функцию. Его обращение в нуль во всех точках при $n = \dim M^n > 3$ необходимо и достаточно для локальной конформной евклидовости риманова многообразия. При $n = 3$ В. т. тождественно равен нулю.

См. также *Ньюмена—Пенроуза формализм.*

Лит.: [1] Петров А. З., Пространства Эйнштейна, М., 1961; [2] Пенроуз Р., Риндлер В., Спиноры и пространство-время, М., 1987, т. 1,2; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 5 изд., М., 1967. *В. В. Трофимов.*

ВЕЙЛЯ УРАВНЕНИЕ — уравнение движения для безмассовой двухкомпонентной (описываемой двухкомпонентным спинором) частицы со спином 1/2. Четырехкомпонентный спинор $\psi(x)$, являющийся решением *Дирака уравнения* [$x = (x^0, \boldsymbol{x})$ — пространственно-временная координата], всегда можно представить в виде:

$$\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x),$$

где $\psi_R(x) = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi(x)$, $\psi_L(x) = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)$ — соответственно правая и левая компоненты $\psi(x)$ (γ_5 — матрица Дирака). Из уравнения Дирака следует, что $\psi_R(x)$ и $\psi_L(x)$ удовлетворяют уравнениям:

$$i\gamma^\mu\frac{\partial\psi_R}{\partial x^\mu} - m\psi_L = 0, \qquad (1)$$

$$i\gamma^\mu\frac{\partial\psi_L}{\partial x^\mu} - m\psi_R = 0. \qquad (2)$$

Здесь m — масса покоя частицы, γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) — матрицы Дирака (используется система единиц, в к-рой $\hbar = c = 1$). При $m = 0$ уравнения (1) и (2) «расцепляются» и для безмассовой частицы получаем:

$$\gamma^\mu\frac{\partial\psi_{L,R}}{\partial x^\mu} = 0. \qquad (3)$$

Уравнения (3) удобно рассмотреть в представлении, в к-ром матрица γ_5 диагональна (спинорное или киральное представление). В этом представлении

$$\gamma_5 = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{Vmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{Vmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{Vmatrix}, \quad i = 1,2,3; \quad \gamma^0 = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{Vmatrix},$$

где σ_i — матрицы Паули, I — единичная, 0 — нулевая (2×2)-матрицы. Если четырехкомпонентный спинор ψ записать в виде:

$$\psi = \begin{Vmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{Vmatrix}$$

(ψ_+ и ψ_- — двухкомпонентные спиноры), то

$$\psi_R = \begin{Vmatrix} \psi_+ \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \psi_L = \begin{Vmatrix} 0 \\ \psi_- \end{Vmatrix}$$

и для ψ_+ и ψ_- из (3) получаем:

$$\frac{\partial\psi_+}{\partial x^0} + \sigma\nabla\psi_+ = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\psi_-}{\partial x^0} - \sigma\nabla\psi_- = 0. \qquad (5)$$

Чтобы понять физич. смысл функций ψ_+ и ψ_-, рассмотрим состояния с импульсом $\boldsymbol{p}$ и энергией $p^0 = |\boldsymbol{p}|$:

$$\psi_\pm(x) = u_\pm(\boldsymbol{p})\exp(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} - ip^0x^0).$$

Из (4) и (5) следует, что двухкомпонентные спиноры $u_+(\boldsymbol{p})$ и $u_-(\boldsymbol{p})$ удовлетворяют уравнениям:

$$\sigma\boldsymbol{n}u_\pm(\boldsymbol{p}) = \pm u_\pm(\boldsymbol{p}).$$

Здесь $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, $\sigma\boldsymbol{n}$ — оператор спиральности. Таким образом, спиноры $u_+(\boldsymbol{p})$ и $u_-(\boldsymbol{p})$ описывают частицу соответственно с положительной и отрицательной спиральностью. Аналогично можно показать, что решения уравнений (4) и (5) с определенным импульсом и отрицательной энергией описывают античастицу соответственно с отрицательной и положительной спиральностью.

Уравнения (4) и (5) получены Г. Вейлем (H. Weyl) в 1929. Он предположил, что (4) [либо (5)] может быть уравнением для безмассовой частицы со спином 1/2. Гипотеза Вейля была вскоре подвергнута критике В. Паули (W. Pauli) на том основании, что уравнения (4) и (5) не инвариантны относительно пространственной инверсии [«... эти волновые уравнения... не инвариантны относительно зеркального отображения (перемены правого на левое) и вследствие этого неприменимы к физическим объектам». В. Паули, «Общие принципы волновой механики», М.— Л., 1947, с. 254]. Об уравнениях Вейля вспомнили в 1957 после экспериментального открытия несохранения четности в слабом взаимодействии. Л. Д. Ландау, Ли Цзундао (Lee Tsung Dao) и Янг Чжэньнин (Yang Chen Ning) и А. Салам (A. Salam) предположили, что нейтрино описывается двухкомпонентным вейлевским спинором ψ_+ либо ψ_- (теория двухкомпонентного нейтрино). Л. Д. Ландау основывался на гипотезе *CP*-инвариантности и предположил, что нейтрино является вейлевской частицей, поскольку В. у. инвариантны относительно *CP*-преобразования. Эксперимент подтвердил теорию двухкомпонентного нейтрино.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., «Журнал экспер. и теоретич. физики», 1957, т. 32, с. 407. *С. М. Биленький.*

ВЕКТОР — направленный отрезок прямой, у к-рого один конец (точка A) называется началом В., другой конец (точка B) — концом В.; такие В. иногда называются свободными векторами. Обозначения В.: $\boldsymbol{a}$, $\bar{a}$, $\vec{a}$ или AB. Вектор, начало и конец к-рого совпадают, называется нулевым вектором и обычно обозначается $\boldsymbol{0}$. В. характеризуется модулем (или длиной), к-рый равен длине отрезка AB и обозначается $|\boldsymbol{a}|$, и направлением: от A к B. Вектор единичной длины называется единичным вектором, или ортом. Нулевому В. приписывают любое направление. Два вектора называются равными, если они имеют равные модули и одинаково направлены. Все нулевые В. считаются равными. Свойства свободных В. и операции над ними изучаются в *векторной алгебре* и *векторном анализе.*

Кроме свободных В., то есть В., начальная точка к-рых может быть выбрана свободно, в механике и физике часто рассматриваются В., к-рые характеризуются модулем, направлением и положением начальной точки (точки приложения). Множество равных между собой В., расположенных на одной прямой, называется скользящим вектором. Рассматриваются связанные векторы, к-рые считаются равными, если они имеют не только равные модули и одинаковые направления, но и общую точку приложения. Задание скользящего или связанного В. может быть заменено заданием двух свободных В.

Понятие «В.» возникло как математич. абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением, напр.: перемещение, скорость, напряженность электрич. или маг-

нитного полей. Общее понятие «В.» как элемента так наз. *векторного пространства* определяется аксиоматически.

В. И. Битюцков.

ВЕКТОР ПСЕВДОСПИНА – см. *Блоха вектор.*

ВЕКТОР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – см. *Распределения вектор.*

ВЕКТОР СОСТОЯНИЯ – ненулевой вектор в гильбертовом пространстве, описывающий чистое состояние данной физической системы. Иногда термин «В. с.» употребляется как синоним термина «*волновая функция*».

В. с. $|\psi\rangle$, принадлежащий гильбертову пространству H, определяет то же самое состояние системы, что и *плотности матрица*

$$\rho = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}. \qquad (1)$$

Матрица плотности ρ удовлетворяет уравнению

$$\rho^2 = \rho. \qquad (2)$$

Обратно, если матрица плотности ρ удовлетворяет уравнению (2), то существует В. с. $|\psi\rangle$ такой, что выполняется (1), причем В. с. $|\psi\rangle$ определяется по оператору ρ с точностью до числового множителя. Если наложить условие нормировки

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1, \qquad (3)$$

то В. с. $|\psi\rangle$ определяется с точностью до числового множителя вида $\exp(i\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Условие (3) часто включают в определение понятия «В. с.».

Ввиду правил суперотбора не все векторы гильбертова пространства задают состояния системы. Точнее, состояние системы определяют только векторы из когерентных секторов пространства состояний. Если $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ – В. с., принадлежащие одному когерентному сектору, то вектор $|\psi_1\rangle\alpha + |\psi_2\rangle\beta$, $\alpha, \beta\in\mathbb{C}$, также является В. с. В частности, если в данной теории нет правил суперотбора, то любая линейная комбинация В. с. также является В. с. Последнее утверждение известно как принцип суперпозиции.

В квантовой механике В. с. задается, как правило, с помощью нек-рого набора квантовых чисел. А именно, для данного В. с. указывается полный набор попарно коммутирующих самосопряженных операторов $A_1,...,A_N$ такой, что

$$A_i|\psi\rangle = |\psi\rangle a_i. \qquad (4)$$

Из полноты набора $A_1,...,A_N$ следует, что вектор $|\psi\rangle$ определен набором квантовых чисел $a_1,...,a_N$ с точностью до множителя. Напр., стационарное состояние бесспиновой частицы в центрально-симметричном внешнем поле можно задать набором квантовых чисел (n, l, m), где n нумерует уровни энергии, l – момент количества движения, а m – проекция момента на одну из координатных осей.

Пусть $|a_1,...,a_N\rangle$ – решение уравнений (4). Предполагается, что В. с. $|a_1,...,a_N\rangle$ нормирован условием (3). Тогда, зная вектор $|a_1,...,a_N\rangle$, можно вычислить вероятность $P(a_1,...,a_N)$ того, что измерение наблюдаемых $A_1,...,A_N$ дадут значения $a_1,...,a_N$. В частности, если система находится в состоянии с нормированным В. с. $|\phi\rangle$, то

$$P(a_1,...,a_N) = |\langle a_1,...,a_N|\phi\rangle|^2. \qquad (5)$$

В общем случае, когда состояние системы описывается матрицей плотности ρ, то величины $P(a_1,...,a_N)$ определяются формулой

$$P(a_1,...,a_N) = \langle a_1,...,a_N|\rho|a_1,...,a_N\rangle.$$

В квантовой механике также широко используются обобщенные, или ненормируемые, В. с. Обобщенный В. с. определяется как непрерывный линейный функционал, определенный на нек-ром плотном подмножестве S пространства H. Значения функционала ψ на векторе $|\phi\rangle\in S$ обычно обозначают тем же символом $\langle\psi|\phi\rangle$, что и скалярное произведение векторов $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$. Множество обобщенных В. с. обозначают через S'.

Понятие обобщенного В. с. естественно возникает при изучении задач на собственные значения (4) для самосопряженных операторов A_i с непрерывным спектром. В этом случае уравнения (4) не имеют решений в пространстве H, но имеют решения из S'. Точнее, существует функционал $\psi\in S'$ такой, что для всякого $\phi\in S$

$$\langle\psi|A_i|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle a_i. \qquad (6)$$

Обобщенный В. с. ψ, удовлетворяющий (6), обозначают обычно тем же символом $|a_1,...,a_N\rangle$, что и обычный В. с.

Для каждого В. с. $|\phi\rangle$ может быть определена числовая функция

$$\phi(a_1,\dots,a_N) \equiv \langle a_1,\dots,a_N|\phi\rangle.$$

В $\mathbb{R}^N$ существует мера $d\rho(a_1,...,a_N)$, называемая мерой Парсеваля, такая, что для любых $|\phi\rangle$ и $|\phi'\rangle$ выполняется равенство Парсеваля:

$$\langle\phi|\phi'\rangle = \int d\rho(a_1,\dots,a_N)\phi^*(a_1,\dots,a_N)\phi'(a_1,\dots,a_N). \qquad (7)$$

Вероятность того, что в состоянии $|\phi\rangle$ измерение наблюдаемых $A_1,...,A_N$ даст результат

$$(a_1,...,a_N)\in\Delta_1\times\dots\times\Delta_N\subset\mathbb{R}^N,$$

определяется формулой [ср. (5)]:

$$P(\Delta_1\times\dots\times\Delta_N) = \int_{\Delta_1\times\dots\times\Delta_N} d\rho(a_1,\dots,a_N)|\phi(a_1,\dots,a_N)|^2.$$

Напр., в задаче о нерелятивистской бесспиновой частице в качестве полного набора операторов можно взять набор из трех операторов компонент импульса

$$\hat{p}_i = -\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3,$$

действующих в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$. В этом случае уравнения (4) превращаются в систему дифференциальных уравнений. Решения этих уравнений, отвечающие собственному значению $p = (p_1, p_2, p_3)$, имеют вид:

$$\psi_p(x_1,x_2,x_3) = a\exp\left\{\frac{ipx}{\hbar}\right\}, \quad a\in\mathbb{C}. \qquad (8)$$

Функция (8) задает функционал ψ_p, действующий на множестве быстроубывающих функций S:

$$S\ni\phi(x)\to\int d^3x\,\psi_p^*(x)\phi(x),$$

причем при $A_i=\hat{p}_i$, $a_i=p_i$, $d\rho = a^{-2}(2\pi)^{-3}d^3p$ выполняется равенство Парсеваля (7). Поэтому плоская волна (7) – общий обобщенный собственный вектор операторов $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$, а функция

$$P(p_1,p_2,p_3) = a^{-2}(2\pi)^{-3}\left|\int d^3x\,\psi_p^*(x)\phi(x)\right|^2$$

является плотностью вероятности того, что измерение импульса в состоянии $|\phi\rangle$ даст результат p_1, p_2, p_3.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987.

Ф. А. Лунев.

ВЕКТОР ЭНЕРГИИ ИМПУЛЬСА – см. *Пуанкаре группа.*

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА – раздел математики, в котором изучаются простейшие операции над *векторами*. К числу таких операций относятся сложение векторов и умножение вектора на число.

Сумма двух векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ определяется по правилу треугольника (параллелограмма): вектор $\boldsymbol{b}$ откладывается от конца вектора $\boldsymbol{a}$ и сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ определяется как вектор, соединяющий начало $\boldsymbol{a}$ с концом $\boldsymbol{b}$. Если λ – действительное число, то вектор $\lambda\boldsymbol{a}$ получается из вектора $\boldsymbol{a}$ растяжением в λ раз (при отрицательном λ происходит растяжение в $|\lambda|$ раз и изменение направления на противоположное). Сумма векторов не меняется при перестановке слагаемых, то есть сложение коммутативно. Кроме того, оно обладает свойством ассоциативности: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Для сложения векторов и умножения вектора на число справедливы обычные правила раскрытия скобок (как при опера-

циях с числами). Множество всех векторов пространства с введенными операциями сложения и умножения на число образует *векторное пространство.*

Скалярное произведение двух векторов определяется как число

$$(\boldsymbol{ab}) = ab\cos\varphi,$$

где a, b – длины соответствующих векторов, а φ – угол между ними. Векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$, или $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, определяется как вектор, имеющий длину $ab\sin\varphi$, перпендикулярный к плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и направленный так, чтобы тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $[\boldsymbol{ab}]$ была правой. Векторы правой (левой) тройки расположены по отношению друг к другу так же, как большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки. Правая тройка переходит в левую при обращении направления одного или всех векторов тройки.

При перестановке сомножителей скалярное произведение не меняется, а векторное меняет знак. Скалярное произведение обращается в нуль для перпендикулярных (ортогональных) векторов, а векторное – для параллельных (коллинеарных). Имеет место свойство линейности скалярного и векторного произведений по одному из аргументов (любому):

$$(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{ab}) + (\boldsymbol{ac}),\ (\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})) = \lambda(\boldsymbol{ab}),$$
$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})] = [\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}],\ [\boldsymbol{a}\lambda\boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{ab}].$$

Ясный геометрич. смысл имеет смешанное произведение $(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}])$. Это число, равное объему параллелепипеда, построенного на тройке векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и взятое со знаком плюс или минус в зависимости от того, является ли эта тройка правой или левой. Смешанное произведение не меняется при циклич. (круговой) перестановке его сомножителей: $\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}\to\boldsymbol{a}$. Оно обращается в нуль, если эти векторы лежат в одной плоскости (компланарны). Другие полезные формулы:

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}),$$
$$[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}] = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{cd}]] = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{bc})(\boldsymbol{ad}),.$$
$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] + [\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]] + [\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]] = 0.$$

Удобно задавать произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ его компонентами, то есть проекциями на оси декартовой системы координат, $\boldsymbol{a} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ – векторы единичной длины, направленные вдоль этих осей (орты), то

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3.$$

Операции над векторами выражаются через их компоненты следующими формулами:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_i = x_i + y_i,\quad (\lambda\boldsymbol{a})_i = \lambda\boldsymbol{a}_i,$$
$$(\boldsymbol{ab}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$
$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},\quad (\boldsymbol{a}\ [\boldsymbol{bc}]) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

В правых частях последних двух формул стоят определители соответствующих матриц.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [2] Беклемишев Д.В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, 5 изд., М., 1984; [3] Тамм И. Е., Основы теории электричества, 9 изд., М., 1976.

М. Б. Менский.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ – функция, определенная на подмножестве трехмерного евклидова пространства, значениями которой являются векторы, приложенные в точках этого подмножества. Напр., совокупность касательных или нормальных векторов к гладкой кривой (поверхности) есть В. п. К этому понятию приводит ряд физич. явлений и процессов. Так, векторы скоростей частиц движущейся жидкости в каждый момент времени образуют поле скоростей; гравитационные силы, действующие на материальную точку со стороны распределенной в пространстве массы, образуют поле тяготения; электрич. заряд действует на окружающие его заряды силами, образующими электростатическое поле, и т. д.

В квантовой теории поля квантами В. п. являются векторные частицы (то есть частицы со спином 1), напр. фотон. При этом действительному В. п. соответствует электрически нейтральная частица, а комплексному – заряженная частица (и ее античастица с зарядом противоположного знака).

По поведению относительно пространственной инверсии (замене координат $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$) В. п. делят на собственно векторные, меняющие знак при инверсии, и аксиальные, или аксиально-векторные, не меняющие знака.

В релятивистской теории В. п. $V_\mu(x)$ должно подчиняться дополнительному условию:

$$\frac{\partial V_\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0, \qquad (1)$$

к-рое сводит число его независимых компонент до трех, соответствующих спину 1, и исключает часть, соответствующую спину 0.

Свободное комплексное В. п. подчиняется *Клейна–Гордона уравнению* и в импульсном представлении имеет вид (в системе единиц $\hbar = c = 1$):

$$V_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}\left[e^\lambda_\mu a_\lambda(\boldsymbol{k})e^{i(k_0^t-\boldsymbol{kr})} + e^\lambda_\mu\tilde{a}^+_\lambda(\boldsymbol{k})e^{-i(k_0^t-\boldsymbol{kr})}\right], \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{k}$ и $k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$ – соответственно волновой вектор и частота плоской волны, m – параметр, играющий в квантовой теории поля роль массы кванта поля, e^λ_μ – четырехмерный вектор поляризации ($\lambda = 1, 2, 3$ – поляризационный индекс), $a_\lambda(\boldsymbol{k})$, $\tilde{a}_\lambda(\boldsymbol{k})$ и эрмитово сопряженные им величины $a^+_\lambda(\boldsymbol{k})$, $\tilde{a}^+_\lambda(\boldsymbol{k})$ – нек-рые комплексные функции $\boldsymbol{k}$. В силу условия (1) $k_\mu e^\lambda_\mu = 0$, или $e^\lambda_0 = \boldsymbol{ke}^\lambda/k_0$, то есть e^λ_μ имеет три независимые компоненты $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$, при этом $\boldsymbol{e}^3 = (\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)$ (k_0/m), а $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ – два единичных вектора (орта поперечной поляризации), перпендикулярные $\boldsymbol{k}$ и друг другу. Вместо них часто используют векторы так наз. спирального базиса $\boldsymbol{e}_\pm = (\boldsymbol{e}^1 \pm i\boldsymbol{e}^2)/\sqrt{2}$, описывающего циркулярную поляризацию, или спиральность. В квантовой теории поля величины a_λ превращаются в операторы, подчиняющиеся *перестановочным соотношениям*:

$$[a^+_\lambda(\boldsymbol{k}), a_{\lambda'}(\boldsymbol{k}')]_- = [\tilde{a}^+_\lambda(\boldsymbol{k}), \tilde{a}_{\lambda'}(\boldsymbol{k}')]_- = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \qquad (3)$$

где $\delta_{\lambda\lambda'}$ – символ Кронекера, $\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$ – дельта-функция векторного аргумента, а все остальные коммутаторы равны нулю, что позволяет трактовать эти величины как операторы рождения частицы $a^+_\lambda(\boldsymbol{k})$ и античастицы $\tilde{a}^+_\lambda(\boldsymbol{k})$ с импульсом $\boldsymbol{k}$, массой m и линейной поляризацией $\boldsymbol{e}^\lambda$, а $a_\lambda(\boldsymbol{k})$ и $\tilde{a}_\lambda(\boldsymbol{k})$ – как операторы гибели частицы и античастицы в этих состояниях.

Квантование В. п. с $m = 0$ имеет, однако, свои особенности из-за того, что условие (1) оказывается несовместимым с перестановочными соотношениями (3).

Особая выделенность В. п. связана с тем, что они играют фундаментальную роль в современной теории элементарных частиц, выступая в качестве калибровочных полей, обеспечивающих калибровочную симметрию теории. Таковы, напр., электромагнитное поле, глюонное поле.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантованные поля, М., 1980; [2] Коноплева Н. П., Попов В. Н., Калибровочные поля, М., 1980.

А. В. Ефремов.

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ – см. *Векторная алгебра.*

ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО, линейное пространство, – множество элементов, называемых векторами, для которых определены операции сложения и умножения на число. Простейший, но важный пример –

совокупность *векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... обычного 3-мерного пространства. Каждый такой вектор – направленный отрезок, задаваемый тремя числами: $\boldsymbol{a}=\{x_1, x_2, x_3\}$; числа x_1, x_2, x_3 называются координатами вектора. При умножении вектора на вещественное число λ соответствующий отрезок, сохраняя направление, растягивается в λ раз:

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}.$$

Сумма двух векторов находится по правилу параллелограмма; если $\boldsymbol{a}=\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{y_1, y_2, y_3\}$, то

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3\}.$$

Паре векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сопоставляют также скалярное произведение

$$(\boldsymbol{ab})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

Непосредственным обобщением 3-мерного В. п. является n-мерное *евклидово пространство*. Его элементы – упорядоченные наборы вещественных чисел, напр. $\boldsymbol{a}=\{x_1, x_2,...,x_n\}$, $\boldsymbol{b}=\{y_1, y_2,...,y_n\}$. Сложение и умножение векторов на число определены формулами

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{x_1+y_1, x_2+y_2,...,x_n+y_n\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1, \lambda x_2,...,\lambda x_n\},$$

а скалярное произведение – формулой $(\boldsymbol{ab})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$.

Примером комплексного бесконечномерного В. п. может служить совокупность $L^2(\mathbb{R}^1)$ комплексных функций f, заданных на всей оси $\mathbb{R}^1$ и квадратично суммируемых (то есть имеющих конечный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx$). Многие классы функций, напр. многочлены заданного порядка, функции непрерывные, дифференцируемые, интегрируемые, аналитические и т. п., также образуют бесконечномерные В. п.

В каждом В. п. помимо операций сложения и умножения на число обычно имеются те или иные дополнительные операции и структуры (напр. определено скалярное произведение). Если же не уточняют природы элементов В. п. и не предполагают в нем никаких дополнительных свойств, то В. п. называется абстрактным. Абстрактное В. п. L задают с помощью следующих аксиом: 1) любой паре элементов x и y из L сопоставлен единственный элемент z, называемый их суммой $z=x+y$ и принадлежащий L; 2) для любого числа λ и любого элемента x из L определен элемент z, называемый их произведением $z=\lambda x$ и принадлежащий L; 3) операции сложения и умножения на число являются ассоциативными и дистрибутивными. Сложение допускает обратную операцию, то есть для любых x и y из L существует единственный элемент w из L такой, что $x+w=y$. Кроме того, имеют место формулы $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$, $(\lambda_1+\lambda_2)x=\lambda_1x+\lambda_2x$. Если все числа λ вещественны (комплексны), говорят о вещественном (комплексном) В. п.

Если $x_1, x_2, ..., x_s$ – элементы В. п. L, то выражение вида $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_sx_s$ называется их линейной комбинацией; совокупность всех линейных комбинаций элементов подмножества S из L называется линейной оболочкой S. Векторы $x_1, x_2,...,x_s$ из L называются линейно независимыми, если условие $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_sx_s=0$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ – какие-либо числа, может выполняться только при $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_s=0$. Бесконечная система векторов называется линейно независимой, если любая ее конечная часть является линейно независимой. Множество элементов $x_1, x_2,...$ подмножества S из L называется системой образующих S, если любой вектор x из S можно представить в виде линейной комбинации этих элементов. Линейно независимая система образующих S называется базисом S, если разложение любого элемента S по этой системе единственно. Базис, элементы к-рого каким-либо образом параметризованы, называется системой координат в S. Базис В. п. всегда существует, хотя и не определяется однозначно. Если базис состоит из конечного числа n элементов (имеет размерность n), то В. п. называется n-мерным (конечномерным); если базис – бесконечное множество, то В. п. называется бесконечномерным. Выделяют также счетномерные В. п., у к-рых имеется счетный базис.

Подмножества В. п. L, замкнутые относительно его операций, называются подпространствами L. По любому подпространству S можно построить новое В. п. L/S, называемое факторпространством L по S: каждый его элемент есть множество векторов из L, различающихся между собой на элемент из S. Размерность L/S называется коразмерностью подпространства S в L; если размерности L и S равны соответственно n и k, то коразмерность S в L равна $n-k$. Если J – произвольное множество индексов i и S_i – семейство подпространств L, то совокупность всех векторов, принадлежащих каждому из S_i, есть подпространство, называемое пересечением указанных подпространств и обозначаемое $\bigcap_i S_i$. Для конечного семейства подпространств $S_1,...,S_s$ совокупность всех векторов, представимых в виде

$$x=x_1+x_2+...+x_s,\quad x_i \text{ из } S_i, \qquad (*)$$

есть подпространство, называемое суммой $S_1,...,S_s$ и обозначаемое $S_1+...+S_s$. Если для любого элемента суммы $S_1+...+S_s$ представление в виде (*) единственно, эта сумма называется прямой и обозначается $S_1\oplus...\oplus S_s$. Сумма подпространств является прямой тогда и только тогда, когда пересечение этих подпространств состоит только из нулевого вектора. Размерность суммы подпространств равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения. В. п. L_1 и L_2 называются изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие между их элементами, согласованное с операциями в них; L_1 и L_2 изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Конкретные примеры В. п. можно найти в математич. аппарате практически любого раздела физики. Конечномерными вещественными В. п. являются, напр., трехмерное физическое пространство $\mathbb{R}^3$ (без учета кривизны), конфигурационное пространство $\mathbb{R}^{3n}$ и фазовое пространство $\mathbb{R}^{6n}$ системы n классич. точечных частиц. К числу бесконечномерных комплексных В. п. принадлежат *гильбертовы пространства*, конкретные и абстрактные, составляющие основу математич. аппарата квантовой физики. Простейший пример гильбертова пространства – уже упоминавшееся пространство $L^2(\mathbb{R}^1)$. Основные физич. примеры – пространства *векторов состояний* различных систем микрочастиц, изучаемых в квантовой механике, квантовой статистич. физике и квантовой теории поля. В современных теориях *суперсимметрии* интенсивно применяются так наз. градуированные В. п., то есть векторные пространства вместе с их фиксированным разложением в прямую бесконечную сумму подпространств.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [2] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, 2 изд., М., 1986.

С. С. Хоружий.

ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ – см. *Расслоение.*

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ – раздел математики, в котором изучаются *скалярные поля* и *векторные поля* и различные операции с ними. Скалярное поле сопоставляет каждой точке (3-мерного) пространства нек-рое (вещественное) число $\varphi=\varphi(\boldsymbol{r})$, а векторное поле – нек-рый вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Если точка задается своими декартовыми координатами, $\boldsymbol{r}=\{x_1, x_2, x_3\}$, а вектор – своими компонентами $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, то *градиент* скалярного поля, *дивергенция* и *вихрь* (ротор) векторного поля выражаются формулами:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3},$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\left\{\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3},\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1},\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right\}.$$

Градиент, дивергенцию и вихрь удобно выражать с помощью символич. вектора ∇ (набла), компонентами к-рого являются операторы дифференцирования по координатам:

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}.$$

Действуя этим символич. вектором на скалярные и векторные поля по правилам *векторной алгебры*, получим:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{a} = (\nabla\boldsymbol{a}), \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla\boldsymbol{a}].$$

Скалярный квадрат вектора ∇ представляет собой *Лапласа оператор*, или лапласиан, к-рый обозначается Δ:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Формальное применение правил векторной алгебры к вектору ∇ приводит к ряду соотношений между градиентом, дивергенцией и вихрем, напр.:

$$[\nabla(\nabla\varphi)] = 0, \text{ или } \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0;$$

$$(\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]) = 0, \text{ или } \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0;$$

$$[\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]] = \nabla(\nabla\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}, \text{ или } \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}.$$

При такого рода формальных преобразованиях необходимо следить, чтобы дифференциальный оператор ∇ в окончательном выражении стоял слева от той функции, на к-рую он действует. Если оператор ∇ действует на произведение двух функций, то по правилу Лейбница (правило дифференцирования произведения) можно записать результат в виде суммы двух членов:

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi,$$

или

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi.$$

Сочетая правило Лейбница с правилами векторной алгебры, можно получать соотношения такого типа:

$$(\nabla(\boldsymbol{a}\varphi)) = \varphi(\nabla\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}\nabla\varphi),$$

или

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\varphi) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi.$$

Все основные дифференциальные операции В. а. имеют определенный геометрич. смысл, поэтому значения выражений $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ не зависят от выбора системы координат. Все соотношения между дифференциальными выражениями также носят инвариантный характер.

В приложениях часто встречаются поток вектора через заданную поверхность S и интеграл от него вдоль заданной кривой L:

$$\int_S \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = \int_S a_n\,dS = \int_S (a_1dx_2dx_3 + a_2dx_3dx_1 + a_3dx_1dx_2),$$

$$\int_L \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_L a_\tau\,dl = \int_L (a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3).$$

Здесь $a_n = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на нормаль к поверхности в данной точке, $a_\tau = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\tau})$ — проекция его на единичный вектор τ, касательный к кривой, dS — элемент площади поверхности, dl — элемент длины кривой. Пусть $\boldsymbol{a}$ — распределение скоростей движущейся жидкости, тогда первый интеграл равен объему жидкости, пересекающей данную поверхность в единицу времени. Если $\boldsymbol{a}$ — силовое поле, то второй интеграл равен работе, совершаемой при перемещении пробного тела вдоль данной кривой. В случае замкнутой кривой такой интеграл называется циркуляцией векторного поля.

Эти интегралы фигурируют в основных теоремах В. а.— *Остроградского формуле* и *Стокса формуле*:

$$\oint_{\partial V} a_n\,dS = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dV, \quad \oint_{\partial S} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\,dS.$$

Здесь dV — поверхность, являющаяся границей области V, а dS — кривая, ограничивающая поверхность S. Кружки на знаках интегралов означают, что интегрирование ведется по замкнутой поверхности и замкнутой кривой. Положительное направление нормали к поверхности S должно быть ориентировано относительно направления обхода контура dS так же, как положительное направление оси x_3 — относительно положительного направления вращения в плоскости x_1, x_2. Полагая в формуле Остроградского $\boldsymbol{a} = \psi\operatorname{grad}\varphi$, получим важную теорему Грина:

$$\oint_{\partial V} \psi(\operatorname{grad}\varphi)_n\,dS = \int_V \{\psi\Delta\varphi + (\operatorname{grad}\psi\operatorname{grad}\varphi)\}\,dV.$$

Ее следствием является формула

$$\oint_{\partial V} (\psi\operatorname{grad}_n\varphi - \varphi\operatorname{grad}_n\psi)\,dS = \int_V (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\,dV.$$

Другие интегральные теоремы можно получить как следствия уже сформулированных:

$$\oint_{\partial S} \varphi\,d\boldsymbol{r} = \int_S [\boldsymbol{n}\operatorname{grad}\varphi]\,dS,$$

$$\oint_{\partial V} \varphi\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \operatorname{grad}\varphi\,dV,$$

$$\oint_{\partial V} [\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}]dS = \int_V \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,dV.$$

Понятия В. а., определенные выше для евклидова пространства, можно обобщить на риманово пространство и другие многообразия. Дифференциальные операции приводят к понятию *ковариантной производной*, интегральные теоремы формулируются на языке *дифференциальных форм*.

Лит. см. при ст. *Векторная алгебра.* *М. Б. Менский.*

ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ — *потенциал*, определяющий вихревую часть векторного поля. В электродинамике поле магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ является строго вихревым ($\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$); для этого поля вводят В. п. $\boldsymbol{A}$ (часто называемый также вектор-потенциалом): $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$. При этом напряженность электрич. поля $\boldsymbol{E}$ определяется формулой

$$\boldsymbol{E} = -c^{-1}\partial\boldsymbol{A}/\partial t - \nabla\varphi,$$

где φ — скалярный потенциал. Связь потенциалов и полей не является взаимно однозначной, поэтому В. п. следует рассматривать как вспомогательную величину, не допускающую прямых измерений, но облегчающую расчет электромагнитных полей.

Обращение к В. п. позволяет упростить выражение для энергии взаимодействия W системы зарядов и токов (объемная плотность ρ и $\boldsymbol{j}$) с внешним электромагнитным полем:

$$W = \int\left\{\rho\varphi + c^{-1}(\boldsymbol{j}\boldsymbol{A})\right\}d\boldsymbol{r}.$$

Градиентная инвариантность этого выражения обеспечивается уравнением непрерывности

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0.$$

Отсюда следует, что частица с зарядом q в электромагнитном поле в дополнение к обычному (чисто динамическому) импульсу обладает еще электрокинетическим импульсом

$$\boldsymbol{p}_{\text{эк}} = q\boldsymbol{A}/c,$$

что позволяет придать В. п. соответствующую интерпретацию.

В случае переменных процессов с фиксированной зависимостью от времени (напр. $\sim\exp[i\omega t]$) можно исключить скалярный потенциал и для описания электромагнитного поля использовать только В. п. Так, при лоренцевой калибровке спектральная амплитуда В. п. $\boldsymbol{A}_\omega$ удовлетворяет волновому уравнению, а спектральные составляющие электрического $\boldsymbol{E}_\omega$ и магнитного $\boldsymbol{B}_\omega$ полей в однородной среде с проницаемостями $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ определяются соотношениями:

$$\boldsymbol{E}_\omega = \frac{c}{i\omega\varepsilon\mu}\left(\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{A}_\omega + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\boldsymbol{A}_\omega^2\right), \quad \boldsymbol{B}_\omega = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}_\omega.$$

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; [2] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958. *М. А. Миллер, Е. В. Суворов.*

ВЕКТОРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — см. *Случайный процесс.*

ВЕКТОРНЫЙ ТОК – см. *Ток.*

ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ – то же, что *векторный потенциал.*

ВЕЛИКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ МОДЕЛИ – модели *объединенных теорий поля.* Наиболее простая из них основана на калибровочной группе $SU(5)$ (см. [1]). Эта модель является прообразом большинства В. о. м., основанных на простых группах. $SU(5)$ является минимальной группой 4-го ранга, допускающей объединение трех видов взаимодействий – сильного, слабого и электромагнитного. Генераторы $SU(5)$ представляют собой набор из 24 бесследовых эрмитовых (5×5)-матриц. Стандартная группа погружается в $SU(5)$ следующим образом: генераторы $\frac{\lambda_\alpha}{2}$, $\alpha=1,\ldots,8$, группы $SU(3)$ занимают верхний левый блок размером 3×3, матрицы слабого изоспина T группы $SU(2)$ – нижний правый (2×2)-блок, генератор слабого гиперзаряда Y представляет собой (с точностью до нормировки) диагональную матрицу

$$Y=\left(\frac{3}{20}\right)^{1/2}\operatorname{diag}\left\|\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},-1,-1\right\|.$$

Остальные генераторы $SU(5)$ связаны с новыми калибровочными бозонами X и Y, к-рые являются триплетами по цвету и дублетами по $SU(2)$, их электрич. заряд равен 4/3 и 1/3 соответственно. Они получили название *лептокварков.* Эти частицы переносят взаимодействие с несохранением барионного числа. Полный мультиплет калибровочных бозонов имеет вид

$$\left\|\begin{array}{ccc|cc} & & & X^1 & Y^1 \\ G_\mu^\alpha\frac{\lambda^\alpha}{2}+2\sqrt{\frac{1}{30}}B_\mu I & & & X^2 & Y^2 \\ & & & X^3 & Y^3 \\ \hline \overset{*}{X}{}^1 & \overset{*}{X}{}^2 & \overset{*}{X}{}^3 & \sqrt{\frac{1}{2}}A_\mu^3-\sqrt{\frac{3}{10}}B_\mu & W_\mu^+ \\ \overset{*}{Y}{}^1 & \overset{*}{Y}{}^2 & \overset{*}{Y}{}^3 & W_\mu^- & -\sqrt{\frac{1}{2}}A_\mu^3-\sqrt{\frac{3}{10}}B_\mu \end{array}\right\|.$$

Разложение этого мультиплета по $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ имеет вид $24=(8,1)+(1,3)+(3,2)+(3^*,2)$. Фермионный состав модели включает три поколения, каждое из к-рых расположено в мультиплетах $5^*=(3,1)+(1,2)$ и $10=(3,2)+(3,1)+(1,1)$:

$$\Psi_{ij}=10=\left\|\begin{array}{ccccc} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{array}\right\|_L,$$

$$\Psi^1=5^*=\left(d_1^c,d_2^c,d_3^c,e,\nu_e\right)_L;$$

индекс c означает зарядовое сопряжение. В $SU(5)$ происходит «случайное» сокращение γ_5-аномалий между 5^*- и 10-плетами. Как и в любой В. о. м. имеет место квантование электрич. заряда, причем кратность зарядов кварков 1/3 возникает автоматически. Асимптотич. значение *Вайнберга угла* равно

$$\sin^2\theta_W=\frac{3}{8}.$$

Минимальный состав хиггсовских полей, необходимый для нарушения $SU(5)$ до $SU(3)\times U(1)$ включает 24-плет и 5-плет. Модель с этими скалярными полями называется минимальной. Нарушение симметрии происходит в два этапа. Вакуумное среднее 24-плета

$$\langle\Phi\rangle=V\operatorname{diag}\left\|1,1,1,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\|$$

нарушает $SU(5)$ до $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ и дает массу лептокваркам

$$m_X^2=m_Y^2=\frac{25}{8}g^2V^2,\quad V\sim10^{15}\ \text{ГэВ}.$$

Вакуумное среднее 5-плета

$$\langle H\rangle=\left\|0,0,0,0,V/\sqrt{2}\right\|,\quad V=250\,\text{ГэВ},$$

нарушает электрослабую группу и дает массу W- и Z-бозонам. Фермионы становятся массивными из-за *Юкавы взаимодействия* с H, причем справедливы следующие асимптотич. массовые формулы:

$$m_d=m_e,\ m_s=m_\mu,\ m_b=m_\tau.$$

Барионное и лептонное числа не сохраняются за счет обмена лептокварками, однако их разность $B-L$ является точным законом сохранения. Это обеспечивает безмассовость всех нейтрино.

Значение масс X- и Y-бозонов и угла Вайнберга может быть найдено из уравнений ренормализационной группы (см. *Большого объединения масштаб*). В двухпетлевом приближении получены значения (см. [2]):

$$M_X=1{,}5\cdot10^{15}\Lambda_{MS}(1{,}5)^{\pm1},$$

$$\sin^2\theta_W(M_W)=0{,}2138+0{,}006\ln(0{,}16\ \text{ГэВ}/\Lambda_{MS})\pm0{,}0025.$$

Неопределенности здесь возникают из-за незнания массы t-кварка, масс сверхтяжелых хиггсовских бозонов, а также эффектов высших порядков теории возмущений. Перенормировка массовых соотношений дает (см. [3]):

$$m_b=4{,}5-5\ \text{ГэВ},\ m_s=0{,}5\ \text{ГэВ}.$$

Сама по себе минимальная модель $SU(5)$ противоречит эксперименту: предсказываемый угол Вайнберга несколько меньше экспериментального значения

$$\sin^2\theta_W=0{,}230\pm0{,}0048,$$

фермионные массовые формулы

$$m_d/m_s=m_e/m_\mu=1/200$$

не совместны с оценками алгебры токов и, что самое главное, время жизни протона (10^{29} лет) оказывается меньше наблюдаемого. Существуют модификации модели с расширенным хиггсовским сектором, в к-рых удается избежать указанных проблем.

Помимо экспериментальных данных существует ряд априорных соображений, к-рые вынуждают строить модели, отличные от $SU(5)$. Одним из ее недостатков является размещение фермионов одного поколения в приводимом представлении $SU(5)$. Далее, сохранение $(B-L)$ является случайным следствием выбора минимального хиггсовского сектора, что делает безмассовость нейтрино случайным явлением.

Модели на группе $SO(10)$ (см. [4]) (не существует канонич. варианта модели) могут справиться с проблемами минимальной $SU(5)$, хотя их предсказательная сила несколько меньше. $SU(10)$ – единственная группа 5-го ранга, подходящая для целей великого объединения. Каждое семейство фермионов расположено в одном комплексном мультиплете размерности 16. Дополнительная степень свободы – фермион с квантовыми числами правого нейтрино, то есть масса нейтрино, вообще говоря, отлична от нуля. γ^5-аномалии автоматически отсутствуют. $SO(10)$ содержит право-лево симметричную подгруппу $SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)$, то есть до спонтанного нарушения симметрии четность сохраняется. Имеются дополнительные по сравнению с $SU(5)$ лептокварки X', Y', X_S с зарядами 2/3, −1/3, 2/3, соответственно, причем X_S является синглетом по $SU(2)_L$. Группа $SO(10)$ имеет большое количество подгрупп и поэтому много путей нарушения симметрии. В ней возможно существование нескольких (>2, в отличие от $SU(5)$) масштабов нарушения симметрии. Напр., часто рассматривается следующая цепочка нарушения симметрии

$$SO(10)\underset{M_X}{\longrightarrow}SU(4)\times SU(2)_L\times SU(2)_R\underset{M_c}{\longrightarrow}$$
$$\longrightarrow SU(3)\times U(1)\times SU(2)_L\times SU(2)_R\underset{M_R}{\longrightarrow}$$
$$\longrightarrow SU(3)\times SU(2)_L\times U(1)\underset{M_W}{\longrightarrow}SU(3)\times U(1),$$

где $M_X > M_c > M_R > M_W$ – характерные массы. Для нарушения симметрии используются скалярные поля размерности 16, 54, 45 и т. д., массу фермионам и W-бозонам дают вакуумные средние мультиплетов 10, 120 или 126. Наличие нескольких масштабов позволяет естественным образом удлинить время жизни протона, изменить угол Вайнберга, а также несколько заполнить большую пустыню от 10^2 до 10^{14} ГэВ, предсказываемую $SU(5)$. В модели имеет место спонтанное нарушение $(B-L)$-симметрии, что приводит к отличной от нуля майорановской массе нейтрино, $m_\nu \sim m_q M_W / M_X$. Массовые соотношения между кварками и лептонами не являются столь жесткими, как в $SU(5)$.

Рассматриваются также модели на основе исключительных групп E_6, E_7, E_8 (см. [5], [6]). Наиболее популярные и элегантные построены с использованием E_6 (см. [5], [7]). Здесь фермионы одного поколения расположены в мультиплете размерности 27, то есть предсказывается ряд новых фермионов. Многие черты этих моделей общие с $SO(10) \subset E_6$.

Подробное описание ряда В. о. м. можно найти в обзорах [6]–[9].

Лит.: [1] Georgi H., Glashow S., «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 438–41; [2] Hall L., «Nucl. Phys.», 1981, v. B178, p. 75–124; [3] Chanowitz M., Ellis J., Gaillard M., «Nucl. Phys.», 1977, v. B128, p. 506–36; [4] Fritzsch H., Minkowski P., «Ann. Phys.», 1975, v. 93, p. 193–266; [5] Gursay F., Ramond P., Sikivie P., «Phys. Lett.», 1976, v. 60B, p. 177–80; [6] Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R., «Rev. Mod. Phys.», 1978, v. 50, p. 721–44; [7] Barbieri R., Nanopulos D., «Phys. Lett.», 1980, v. 91B, p. 369–75; [8] Langacber P., «Phys. Rep.», 1981, v. 72C, p. 185–385; [9] Рубаков В.А., Шапошников М. Е., в кн.: XV Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 23 нояб.–2 дек. 1982, Дубна, 1983, с. 5–124.

М. Е. Шапошников.

ВЕЛИКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – см. *Объединенные теории поля.*

ВЕЛИКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ в теории элементарных частиц – объединение сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий в рамках единой калибровочной квантовой теории поля с простой калибровочной группой. Гипотеза В. о. в. исходит из экстраполяции уравнений квантовой теории поля от расстояний порядка $10^{-14} - 10^{-15}$ см, доступных современному эксперименту, до значительно меньших расстояний порядка $10^{-28} - 10^{-29}$ см. Математич. методом, лежащим в основе такой экстраполяции, служит метод *ренормализационной группы.* Согласно гипотезе В. о. в. различные взаимодействия имеют единый источник происхождения. При сверхмалых расстояниях природа отличается высокой степенью симметрии, когда практически исчезает разница между типами элементарных частиц. На таких расстояниях частицы связаны единым взаимодействием. При больших расстояниях степень симметрии в организации материи понижается и единое взаимодействие распадается на три ветви, к-рые проявляют разные свойства. Они называются фундаментальными взаимодействиями – сильным, слабым и электромагнитным. Различие этих взаимодействий объясняется разной степенью симметрии; в случае сильных взаимодействий это группа унитарной симметрии $SU(3)$, в случае слабых и электромагнитных – соответственно $SU(2)$ и $U(1)$. Согласно уравнениям ренормализационной группы эффективные заряды, характеризующие интенсивность взаимодействия, ведут себя по-разному в зависимости от группы симметрии. Для неабелевых групп имеет место антиэкранировка заряда, а для абелевой – экранировка. В результате три заряда, равные в точке объединения (то есть на малых расстояниях), становятся разными при переходе к большим расстояниям. Электрич. заряд уменьшается, а сильный и слабый заряды растут. Этим объясняется различная интенсивность сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий при энергиях современных экспериментов.

Объединение трех взаимодействий в одно связано с новой симметрией, к-рая должна быть достаточно широкой, чтобы включать в себя известные группы симметрии отдельных взаимодействий. Существует несколько кандидатов на роль теории В. о. в., однако окончательный выбор пока не сделан. Но независимо от того, какова на самом деле симметрия теории В. о. в., нек-рые важные выводы следуют уже из самого предположения о ее существовании. К числу характерных предсказаний относятся нестабильность протона, а также существование магнитных монополей. Важной отличительной особенностью теорий В. о. в. является наличие так наз. калибровочной пустыни – широкой области энергий, не содержащей новых частиц. Экспериментального подтверждения гипотеза В. о. в. пока не получила.

Лит.: [1] Ченг Та-пей, Ли Линг-фонг, Калибровочные теории в физике элементарных частиц, пер. с англ., М., 1987.

Д. И. Казаков.

ВЕНТЦЕЛЯ – КРАМЕРСА – БРИЛЛЮЭНА МЕТОД, ВКБ-метод,– метод вычисления асимптотики решений при $\lambda \to +\infty$ уравнения

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0. \qquad (1)$$

Пусть $I=[a, b]$, $q \in C^2(I)$. Если $q(x) > 0$ на I, то уравнение (1) имеет линейно независимые при $\lambda \gg 1$ решения вида

$$y_{1,2} = q^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm\lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\, dt\right\}\left[1 + O(\lambda)^{-1}\right], \qquad (2)$$

если $q(x) < 0$ на I, то – вида

$$y_{1,2} = q^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm i\lambda \int_{x_0}^{x} \left|\sqrt{q(t)}\right| dt\right\}\left[1 + O(\lambda)^{-1}\right]. \qquad (3)$$

Это верно также в случае, если q комплекснозначна и существует гладкая ветвь $\sqrt{q}$ такая, что $\operatorname{Re}\sqrt{q} \geqslant 0$ на I. Если $q \in C^\infty(I)$, то решения разлагаются в асимптотич. ряды по степеням λ^{-1}, равномерные по $x \in I$. Формулы вида (2), (3) называются также ВКБ-формулами, приближением Лиувилля – Грина, коротковолновыми (или высокочастотными) приближениями. Они были получены в [1], [2] и затем заново получены в связи с задачами квантовой механики в [3], [4], [5]. См. также [6].

Лит.: [1] Liouville J., «J. Math. Pures Appl.», 1837, v. 2, p. 16–35; [2] Green G., «Trans. Camb. Philos. Soc.», 1838, v. 6, p. 457–62; [3] Wentzel G., «Z. Phys.», 1926, Bd 38, S. 518–29; [4] Kramers H.A., там же, 1926, Bd 39, S. 828–40; [5] Brillouin L., «J. Phys. Radium», 1926, v. 7, p. 353–68; [6] Федорюк М. В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1983.

М. В. Федорюк.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРОЦЕСС – см. *Случайный процесс.*

ВЕРСАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ – одно из основных понятий теории деформаций алгебраических, аналитических или функциональных структур. Пусть M – функциональное пространство с нек-рой группой эквивалентностей G, действующей на нем (в качестве примера можно иметь в виду пространство ростков функций $(\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}$ с действующей на нем группой локальных замен координат в $(\mathbb{R}^m, 0)$). Деформацией элемента f из M называется (гладкое или аналитическое) семейство элементов $F(\lambda)$, параметризованное элементами λ нек-рого пространства Λ (базы деформации), такое, что $F(0) = f$. Деформации $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ эквивалентны, если они могут быть получены одна из другой действием зависящего от λ семейства $g(\lambda)$ элементов группы G, то есть если $F_2(\lambda) = g(\lambda) F_1(\lambda)$. Если φ: $(\Lambda', 0) \to (\Lambda, 0)$ – росток отображения, то деформацией, индуцированной из F при отображении φ, называется деформация $\varphi^* F$ с базой Λ', задаваемая формулой $(\varphi^* F)(\lambda') = F(\varphi(\lambda))$. Деформация F элемента f называется версальной, если любая деформация элемента f эквивалентна индуцированной из нее. В. д. называется миниверсальной, если она имеет наименьшую возможную размерность пространства параметров (базы). Напр., в качестве В. д. ростка f: $(\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}$

относительно группы локальных замен координат в $(\mathbb{R}^m, 0)$ может быть взята деформация

$$F(\lambda) = f + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \varphi_i,$$

где φ_i, $i = 1, 2, ..., \mu$, – ростки функций, образующие базис в факторкольце кольца ростков функций на $(\mathbb{R}^m, 0)$ по идеалу, порожденному частными производными $\partial f/\partial x_i$ функции f (якобиеву идеалу функции f). Если в семействе общего положения не встречаются элементы, имеющие при классификации с точностью до эквивалентностей из группы G непрерывные модули, то это семейство является версальным для каждого своего элемента. Напр., это имеет место для зависящего не более чем от 5 параметров семейства гладких функций на произвольном многообразии.

О. В. Ляшко.

В. д. квадратичного гамильтониана H, заданного на конечномерном векторном симплектич. пространстве V – содержащее H семейство $F(x)$ *квадратичных гамильтонианов* на V (где $x \in \mathbb{R}^k$, $F(x)$ гладко зависит от x и $F(0) = H$), обладающее следующим свойством: для любого квадратичного гамильтониана G на V, близкого к H, существуют точка $x = x_G \in \mathbb{R}^k$ и линейная канонич. замена координат $\Phi = \Phi_G$ в V, переводящая G в $F(x_G)$, причем x_G и Φ_G гладко зависят от G, $x_H = 0$ и Φ_H тождественна. Имеются явные выражения для В. д. на вещественном пространстве V (см. [1], [2]).

Если $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – попарно различные собственные числа линейного гамильтонова оператора, соответствующего данному квадратичному гамильтониану H, а $m_1(\lambda_j) \geqslant m_2(\lambda_j) \geqslant m_3(\lambda_j) \geqslant ...$ – порядки жордановых клеток, отвечающих λ_j, то минимально возможное количество k параметров В. д. H равно

$$\frac{1}{2}\sum_j \left(m_1(\lambda_j) + 3m_2(\lambda_j) + 5m_3(\lambda_j) + ...\right) + \frac{n}{2},$$

где n – количество жордановых клеток нечетных порядков с собственным числом 0 (см. [2]).

Лит.: [1] Галин Д. М., «Труды семинара имени И. Г. Петровского», 1975, т. 1, с. 63–74; [2] Kocak H., «J. Diff. Equat.», 1984, v. 51, № 3, p. 359–407.

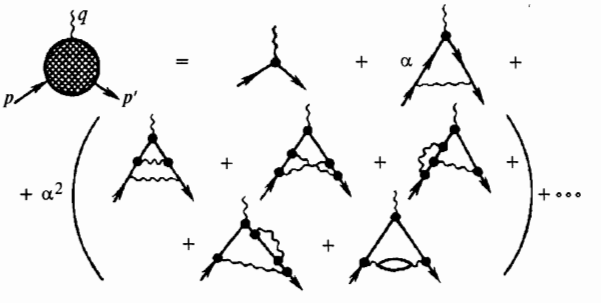
М. Б. Севрюк.

ВЕРСАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО – см. *Бифуркация.*

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ВЕКТОР – см. *Голономии группа.*

ВЕРШИННАЯ ДИАГРАММА ФЕЙНМАНА – см. *Фейнмана диаграмма.*

ВЕРШИННАЯ ЧАСТЬ, вершинная функция, – одна из основных функций в квантовой теории поля, характеризующая взаимодействие между квантовыми полями; содержит все *радиационные поправки.* В перенормированной теории возмущений В. ч. определяется как сумма вкладов, отвечающих сильно связным *Фейнмана диаграммам* с числом и типом внешних линий, определяемых соответствующей вершиной в правилах Фейнмана.



$$\Gamma_\mu(p,p';q) = \gamma_\mu + \alpha\Gamma_\mu^{(1)}(p,p';q) + \alpha^2\Gamma_\mu^{(2)}(p,p';q) + O(\alpha^3)$$

Вклады однопетлевых ($\alpha\Gamma_\mu^{(1)}$) и двухпетлевых ($\alpha^2\Gamma_\mu^{(2)}$) диаграмм в **вершинной части** $\Gamma_\mu(p, p'; q)$ в квантовой электродинамике: p, p' и q – **соответственно 4-импульсы начального и конечного электрона и фотона,** γ_μ – матрицы Дирака ($\mu = 0, 1, 2, 3$).

Так, напр., В. ч. $\Gamma_\mu(p, p'; q)$ в квантовой электродинамике определяется суммой (перенормированных) вкладов, к-рые, по правилам Фейнмана, изображаются диаграммами (рис.) и представляются в виде степенного ряда по безразмерному параметру (постоянной тонкой структуры) $\alpha \approx 1/137$, характеризующему интенсивность электромагнитных процессов.

При более общем определении, без обращения к теории возмущений, вершинные части (как и полные *Грина функции*) выражаются через вариационные производные от *производящего функционала.*

Иногда (неправильно) В. ч. называют просто вершиной.

Д. В. Ширков.

ВЕС автоморфной формы – см. *Автоморфная форма.*

ВЕС модулярной формы – см. *Модулярная форма.*

ВЕС представления ρ алгебры Ли в векторном пространстве – отображение α алгебры Ли L в ее поле определения k, для которого существует такой ненулевой вектор x пространства V, что

$$(\rho(h) - \alpha(h)1)^{n_{x,h}}(x) = 0$$

для всех $h \in L$ и некоторого целого $n_{x,h} > 0$ (вообще говоря, зависящего от x и h), где 1 обозначает тождественное преобразование V. В этом случае говорят также, что α – вес L-модуля V, определяемого представлением ρ. Множество всех векторов $x \in V$, удовлетворяющих указанному условию, вместе с нулем образует подпространство V_α, называемое весовым подпространством веса α (или, соответствующим весу α). Если $V = V_\alpha$, то V называется весовым пространством, или весовым модулем над L, веса α.

Если V и W – весовые модули над L весов α и β соответственно, то их тензорное произведение $V \otimes W$ является весовым модулем веса $\alpha + \beta$. Если L – нильпотентная алгебра Ли, то весовое подпространство V_α веса α в V является подмодулем L-модуля V. Если, кроме того,

$$\dim_k V < \infty,$$

а $\rho(L)$ – расщепляемая алгебра Ли линейных преобразований модуля V, то V разлагается в прямую сумму конечного числа весовых L-подмодулей разных весов:

$$V = V_\sigma \oplus V_\delta \oplus ... \oplus V_\tau$$

(весовое разложение V относительно L). Если L – нильпотентная подалгебра конечномерной алгебры Ли M, рассматриваемой как L-модуль относительно присоединенного представления ad_M алгебры M, и $\mathrm{ad}_M L$ является расщепляемой алгеброй Ли линейных преобразований M, то соответствующее весовое разложение M относительно L:

$$M = M_\alpha \oplus M_\beta \oplus ... \oplus M_\gamma$$

называется разложением Фиттинга M относительно L, веса $\alpha, \beta, ..., \gamma$ называются корнями, а пространства M_α, $M_\beta, ..., M_\gamma$ – корневыми подпространствами M относительно L. Если, кроме того, задано представление ρ алгебры M в конечномерном векторном пространстве V, для к-рого $\rho(L)$ – расщепляемая алгебра Ли линейных преобразований V, и

$$V = V_\sigma \oplus V_\delta \oplus ... \oplus V_\tau$$

– соответствующее весовое разложение V относительно L, то

$$\rho(M_\alpha)(V_\sigma) \subseteq V_{\alpha+\sigma},$$

когда $\alpha + \sigma$ есть вес V относительно L, и

$$\rho(M_\alpha)(V_\sigma) = 0$$

в противном случае. В частности, если $\alpha + \beta$ – корень, то

$$[M_\alpha, M_\beta] \subseteq M_{\alpha+\beta},$$

в остальных случаях

$$[M_\alpha, M_\beta] = 0.$$

Если характеристика поля k равна нулю, то веса $\sigma, \delta, \ldots, \tau$ и корни $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ являются линейными функциями на L, обращающимися в нуль на коммутанте алгебры L.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

В. Л. Попов.

ВЕСОВОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО – см. *Вес.*

ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО – конечномерное пространство V, удовлетворяющее условию: если L – алгебра Ли над полем F, а ρ – ее представление в V, то существует такая функция $\alpha: L \to F$, что для любых $x \in V$, $l \in L$

$$x(l^{\rho} - \alpha(l)1)^k = 0$$

при некотором целом $k > 0$. Функция α называется весом. Тензорное произведение $\rho_1 \otimes \rho_2$ представлений ρ_1, ρ_2 алгебры L в В. п. V_1, V_2, принадлежащих весам α_1, α_2, соответственно, является представлением L в пространстве $V_1 \otimes V_2$, к-рое также оказывается В. п. и принадлежит весу $\alpha_1 + \alpha_2$.

Е. Н. Кузьмин.

ВЕСОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ – см. *Вес.*

ВЕСОВОЙ МОДУЛЬ – см. *Вес.*

ВЕСОМАЯ МАССА, тяготеющая масса, гравитационная масса,– мера способности тела создавать поле тяготения и испытывать воздействие этого поля; в заданном поле тяготения сила, испытываемая телом, пропорциональна его весомой массе.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961.

М. И. Войцеховский.

ВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА, особая точка многозначного характера,– изолированная *особая точка a* аналитической функции $f(z)$ одного комплексного переменного z такая, что *аналитическое продолжение* какого-либо элемента функции $f(z)$ вдоль замкнутого пути, охватывающего a, приводит к новым элементам $f(z)$. Точнее, a называется точкой ветвления, если существуют:

1) кольцо

$$V = \{z;\ 0 < |z-a| < \rho\},$$

в к-ром $f(z)$ аналитически продолжается по любому пути;

2) точка $z_1 \in V$ и какой-либо элемент функции $f(z)$, представленный степенным рядом

$$\Pi(z_1; r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z - z_1)^\nu$$

с центром z_1 и радиусом сходимости $r > 0$, аналитич. продолжение к-рого вдоль окружности $|z-a| = |z_1 - a|$, проходимой один раз, напр. в положительном направлении, приводит к новому элементу $\Pi'(z_1;\ r')$, отличающемуся от $\Pi(z_1;\ r)$. Если после нек-рого минимального числа $k > 1$ таких обходов снова получается исходный элемент $\Pi(z_1;\ r)$, то это же самое будет иметь место для всех элементов *ветви аналитической функции* $f(z)$, определяемой в V элементом $\Pi(z_1;\ r)$. В таком случае a является В.т. конечного порядка $k-1$ для указанной ветви.

Е. Д. Соломенцев.

ВЕТВЛЕНИЯ УСЛОВИЕ – см. *Ветвящийся процесс.*

ВЕТВЬ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ – результат *аналитического продолжения* данного элемента аналитической функции, представленного степенным рядом

$$\Pi(a; r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z - a)^\nu$$

с центром a и радиусом сходимости $r > 0$, вдоль всевозможных путей, принадлежащих данной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $a \in D$. Таким образом, В. а. ф. определяется элементом $\Pi(a;\ r)$ и областью D. Для вычисления применяются только однозначные, или регулярные, В. а. ф., к-рые существуют не для всех областей D, принадлежащих области существования *полной аналитической функции.* Напр., в разрезанной комплексной плоскости $D = \mathbb{C} \setminus \{z = x;\ -\infty \leqslant x \leqslant 0\}$ многозначная аналитич. функция $w = \operatorname{Ln} z$ допускает регулярную В. а. ф.

$$w = \ln z = \ln|z| + i \arg z,\ |\arg z| < \pi,$$

– главное значение логарифма, а в кольце $D = \{z;\ 1 < |z| < 2\}$ выделение регулярной В. а. ф. $w = \operatorname{Ln} z$ невозможно.

Е. Д. Соломенцев.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС – *случайный процесс*, описывающий эволюцию во времени, которая состоит из последовательности актов размножения и взаимного превращения каких-либо объектов друг в друга. Элемент случайности в эволюции системы связан как с неопределенностью момента события размножения (превращения), так и с неопределенностью типа этого события. Примерами явлений, изучаемых в физике, химии, биологии, к-рые могут быть описаны В. п., служат цепные реакции, размножение вторичных частиц при воздействии излучения на вещество (электронно-фотонные и нуклонные каскады), каскады распадов частиц, рост биологич. популяций. Основным свойством, к-рое математически характеризует В. п., является предположение о независимости событий размножения (превращения) друг от друга. Наиболее употребительны в приложениях марковские В. п. (см. *Марковский процесс*) и среди них наиболее изученными являются процессы однородные во времени. В. п. $\{\xi(t)\}$ можно рассматривать как при дискретном времени, $t \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множество целых неотрицательных чисел), так и при непрерывном времени $t \in (0, \infty)$. Однородный марковский В. п. представляет собой однородную *Маркова цепь* при $t \in \mathbb{N}$, либо цепь Маркова с непрерывным временем при $t \in (0, \infty)$ со счетным набором состояний. Напр., дискретный марковский В. п. $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ с одним типом частиц и одной частицей в начальном состоянии, когда значения ξ_t принадлежат $\mathbb{N}$, определяется условиями (процесс Гальтона–Ватсона)

$$\xi_0 = 1, \quad \mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = p_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

$$P_{jk} = \mathsf{P}\{\xi_{n+1} = k | \xi_n = j\} = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_j = k} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}.$$

Последнее условие называется условием ветвления. Значение выборочных функций процесса интерпретируется как число частиц в момент t. Так как процесс $\{\xi_t\}$, по определению, должен быть марковским и поэтому P_{jk} является матрицей условных вероятностей перехода из состояния j в состояние k, то для производящей функции распределения вероятностей для числа частиц в n-м поколении

$$F_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \mathsf{P}\{\xi_t = k\}$$

при условии $\xi_0 = 1$, получается рекуррентное уравнение

$$F_t(x) = F(F_{t-1}(x)),$$

где

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x^k$$

– производящая функция для распределения вероятностей случайной величины ξ_1. Это положение является типичным при изучении марковских В. п. Вместо изучения вероятностей перехода $\mathsf{P}\{\xi_{t+s} = k | \xi_t = j\}$ на основе уравнения Колмогорова–Чепмена удобнее изучать производящие функции для распределения вероятностей значений процесса для каждого момента времени. Напр., рассмотрим аналогичный приведенному выше марковский В. п. с непрерывным временем и одним типом частиц, к-рый определяется как однородная цепь Маркова с непрерывным временем $\{\xi(t),\ t \in (0, \infty)\}$, $\xi(t) \in \mathbb{N}$, переходные вероятности

$$p_{jk}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t + t_0) = k | \xi(t_0) = j\}$$

к-рой удовлетворяют условию ветвления:

$$p_{jk}(t) = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_j = k} p_{1 i_1}(t)\, p_{1 i_2}(t) \ldots p_{1 i_j}(t).$$

Для производящей функции имеет место функциональное уравнение

$$F(t + s;\ x) = F(t;\ F(s;\ x)).$$

Находят приложение в задачах математич. физики В. п., не являющиеся однородными, в к-рых учитывается «возраст» частиц, а также немарковские В. п. (см. *Яноши уравнение*).

Лит.: [1] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [2] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971. *Ю. П. Вирченко.*

ВЕЩЕСТВЕННАЯ АЛГЕБРА ЛИ – см. *Ли алгебра.*

ВЕЩЕСТВЕННАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ – см. *Клейнова поверхность.*

ВЕЩЕСТВЕННАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Клейнова поверхность.*

ВЕЩЕСТВЕННОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО – см. *Суперпространство.*

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ – см. *Аналитический функционал.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ в физике – воздействие тел или частиц друг на друга, приводящее к изменению состояния их движения. В механике Ньютона взаимное действие тел друг на друга характеризуется *силой*. Более общей характеристикой В. является *потенциальная энергия*.

Первоначально в физике утвердилось представление о том, что В. между телами может осуществляться непосредственно через пустое пространство, к-рое не принимает никакого участия в передаче В.; при этом передача В. происходит мгновенно. Так, считалось, что перемещение Земли должно сразу же приводить к изменению силы тяготения, действующей на Луну. В этом состояла так наз. концепция дальнодействия.

Однако эти представления были оставлены как не соответствующие действительности после открытия и исследования электромагнитного поля. Было доказано, что В. электрически заряженных тел осуществляется не мгновенно и перемещение одной заряженной частицы приводит к изменению сил, действующих на другие частицы, не в тот же момент, а спустя конечное время. В разделяющем частицы пространстве происходит нек-рый процесс, к-рый распространяется с конечной скоростью. Соответственно имеется «посредник», осуществляющий В. между заряженными частицами. Этот посредник был назван электромагнитным полем. Каждая электрически заряженная частица создает электромагнитное поле, действующее на другие частицы. Скорость распространения электромагнитного поля равна скорости света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Возникла новая концепция – близкодействия, к-рая позже была распространена и на любые другие В. Согласно этой концепции, В. между телами осуществляется посредством тех или иных полей, непрерывно распределенных в пространстве. Так, всемирное тяготение осуществляется гравитационным полем.

После появления квантовой теории поля представление о В. существенно изменилось. Согласно этой теории, любое поле представляет собой совокупность частиц – *квантов* этого поля. Каждому полю соответствуют свои частицы. Напр., квантами электромагнитного поля являются *фотоны*, то есть фотоны являются переносчиками этого В. Аналогично другие виды В. возникают в результате обмена между частицами квантами соответствующих полей.

Несмотря на разнообразие воздействий тел друг на друга (зависящих от В. слагающих их элементарных частиц), в природе, по современным данным, имеется лишь 4 типа фундаментальных В. Это (в порядке возрастания интенсивности В.): гравитационное взаимодействие, слабое взаимодействие (отвечающее за большинство распадов и многие превращения элементарных частиц), электромагнитное взаимодействие, сильное взаимодействие (обеспечивающее, в частности, связь частиц в атомных ядрах). Интенсивность В. определяется соответствующей константой взаимодействия, или константой связи. В частности, для электромагнитного В. константой связи является электрич. заряд. Квантовая теория электромагнитного В.– квантовая электродинамика – превосходно описывает все известные электромагнитные явления. Слабое В. осуществляется посредством промежуточных векторных бозонов. Найдена глубокая связь слабого В. с электромагнитным, что привело к их объединению в электрослабое взаимодействие. Основу сильного В., по современным представлениям, составляет В. между составными частями адронов – *кварками*. Это В., переносчиками к-рого служат *глюоны*, определяется особой константой взаимодействия – *цветом* и описывается квантовой хромодинамикой. В. адронов друг с другом представляет собой лишь остаточный эффект межкварковых сил, подобно тому как молекулярные силы – остаточный эффект кулоновского В. электронов и ядер молекул. Делаются попытки объединения слабого, электромагнитного и сильного В. (так наз. *великого объединения модели*), а также всех видов В., включая гравитационное (см. *Супергравитация*). *Г. Я. Мякишев.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОНСТАНТА – см. *Взаимодействие, Связи константа.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБЛАСТЬ – область $\Omega_n(t)$ в конфигурационном пространстве классической статистической системы n частиц ($\mathbb{R}^{\nu n}$, $\nu = 1, 2, 3$) такая, что если координаты частиц $(x_1, ..., x_n) \in \Omega_n(t) \subset \mathbb{R}^{\nu n}$, то все n частиц могут провзаимодействовать друг с другом за время t, то есть система n частиц может существовать как единое целое (объем В. о. зависит от начальных импульсов частиц $p_1, ..., p_n$). Напротив, если $(x_1, ..., x_n) \subset \mathbb{R}^{\nu n} \setminus \Omega_n(t)$, то система распадается как минимум на 2 группы частиц, невзаимодействующих друг с другом на отрезке времени $[0, t]$. Понятие В. о. введено Д. Я. Петриной [1].

Для одномерных ($\nu = 1$) систем частиц с парным финитным потенциалом взаимодействия $\Phi(|x|) \in C^2(2a, \infty)$ с твердой сердцевиной (радиуса $a > 0$) средний по максвелловскому распределению объем В. о. можно оценить сверху так (A, B, C, $D < \infty$ – постоянные, зависящие от потенциала взаимодействия):

$$V_{\text{ср}}(\Omega_n(t)) \leqslant A^n (Bt^2 + Ct + D)^{\nu n} \cdot n^n. \qquad (*)$$

В случае $\nu > 1$ оценка, аналогичная (*), получена с использованием дополнительных ограничений технич. характера на потенциал и допустимые начальные данные (см. [3]).

Использование оценки (*) позволяет доказать существование термодинамич. предела для последовательности функций распределения, удовлетворяющих *Боголюбова уравнениям*.

Лит.: [1] Петрина Д. Я., «Теоретич. и математич. физика», 1979, т. 38, с. 230; [2] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985; [3] Petrina D. Ja., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V., «Sov. Sci. Rev., C, Math. Phys. Rev.», 1988, v. 7, p. 281. *П. В. Малышев.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТЕНЦИАЛ – скалярная энергетическая характеристика воздействия силового поля на внесенную в него частицу (тело). Для частицы в электростатич. (гравитационном) поле В. п. равен отношению потенциальной энергии взаимодействия частицы с полем к величине ее заряда (массы). Иными словами, В. п. с полем для частицы с единичным зарядом (массой) равен работе, к-рую необходимо затратить, чтобы переместить частицу из точки, потенциал к-рой условно принимается равным нулю, в данную точку поля.

Потенциальная энергия системы n частиц в общем случае определяется так:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \Phi^{(k)}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right),$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{\nu}$, $\nu = 1, 2, 3$, $i \in \{1, ..., n\}$ – координаты частиц, а Φ^k – k-частичные В. п. В большинстве случаев предполагается, что все В. п., кроме парных ($k = 2$), равны нулю, но в нек-рых задачах используются и многочастичные потенциалы ($k > 2$), $\Phi^{(1)}$ обычно имеет смысл В. п. с внешним полем. Потенциальная энергия системы частиц с парным В. п. имеет вид:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Phi\left(x_i, x_j\right),$$

здесь $\Phi \equiv \Phi^{(2)}$. Для системы тождественных частиц потенциальная энергия и В. п. инвариантны относительно произвольной перестановки аргументов, то есть

$$U(x_1, ..., x_n) = U(x_{i_1}, ..., x_{i_n}),$$

где $\{i_1, ..., i_n\}$ – произвольная перестановка элементов множества $\{1, ..., n\}$. Парный В. п. Φ обычно предполагается трансляционно-инвариантным, то есть $\Phi(x_i, x_j) = \Phi(x_i - x_j)$. Если, кроме того, $\Phi(x_i, x_j) \equiv \Phi(x_j, x_i)$, то $\Phi(x) = \Phi(-x)$, где $x \in \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$. В различных задачах классич., квантовой и статистич. механики на В. п. могут налагаться дополнительные условия различного рода: непрерывности (непрерывная дифференцируемости с одной или несколькими производными), сферич. симметричности, устойчивости, сверхустойчивости, регулярности (регулярности снизу), быстрого убывания и др. Удачный выбор модельного В. п. часто позволяет решить задачи, не поддающиеся исследованию для «реалистичного» В. п.

Нек-рые примеры часто используемых В. п. см. в ст. *Взаимодействия потенциал* с твердой сердцевиной, *Леннард – Джонса потенциал взаимодействия, Кулоновский потенциал взаимодействия, Неустойчивый потенциал взаимодействия, Юкавы потенциал взаимодействия.* См. также *Устойчивый потенциал взаимодействия, Сверхустойчивый потенциал взаимодействия, Регулярный потенциал взаимодействия, Быстроубывающий потенциал взаимодействия.*

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985. *П. В. Малышев.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТЕНЦИАЛ с твердой сердцевиной – парный *взаимодействия потенциал* вида

$$\Phi(|r|) = \begin{cases} \infty, & |r| < a, \\ \varphi(|r|), & |r| \geqslant a, \end{cases}$$

где $\varphi(r)$, как правило,– гладкая ограниченная функция, $r \in \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, $a > 0$ – так наз. радиус твердой сердцевины. Часто предполагают, что $\varphi'(a+0) = 0$. Если $\varphi \equiv 0$, то при $\nu = 3$ В. п. с твердой сердцевиной Φ называется потенциалом твердых (упругих) сфер (шаров), а в двумерном и одномерном пространствах, соответственно,– потенциалом твердых дисков (кругов) или потенциалом твердых стержней (отрезков). Взаимодействие твердых сфер (дисков, стержней) сводится к мгновенным упругим соударениям (при расстоянии между центрами, равном $2a$). Во время соударения частицы обмениваются импульсами согласно формулам:

$$\boldsymbol{p}_1' = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)),$$
$$\boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)),$$

где $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ и $\boldsymbol{p}_1'$, $\boldsymbol{p}_2'$ – импульсы, соответственно, до и после столкновения, а $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, направленный вдоль прямой, соединяющей в момент столкновения центры 1-й и 2-й частиц, к центру 1-й. Эти соотношения – следствие законов сохранения энергии и импульса.

Можно рассматривать и В. п. с твердой сердцевиной, имеющей форму, отличную от сферической.

В. п. с твердой сердцевиной – класс модельных потенциалов взаимодействия, широко используемых в различных задачах статистич. механики (решаемых как аналитическими, так и численными методами).

Лит.: [1] Резибуа П., Де Ленер М., Классическая кинетическая теория жидкостей и газов, пер. с англ., М., 1980; [2] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Лекции по квантовой статистической механике, М., 1984. *П. В. Малышев.*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, представление Дирака,– одно из основных представлений, используемых в квантовой теории поля.

В отличие от *Шредингера представления* и *Гейзенберга представления* в В. п. как операторы, так и векторы состояний зависят от времени. Характер этой зависимости определяется разбиением гамильтониана H в представлении Шредингера на два:

$$H = H_0 + H_I,$$

где H_0 – невозмущенный гамильтониан, H_I – гамильтониан взаимодействия.

Вектор состояния в В. п. $|\psi_{\text{вз}}(t)\rangle$ связан с вектором состояния в представлении Шредингера $|\psi_{\text{шр}}(t)\rangle$:

$$|\psi_{\text{вз}}(t)\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) |\psi_{\text{шр}}(t)\rangle.$$

Эквивалентность различных представлений означает независимость матричных элементов операторов от используемого представления. Любой оператор в В. п. и соответствующий ему оператор в представлении Шредингера связаны следующей формулой:

$$A_{\text{вз}}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) A \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right).$$

Если оператор $A_{\text{вз}}(t)$ не зависит от времени явно, то

$$\frac{dA_{\text{вз}}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_0, A_{\text{вз}}(t)],$$

то есть $A_{\text{вз}}(t)$ зависит от t так же, как операторы в представлении Гейзенберга при отсутствии взаимодействия: $H_I = 0$.

Уравнение Шредингера в В. п. принимает вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{\text{вз}}(t)\rangle = H_{I,\text{вз}} |\psi_{\text{вз}}(t)\rangle, \qquad (1)$$

где

$$H_{I,\text{вз}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) H_I \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right).$$

Уравнение (1) эквивалентно следующему уравнению для оператора эволюции $U(t, t_0)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_{I,\text{вз}} U(t, t_0), \qquad (2)$$
$$U(t_0, t_0) = 1.$$

Оператор $U(t, t_0)$ определяется равенством:

$$U(t, t_0) |\psi_{\text{вз}}(t_0)\rangle = |\psi_{\text{вз}}(t)\rangle.$$

В задачах рассеяния принято считать, что начальное состояние относится к $t = -\infty$, конечное – к $t = +\infty$. Оператор S-матрицы и оператор эволюции в В. п. связаны следующим образом:

$$S = \lim_{t_2 \to +\infty,\, t_1 \to -\infty} U(t_2, t_1).$$

Значение В. п. в квантовой теории определяется прежде всего тем, что в этом представлении удобно развивать теорию возмущений. Решение уравнения (2) по теории возмущений может быть представлено следующей T-экспонентой:

$$U(t, t_0) = T \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} H_{I,\text{вз}}(t')\, dt'\right],$$

разложение к-рой в ряд дает обычную сумму *Фейнмана диаграмм.*

Уравнение (1) можно записать в ковариантной форме путем замены поверхности $t = \text{const}$ на произвольную пространственноподобную поверхность.

Математически корректное введение В. п. в рамках аксиоматич. квантовой теории поля сталкивается с трудностями в связи с отсутствием хорошо определенного оператора, связывающего свободные и взаимодействующие поля.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, пер. с англ., М., 1963; [3] Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987; [4] Вайтман А. С., Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, пер. с англ., М., 1968. *Ю. С. Вернов.*

ВЗАИМОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ двух действительных случайных процессов $\{\xi(t)\}$, $\{\eta(t)\}$, $t \in T$, – функция

$$K_{\xi\eta}(t, t') = \mathsf{E}[\xi(t) - \mathsf{E}\xi(t)][\eta(t') - \mathsf{E}\eta(t')],$$

где E – математическое ожидание по совместному распределению вероятностей процессов $\{\xi(t)\}$ и $\{\eta(t)\}$. В. ф. харак-

теризует степень зависимости случайных значений двух действительных процессов в различные моменты времени. Если процессы статистически независимы, то $K_{\xi\eta}(t,t')=0$.

См. также *Автокорреляционная функция.* *Ю. П. Вирченко.*

ВИГНЕРА АНСАМБЛЬ – см. *Вигнера распределение.*

ВИГНЕРА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – распределение, характеризующее предельную спектральную функцию (плотность состояний) в гауссовском симметрическом ансамбле матриц (ансамбле Вигнера). Этот ансамбль вводится следующим образом.

Пусть X_{ij}, $n\geqslant i\geqslant j\geqslant 1$,– независимые действительные гауссовские величины,

$$\mathsf{E}X_{ij}=0;$$

$$\mathsf{D}X_{ij}=1,\ i\neq j;\quad \mathsf{D}X_{ii}=2;\quad X_{ij}=X_{ji},\ i<j;$$

$$A_n=n^{-1/2}\|X_{ij}\|;\quad \lambda_i^{(n)},\ i=1,2,\ldots,n,$$

– собственные числа матрицы A_n. При $n\to\infty$ возникает предельная спектральная функция распределения

$$N(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} n(\tau)\,d\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\lambda_i^{(n)}<\lambda^{(1)},$$

причем плотность состояний $n(\lambda)$ явно вычисляется:

$$n(\lambda)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\ \chi_{|\lambda|\leqslant 1}.$$

Последняя и называется полукруговым законом Вигнера. Ансамбль Вигнера обладает свойством ортогональной инвариантности: $A_n=O_1A_nO_2$, где O_1 и O_2 – неслучайные ортогональные матрицы. В. р. используют в качестве модели, описывающей спектральные свойства тяжелых ядер.

Лит.: [1] Гирко В. Л., Случайные матрицы, Киев, 1975.

С. А. Молчанов.

ВИГНЕРА СЛОЖЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТЫ – см. *Клебша – Гордана коэффициенты.*

ВИГНЕРА ТЕОРЕМА – теорема, характеризующая в схеме Неймана для квантовой теории симметрии физической системы, интерпретируемые как биекции ν множества чистых состояний – единичных лучей $\hat{\varphi}$ гильбертова пространства H – сохраняющие вероятности перехода

$$|(\hat{\varphi},\hat{\psi})|^2=|(\nu\hat{\varphi},\nu\hat{\psi})|^2,$$

где вектору $\varphi\in H$ отвечает $\hat{\varphi}=\{\varepsilon^{i\alpha}\varphi,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$, а $(\hat{\varphi},\hat{\psi})=(\varphi,\psi)$. По В. т. симметрия осуществляется либо унитарным, либо антиунитарным оператором U на H (то есть $\nu\hat{\varphi}=(\widehat{U\varphi})$), определенным с точностью до фазового множителя (см. [1], [2]). Вследствие этого связная группа Ли симметрий осуществима (проективным) унитарным представлением в H.

Преобразование одномерных проекторов, отвечающее ν, распространимо до аффинного взаимнооднозначного отображения множества матриц плотности (нормальных состояний алгебры Неймана $\mathcal{A}(H)$) или, двойственным образом, до йорданова автоморфизма алгебры $\mathcal{A}(H)$. Имеется описание симметрий в современном алгебраич. подходе (см. [3]–[5]).

Лит.: [1] Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, [пер. с англ.], М., 1961; [2] Bargmann V., «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 862–68; [3] Братели У., Робинсон Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. C^*- и W^*-алгебры. Группы симметрий. Разложение состояний, пер. с англ., М., 1982; [4] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [5] Kadison R. V., «Topology», 1965, v. 3, suppl. 2, p. 177–98.

А. В. Булинский.

ВИГНЕРА ФОРМУЛА для последовательных измерений – формула, дающая распределение вероятностей исходов последовательности измерений квантовых наблюдаемых. Пусть X_1, ..., X_n – наблюдаемые с чисто точечным спектром, $E_j(x)$ – спектральный проектор j-й наблюдаемой, отвечающей собственному значению x. Тогда вероятность получить значения x_1, ..., x_n при последовательном точном измерении наблюдаемых X_1, ..., X_n в состоянии, задаваемом оператором плотности, есть

$$\mu_\rho(x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{Tr}\,E_n(x_n)U_{n-1}\ldots U_1E(x_1)\rho E(x_1)U_1^*\ldots U_{n-1}^*E_n(x_n),$$

где U_j – унитарный оператор эволюции между j-м и $(j+1)$-м измерением.

См. *Воспроизводимости гипотеза, Квантовое измерение, Хаос.*

Лит.: [1] Вигнер Е., Этюды о симметрии, пер. с англ., М., 1971, с. 141–59.

А. С. Холево.

ВИГНЕРА ФУНКЦИЯ – функция, являющаяся преобразованием Вейля статистического оператора (с точностью до множителя $(2\pi\hbar)^{3N}$, где N – число степеней свободы системы). s-частичная В. ф. есть, по определению,

$$f_s^w(q_1,p_1;\ldots;q_s,p_s)=(2\pi\hbar)^{-3s}\int dj_1\ldots dj_s\times$$

$$\times\exp\Big(-i\sum\nolimits_{n=1}^{s}j_np_n\Big)\mathrm{Tr}\Big\{\hat{\rho}\,\hat{\psi}^+\Big(q_1-\frac{\hbar}{2}j_1\Big)\ldots$$

$$\ldots\psi^+\Big(q_s-\frac{\hbar}{2}j_s\Big)\hat{\psi}\Big(q_s+\frac{\hbar}{2}j_s\Big)\ldots\hat{\psi}\Big(q_1+\frac{\hbar}{2}j_1\Big)\Big\},$$

где $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}(x)$ – вторично-квантованные операторы рождения – уничтожения частицы в точке x. В. ф. действительна и нормированна:

$$\int dp_1dq_1\ldots dp_sdq_s\,f_s^w=1.$$

В общем случае В. ф. не обязательно положительно определена. Среднее значение квантовой наблюдаемой $\hat{a}$ общего вида можно записать через В. ф.:

$$\langle\hat{a}\rangle=\sum\nolimits_{s=0}^{\infty}(s!)^{-1}\int dq_1dp_1\ldots dq_sdp_s\times$$

$$\times\,a_s(q_1,p_1;\ldots;q_s,p_s)f_s^w(q_1,p_1;\ldots;q_s,p_s),$$

где a_s – вейлевский символ s-частичного оператора $\hat{a}_s$. Для практич. вычислений удобно импульсное представление В. ф.:

$$f_s^w(q_1,p_1;\ldots;q_s,p_s)=(2\pi)^{-3s}\int dk_1\ldots dk_s\times$$

$$\times\exp\Big[-i\sum\nolimits_{n=1}^{s}k_nq_n\Big]\tilde{f}_s^w(k_1,p_1;\ldots;k_s,p_s),$$

где

$$\tilde{f}_s^w(k_1,p_1;\ldots;k_s,p_s)=\hbar^{-3s}\,\mathrm{Tr}\Big\{\hat{\rho}\,\hat{a}^+\Big(p_1-\frac{\hbar}{2}k_1\Big)\times\ldots$$

$$\ldots\times\hat{a}^+\Big(p_s-\frac{\hbar}{2}k_s\Big)\hat{a}\Big(p_s+\frac{\hbar}{2}k_s\Big)\ldots\hat{a}\Big(p_1+\frac{\hbar}{2}k_1\Big)\Big\}$$

есть фурье-образ В. ф. f_s^w по координатам q_1, ..., q_s; $\hat{a}^+(p)$, $\hat{a}(p)$ – операторы рождения – уничтожения в импульсном пространстве. Для пространственно однородной системы

$$\tilde{f}_s^w(k_1,p_1;\ldots;k_s,p_s)=\delta(k_1+\ldots+k_s)\,\tilde{\tilde{f}}_s^w(k_1,p_1;\ldots;k_s,p_s),$$

в частности, одночастичная В. ф. имеет вид:

$$\tilde{f}_1^w(k,p)=8\pi^3n\delta(k)\varphi^w(p),$$

где $\varphi^w(p)$ – функция распределения по импульсам. Важным преимуществом В. ф. является совпадение на ее языке структур классич. и квантовой механики, в частности, уравнения Лиувилля и цепочки кинетических уравнений.

Лит.: [1] Wigner E., «Phys. Rev.», 1939, v. 40, № 3, p. 749; [2] Балеску Р., Статистическая механика заряженных частиц, пер. с англ., М., 1967.

Д. П. Санкович.

ВИГНЕРА – БЕРГМАНА ТЕОРЕМА – см. *Пуанкаре группа.*

ВИДИМАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ – см. *Сингулярности пространства-времени.*

ВИКА ТЕОРЕМА – теорема квантовой теории, выражающая произведение (а также *хронологическое произведение*) n полевых операторов во *взаимодействия представлении* через сумму *нормальных произведений* этих же операторов, умноженных на перестановочные (или причинные) функции. Согласно этой доказанной Дж. Виком (G. Wick, 1950) теореме, обычное произведение локальных полевых операторов равно сумме всех соответствующих нормальных произведений со всевозможными спариваниями, включая и нормальное произведение без спариваний. Иными словами, произведение n полевых операторов $A_1, A_2, ..., A_n$ может быть представлено в виде суммы нормальных произведений (обозначается : ... :) со всевозможными спариваниями [заменами пары операторов на числовую (не операторную) функцию], то есть в виде суммы:

а) нормального произведения без спариваний

$$:A_1 A_2 \dots A_n:;$$

б) нормальных произведений с одним спариванием любых двух операторов A_i и A_j

$$\sum_{i\neq j} :A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_j} \dots A_n: \equiv$$

$$\equiv \sum_{i\neq j} A_i A_j \eta(i,j) :A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_n:$$

[здесь скобка $\underbrace{\ }$ снизу означает спаривание, $\eta = 1$ в случае операторов бозе-полей и $\eta(i, j)$ равно четности перестановок операторов ферми-полей от порядка $(1, 2, ..., i, ..., j, ..., n)$ к порядку $(i, j, 1, ..., i-1, i+1, ..., j-1, j+1, ..., n)$];

в) нормальных произведений с двумя всевозможными спариваниями (при $n \geqslant 4$)

$$\sum_{i\neq j\neq k\neq l} :A_1 \dots \underbrace{A_i \dots \underbrace{A_j \dots A_k} \dots A_i} \dots A_n:;$$

г) нормальных произведений с тремя всевозможными спариваниями (при $n \geqslant 6$) и т. д. При этом $A_i A_j$ определено как *вакуумное среднее* от произведения спариваемых операторов

$$\underbrace{A_i A_j} = \langle 0 | A_i A_j | 0 \rangle.$$

В. т. для хронологич. произведения n линейных операторов отличается только заменой простого спаривания на хронологическое (скобка сверху):

$$\overbrace{A_i A_j} = \langle 0 | T(A_i A_j) | 0 \rangle.$$

Из В. т. следует, что любой матричный элемент от обычного или хронологич. произведения линейных операторов в конечном счете выражается через произведения соответствующих спариваний. В квантовой теории поля это приводит к диаграммам Фейнмана, в квантовой статистике – к диаграммной технике для термодинамич. теории возмущений.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980.

Д. В. Ширков.

ВИЛЬСОНА КРИТЕРИЙ КОНФАЙНМЕНТА – предложенный К. Вильсоном [1] критерий, используемый при описании фаз в решеточной калибровочной теории – статистической системе, состоящей из элементов U_{ij} некоторой (калибровочной) группы, соответствующих ребрам решетки (i, j) в евклидовом пространстве произвольной размерности. Как показывают компьютерные вычисления, такие системы могут находиться в различных фазах в зависимости от группы, размерности пространства и значений параметров, определяющих способ вычисления статистич. средних (меру). Для идентификации фаз (то есть в качестве параметра порядка) используют вильсоновскую петлю – среднее от следа произведения групповых элементов, взятого вдоль замкнутого контура C на решетке

$$W(C) = \left\langle \mathrm{Tr} \prod_{i,j\in C} U_{ij} \right\rangle.$$

Фазе решеточного *конфайнмента* соответствует закон площадей

$$W(C) \sim \exp(-\alpha S(C)),$$

где $\alpha > 0$, $S(C)$ – площадь минимальной решеточной поверхности, натянутой на контур; это и есть критерий Вильсона. Эта фаза была обнаружена в 4-мерных решеточных калибровочных теориях, основанных на калибровочных группах $SU(3)$ и $SU(2)$. В псевдоевклидовом 4-мерном пространстве-времени для контура, вытянутого во времениподобном направлении, $W(C)$ имитирует рождение пары точечных противоположных цветовых зарядов, перемещение их вдоль мировых линий и последующую аннигиляцию. Закон площадей отвечает линейно растущему потенциалу взаимодействия зарядов. Это позволяет надеяться, что решеточный конфайнмент Вильсона имеет отношение к феноменологич. гипотезе конфайнмента. Точный смысл этого соответствия, однако, в настоящее время не ясен, поскольку вильсоновская петля является подходящим параметром только в чисто калибровочной (без кварков) решеточной теории (см. [2]).

Лит.: [1] Wilson K., «Phys. Rev.», 1974, v. D10, p. 2445–59; [2] Кройц М., Кварки, глюоны и решетки, пер. с англ., М., 1987.

С. Ю. Хлебников.

ВИЛЬЯМСОНА ТЕОРЕМА – см. *Квадратичный гамильтониан*; нормальная форма.

ВИНА ЗАКОН ИЗЛУЧЕНИЯ – см. *Планка закон излучения.*

ВИНЕРА ИНТЕГРАЛ – *функциональный интеграл* по специальной гауссовой мере в пространстве непрерывных функций – *Винера мере.* В. и. введен в работах Н. Винера (см., напр., [1]) как метод решения задач теории диффузии и броуновского движения. Для вычисления В. и. используют формулу

$$\int F(x(\tau))\, D_W(x) = \lim_{n\to\infty} (\pi\Delta t)^{-n/2} \int F(x_1, \dots, x_n) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{x_1^2}{\Delta t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{\Delta t} \right) dx_1 \dots dx_n, \qquad (1)$$

где $F(x(\tau))$ – ограниченный непрерывный функционал в пространстве непрерывных на $[0, t]$ функций таких, что $x(0) = 0$, $D_W(x)$ – мера Винера (см. [2] – [4]). Предел в правой части (1) символически можно записать в виде интеграла по траекториям

$$\int F(x(\tau)) \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \right) \prod_\tau dx(\tau).$$

Особый интерес представляет В. и. по условной мере Винера вида

$$\Psi(x,t) = \int \exp\left(-\int_0^t V(x(\tau))\, d\tau \right) D_{W(x,t)}(x), \qquad (2)$$

где $V(x) \geqslant 0$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция.

Ниже перечисляются наиболее важные результаты в теории В. и. Пусть $\Psi(x, t)$ – функция, определяемая формулой (2), тогда:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)\, dx = \int \exp\left(-\int_0^t V(x(\tau))\, d\tau \right) D_W(x)$;

2) $\Psi(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - V(x)\Psi$$

с начальными условиями

$$\Psi(x, 0) = \delta(x);$$

3) если $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ – собственные значения, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ – собственные функции задачи

$$\frac{1}{2}\varphi''(x) - V(x)\varphi(x) = -\lambda\varphi(x),$$

где $\varphi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, то справедливы формулы:

а) $\Psi(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\lambda_j t)\varphi_j(x)\varphi_j(0)$,

б) $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int \exp\left(-\int_0^t V(\xi + x(\tau))\, d\tau \right) D_{W[0,t]}(x) \right\} d\xi.$

Последнее представление позволяет свести вычисление статистич. сумм квантовомеханич. систем $\sum_i e^{-\beta E_i}$, где E_i – энергетич. уровни системы (собственные значения уравнения Шредингера), к вычислению соответствующего В. и.

Лит.: [1] Wiener N., «J. Math. Phys.», 1923, v. 2, № 3, p. 131–74; [2] его же, «Proc. London Math. Soc.», 1924, v. 22, № 6, p. 454–67; [3] Кац М., Вероятность и смежные вопросы в физике, пер. с англ., М., 1965; [4] Гельфанд И. М., Яглом А. М., «Успехи математич. наук», 1956, т. 11, в. 1, с. 77–114; [5] Ковальчик И. М., там же, 1963, т. 18, в. 1, с. 97–134; [6] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983.

С. А. Федотов.

ВИНЕРА МЕРА – вероятностная мера, определенная на множестве C-непрерывных при $t\in[0,\ 1]$ функций $x(t)$, $x(0)=0$, с равномерной метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|.$$

Схема построения В. м. следующая:

1) определяется мера на цилиндрич. множествах S вида

$$S:\{x(t);\ a_1<x(t_1)<b_1,\ \ldots,\ a_n<x(t_n)<b_n\},$$

где t_i заданы и удовлетворяют условию $0<t_1<t_2<\ldots<t_n<1$, по правилу

$$\mu(S)=\left\{\pi^n t_1\prod_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\right\}^{-1/2}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{t_1}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{t_{i+1}-t_i}\right\}dx_1\ldots dx_n;$$

2) $\mu(S)$, продолженная на борелевское замыкание цилиндрич. множеств, называется мерой Винера и обозначается $D_W(x)$.

Если при определении $\mu(S)$ не проводить интегрирование по x_n, положив $x_n=x$, $t_n=t$, то полученная после продолжения с S мера называется условной мерой Винера и обозначается $D_{W[x,\ t]}(x)$. В. м. введена Н. Винером [1].

Лит.: [1] Wiener N., «J. Math. Phys.», 1923, v. 2, № 3, p. 131–74; [2] Ковальчик И. М., «Успехи математич. наук», 1963, т. 18, в. 1, с. 97–134; [3] Гельфанд И. М., Яглом А. М., там же, 1956, т. 11, в. 1, с. 77–114.

С. А. Федотов.

ВИНЕРОВСКАЯ ЕМКОСТЬ – см. *Емкость множества.*

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС – *диффузионный процесс*, являющийся моделью броуновского движения. В. п. назван в честь Н. Винера (N. Wiener), впервые (1923) построившего математически строгую теорию броуновского движения. Стандартный В. п. является *марковским процессом* W_t со следующими свойствами:

а) $W_{t=0}=0$, $\mathsf{E}(W_t-W_s)=0$, $\mathsf{D}(W_t-W_s)=t-s$, $t\geqslant s$,

б) для любых двух непересекающихся интервалов $(t_1,\ t_2)$ и $(t_3,\ t_4)$, $t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant t_4$, приращения $W_{t_4}-W_{t_3}$ и $W_{t_2}-W_{t_1}$ – независимые случайные величины со свойствами, указанными в а), аналогичное свойство имеет место и для n непересекающихся интервалов.

Свойство независимости приращений позволяет использовать В. п. для построения любых диффузионных процессов. Так, напр., процесс броуновского движения X_t описывается *стохастическим дифференциальным уравнением* вида

$$dX_t=\sqrt{\sigma}\,dW_t.$$

В этом случае уравнение Фоккера – Планка и обратное уравнение Колмогорова для переходных плотностей вероятности совпадают и сводятся к классич. уравнению диффузии:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}p(x,y|\tau)=\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,y|\tau).$$

Переходная плотность $p(x,\ y|\tau)$ есть фундаментальное решение этого уравнения:

$$p(x,y|\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\tau}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma\tau}\right\}.$$

Корреляционная функция В. п. равна

$$\mathsf{E}(W_tW_s)=\min(t,\ s).$$

Среднеквадратичное смещение броуновской частицы $\mathsf{E}\{X_t^2\}=\sigma t$ возрастает линейно во времени. Такая скорость роста характерна для пространственной диффузии.

Траектория В. п. является с вероятностью 1 нигде не дифференцируемой функцией, то есть скорость броуновской частицы не определена. Это обстоятельство является идеализацией, отражающей тот факт, что траектории реальной броуновской частицы «нерегулярны» и не могут быть прослежены в деталях.

В. п. W_τ, $0\leqslant\tau\leqslant t$, допускает следующее канонич. представление

$$W_\tau=\sum_{k=0}^{\infty}W_k u_k(\tau),$$

где коэффициенты разложения W_k – независимые гауссовские случайные величины такие, что

$$\mathsf{E}(W_k)=0,\ \mathsf{E}(W_kW_l)=\lambda_k\delta_{kl},$$

здесь λ_k – собственные числа, $u_k(\tau)$ – собственные функции оператора

$$B(\tau,\tau')=\min(\tau,\tau'),\quad \lambda_k=t^2\Big/\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)^2,$$

$$\int_0^t d\tau' B(\tau,\tau')u_k(\tau')=\lambda_k u_k(\tau),\quad u_k(\tau)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\frac{\tau}{t}\right).$$

Вероятностные характеристики броуновского движения могут быть описаны в терминах распределения вероятностей $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}W_s$:

$$\mathsf{P}\left\{\max_{0\leqslant s\leqslant t}W_s\geqslant a\right\}=2\mathsf{P}\{W_s>a\}=\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2}\int_a^\infty dx\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$

где $0\leqslant a<\infty$, t – фиксировано; или в терминах распределения вероятностей времени τ_a первого достижения В. п. фиксированной точки $a>0$:

$$\mathsf{P}\{\tau_a\geqslant t\}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{a/\sqrt{t}}dx\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

где $0\leqslant t<\infty$, a – фиксировано.

Вероятность того, что W_t имеет, по крайней мере, один нуль в интервале $(t_0,\ t_1)$ при условии $W_{t=0}=0$, равна

$$P=\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{t_0}{t_1}}.$$

Аналогом В. п. для векторного параметра $t=(t_1,\ \ldots,\ t_n)$ являются случайные поля, введенные П. Леви [2].

Многомерный винеровский процесс W_t определяется следующим образом:

$$W_t=\{W_t^{(1)},\ W_t^{(2)},\ \ldots,\ W_t^{(n)}\},$$

$$\mathsf{E}=\{W_t^{(i)}\}=0,\ \mathsf{E}\{W_t^{(i)},\ W_s^{(j)}\}=\delta_{ij}\min(t,\ s),$$

и подчиняется многомерному уравнению Фоккера – Планка

$$\frac{\partial}{\partial t}p(wt/w_0t_0)=\frac{1}{2}\sum_i\frac{\partial^2}{\partial w_i^2}p(wt/w_0t_0),$$

решение к-рого имеет вид:

$$p(wt/w_0\,t_0)=\left(2\pi(t-t_0)\right)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{(w-w_0)^2}{2(t-t_0)}\right\},\quad t>t_0.$$

Лит.: [1] Wiener N., «J. Math. Phys.», 1923, v. 2, № 3, p. 131–74; [2] Levý P., Prossesus stochastiques et mouvement brownien, 2 éd., P., 1965; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей (Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы), 3 изд., М., 1987.

Н. В. Ласкин.

ВИНЕРОВСКИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ – интеграл по *Винера мере* от какого-либо функционала в пространстве $C_k^{x_0}(0,\ T)$ k-мерных непрерывных траекторий $x(t)$, определенных для значений параметра t на отрезке $[0,\ T]$, причем $x(0)=x_0$. Если $W_{0,T}^{x_0}$ – мера Винера в $C_k^{x_0}(0,\ T)$ (распределение вероятностей *винеровского процес-*

ca, начинающегося в точке x_0), то для любого функционала $F[x(\tau)]$ В. ф. и. равен

$$\int_{C_k^{x_0}(0,T)} F[x(\tau)]\,dW_{0,T}^{x_0}.$$

Часто такие интегралы определяют по условной мере $W_{0,T}^{x_0,y_0}$, порождаемой мерой Винера на пространстве траекторий $x(t)$ из $C_k^{x_0}(0, T)$ таких, что $x(T)=y_0$. В. ф. и. введен Н. Винером (N. Wiener, 1923).

Применения В. ф. и. в математич. физике связаны с известным представлением *Грина функции* $G(x, y)$ для *диффузии уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+V(x)u,$$

где Δ – оператор Лапласа, $V(x)$ – потенциал:

$$G(x,y)=\int \exp\left\{-\int_0^T V[x(\tau)]\,d\tau\right\} dW_{0,T}^{x,y}.$$

Корректность определения В. ф. и. служит математич. обоснованием использования *функциональных интегралов* в квантовой механике.

Лит.: [1] Кац М., Вероятность и смежные вопросы в физике, пер. с англ., М., 1965; [2] Глимм Д., Джаффе А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984. *Р. А. Минлос.*

ВИНТ – см. *Винтовое движение.*

ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ – движение твердого тела, слагающееся из прямолинейного *поступательного движения* с некоторой скоростью v и *вращательного движения* с некоторой угловой скоростью ω вокруг оси aa_1, параллельной направлению поступательной скорости (рис. 1). Тело, совершающее стационарное В. д., то есть В. д., при к-ром

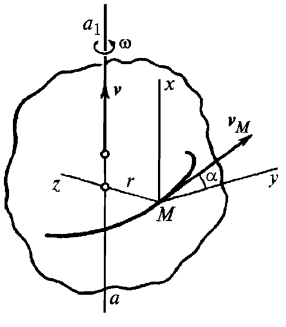


Рис. 1. Винтовое движение тела, прямолинейно движущегося по оси aa_1 и вращающегося вокруг этой оси.

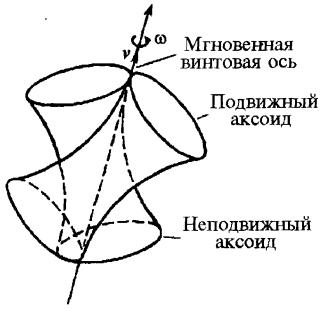


Рис. 2. Подвижный и неподвижный аксоиды.

направление оси aa_1 остается неизменным, называется винтом; ось aa_1 – осью винта; расстояние, проходимое любой точкой тела, лежащей на оси aa_1, за время одного оборота, – шагом h винта, величина $p=v/\omega$ – параметром винта. Если вектор ω направлен в сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки, то при векторах v и ω, направленных в одну сторону, винт называется правым, а в разные стороны – левым.

Скорость и ускорение любой точки M тела, отстоящей от оси aa_1 на расстоянии r, численно равны

$$v_M=\sqrt{v^2+r^2\omega^2};\quad w_M=\sqrt{w^2+r^2(\varepsilon^2+\omega^4)},$$

где $w=dv/dt$, $\varepsilon=d\omega/dt$.

Когда параметр p постоянен, шаг винта $h=2\pi v/\omega=2\pi p$ также постоянен. В этом случае всякая точка M тела, не лежащая на оси aa_1, описывает винтовую линию, касательная к к-рой в любой точке образует с плоскостью yz, перпендикулярной оси aa_1, угол $\alpha=\operatorname{arctg}(h/2\pi r)=\operatorname{arctg} v/\omega r$.

Любое сложное движение твердого тела слагается в общем случае из серии элементарных или мгновенных В. д. Ось мгновенного В. д. называется мгновенной винтовой осью. В отличие от оси стационарного В. д., мгновенная винтовая ось непрерывно изменяет свое положение как по отношению к системе отсчета, в к-рой рассматривается движение тела, так и по отношению к самому телу, образуя при этом две линейчатые (соприкасающиеся по прямой линии) поверхности, называемые соответственно неподвижным и подвижным аксоидами (рис. 2). Геометрич. картину движения тела можно в общем случае получить качением с продольным проскальзыванием подвижного аксоида по неподвижному, осуществляя таким путем серию тех последовательных В. д., из к-рых слагается движение тела. *С. М. Тарг.*

ВИРИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ – представление давления неидеального газа в виде ряда по степеням плотности $N/V=v^{-1}$:

$$P=kTv^{-1}(1+B_2(T)v^{-1}+B_3(T)v^{-2}+\ldots),$$

где N – число молекул, V – объем, T – температура; иногда В. р. называют также вириальным уравнением состояния (см. *Состояния уравнение*). Первый член соответствует давлению идеального газа, коэффициенты $B_2(T)$, $B_3(T)$... – вириальные коэффициенты, соответствующие учету взаимодействий молекул в группах из двух, трех и т. д. молекул, поэтому В. р. называют также групповым разложением. (Аналогичные разложения имеют место и для других термодинамич. функций.) Обычно предполагают, что газ подчиняется классич. статистике и его молекулы взаимодействуют с помощью парного потенциала сил $U(r)$. Второй вириальный коэффициент, равный

$$B_2(T)=2\pi\int_0^\infty[1-\exp(-U(r)/kT)]r^2\,dr,$$

позволяет получить простейшее уравнение состояния для неидеального газа.

Впервые В. р. введено из эмпирич. соображений Х. Камерлинг-Оннесом (H. Kamerlingh-Onnes, 1912). В дальнейшем В. р. получали с помощью теоремы вириала. Полное В. р. можно вывести на основе канонич. или большого канонич. распределения Гиббса при помощи группового разложения, полученного Х. Урселлом (H. Ursell, 1927) и обобщенного Дж. Майером (J. Mayer, 1937):

$$Pv/kT=1-\sum_{n\geqslant 1} n\beta_n/v^n\,(n+1),$$

где β_n – неприводимые (не поддающиеся упрощению) групповые интегралы, связанные с вириальными коэффициентами соотношением

$$B_n=-\beta_{n-1}(n-1)/n.$$

Для них справедливы выражения:

$$\beta_1=V^{-1}\int f_{12}\,dr_1dr_2;\quad \beta_2=(1/2!V)\int f_{12}f_{23}f_{31}\,dr_1dr_2dr_3;$$

$$\beta_3=(1/3!V)\int(3f_{12}f_{23}f_{34}f_{41}+6f_{12}f_{23}f_{34}f_{41}f_{13}+$$
$$+f_{12}f_{23}f_{34}f_{41}f_{13}f_{24})\,dr_1dr_2dr_3dr_4;$$

$$f_{ij}=\exp(-U_{ij}/kT)-1.$$

Для вычисления β_n в любом порядке Дж. Майером разработана диаграммная техника.

В. р. справедливы лишь для достаточно малых плотностей, вдали от точки конденсации, когда не образуются большие комплексы взаимодействующих молекул и β_n можно считать не зависящими от объема V.

В. р. имеет место также для невырожденных квантовых газов, то есть при достаточно малой плотности.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976, гл. 7; [2] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [3] Хилл Т., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1960, гл. 5; [4] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., М., 1973, гл. 5. *Д. Н. Зубарев.*

ВИРТУАЛЬНАЯ ЧАСТИЦА – на языке *Фейнмана диаграмм* частица, для которой, в отличие от реальных свободных частиц, не выполняется условие

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2,$$

где E – энергия частицы, $\boldsymbol{p}$ – ее импульс, а m – масса. Имея в виду нарушение этого равенства, о В. ч. говорят, что они лежат вне массовой поверхности. На испускании и поглощении В. ч. основаны практически все физич. процессы.

Л. Б. Окунь.

ВИРТУАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ – см. *Возможное перемещение.*

ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИНЦИП – см. *Возможных перемещений принцип.*

ВИХРЕВОЕ ПОЛЕ – см. *Потенциал.*

ВИХРЬ векторного поля $\boldsymbol{a}$, ротор,– вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ в декартовой системе координат x, y, z в ориентированном евклидовом трехмерном пространстве, определяемый равенством

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left\{\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right\},$$

если координаты векторного поля $\boldsymbol{a}$ суть $\{a_x, a_y, a_z\}$.

См. также *Векторный анализ.* *В. В. Трофимов.*

ВКБ-МЕТОД – см. *Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна метод, Уизема метод.*

ВКБ-ФОРМУЛА – см. *Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна метод.*

ВЛАДИМИРОВА АЛГЕБРА – *алгебра* $H_+(C)$, состоящая из всех функций $f(z)$, аналитических в трубчатой области $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ (где C – открытый связный конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле), удовлетворяющих оценке

$$|f(z)| \leqslant Me^{a|y|}(1+|z|)^p \Delta_C^{-q}(y), \quad z = x+iy \in T^C,$$

с некоторыми M, a, p, q, зависящими от f, где $\Delta_C(y)$ – расстояние от точки $y \in C$ до границы конуса C. Множество $H_+(C)$ есть алгебра с единицей относительно обычных поточечных операций. Эта алгебра становится топологической при наделении ее естественной топологией индуктивного предела

$$H_+(C) = \limind_{a,p,q\to\infty} H_{a,p,q}(C),$$

где $H_{a,p,q}(C)$ – банаховы пространства всех функций $f(z)$, аналитических в T^C, с конечной нормой

$$|f| = \sup\{|f(z)|e^{-a|y|}(1+|z|)^{-p}\Delta_C^q(y); \quad z \in T^C\}.$$

Важной подалгеброй В. а. $H_+(C)$ является алгебра с единицей

$$H(C) = \limind_{p,q\to\infty} H_{0,p,q}(C).$$

В. а. используются в аксиоматич. квантовой теории поля, в теории функций многих комплексных переменных, в теории уравнений с частными производными, в теории обобщенных функций и т. п. Основой приложений В. а. является тот факт, что преобразование Лапласа L устанавливает топологич. изоморфизмы

$$L: \mathcal{I}'_{C_+^*} \cong H_+(C), \quad L: \mathcal{I}'_{C^*} \cong H(C),$$

где $C^* = \{\eta \in \mathbb{R}^n;\ y\eta \geqslant 0 \text{ для всех } y \in C\}$ – сопряженный конус, $\mathcal{I}'_{C_+^*}$ – сверточная (см. *Свертка*) алгебра *умеренных распределений* с носителями, ограниченными со стороны конуса C^*, и $\mathcal{I}'_{C^*}$ – ее подалгебра, состоящая из умеренных распределений с носителями в конусе C^*. Отсюда,

$$H_+(C) = H_+(\operatorname{ch} C), \ H(C) = H(\operatorname{ch} C),$$

где $\operatorname{ch} C$ – выпуклая оболочка конуса C, равенства понимаются как естественные изоморфизмы соответствующих топологич. пространств.

Всякая функция $f \in H_+(C)$ имеет граничное значение в классе умеренных распределений при $y \to 0$, то есть существует умеренное распределение $\operatorname{bv} f \in \mathcal{I}'$ такое, что

$$(\operatorname{bv} f, \Phi) = \lim_{y\to 0,\ y\in C} \int f(x+iy)\Phi(x)\,d^n x, \quad \Phi \in \mathcal{I}$$

(см. *Граничное значение* обобщенное).

Имеет место равенство

$$F[g] = \operatorname{bv} L[g], \ g \in \mathcal{I}'_{C_+^*},$$

где $F[g]$ – преобразование Фурье g (см. *Фурье преобразование* обобщенной функции).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] его же, Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. В. Жаринов.*

ВЛАДИМИРОВА ТЕОРЕМА о C-выпуклой оболочке – теорема об *аналитическом продолжении* голоморфных функций, заданных в областях типа Дайсона.

Пусть $C = C^+ \cup C^-$, $C^+ = -C^-$ – открытый острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$. Гладкая кривая называется C-подобной, если касательный вектор к ней в каждой точке x принадлежит конусу $x + C$. Под C-выпуклой оболочкой $B_C(\Omega)$ множества Ω понимается наименьшая открытая окрестность Ω в $\mathbb{R}^n$ такая, что вместе с каждым участком $[x', x'']$ C-подобной кривой из Ω она содержит множество $(x' + C^+) \cap (x'' + C^+)$.

В. т. утверждает, что всякая функция f, голоморфная в области $(\mathbb{R}^n + iC) \cup \widetilde{\Omega}$, где $\widetilde{\Omega}$ – комплексная окрестность области Ω, продолжается до голоморфной функции в области $(\mathbb{R}^n + iC) \cup \widetilde{B}_C(\Omega)$, где $\widetilde{B}_C(\Omega)$ – комплексная окрестность C-выпуклой оболочки $B_C(\Omega)$.

Теорема получена В. С. Владимировым (1960) в развитие *Боголюбова теоремы* «острие клина».

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] его же, в кн.: Проблемы математики и механики, Новосибирск, 1983, с. 15–32; [3] Владимиров В. С., Жаринов В. В., «Труды Математич. ин-та АН СССР», т. 175, М., 1986, с. 113–33. *В. В. Жаринов, Ю. Е. Хохлов.*

ВЛАСОВА УРАВНЕНИЕ – 1) кинетическое уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,q,p) = -\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial t} f(t,q,p) -$$
$$-\frac{\partial}{\partial p} f(t,q,p) \int_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} dq_1 dp_1 \frac{\partial}{\partial q} U(q-q_1) f(t,q_1,p_1),$$

где $U(q)$ – гладкая функция, $q \in \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, m, – масса частиц. В. у. описывает движение частиц в самосогласованном поле

$$\int dq_1 dp_1 U(q-q_1) f(t, q_1, p_1).$$

Впервые введено в статистич. механику А. А. Власовым (см. [1]). Строгие результаты, связанные с выводом В. у., получены в пределе среднего поля для интегрируемых начальных данных (см. [2]). *В. И. Герасименко.*

2) В. у.– система нелинейных уравнений, описывающая «бесстолкновительную» плазму (см. [1]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{vB}]\right)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = 0,$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\int v f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,d\boldsymbol{p},$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\int f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,d\boldsymbol{p},$$

где $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ – функция распределения, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ – векторы электромагнитного поля. В. у. рассматриваются как приближенные для функций (f, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$).

Лит.: [1] Власов А. А., «Журнал эксперимент. и теоретич. физики», 1938, т. 8, в. 3, с. 291–318; [2] Braun W., Hepp K., «Comm. Math. Phys.», 1977, v. 56, № 2, p. 101–13.

И. А. Кузин, В. П. Политюков.

ВЛОЖЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ M в многообразие N – гладкое отображение $f: M \to N$ такое, что его дифференциал $df_m: T_mM \to T_{f(m)}N$ является мономорфизмом (то есть $\operatorname{Ker} df_m = 0$) для каждой точки $m \in M$ и f – гомеоморфизм на свой образ $f(M)$. *В. В. Трофимов.*

ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ – см. *Дифференциальная форма.*

ВНЕШНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ – см. *Дифференциальная форма.*

ВНЕШНИЙ КОДИФФЕРЕНЦИАЛ – см. *Дифференциальная форма.*

ВНЕШНИХ СНОШЕНИЙ ОБЛАСТЬ – см. *Пространство-время* теории относительности.

ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА, алгебра Грассмана, векторного пространства V над полем k – ассоциативная алгебра над k, операция в которой обозначается знаком $\wedge$, порождающими элементами которой являются $1, e_1,...,e_n$, где $e_1,...,e_n$ – базис пространства V, а определяющие соотношения имеют вид:

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i;\ i, j = 1,...,n,\ e_i \wedge e_i = 0,$$
$$1 \wedge e_i = e_i \wedge 1 = e_i,\ i = 1,...,n,\ 1 \wedge 1 = 1.$$

В. а. не зависит от выбора базиса и обозначается $\wedge V$. Подпространство $\wedge^r V$, $r = 0, 1,...,$ в $\wedge V$, порожденное элементами вида $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_r}$, называется r-й внешней степенью пространства V. Имеют место равенства:

$$\dim \wedge^r V = C_n^r,\ r = 0,...,n,\ \wedge^r V = 0,\ r > n.$$

Кроме того,

$$v \wedge u = (-1)^{rs} u \wedge v,$$

если $u \in \wedge^r V$, $v \in \wedge^s V$. Элементы пространства $\wedge^r V$ называются r-векторами; их можно понимать также как кососимметрические r раз контравариантные тензоры в V.

r-векторы тесно связаны с r-мерными подпространствами в V: линейно независимые системы векторов $x_1,...,x_r$ и $y_1,...,y_r$ из V порождают одно и то же подпространство тогда и только тогда, когда r-векторы $x_1 \wedge ... \wedge x_r$ и $y_1 \wedge ... \wedge y_r$ пропорциональны. Этот факт был одним из отправных пунктов в исследованиях Г. Грассмана (H. Grassmann), к-рый ввел В. а. как алгебраич. аппарат для описания порождения многомерных подпространств одномерными. С помощью В. а. легко строится теория определителей. В. а. может быть определена и для более общих объектов. В форме исчисления внешних *дифференциальных форм* В. а. используется в качестве одного из основных формализмов в дифференциальной геометрии.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; [2] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970. *А. Л. Онищик.*

ВНЕШНЯЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА – см. *Дифференциальная форма.*

ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ – *краевые задачи* для эллиптических уравнений с частными производными соответственно в конечной (внутренней) D^+ и бесконечной (внешней) D^- областях, на которые данная замкнутая гладкая поверхность S, гомеоморфная сфере, разделяет евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Основное отличие внешней краевой задачи от внутренней состоит в том, что в ней необходимо дополнительно к краевому условию потребовать от решения определенного поведения на бесконечности, обеспечивающего единственность решения и являющегося естественным с точки зрения физич. происхождения данной задачи.

Напр., в случае внешней краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ (функция f предполагается достаточно гладкой и финитной) достаточно потребовать, чтобы решение $u(M)$ было регулярным на бесконечности, то есть чтобы

$$\lim_{r \to \infty} u(M) = 0, \quad r = |OM|. \tag{1}$$

В случае внешней краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в бесконечной плоской области $D^- \subset \mathbb{R}^2$ условие регулярности на бесконечности сводится к требованию, чтобы решение $u(M)$ было ограниченным на бесконечности:

$$u(M) = O(1),\ r \to \infty. \tag{2}$$

Кроме условий на бесконечности внешняя и внутренняя краевые задачи могут отличаться условиями существования решения. Напр., в случае внутренней *Неймана задачи* для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в конечной области $D^+ \subset \mathbb{R}^3$ необходимое условие существования решения имеет вид:

$$\int_S \psi(M)\, ds = 0,$$

где $\psi(M)$ – заданная граничная функция в условии Неймана $\partial u / \partial n = \psi(M)$. Однако для внешней задачи Неймана в бесконечной области $D^- \subset \mathbb{R}^3$ это условие уже не является необходимым.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971. *Е. Д. Соломенцев.*

ВНЕШНЯЯ КРИВИЗНА – см. *Кривизна.*

ВНЕШНЯЯ ПРОИЗВОДНАЯ – см. *Дифференциальная форма.*

ВНУТРЕННЕЕ КВАНТОВОЕ ЧИСЛО – см. *Квантовые числа.*

ВНУТРЕННЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ – см. *Гильбертово пространство.*

ВНУТРЕННЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ операторов – см. *Дюамеля корреляционная функция.*

ВНУТРЕННЯЯ ВАРИАЦИЯ – см. *Вариационный метод* для конформных отображений.

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ – см. *Римана геометрия.*

ВНУТРЕННЯЯ КРИВИЗНА – см. *Кривизна.*

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ в квантовой теории поля – инвариантность относительно преобразований над квантованными полями, при которых не затрагиваются пространственно-временные координаты.

Каждому закону сохранения соответствует нек-рая симметрия, в частности В. с. Поэтому утверждение о существовании симметрии часто заменяется на эквивалентное высказывание о сохранении какой-либо физич. величины. Напр., говорят о сохранении странности (S) в сильном взаимодействии, что эквивалентно В. с. гамильтониана сильного взаимодействия относительно фазового преобразования $\Phi \to \exp(iS\omega)\Phi$, где Φ – оператор квантованного поля, ω – параметр преобразования. Однако обратное утверждение, вообще говоря, не верно, то есть не любая В. с. ассоциируется с соответствующим законом сохранения.

В. с. может быть связана с дискретной группой преобразований. Примером является симметрия относительно зарядового сопряжения (C); ее следствие – мультипликативный закон сохранения зарядовой четности (C-четности). Зарядовое сопряжение в релятивистской квантовой теории поля глубоко связано с симметрией относительно отражения пространственных (P) и временной (T) координат, поскольку существует строгая инвариантность относительно CPT-преобразований (CPT-*теорема*). Другие известные дискретные В. с. в моделях квантовой теории поля не связаны с пространственными симметриями.

Наиболее широкий класс В. с. описывается группами Ли непрерывных преобразований. Примером является группа $U(1)_Q$ фазовых преобразований $\Phi \to \exp(iQ\alpha)\Phi$, где Q – электрич. заряд, α – параметр, не зависящий от координат x. Ее следствие – аддитивный закон сохранения электрич. заряда. Симметрия $U(1)_Q$ – точная (ее нарушение означало бы несохранение электрич. заряда, что исключается экспериментом), и, по-видимому, не существует в принципе

внутренне согласованного способа ее нарушить. Все остальные В. с. или являются приближенными (нарушенными), или допускают принципиальную возможность нарушения. Напр., в пределах существующей экспериментальной точности наблюдается сохранение барионного числа, но теории великого объединения предсказывают очень слабое нарушение соответствующей симметрии, к-рое может обнаружиться с уточнением экспериментов. Такая же ситуация с сохранением лептонного числа. Другой пример — группа $SU(2)_I$ изотопич. преобразований. Точность соответствующей симметрии ~1—10%, и ее нарушение наблюдается на опыте.

Существует теорема (так наз. теорема Райферти [1]), серьезно ограничивающая возможности объединения внутренних и пространственно-временных симметрий. Согласно этой теореме, нет физически удовлетворительного способа нетривиально объединить группы Ли (L) конечного ранга, относящиеся к В. с., и группу Пуанкаре (P) пространственно-временной симметрии. Единственный способ объединения указанных групп — прямое произведение $L\otimes P$, когда преобразования соответствующих симметрий действуют независимо.

Группа G В. с. называется глобальной, если в преобразованиях $\Phi\to\exp(i\omega_j T^j)\Phi$ (где T^j — генераторы группы G) параметры ω_j не зависят от координат, и локальной, если ω_j являются функциями координат, то есть преобразования из G зависят от точки пространства-времени (при этом группа становится бесконечнопараметрической и к ней не применима теорема Райферти). Симметрия, связанная с локальной группой, называется калибровочной симметрией (см. *Калибровочная инвариантность*). Строгая (не нарушенная) локальная В. с. требует существования безмассовых векторных *калибровочных полей*. Напр., с группой $U(1)_Q$ (к-рая реализуется не только в глобальном, но и в локальном варианте) связано электромагнитное поле, с группой цветовых преобразований $SU(3)_c$ в квантовой хромодинамике связаны восемь глюонных полей. Локальные В. с. не приводят к новым законам сохранения, помимо тех, к-рые отвечают исходной глобальной симметрии.

Очень важен вопрос о нарушении В. с. в квантовой теории поля. Известны два механизма нарушения — явный и спонтанный. При явном нарушении гамильтониан теории содержит члены, не инвариантные относительно группы В. с., масштаб к-рых характеризует степень нарушения соответствующей симметрии. Напр., гамильтониан сильного взаимодействия инвариантен относительно изотопич. преобразований, но полный гамильтониан включает еще электромагнитное и слабое взаимодействия, а также массовые члены, к-рые явно нарушают изотопич. симметрию. Поэтому уравнения квантовой теории поля не обладают свойством точной изотопич. инвариантности.

При спонтанном нарушении симметрии, напротив, гамильтониан и уравнения квантовой теории поля остаются инвариантными, но вакуум становится не инвариантным относительно преобразований группы В. с.; при этом одна или несколько компонент квантованного поля приобретают отличные от нуля *вакуумные средние*; величина вакуумного среднего $\langle 0|\Phi|0\rangle$ определяет новый энергетич. масштаб теории. При спонтанном нарушении непрерывной группы В. с. конечного ранга обязательно возникают безмассовые поля, к-рым отвечают так наз. голдстоуновские частицы (голдстоуновские бозоны, голдстоуновские фермионы) (см. [2]), поэтому описанный механизм называют реализацией симметрии в голдстоуновской моде. Наблюдаемые проявления симметрии оказываются в этом случае сложнее, чем при явном нарушении. Напр., отсутствуют простые соотношения между массами состояний и не зависящие от энергии соотношения между амплитудами разных процессов. Симметрия проявляется прежде всего в так наз. низкоэнергетич. теоремах, к-рые позволяют связать между собой амплитуды испускания различного числа голдстоуновских частиц. Примером симметрии, реализованной в голдстоуновской моде, является *киральная симметрия*.

Отсутствие в природе большого числа безмассовых частиц является (в силу *Голдстоуна теоремы*) препятствием для реализации механизма спонтанного нарушения в применении к глобальным группам В. с. Иная ситуация при спонтанном нарушении локальных симметрий, когда осуществляется так наз. механизм Хиггса (см. [3]). В этом случае голдстоуновские частицы не возникают, но калибровочные поля приобретают массу. Так, напр., локальная В. с. $SU(2)_{EW}\otimes U(1)_{EW}$ электрослабого взаимодействия нарушается спонтанно до группы $U(1)_Q$, при этом вместо четырех остается только одна безмассовая частица (фотон), остальные три векторные частицы — промежуточные векторные бозоны W^+, Z^0, W^- приобретают массу. Происходит как бы поглощение «лишних» голдстоуновских частиц «лишними» безмассовыми калибровочными полями, и в результате остаются только массивные векторные поля, существование к-рых не противоречит экспериментальным данным.

Важным свойством механизма спонтанного нарушения является восстановление точной симметрии при энергиях, больших по сравнению с характерным масштабом, определяемым величиной $\langle 0|\Phi|0\rangle$. Это позволяет сохранить перенормируемость квантовой теории калибровочных полей, поэтому описанный механизм привлекателен с теоретич. точки зрения. Он нашел широкое распространение в различных моделях квантовой теории поля и, по-видимому, реализуется в действительности. Подчеркнем, однако, что четкое различие между явным и спонтанным механизмами нарушения симметрии имеет смысл только в определенном интервале энергий. Так, явное нарушение глобальной $SU(3)$-симметрии сильного взаимодействия при достижимых энергиях за счет разности масс d-, u- и s-кварков может быть интерпретировано с точки зрения моделей великого объединения как спонтанное нарушение.

Примеры групп В. с. основных взаимодействий реалистич. квантовой теории поля. Локальная В. с. сильного и электрослабого взаимодействий имеет вид:

$$G_{SEW}=SU(3)_c\otimes SU(2)_{EW}\otimes U(1)_{EW}, \qquad (*)$$

где группа цвета сильного взаимодействия $SU(3)_c$ не нарушена, группа электрослабого взаимодействия $SU(2)_{EW}\otimes\otimes U(1)_{EW}$, как отмечалось выше, спонтанно нарушена до $U(1)_Q$. В различных моделях великого объединения произведение полупростых групп (*) входит в более широкую единую группу, к-рая сильно нарушена (спонтанно) при доступных энергиях. Помимо указанных локальных групп конкретный лагранжиан сильного и электрослабого взаимодействий имеет большое число дополнительных глобальных непрерывных и дискретных В. с. Почти все эти симметрии не являются теоретически «необходимыми», а возникают как следствие эксперимента, то есть являются эмпирическими. Такая ситуация является отражением полуфеноменологич. характера существующей теории.

Лит.: [1] O'Raifeartaigh L., «Phys. Rev.», 1965, v. 139, p. B1052; [2] Goldstone J., «Nuovo cim.», 1961, v. 19, p. 154; [3] Higgs P., «Phys. Lett.», 1964, v. 12, p. 132. *М. В. Терентьев.*

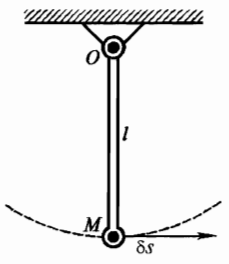
ВОЗВРАТНОЕ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ — см. *Случайное блуждание.*

ВОЗГОНКИ КРИВАЯ — см. *Фазовая диаграмма.*

ВОЗМОЖНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ, виртуальное перемещение, — бесконечно малое перемещение, которое могут совершать точки механической системы из рассматриваемого в данный момент времени положения, не нарушая наложенных на систему в этот момент времени связей.

Напр., для груза, подвешенного на стержне длиной l к неподвижному сферич. шарниру O (рис.), В. п. из положения M будет любое бесконечно малое перемещение δs,

перпендикулярное MO, то есть направленное по касательной к поверхности сферы радиуса l. При этом безразлично, находится ли груз в положении M в покое или движется и проходит через положение M в какой-то момент времени t. В последнем случае груз, продолжая движение, совершит из положения M за промежуток времени dt действительное элементарное перемещение ds, к-рое совпадает с одним из В. п. Этот результат имеет место всегда, когда связь стационарна (не изменяется со временем). Если же шарнир укреплен на ползуне, к-рый будет перемещаться, напр. вертикально вниз, то получится случай нестационарной связи (связи, изменяющейся со временем). Когда при этом груз в какой-то момент времени t придет в положение M, то его В. п. из данного положения в этот момент времени будет по-прежнему любое бесконечно малое перемещение δs, перпендикулярное MO. Однако действительное перемещение, к-рое груз совершит за промежуток времени dt, продолжая свое движение из положения M вместе со стержнем, не будет, очевидно, совпадать ни с одним из В. п. груза в положении M.



Если стержень OM заменить нерастяжимой нитью, то связь станет неудерживающей. В этом случае В. п. груза из положения M будут не только все перемещения, перпендикулярные нити, но и перемещения, направленные во внутрь сферы радиуса l с центром в точке O. Если положение механич. системы однозначно определяется n независимыми между собой параметрами $q_1, q_2, ..., q_n$, то В. п. каждой точки системы, положение к-рой определяется ее радиус-вектором $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1, q_2, ..., q_n)$, будет:

$$\delta s_k \equiv \delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \qquad (*)$$

В случае нестационарных связей равенства, выражающие зависимость $\boldsymbol{r}_k$ от q_i, будут содержать время t и $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(t, q_1, q_2, ..., q_n)$. Однако формула (*) при этом сохраняется, а время t считается равным постоянной величине t_1, где t_1 – значение момента времени, в к-рый вычисляется В. п.

Понятие о В. п. используется в механике для определения условий равновесия и составления уравнений движения механич. систем (см. *Возможных перемещений принцип*).

С. М. Тарг.

ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИНЦИП, принцип виртуальных перемещений,– один из *вариационных принципов классической механики*: механическая система находится в равновесии в некотором положении тогда и только тогда, когда сумма элементарных (бесконечно малых) работ активных сил $F_i(t, r_j, \dot{r}_j) \in C^1$ на всяком возможном перемещении δr_i, выводящем систему из рассматриваемого положения r_i, равна нулю

$$\sum_i F_i \delta r_i = 0 \qquad (*)$$

в любой момент времени t.

Уравнение (*) является общим уравнением статики, сводящим любую задачу статики к математич. задаче исследования этого уравнения. Для частного случая потенциальных сил

$$F_i = \operatorname{grad}_{r_i} U(t, r_1, ..., r_N);\ U(t, r_i) \in C^2,$$

где N – число точек системы, равенство (*) принимает вид

$$\delta U = 0$$

при любом t, то есть механич. система, подверженная действию потенциальных сил, находится в равновесии тогда и только тогда, когда силовая функция имеет стационарное значение.

В. В. Румянцев.

ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕОРИЯ – теория, представляющая решение физической задачи в виде ряда по степеням некоторого малого параметра λ или нескольких малых параметров. Предполагается, что при $\lambda = 0$ задача допускает точное решение $X^{(0)}$ (невозмущенное решение). Точное решение $X \equiv X(\lambda)$ удовлетворяет условию $X \to X^{(0)}$ при $\lambda \to 0$.

Если ряд В. т.

$$X = \sum_{k \geq 0} \lambda^k X^{(k)} \qquad (1)$$

сходится при $\lambda < \lambda_{\max}$, то для таких λ ряд (1) – точное решение задачи. Если же (1) является асимптотич. рядом, то есть

$$(X - X_m) \sim \lambda^{m+1};\ X_m \equiv \sum_{k=0}^{m} \lambda^k X^{(k)}, \qquad (2)$$

то точное решение может содержать члены, к-рые в принципе невозможно описать по В. т. Функция $\exp(-C/\lambda)$, где C – константа,– простейший пример такого рода членов. На практике обычно ограничиваются несколькими первыми приближениями, так как вычислительные трудности резко возрастают в более высоких порядках В. т. Поэтому при решении большинства задач важно не поведение ряда (1) в целом, а то, насколько хорошо несколько первых членов ряда аппроксимируют точное решение. Вместе с тем в ряде областей, напр. в квантовой электродинамике, точность расчетов по В. т. очень высока (нек-рые эффекты рассчитаны с точностью до 10^{-9}).

В. т. возникла в небесной механике в задаче трех тел. Задача двух тел (задача Кеплера) решается точно, а для решения задачи трех тел необходимо привлекать В. т. Если рассматривается, напр., движение Земли, то невозмущенная задача ($\lambda = 0$) сводится к изучению движения Земли только под влиянием Солнца. Влияние других планет рассматривается как возмущение, а роль малых параметров играют отношения масс планет к массе Солнца. При этом первоначальная орбита Земли (эллипс Кеплера) «возмущается», то есть константы, описывающие эллипс Кеплера невозмущенной задачи, становятся функциями времени, поведение к-рых определяется влиянием планет на движение Земли.

Схема построения решения по В. т. в общем виде может быть описана следующим образом. Имеется нек-рое уравнение, содержащее малый параметр λ, в связи с чем его решение ищется в виде (1). При подстановке (1) в исходное уравнение оно превращается в равенство вида

$$\sum_{k \geq 0} \lambda^k A_k\left(X^{(0)}, X^{(1)}, ..., X^{(k)}\right) = 0. \qquad (3)$$

Из справедливости равенства (3) при всех достаточно малых λ следуют равенства $A_k(X^{(0)}, X^{(1)}, ..., X^{(k)}) = 0$. Получающаяся при $k = 1, 2, ...$ цепочка уравнений позволяет определять последовательно $X^{(1)}, X^{(2)}$ и т. д.

Одна из проблем В. т. связана с тем, что поведение отдельных членов ряда (1) может быть качественно отличным от поведения суммы. Это приводит к тому, что фактич. область применения В. т. оказывается существенно меньше области сходимости ряда (1). Следующий простой пример демонстрирует характер возникающих трудностей. Для точного решения $X = \sin(\omega + \lambda)t$, ω – константа, t – время, ряд (1) принимает вид:

$$X = \sin\omega t + \lambda t \cos\omega t - \frac{\lambda^2 t^2}{2!} \sin\omega t + ... \qquad (4)$$

Равенство (4) показывает, что в то время как точное решение – периодич. функция t, члены ряда (4) неограниченно возрастают при $t \to \infty$. Фактически параметром разложения в данном случае является не λ, а λt и, поскольку в реальных случаях приходится ограничиваться небольшим числом членов разложения, В. т. имеет смысл, только если $\lambda t \ll 1$. Такого рода проблемы возникают как в небесной механике (проблема вековых членов при описании движения планет), так и в теории нелинейных колебаний. Для устранения таких растущих со временем членов в механике и теории колебаний были разработаны усовершенствованные варианты В. т. Основная идея состоит в том, что разложение, аналогичное (1), ищется в виде разложения по функциям

определенного вида, подсказанного физич. соображениями или качественным анализом исходного уравнения.

Ниже приводятся примеры применения В. т. в различных областях.

Механика. Уравнения движения планеты в поле тяжести Солнца (центрального тела) и других планет имеют вид:

$$\ddot{q}_i = F_i^{(0)} + F_i,\ i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (5)$$

В пренебрежении размерами небесных тел член $F_i^{(0)}$, описывающий воздействие центрального (расположенного в начале координат) тела, имеет вид:

$$F_i^{(0)} = -\mu q_i r^{-3},\ r = \left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right)^{1/2},$$

где μ – константа, F_i описывают влияние других планет и могут быть представлены в виде

$$F_i = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k F_i^{(k)}.$$

(Более точное рассмотрение должно было бы включать несколько малых параметров $\lambda_j = m_j/M$, где m_j – масса j-й планеты, M – масса Солнца.) Решение уравнений (5) ищется в виде:

$$q_i = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k q_i^{(k)}.$$

В результате (5) сводится к последовательности уравнений следующего вида:

$$\ddot{q}_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{3} p_{ij} q_j^{(k)} = P_i^{(k)}, \qquad (6)$$

где p_{ij} – известные функции, зависящие только от решения невозмущенной задачи, а $P_i^{(k)}$ – известная функция $F_i^{(k)}$ и $q_j^{(m)}$; $0 \leqslant m \leqslant k-1$, $j = 1, 2, 3$. Последовательное рассмотрение уравнений (6) при $k = 1, 2, \ldots$ дает возможность решать исходное уравнение в произвольном порядке разложения по λ.

Для описания движения планет очень плодотворным оказался метод, разработанный Ж. Лагранжем (J. Lagrange). Он состоит в том, что предварительно система уравнений (5) заменяется эквивалентной, но более удобной для применения В. т. При $\lambda = 0$ орбита планеты – это эллипс Кеплера, к-рый характеризуется шестью постоянными параметрами ξ_i. Рассматривая ξ_i как новые переменные, можно перейти от переменных q_i, $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, 3$) к переменным ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. При этом исходная система уравнений (5) преобразуется к виду:

$$\dot{\xi}_i = \Phi_i(t, \xi),\ \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6\}. \qquad (7)$$

Правая часть уравнений (7) определяется только возмущениями, ξ_i и Φ_i представляются рядами (1), а последовательные приближения получаются простыми квадратурами. Так, если $\xi_i^{(1)}(t_0) = 0$, то

$$\xi_i^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi_i\left(t, \xi_i^{(0)}\right) dt.$$

Система уравнений (7) – пример, когда В. т. можно строить, и не вводя явно малого параметра (метод итераций). Для нахождения первого приближения ξ_j в правой части уравнения (7) заменяются их начальными значениями $\xi_j(t) = \xi_j(t_0)$. Затем $\xi_j(t)$ в правой части (7) заменяются найденным первым приближением $\xi_j^{(1)}(t)$ и находится $\xi_j^{(2)}(t)$, и т. д. Точное решение есть

$$\xi_i(t) = \lim_{n \to \infty} \xi_i^{(n)}(t).$$

Возможность проведения этой процедуры определяется малостью члена F_i в исходной системе уравнений (5).

Если функция Гамильтона нек-рой механич. системы может быть представлена в виде:

$$H = H_0 + \lambda H_1, \qquad (8)$$

а канонич. уравнения движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad (9)$$

допускают точное решение при $H = H_0$, то при малом λ для решения системы уравнений (9) может быть применена В. т., основанная на представлении p_i и q_i рядами по степеням λ. Аналогом перехода от уравнений (5) к уравнениям (7) в этом случае будет переход от канонич. уравнений (9) к уравнению Гамильтона – Якоби

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0, \qquad (10)$$

где S – функция Гамильтона – Якоби; уравнение (10) написано для случая, когда $\partial S/\partial t = 0$. Если известно решение уравнения (10) для $H = H_0$, то постоянные α_i и β_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, характеризующие это решение, при переходе к точной задаче становятся функциями, удовлетворяющими канонич. уравнениям для гамильтониана λH_1:

$$\dot{\alpha}_i = \lambda \frac{\partial H}{\partial \beta_i},\quad \dot{\beta}_i = -\lambda \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}. \qquad (11)$$

Система уравнений (11) решается методами В. т.

Нелинейные колебания. Широкий класс процессов нелинейных колебаний может быть описан уравнением:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda f(x, \dot{x}) \qquad (12)$$

(или его обобщением для многомерного случая). Идея применяемых методов не зависит от конкретного вида функции $f(x, \dot{x})$. Использование представления (1) для x приводит к растущим со временем членам, и область применимости В. т. в таком виде оказывается ограниченной временным интервалом, для к-рого $\lambda t \ll 1$.

Методы построения рядов В. т., описывающих нелинейные колебания в широком временном интервале, были разработаны в трудах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (асимптотич. методы теории возмущений). Суть этого подхода к построению В. т. состоит в том, что ряд В. т. с самого начала ищется в специальном виде, угаданном на основе физич. предположений. Решение уравнения (12) при $\lambda = 0$ имеет вид:

$$x = a\cos\psi,\ \psi = \omega t + \vartheta,$$

a, ω и ϑ – константы. Предполагается, что влияние члена $\lambda f(x, \dot{x})$ в уравнении (12) приведет к тому, что $\dot{a}$ и $\dot{\psi}$ в точном решении становятся функциями, удовлетворяющими следующим уравнениям:

$$\dot{a} = \sum_{k \geqslant 1} \lambda^k A^{(k)}(a);\quad \dot{\psi} = \omega + \sum_{k \geqslant 1} \lambda^k B^{(k)}(a). \qquad (13)$$

Кроме того, необходимо учесть возможность появления обертонов. В результате решение уравнения (12) ищется в виде:

$$x = a\cos\psi + \sum_{k \geqslant 1} \lambda^k u^{(k)}(a, \psi), \qquad (14)$$

где $u^{(k)}(a, \psi)$ – периодич. функция угла ψ с периодом 2π, a и ψ удовлетворяют уравнениям (13). Функции $u^{(k)}(a, \psi)$, $A^{(k)}(a)$, $B^{(k)}(a)$ подбираются так, чтобы n-е приближение рядов (13), (14) удовлетворяло исходному уравнению (12) с точностью $\sim \lambda^{m+1} t$. Возможность построения таких функций означает, что ряд (14) хорошо аппроксимирует точное решение для всех t, удовлетворяющих условию $\lambda^{m+1} t \ll 1$.

Квантовая механика. В. т. в квантовой механике применяется в случае, когда гамильтониан может быть представлен в виде (8), причем система с гамильтонианом H_0 поддается точному описанию. Если H_0 и H_1 не зависят от времени, то задача сводится к описанию спектра оператора H, то есть к решению уравнения

$$H|E, \alpha\rangle = E|E, \alpha\rangle \qquad (15)$$

(стационарная теория возмущений), α – набор квантовых чисел, вместе с E определяющих вектор состояния. В случае невырожденного дискретного спектра оператора H_0

$$H_0|E_i^{(0)}\rangle = E_i^{(0)}|E_i^{(0)}\rangle. \qquad (16)$$

В этом случае решение уравнения (15) ищется в виде:

$$|E_i\rangle = \sum_{n\geqslant 0}\lambda^n|E_i^{(n)}\rangle; \quad E_i = \sum_{n\geqslant 0}\lambda^n E_i(n). \qquad (17)$$

Формулы (17) означают, что при достаточно малом λ роль члена λH_1 в уравнении (15) сводится к замене уровня $E_i^{(0)}$ на близкий к нему уровень E_i. В реальных задачах существенно, чтобы уровни невозмущенного спектра $E_i^{(0)}$ были расположены достаточно далеко друг от друга. Вследствие (17) исходное уравнение (15) распадается на совокупность равенств

$$\left(H_0 - E_i^{(0)}\right)|E_i^{(n)}\rangle + \left(H_1 - E_i^{(1)}\right)|E_i^{(n-1)}\rangle - \\ - E_i^{(2)}|E_i^{(n-2)}\rangle - \ldots - E_i^{(n)}|E_i^{(0)}\rangle = 0. \qquad (18)$$

Уравнения (18) и условия нормировки:

$$\langle E_i^{(0)}|E_i^{(0)}\rangle = 1, \langle E_i^{(0)}|E_i^{(n)}\rangle = 0$$

приводят к следующему выражению для $E_i^{(n)}$:

$$E_i^{(n)} = \langle E_i^{(0)}|H|E_i^{(n-1)}\rangle. \qquad (19)$$

Простейшим примером применения В. т. является расчет энергии основного состояния двухэлектронного атома или иона. В этом случае гамильтониан H_0 – сумма гамильтонианов взаимодействия каждого электрона с ядром, а взаимодействие электронов друг с другом рассматривается как возмущение.

В случае вырожденного спектра невозмущенного гамильтониана:

$$H_0|E_i^{(0)}, \alpha_j\rangle = E_i^{(0)}|E_i^{(0)}, \alpha_j\rangle; \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

поправка первого порядка $E_i^{(1)}$ определяется из уравнения, аналогичного (19), но учитывающего, что уровню $E_i^{(0)}$ соответствует теперь набор m волновых функций $|E_i^{(0)}, \alpha_j\rangle$. А именно, в этом случае справедливо равенство (секулярное уравнение):

$$\det\left[(H_1)_{jk} - E_i^{(1)}\delta_{jk}\right] = 0, \quad 1\leqslant j, k\leqslant m, \qquad (20)$$

$$(H_1)_{jk} = \langle E_i^{(0)}, \alpha_j|H_1|E_i^{(0)}, \alpha_k\rangle.$$

Если все корни этого уравнения различны, то возмущение полностью снимает вырождение, то есть уровень $E_i^{(0)}$ распадается на m разных уровней. Случай кратных корней соответствует неполному снятию вырождения.

Общий метод решения уравнения (15) по В. т. основывается на изучении свойств резольвенты, то есть оператора $G(E) = (EI - H)^{-1}$, I – единичный оператор. Резольвенты полного и невозмущенного гамильтонианов G и G_0 связаны уравнением:

$$G = G_0(1 + \lambda H_1 G), \qquad (21)$$

итерационное решение к-рого имеет вид:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n G_0(H_1 G_0)^n. \qquad (22)$$

Уравнение (22) служит основой как для конкретных вычислений, так и для анализа поведения всего ряда В. т.

В том случае, когда гамильтониан зависит от времени, задача состоит в исследовании эволюции системы, к-рая определяется уравнением Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = (H_0 + H_1)|\psi\rangle \qquad (23)$$

(множитель λ включен в определение H_1). В. т. удобно развивать для оператора эволюции $U(t, t_0)$, определенного следующим образом:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle; \; U(t_0, t_0) = 1. \qquad (24)$$

Уравнение Шредингера эквивалентно следующему интегральному уравнению для оператора эволюции:

$$U(t, t_0) = 1 - i\hbar^{-1}\int_{t_0}^{t} H(t')U(t', t_0)\,dt'; \quad H = H_0 + H_1. \qquad (25)$$

Оператор эволюции невозмущенной системы $U_0(t, t_0)$ предполагается известным. Оператор $U(t, t_0)$ может быть представлен в виде $U(t, t_0) = U_0(t, t_0)U_1(t, t_0)$. (Это эквивалентно переходу к *взаимодействия представлению*.) Уравнение (25) переходит в уравнение:

$$U_1(t,t_0) = 1 - i\hbar^{-1}\int_{t_0}^{t} H_1(t')U_1(t',t_0)\,dt', \qquad (26)$$

итерационное решение к-рого имеет вид:

$$U_1(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i\hbar^{-1})^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\ldots \\ \ldots\int_{t_0}^{t}dt_n T(H_1(t_1)\ldots H_1(t_n)), \qquad (27)$$

где

$$T(H_1(t_1)\ldots H_1(t_n)) = H_1(t_i)\ldots H_1(t_j)\ldots H_1(t_k);$$

$(t_i)\ldots t_j\rangle\ldots t_k\rangle)$ – хронологич. произведение операторов.

В том частном случае, когда H_0 не зависит от времени, формула (27) служит основой для вычисления вероятности перехода от одного стационарного состояния оператора H_0 к другому (нестационарная В. т.).

Квантовая теория поля. В квантовой теории поля В. т. является основным методом расчета. Было развито несколько подходов к ее построению. Так, напр., в задаче рассеяния начальное ($t = -\infty$) и конечное ($t = +\infty$) состояния системы описываются гамильтонианом невзаимодействующих частиц H_0. Такие состояния допускают полное описание в терминах операторов рождения и уничтожения, управляющих канонич. перестановочным соотношением. В. т. обычно формулируется в представлении взаимодействия, в к-ром вектор состояния $|\psi_{\text{вз}}(t)\rangle$ следующим образом связан с вектором состояния представления Шредингера $|\psi_{\text{шр}}(t)\rangle$:

$$|\psi_{\text{вз}}(t)\rangle = \exp(it\hbar^{-1}H_0)|\psi_{\text{шр}}(t)\rangle.$$

Переход к представлению взаимодействия преобразует уравнение Шредингера в

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{\text{вз}}(t)\rangle = H_{1\text{вз}}|\psi_{\text{вз}}(t)\rangle;$$

$$H_{1\text{вз}} = \exp\left(it\hbar^{-1}H_0\right)H_1\exp\left(-it\hbar^{-1}H_0\right). \qquad (28)$$

Введение оператора эволюции позволяет от уравнения (28) перейти к уравнению (26) и получить его решение в виде ряда (27). Окончательный переход к элементам S-матрицы осуществляется с помощью соотношения:

$$S = \lim_{t\to\infty} U(t, -t).$$

В представлении взаимодействия операторы подчиняются тем же коммутационным соотношениям, что и операторы свободного поля. Это позволяет выразить члены ряда В. т. в виде интегралов от известных функций. Удобно представлять их в графич. виде (см. *Фейнмана диаграммы*). В квантовой теории поля только диаграммы низшего порядка не содержат расходящихся интегралов. Чтобы придать смысл диаграммам высшего порядка, была развита специальная техника (см. *Перенормировка*). Программу перенормировок удается провести лишь для узкого класса взаимодействий, и перенормируемость ряда В. т. является важным критерием согласованности теории.

Принципиально иной подход к построению В. т. был предложен Е. Штюкельбергом (E. Stuckelberg) и развит Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым. В этом подходе S-матрица записывается в виде функционального разложения:

$$S(g) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int S_n(x_1,\ldots,x_n)g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

где $g(x)$ – функция «включения» взаимодействия, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$, выделение к-рой позволяет учесть ограничения на S-матрицу, вытекающие из локальности взаимодействия. Физич. S-матрица соответствует предельному переходу

$g(x) \to 1$. Ключевую роль в построении ряда В. т. теперь играют общие принципы квантовой теории поля, а именно, унитарность, лоренц-инвариантность, микропричинность (условие микропричинности Боголюбова). Выполнение этих требований оказывается возможным лишь в случае, когда $S_n(x_1, ..., x_n)$ определенным образом выражается через члены разложения низших порядков. Анализ формулы (29) в квазиклассич. случае дает возможность связать $S_1(x)$ с лагранжианом $L(x)$:

$$S_1(x) = iL(x),$$

что позволяет полностью определить коэффициенты разложения (29). Окончательное разложение совпадает с получаемым в стандартном подходе, однако такой подход позволяет установить наиболее общий вид $S_n(g)$, совместимый с требованиями лоренц-инвариантности, унитарности и микропричинности.

В. т. может быть построена и на основе метода континуальных интегралов (см. *Фейнмана интеграл*). Такой подход оказался особенно плодотворным в калибровочных теориях.

Лит.: [1] Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, 3 изд., М., 1975; [2] Штерн Т., Введение в небесную механику, пер. с англ., М., 1964; [3] Хаар Де тер, Основы гамильтоновой механики, пер. с англ., М., 1974; [4] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 4 изд., М., 1989; [6] Мессиа А., Квантовая механика, пер. с франц., т. 2, М., 1979; [7] Боум А., Квантовая механика: основы и приложения, пер. с англ., М., 1990; [8] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [9] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, пер. с англ., М., 1963; [10] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, т. 1, 2, пер. с англ., М., 1984.

Ю. С. Вернов.

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Устойчивость движения.*

ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ в квантовой механике – функция, используемая для описания чистых состояний. Термин «В. ф.» иногда употребляется также как синоним термина «вектор состояния».

Пусть ψ – вектор состояния системы в гильбертовом пространстве H. Пусть $A = (A_1, ..., A_N)$ – полный набор попарно коммутирующих операторов и $|a_1, ..., a_N\rangle$ – общая система (обобщенных) собственных векторов операторов $A_1, ..., A_N$, причем $A_i|a_1, ..., a_N\rangle = |a_1, ..., a_N\rangle a_i$. Тогда числовая функция

$$\psi(a_1, ..., a_N) = \langle a_1, ..., a_N|\psi\rangle$$

называется волновой функцией в A-представлении.

Функция $\psi(a_1, ..., a_N)$ принадлежит гильбертову пространству $H_A = L^2(\mathbb{R}^N, d\rho)$, где $d\rho$ – мера Парсеваля, отвечающая набору собственных векторов $|a_1, ..., a_N\rangle$ (см. *Вектор состояния*). Отображение $\psi \to \psi(a_1, ..., a_N)$ определяет унитарный оператор U_A из H в H_A. Поэтому если $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, то В. ф. ψ удовлетворяет условию нормировки

$$\int d\rho(a_1,\dots,a_N)|\psi(a_1,\dots,a_N)|^2 = 1,$$

причем число

$$p(\Delta_1 \times \dots \times \Delta_N) = \int_{\Delta_1\times\dots\times\Delta_N} d\rho(a_1,\dots,a_N)|\psi(a_1,\dots,a_N)|^2$$

определяет вероятность того, что измерение наблюдаемых $A_1, ..., A_N$ в состоянии ψ даст результат $(a_1, ..., a_N) \in \Delta_1 \times ... \times \Delta_N \subset \mathbb{R}^N$. Зная В. ф. $\psi(a_1, ..., a_N)$, можно вычислить среднее значение $\langle B\rangle_\psi$ любой наблюдаемой B в состоянии ψ:

$$\langle B\rangle_\psi = \int d\rho(a_1,\dots,a_N)\psi^*(a_1,\dots,a_N)(B_A\psi)(a_1,\dots,a_N),$$

где $B_A = U_A B U_A^{-1}$ – оператор наблюдаемой B в A-представлении. В частности,

$$\langle A_i\rangle_\psi = \int d\rho(a_1,\dots,a_N)a_i|\psi(a_1,\dots,a_N)|^2.$$

Напр., в задаче об описании бесспиновой нерелятивистской частицы в качестве полного набора операторов можно взять компоненты оператора координаты $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. В. ф. $\psi(x_1, x_2, x_3)$ в x-представлении (или координатном представлении) принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$. Функция $|\psi(x_1, x_2, x_3)|^2$ является плотностью вероятности обнаружения частицы в точке с координатами (x_1, x_2, x_3). Поэтому функцию $\psi(x_1, x_2, x_3)$ часто называют амплитудой вероятности.

Часто рассматриваются также ненормируемые В. ф. $\psi(a_1, ..., a_N)$, не принадлежащие пространству $L^2(\mathbb{R}^N, d\rho)$. Соответствие между нормируемыми В. ф. и ненормируемыми В. ф. такое же, как между векторами состояния и обобщенными векторами состояния.

В представлении Шредингера эволюция В. ф. во времени определяется *Шредингера уравнением*. В координатном представлении это уравнение похоже на уравнение, описывающее волновые процессы. Данное обстоятельство объясняет происхождение термина «В. ф.».

Лит. см. при ст. *Вектор состояния.*

Ф. А. Лунев.

ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ; нормировка – условие, которое обычно накладывается на *волновую функцию* в квантовой механике.

Пусть $A = (A_1, ..., A_N)$ – полный набор операторов, $d\rho(a_1, ..., a_N)$ – мера Парсеваля, фигурирующая в спектральном разложении операторов A_i, $\psi(a_1, ..., a_N)$ – В. ф. в A-представлении. Если функция ψ удовлетворяет условию нормировки

$$\int d\rho(a_1,\dots,a_N)|\psi(a_1,\dots,a_N)|^2 = 1, \qquad (1)$$

то выражение

$$\int_{\Delta_1\times\dots\times\Delta_N} d\rho(a_1,\dots,a_N)|\psi(a_1,\dots,a_N)|^2$$

определяет вероятность того, что измерение наблюдаемых $A_1, ..., A_N$ даст результат $(a_1, ..., a_N) \in \Delta_1 \times ... \times \Delta_N$. Условие нормировки (1) выражает при этом тот факт, что сумма вероятностей всех возможных результатов измерений наблюдаемых $A_1, ..., A_N$ равна единице.

Напр., для нерелятивистской частицы со спином 1/2 в качестве полного набора наблюдаемых можно взять три компоненты оператора координаты $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ и оператор проекции спина на третью ось $\hat{x}_3$. Мера

$$d\rho = \left(\delta\left(s + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(s - \frac{1}{2}\right)\right)dx_1dx_2dx_3,$$

а В. ф. зависит от трех непрерывных и одной дискретной переменной: $\psi = \psi_s(x_1, x_2, x_3)$. Условие (1) примет вид:

$$\sum_{s=\pm1/2} \int d^3x|\psi_s(x_1,x_2,x_3)|^2 = 1.$$

Величина $|\psi_s(x_1, x_2, x_3)|^2$ дает плотность вероятности обнаружения частицы в точке (x_1, x_2, x_3) с проекцией спина s на ось $\hat{x}_3$.

В физич. литературе часто обсуждается вопрос о нормировке В. ф., не принадлежащих пространству $L^2(\mathbb{R}^N, d\rho)$. Точная постановка вопроса такова.

Пусть $B = (B_1, ..., B_M)$ – полный набор наблюдаемых, вообще говоря, отличный от набора A. Пусть $|b_1, ..., b_M\rangle$ – полная система общих (обобщенных) собственных векторов операторов $B_1, ..., B_M$ и

$$\Phi_{b_1,\dots,b_M}(a_1, ..., a_N) = \langle a_1, ..., a_N|b_1, ..., b_M\rangle$$

– В. ф., изображающие вектор $|b_1, ..., b_M\rangle$ в A-представлении. Пусть $\psi_i(a_1, ..., a_N)$, $i = 1, 2, -$ произвольные функции

из $L^2(\mathbb{R}^N, d\rho_A)$. Функции $\psi_i(a_1, ..., a_N)$ могут быть разложены по функциям $\Phi_{b_1,...,b_M}(a_1, ..., a_N)$:

$$\psi_i(a_1,\dots,a_N)\int d\rho_B(b_1,\dots,b_M)c_1(b_1,\dots,b_M)\Phi_{b_1,\dots,b_M}(a_1,\dots,a_N).$$

Из равенства Парсеваля для системы функций $\Phi_{b_1,...,b_M}$ вытекает, что

$$\int d\rho_A(a_1,\dots,a_N)\psi_1^*(a_1,\dots,a_N)\psi_2(a_1,\dots,a_N) =$$
$$= \int d\rho_B(b_1,\dots,b_M)c_1^*(b_1,\dots,b_M)c_2(b_1,\dots,b_M). \quad (2)$$

Пусть, для простоты, $d\rho = db_1...db_M$. Тогда равенство (2) эквивалентно следующему нормировочному условию на функцию $\Phi_{b_1,...,b_M}$:

$$\int d\rho_A(a_1,\dots,a_N)\Phi^*_{b'_1,\dots,b'_M}(a_1,\dots,a_N)\Phi_{b_1,\dots,b_M}(a_1,\dots,a_N) =$$
$$= \prod_{i=1}^{M}\delta(b'_i - b_i). \quad (3)$$

Нормировка (3) известна как нормировка на δ-функцию и широко применяется в квантовой механике. И в общем случае условие нормировки полной системы В. ф., не принадлежащих $L^2(\mathbb{R}^N, d\rho_A)$, является следствием равенства Парсеваля и эквивалентно тождеству (2).

Пусть в качестве набора для нерелятивистской частицы со спином 1/2 взят набор, состоящий из трех операторов компонент импульса $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$, $\hat{p}_3$ и оператора $\hat{s}_3$. Функция Ф в этом случае имеет вид:

$$\Phi_{p_1p_2p_3}\sigma(x_1,x_2,x_3,s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)\delta_{\sigma_s}, \quad (4)$$

причем

$$d\rho_B = \left(\delta\left(s+\frac{1}{2}\right)+\delta\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)dp_1dp_2dp_3.$$

Тождество (2) для системы В. ф. (4) эквивалентно следующему условию нормировки:

$$\sum_{\sigma=\pm1/2}\int d^3p\,\Phi^*_{p_1p_2p_3}\sigma(x'_1,x'_2,x'_3,s)\times$$
$$\times\,\Phi_{p_1p_2p_3}\sigma(x_1,x_2,x_3,s) = \delta(x'-x)\delta_{ss'}.$$

В квантовой механике иногда употребляются и другие условия нормировки. Напр., в релятивистских задачах удобно использовать релятивистски-инвариантную нормировку

$$\langle p'|p\rangle = (2\pi)^3\sqrt{m^2+p^2}\;\delta(p'-p).$$

Лит. см. при ст. *Волновая функция.* *Ф. А. Лунев.*

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ, уравнение колебаний,— линейное однородное уравнение с частными производными гиперболического типа:

$$\Box\psi \equiv \Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \equiv \Delta\psi - c^{-2}\psi_{tt} = 0, \quad (1)$$

где t — время, c — постоянный параметр, имеющий размерность скорости, $\Box$ — *Д'Аламбера оператор*, $\Delta \equiv \nabla^2$ — *Лапласа оператор*. Иногда вместо $\Box$ в (1) используют оператор Лоренца $c^2\Delta - d^2/dt^2$. Векторное В. у. предусматривает применение оператора $\Box$ к каждой из декартовых компонент вектора; при переходе к произвольным координатам используют тождество $\Delta \equiv \nabla\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$.

Первоначально В. у. получено в одномерном варианте:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

(уравнение струны) применительно к описанию малых колебаний упругой струны практически одновременно Д. Бернулли (D. Bernoulli), Ж. Д'Аламбером (J. d'Alembert) и Л. Эйлером (L. Euler) в 40-е гг. 18 в. Д. Бернулли выразил его решение через тригонометрич. ряды, Ж. Д'Аламбер и Л. Эйлер записали общее решение в виде двух перемещающихся в пространстве со скоростью c возмущений (прямой и обратной волн):

$$\psi = f_1(x+ct) + f_2(x-ct), \quad (2)$$

что и дало основание назвать уравнение (1) волновым. Эквивалентность тригонометрич. представления решения В. у. в функциональной записи (2) доказана Ж. Фурье (J. Fourier) в 1824.

Впоследствии понятие волнового возмущения претерпело значительные изменения, поэтому (1) нельзя считать универсальным и единственным В. у.; оно охватывает отнюдь не все виды движений, квалифицируемых сейчас как волновые. Простейшим обобщением уравнения (1) является введение в него зависимости скорости c от координат: $c = c(\boldsymbol{r})$ (неоднородные среды), от времени (параметрич. среды), от самой функции ψ (квазилинейные среды) или от частоты ω ее изменения во времени: $c^{-2}\partial^2\psi/\partial t^2 \to \psi\omega^2/c^2(\omega)$ (диспергирующие среды).

В. у. является одной из наиболее употребительных математич. моделей в физике. Оно описывает почти все разновидности малых колебаний в распределенных механич. системах (продольные звуковые колебания в газе, жидкости, твердом теле; поперечные колебания в струнах и т. п.). Ему удовлетворяют компоненты электромагнитных векторов и потенциалов, и, следовательно, многие электромагнитные явления (от квазистатики до оптики) в той или иной мере объясняются свойствами его решений.

Уравнение (1) всегда допускает разделение переменных, то есть факторизацию решения по координатам и времени

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = u(\boldsymbol{r})v(t),$$

при этом

$$\Delta u + \omega^2c^{-2}u = 0, \quad (3)$$
$$v_{tt} + \omega^2 v = 0, \quad (4)$$

то есть для функции $v(t)$ получается уравнение осциллятора (4), а для $u(\boldsymbol{r})$ — трехмерное *Гельмгольца уравнение* (3), в двумерном случае его называют также уравнением мембраны, а в одномерном — уравнением осциллятора (но уже пространственного, а не временного). Помимо декартовой системы координат переменные в уравнении Гельмгольца (3) разделяются в цилиндрич. (полярной, эллиптич. и параболич.), сферич. и сфероидальных (вытянутой и сплюснутой) системах координат.

Неоднородное В. у. содержит в правой части функцию источника

$$\Box\psi = f(\boldsymbol{r}, t) \quad (5)$$

и называется *Д'Аламбера уравнением*. Его решение состоит из решений однородного уравнения (1) и из вынужденного решения, связанного с источником. В силу линейности (5) справедлив принцип суперпозиции, поэтому функцию f можно разложить по любой полной системе функций (обычно выраженных через координаты, допускающие разделение переменных) или представить в виде интеграла (суммы) по элементарным источникам. Часто в качестве элементарного источника берется *дельта-функция* Дирака, а соответствующее решение называется *Грина функцией*. Всплеск от элементарного возмущения, имевшего место в начале координат в момент $t = 0$, возбуждает волны, уходящие (бегущие, распространяющиеся) от источника. В одномерном случае их величина постоянна, в двумерном и трехмерном — она монотонно убывает с удалением от центра. Для двумерного пространства характерно возникновение бесконечно длящегося последействия, благодаря к-рому отклик не повторяет функцию источника.

Обычно для В. у. рассматривают *Коши задачу*, описывающую распространение волн в n-мерном пространстве. Классич. решением задачи Коши называют непрерывно диффе-

ренцируемую функцию $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, удовлетворяющую В. у. в полупространстве $t>0$ и начальным условиям

$$\psi|_{t=0} = \varphi_1(\boldsymbol{r}), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(\boldsymbol{r}),$$

где $\varphi_1(\boldsymbol{r})$ и $\varphi_2(\boldsymbol{r})$ – заданные функции. Классич. решение дается *Кирхгофа формулой* ($n=3$), *Пуассона формулой* ($n=2$) или *Д'Аламбера формулой* ($n=1$). Рассматривают также смешанную задачу, описывающую колебания ограниченного объема V.

При перечислении нелинейных обобщений В. у. необходимо проявлять нек-рую сдержанность, с тем чтобы при этом не утрачивалась связь с исходным В. у. В этом смысле единственным терминологически точным обобщением является внесение зависимости скорости c от волновой функции в уравнение (1) или (5). Однако часто к нелинейным В. у. относят любые уравнения, вырождающиеся в линейные В. у. при устранении нелинейности или линеаризации. Наиболее известны нелинейное уравнение Клейна – Гордона

$$\Box\psi = m^2\psi + F(\psi),$$

обобщающее линейное *Клейна – Гордона уравнение*, и нелинейное уравнение Гельмгольца

$$\Delta\psi + k^2\psi = F(|\psi|^2)\psi,$$

учитывающее зависимость волнового числа от квадрата волновой функции.

Нелинейные В. у. позволяют описать взаимодействие волн, возникновение и эволюцию ударных волн и солитонов и т. д.

Лит.: [1] Физическая энциклопедия, т. 1, М., 1988, с. 312–13; [2] Морс Ф., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1–2, М., 1958–60; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [4] Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977.

М. А. Миллер, Е. И. Якубович.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ; асимптотические решения – решения *волнового уравнения*

$$\Box_c\psi = 0, \ \Box_c = \partial_t^2 - c^2(x)\Delta, \ 0 < c(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x),$$

описывающие эволюцию коротковолновых пакетов, которые удовлетворяют начальным данным

$$\psi|_{t=0} = \varphi_1 \exp(iS_0/h), \quad \psi_t|_{t=0} = ih^{-1}\varphi_2 \exp(iS_0/h),$$
$$\varphi_{1,2} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_x), \quad S_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x),$$

где h – малый параметр, $\nabla S_0 \neq 0$ при $x \in \operatorname{supp}\varphi_1 \cup \operatorname{supp}\varphi_2$. Асимптотич. решение такой задачи Коши (то есть функция, удовлетворяющая уравнению и начальным условиям с точностью $o(1)$) имеет вид

$$\psi_a = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{+,-} K^\pm\left[\frac{\varphi_1(\alpha)\mp\varphi_2(\alpha)}{|\nabla S_0(\alpha)|}\sqrt{\frac{c(\alpha)}{c(X^\pm(\alpha,t))}}\right]\exp(i\delta^\pm/h),$$

где $K^\pm$ – канонич. оператор Маслова на лагранжевом многообразии $L_t^\pm = g^\pm(t)L_0$, полученном сдвигом многообразия

$$L_0 = \{x = \alpha \in \mathbb{R}^n, p = \nabla S_0(\alpha)\} \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$$

вдоль траекторий $X^\pm(\alpha, t)$, $P^\pm(\alpha, t)$ гамильтоновых систем $\dot{x} = H_p^\pm$, $\dot{p} = -H_x^\pm$, с отмеченной точкой $\{x = X^\pm(\alpha_0, t), p = P^\pm(\alpha_0, t)\}$, α_0 – нек-рое фиксированное значение параметра α, $H^\pm(x, p) = \pm c(x)|p|$, $g^\pm(t)$ – фазовые потоки гамильтоновых систем с этими гамильтонианами,

$$\delta^\pm = \int_0^t (P^\pm X^\pm - H^\pm)\,d\tau + \pi h \operatorname{Ind} l/2.$$

В последней формуле интегрирование ведется вдоль траектории

$$l = \{x = X^\pm(\alpha_0, \tau), p = P^\pm(\alpha_0, \tau), 0 \leqslant \tau \leqslant t\},$$

$\operatorname{Ind} l$ – индекс Маслова этой траектории. С помощью несколько более громоздких формул вычисляются поправки к асимптотич. решению с любой степенью точности по h. Ограничение $\nabla S_0 \neq 0$ связано с тем, что гамильтонианы $H^\pm(x, p)$ совпадают и являются негладкими при $p=0$. Интегрирование начальных данных по $1/h$ переводит их в функции $2\pi\varphi_1\delta(S_0)$ и $2\pi\varphi_2\delta'(S_0)$, а функцию $O(h^N)$, $N \gg 1$, – в гладкую функцию. Указанные выше асимптотики тесно связаны с построением асимптотич. решения по гладкости, то есть функции, к-рая отличается от точного решения на достаточное число раз непрерывно дифференцируемую функцию. Для начальных данных, носитель к-рых принадлежит нек-рому компакту $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n_x$, это делается с помощью параметрикса задачи Коши

$$\Box_c\psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0 \in H_s, \ \psi_t|_{t=0} = 0,$$

где $H_s(\mathbb{R}^n_x)$ – пространство Соболева, $s \in \mathbb{R}$. Параметриксом задачи называется последовательность операторов $T_N(x, -i\frac{\partial}{\partial x}, t)$ такая, что композиция $M_N = \Box_c T_N$ является сглаживающим оператором в шкале H_s:

$$\left\| M_N\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}, \psi\right)\right\|_{H_{k+s}} \leqslant \operatorname{const}\|t)\psi\|_{H_s},$$

$k = k(N) \to \infty$ при $N \to \infty$, причем

$$T_N|_{t=0} = \mathcal{P}(x), \quad \partial T_N/\partial t|_{t=0} = 0,$$

где $\mathcal{P} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ и $\mathcal{P} = 1$ при $x \in \mathcal{K}$. При малых t символ $T_N(x, \xi, t)$ имеет вид

$$T_N = \sum\nolimits_{+,-} \exp\left(i|\xi|S^\pm(x,t,\omega) - i\xi x\right) \times$$
$$\times\left[a_0^\pm + \chi(|\xi|)a_1^\pm|\xi|^{-1} + \ldots + \chi(|\xi|)a_N^\pm|\xi|^{-N}\right],$$

где $\chi(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\chi(\tau) = 0$ при $|\tau| \leqslant 1/2$ и $\chi = 1$ при $|\tau| \geqslant 1$, $\omega = \xi|\xi|^{-1}$, функции $S^\pm$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона–Якоби

$$S_t^\pm + H^\pm(x, \nabla S^\pm) = 0, \ S^\pm|_{t=0} = \omega x,$$

(гладкие) функции $a_j(x, t, \omega)$ суть решения соответствующих уравнений переноса. Приведенная формула имеет смысл при тех t, при к-рых семейства многообразий $L_t^\pm(\omega) = g^\pm(t)L_0(\omega)$, полученные из многообразия $L_0(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n, p = \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\}$, гладко проектируются на $\mathbb{R}^n_x$; при произвольных конечных временах символ T_N дается канонич. оператором Маслова на этих многообразиях, отвечающим параметру t. Асимптотика решения указанной задачи Коши по гладкости (с точностью до функций из H_{s+N}) имеет вид $\psi \sim T_N\psi_0$. В частности, если $\psi_0 = \varphi_0\theta(S_0)$, где $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_x)$, $S_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x)$, $\nabla S_0 \neq 0$ при $S_0 = 0$, θ – функция Хевисайда, то интеграл $T_N\psi_0$, описывающий эволюцию разрыва, с точностью до непрерывных функций по методу стационарной фазы при малых t приводится к классич. виду

$$\sum\nolimits_{+,-} \varphi^\pm(x,t)\theta(S^\pm(x,t)),$$

где $S^\pm(x, t)$ – решения уравнений Гамильтона–Якоби, $S^\pm|_{t=0} = S_0$, $\varphi^\pm$ – решения уравнений переноса. Аналогичным образом могут быть изучены особенности фундаментального решения В. у. и описана «метаморфоза разрыва», заключающаяся в изменении вида особенности при прохождении фокальных точек. Параметрикс позволяет также доказать теорему существования и единственности решения. А именно, подстановка

$$\psi = T_N\psi_0 + \int_0^t\int_0^{t-\tau} T_N(x, -i\partial/\partial x, \mu)g(x,\tau)\,d\mu\,d\tau$$

приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^t\int_0^{t-\tau} M_N(x, -i\partial/\partial x, \mu)g(x,\tau)\,d\mu\,d\tau + g = M_N\psi_0$$

типа Вольтерра для функции $g(x,t)$ с гладким ядром, решение к-рого получается по методу последовательных приближений.

Лит.: [1] Lax P., «Duke Math. J.», 1957, v. 24, № 4, p. 627–46; [2] Бабич В. М., «Математич. сб.», 1960, т. 52, № 2, с. 709–38; [3] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [4] Федорюк М. В., «Успехи математич. наук», 1977, т. 32, в. 6, с. 67–115; [5] Варченко А. Н., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1987, т. 51, № 3, с. 652–65.

В. Г. Данилов, П. Н. Жевандров.

ВОЛНОВОЕ ЧИСЛО – см. *Звуковые волны.*

ВОЛНОВОЙ ОПЕРАТОР – см. *Д'Аламбера оператор.*

ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ в квантовой механике – *волновая функция*, описывающая состояния частицы. Для свободной релятивистской частицы В. п. в координатном представлении определяется из уравнения Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,x), \qquad (1)$$

$$\psi(0,x) = \psi_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^3,$$

где $\psi_0(x)$ – функция, локализованная в окрестности нек-рой точки x_0.

Решение уравнения (1) можно представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$\psi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p \exp\left(\frac{i(px-E(p)t)}{\hbar}\right)\tilde{\psi}_0(p), \qquad (2)$$

что и объясняет происхождение термина «В. п.» (в последней формуле $\tilde{\psi}_0(p)$ – волновая функция частицы в импульсном представлении при $t=0$).

Пусть x_0 и p_0 – средние значения координаты и импульса частицы в момент $t=0$. Тогда из (1), (2) следует, что среднее значение координаты x_t в момент времени t дается формулой

$$x_t = x_0 + \frac{p_0}{m}t.$$

Иными словами, центр тяжести В. п. движется как свободная частица. Это обстоятельство сыграло большую роль на раннем этапе развития квантовой механики.

С течением времени В. п. расплывается. Пусть $(\Delta x)_t^2$ и $(\Delta p)_t^2$ – дисперсии координаты и импульса в состоянии с волновой функцией $\psi(t,x)$. Тогда при больших t

$$\sqrt{(\Delta x)_t^2} \approx \sqrt{(\Delta p)_0^2}\,\frac{t}{m}. \qquad (3)$$

Физически расплывание В. п. можно объяснить на основании принципа неопределенностей Гейзенберга, в соответствии с к-рым дисперсия скорости в момент $t=0$ определяется формулой:

$$(\Delta v)_0 = \sqrt{(\Delta p)_0^2}\,\frac{1}{m} \approx \frac{\hbar}{m}\left(\sqrt{(\Delta x)_0^2}\right)^{-1}.$$

Это приводит к дисперсии $\sqrt{(\Delta x)_0^2} = t(\Delta v)_0$, что качественно согласуется с (3).

Понятие «В. п.» имеет смысл также и в присутствии внешнего поля. В этом случае соотношения (3) уже не имеют места. В частности, В. п., отвечающий стационарным состояниям частицы во внешнем поле, не расплывается с течением времени.

Ф. А. Лунев.

ВОЛНОВОЙ ФРОНТ в геометрической оптике – граница множества точек, до которой возмущение доходит за заданное время t. С увеличением t фронт распространяется вдоль лучей, перпендикулярных поверхности фронта. Даже если источник – гладкое многообразие, В. ф. для достаточно больших t может иметь особенности. Математич. аппаратом исследования особенностей В. ф. служит теория *лежандровых особенностей.*

М. Э. Казарян.

ВОЛНОВОЙ ФРОНТ распределения u на многообразии X – подмножество $T^*X\setminus 0 : (\bar{x},\bar{\xi}) \notin WF(u)$, если найдется псевдодифференциальный оператор a, эллиптический в $(\bar{x},\bar{\xi})$ и такой, что $au\in C^\infty$. В. ф.– замкнутое коническое по ξ множество (это характеристич. свойство В. ф.). Описаны и другие свойства В. ф. (см., напр., [1]–[3]), среди них: x – проекция $WF(u)$ есть sign supp u. Имеются следующие обобщения: на другие (не C^∞) классы «пренебрежимых» функций (волновой фронт Жеврея $WF_L(u)$, включая аналитич. волновой фронт $WF_A(u)$, совпадающий для распределений с сингулярным спектром Сато и существенным спектром Броза–Яголнитцера); В. ф. конечного порядка $WF^s(u)$ (см. [1]); на другие классы операторов (квазиоднородные и глобальные В. ф.); на распределения на многообразиях с краем (граничный и сжатый В. ф. [1]); для C^D-значных распределений уточнением В. ф. является поляризация

$$\mathrm{Pol} - WF(u) \subset (T^*X\setminus 0)\otimes C^D,$$

(x,ξ)-проекцией к-рой является $WF(u)$ (см. [4]). В нек-рых задачах полезным оказывается 2-В. ф. (см. [5]).

Родственное В. ф. понятие – множество частот семейства осциллирующих функций; В. ф. линейного оператора A:

$$WF(A) = \{(x,\xi,y,\eta),\ (x,\xi,y,-\eta)\in WF(K_A)\},$$

где K_A – ядро Шварца A.

Исследовалось распространение В. ф. решений уравнений с частными производными и краевых задач для них (см. [1]–[7]).

Лит.: [1] Хёрмандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, пер. с англ., т. 1–4, М., 1986–88; [2] Тейлор М., Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1985; [3] Трев Ф., Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, пер. с англ., М., 1984; [4] Dencker N., «J. Funct. Analys.», 1982, v. 46, № 3, p. 351–72; [5] Laurent Y., Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe, Birkhäuser, 1985; [6] Егоров Ю. В., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 33, М., 1988, с. 5–156; [7] Иврий В. Я., там же, с. 157–247.

В. Я. Иврий.

ВОЛЧОК – тяжелое твердое тело вращения, которое приведено во вращение вокруг своей оси симметрии и касается горизонтальной плоскости. Существенная особенность этой системы состоит в том, что В. представляет собой тело, движущееся под действием двух сил, а именно, силы тяжести, приложенной в центре масс, и силы реакции в точке касания. Поверхности в точке контакта можно считать гладкими; в этом случае система голономна. Они могут быть достаточно шероховатыми, чтобы предотвратить скольжение; тогда система неголономна. Они также могут быть не абсолютно шероховатыми; в этом случае тело скользит или катится, в зависимости от обстоятельств.

При обычной математич. идеализации В. считается тяжелым твердым телом с неподвижной точкой O – вершиной В. (см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки). В. называется симметричным, если два из трех главных моментов инерции A, B, C для точки O равны (напр., $A=B$), а прямая OD, соединяющая центр масс D с точкой O, является осью динамич. симметрии (то есть из трех координат ξ, η, ζ точки D относительно главных осей с началом в O две нулевые; а именно, в данном примере, $\xi=\eta=0$). Если условия $A=B$, $\xi=\eta=0$ не выполняются хотя бы по одному из равенств, то В. называется асимметричным.

М. И. Войцеховский.

ВОЛЬТЕРРА ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ ГИПОТЕЗА – феноменологический принцип, гласящий: «если физическая величина дважды измеряется на системе S, причем измерения следуют непосредственно одно за другим, то в обоих случаях получается одно и то же значение». В. г. была привлечена Дж. Нейманом (см. [1]) для обоснования следующего проекционного постулата: если производится из-

мерение квантовой наблюдаемой X с чисто точечным спектром, то состояние системы меняется по правилу

$$\rho \to E(x)\rho E(x)/\mathrm{Tr}\,\rho E(x)$$

с вероятностью $\mathrm{Tr}\,\rho E(x)$, где ρ – оператор плотности состояния перед измерением, x – измеренное значение, $E(x)$ – соответствующий спектральный проектор наблюдаемой X.

Попытки сформулировать постулат редукции для наблюдаемых с непрерывным спектром встречает принципиальные трудности (см. [2]–[4]). Для описания изменения состояния при произвольном *квантовом измерении* вводится понятие *инструмента*, охватывающее неточные измерения, не удовлетворяющие В. г. (см. [2]). При этом В. г. и постулат редукции рассматриваются как дополнительные требования, выражающие свойства точности и минимальной возмущаемости и не входящие в исходные посылки теории квантового измерения. Инструмент $\{\mathcal{M}(B);\ B\in\mathcal{B}(\mathcal{X})\}$ с множеством исходов $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию воспроизводимости, если

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}(B)[\mathcal{M}(C)[\rho]] = \mathrm{Tr}\,\mathcal{M}(B\cap C)[\rho],\ B,\ C\in\mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

для любого оператора плотности ρ. Доказывается, что вполне положительный инструмент, удовлетворяющий этому условию, с необходимостью имеет дискретное множество возможных исходов (см. [3]). Условие воспроизводимости для измерений наблюдаемых с непрерывным спектром может быть удовлетворено лишь путем включения в понятие квантового измерения предельных процедур, в результате к-рых система переходит в нек-рое алгебраич. состояние, не являющееся нормальным и не задаваемое оператором плотности (см. [4]).

Лит.: [1] Неймак фон Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [2] Davies E. B., Quantum theory of open systems, L.– N.Y., 1976; [3] Ozawa M., «J. Math. Phys.», 1984, v. 25, p. 79–87; [4] Srinivas M. D., «Comm. Math. Phys.», 1980, v. 71, p. 131–58.

А. С. Холево.

ВПОЛНЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – отображение Φ из C^*-алгебры $\mathcal{A}$ в C^*-алгебру $\mathcal{B}$, удовлетворяющее условию: для любого $n=1,2,\ldots$ и любой положительной $(n\times n)$-матрицы с элементами $X_{ij}\in\mathcal{A}$, $i,j=1,\ldots,n$, матрица с элементами $\Phi(X_{ij})\in\mathcal{B}$ положительна. Всякое В. п. о. положительно, то есть $X\geqslant 0$ влечет $\Phi(X)\geqslant 0$; пример положительного отображения, не являющегося В. п. о.,– транспонирование в алгебре комплексных $(d\times d)$-матриц $(d>1)$. Всякий *-гомоморфизм и условное ожидание являются В. п. о. Если $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ коммутативна, то всякое линейное положительное отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ является В. п. о.

Структура В. п. о. раскрывается теоремой Стайнспринга: пусть Φ – линейное В. п. о. из C^*-алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}(H)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, тогда существует гильбертово пространство $K\supset H$, *-гомоморфизм π алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathfrak{B}(K)$ и ограниченный оператор V из H в K такие, что $\Phi(X)=V^*\pi(X)V$. В частности, если $\mathcal{A}=\mathfrak{B}(H)$, то всякое нормальное линейное В. п. о. имеет вид:

$$\Phi(X)=\sum\nolimits_i V_i^* X V_i,\quad X\in\mathfrak{B}(H),$$

где $V_i\in\mathfrak{B}(H)$ и ряд $\sum_i V_i^*V_i$ сходится в сильной операторной топологии $\mathfrak{B}(H)$.

Понятие В. п. о. играет важную роль в структурной теории алгебр Неймана, в алгебраич. формулировке неравновесной квантовой статистич. механики и в теории квантового измерения. См. *Динамическая полугруппа, Инструмент.*

Лит.: [1] Arveron W., «Acta math.», 1969, v. 123, p. 141–224; [2] Stinespring W. F., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 6, p. 211–16; [3] Størmer E., «Lect. Notes in Phys.», 1974, v. 29, p. 85–106.

А. С. Холево.

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы G в векторном пространстве V – представление T, любое инвариантное подпространство которого обладает ортогональным дополнением, то есть для любого инвариантного относительно T подпространства V_1 в V существует инвариантное подпространство V_2 в V такое, что V есть прямая сумма V_1 и V_2. Представления конечных групп, компактных групп, а также *унитарные представления* вполне приводимы.

Ю. А. Неретин.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ твердого тела.

1) В. д. вокруг неподвижной оси – движение твердого тела, при котором все его точки, двигаясь в параллельных плоскостях, описывают окружности с центрами, лежащими на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения. Тело, совершающее В. д., имеет одну степень свободы, и его положение относительно данной системы отсчета определяется углом поворота φ между неподвижной полуплоскостью и полуплоскостью, жестко связанной с телом, проведенными через ось вращения (рис. 1).

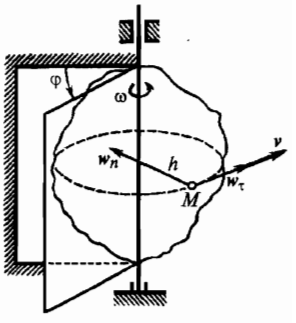


Рис. 1. Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси.

В. д. задается уравнением $\varphi=f(t)$, где t – время. Основные кинематич. характеристики В. д. тела: его *угловая скорость*

$$\omega=d\varphi/dt$$

и *угловое ускорение*

$$\varepsilon=d\omega/dt=d^2\varphi/dt^2.$$

Для любой точки тела, находящейся на расстоянии h от оси вращения, линейная скорость

$$v=\omega h,$$

касательное ускорение

$$w_\tau=h\varepsilon,$$

нормальное ускорение

$$w_n=h\omega^2,$$

полное ускорение

$$w=h\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}.$$

Таким образом, скорости и ускорения всех точек тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

Основными динамич. характеристиками В. д. тела являются его главные моменты количеств движения относительно связанных с телом осей x, y, z (z – ось вращения), равные:

$$K_x=-I_{xz}\omega,\ K_y=-I_{yz}\omega,\ K_z=I_z\omega,$$

и кинетич. энергия

$$T=1/2I_z\omega^2,$$

где I_z – осевой, а I_{xz}, I_{yz} – центробежные моменты инерции.

2) В. д. вокруг точки (или сферическое движение) – движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку O (напр., движение *гироскопа*, закрепленного в кардановом подвесе). Каждая из точек тела при этом В. д. перемещается по поверхности сферы с центром в точке O. В. д. тела вокруг точки слагается из серии элементарных или мгновенных В. д. вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту точку. Мгновенная ось вращения непрерывно изменяет свое положение как по отношению к системе отсчета, в к-рой рассматривается движение тела, так и в самом теле, образуя при этом две конич. поверхности, называемые соответственно неподвижным и подвижным аксоидами. Качением подвижного аксоида

по неподвижному можно осуществить геометрич. картину движения тела в этом случае (рис. 2).



Рис. 2. Подвижный и неподвижный аксоиды.

Тело с неподвижной точкой имеет три степени свободы, и его положение по отношению к данной системе отсчета определяется тремя параметрами, напр. *Эйлера углами* φ, ψ и θ. Закон движения тела задается в этом случае уравнениями

$$\varphi = f_1(t),\ \psi = f_2(t),\ \theta = f_3(t). \qquad (*)$$

Кинематич. характеристиками движения являются вектор угловой скорости ω, направленный в каждый момент времени вдоль мгновенной оси вращения, и вектор углового ускорения ε, направленный параллельно касательной к *годографу* вектора ω. Если движение задано уравнениями (*), то проекции вектора ω на прямоугольные оси системы *Oxyz*, жестко связанные с движущимся телом, определяются кинематич. уравнениями Эйлера

$$\omega_x = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi,$$

$$\omega_y = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi,$$

$$\omega_z = \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta,$$

где $\dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta$ – производные от углов Эйлера по времени t. Векторы линейной скорости $\boldsymbol{v}$ и ускорения $\boldsymbol{w}$ любой точки тела равны

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega r}];\ \boldsymbol{w} = [\boldsymbol{\varepsilon r}] + [\boldsymbol{\omega v}],$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный в данную точку тела из неподвижной точки O. Проекции вектора $\boldsymbol{v}$ на оси системы *Oxyz* определяются формулами Эйлера

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y;\ v_y = \omega_z x - \omega_x z;\ v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Основными динамич. характеристиками тела с неподвижной точкой O являются моменты количеств движения относительно главных осей инерции x, y, z, проведенных в точке O:

$$K_x = I_x\omega_x;\ K_y = I_y\omega_y;\ K_z = I_z\omega_z,$$

и кинетич. энергия

$$T = 1/2\,(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2),$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно упомянутых главных осей; ω_x, ω_y, ω_z – проекции ω на эти оси. Количество движения тела при любом виде движения равно $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_c$, где m – масса тела, $\boldsymbol{v}_c$ – скорость центра c масс.

С. М. Targ.

ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ РАЗРЫВ – см. *Ударные волны.*

ВРАЩАЮЩИЙСЯ МАЯТНИК – см. *Лагранжа–Пуассона случай.*

ВРАЩЕНИЕ векторного поля на плоскости – характеристика поля, равная деленному на 2π приращению угла между векторным полем x и некоторым фиксированным направлением при обходе замкнутой кривой L, вдоль которой $x \neq 0$. Напр., если L – гладкая кривая, то В. касательного (и нормального) поля вдоль L равно деленной на 2π полной кривизне L.

М. И. Войцеховский.

ВРАЩЕНИЙ ГРУППА – непрерывная группа преобразований пространства с фиксированной неподвижной точкой (центром вращений), оставляющих неизменным расстояние между двумя произвольными точками; сохраняются также углы между произвольными векторами. Для В. г. принято обозначение $O(n)$, где n – размерность пространства. В дальнейшем речь пойдет о физически интересной В. г. трехмерного пространства $O(3)$. Выделяют собственную группу вращений $SO(3)$, к-рая в дополнение к свойствам, указанным выше, сохраняет ориентацию пространства (координатных осей). Полная В. г. разлагается в прямое произведение собственной В. г. и группы отражений (состоящей всего из двух элементов).

В ряде физич. задач имеет место инвариантность относительно В. г.; такой инвариантностью обладают, напр., *Лапласа уравнение* и однородное уравнение Гельмгольца. Инвариантность относительно В. г. приводит к закону сохранения углового момента. Эта величина играет определяющую роль при классификации решений соответствующих уравнений. Математически В. г. является одной из простейших компактных групп Ли.

Любое собственное трехмерное вращение определяется заданием трех непрерывно меняющихся параметров, так что вся группа $SO(3)$ представляет собой трехмерное многообразие, топологически эквивалентное трехмерному проективному пространству (трехмерной сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками). Группа $O(3)$ состоит из двух связных компонент, каждая из к-рых совпадает с $SO(3)$. В качестве параметров удобно выбрать так наз. *Эйлера углы* φ, θ и ψ.

Связь новых координат со старыми имеет вид:

$$x_i' = M_{ik}(\varphi, \theta, \psi)\, x_k, \qquad (*)$$

где

$$M_{ik}(\varphi, \theta, \psi) = g_1(\varphi)\, g_2(\theta)\, g_1(\psi),$$

$$g_1(\varphi) = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g_2(\theta) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}.$$

При последовательном выполнении двух вращений матрицы M_{ik} перемножаются.

Матрицы M_{ik} образуют одно из представлений В. г., называемое присоединенным. Матрица M_{ik} определяет преобразование при повороте не только самих координат, но и любых векторов: связь компонент вектора в старых координатах и в новых также определяется формулой (*). Существуют и другие представления В. г. Простейшее представление – скалярное: скаляры вообще не преобразуются при повороте. Более сложные представления связаны с преобразованием компонент тензоров второго и более высоких рангов. В пространстве дифференцируемых функций $f(\theta, \varphi)$, заданных на поверхности сферы единичного радиуса, базис представлений В. г. образуют сферич. функции. Преобразование этого базиса при вращениях описывается матрицей представления, элементами к-рой являются *Вигнера функции.*

В квантовой механике важную роль играют представления, связанные с преобразованием при повороте волновой функции системы с определенным значением углового момента J. Скалярное представление соответствует $J = 0$, векторное – случаю $J = 1$ (в единицах $\hbar$), $J = 2$ соответствует симметричному тензору второго ранга с равным нулю следом и т. д. Представлениями с определенным значением J исчерпываются все возможные представления $SO(3)$.

Часто вводят также представления в виде матриц четного ранга, связанные с преобразованием при повороте волновых функций систем с полуцелым *спином.* Они не являются настоящими представлениями В. г., так как волновая функция при повороте на 2π вокруг нек-рой оси меняет знак. Причина этого в том, что полуцелый спин не описывается последовательно в рамках нерелятивистской квантовой механики, для его описания следует привлекать *Лоренца группу.* Однако в ряде задач, когда все релятивистские явления сводятся к наличию спина, можно рассматривать двузнач-

ные представления В. г., где каждому вращению соответствует не одна унитарная матрица, а две различающиеся знаком матрицы. Двузначным (спинорным) представлениям $SO(3)$ соответствуют истинные представления накрывающей группы $SU(2)$.

Произведение неприводимых представлений В. г. не является неприводимым, но может быть разложено в прямую сумму неприводимых представлений. Коэффициенты этого разложения (*Клебша – Гордана коэффициенты*) используют в квантовой механике при вычислении матричных элементов различных операторов и при построении волновых функций составных систем.

Вращение на малый угол можно представить в виде

$$\hat{M} = 1 + \hat{T}_{12}\varphi_{12} + \hat{T}_{13}\varphi_{13} + \hat{T}_{23}\varphi_{23},$$

где $\hat{M}$ – матрица вращения в нек-ром представлении, φ_{mn} – малые углы поворота в трех независимых плоскостях, а $\hat{T}_{mn}$ – фиксированные матрицы, к-рые в данном представлении называются генераторами В. г. В квантовой механике генераторы В. г. имеют наглядный физич. смысл и совпадают с операторами углового момента $\hat{J}$. Некоммутативность В. г. отражается в том факте, что коммутатор $[\hat{J}_m, \hat{J}_n]$ отличен от нуля при $m \neq n$.

Отметим, что в нек-рых физич. задачах находят применение и группы $O(n)$ с $n > 3$. Так, группа $O(4)$ оказалась полезной при классификации состояний атома водорода, в теории гравитации интерес представляет связанная с группой $O(5)$ *де Ситтера группа*, при попытках построения единой квантовой теории поля используют В. г. высших размерностей вплоть до $O(32)$.

Лит.: [1] Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение в физике, М., 1958; [2] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения, М., 1958; [3] Юцис А. П., Левинсон И. Б., Ванагас В. В., Математический аппарат теории момента количества движения, Вильнюс, 1960; [4] Петрашень М. И., Трифонов Е. Д., Применение теории групп в квантовой механике, М., 1967.

А. В. Смилга.

ВРЕМЕНИПОДОБНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ – см. *Сингулярности пространства-времени.*

ВРЕМЕНИПОДОБНЫЙ ВЕКТОР – *четырехмерный вектор* в пространстве-времени специальной теории относительности (*Минковского пространстве-времени*), квадрат временной компоненты которого больше суммы квадратов пространственных компонент. Квадрат длины В. в. (A) в метрике Минковского положителен:

$$(A)^2 = A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Здесь A^0 – временная, A^1, A^2, A^3 – пространственные компоненты ($\mu = 0, 1, 2, 3$). С помощью *Лоренца преобразований* последние могут быть обращены в нуль, то есть существует система отсчета, в к-рой данный В. в. характеризуется единственной, временной компонентой $A^{0'}$. Поскольку величина $(A)^2$ инвариантна при преобразованиях Лоренца, $A^{0'} = \sqrt{(A)^2}$. Очевидно, любой В. в. остается времениподобным при переходе в произвольно движущуюся инерциальную систему отсчета.

Важным примером В. в. в релятивистской механике является вектор четырехмерной скорости частицы с ненулевой массой покоя:

$$u^\mu = dx^\mu/ds$$

– касательный вектор к *мировой линии* $x^\mu(s)$ частицы (s – интервал). Этот вектор в метрике Минковского имеет единичную длину, $u^2 = 1$, а система отсчета, в к-рой его пространственные компоненты равны нулю, является системой покоя частицы. В этой системе направление u^μ совпадает с направлением оси времени. С В. в. u^μ связан соотношением пропорциональности другой В. в.– четырехмерный импульс $p^\mu = mu^\mu$ (m – масса частицы; используется система единиц, в к-рой скорость света $c = 1$). Временная компонента этого вектора равна полной энергии $\mathscr{E}$ частицы с учетом энергии покоя, $p^2 = p^\mu p_\mu = \mathscr{E}^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$ ($\boldsymbol{p}$ – трехмерный импульс).

В пространстве-времени Минковского времениподобным будет любой вектор, лежащий внутри *светового конуса*, вершина к-рого совмещена с его началом. Такой В. в. соединяет точки, отвечающие событиям, к-рые могут быть причинно связаны между собой. Соответствующий интервал (длина этого вектора) также называется времениподобным.

Д. В. Гальцов.

ВРЕМЕННОЕ СРЕДНЕЕ – см. *Усреднения метод, Эргодическая теорема.*

ВРЕМЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА – см. *Шредингера уравнение.*

ВРЕМЕННОЙ РЯД – см. *Случайная функция, Случайный процесс.*

ВРЕМЯ ЖИЗНИ – характеристика *резонанса* (неспектральной особенности) в квантовой теории рассеяния, определяющая скорость распада резонансного состояния. Если матрица рассеяния $S(k)$, определенная для пары гамильтонианов H, H_0, действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, имеет полюс k_0 на нефизич. листе ($\operatorname{Im} k_0 < 0$, $k_0^2 = E$) римановой поверхности энергий E, то временем жизни резонанса k_0 называется величина

$$\tau_0 = |\operatorname{Im} k_0|^{-1}.$$

Эта величина показывает, с какой скоростью происходит размывание волнового пакета в окрестности рассеивателя. Если p – проектор на состояния, сосредоточенные в окрестности рассеивателя, то норма функции резонансного состояния $U_0^{\text{рез}}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ экспоненциально убывает с течением времени t:

$$\left\| PU_0^{\text{рез}} \right\|(t) = \left\| PU_0^{\text{рез}} \right\|_{(t=0)} \exp\left(-\tau_0^{-1} t\right).$$

Обратная величина $\Gamma_0 = \tau_0^{-1}$ называется шириной резонанса.

Лит.: [1] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 4. Анализ операторов, пер. с англ., М., 1982.

Ю. Б. Мельников.

ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА поверхности, радиус-вектор текущей точки которой задан параметрически $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$, – форма вида

$$d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{m} = b_{ij}du^i du^j,$$

где $\boldsymbol{m}$ – единичная нормаль к поверхности. В качестве нормали обычно берут

$$\boldsymbol{m} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}\right] \Big/ \left|\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}\right]\right|,$$

то есть

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^i \partial u^j}\right)\gamma^{-1/2},$$

где $\gamma = \det \|g_{ij}\|$, g_{ij} – *первая квадратичная форма.*

Часто используют классич. обозначения:

$$b_{11} = L,\ b_{12} = M,\ b_{22} = N.$$

В. В. Трофимов.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА – см. *Краевая задача, Неймана задача.*

ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ – метод рассмотрения квантовой системы, при котором роль независимых переменных играет число частиц в заданном состоянии. В. к. возникло при рассмотрении нерелятивистских систем, состоящих из тождественных частиц. Для бозе-частиц (подчиняющихся статистике Бозе – Эйнштейна) метод В. к. развит в 1927 П. Дираком (P. Dirac) и в том же году – П. Йорданом (P. Jordan) и О. Клейном (O. Klein), для ферми-частиц (подчиняющихся статистике Ферми – Дирака) –

в 1928,– Е. Вигнером (E. Wigner) и П. Йорданом. Этот метод позволяет рассматривать системы с большим числом степеней свободы и системы с переменным числом частиц. Аппарат В. к. имеет широкое применение в статистич. физике и квантовой теории поля, где рассматриваются процессы с рождением и уничтожением частиц.

В. к. нерелятивистских систем. Рассмотрим квантовомеханич. систему из N невзаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле. Пусть $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$, ... – нек-рая полная система одночастичных волновых функций (ξ включает в себя как пространственную координату $\boldsymbol{x}$, так и спиновую переменную s). Они могут, напр., соответствовать стационарным состояниям одной частицы во внешнем поле. Можно ввести полную систему многочастичных волновых функций следующим образом. Пусть N_i – число частиц в состоянии ψ_i. Тогда состояние системы может быть задано набором чисел (N_1, N_2, ...), указывающим, что N_1 частиц находится в состоянии ψ_1, N_2 частиц – в состоянии ψ_2 и т. д. Вектор состояния системы в этом случае обозначают $|N_1, N_2, \ldots\rangle$. О таком описании системы говорят как об описании в пространстве чисел заполнения или в представлении вторичного квантования.

Для ферми-системы в каждом состоянии может находиться не более одной частицы, $N_i = 0,1$. Для бозе-систем N_i может быть любым неотрицательным целым числом, $N_i = 0,1, \ldots, N$. В пространстве чисел заполнения можно рассматривать системы с произвольным числом частиц. Оператор a_i^+, переводящий состояние системы $|N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle$ в состояние, у к-рого на i-уровне находится $N_i + 1$ частиц,

$$a_i^+|N_1,\ldots,N_i,\ldots\rangle = \sqrt{N_i+1}\,|N_1,\ldots,N_i+1,\ldots\rangle, \qquad (1)$$

называется оператором рождения. Оператор a_i^-, к-рый удаляет частицу с i-уровня,

$$a_i^-|N_1,\ldots,N_i,\ldots\rangle = \sqrt{N_i}\,|N_1,\ldots,N_i-1,\ldots\rangle, \qquad (2)$$

называется оператором уничтожения. Коэффициенты $\sqrt{N_i+1}$ и $\sqrt{N_i}$ в (1) и (2) определяются из условия того, что оператор $a_i^+a_i^-$ является оператором числа частиц в состоянии i, то есть

$$a_i^+a_i^-|N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle = N_i|N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle.$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют *перестановочным соотношениям*

$$\left[a_i^+,a_j^+\right] = 0, \quad \left[a_i^-,a_j^-\right] = 0, \quad \left[a_i^-,a_j^+\right] = \delta_{ij} \qquad (3а)$$

для статистики Бозе – Эйнштейна (квадратные скобки означают коммутатор, то есть $[b, c] = bc - cb$) и

$$\left\{a_i^+,a_j^+\right\} = 0, \quad \left\{a_i^-,a_j^-\right\} = 0, \quad \left\{a_i^+,a_j^-\right\} = \delta_{ij} \qquad (3б)$$

для статистики Ферми – Дирака (фигурные скобки означают антикоммутатор, то есть $\{b,c\} = bc + cb$; δ_{ij} – символ Кронекера). Пространство чисел для бесконечного числа частиц называется пространством Фока.

Любые квантовомеханич. операторы, заданные, напр., в конфигурационном представлении, можно записать при помощи операторов рождения и уничтожения в представлении В. к. Напр., *гамильтониан*

$$H = \sum_f H_f^{(1)} + \sum_{f,g} U^{(2)}(\boldsymbol{x}_f, \boldsymbol{x}_g),$$

где $H_f^{(1)} = -(\hbar^2/2m)\Delta_f + U^{(1)}(\boldsymbol{x}_f)$ – одночастичный гамильтониан, $U^{(2)}(\boldsymbol{x}_f, \boldsymbol{x}_g)$ – потенциал двухчастичного взаимодействия, в представлении В. к. записывается в виде:

$$H = \sum_{i,k} H_{ik}^{(1)} a_i^+ a_k^- + \frac{1}{2}\sum_{i,k,l,m} U_{ik,lm}^{(2)} a_i^+ a_k^+ a_l^- a_m^-,$$

где

$$H_{ik}^{(1)} = \int \psi_i^*(x) H^{(1)} \psi_k(x)\, dx,$$

$$U_{ik,lm}^{(2)} = \int \psi_i^*(x)\psi_k^*(x') U^2(x,x')\psi_l(x)\psi_m(x)\, dx dx',$$

a_i^+, a_i^- – соответственно операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии ψ_i одночастичного гамильтониана (без учета взаимодействия между частицами).

Гамильтониан в представлении В. к. может быть записан в более компактной форме, если ввести операторы $\hat\psi$ и $\hat\psi^+$:

$$\hat\psi = \sum_i a_i^- \psi_i, \quad \hat\psi^+ = \sum_i a_i^+ \psi_i^*,$$

действующие на векторы состояния $|N_1, N_2, \ldots\rangle$ в пространстве чисел заполнения:

$$H = \int \hat\psi^+(x) H^{(1)} \hat\psi(x)\, dx + \frac{1}{2}\int [\hat\psi^+(x)\hat\psi^+(x') \times$$

$$\times U^{(2)} \hat\psi(x)\hat\psi(x')]\, dx\, dx'.$$

Выражения для операторов $\hat\psi$ аналогичны разложению произвольной волновой функции по полной системе волновых функций ψ_i. Поскольку, однако, коэффициенты разложения являются не числами, а операторами, $\hat\psi$ и $\hat\psi^+$ называются вторично квантованными (отсюда название метода – «В. к.»).

Достоинство метода В. к. в применении к системам взаимодействующих частиц состоит в том, что с его помощью естественным образом описываются переходы между состояниями системы, вызванные взаимодействием частиц. Эти переходы сводятся к исчезновению частиц в одном состоянии и появлению их в другом. Одновременно аппарат В. к. приспособлен и к рассмотрению процессов с переменным числом частиц – описывает рождение или уничтожение частиц в результате взаимодействия. В квантовой механике всякое слабо возбужденное состояние системы взаимодействующих частиц может быть представлено как совокупность элементарных возбуждений – квазичастиц. Числа N_i в представлении чисел заполнения в этом случае интерпретируются как числа квазичастиц. Напр., слабо возбужденное состояние твердого тела, обусловленное колебаниями атомов кристаллич. решетки, описывается как совокупность квазичастиц – фононов, свободно движущихся в объеме тела. При этом энергию возбуждения системы можно рассматривать как энергию идеального газа фононов. Основное состояние системы, в к-ром отсутствуют квазичастицы, можно рассматривать как вакуум, вектор состояния к-рого удовлетворяет условию $a_i^-|0\rangle = 0$. Для слабо взаимодействующего неидеального бозе-газа операторы рождения и уничтожения квазичастиц связаны с операторами рождения и уничтожения исходных частиц *Боголюбова каноническими преобразованиями.*

Квантование системы гармонических осцилляторов. Рассмотрим важный частный случай – систему n квантовых невзаимодействующих гармонич. *осцилляторов* (единичной массы) с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^n H_i(\hat p_i, \hat q_i),\ H_i(\hat p_i, \hat q_i) = \frac{1}{2}(\hat p_i^2 + \omega_i^2 \hat q_i^2).$$

Здесь $\hat q_i$, $\hat p_i$ – операторы обобщенных координат и импульса i-осциллятора, а параметры ω_i имеют смысл частоты колебаний. Для перехода в представление В. к. вводятся операторы уничтожения и рождения

$$a_i^- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_i}}(\omega_i \hat q_i + i\hat p_i),$$

$$a_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_i}}(\omega_i \hat q_i - i\hat p_i).$$

Тогда гамильтониан принимает вид

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\hbar\omega_i}{2}\left(a_i^+a_i^- + a_i^-a_i^+\right). \qquad (4)$$

Операторы $a_i^{\pm}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (3а). Обозначим через ψ_{0i} решение уравнения $a_i^-\psi_{0i}=0$; оно интерпретируется как вакуумное состояние i-осциллятора. Введем вакуумное состояние системы n осцилляторов: $|0\rangle=\prod_{i=1}^n \psi_{0i}$. Состояние

$$|K_1,\ldots,K_n\rangle=\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{K_i!}}\left(a_i^+\right)^{K_i}|0\rangle \qquad (5)$$

является собственной функцией оператора H с собственным значением

$$\varepsilon(K_1,\ldots,K_n)=\sum_{i=1}^n \hbar\omega_i\left(K_i+\frac{1}{2}\right);$$

оно интерпретируется как состояние, в к-ром имеется K_1 частиц с энергией $\hbar\omega_1$, K_2 – с энергией $\hbar\omega_2$ и т. д. Векторы состояния (5) при всевозможных значениях K_i, $K_i=0, 1, \ldots, i=1, \ldots, n$, образуют базис в пространстве чисел заполнения. Оператор

$$\hat{N}=\sum_{i=1}^n a_i^+a_i^-$$

является оператором числа частиц, и

$$\hat{N}|K_1,\ldots,K_n\rangle=\sum_{i=1}^n K_i|K_1,\ldots,K_n\rangle.$$

Квантование релятивистских полей. В представлении В. к. можно рассматривать и системы с бесконечным числом степеней свободы – физич. поля. Метод В. к. позволяет в этом случае описывать поля как совокупность частиц (квантов поля).

Рассмотрим классич. свободное скалярное поле $\varphi(x)$, удовлетворяющее *Клейна – Гордона уравнению*. Ему соответствует *лагранжиан*

$$L_0=\frac{1}{2}\int d^4x\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}-m^2\varphi\right]$$

(x – точка пространства-времени, $\mu=0, 1, 2, 3$, постоянная m имеет смысл массы; используется система единиц, в к-рой $\hbar=c=1$). Соответствующий гамильтониан системы после разложения φ по плоским волнам приобретает вид:

$$H=\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{k}\,\omega(\boldsymbol{k})\left[a_{\boldsymbol{k}}^+a_{\boldsymbol{k}}^-+a_{\boldsymbol{k}}^-a_{\boldsymbol{k}}^+\right],\qquad \omega(\boldsymbol{k})=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}. \qquad (6)$$

Сравнение формул (4) и (6) показывает, что свободное поле можно рассматривать как набор невзаимодействующих осцилляторов в импульсном пространстве (нумеруемых непрерывным трехмерным индексом $\boldsymbol{k}$), частота колебаний к-рых зависит от импульса $\boldsymbol{k}$.

Квантование свободного поля (то есть сопоставление ему соответствующих частиц) может быть проведено как квантование осцилляторов поля (аналогично квантованию системы гармонич. осцилляторов). Для этого величины $a_{\boldsymbol{k}}^+$, $a_{\boldsymbol{k}}^-$ в (6) следует рассматривать как операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\left[a_{\boldsymbol{k}}^+,a_{\boldsymbol{k}'}^+\right]=0,\quad \left[a_{\boldsymbol{k}}^-,a_{\boldsymbol{k}'}^-\right]=0,\quad \left[a_{\boldsymbol{k}}^-,a_{\boldsymbol{k}'}^+\right]=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \qquad (7)$$

(где $\delta(\boldsymbol{k})$ – дельта-функция Дирака) и действующие на вектор состояния системы в пространстве чисел заполнения. Процедура квантования свободного поля как совокупности осцилляторов совпадает при условиях (7) с процедурой *канонического квантования*.

Квантование классич. теории, описываемой набором $\varphi_j(x)$ классич. полей и лагранжианом L, обычно производится с помощью канонич. квантования (предполагается, что соответствующая классич. система допускает гамильтонову формулировку). При этом на операторы обобщенных координат $\hat{\varphi}_j(x)$ и импульсов $\hat{\pi}_j(x)$ накладываются перестановочные соотношения

$$[\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j(t,\boldsymbol{x}),\hat{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{x}')]=i\hbar\delta_{jk}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \qquad (8)$$

Если построено нек-рое представление перестановочных соотношений (8) такое, что в нем: 1) определено действие оператора Гамильтона H; 2) гамильтониан имеет основное (вакуумное) состояние Ω; 3) определены средние от полевых операторов в произвольный момент времени t по вакуумному состоянию:

$$w_n(t_1,\boldsymbol{x}_1;t_2,\boldsymbol{x}_2;\ldots;t_n,\boldsymbol{x}_n)=\langle\Omega|\hat{\varphi}(t_1,\boldsymbol{x}_1)\hat{\varphi}(t_2,\boldsymbol{x}_2)\ldots\hat{\varphi}(t_n,\boldsymbol{x}_n)|\Omega\rangle, \qquad (9)$$

где

$$\hat{\varphi}(t,\boldsymbol{x})=e^{-itH}\hat{\varphi}(0,\boldsymbol{x})e^{itH},$$

то говорят, что построено квантование полевой системы.

Непосредственно провести описанную выше схему удается только для свободных полей. Для системы свободных полей число сортов частиц и число полей совпадают.

Для лагранжианов вида $L=L_0+gL_{int}$, где слагаемое L_{int} описывает взаимодействие полей (g – константа связи), как правило, правая часть (9) может быть построена лишь по теории возмущений по степеням g. При таком построении осуществляется квантование взаимодействующих полей в пространстве Фока, связанном с лагранжианом L_0. Однако включение взаимодействия со сколь угодно малой константой связи g столь существенно меняет картину, что взаимодействующие поля не могут быть определены в пространстве Фока исходных невзаимодействующих полей. Для преодоления этой трудности разработана процедура устранения расходимостей.

Число полей, из к-рых строится модель, может не совпадать с числом сортов частиц проквантованной системы, аналогично ситуации с квазичастицами в статистич. физике. С одной стороны, могут появляться связанные состояния, с другой – частиц, соответствующих исходным полям, может не быть. Такая ситуация имеет место в современной теории сильного взаимодействия – *квантовой хромодинамике*. Кванты полей, из к-рых строится модель,– кварки – не наблюдаются, а наблюдаемые адроны являются связанными состояниями кварков.

При квантовании классич. полевой системы полезно иметь информацию о ее решениях. Если среди решений классич. уравнений находятся решения с конечной энергией, локализованной в нек-рой области пространства,– солитоны, то они могут привести к существованию так наз. солитонного сектора в квантовом случае, в к-ром реализованы квантовые солитоны. Квантовые солитоны в принципе могут иметь статистику, противоположную статистике исходных полей. Таким образом, появляется теоретич. возможность строить фермионы из бозонов. Квантовые солитоны, так же как и связанные состояния, дают возможность, исходя из небольшого числа полей, строить теорию с большим числом наблюдаемых сортов частиц. Одним из практич. методов построения теории в солитонном секторе является квантование системы с помощью фейнмановского *функционального интеграла*.

Лит.: [1] Бете Г., Квантовая механика, пер. с англ., М., 1965; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980; [3] Дирак П., Принципы квантовой механики, 2 изд., пер. с англ., М., 1979; [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976; [5] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, М., 1978; [6] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, пер. с англ., М., 1963.

И. Я. Арефьева.

ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ – см. *Термодинамики законы.*

ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВА – см. *Колмогорова уравнение.*

ВТОРОЙ ЗВУК – см. *Звуковые волны.*

ВЫБОРОЧНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Случайный процесс, Случайное поле, Случайная функция.*

ВЫБОРОЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Случайный процесс.*

ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ – см. *Распределение.*

ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, индуцированное излучение,— излучение фотонов частоты ν возбужденными атомами, молекулами и другими квантовыми системами под действием фотонов (внешнего излучения) такой же частоты. В. и. происходит в результате квантового перехода с более высокого уровня энергии $\mathscr{E}_i$ на более низкий $\mathscr{E}_k$, где $\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_k = h\nu$. Представляет собой процесс, обратный процессу поглощения излучения. Испущенное вынужденное излучение совпадает с вынуждающим не только по частоте, но и по направлению распространения, поляризации и фазе, ничем от него не отличаясь.

Понятие о В. и. было введено А. Эйнштейном (A. Einstein) в 1916 при рассмотрении термодинамич. равновесия совокупности частиц газа с электромагнитным излучением (при определенной температуре T). Такое равновесие, являющееся детальным (см. *Детального равновесия условие*), осуществляется для излучательных квантовых переходов в результате равенства суммарного числа процессов спонтанного излучения и В. и. числу процессов поглощения фотонов для каждой пары уровней энергии $\mathscr{E}_i$ и $\mathscr{E}_k$ частиц. Эти процессы характеризуются вероятностью спонтанного излучения, зависящей только от свойств излучающих частиц, и вероятностями В. и. и поглощения (вынужденных переходов), зависящими не только от свойств частиц, но и от спектральной плотности энергии вынуждающего излучения u_ν. Соответствующие вероятности равны: A_{ik}, $B_{ik}\,u_\nu$ и $B_{ki}\,u_\nu$, где A_{ik}, B_{ik} и B_{ki} — коэффициенты Эйнштейна. Учет В. и. наряду со спонтанным излучением и поглощением позволил А. Эйнштейну вывести *Планка закон излучения* на основе квантовых представлений.

В условиях термодинамич. равновесия B_{ik} мало́, однако в случае отсутствия термодинамич. равновесия при инверсии населенностей для соответствующей пары уровней энергии $\mathscr{E}_i$ и $\mathscr{E}_k$ (когда населенность верхнего уровня $\mathscr{E}_i$ больше населенности нижнего уровня $\mathscr{E}_k$) число процессов В. и. преобладает над числом процессов поглощения и интенсивность излучения частоты $\nu = (\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_k)/h$ будет возрастать. На этом принципе основано действие генераторов монохроматич. излучения в оптич. и микроволновой областях спектра — лазеров и мазеров. *М. А. Ельяшевич.*

ВЫНУЖДЕННОЕ КОЛЕБАНИЕ — незатухающее колебание в какой-либо материальной системе, возникающее под действием внешней переменной во времени силы. В линейной *диссипативной системе* при действии на нее внешней силы, изменяющейся по гармонич. закону, В. к. имеют частоту внешней силы. Амплитуда В. к. определяется параметрами внешнего воздействия (амплитудой, частотой) и коэффициентами сопротивления среды, в к-рой происходят колебания материальной системы. Если частота внешней силы близка к одной из частот *собственных колебаний* системы, то амплитуда В. к. может иметь достаточно большую величину, тем большую, чем меньше сопротивление среды. В случае отсутствия сопротивления среды при совпадении частоты внешней силы с одной из частот собственных колебаний системы амплитуда В. к. неограниченно возрастает пропорционально времени. Это явление носит название *резонанса.*

При включении внешней силы в материальной системе возникают как В. к., так и собственные колебания. В диссипативной системе собственные колебания затухают, и в системе остаются только В. к. (установившийся режим). Режим перехода к установившимся колебаниям называется переходным режимом. Время переходного режима тем меньше, чем больше сопротивление среды. Если внешняя сила является периодич. функцией времени с периодом $T = 2\pi/p$, к-рая может быть представлена рядом Фурье, то в линейной системе возникают В. к., представляющие собой сумму гармоник с частотами $np\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Амплитуды этих гармоник убывают с возрастанием n, но неравномерно. На практике часто ограничиваются конечным числом гармоник.

Если при каком-либо значении n частота np близка к одной из собственных частот системы, то амплитуда гармоники В. к. с частотой np может быть достаточно большой, а при отсутствии сопротивления среды будет расти пропорционально времени. Напр., для диссипативной системы с одной степенью свободы, уравнение движения к-рой имеет вид

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin(npt + \delta_n)$$

(h, k^2, H_n, p, δ_n — постоянные коэффициенты), В. к. будут происходить по закону

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{\sqrt{\left(k^2 - n^2p^2\right)^2 + 4h^2n^2p^2}} \sin(npt + \delta_n - \gamma_n),$$

где $\gamma_n = \operatorname{arctg}[2hnp/(k^2 - n^2p^2)]$. Если же $h = 0$ (среда без сопротивления) и $sp = k$, то

$$x = \sum_{n=1}^{(s)/\infty} \frac{H_n}{k^2 - n^2p^2} \sin(npt + \delta_n) - \frac{H_s^t}{2sp} \cos(npt + \delta_s),$$

где значок (s) у суммы означает, что член при $n = s$ в сумму не входит.

При непериодич. внешнем возмущении возникающие в системе В. к. будут также непериодическими. При воздействии внешней гармонич. силы на нелинейную диссипативную систему возможно возникновение В. к. не только с частотой внешней силы, но и с частотой, в целое число раз большей частоты внешней силы (субгармонические колебания).

В автоколебательной системе при действии на нее внешней гармонич. силы возникает квазипериодический режим (режим биений), характеризующийся наличием периодич. колебания с частотой, близкой к частоте автоколебаний, и В. к. с частотой внешнего возмущения. При частоте внешнего возмущения, близкой к частоте автоколебаний, система совершает колебания только с частотой внешней силы. Это явление носит название принудительной синхронизации (захватывание).

Лит.: [1] Андронов А. А., Собрание трудов, [М.], 1956; [2] Бабаков И. М., Теория колебаний, 2 изд., М., 1965; [3] Бутенин Н. В., Теория колебаний, 2 изд., М., 1963; [4] Коловский М. З., Нелинейная теория виброзащитных систем, М., 1966; [5] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [6] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 2 изд., М., 1964; [7] Цзе Ф. С., Морзе И. Е., Хинкл Р. Т., Механические колебания, пер. с англ., М., 1966. *Н. В. Бутенин.*

ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ — функция на $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$, график которой лежит выше хорды (выпуклая вверх), соединяющей любые две ее точки:

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \leqslant f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $\alpha \in [0, 1]$; аналогично определяется выпуклая вниз функция. Выпуклая (вверх) на $[a, b]$ функция: непрерывна на (a, b); почти всюду на $[a, b]$ дифференцируема; в каждой точке $x \in (a, b)$ существуют левая $f_l'(x)$ и правая $f_r'(x)$ производные, причем для $x_1 < x_2$:

$$f_l'(x_2) \leqslant (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1)^{-1} \leqslant f_r'(x_1);$$

если существует $f''(x)$ на (a, b), то $f''(x) \leqslant 0$.

Указанные свойства легко обобщаются на случай выпуклых функционалов. Свойства В. ф. широко используются при доказательстве ряда аналитич. свойств термодинамич. потенциалов. *В. И. Нескоромный.*

ВЫРОЖДЕНИЕ в квантовой теории — существование различных состояний квантовой системы, в которых некоторая физическая величина A принимает одинаковые значения. Соответствующий такой величине оператор $\hat{A}$ обладает совокупностью линейно независимых собственных функций

$$\psi_a^k, \quad \hat{A}\psi_a^k = a\psi_a^k, \quad k = 1, \ldots, K,$$

отвечающих одному собственному значению a. Число K называется кратностью вырождения собственного

значения a, оно может быть конечным или бесконечным; k может принимать дискретный или непрерывный ряд значений. С бесконечной кратностью (мощности континуума) вырождены, напр., собственные значения оператора энергии свободной частицы по всевозможным направлениям импульса $|\boldsymbol{p}| = \sqrt{2m\mathscr{E}}$ (m и $\mathscr{E}$ – масса и энергия частицы).

В. собственных значений, как правило, связано с симметрией данной физич. величины по отношению к нек-рой группе преобразований. Симметрия означает, что существуют операторы $\hat{B}_n$ других физич. величин $\{B_n\}$, коммутирующие с $\hat{A}$, $[\hat{A}, \hat{B}_n] = 0$, и, следовательно, имеющие с ним общие собственные функции. Собственные функции оператора $\hat{A}$, преобразующиеся по неодномерному представлению группы симметрии, будут иметь одно и то же собственное значение a, поскольку величина A не изменяется при преобразованиях симметрии. Так, операторы кинетич. энергии $\hat{\boldsymbol{p}}^2/2m$ и квадрата орбитального момента $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, гамильтониан частицы в центральном поле $U(\boldsymbol{r})$:

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + U(\boldsymbol{r})$$

симметричны относительно пространственных поворотов. Такие преобразования порождаются операторами проекций момента импульса $\hat{L}_i$, $i = x, y, z$, коммутирующими с гамильтонианом, но не коммутирующими между собой. Представления группы вращений (кроме тривиального) неодномерны, их размерность равна $2l+1$, где l – целое неотрицательное число, задающее собственные значения $\hbar^2 l(l+1)$ оператора квадрата орбитального момента $\hat{\boldsymbol{L}}^2$. Соответствующие квантовые состояния отличаются проекцией момента $\hbar m$, $|m| \leqslant l$, на нек-рое выделенное направление. Таким образом, собственные значения перечисленных операторов оказываются вырожденными по проекции орбитального момента с кратностью $2l+1$.

Особое значение в квантовой механике имеет В. собственных значений гамильтониана (В. уровней энергии). Генераторы группы симметрии гамильтониана являются интегралами движения. Поэтому признаком В. уровней энергии системы является существование нескольких одновременно неизмеримых (то есть некоммутирующих, как $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$ в примере выше) интегралов движения. Уровни энергии электрона в атоме водорода вырождены не только по m, но и по l (так наз. случайное вырождение). Это связано с существованием независимого интеграла движения, специфического для кулоновского поля (так наз. вектора Рунге–Ленца), $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}/r - (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L})/m_e Ze^2$ (m_e и e – масса и заряд электрона, Z – атомный номер). Преобразования симметрии, порождаемые операторами $\hat{\boldsymbol{L}}$ и $\hat{\boldsymbol{A}}$, совместно образуют более широкую группу симметрии $O(4)$ (В. А. Фок, 1935). В результате атомные уровни вырождены по всем значениям l, $0 \leqslant l \leqslant n-1$ (где n – главное квантовое число), что с учетом двух возможных проекций спина дает кратность вырождения $K = 2n^2$.

Основное состояние (с минимальной энергией) квантовой системы, как правило, имеет симметрию гамильтониана и поэтому единственно (невырождено). Однако может случиться, что симметричное состояние не обладает минимальной энергией, и тогда основное состояние оказывается вырожденным; при этом различные собственные векторы, отвечающие минимальной энергии, не обладают симметрией гамильтониана. Такие модели широко применяются в современной квантовой теории поля – теории со спонтанным нарушением симметрии.

Если симметрия физич. величины A нарушается дополнительным взаимодействием, то В. снимается (полностью или частично), то есть уточненные собственные значения этой величины уже не вырождены (или вырождены с меньшей кратностью). Напр., для атома в электрич. поле снимается В. энергии по $|m|$ (эффект Штарка), а в магнитном поле – по m (эффект Зеемана). Представление о нарушенных (то есть приближенных) симметриях широко используется в теории элементарных частиц.

С явлением В. связаны важные физич. свойства квантовых систем. Так, В. атомных уровней с кратностью 2, 8, 18, ... определяет структуру периодич. системы элементов.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [2] Мессиа А., Квантовая механика, пер. с франц., т. 1–2, М., 1978–79.

Д. В. Гальцов.

ВЫРОЖДЕНИЕ ВАКУУМА – вырождение основного (с наименьшей плотностью энергии) состояния квантовомеханической системы с бесконечным числом степеней свободы; возникает при спонтанном нарушении симметрии, когда вакуумное состояние системы, обладающей некоторой симметрией, оказывается неинвариантным относительно этой симметрии: преобразования симметрии переводят один вакуум в другой с тем же значением плотности энергии. Такие преобразования нельзя задать унитарными операторами в пространстве векторов состояний, поэтому различные вакуумы определяют различные пространства состояний системы. Для симметрии, описываемой непрерывной группой G, заданной своими генераторами $Q^{(\alpha)}$, инвариантность системы относительно преобразований этой группы означает, что гамильтониан системы H коммутирует со всеми $Q^{(\alpha)}$, то есть $[Q^{(\alpha)}, H] = 0$. Вакуумное состояние $|0\rangle$ инвариантно относительно преобразований группы G, если $Q^{(\alpha)}|0\rangle = 0$, и не инвариантно, если для нек-рых генераторов $Q^{(\alpha)}|0\rangle \neq 0$. Из инвариантности вакуума следует инвариантность гамильтониана (теорема Коулмена, см. [1], [3]). Обратное утверждение в общем случае неверно из-за возможного В. в. Наличие В. в. проявляется в существовании не инвариантных относительно G *вакуумных средних* значений операторов полей, описывающих систему.

В квантовой теории поля для описания В. в. удобно пользоваться эффективным потенциалом системы $V_{\text{эфф}}(\varphi_c)$, определяющим плотность энергии в вакуумном состоянии, для к-рого вакуумные средние значения полей $\varphi(x)$ равны φ_c (x – пространственно-временная точка, используется система единиц $\hbar = c = 1$). Истинный физич. вакуум соответствует значению $\varphi_c = \varphi_{c0}$, при к-ром $V_{\text{эфф}}$ имеет абсолютный минимум. В нулевом приближении $V_{\text{эфф}}$ совпадает с потенциальной функцией лагранжиана классич. полей. Напр., в теории изовекторного (с изотопич. спином 1) скалярного поля $\varphi^{(\alpha)}(x)$, $\alpha = 1, 2, 3$, – изотопич. индекс, в нулевом приближении

$$V_{\text{эфф}} = -\frac{\mu^2}{2}\varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi_c^4,$$

где

$$\varphi_c^2 = \sum_\alpha (\varphi_c^\alpha)^2, \quad \varphi_c^{(\alpha)} = \langle 0|\varphi^\alpha|0\rangle,$$

параметр μ имеет размерность массы, а λ – безразмерная константа взаимодействия. При $\mu^2 > 0$ физич. вакуум соответствует значению $\varphi_{c0}^2 = \mu^2/\lambda$. Он фиксируется заданием направления $\varphi_{c0}^{(\alpha)}$ в изотопич. пространстве, напр. $\varphi_{c0}^{(\alpha)} = (0, 0, \varphi_{c0})$. Эта величина, очевидно, инвариантна относительно вращений вокруг третьей оси изотопич. пространства и не инвариантна относительно других вращений. Согласно *Голдстоуна теореме*, это приводит к необходимости существования безмассовых голдстоуновских бозонов.

Важным примером физич. теории с В. в. является теория электрослабого взаимодействия, в к-рой В. в. достигается с помощью механизма Хиггса введения скалярных полей.

Лит.: [1] Гриб А. А., Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля, М., 1978; [2] Квантовая теория калибровочных полей, пер. с англ., М., 1977; [3] Иниксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, т. 2, пер. с англ., М., 1984.

А. Т. Филиппов.

ВЫРОЖДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЬ – см. *Рождения и гибели процесс.*

ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – решение вырожденного (конфлюэнтного) гипергеометрического уравнения

$$zu'' + (\gamma - z)\,u' - \alpha u = 0, \qquad (1)$$

регулярное в окрестности точки $z=0$ комплексной плоскости при $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ и любых значениях α. Впервые исследована Э. Куммером (E. Kummer, 1836). В круге любого конечного радиуса В. г. ф. 1-го рода можно задать с помощью сходящегося ряда Куммера:

$$u_1(z) = F(\alpha,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\alpha+1}{\gamma+1}\frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}, \qquad (2)$$

где $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$. Вторым линейно независимым решением уравнения (1) при $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ является В. г. ф. 2-го рода:

$$u_2(z) = G(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}F(\alpha,\gamma,z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z).$$

Для В. г. ф. 1-го рода при $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ справедливо интегральное представление

$$F(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 dt\, e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1},$$

а для В. г. ф. 2-го рода при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $|\arg z| < \pi$:

$$G(\alpha,\gamma,z) = \Gamma^{-1}(\alpha)\int_0^\infty dt\, e^{-zt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Функция $F(\alpha, \gamma, z)$ – целая аналитич. функция z; $G(\alpha, \gamma, z)$ – аналитич. функция в комплексной плоскости z с разрезом вдоль вещественной оси при $z<0$. В. г. ф. связаны с *гипергеометрической функцией* соотношением:

$$F(\alpha,\gamma,z) = \lim_{\beta\to\infty} F(\alpha,\beta;\gamma;z/\beta).$$

Для функции $G(\alpha, \gamma, z)$ справедливо асимптотич. разложение

$$G \sim z^{-\alpha},\ z\to\infty.$$

Справедливы формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\gamma,z) = (\alpha/\gamma)F(\alpha+1,\gamma+1,z),$$
$$\frac{d}{dz}G(\alpha,\gamma,z) = -\alpha G(\alpha+1,\gamma+1,z).$$

Любые три функции $F(\alpha_i, \gamma_i, z)$, $i=1, 2, 3$, в случае, когда $\alpha_i-\alpha_k$, $\gamma_i-\gamma_k$ являются целыми числами, связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(z)\,F(\alpha_i,\gamma_i,z) = 0,$$

где $C_i(z)$ – нек-рые многочлены от переменного z. Аналогичное утверждение справедливо для функций $G(\alpha, \gamma, z)$. Имеют место также функциональные соотношения, напр.

$$F(\alpha,\gamma,z) = e^z F(\gamma-\alpha,\gamma,-z),$$
$$G(\alpha,\gamma,z) = z^{1-\gamma}G(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z).$$

Через В. г. ф. выражаются многие элементарные и специальные функции, напр. цилиндрич. функции, интегральные функции. При $\alpha = -n$, где n – целое положительное число, В. г. ф. сводятся к многочленам, к-рые с точностью до постоянного множителя совпадают с обобщенными многочленами Лагерра.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1973; [2] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, 2 изд., М., 1984.

В. И. Битюцков.

ВЫРОЖДЕННОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Вырожденная гипергеометрическая функция, Специальные функции.*

ВЫРОЖДЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ – см. *Координаты.*

ВЫРОЖДЕННЫЙ УЗЕЛ – см. *Узел.*

ВЫСОКОЧАСТОТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – см. *Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна метод.*

ВЫСТРОЕННОСТИ ТЕНЗОР – см. *Плотности матрица.*

ВЫСШИХ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОД – метод инвариантной регуляризации калибровочных теорий поля, при котором регуляризация достигается за счет добавления к исходному лагранжиану z членов, содержащих высшие ковариантные производные. Напр., в теории Янга–Миллса можно ввести регуляризацию следующим образом

$$\mathcal{L}_{JM} = \frac{1}{8}\operatorname{Tr}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \to \frac{1}{8}\operatorname{Tr}\left\{F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^2}\nabla_\alpha F_{\mu\nu}\nabla_\alpha F_{\mu\nu}\right\},$$

где $F_{\mu\nu}$ – тензор напряженности поля Янга–Миллса, ∇_α – ковариантная производная. Добавление членов со старшими производными приводит к более быстрому убыванию свободных функций Грина при больших импульсах. Вследствие этого улучшается сходимость интегралов, отвечающих диаграммам Фейнмана, в ультрафиолетовой области. Однако из-за того, что одновременно в лагранжиане взаимодействия появляются новые вершины, содержащие производные, таким образом не удается сделать сходящимися все интегралы. Расходящимися остаются конечное число однопетлевых диаграмм. Таким образом, регуляризация является лишь частной – для регуляризации однопетлевых диаграмм приходится использовать специальную дополнительную процедуру. Достоинством В. к. п. м. является возможность его компактной записи в виде калибровочно инвариантной модификации исходного действия.

А. А. Славнов.

ВЫЧЕТ аналитической функции $f(z)$ одного комплексного переменного в конечной изолированной особой точке a однозначного характера – коэффициент c_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в разложении Лорана функции $f(z)$ (см. *Лорана ряд*) в окрестности точки a, или равный ему интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

где γ – окружность достаточно малого радиуса с центром в точке a. В. обозначается $\operatorname*{res}_a[f(z)]$ (либо $\operatorname*{Выч}_a[f(z)]$).

Теория В. опирается на *Коши интегральную теорему.* Основной в теории В. является следующая теорема о вычетах. Пусть $f(z)$ – однозначная аналитич. функция всюду в односвязной области G, кроме изолированных особых точек; тогда интеграл от $f(z)$ по любой простой замкнутой спрямляемой кривой γ, лежащей в области G и не проходящей через особые точки функции $f(z)$, вычисляется по формуле

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{res}_{a_k}[f(z)],$$

где a_k, $k=1, \ldots, N$,– особые точки функции $f(z)$, попавшие внутрь γ.

В. функции в бесконечно удаленной точке $a=\infty$ для функции $f(z)$, однозначной и аналитической в окрестности этой точки, определяется формулой

$$\operatorname*{res}_\infty[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -c_{-1},$$

где γ^- – окружность достаточно большого радиуса, ориентированная по часовой стрелке, а c_{-1} – коэффициент при z^{-1} в разложении Лорана функции $f(z)$ в окрестности этой точки. Из теоремы о В. вытекает теорема о полной сумме вычетов: если $f(z)$ – однозначная аналитич. функция в расширенной комплексной плоскости, кроме конечного числа особых точек, то сумма всех В. функций $f(z)$, включая В. в бесконечно удаленной точке, равна нулю.

Таким образом, вычисление интегралов от аналитич. функций по замкнутым кривым (контурных интегралов) сводится к вычислению В., к-рые находятся особенно просто в случае конечных полюсов. Пусть $a \neq \infty$ – полюс порядка m функции $f(z)$, тогда

$$\operatorname*{res}_a [f(z)] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right] \right\}.$$

При $m = 1$ (простой полюс) эта формула принимает вид

$$\operatorname*{res}_a [f(z)] = \lim_{z \to a} [(z-a) f(z)];$$

если $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в окрестности точки a, причем для $\psi(z)$ точка a есть простой нуль, то

$$\operatorname*{res}_a \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

В. применяются к вычислению нек-рых определенных интегралов от действительных функций.

В. находят многочисленные и важные применения в вопросах аналитич. продолжения, разложения мероморфных функций на простейшие дроби, суммирования степенных рядов, асимптотич. оценок и во многих других вопросах анализа и его приложений.

На римановой поверхности рассматриваются В. не аналитич. функций, а аналитич. дифференциалов. Теория В. аналитич. функций многих комплексных переменных базируется на интегральных теоремах Стокса и Коши–Пуанкаре.

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, кол. 814–817; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [3] Шабат Б.В., Введение в комплексный анализ, М., 1969.

А. П. Южаков.

ВЯЙСЕЛЯ – БРЕНТА ЧАСТОТА – см. *Геофизическая турбулентность.*

Г

ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ – см. *Гидродинамики уравнения.*

ГАЛЕРКИНСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ статистического решения – см. *Статистическая гидромеханика.*

ГАЛИЛЕЕВА СИСТЕМА КООРДИНАТ – система координат в *псевдоевклидовом пространстве*, в котором линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - (d\boldsymbol{r})^2.$$

Г. с. к. аналогична декартовой системе координат в евклидовом пространстве.

Лит.: [1] Яглом И. М., Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, М., 1969.

М. И. Войцеховский.

ГАЛИЛЕЯ ГРУППА – группа аффинных преобразований, сохраняющих структуру пространства-времени классической механики, то есть сохраняющих временные интервалы и расстояния между одновременными событиями. Г. г. порождается следующими преобразованиями: 1) сдвиг начала отсчета $(x, t) \to (x + x_0, t + t_0)$, где через t обозначено время, а через x – пространственные координаты; 2) пространственные вращения: $(x, t) \to (Ax, t)$; 3) равномерные движения $(x, t) \to (x + vt, t)$.

См. также *Галилея преобразование.*

Ю. А. Неретин.

ГАЛИЛЕЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – преобразование, определяющее в классической механике переход от одной *инерциальной системы отсчета* к другой, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно. При этом система отсчета понимается как четырехмерная, позволяющая фиксировать три пространственные координаты и отсчет часов (время). Если задана инерциальная система отсчета (x, y, z, t), то во всякой другой инерциальной системе (x', y', z', t'), движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, координаты (x', y', z', t') связаны (с точностью до начала и поворота осей) с координатами (x, y, z, t) преобразованиями Галилея

$$x' = x - v_x t,\ y' = y - v_y t,\ z' = z - v_z t,$$

где v_x, v_y, v_z – компоненты скорости движения системы (x', y', z', t') относительно системы (x, y, z, t).

Основные законы классич. механики инвариантны относительно Г. п., но, напр., уравнение распространения фронта световой волны (со скоростью c) (электромагнитное явление) не инвариантно относительно Г. п. По этой причине Г. п. были обобщены Х. Лоренцем (H. Lorentz), см. *Лоренца преобразование.* Эти преобразования легли в основу специальной теории относительности. Преобразования Лоренца переходят в Г. п. при $v \ll c$.

Г. п. образуют группу, являющуюся подгруппой группы неоднородных преобразований Галилея, называемой *Галилея группой*, к-рая получается из группы Г. п. добавлением смещения начала координат в трехмерном пространстве и начала отсчета времени.

А. З. Петров.

ГАЛИЛЕЯ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ – основной принцип классической механики, утверждающий инвариантность законов механического движения относительно замены одних *инерциальных систем отсчета* другими. Существование инерциальных систем постулируется. Г. п. о. был подготовлен в результате развития классич. механики от античных времен до эпохи Возрождения; Г. Галилею (G. Galilei, 1636) принадлежит его окончательная формулировка. Математически Г. п. о. описывается *Галилея преобразованиями*, при введении к-рых предполагают существование абсолютного времени и абсолютного пространства безотносительно к материи и друг к другу, что допускает экспериментальную проверку. Такая проверка приводит к положительным результатам при малых сравнительно со скоростью света скоростях. Однако при скоростях, близких к скорости света, проверка приводит к отрицательным результатам. Этот факт, а также обобщение Г. п. о. на электромагнитные явления послужили основным стимулом для создания специальной теории относительности, в к-рой существование инерциальных систем отсчета также постулируется, но связаны они между собой *Лоренца преобразованиями*, относительно к-рых инвариантны релятивистские уравнения механики (обобщение уравнений классич. механики) и уравнения электродинамики. Дальнейшее развитие Г. п. о. содержится в общей теории относительности.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961.

А. З. Петров.

ГАЛУА ГРУППА дифференциальная – группа G дифференциальных автоморфизмов дифференциального поля K, тождественных на дифференциальном подполе $k \subset K$ (дифференциальное поле – это поле с заданным на нем дифференцированием). Роль дифференциаль-

ной Г. г. в теории линейных дифференциальных уравнений аналогична роли обычной группы Галуа в теории алгебраич. уравнений. Пусть k – дифференциальное подполе поля мероморфных функций от z с дифференцированием $\frac{d}{dz}$, $\bar{k} \supset \mathbb{C}$, а K порождается над k элементами y_{ij} фундаментальной матрицы решений уравнения $y' = Ay$, $A \in \mathrm{Mat}(n, k)$. Тогда: 1) возможность выразить y_{ij} через элементы k с помощью операций $+$, $\times$, взятия первообразной, взятия экспоненты первообразной и решения алгебраич. уравнений эквивалентна разрешимости связной компоненты единицы группы G; 2) G – алгебраич. подгруппа в $GL(n, \mathbb{C})$, то есть G выделяется в $GL(n, \mathbb{C})$ уравнениями, полиномиальными относительно матричных элементов; 3) если k – поле рациональных функций, а особые точки уравнения $y' = Ay$ регулярны, то G – наименьшая алгебраич. подгруппа, содержащая *монодромии группу* уравнения.

Лит.: [1] Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [2] Kolchin E. R., Differential algebra and algebraic groups, N. Y., 1973; [3] Picard E., Traité d'analyse, t. 3, ch. 17, P., 1896.

В. Г. Дринфельд.

ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА ПРОЦЕСС – см. *Ветвящийся процесс.*

ГАМИЛЬТОНА КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – уравнение

$$\dot{q} = H'_p, \quad \dot{p} = -H'_q,$$

описывающее движение динамической системы с гамильтонианом $H(p, q, t)$ в координатах Дарбу. *М. Э. Казарян.*

ГАМИЛЬТОНА КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Квадратичный гамильтониан.*

ГАМИЛЬТОНА ОПЕРАТОР – см. *Гамильтониан.*

ГАМИЛЬТОНА УРАВНЕНИЯ, каноническое уравнения механики, – дифференциальные уравнения движения голономной механической системы в канонических переменных, которыми являются s обобщенных координат q_i и s обобщенных импульсов p_i, где s – число степеней свободы системы. Выведены У. Гамильтоном (W. Hamilton) в 1834. Для составления Г. у. надо в качестве характеристич. функции системы знать *Гамильтона функцию* $H(q_i, p_i, t)$, где t – время. Тогда, если все действующие на систему силы потенциальны, Г. у. имеют вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \qquad (*)$$

Если наряду с потенциальными на систему действуют непотенциальные силы $\boldsymbol{F}$, то к правым частям 2-й группы уравнений (*) надо прибавить соответствующие обобщенные силы Q_i. Уравнения (*) представляют собой систему $2s$ обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегрируя к-рые можно найти все q_i и p_i как функции времени t и $2s$ постоянных интегрирования, определяемых по начальным данным. Решение системы уравнений (*) можно также свести к отысканию полного интеграла соответствующего ей уравнения с частными производными (см. *Гамильтона–Якоби уравнение*).

Если одна из координат q_i, напр. q_1, является циклич. координатой, то есть явно не входит в выражение функции H, то $\partial H/\partial q_1 = 0$ и одно из уравнений (*) дает сразу интеграл $p_1 = \alpha_1$, где α_1 – постоянная. Особый интерес представляет случай, когда все координаты циклические, а функция $H = H(p_i)$ явно не зависит от времени (силовое поле и наложенные связи стационарны). Тогда все $p_i = \alpha_i$, то есть постоянны; следовательно, функции $H(\boldsymbol{p}_i)$ и $\partial H/\partial p_i$ тоже постоянны, и 1-я группа уравнений (*) дает $dq_i/dt = \beta_i$, откуда $q_i = \beta_i t + C_i$, где β_i, C_i – новые постоянные. Уравнения в этом случае интегрируются элементарно и все координаты являются линейными функциями времени. Отсюда следует, что задачу интегрирования Г. у. можно свести к задаче отыскания для системы циклич. координат. Это, в принципе, возможно, так как Г. у. обладают тем важным свойством, что они допускают переход с помощью так наз. канонич. преобразований от переменных q_i, p_i к новым переменным $Q_i(q_i, p_i, t)$, $P_i(q_i, p_i, t)$, к-рые также являются каноническими и удовлетворяют уравнениям (*) с соответствующей функцией $H(Q_i, P_i, t)$.

Равноправность в Г. у. координат и импульсов как независимых переменных, а также инвариантность этих уравнений по отношению к канонич. преобразованиям открывают большие возможности для обобщений. Поэтому Г. у. имеют важные приложения не только в механике, но и во многих других областях физики, напр. в статистич. физике, квантовой механике, электродинамике и др. *С. М. Тарг.*

ГАМИЛЬТОНА ФУНКЦИЯ – характеристическая функция механической системы, выраженная через канонические переменные: обобщенные координаты q_i и обобщенные импульсы p_i. Для системы со связями, явно не зависящими от времени t, движущейся в стационарном потенциальном силовом поле, Г. ф.

$$H(q_i, p_i) = T + U,$$

где U – потенциальная, а T – кинетич. энергия системы, в выражении к-рой произведена замена всех обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ на p_i с помощью равенств

$$p_i = \partial T/\partial \dot{q}_i.$$

Таким образом, Г. ф. равна в этом случае полной механич. энергии системы, выраженной через q_i и p_i. В общем случае Г. ф. $H(q_i, p_i, t)$ может быть определена через *Лагранжа функцию* $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ равенством

$$H(q_i, p_i, t) = \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)\right]_{\dot{q}_i \to p_i},$$

в к-ром все $\dot{q}_i$ должны быть выражены также через p_i.

Г. ф., как и функция Лагранжа, полностью характеризует ту систему, для к-рой она определена, так как, зная $H(q_i, p_i, t)$, можно составить дифференциальные уравнения движения системы или в виде $2s$ обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, где s – число степеней свободы, или в виде одного уравнения с частными производными тоже 1-го порядка (см. *Гамильтона–Якоби уравнение*). Г. ф. введена У. Гамильтоном (W. Hamilton).

Наряду с термином «Г. ф.» употребляют иногда термин «главная функция Гамильтона», именуя так полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби, равный действию по Гамильтону. В квантовой механике используется квантовомеханич. оператор – *гамильтониан*, или оператор Гамильтона, соответствующий Г. ф. в классич. механике. *С. М. Тарг.*

ГАМИЛЬТОНА ФУНКЦИЯ, гамильтониан, – произвольная гладкая функция на симплектическом многообразии (M, ω). Г. ф. H задает динамич. систему на M с помощью векторного поля $\boldsymbol{v}_H$, определяемого по правилу:

$$\omega(\cdot, \boldsymbol{v}_H) = dH.$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая гамильтонову систему, в координатах Дарбу принимает вид *Гамильтона канонического уравнения*

$$\dot{p} = -H'_q, \quad \dot{q} = H'_p.$$

М. Э. Казарян.

ГАМИЛЬТОНА ФУНКЦИЯ; нормальная форма – простейший вид, к которому можно привести *Гамильтона функцию* H в окрестности: а) положения равновесия, б) замкнутой траектории с помощью канонической замены координат [в случае а) предполагается, что H не зависит или периодически зависит от времени, а в случае б) – что H не зависит от времени].

Теорема. Пусть в окрестности точки $O \in \mathbb{R}^{2N}$ задана C^∞-гладкая Г. ф.

$$H = H(p, q) = O(|p|^2 + |q|^2),$$

причем все собственные числа $\pm i\omega_1, \ldots, \pm i\omega_n$ линеаризации в 0 соответствующего гамильтонова векторного поля чисто мнимы и нерезонансны, то есть $m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n \neq 0$ для

любого набора целых чисел $m_1, \ldots, m_n$, не все из к-рых равны 0. Тогда для всякого натурального N существует сохраняющая точку O аналитич. канонич. замена координат $p=p(\xi, \eta)$, $q=q(\xi, \eta)$, приводящая H к виду

$$H(p(\xi, \eta), q(\xi, \eta)) = F(\tau) + R(\xi, \eta),$$

где $\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tau_k=(\xi_k^2+\eta_k^2)/2$, а остаточный член $R=O(|\xi|^N+|\eta|^N)$.

Функция F называется нормальной формой Биркгофа (см. [1]).

Полностью устранить R при $n\geqslant 2$ нельзя даже для аналитич. гамильтонианов H (см. [4]). Более сложная нормальная форма, отвечающая присутствию резонансов, называется нормальной формой Густавсона (см. [5]).

Основное преимущество нормальной формы Г. ф. заключается в наличии дополнительных первых интегралов, благодаря чему оказывается возможным понизить число степеней свободы. Напр., система с гамильтонианом в нормальной форме Биркгофа имеет полный набор интегралов в инволюции $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и интегрируется.

Лит.: [1] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М. – Л., 1941; [2] Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, пер. с англ., М., 1973; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [4] Зигель К. Л., «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 129–55; [5] Gustavson F. G., «Astron. J.», 1966, v. 71, № 8, p. 670–86; [6] Брюно А. Д., «Успехи математич. наук», 1988, т. 43, в. 1, с. 23–56.

М. Б. Севрюк.

ГАМИЛЬТОНА–ОСТРОГРАДСКОГО ПРИНЦИП стационарного действия – один из вариационных принципов классической механики: в действительном движении системы действие по Гамильтону имеет стационарное значение по сравнению с любыми бесконечно близкими кинематически возможными движениями, для которых начальное и конечное положения системы одинаковы с соответствующими положениями для действительного движения и время движения одинаково.

Пусть известны положения P_0 и P_1 голономной системы в моменты времени t_0 и t_1 в нек-ром ее действительном движении под действием заданных сил $F_i(t, r_j, \dot r_j)\in C^1$ и сил реакций. В этом движении положения r_i системы будут функциями времени, к-рые удовлетворяют связям и принимают для $t=t_0$ и $t=t_1$ значения, отвечающие положениям P_0 и P_1. Пусть $r_i+\delta r_i$ – нек-рые функции времени класса C^2, достаточно близкие к $r_i(t)$, удовлетворяющие связям и принимающие для $t=t_0$ и $t=t_1$ те же значения, что и $r_i(t)$. При этом δr_i уничтожаются при $t=t_0$ и $t=t_1$ и имеют смысл возможных перемещений. Если считать $F_i=\operatorname{grad}_{r_i} U$, то

$$\delta S = 0, \quad S = \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt, \tag{1}$$

где функционал S называется действием по Гамильтону за промежуток времени t_1-t_0, а T – кинетическая и U – потенциальная энергии системы.

В случае непотенциальных сил Г.–О. п. выражается уравнением

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\delta T + \sum\nolimits_i F_i \cdot \delta r_i\Big)\,dt = 0, \tag{2}$$

то есть, если $r_i(t)$ – функции времени, соответствующие действительному движению системы, то интеграл в (2) равен нулю для всех вариаций функций $r_i(t)$, совместимых со связями и уничтожающихся на обоих пределах интеграла.

Равенства (1) и (2) представляют собой необходимые и достаточные условия для действительности движения системы под действием заданных сил. Уравнение (2) справедливо и для неголономных систем, однако для последних движение $r_i+\delta r_i$ не является, вообще говоря, кинематически возможным; уравнение (1) несправедливо для неголономных систем.

Принцип предложен У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1834–35) и обобщен М. В. Остроградским (1848).

См. также *Наименьшего действия принцип*.

В. В. Румянцев.

ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ УРАВНЕНИЕ – дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка, описывающее движение голономных механических систем под действием потенциальных сил. Чтобы составить Г.–Я. у., необходимо для данной механич. системы знать *Гамильтона функцию* $H(q_i, p_i, t)$, где q_i и p_i – канонич. переменные: обобщенные координаты и обобщенные импульсы, а t – время. Тогда Г.–Я. у. будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\Big(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\Big), \tag{1}$$

где правая часть представляет собой выражение функции H, в к-ром все p_i заменены на $\partial S/\partial q_i$, а S – подлежащая определению функция координат q_i и времени t, представляющая собой действие по Гамильтону; иногда функцию $S(q_i, t)$ называют главной функцией Гамильтона.

В частном случае при движении одной материальной точки в силовом поле, определяемом силовой функцией $U(x, y, z, t)$, Г.–Я. у. имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial S}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial S}{\partial z}\Big)^2\right] - U(x,y,z,t) = 0,$$

где m – масса точки, x, y, z – ее координаты.

Г.–Я. у. непосредственно связано с *Гамильтона уравнениями*, к-рые с математич. точки зрения являются для уравнения (1) уравнениями характеристик.

Чтобы с помощью Г.–Я. у. найти закон движения механич. системы, надо определить полный интеграл уравнения (1), то есть его решение, содержащее столько постоянных интегрирования, сколько в уравнении независимых переменных. Этими переменными являются координаты q_i и время t; число их равно $s+1$, где s – число степеней свободы системы. Следовательно, полный интеграл уравнения (1) должен содержать $s+1$ постоянную, из к-рых одна, как аддитивная, может быть отброшена, и имеет вид

$$S = S(t, q_i, \alpha_i). \tag{2}$$

Если решение Г.– Я. у. в виде (2) будет найдено, то, составив s равенств

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad i = 1,2,\ldots,s, \tag{3}$$

где β_i – новые произвольные постоянные, получим s алгебраич. (недифференциальных) уравнений, левые части к-рых содержат q_i, α_i и t и из к-рых можно определить q_i в виде

$$q_i = q_i(t, \alpha_i, \beta_i). \tag{4}$$

Значения другой группы канонич. переменных p_i находят из равенств

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\ldots,s. \tag{5}$$

Уравнения (4), выражающие q_i как функции t, и определяют положение механической системы в любой момент времени, то есть закон ее движения. Входящие сюда постоянные α_i и β_i находят подстановкой начальных данных в равенства (4) и (5).

Если функция Гамильтона H явно не содержит время, что, в частности, имеет место для консервативных систем, то S можно искать в виде

$$S = S_0(q_i) - ht,$$

где h – постоянная, равная полной энергии системы, а S_0 – величина, называемая укороченным действием (действием по Лагранжу), или характеристич. функцией, определяемая как полный интеграл уравнения с частными производными

$$H\Big(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\Big) = h, \tag{6}$$

в виде

$$S_0 = S_0(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, h).$$

Тогда полный интеграл Г.– Я. у. будет

$$S = S_0(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, h) - ht$$

и закон движения системы определится в соответствии с (3) из равенств

$$\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad i = 1,2,\ldots,s-1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial h} = t + \beta_s. \tag{8}$$

Уравнения (7), содержащие в данном случае только q_i, α_i, β_i и не содержащие время t, определяют в многомерном пространстве траекторию точки, изображающей данную механич. систему, а уравнение (8) дает закон движения вдоль этой траектории. Значения постоянных α_i, β_i определяются и в этом случае подстановкой начальных данных в равенства (5), (7) и (8).

Г.–Я. у. и связанный с ним метод решения задач механики играют важную роль и в других областях физики, особенно в оптике и квантовой механике. В частности, известное в геометрич. оптике уравнение эйконала подобно Г.–Я. у. в виде (6), где S_0 играет роль эйконала. Этот результат позволяет рассматривать классич. механику как аналог геометрич. оптики, в к-ром роль поверхностей движущейся волны играют поверхности $S_0(q_i) = \text{const}$, а роль световых лучей – ортогональные к этим поверхностям траектории движения. *С. М. Таре.*

ГАМИЛЬТОНИАН, оператор Гамильтона,– квантовомеханический оператор, аналогом которого в классической механике является *Гамильтона функция*. Физич. смысл Г.– оператор энергии системы в отсутствие внешних полей. В квантовой механике E – энергия стационарного состояния системы является решением уравнения: $H\psi = E\psi$, где H – гамильтониан, $|\psi\rangle$ – вектор состояния (волновая функция).

Вид оператора H определяется правилами перехода от классич. теории к квантовой. Так, в методе канонич. квантования Г. имеет тот же функциональный вид, что и функция Гамильтона, но выражен через операторы: $\hat{q}$ – координат и $\hat{p}$ – импульса. В координатном представлении $\hat{q} = q$, $\hat{p} = -i\hbar\nabla$.

Ниже приведены примеры простейших Г.:

Г. частицы массы m, движущейся в потенциальном поле $V(\boldsymbol{r})$, согласно сформулированному правилу, есть

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r}).$$

В случае одномерного гармонич. осциллятора

$$H = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{q}^2\right),$$

ω – круговая частота.

В случае свободного скалярного поля $\varphi(x)$, удовлетворяющего *Клейна–Гордона уравнению*, Г. имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(x)\right]^2 + [\nabla\varphi(x)]^2 + m^2\varphi^2(x)\right\}d^3x.$$

В *Фока пространстве* этот Г. выражается через операторы рождения $a^+(p)$ и уничтожения $a^-(p)$ и представляет собой (с точностью до несущественной константы) сумму энергий невзаимодействующих частиц:

$$H = \sum_i \omega_i a^+(p_i)a^-(p_i); \quad \omega_i = \left(m_i^2 + p_i^2\right)^{1/2}.$$

Будучи генератором временных сдвигов, оператор H определяет эволюцию. В *Шредингера представлении*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle.$$

Если H не зависит от времени, то

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}Ht\right].$$

Изменение среднего значения нек-рой наблюдаемой $\langle A\rangle$, то есть скалярного произведения $\langle\psi|A|\psi\rangle$, следующим образом связано с Г.:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle[H, A]\rangle.$$

Таким образом, если наблюдаемая не зависит от времени явно, а соответствующий ей оператор коммутирует с Г., то она является интегралом движения.

В *Гейзенберга представлении* временная зависимость произвольного оператора A дается выражением

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, A]. \tag{*}$$

В классич. пределе равенство (*) определяет известный закон изменения физич. величин: коммутатор $[H, A]$ переходит в скобку Пуассона $i\hbar\{H, A\}$:

$$\{H, A\} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}.$$

Согласно соотношению (*), Г. сохраняется во времени, если не зависит от него явно. Для сохранения же произвольного, но не зависящего явно от времени оператора необходимо, чтобы он коммутировал с H. Если A – оператор нек-рого преобразования, то равенство $[A, H] = 0$ означает инвариантность системы относительно этого преобразования.

Во *взаимодействия представлении* временная зависимость операторов определяется свободным Г. H_0, а векторов состояния – Г. взаимодействия H_I, $H = H_0 + H_I$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H_0, A]; \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H_I|\psi(t)\rangle.$$

По своему физич. смыслу Г.– самосопряженный оператор. Однако корректное математич. определение H для взаимодействующего поля не тривиально. Эта проблема играет важную роль в конструктивной теории поля.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1984; [2] Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория поля, М., 1978; [3] Мессиа А., Квантовая механика, М., 1978; [4] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977. *Ю. С. Вернов.*

ГАМИЛЬТОНИАН системы частиц для классической системы N частиц – функция, заданная на фазовом пространстве, вида

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + U(q_1,\ldots,q_N),$$

где $(p_i, q_i) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$, m – масса частиц, $U(q_1, \ldots, q_N)$ – потенциальная энергия системы. Для квантовой системы Г. системы частиц – оператор в L^2 вида

$$\hat{H}_N = \sum_{i=1}^N\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\Delta q_i + U(q_1,\ldots,q_N),$$

где Δ_{q_i} – лапласиан. В статистич. механике обычно рассматривается взаимодействие частиц посредством парного потенциала $\Phi(q)$ и системы в заданном внешнем поле $U(q)$, так что:

$$U(q_1,\ldots,q_N) = \sum_{i<j=1}^N \Phi(q_i - q_j) + \sum_{i=1}^N u(q_i).$$

Если частицы движутся в ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$, то этой ситуации соответствует

$$u^\Lambda(q) = \begin{cases}\infty, & q \in \partial\Lambda,\\ 0, & q \in \Lambda_\delta\end{cases}$$

(область $\Lambda_\delta \subset \Lambda$ содержит точки из Λ, расположенные от границы $\partial\Lambda$ на расстоянии не меньшем нек-рого фиксированного числа $\delta > 0$) и Г. системы частиц обозначается H_N^Λ. Другой способ описания системы частиц в области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ – задать на $\partial\Lambda$ граничные условия, напр. упругого отражения частиц от $\partial\Lambda$. *В. И. Герасименко.*

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ, каноническая формализм,– основанная на вариационном принципе формулировка механики и теории поля, в которой состояние системы задается обобщенными координатами q_i и обобщенными импульсами p_i, $i=1, 2, ..., N$, N – число степеней свободы. Описываемая Г. ф. *динамическая система* называется *гамильтоновой системой*, а пространство ее состояний – *фазовым пространством*. В Г. ф. действие

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i p_i\dot{q}_i - H(p,q,t)\right]dt \qquad (1)$$

выражается через *Гамильтона функцию* H (точкой обозначено дифференцирование по времени; p, q – совокупность всех p_i, q_i). H является преобразованием Лежандра *Лагранжа функции* L:

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t),$$

где $\dot{q}_i$ в правой части следует выразить через p_i, разрешив относительно $\dot{q}_i$ определение импульсов:

$$p_i=\partial L/\partial\dot{q}_i. \qquad (2)$$

Г. ф. и *лагранжев формализм* полностью эквивалентны, если определено преобразование Лежандра, то есть если

$$\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j)>0.$$

В *наименьшего действия принципе* $\delta S=0$ независимыми вариациями в (1) считаются δp_i и δq_i, причем $\delta\dot{q}_i=d\delta q_i/dt$. Тогда стандартные *Эйлера–Лагранжа уравнения* дают в качестве уравнений движения *Гамильтона уравнения*

$$\dot{q}_i=\partial H/\partial p_i,\ \dot{p}_i=-\partial H/\partial q_i.$$

В Г. ф. любая динамич. переменная f является функцией канонич. переменных p, q (и, возможно, времени). Ее полная производная по времени

$$\dot{f}\equiv df/dt=\partial f/\partial t+\sum_i[\dot{q}_i(\partial f/\partial q_i)+\dot{p}_i(\partial f/\partial p_i)]$$

вследствие уравнений Гамильтона имеет вид

$$\dot{f}=\partial f/\partial t+\{H,f\},$$

где

$$\{f,g\}=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)$$

– *Пуассона скобка* двух динамич. переменных f и g. Не зависящая явно от времени переменная f сохраняется, если ее скобка Пуассона с H обращается в нуль.

Г. ф. допускает широкий класс замен переменных в фазовом пространстве – каноническое преобразования, при к-рых уравнения Гамильтона и скобка Пуассона не меняются.

Переход от лагранжева формализма к Г. ф. осложняется, когда определения импульсов (2) не разрешимы относительно всех $\dot{q}_i$, то есть когда $\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j)=0$. Эта ситуация всегда возникает в калибровочных теориях, в к-рых L вообще не зависит от нек-рых $\dot{q}_i$, или в теориях со связями $\varphi_m(q)=0$, $m=1, ..., M$, где обычная замена

$$L\to L_T=L+\sum_{m=1}^{M}\xi_m\varphi_m(q)$$

вводит дополнительные координаты ξ_m и L_T снова не зависит от ξ_m. В обоих случаях вытекающие из определения импульсов соотношения $\pi_m\equiv\partial L/\partial\dot{\xi}_m=0$ представляют собой простейший пример «гамильтоновых» связей.

В общем случае, когда ранг матрицы $\|\partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j\|$ равен $N-M$, $M>0$, требование непротиворечивости уравнений (2) приводит к M соотношениям $\chi_m(p,q)=0$, к-рые называются первичными связями в Г. ф. Стандартные уравнения Гамильтона на поверхности связей $\mathcal{M}$, определяемой соотношениями $\chi_m=0$, будут полностью эквивалентны лагранжевым уравнениям движения, если их записывать для функции

$$H_T=H+\sum_m\lambda_m\chi_m(p,q),$$

где λ_m – произвольные множители (вообще говоря, не выражающиеся только через переменные p, q):

$$\dot{q}_i=\{H_T,q_i\}=\frac{\partial H}{\partial p_i}+\sum_m\lambda_m\frac{\partial\chi_m}{\partial p_i}+\sum_m\{\lambda_m,q_i\}\chi_m,$$

$$\dot{p}_i=\{H_T,p_i\}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}-\sum_m\lambda_m\frac{\partial\chi_m}{\partial q_i}+\sum_m\{\lambda_m,p_i\}\chi_m.$$

На поверхности связей $\mathcal{M}$ не определенные скобки Пуассона λ_m с q_i и p_i не дают вклада в правые части.

Для непротиворечивости такого Г. ф. необходимо, чтобы временная эволюция не выводила за поверхность $\mathcal{M}$, то есть чтобы $\dot{\chi}_m=\{H_T,\chi_m\}=0$ на $\mathcal{M}$. Если это требование не выполняется, необходимо сузить $\mathcal{M}$, наложив новые, «вторичные» связи. Процедуру их нахождения предложил П. Дирак (P. Dirac).

Для выполнения условия $\chi_m=0$ на $\mathcal{M}$ достаточно, чтобы скобки $\{H_T,\chi_m\}$ оказались линейными комбинациями связей с нек-рыми коэффициентами $a_{mm'}(p,q)$:

$$\{H_T,\chi_m\}=$$

$$=\{H,\chi_m\}+\sum_{m'}\lambda_{m'}\{\chi_{m'},\chi_m\}=\sum_{m'}a_{mm'}\chi_{m'}=0\ \text{на}\ \mathcal{M}. \qquad (3)$$

Это – система уравнений на коэффициенты λ_m; если ранг μ матрицы $\{\chi_{m'},\chi_m\}$ на $\mathcal{M}$ меньше M, система определяет только μ из коэффициентов λ_m и возникает $M-\mu$ условий непротиворечивости. Часть из них может автоматически удовлетворяться на $\mathcal{M}$, а остальные образуют $\varkappa_1\leqslant M-\mu$ «вторичных» связей $\chi_{M+k}=0$, $k=1, 2, ..., \varkappa_1$. Их следует добавить к первичным, определив новую поверхность $\mathcal{M}_1:\chi_j=0$, $j=1, ..., M, ..., M+\varkappa_1$, и потребовав, чтобы $\chi_j=0$ на $\mathcal{M}_1$. Процедура повторяется, пока не перестанут возникать новые вторичные связи. Полная совокупность связей $\chi_j=0$, $j=1, ..., M, ..., M+\varkappa_1+...+\varkappa_r=J$, уже удовлетворяет требованиям непротиворечивости Г. ф.: $\dot{\chi}_j=\{H_T,\chi_j\}=0$ на суженной поверхности $\mathcal{M}^*$. Более того, все связи можно вставить в функцию Гамильтона: в качестве генератора эволюции «полная функция Гамильтона» H_T не отличима на $\mathcal{M}^*$ от

$$H^*=H+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\chi_j.$$

Все связи χ_j разбиваются на два класса, с $K=J-S$ и S элементами, где S – (четный) ранг матрицы $\{\chi_j,\chi_{j'}\}$ на $\mathcal{M}^*$. K связей удовлетворяют условиям

$$\{\chi_k,\chi_j\}=\sum_{j'=1}^{J}c_{kjj'}\chi_{j'}=0\ \text{на}\ \mathcal{M}^* \qquad (4)$$

и называются связями I рода ($c_{kjj'}$ – нек-рые функции переменных p, q). Остальные S связей – II рода – не удовлетворяют условиям (4), а матрица $\{\chi_S,\chi_{S'}\}$ для них имеет обратную $\gamma_{SS'}$. Записанные для H^* условия непротиворечивости Г. ф.

$$\{H^*,\chi_j\}=\{H,\chi_j\}+\sum_{j'}\lambda_{j'}\{\chi_{j'},\chi_j\}=0\ \text{на}\ \mathcal{M}^*$$

фиксируют S из коэффициентов λ_j:

$$\lambda_S=-\{H,\chi_{S'}\}\gamma_{S'S}.$$

Подстановка этих значений λ_S в H^* эквивалентна замене скобки Пуассона скобкой Дирака

$$\{f,g\}^*=\{f,g\}-\sum_{S'S''}\{f,\chi_{S'}\}\gamma_{S'S''}\{\chi_{S''},g\}$$

в законе эволюции:

$$\dot{f}=\{H^*,f\}\ \text{на}\ \mathcal{M}^*.$$

При этом, поскольку для любой функции $f(p,q)$ выполняются автоматически соотношения $\{\chi_S,f\}=0$, связи II рода можно наложить явно, считая $\chi_S=0$ во всех функциях f.

Конкретная реализация процедуры Дирака неоднозначна: вместо связей II рода χ_j можно взять любой эквивалент-

ный набор

$$\tilde{\chi}_j = \sum_{j'} A_{jj'}(p,q)\chi_{j'},$$

если только $\det A_{jj'} \neq 0$. В частности, в принципе можно подобрать $A_{jj'}$ так, чтобы матрица $\{\tilde{\chi}_S, \tilde{\chi}_{S'}\}$ приобрела канонич. вид $\begin{Vmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{Vmatrix}$, где I – единичная матрица ранга $S/2$. Затем канонич. преобразованием в полном фазовом пространстве Г можно перейти от первоначальных переменных (p, q) к новым $(\tilde{\chi}_S; p', q')$, в к-рых первые $S/2$ пар – связи II рода. В новых переменных скобка Дирака приобретет пуассонов вид: $\{f, g\}^*_{p,q} = \{f, g\}_{p',q'}$, а связи II рода окажутся полностью исключенными, повлияв лишь на выбор переменных p', q'. В этих переменных эволюцией управляет функция Гамильтона

$$H' = H + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \chi_k,$$

включающая лишь связи I рода, находящиеся в инволюции (то есть скобки Пуассона связей выражаются через линейную комбинацию самих связей):

$$\{\chi_k, \chi_{k'}\} = \sum_{k''} c_{kk'k''}\chi_{k''}. \qquad (5)$$

Гамильтоново описание ведется теперь в $(2N-S)$-мерном пространстве Г′ канонич. переменных p', q'. В нем участвуют K произвольных функций $\lambda_k(t)$; изменение λ_k не приводит к изменению состояния или закона эволюции, а сводится к канонич. калибровочному преобразованию, генератором к-рого является связь χ_k. Наблюдаемыми величинами естественно считать не все функции $f(p', q')$ на поверхности $\mathcal{M}'$, определенной условиями $\chi_k = 0$, а лишь те, на эволюции к-рых не сказывается произвол в λ_k. Для этого достаточно, чтобы $\{f, \chi_k\} = 0$ на $\mathcal{M}'$, то есть

$$\{f, \chi_k\} = \sum_{k'} d_{kk'}\chi_{k'}, \qquad (6)$$

при этом $\dot{f} = \{H', f\} = \{H, f\}$ на $\mathcal{M}'$. Такие функции зависят не от всех $2N-S-K$ координат на $\mathcal{M}'$. Если считать (6) системой дифференциальных уравнений для f, то (5) будут условиями ее разрешимости и f определится своими значениями на подмногообразии Γ^* начальных условий, размерности $2N-S-2K = 2N-J-K$. Γ^* обычно задают на $\mathcal{M}'$ уравнениями $\eta_k(p', q') = 0$, называемыми дополнительными условиями. Как и в случае связей II рода, переходом к эквивалентным связям $\tilde{\chi}_k$ и выбором дополнительных условий всегда можно добиться того, чтобы $\{\tilde{\chi}_k, \tilde{\chi}_{k'}\} = 0$, $\{\tilde{\chi}_k, \eta_{k'}\} = \delta_{kk'}$, $\{\eta_k, \eta_{k'}\} = 0$, то есть чтобы новые связи и дополнительные условия годились на роль канонич. переменных. Канонич. преобразование в Г′ от $(p'; q')$ к $\{\chi_k, p^*; \eta_k, q^*\}$ достраивает остальные переменные p^*, q^*, служащие независимыми координатами на физич. фазовом пространстве Γ^*. Для функций, удовлетворяющих системе уравнений (6), скобка Пуассона выражается только через p^*, q^*:

$$\{f, g\}_{p',q'} = \{f, g\}_{p^*,q^*}.$$

Таким образом, существуют два эквивалентных описания гамильтоновой системы со связями: в полном фазовом пространстве Г со скобкой Дирака $\{f, g\}^*_{p,q}$ и функцией Гамильтона H^* и в физич. фазовом пространстве Γ^* со скобкой Пуассона $\{f, g\}_{p^*,q^*}$ и функцией Гамильтона $\tilde{H} = H|_{\chi_j = 0,\, \eta_k = 0}$. Первый способ технически проще, поскольку на практике не всегда удается явно построить необходимые для второго способа канонич. преобразования. Однако принципиальная возможность второго способа служит обоснованием метода *функционального интеграла* для систем со связями.

Для теорий с высшими производными, когда

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(n)}),$$

переход от лагранжева формализма к Г. ф. осуществляется введением новых координат $Q_k = q^{(k-1)}$, $k = 1, \ldots, n$, и связей $\dot{Q}_{k-1} - Q_k = 0$:

$$L \to L_T = L(Q_1, \ldots, Q_n, \dot{Q}_n) + \sum_{k=2}^{n} \xi_k(\dot{Q}_{k-1} - Q_k).$$

При этом возникают $2(n-1)$ гамильтоновых связей II рода:

$$P_k - \xi_k = 0,\ \pi_k \equiv \partial L_T / \partial \dot{\xi}_k = 0.$$

Для функций переменных P, Q скобка Дирака совпадает со скобкой Пуассона, а H^* имеет вид:

$$H^* = P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \ldots + P_{n-1} Q_n + P_n \dot{Q}_n - L(Q_1, \ldots, Q_n, \dot{Q}_n).$$

При $k < n$ уравнения Гамильтона для Q_k эквивалентны лагранжевым связям, а для P_k – иному определению импульсов:

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial Q_{k+1}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial Q_{k+2}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial Q_{k+3}} - \ldots .$$

В релятивистской теории основной проблемой Г. ф. является удовлетворение требованиям релятивистской инвариантности. Как и в лагранжевом формализме, здесь требование инвариантности действия относительно преобразований симметрии позволяет с помощью *Нетер теоремы* построить соответствующие сохраняющиеся величины как явные функции канонич. переменных $\varphi(x)$ и $\pi(x)$. В частности, инвариантность действия относительно преобразований из группы Пуанкаре приводит к сохранению четырех компонент энергии-импульса P_μ и шести компонент момента $M_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, где, напр.,

$$P_0 = H, \quad P_i = \int dx \pi(x) \partial_i \varphi(x),$$

$i = 1, 2, 3$. Эти величины являются генераторами трансляций и вращений в четырехмерном пространстве-времени, реализованными как генераторы соответствующих канонич. преобразований в фазовом пространстве системы. Напр., для любой функции $\psi = \psi[\varphi(x), \pi(x)]$ имеем

$$\{H, \psi\} = \partial_0 \psi,\ \{P_i, \psi\} = \partial_i \psi$$

(где $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$).

Непосредственная проверка инвариантности действия в Г. ф. затруднительна ввиду явной нековариантности определений π и H. Однако поскольку преобразования Пуанкаре образуют группу Ли, генераторы должны удовлетворять соотношениям ее алгебры:

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0,\ \{P_\mu, M_{\nu\varkappa}\} = g_{\varkappa\mu}P_\nu - g_{\nu\mu}P_\varkappa,$$

$$\{M_{\mu\nu}, M_{\varkappa\chi}\} = g_{\mu\varkappa}M_{\nu\chi} + g_{\nu\varkappa}M_{\mu\chi} - g_{\mu\chi}M_{\nu\varkappa} - g_{\nu\chi}M_{\mu\varkappa}$$

($g_{\mu\nu}$ – метрич. тензор), представляющим собой условие релятивистской ковариантности Г. ф. Часть этих соотношений удовлетворяется автоматически, а остальные налагают существенные ограничения на вид H и других генераторов группы Пуанкаре.

Г. ф. играет принципиальную роль в процедуре квантования, стандартным рецептом к-рой является замена скобок Пуассона $\{f, g\}$ коммутатором $(i/\hbar)[\hat{f}, \hat{g}]$ операторов, отвечающих наблюдаемым f и g. При этом приходится решать две проблемы. Первая состоит в выборе порядка операторов $\hat{p}$, $\hat{q}$, отвечающих канонич. переменным, в выражениях $\hat{f} = \hat{f}(\hat{p}, \hat{q})$. Квантовый аналог классич. системы уже поэтому неоднозначен. Вторая связана с выбором канонич. переменных, для к-рых постулируются канонич. перестановочные соотношения $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\hbar\delta_{ij}$. В классич. теории равноправны любые наборы (p, q), связанные канонич. преобразованием. В квантовой теории разные выборы канонически квантуемых переменных приводят, вообще говоря, к разным результатам. Иногда критерии выбора существуют. Напр., для системы, прообразом к-рой служит система материальных точек, преимущественными являются декар-

товы координаты и соответствующие импульсы. Для полевых систем «неправильный» выбор может привести к противоречиям.

Совершенно разный смысл приобретают при квантовании связи I и II рода. Связи II рода налагаются как соотношения для отвечающих им операторов, а связи I рода могут налагаться только как дополнительные условия на векторы состояния, выделяющие физич. подпространство таких векторов.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; их же, Механика, 3 изд., М., 1973; [2] Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Фаддеев Л. Д., Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов, «Теоретич. и математич. физика», 1969, т. 1, с. 3; [4] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [5] Медведев Б. В., Начала теоретической физики, М., 1977; [6] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, М., 1978; [7] Коноплева Н. П., Попов В. Н., Калибровочные поля, М., 1980.

Б. В. Медведев, В. П. Павлов.

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ общей теории относительности – формализм, в котором уравнения общей теории относительности интерпретируются как гамильтонова динамическая система в пространстве начальных данных. Г. ф. позволяет корректно определить энергию, импульс и моменты асимптотически плоского гравитационного поля и является основным подходом при квантовании гравитации.

В основе Г. ф. общей теории относительности лежит описание фазового пространства начальных данных на 3-мерной пространственноподобной гиперповерхности M. Набор начальных данных состоит из римановой метрики g_{ij} на M и симметрич. тензора π_{ij} (второй фундаментальной формы погружения M в объемлющее 4-мерное пространство), удовлетворяющих связям

$$c_0 = R + (\pi_{jj})^2 + \pi^{ij}\pi_{ij} - T_{00} = 0,$$

$$c_i = \nabla_i \pi_{jj} - \nabla_j \pi_{ij} - \frac{1}{2} T_{0i} = 0,$$

где R – скалярная кривизна метрики g_{ij}, а $T_{\alpha\beta}$ – тензор энергии-импульса материи. Переменные g_{ij} и π^{ij} канонически сопряжены.

Последовательное построение Г. ф. общей теории относительности возможно лишь в асимптотически плоском пространстве, когда окрестность бесконечности в M отождествляется с внешностью шара в $\mathbb{R}^3$ и выполнены асимптотич. условия

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-1}),\ \partial_k g_{ij} = O(r^{-2}),\ \pi_{ij} = O(r^{-2}).$$

В этом случае в фазовом пространстве определено гамильтоново действие группы Пуанкаре и соответствующие гамильтонианы (с учетом связей $c_0 = 0$, $c_i = 0$) выражаются через асимптотику полей g_{ij}, π_{ij}. В частности, гамильтониан сдвига по времени (энергия) имеет вид:

$$E = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj})\, ds_i,$$

где S_r – сфера радиуса r в M, а генераторы сдвигов по пространственным направлениям (компоненты полного импульса) равны:

$$P_k = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} 2(\pi_{ik} - \delta_{ik}\pi_{jj})\, ds_i.$$

Аналогично определяются евклидовы и лоренцевы моменты (см. [1]).

Наиболее естественный вывод Г. ф. общей теории относительности состоит в применении преобразования Лежандра к модифицированному лагранжиану Гильберта (см. [2]):

$$L = \sqrt{-g}R + \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\nu\sigma} - \sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\nu\sigma}).$$

Лит.: [1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 1–3, М., 1977; [2] Фаддеев Л. Д., «Успехи физич. наук», 1982, т. 136, с. 435–57; [3] Фаддеев Л. Д., Попов В. Н., там же, 1973, т. 111, с. 427–50; [4] Dirac P. A. M., «Proc. Roy. Soc.», 1958, v. A246, p. 333–43; [5] Arnowitt R., Deser S., Misner C., «Phys. Rev.», 1960, v. 117, p. 1595–602; [6] Regge T., Teitelboim C., «Ann. Phys.», 1974, v. 88, p. 286–318.

А. Г. Рейман.

ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА бесконечных систем – временная эволюция систем бесконечного числа частиц с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j=1}^{\infty} \Phi(q_i - q_j),$$

определяемая решениями бесконечной системы уравнений Гамильтона:

$$m\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\sum_{i\neq j\geqslant 1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q_i} \Phi(q_i - q_j), \qquad (*)$$

где $q_i \in \mathbb{R}^\nu$, $p_i \in \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, соответственно, координата и импульс i-й частицы, m – масса частиц, Φ – парный потенциал взаимодействия с начальными условиями

$$q_i(0) = q_i,\ p_i(0) = p_i.$$

Необходимость изучения Г. д. бесконечных систем возникает при исследовании временной эволюции бесконечных статистич. систем, то есть эволюции *гиббсовских состояний*, возмущенных определенным образом. Исследование Г. д. бесконечных систем затруднено тем, что гамильтониан для таких систем бесконечен [правая часть второго уравнения (*) не определена], а также тем, что существуют такие начальные данные, для к-рых бесконечное число частиц (не имеющих твердой сердцевины) может за конечный промежуток времени собраться в ограниченной области.

Важным этапом построения Г. д. бесконечных систем служит выбор множества начальных данных, исключая возможность набора частицами «слишком большой» скорости на конечном отрезке времени или сближения «слишком большого» числа частиц. При этом необходимо установить, что это множество начальных данных охватывает интересные с точки зрения статистич. механики состояния, то есть что оно имеет полную меру относительно нек-рого гиббсовского распределения.

Затем строится собственно Г. д. бесконечных систем, то есть решение системы (*). Вначале рассматривается ограниченная сфера с радиусом r и изучается конечная динамика системы частиц внутри сферы с упругими отражениями от ее границы и в поле неподвижных частиц, находящихся вне сферы. Затем радиус r сферы устремляется к бесконечности и устанавливается существование и единственность предела (при $t \in \mathbb{R}$)

$$S(t)X = \lim_{r\to\infty} S_r(t)X,$$

где $S_r(t)$ – оператор эволюции системы частиц (в сфере с радиусом r), $X = (Q, P)$, где $Q = (q_1, \ldots, q_i, \ldots)$, $P = (p_1, \ldots, p_i, \ldots)$.

Впервые Г. д. бесконечных систем была построена О. Лэнфордом [1] для одномерной системы частиц с гладким финитным ограниченным потенциалом взаимодействия. Эта работа положила начало одному из двух основных направлений в исследовании Г. д. бесконечных систем – так наз. неравновесной динамике; ее существование доказывается на множестве начальных данных полной меры относительно гиббсовского распределения с потенциалом взаимодействия, отличным, вообще говоря, от потенциала, задающего динамику, причем это множество описывается явно. Существенную роль играет использование законов сохранения числа частиц и энергии. Неравновесная динамика исследована для широкого класса потенциалов взаимодействия в случае $\nu = 1, 2$. В случае $\nu = 3$ возникают серьезные затруднения, связанные с невозможностью эффективно использовать закон сохранения энергии.

Начало исследования так наз. равновесной динамики бесконечных систем было положено работами Я. Г. Синая [2], [3]. В этом случае Г. д. бесконечных систем строится на множестве полной меры относительно гиббсовского распределения с потенциалом, задающим динамику (то есть относительно равновесного состояния). При этом исключа-

емое множество меры 0 не может быть описано явно. В то же время равновесную динамику можно сравнительно легко построить в пространстве любой размерности ($\nu = 1, 2, 3$) и исследовать весьма широкий класс потенциалов (фактически сверхустойчивые потенциалы взаимодействия общего вида).

Лит.: [1] Lanford O. E., «Comm. Math. Phys.», 1968, v. 9, p. 169; 1969, v. 11, p. 257; [2] Синай Я. Г., «Теоретич. и математич. физика», 1972, т. 11, с. 248; [3] его же, «Вестник Моск. ун-та», 1974, сер. 1, т. 11, с. 152; [4] Гиббсовские состояния в статистической физике, сб. ст., пер. с англ., М., 1978, с. 159. *П. В. Малышев.*

ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА обобщенная – см. *Квантовая электродинамика.*

ГАМИЛЬТОНОВА КАЛИБРОВКА – *калибровочное условие* $A_0 = 0$. Уравнения движения в этой калибровке имеют явно гамильтонов вид, что упрощает процедуру квантования. Однако условие связи

$$G(x) = \partial_k F_{0k} - g[A_k, F_{0k}] = 0, \; k = 1, 2, 3,$$

где F_{0k} – компоненты тензора напряженности калибровочного поля A_μ, в этом случае необходимо накладывать отдельно. В квантовом случае это можно сделать лишь в слабом смысле, наложив условие связи на допустимые векторы состояний

$$G(x)|\Phi\rangle = 0.$$

Г. к. часто используется в исследованиях калибровочных полей, не связанных с разложением по константе связи. *А. А. Славнов.*

ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА – частный случай *динамической системы*, описывающей физические процессы без диссипации; соответствующие дифференциальные уравнения можно представить в следующей симметричной форме (*Гамильтона уравнения*):

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (*)$$

где $H(p, q, t)$, называемая *Гамильтона функцией*, имеет обычно смысл энергии системы, а q_i и p_i – обобщенные координаты и импульсы, n – число степеней свободы системы.

Ниже рассматриваются автономные гамильтоновы системы, в к-рых функция H не зависит явно от времени t. В каждой точке (p, q) фазового пространства вектор $(-\partial H/\partial q_i, \partial H/\partial p_i)$ задает поле фазовой скорости, касательное к фазовым траекториям. Возникает наглядный образ движения Г. с. как фазового потока. Фазовый поток сохраняет элемент объема в фазовом пространстве, то есть при движении по траекториям системы (*) фазовый объем не меняется (*Лиувилля теорема*). Отсюда следует, что Г. с. в фазовом пространстве не может иметь множеств, к к-рым все траектории из целой области притягиваются асимптотически. Более того, почти все траектории, совершающие финитное движение, являются неблуждающими, то есть почти всякая движущаяся точка многократно возвращается в окрестность своего исходного положения (*Пуанкаре теорема* о возвращении).

Производная функции $F(p, q)$ по направлению вектора фазовой скорости в данной точке (p, q) определяет изменение F вдоль траектории и равна

$$\dot{F} = -\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = \{F, H\},$$

где $\{F, H\}$ называется скобкой Пуассона функций F и H. Если $\dot{F} \equiv 0$, то есть $\{F, H\} \equiv 0$, то F не меняется вдоль траектории и является первым интегралом (интегралом движения) системы (*). В частности, интегралом системы (*) является функция H, поэтому фазовое пространство Г. с. расслаивается на гиперповерхности $H = h = \text{const}$; траектория, начинающаяся на данной гиперповерхности, никогда ее не покидает. Дополнительные интегралы Г. с. часто получаются как следствие инвариантности H относительно нек-рой группы преобразований (см. *Нетер теорема*). Напр., пусть функция H инвариантна относительно сдвигов s вдоль оси q_1, то есть

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1 + s, q_2, \ldots, q_n) = H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$$

для любого s. Тогда H не зависит от q_1, поэтому $\dot{p}_1 = -\partial H/\partial q_1 \equiv 0$ и $F(p, q) = p_1$ – интеграл движения; координата q_1 называется в этом случае циклической.

Интегрируемые системы являются простейшим типом Г. с. Они имеют кроме функции $H = H_1$ еще $n-1$ интегралов $H_2, \ldots, H_n$, причем попарные скобки Пуассона $\{H_i, H_j\} \equiv 0$. Интегрируемость приводит к следующей картине движения Г. с. Пусть градиенты функций H_i линейно независимы в изучаемой области фазового пространства, а движение финитно и происходит внутри области. Любая траектория остается в пересечении гиперповерхностей $H_i(p, q) = h_i$ с фиксированными h_i. Компонента этого пересечения топологически эквивалентна n-мерному тору T^n (T^1 – обычная окружность, T^2 – произведение двух окружностей, поверхность «бублика», стандартный тор T^n – это множество в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2$, к-рое при проекции на каждое $\mathbb{R}^2$ дает окружность). Можно так задать циклич. координаты $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ на торе T^n, что движение по тору определяется уравнениями $\dot{\varphi}_i = \omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ – вектор частот, то есть движение условно периодично. Вся область, где градиенты H_i линейно независимы, расслоена на такие торы; можно ввести специальные координаты (I, φ) (переменные действие – угол), в к-рых $H = H(I)$.

Движение на самом торе зависит от частот ω (к-рые, вообще говоря, меняются от тора к тору). Если между частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ нет линейных зависимостей вида $n_i\omega_i = 0$ с целыми коэффициентами, то траектория подходит сколь угодно близко к любой точке тора. Если же существуют соотношения $\sum_i n_i\omega_i = 0$ (так наз. резонанс частот), то n-мерный тор T^n расслаивается на торы меньшей размерности T^k, $n-k$ равно числу независимых линейных соотношений.

Строение множества $\{H_i = h_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, содержащего точки, где градиенты функций H_i зависимы, может быть различным. В частности, оно может содержать вырожденные торы (размерности меньшей n), к к-рым асимптотически приближаются другие траектории, образуя так наз. «усатый», или «седловой», тор. Вырожденным случаем седлового тора является седловое периодич. движение Г, к-рое изображено на рис. 1 пунктирной линией.

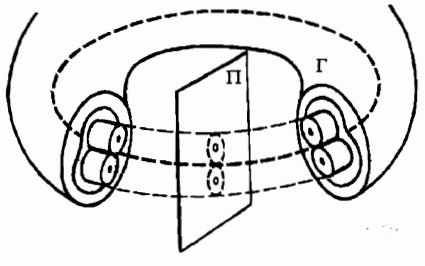


Рис. 1. Часть трехмерного уровня энергии.

См. также *Интегрируемая гамильтонова система.*

Неинтегрируемые системы. Обычно интегрируемые Г. с. получаются при нек-рых специальных значениях параметров, входящих в H. Пусть, для простоты, имеется один малый параметр ε и при $\varepsilon = 0$ система интегрируема. Тогда в области, где введены переменные действие – угол (I, φ), ее функцию Гамильтона можно записать в виде

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon).$$

А. Пуанкаре (H. Poincaré) считал изучение такой Г. с. «основной задачей динамики». Движение в такой Г. с. для большинства начальных условий описывается КАМ-теорией [А. Н. Колмогоров, В. И. Арнольд, Ю. Мозер (J. Moser)]. При малых ε основная часть торов интегрируемой Г. с. сохраняется, лишь слегка деформируясь; движение на каждом таком торе остается условно периодическим.

Но разрушение структуры интегрируемой Г. с. все же происходит, одной из его причин является расщепление ранее совпадавших устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодич. движений (см. периодич. траекторию Г на рис. 1). В окрестности этого множества образуется так наз. стохастич. слой, движение внутри к-рого крайне нерегулярно и практически неотличимо от случайного. Нек-рое представление о нем дает рис. 2, где представлено поведение следов устойчивого и неустойчивого многообразий седловой траектории Г на секущей площадке П (см. рис. 1). Кроме стохастич. слоев, возникающих в окрестности седловых периодич. движений, образуются также стохастич. слои (гораздо более узкие) из-за разрушения нек-рой малой части торов, в первую очередь тех, движение на к-рых было чисто периодическим ($\omega_i = n_i\nu$, n_i – целые, $i = 1, \ldots, n$). При разрушении такого тора образуется «гирлянда» из седловых и устойчивых периодич. движений (см. рис. 3). Устойчивые многообразия седловых периодич. движений пересекаются, и образуется стохастич.

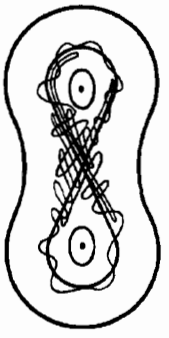


Рис. 2. Стохастический слой.

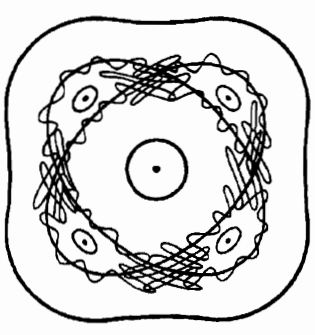


Рис. 3. Разрушенный тор.

слой. Таким образом, фазовое пространство Г. с., близкой к интегрируемой, характеризуется свойством разделенности: в большей части его движение похоже на поведение интегрируемой Г. с., траектории лежат на торах, заполненных условнопериодич. траекториями. В то же время в нек-рой части движение приобретает свойства случайного процесса (квазислучайно).

Следует отметить, что в случае двух степеней свободы сохраняющиеся при малых ε двумерные торы перегораживают трехмерный уровень энергии $H = \text{const}$, поэтому имеется нек-рая устойчивость (по переменным действия): стохастич. слои между собой не перекрываются. Однако при $n \geqslant 3$ возникает неустойчивость, к-рая при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ позволяет траектории из одного стохастич. слоя переходить в другой и тем самым уходить далеко по I (диффузия Арнольда). Скорость такой диффузии экспоненциально мала (по ε), но все же на больших временах устойчивость она нарушает. Нек-рые численные эксперименты на ЭВМ показывают, что с ростом ε все большее число торов разрушается, и в конце концов стохастич. движение системы происходит по всему трехмерному уровню энергии $H = \text{const}$. При такой «развитой» стохастичности движение обладает свойством эргодичности, то есть для любой функции $F(p, q)$ среднее по времени равно среднему по пространству (по объему на уровне энергии, к-рый также сохраняется).

Обобщения. В общем случае для задания Г. с. на четномерном пространстве размерности $2n$ нужно определить скобку Пуассона любых двух функций f, g, удовлетворяющую обычным свойствам билинейности, антисимметричности и невырожденности, а также тождеству Якоби. В локальных координатах x_i эта операция имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_{i,k=1}^{2n} w^{ik}(x)(\partial f/\partial x_i)(\partial f/\partial x_k),$$

причем матрица $w^{ik}(x)$ невырождена, $w^{ik} = -w^{ki}$ и выполняется тождество

$$\frac{\partial W_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial W_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial W_{kl}}{\partial x_i} = 0,$$

где $W = w^{-1}$ – обратная матрица. Выбирая теперь произвольную функцию $H(x)$, можно определить для каждой функции $f(x)$ ее траекторию $F(x, t)$, $F(x, 0) = f(x)$, из уравнения $\partial F/\partial t = \{F, H\}$. Это линейное однородное уравнение с частными производными 1-го порядка, характеристиками к-рого являются уравнения Гамильтона

$$dx_i/dt = \sum_k w^{ik}\partial H/\partial x_k.$$

Около каждой точки можно так ввести координаты, что в них матрица $w^{ik}(x)$ примет стандартный вид $\begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix}$, где E – n-мерная единичная матрица. Обозначая $x_k = p_k$, $x_{n+k} = q_k$, получим канонически сопряженные переменные, в к-рых Г. с. запишется в виде (*).

Следуя этой схеме, можно перенести понятие Г. с. на распределенные системы, описывающие классич. поля. Примером может служить *Кортевега – де Фриса уравнение*

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0.$$

В качестве фазового пространства выбирают убывающие на бесконечности функции $v(x)$, для к-рых существует функционал

$$H[v] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-v_x^2/2 + v^3\right) dx,$$

играющий роль функции Гамильтона. Скобку Пуассона функционалов $S[v]$, $R[v]$ определяют равенством

$$\{S, R\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta S}{\delta v} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta R}{\delta v}\right) dx,$$

где $\delta/\delta v$ означает функциональную производную. Тогда уравнение Кортевега – де Фриса переписывается в виде

$$v_t = -(\partial/\partial x)\,\delta H/\delta v,$$

то есть представляет собой Г. с., имеющую к тому же бесконечный набор интегралов. Распределенными (и даже интегрируемыми) Г. с. являются также *нелинейное уравнение Шредингера, синус-Гордона уравнение* и описывающие намагниченность одноосного ферромагнетика *Ландау – Лифшица уравнения*.

Лит.: [1] Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, пер. с англ., М., 1973; [2] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; Теория солитонов, М., 1980; [3] Лихтенберг А., Либерман М., Регулярная и стохастическая динамика, пер. с англ., М., 1984. *Л. М. Лерман.*

ГАММА-ФУНКЦИЯ, Г-функция, – трансцендентная функция $\Gamma(z)$, распространяющая значения факториала $z!$ на случай любого комплексного $z \neq 0, -1, -2, \ldots$. Г.-ф. введена Л. Эйлером [L. Euler, 1729, письмо к Х. Гольдбаху (Ch. Goldbach)] при помощи бесконечного произведения

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)},$$

из к-рого Л. Эйлер получил интегральное представление

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx,$$

верное для $\operatorname{Re} z > 0$. Многозначность функции x^{z-1} устраняется формулой $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$ с действительным $\ln x$. Обозначение $\Gamma(z)$ и название Г.-ф. были предложены А. Лежандром (A. Legendre, 1814).

$\Gamma(z)$ – *мероморфная функция*. В точках $z_n = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, она имеет простые полюсы с вычетами $(-1)^n/n!$

Основные соотношения и свойства Г.-ф.

1) Функциональное уравнение Эйлера:

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1),$$

или

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)}\Gamma(z+n+1);$$

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$, если $n > 0$ – целое, при этом считают $0! = \Gamma(1) = 1$.

2) Формула дополнения Эйлера:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

В частности,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},$$

если $n>0$ – целое, то

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2=\frac{\pi}{\operatorname{ch} y\pi},\quad y\text{ – действительное.}$$

3) Формула умножения Гаусса:

$$\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right)=(2\pi)^{(m-1)/2}\,m^{1/2-mz}\,\Gamma(mz),$$

$$m=2,3,4,\ldots .$$

При $m=2$ это есть формула удвоения Лежандра.

4) В действительной области $\Gamma(x)>0$ для $x>0$ и принимает знак $(-1)^{k+1}$ на участках $-k-1<x<-k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ (см. рис.). Для всех действительных x справедливо неравенство

$$\Gamma\Gamma''>\Gamma'^2\geqslant 0,$$

то есть все ветви как $|\Gamma(x)|$, так и $\ln|\Gamma(x)|$ – выпуклые функции. Свойство логарифмич. выпуклости определяет Г.-ф. среди всех решений функционального уравнения

$$\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$$

с точностью до постоянного множителя.

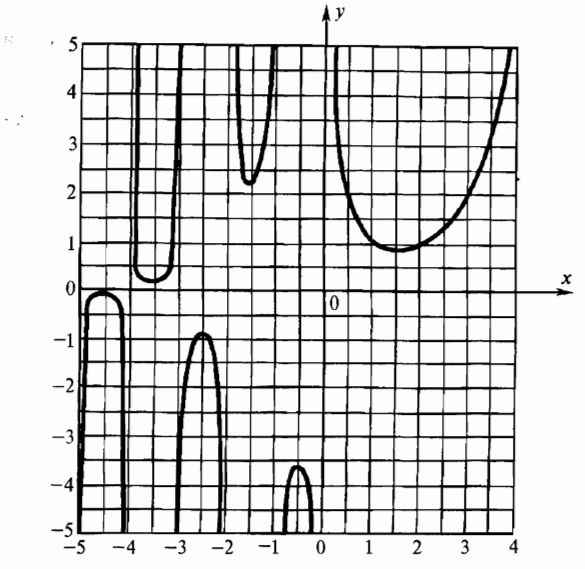


График гамма-функции $y=\Gamma(x)$.

Для положительных x Г.-ф. имеет единственный минимум при $x=1{,}4616321\ldots$, равный $0{,}885603\ldots$. Локальные минимумы функции $|\Gamma(x)|$ при $x\to-\infty$ образуют последовательность, стремящуюся к нулю.

5) В комплексной области, при $\operatorname{Re} z>0$, Г.-ф. быстро убывает при $|\operatorname{Im} z|\to\infty$:

$$\lim_{|\operatorname{Im} z|\to\infty}|\Gamma(z)||\operatorname{Im} z|^{\frac{1}{2}-\operatorname{Re} z}e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im} z|}=\sqrt{2\pi}.$$

Исключительная роль Г.-ф. в математич. анализе определяется тем, что при помощи Г.-ф. выражается большое количество определенных интегралов, бесконечных произведений и сумм рядов (см., напр., *Бета-функция*). Кроме того, Г.-ф. находит широкие применения в теории специальных функций.

Лит.: [1] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., т. 2, 2 изд., М., 1963; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [3] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Lpz., 1906; [4] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968.

Л. П. Купцов.

ГАММЕРШТЕЙНА ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

ГАНКЕЛЯ ФУНКЦИИ, Ханкеля функции,– *цилиндрические функции* 3-го рода. Г. ф. могут быть следующим образом определены через *Бесселя функции*:

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{J_{-p}(z)-e^{-ip\pi}J_p(z)}{i\sin p\pi},$$

$$H_p^{(2)}(z)=\frac{e^{ip\pi}J_p(z)-J_{-p}(z)}{i\sin p\pi}$$

(p нецелое). Отсюда вытекают важные соотношения:

$$H_{-p}^{(1)}(z)=e^{ip\pi}H_p^{(1)}(z),$$

$$H_{-p}^{(2)}(z)=e^{-ip\pi}H_p^{(2)}(z).$$

Г. ф. комплексны при действительных значениях z; однако

$$i^{p+1}H_p^{(1)}(iz)\ \text{и}\ i^{-(p+1)}H_p^{(2)}(-iz)$$

действительны, если z действительно и положительно. Г. ф. обладают простыми асимптотич. представлениями при больших $|z|$:

$$H_p^{(1)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-p\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$H_p^{(2)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-p\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Г. ф. «полуцелого» аргумента $p=n+1/2$ выражаются через элементарные функции, в частности:

$$H_{1/2}^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{iz}}{i},\quad H_{1/2}^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-iz}}{-i}.$$

Г. ф. введены Г. Ганкелем (H. Hankel, 1869).

Лит. см. при ст. *Цилиндрические функции.* *П. И. Лизоркин.*

ГАРДНЕРА–МИУРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – обобщение *Миуры преобразования*:

$$u(x,t)=w(x,t)+\varepsilon w_x'(x,t)+\varepsilon^2w^2(x,t).$$

Формальная замена $v(x,t)=\varepsilon w(x,t)$ и предельный переход при $\varepsilon\to\infty$ сводят это преобразование к преобразованию Миуры:

$$u(x,t)=v_x'(x,t)+v^2(x,t).$$

Для Г.–М. п. справедливо тождество

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=$$

$$=\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}+2\varepsilon^2w\right)\left(w_t-6ww_x-6\varepsilon^2w^2w_x+w_{xxx}\right).$$

К. Гарднер (C. Gardner) использовал это преобразование для получения бесконечной последовательности локальных законов сохранения для уравнения Кортевега–де Фриса.

Лит.: [1] Солитоны в действии, пер. с англ., М., 1981; [2] Каложеро Ф., Дегасперис А., Спектральные преобразования и солитоны, пер. с англ., М., 1985.

В. П. Котляров.

ГАРМОНИКА – простейшая периодическая функция вида

$$A\sin(\omega x+\varphi).$$

Эта функция встречается при рассмотрении многих колебательных процессов. Число A называется амплитудой, ω – частотой, φ – начальной фазой, $T=2\pi/\omega$ – периодом колебания. Функции

$$\sin(2\omega x+\varphi),\ \sin(3\omega x+\varphi),\ \ldots$$

называются соответственно второй, третьей и т. д. высшими Г. относительно основной Г. Помимо самих Г. рассматривают их суммы

$$a_0+a_1\sin(\omega x+\varphi)+a_2\sin(2\omega x+\varphi)+\ldots,$$

так как очень широкий класс функций разлагается в ряды такого вида для изучения различных процессов.

См. также *Свободное гармоническое колебание.*

А. И. Барабанов.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ – см. *Емкость* множества.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ МАЖОРАНТА – см. *Субгармоническая функция.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – действительная функция $u(x)$ действительных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 2$, заданная в некоторой области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, имеющая в D непрерывные частные производные первого и второго порядков и являющаяся решением уравнения Лапласа:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0.$$

На комплексные функции $w(x)=u(x)+iv(x)$ это определение распространяется в том случае, если их действительная и мнимая части $u(x)=\operatorname{Re} w(x)$, $v(x)=\operatorname{Im} w(x)$ являются Г. ф.

В случае неограниченной области D с компактной границей $S=\partial D$ обычно целесообразно доопределить Г. ф. $u(x)$ так, чтобы она была регулярной в бесконечно удаленной точке (в бесконечности) ∞. При $n\geqslant 3$ это означает, что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)=u(\infty)=0, \quad |x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

При $n=2$ должно выполняться условие

$$u(x)=O(1), \ |x|\to\infty,$$

из к-рого вытекает существование конечного предела

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)=u(\infty).$$

Основная в теории Г. ф. формула Грина выражает значения Г. ф. $u(x)$ внутри области D через ее значения на границе $S=\partial D$ и через значения ее производной по направлению $\boldsymbol{e}$ внешней нормали к S:

$$\int_S\left[h_n(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial e}-u(y)\frac{\partial h_n(x-y)}{\partial e_y}\right]d\sigma(y)=\begin{cases}u(x), & x\in D,\\ 0, & x\notin \overline{D}.\end{cases} \quad (*)$$

Здесь

$$h_2(x)=\frac{1}{2\pi}\ln|x|, \quad h_n(x)=\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad n>2,$$

– главные фундаментальные решения уравнения Лапласа,

$$\sigma_n(R)=n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^{n-1}, \quad \sigma_n(1)=\sigma_n, \quad n\geqslant 2,$$

– площадь сферы радиуса R в $\mathbb{R}^n$.

Формула Грина справедлива, напр., при условии, что $u(x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{D}=D\cup S$, граница S к-рой есть кусочно гладкая замкнутая поверхность (при $n\geqslant 3$) или кривая (при $n=2$). Формула Грина дает представление произвольной Г. ф. $u(x)$ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя с плотностями $\frac{\partial u(y)}{\partial e}$ и $-u(y)$. Между этими плотностями имеется интегральная зависимость: левая часть формулы (*) (интеграл Грина) должна обращаться в нуль для всех точек x, лежащих вне $\overline{D}$.

Основные свойства Г. ф. (граница S области D достаточно гладкая).

1) Если D – конечная область и $u(x)\in C^1(\overline{D})$, то

$$\int_S\frac{\partial u(y)}{\partial e}d\sigma(y)=0.$$

2) Теорема о среднем значении: если $u(x)$ – Г. ф. в шаре $B=B(a,R)$ радиуса R с центром a и $u(x)\in C^1(\overline{B})$, то ее значение в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере $S(a,R)$, то есть

$$u(a)=\frac{1}{\sigma_n(R)}\int_{S(a,R)}u(y)\,d\sigma(y).$$

3) Принцип экстремума: если D – область в $\mathbb{R}^n$, не содержащая точку ∞, $u(x)$ – Г. ф. в D, $u(x)\neq\text{const}$, то ни в какой точке $a\in D$ функция $u(x)$ не может достигать локального экстремума. Если, кроме того, $u(x)\in C(\overline{D})$, то наибольшее и наименьшее значения $u(x)$ в замкнутой области $\overline{D}$ достигаются только в точках границы S.

4) Стирание особенностей: если $u(x)$ – Г. ф. в области $D\setminus\{a\}$, $a\in D$, удовлетворяющая условию

$$u(x)=o(|h_n(x-a)|), \ x\to a,$$

то существует конечный предел

$$\lim_{x\to a}u(x)=u(a),$$

приняв к-рый за значение функции $u(x)$ в точке a, получают Г. ф. в D.

5) Если $u(x)$ – Г. ф. во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, ограниченная сверху или снизу, то

$$u(x)=\text{const}.$$

6) Если $u(x)$ – Г. ф. в окрестности точки $a=(a_1, \ldots, a_n)$, то $u(x)$ разлагается в степенной ряд по переменным x_1-a_1, ..., x_n-a_n, то есть всякая Г. ф. есть аналитич. функция переменных $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, Г. ф. $u(x)$ имеет производные всех порядков

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}, \quad k_1+\ldots+k_n=m,$$

к-рые в свою очередь являются Г. ф.

7) Свойство единственности: если $u(x)$ – Г. ф. в области $D\subset\mathbb{R}^n$ и $u(x)\equiv 0$ в n-мерной окрестности какой-либо точки $a\in D$, то $u(x)\equiv 0$ в D.

Если $u(x)$ – аналитич. функция переменных $x_1, \ldots, x_n$ в области $D\subset\mathbb{R}^n$ и $u(x)$ – Г. ф. в n-мерной окрестности какой-либо точки $a\in D$, то $u(x)$ – Г. ф. в D.

8) Принцип симметрии: пусть на границе ∂D области $D\subset\mathbb{R}^n$ имеется открытое в плоскости $x_n=0$ множество G, $u(x)$ – Г. ф. в D и $u(x)=0$ всюду на G, $\widetilde{D}$ – область, симметричная с D относительно плоскости $x_n=0$. Тогда формула

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)=-u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n),$$
$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\in\widetilde{D},$$

дает гармонич. продолжение функции u в область $D\cup G\cup\widetilde{D}$.

9) Первая теорема Гарнака: пусть последовательность Г. ф. $\{u_n(x)\}$, непрерывных в конечной замкнутой области $\overline{D}$, сходится равномерно на границе $S=\partial\overline{D}$; тогда она сходится равномерно в $\overline{D}$ и предельная функция

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)$$

есть Г. ф. в D.

10) Вторая теорема Гарнака: пусть последовательность Г. ф. $\{u_n(x)\}$ монотонна в области D и сходится по крайней мере в одной точке $a\in D$; тогда она сходится всюду в D к Г. ф.

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x).$$

Если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – аналитич. функция комплексного переменного $z=x+iy$, то ее действительная и мнимая части $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ являются сопряженными Г. ф. (то есть они связаны *Коши – Римана условиями*). Обратно, если в окрестности точки $a=b+ic$ задана Г. ф. $u(x,y)$, то соответствующую аналитич. функцию $f(z)$, для к-рой $u(x,y)$ является действительной частью, можно найти, напр., по формуле

$$f(z)=2u\left(\frac{z+a}{2}, \frac{z-a}{2i}\right)-u(b,c)+iC_0,$$

где C_0 – произвольная действительная постоянная.

В математич. физике Г. ф. имеют важное значение главным образом потому, что часто встречаются потенциальные векторные поля вида $s=-\operatorname{grad} u(x)$, для к-рых уравнение сохранения $\operatorname{div} s=-\Delta u(x)$ есть уравнение Лапласа для потенциала $u(x)$, то есть $u(x)$ – Г. ф.

Лит.: [1] Тиман А. Ф., Трофимов В. Н., Введение в теорию гармонических функций, М., 1968; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ – название раздела математики и математического метода. В Г. а. как раздел математики обычно включают: теорию тригонометрич. рядов (одномерных и многомерных), преобразований Фурье (функций одного и нескольких переменных), почти периодич. функций, теорию приближения функций тригонометрич. полиномами, абстрактный гармонич. анализ и нек-рые другие математич. дисциплины, близкие к указанным. Метод заключается в сведении нек-рых задач (из различных областей математики) к вопросам Г. а. и решаемых на его основе. Напр.: теория функций комплексного переменного в вопросах граничного поведения аналитических в единичном круге функций, по существу, сливается с теорией тригонометрич. рядов; изучение свойств случайных величин при помощи характеристич. функций – применение метода Г. а. в теории вероятностей; нек-рые объекты функционального анализа тесно связаны с тригонометрич. рядами, почти периодич. функциями и другими объектами Г. а.; в теории дифференциальных уравнений при помощи относящегося к Г. а. метода Фурье находятся решения различных уравнений математич. физики; наконец, многочисленные прикладные задачи вычислительной математики решаются на основе применения рядов и интегралов Фурье – объектов Г. а.

См. также *Абстрактный гармонический анализ.*

Е. М. Никишин.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР – см. *Осциллятор, Свободное гармоническое колебание.*

ГАРМОНИЧЕСКИЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС – см. *Орнштейна–Уленбека процесс.*

ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ – см. *Свободное гармоническое колебание.*

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – см. *Борна–Оппенгеймера метод.*

ГАРНАКА ТЕОРЕМА – см. *Гармоническая функция.*

ГАРТМАНА ТЕЧЕНИЕ – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ГАРТОГСА ТЕОРЕМА – см. *Аналитическая функция.*

ГАУССА ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Специальные функции.*

ГАУССА ЗАКОН – см. *Гаусса распределение.*

ГАУССА ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ – см. *Интегральные функции.*

ГАУССА ОТОБРАЖЕНИЕ гладкого подмногообразия M^k векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство k-мерных векторных подпространств (ориентированных или нет) в $\mathbb{R}^n$ – отображение, ставящее в соответствие точке многообразия M касательное пространство к M в этой точке. Если M – гиперповерхность, то Г. о. является *лагранжевым отображением.* *М. Э. Казарян.*

ГАУССА ПРИНЦИП наименьшего принуждения – один из *вариационных принципов механики:* движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы они стали свободными, то есть движение происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения за время dt принять величину Z, равную сумме произведений массы каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной. Иначе говоря, в каждый момент времени t среди всех ускорений, обусловленных связями, действительными ускорениями w_i различных точек системы будут те, которые обращают в минимум функцию Z второй степени относительно ускорений.

Равновесие является частным случаем общего закона: оно имеет место в том случае, когда точки не имеют скорости и когда сохранение системы в состоянии покоя более близко к свободному движению в случае упразднения связей, чем к возможным движениям, допускаемым связями.

Принцип предложен К. Гауссом (C. Gauss, 1829).

В. В. Румянцев.

ГАУССА ПРИНЦИП наименьших реакций – один из *вариационных принципов классической механики;* следствие *Гаусса принципа* наименьшего принуждения: для действительного движения величина

$$\sum_i \frac{R_i^2}{2m_i}$$

есть минимум; здесь m_i – масса i-й точки системы с радиус-вектором r_i, R_i – реакция связей.

Г. п. обобщен на случай освобождения системы от части связей. Так как возможные перемещения исходной системы находятся среди возможных перемещений освобожденной системы, то справедливо соотношение:

$$\frac{(dt)^2}{2}\sum_i\left(m_i\frac{\partial v_i}{dt}-F_i\right)\cdot\Delta w_i=0,$$

где δv_i – изменение скорости $v_i=r_i$ за время dt в освобожденном движении $F_i(t, r_j, \dot r_j)\in C^1$ – активные силы. Это уравнение можно привести к виду

$$A_{d\delta}+A_{d\partial}-A_{\partial\delta}=0, \qquad (1)$$

где

$$A_{\partial\delta}=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{\partial v_i}{dt}-\frac{\delta v_i}{dt}\right)^2$$

характеризует меру отклонения движения (∂) от движения (δ) за время dt. Аналогично записываются $A_{d\delta}$ и $A_{d\partial}$. Из уравнения (1) следуют неравенства

$$A_{d\delta}<A_{\partial\delta},\ A_{d\partial}<A_{\partial\delta}, \qquad (2)$$

выражающие теорему: отклонение действительного движения (d) системы от мыслимого (δ) [освобожденного действительного (∂)] движения меньше отклонения движения (δ) от движения (∂). Эта теорема доказана Н. Г. Четаевым (1932–33). Теорема, выражаемая вторым из неравенств (2), для случая линейных неголономных связей высказана Э. Махом (E. Mach, 1883) и доказана Е. А. Болотовым (1916).

В. В. Румянцев.

ГАУССА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – распределение вероятностей случайной величины $\xi\in(-\infty,\infty)$, определяемое плотностью

$$p(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right],$$

где $a=\mathsf{E}\xi$, $\sigma^2=\mathsf{D}\xi$ – параметры распределения. Характеристич. функция Г. р. имеет вид

$$\varphi(t)=\mathsf{E}e^{it\xi}=\exp\left\{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}.$$

Синонимы термина «Г. р.»: Гаусса закон, нормальное распределение, Гаусса – Лапласа распределение.

Г. р. возникло в сочинении К. Гаусса (C. Gauss, 1809) «Теория движения небесных тел» как решение задачи о распределении ошибок наблюдений в астрономии и геодезии, а также в работе П. Лапласа (P. Laplace, 1812). В последней было показано, что распределение вероятностей числа «успехов» s_n в схеме Бернулли с вероятностью успеха q, $0<q<1$, асимптотически точно при $n\to\infty$ приближается Г. р.:

$$\mathsf{P}\{s_n=m\}\sim\frac{1}{\sqrt{nq(1-q)}}\,p(x;0,1)$$

с $x=[nq(1-q)]^{-1/2}(m-nq)$ равномерно для всех x из ограниченного интервала (ранее в частном случае это было сделано А. Муавром (A. de Moivre, 1730). Это утверждение является простейшим среди предельных теорем теории вероятностей, к-рые обуславливают фундаментальную роль Г. р. в приложениях. Общий смысл предельных теорем состоит в том, что при широких предположениях суммы случайных величин асимптотически с ростом числа слагаемых ведут себя согласно Г. р.

Г. р. является единственным типом *устойчивого распределения* с конечным вторым моментом. Оно может появляться как точное решение нек-рых задач (в рамках принятой математич. модели) (см. *Винеровский процесс*, *Орнштейна–Уленбека процесс*).

Г. р. часто встречается в физич. приложениях: Г. р. описывает малые флуктуации термодинамич. величин вблизи положения равновесия, распределение молекул по скоростям (см. *Максвелла распределение*), распределение ошибок наблюдения и др.

Многомерное Г. р. случайного вектора $\xi=(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется таким образом, что при любом $a\in\mathbb{R}^n$ скалярное произведение (a, ξ) имеет Г. р. или неслучайно. Характеристич. функция многомерного Г. р. при $t\in\mathbb{R}^n$ имеет вид:

$$\varphi_\xi(t)=\exp\left\{i\mathsf{E}(t,\xi)-\frac{1}{2}\mathsf{E}(t,\xi-\mathsf{E}\xi)^2\right\}.$$

В случае, если квадратичная форма

$$\mathsf{E}(t,\xi-\mathsf{E}\xi)^2=\sum_{k,l=1}^n\sigma_{kl}t_kt_l,$$

где $\|\sigma_{kl}\|$ – ковариационная матрица вектора ξ, строго положительна, то соответствующая плотность Г. р. имеет вид

$$p(X)=\left[(2\pi)^n\det\|\sigma\|\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(X-\mathsf{E}\xi,\sigma^{-1}(X-\mathsf{E}\xi)\right)\right\},$$

где $X=(x_1, x_2, ..., x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, 2 изд., М., 1984. *Ю. П. Вирченко.*

ГАУССА РЯД – см. *Гипергеометрическая функция.*

ГАУССА ТЕОРЕМА – см. *Грина формулы.*

ГАУССА УРАВНЕНИЕ – см. *Гипергеометрическая функция.*

ГАУССА ФОРМУЛА – см. *Грина формулы.*

ГАУССА – БОННЕ ФОРМЫЛА – см. *Эйлерова характеристика.*

ГАУССА – ЛАПЛАСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Гаусса распределение.*

ГАУССА – МАНИНА СВЯЗНОСТЬ – операция переноса классов (ко)гомологий. Пусть с каждым расслоением связано расслоение (ко)гомологий, слои которого – (ко)гомологии соответствующих слоев исходного расслоения. Перенос слоев над кривыми в базе индуцирует перенос классов (ко)гомологий; операция переноса этих классов и называется связностью Гаусса – Манина. *С. В. Чмутов.*

ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА – см. *Остроградского формула.*

ГАУССОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ – *функциональный интеграл* вида

$$I=\int\exp(S_2+S_1)\,D\mu,$$

где S_2 – квадратичная, а S_1 – линейная формы относительно переменных интегрирования. Г. ф. и. представляет собой важный с точки зрения приложений класс функциональных интегралов, значение к-рых находится в замкнутом виде. В квантовой теории поля Г. ф. и. используется для описания невзаимодействующих систем во внешнем поле.

Примеры вычисления Г. ф. и.:

1) Пусть

$$S_2=-\frac{1}{2}\int a(x)K(x,y)a(y)\,dxdy,$$

$$S_1=\int\eta(x)a(x)\,dx=\eta a,$$

$$D\mu=\prod_x da(x);$$

тогда

$$I=\det{}^{-\varkappa/2}(K)\exp\left\{\frac{1}{2}\eta K^{-1}\eta\right\},$$

где $\varkappa=1$ в случае, когда интегрирование ведется по вещественному гильбертову пространству L, $a(x)$ и $\eta(x)\in L$, а K – положительно определенный симметричный обратимый на L интегральный оператор с ядром $K(x, y)$; $\varkappa=-1$ в случае, когда интегрирование ведется по грассмановой алгебре Λ, $a(x)$ и $\eta(x)\in\Lambda$, а K – обратимый на Λ кососимметрич. интегральный оператор с ядром $K(x, y)$.

2) Пусть

$$S_2=-\int a^+(x)K(x,y)a(x)\,dxdy=a^+Ka,$$

$$S_1=\int\left[a^+(x)\eta(x)+\eta^+(x)a(x)\right]dx=\eta^+a+a^+\eta,$$

$$D\mu=\prod_x da^+(x)\,da(x);$$

тогда

$$I=\det{}^{-\varkappa}(K)\exp\{\eta^+K^{-1}\eta\},$$

где $\varkappa=1$ в случае, когда интегрирование ведется по гильбертову пространству L с инволюцией, $a(x)$, $a^+(x)$, $\eta^+(x)$, $\eta(x)\in L$, а K обратим на L и $\mathrm{Re}\,a^+Ka>0$; $\varkappa=-1$ в случае, когда интегрирование ведется по грассмановой алгебре Λ с инволюцией, $a(x)$, $a^+(a)$, $\eta^+(x)$ и $\eta(x)\in\Lambda$, а K обратим на Λ.

Строго говоря, для существования рассмотренных Г. ф. и. необходимо требовать существования входящих в формулы примеров определителей, что выполняется тогда и только тогда, когда оператор $K-E$ является ядерным. Последнее обычно не выполняется для функциональных интегралов, используемых при описании квантовополевых систем. В этом случае необходимо регуляризовать определитель в соответствии с конечномерными аппроксимациями, пределом к-рых является исследуемый функциональный интеграл.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] Васильев А. Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Л., 1976; [3] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983. *С. А. Федотов.*

ГАУССОВА КРИВИЗНА – величина, характеризующая отклонение поверхности от плоскости; она выражается только через коэффициенты *первой квадратичной формы*:

$$k=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix}E & E_u & E_v\\ F & F_u & F_v\\ G & G_u & G_v\end{vmatrix}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v-\left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\}.$$

М. И. Войцеховский.

ГАУССОВО СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ – *случайная функция* $\{\xi_t, t\in T\}$, определенная на ν-мерной решетке $T=\mathbb{Z}^\nu$ или в ν-мерном пространстве $T=\mathbb{R}^\nu$, принимающая вещественные значения и такая, что все ее конечномерные распределения гауссовы. Подробнее:

1) $T=\mathbb{Z}^\nu$. В этом случае Г. с. п. $\{\xi_t, t\in\mathbb{Z}^\nu\}$ задается средним $\langle\xi_t\rangle=a_t$ и матрицей ковариаций $\langle\xi_{t_1},\xi_{t_2}\rangle-\langle\xi_{t_1}\rangle\langle\xi_{t_2}\rangle=b_{t_1t_2}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает среднее по распределению поля. При этом для любого конечного подмножества $\Lambda=\{t_1, ..., t_n\}\subset\mathbb{Z}^\nu$ плотность совместного распределения случайных величин $\{\xi_{t_i}=\xi_i, i=1, ..., n\}$ имеет вид:

$$p(x_1,\dots,x_n)=\frac{(\det A_\Lambda)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}^{(\Lambda)}(x_i-a_i)(x_j-a_j)\right\},\quad(1)$$

где

$$A_\Lambda=\{a_{ij}^{(\Lambda)}\}=(B_\Lambda)^{-1},$$

$$B_\Lambda=\{b_{ij}\},\ i,j=1,\dots,n,$$

$$b_{ij}=b_{t_it_j},\ a_i=a_{t_i}.$$

2) $T=\mathbb{R}^\nu$. В этом случае Г. с. п. определяется аналогичным образом с помощью своего среднего $\{a_t,\ t\in\mathbb{R}^\nu\}$ и ковариационного ядра $\{b_{t_1t_2},\ t_1,\ t_2\in\mathbb{R}^\nu\}$. В случае непрерывного пространства часто возникает (особенно в применениях к квантовой теории поля) более общий класс Г. с. п.– так наз. обобщенные гауссовы поля. Они определяются как гауссовы случайные функции, то есть наборы случайных величин $\{\xi_\varphi,\ \varphi\in D\}$, помеченных элементами нек-рого пространства D «основных» функций на $\mathbb{R}^\nu$ (чаще всего бесконечно гладких и быстро убывающих на бесконечности функций на $\mathbb{R}^\nu$), так что для любого конечного линейно независимого набора таких функций $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ совместная плотность величин $\{\xi_i=\xi_{\varphi_i},\ i=1, ..., n\}$ имеет вид (1).

Типичными реализациями обобщенных полей являются уже не обычные, а обобщенные функции на $\mathbb{R}^\nu$. Наиболее известные гауссовы обобщенные случайные поля с равными нулю средними и корреляционными матрицами $\|b_{ij}\|$:

белый шум

$$b_{\varphi_1\varphi_2}=\int_{\mathbb{R}^\nu}\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx$$

и нельсоновское поле

$$b_{\varphi_1\varphi_2}=\int_{\mathbb{R}^\nu}\int_{\mathbb{R}^\nu}\varphi_1(x_1)(-\Delta+m^2)(x_1,x_2)\varphi_2(x_2)\,dx_1dx_2;$$

здесь $(-\Delta+m^2)\,(x_1, x_2)$ – функция Грина (фундаментальное решение) дифференциального оператора $-\Delta+m^2$, $m>0$.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [2] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976. *Р. А. Минлос.*

ГАУССОВСКИЙ ПРОЦЕСС – действительный *случайный процесс* $\xi=\xi(t)$, $t\in T$, любые конечномерные распределения которого являются гауссовскими, то есть характеристические функции совместных распределений вероятностей случайных величин $\xi(t_1)$, ..., $\xi(t_n)$ при любых t_1, ..., $t_n\in T$ имеют вид:

$$\varphi_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n)=$$

$$=\exp\left\{i\sum_{k=1}^n A(t_k)u_k-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n B(t_k,t_j)u_ku_j\right\},$$

где $A(t)=\mathsf{E}\xi(t)$ – математическое ожидание и

$$B(t,s)=\mathsf{E}[\xi(t)-A(t)][\xi(s)-A(s)]$$

– корреляционная функция. Распределение вероятностей Г. п. $\xi=\xi(t)$ полностью задается его математич. ожиданием $A(t)$ и корреляционной функцией $B(t, s)$, $s,\ t\in T$. Для любой функции $A(t)$ и любой положительно определенной функции $B(t, s)$ существует Г. п. $\xi(t)$, у к-рого среднее значение и корреляционная функция суть именно $A(t)$ и $B(t, s)$. Многомерный случайный процесс с векторными значениями

$$\xi(t)=\{\xi_1(t), ..., \xi_m(t)\}$$

называется гауссовским, если гауссовскими являются совместные распределения вероятностей любых величин

$$\xi_{i_1}(t_1), ..., \xi_{i_n}(t_n).$$

Комплексным Г. п. $\xi=\xi(t)$, $t\in T$, называется случайный процесс вида

$$\xi(t)=\xi_1(t)+i\xi_2(t),$$

где действительные $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ в совокупности образуют двумерный Г. п. Иногда, говоря о комплексном Г. п. $\xi(t)=\xi_1(t)+i\xi_2(t)$, считают, что выполняется одно дополнительное условие:

$$\mathsf{E}\,\xi(s)\,\xi(t)=A(s)A(t),$$

где

$$A(t)=\mathsf{E}\xi(t).$$

Это условие вводится для того, чтобы сохранить то свойство обычных гауссовских случайных величин, согласно к-рому некоррелированность равносильна независимости; его можно переписать следующим образом:

$$\mathsf{E}[\xi_1(t)-A_1(t)][\xi_1(s)-A_1(s)]=$$

$$=\mathsf{E}[\xi_2(t)-A_2(t)][\xi_2(s)-A_2(s)]=\frac{1}{2}\operatorname{Re}B(t,s),$$

$$\mathsf{E}[\xi_1(t)-A_1(t)][\xi_2(s)-A_2(s)]=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}B(t,s),$$

где

$$B(t,s)=\mathsf{E}[\xi(t)-A(t)]\overline{[\xi(s)-A(s)]}$$

– корреляционная функция процесса $\xi(t)$ и

$$A_1(t)=\mathsf{E}\xi_1(t),\ A_2(t)=\mathsf{E}\xi_2(t).$$

Ю. А. Розанов.

ГАУССОВСКОЕ ПОЛЕ – см. *Случайное поле.*

ГАУССОВЫ КООРДИНАТЫ – см. *Координаты.*

ГЕГЕНБАУЭРА МНОГОЧЛЕНЫ – см. *Ортогональные многочлены, Ультрасферические многочлены.*

ГЕЙЗЕНБЕРГА АЛГЕБРА – см. *Гейзенберга представление.*

ГЕЙЗЕНБЕРГА ГРУППА – $(2n+1)$-мерное действительное *векторное пространство* с координатами a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n, c и с операцией умножения:

$$(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n, c)(a_1', ..., a_n', b_1', ..., b_n', c')=$$

$$=(a_1+a_1', ..., a_n+a_n', b_1+b_1', ..., b_n+b_n', c+c'+\sum a_ib_i').$$

Точные унитарные представления Г. г. нумеруются одним действительным параметром λ и реализуются в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ измеримых функций на $\mathbb{R}^n$ с интегрируемым квадратом по формуле

$$f(x_1, ..., x_n)\to f(x_1+a_1, ..., x_n+a_n)\ e^{i\lambda\ (\sum\ b_ix_i+c)}.$$

Алгебра Ли Г. г.– это алгебра с базисом $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n, z$ и соотношениями коммутации

$$[p_i,\ p_j]=[q_i,\ q_j]=[p_i,\ z]=0,$$

$$[p_i,q_j]=\delta_{ij}z.$$

Ю. А. Неретин.

ГЕЙЗЕНБЕРГА МОДЕЛЬ – математическая модель магнито-упорядоченных кристаллических веществ (главным образом ферромагнетиков), основанная на применении гамильтониана обменного взаимодействия:

$$\mathfrak{H}=-2\sum_{i>j}J_{ij}S_iS_j,\qquad(1)$$

где суммирование ведется по всем парам различных $\{i, j\}$ узлов кристалла, в которых находятся ионы со спинами $\boldsymbol{S}_i$ и $\boldsymbol{S}_j$, J_{ij} – константы, характеризующие обменное взаимодействие между этими ионами.

После того как В. Гайтлер и Ф. Лондон (W. Heitler, F. London, 1927) на примере молекулы водорода продемонстрировали зависимость энергии взаимодействия от взаимной ориентации спинов электронов, В. Гейзенберг (W. Heisenberg, 1927) применил их результаты для описания ферромагнетизма модельного непроводящего кристалла, состоящего из атомов с одним *s*-электроном вне замкнутых электронных оболочек. Зависимость энергии двухэлектронной системы от ориентации спинов является по своей природе квантовомеханич. эффектом, к-рый заключается в следующем. *Паули принцип* не допускает состояний, в к-рых в данный момент времени в данном месте могут находиться два электрона с одинаково направленными спинами, но допускает такие состояния с антипараллельными спинами. Поэтому распределение заряда, а значит, и электростатич. энергия системы зависят от взаимной ориентации спинов. Разность энергий, отвечающих этим состояниям, определяет обменную энергию. П. Дирак (P. Dirac, 1929) показал, что электростатическое по природе обменное взаимодействие можно описать гамильтонианом, содержащим скалярные произведения спинов взаимодействующих электронов, то есть $-2J(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)$, как если бы между спинами существовало взаимодействие. Дж. Ван Флек (J. H. Van

Vleck, 1932) обобщил дираковскую форму записи обменного гамильтониана на случай многоэлектронных атомов в молекулах и кристаллах, в основном состоянии к-рых орбитальный момент $L=0$. Поэтому гамильтониан (1) иногда называют гамильтонианом Гейзенберга – Дирака – Ван Флека. Хотя достаточно строго обосновать выражение (1) удается лишь для нек-рых частных случаев и имеются определенные теоретич. ограничения на его применимость, практически оно «работает» хорошо: с его помощью удалось продвинуться в решении многих проблем магнетизма, напр. рассчитать температурную зависимость теплоемкости и самопроизвольной намагниченности ферромагнетиков, объяснить высокие значения температур Кюри, спектр *спиновых волн* и др.

В современной теории магнетизма обменный гамильтониан – это спиновый гамильтониан, дающий приближенное описание той части энергетич. спектра магнитоупорядоченного кристалла, к-рая непосредственно примыкает к основному состоянию. Важно, что обменный гамильтониан (1) позволяет работать с волновыми функциями в виде произведений одночастичных спиновых функций, относящихся к различным узлам кристалла, вместо антисимметричных волновых функций в виде детерминантов Слэтера. При этом обеспечивается равенство матричных элементов оператора межэлектронного взаимодействия на волновых функциях (детерминантов Слэтера) и матричных элементов оператора (1) на спиновых волновых функциях.

Различают прямое и непрямое обменные взаимодействия. В случае прямого обмена константы J_{ij} определяются непосредственным перекрытием волновых функций взаимодействующих ионов. Непрямой обмен реализуется за счет какой-либо промежуточной подсистемы (напр., электронов проводимости) и проявляется в более высоких порядках теории возмущений по сравнению с прямым обменом. Непрямой обмен между локализованными спинами через электроны проводимости называется косвенным обменным взаимодействием, или РККИ-взаимодействием (взаимодействием Рудермана – Киттела – Касуи – Иосиды). Основной формой обменного взаимодействия в непроводящих кристаллах является взаимодействие между магнитными ионами через промежуточные немагнитные ионы (так наз. сверхобменное взаимодействие).

Значения обменных констант в (1) быстро уменьшаются с увеличением расстояния между взаимодействующими ионами. Поэтому в (1) часто ограничиваются учетом взаимодействия только ближайших соседей. Знак обменной константы в этом случае определяет тип магнитного упорядочения в кристалле: при $J>0$ реализуется ферромагнитное упорядочение, при $J<0$ – антиферромагнитное. При учете обменного взаимодействия с ионами, следующими за ближайшими, знаки обменных констант могут чередоваться при переходе от ближайших соседей к следующим и т. д. В этом случае в кристалле могут существовать более сложные типы магнитного упорядочения: неколлинеарное, геликоидальное и т. д.

Гамильтониан обменного взаимодействия (1) изотропен, поэтому он не определяет направление намагниченности в ферромагнетике. Направление определяется магнитной анизотропией, к-рая обусловлена более слабыми релятивистскими взаимодействиями (спин-орбитальным и дипольдипольным). Аналогично обстоит дело в антиферромагнетике с ориентацией вектора антиферромагнетизма, в ферромагнетике – с ориентацией намагниченностей подрешеток и т. д.

Обменные константы J_{ij} определяют температуру T_C, при к-рой возникает магнитное упорядочение кристалла. Для ферромагнетика при учете в гамильтониане (1) взаимодействия только ближайших соседних ионов и в приближении молекулярного поля температура T_C и обменная константа J связаны соотношением

$$J=3kT_C/2zS(S+1), \qquad (2)$$

где z – число ближайших соседей, S – спин иона. Согласно расчету по формуле (2), для железа ($S=1$) при температуре $T_C=1043\text{K}$ $J=1{,}19\cdot10^{-2}$ эВ. Более точные теории дают несколько бóльшие значения обменных констант (на 30–40%).

Поскольку Г. м. приближенно описывает энергетич. спектр магнетика, наряду с этой моделью изучают модели с другой формой обмена (анизотропная Г. м., *Изинга модель*, *XY*-модель и др.). Принципиальное значение имеет антисимметричное обменное взаимодействие Дзялошинского, к-рое в простейшем случае описывается выражением $(\boldsymbol{D}[\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2])$. Все анизотропные и антисимметричные поправки к гамильтониану (1) обусловлены спин-орбитальным взаимодействием. Для ионов, у к-рых в основном состоянии орбитальный момент $L\neq0$, используют обменный гамильтониан в форме (1), но параметры J_{ij} в нем заменяются функциями от операторов орбитальных моментов взаимодействующих ионов (Дж. Ван Флек, 1962). В случае многоэлектронных ионов учитывают также дополнительные негейзенберговские слагаемые в (1) вида $A(\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j)^2$, $B(\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j)^3$, ..., описывающие одновременное участие в обмене трех, четырех и т. д. электронов.

Лит.: [1] Маттис Д., Теория магнетизма, пер. с англ., М., 1967; [2] Вонсовский С. В., Магнетизм, М., 1971; [3] Уайт Р., Квантовая теория магнетизма, пер. с англ., 2 изд., М., 1985.

А. К. Звездин.

ГЕЙЗЕНБЕРГА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – 1) в квантовой механике представление (картина) Гейзенберга – схема описания динамики, являющаяся аналогом классической картины Гамильтона. В Г. п. *состояния* (волновые функции) не зависят от времени, а *наблюдаемые* изменяются в соответствии с уравнением Гейзенберга

$$i\hbar\frac{d}{dt}A(t)=[A(t),H],\quad A(t)|_{t=0}=A,\quad [A,B]\div AB-BA, \qquad (1)$$

определяющим однопараметрич. семейство автоморфизмов алгебры наблюдаемых (здесь H – самосопряженный гамильтониан). Уравнение (1) имеет решение

$$A(t)=U^{-1}(t)\,AU(t),$$

где $U(t)=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}Ht\right\}$ – унитарный оператор эволюции. Г. п. унитарно эквивалентно *Шредингера представлению*, а значит они содержат одну и ту же физич. информацию. Связь этих представлений осуществляется оператором $U(t)$. Если $\psi(x)$, $A(t)$ – волновая функция и наблюдаемая в Г. п., то в представлении Шредингера им соответствуют

$$\psi_{\text{Ш}}(x,\,t)=U(t)\,\psi(x),\ A_{\text{Ш}}=A=U(t)\,A(t)\,U^{-1}(t).$$

В начальный момент $t=0$ векторы состояния и наблюдаемые в обоих представлениях совпадают. Г. п. эквивалентно также *взаимодействия представлению*. В Г. п. наблюдаемые, коммутирующие с H (а значит и сам H), не меняются со временем, и называются квантовыми интегралами движения. Зависимость от времени среднего значения наблюдаемой $A(t)$ в смешанном состоянии ω определяется формулой $\langle A(t),\omega\rangle=\mathrm{Tr}\,(A(t),\rho)$, где ρ – оператор (матрица) плотности, или формулой $\langle A(t),\omega\rangle=\langle\psi,A(t),\psi\rangle$ для чистого состояния, описываемого кет-вектором $|\psi\rangle$. В случае, когда наблюдаемая A, будучи функцией фундаментальных переменных, в представлении Шредингера имеет явную зависимость от времени, в правой части уравнения (1) появится дополнительное слагаемое $i\hbar\partial_t A$. Г. п. возникло в матричной механике Гейзенберга и особенно удобно при обсуждении классич. аналогий.

2) В теории представлений перестановочных соотношений представление Гейзенберга – любая реализация канонических коммутационных соотношений

$$\left.\begin{gathered}\left[Q_j,P_k\right]=i\hbar\delta_{jk},\ \left[Q_j,Q_k\right]=0,\ \left[P_j,P_k\right]=0,\\ i,j=1,\ldots,d,\ \ d\in\mathbb{N},\end{gathered}\right\} \qquad (2)$$

самосопряженными операторами на гильбертовом пространстве H; здесь Q_j – обобщенные координаты, P_j – ка-

нонически сопряженные импульсы. Канонич. коммутационные соотношения не могут быть удовлетворены ограниченными операторами, так что (2) выполняется не на всем H, а только на плотной в H области D. С теоретико-групповой точки зрения канонич. коммутационные соотношения определяют алгебру Ли нильпотентной группы Ли. Эту алгебру называют алгеброй Гейзенберга, а группу – группой Гейзенберга – Вейля. Поскольку теория представлений алгебр Ли богаче теории представлений групп Ли, то существуют неэкспоненцируемые представления канонич. коммутационных соотношений, унитарно неэквивалентные стандартному представлению Шредингера. Теорема Неймана единственности представления Шредингера относится только к представлениям вейлевской формы канонич. коммутационных соотношений, то есть к представлениям группы Гейзенберга–Вейля. Аналогичные теоремы, относящиеся к гейзенберговским канонич. коммутационным соотношениям, содержат довольно сильные дополнительные условия. Напр., теорема Реллиха–Диксмье требует существенной самосопряженности на D оператора P^2+Q^2 (в случае $d=1$). Пример Г. п., не являющегося представлением Шредингера, дает представление, соответствующее свободной квантовой частице на отрезке $[a, b]\subset\mathbb{R}$ с периодич. граничными условиями

$$\psi(b)=\psi(a):(Q\psi)(x)=x\psi(x),\ \ (P,\psi)(x)=-i\hbar\frac{d}{dx}\psi.$$

В этом представлении оператор Q ограничен и имеет дискретный спектр, а вейлевская форма канонич. коммутационных соотношений не выполнена. Г. п., не эквивалентное представлению Шредингера, можно использовать при построении самосопряженного оператора фазы Ф канонически сопряженного оператору числа частиц N (см. [2], [3]). В этом случае соотношение $[N, \Phi]=i\hbar\mathbb{1}$ выполнено на плотной области, не содержащей собственных состояний оператора N, что позволяет избежать известных затруднений, связанных с определением Ф (см. [4]).

Лит.: [1] Putnam C. R., Commutation properties of Hilbert space operators and related topics, B., 1967; [2] Garrison J. C., Wong J., «J. Math. Phys.», 1970, v. 11, № 8, p. 2243–51; [3] Алимов А. Л., Дамаскинский Е. В., «Теоретич. и математич. физика», 1979, т. 38, № 1, с. 58–70; [4] Каррузерс П., Ниетто М., в сб.: Когерентные состояния в квантовой теории, пер. с англ., М., 1972, с. 76–146.

Е. В. Дамаскинский.

ГЕЙЗЕНБЕРГА УРАВНЕНИЕ; асимптотические решения – решения уравнения Гейзенберга

$$\frac{\partial\hat f}{\partial t}=\frac{i}{n}[\hat H,\hat f]$$

для квантовой наблюдаемой $\hat f$ в системе с гамильтонианом $\hat H$, которые могут быть построены для уравнения Гейзенберга, полученного квантованием соответствующего *Лиувилля уравнения*

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\{H, f\}.$$

Для квантования Вейля гамильтоновой механики в $\mathbb{R}^{2n}$ асимптотич. решения в представлении символов Вейля имеют вид (см., напр., [1]):

$$f(t,h,p,q)=\sum_{k=0}^{\infty}h^k f_k(t,p,q),\quad p,q\in\mathbb{R}^n,$$

f_k – суть решения неоднородных уравнений Лиувилля

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}=\{H,f_k\}+R_k,$$

где $R_0=R_1=0$, $R_k=R_k(H)$, $k=2, 3, \ldots$. Способ получения асимптотич. решений Г. у. предложен в [2], достаточно полное обоснование см. в [3].

Лит.: [1] Березин Ф. А., Шубин М. А., Уравнение Шредингера, М., 1983; [2] Groenwold H. J., «Physica», 1946, v. 12, p. 405–60; [3] Антонец М. А., «Теоретич. и математич. физика», 1979, т. 38, № 3, с. 331–44.

М. А. Антонец.

ГЕЙЗЕНБЕРГА ФОРМУЛА – см. *Спектр турбулентности.*

ГЕЙЗЕНБЕРГА–ВЕЙЛЯ АЛГЕБРА – см. *Гейзенберга представление.*

ГЕЙЗЕНБЕРГА–ЭЙЛЕРА ЛАГРАНЖИАН – см. *Эффективный лагранжиан.*

ГЕЛЛ-МАНА МАТРИЦЫ – унитарные (3×3)-матрицы λ_a, удовлетворяющие условию

$$\mathrm{Sp}\,(\lambda_a\lambda_b)=2\delta_{ab},\ \mathrm{Sp}\,\lambda_a=0,$$

$a, b=1, 2, \ldots, 8$, δ_{ab} – символ Кронекера. Явный вид матриц λ_a следующий:

$$\lambda_1=\begin{Vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad \lambda_2=\begin{Vmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad \lambda_3=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{Vmatrix},$$

$$\lambda_4=\begin{Vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{Vmatrix},\quad \lambda_5=\begin{Vmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{Vmatrix},\quad \lambda_6=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{Vmatrix},$$

$$\lambda_7=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{Vmatrix},\quad \lambda_8=\begin{Vmatrix}1/\sqrt3&0&0\\0&1/\sqrt3&0\\0&0&-2/\sqrt3\end{Vmatrix}.$$

Матрицы λ_a введены М. Гелл-Маном (M. Gell-Mann) в 1961 как непосредственное обобщение *Паули матриц* при построении $SU(3)$-симметричной теории элементарных частиц. Матрицы $1/2\ \lambda_a$ удовлетворяют коммутационным соотношениям *генераторов* группы $SU(3)$:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2},\frac{\lambda_b}{2}\right]=\frac{i}{2}f_{abc}\lambda_c,$$

где f_{abc}, $a, b, c=1, 2, \ldots, 8$, полностью антисимметричны относительно перестановок своих индексов и называются f-символами или структурными константами группы $SU(3)$. Вычисление дает для неисчезающих компонент f-символов:

$$f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=-f_{156}=-f_{367}=1/2;\ f_{123}=1.$$

Часто встречается также термин «d-символы», к-рые определяются через антикоммутатор двух матриц λ_a:

$$\{\lambda_a,\lambda_b\}=\frac{4}{3}\delta_{ab}I+2d_{abc},\ a, b, c=1, 2, \ldots, 8,$$

где I – единичная (3×3)-матрица. Величины d_{abc} полностью симметричны относительно перестановок своих индексов.

В. И. Захаров.

ГЕЛЛ-МАНА – ЛОУ УРАВНЕНИЯ – см. *Ренормализационная группа*; дифференциальные уравнения.

ГЕЛЬДЕРА НЕРАВЕНСТВО: в банаховом пространстве $L^p(X, d\mu)$ измеримых функций с нормой

$$\|f\|_p=\left(\int_X|f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}<\infty$$

для любых функций $f\in L^p(X, d\mu)$, $g\in L^q(X, d\mu)$ и чисел p, q, r, удовлетворяющих условиям $p, q, r\geqslant1$ и $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}$, имеет место $fg\in L^r(X, d\mu)$ с выполнением неравенства

$$\|fg\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q.$$

Лит.: [1] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 1, пер. с англ., М., 1977.

В. Н. Нескоромный.

ГЕЛЬДЕРА ПРИНЦИП – см. *Переменного действия принцип.*

ГЕЛЬМГОЛЬЦА УРАВНЕНИЕ – дифференциальное уравнение

$$\Delta u+\lambda u=0,$$

где Δ – *Лапласа оператор*, λ – постоянная; при $\lambda=0$ Г. у. переходит в *Лапласа уравнение*. Г. у. можно получить из *волнового уравнения*, если зависимость от времени описывается функцией $\exp(i\omega t)$, в этом случае $\lambda=\omega^2c^{-2}$ (c – скорость распространения волн). Названо по имени Г. Гельмгольца (H. Helmholtz), изучавшего это уравнение в 1860.

Для Г. у. в ограниченной области рассматривают обычные краевые задачи (Дирихле, Неймана и др.). Значения λ,

для к-рых существует отличное от нуля решение однородного Г. у., называются собственными значениями оператора Лапласа. Для таких значений λ решение краевой задачи не единственно. При помощи функции Грина краевую задачу можно свести к интегральному уравнению. В случае неограниченной области убывающее на бесконечности решение Г. у. не является единственным при $\lambda > 0$. В этом случае для выделения единственного решения ставят дополнительные условия.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981. *В. И. Алхимов.*

ГЕЛЬМГОЛЬЦА ЭНЕРГИЯ – см. *Гиббса распределения, Термодинамические функции.*

ГЕЛЬМГОЛЬЦА–КИРХГОФА ЗАДАЧА с неизвестной границей – задача теории струй, заключающаяся в отыскании потока идеальной жидкости с заданной скоростью на бесконечности, обтекающего пластину Γ_2 при условии, что с концов пластины сходят струи γ_1 и γ_2, давление на которых постоянно. Точнее, в области D, ограниченной кривыми $\Gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$, требуется отыскать *комплексный потенциал* f течения такой, что на известной части границы, являющейся линией тока

$$\operatorname{Im} f|_{\Gamma_2} = 0, \tag{1}$$

а на участках неизвестной границы, также являющейся линией тока, кроме условия (1) дополнительно выполняется условие постоянства давления:

$$|f'|_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = v_\infty = \text{const}. \tag{2}$$

Г.– К. з. была решена Г. Гельмгольцем [1], метод к-рого существенно развил Г. Кирхгоф [2]–[3].

Лит.: [1] Helmholtz H., «Monatsber. Königl. Akad. Wiss.», 1868, S. 215–228; [2] Kirchhoff G., «J. reine und angew. Math.», 1869, Bd 70, S. 289–298; [3] Кирхгоф Г., Механика, пер. с нем., М., 1962; [4] Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости, 2 изд., М., 1979. *Ю. Е. Хохлов.*

ГЕЛЬФАНДА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – отображение, сопоставляющее элементу a коммутативной *банаховой алгебры* A функцию $\hat{a}$ на пространстве X максимальных идеалов алгебры A. Существует взаимно однозначное соответствие между точками пространства X и гомоморфизмами алгебры A в поле комплексных чисел. Если произвести соответствующее отождествление, то Г. п. осуществляется по формуле $\hat{a}(x) = x(a)$. В частном случае *групповой алгебры* локально компактной абелевой группы (со сверткой в качестве умножения на алгебре) Г. п. совпадает с преобразованием Фурье. Г. п. введено И. М. Гельфандом (1941). *Е. А. Горин.*

ГЕЛЬФАНДА – ЛЕРЕ ФОРМА – дифференциальная форма $\omega_1 = \omega/\partial f$ на многообразии X_t уровня t функции f на многообразии X_t, определяемая по дифференциальной форме ω на X следующим правилом:

$$\omega = df \wedge \omega_1.$$

С. В. Чмутов.

ГЕЛЬФАНДА–МАЗУРА ТЕОРЕМА – см. *Спектр* элемента банаховой алгебры.

ГЕЛЬФАНДА – ЦЕТЛИНА БАЗИС – базис в пространстве неприводимого *представления* T группы $U(n)$ всех унитарных матриц порядка n. Такие представления нумеруются старшими весами, то есть наборами $m_1, \ldots, m_n$ целых чисел. А именно, пусть T – представление $U(n)$. Обозначим через $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ унитарную матрицу, у к-рой по главной диагонали стоят числа $d_1, \ldots, d_n$, а остальные матричные элементы – нули. Рассмотрим в пространстве представления T весовой вектор v, то есть вектор, собственный относительно всех операторов вида

$$T_{\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)}.$$

Тогда

$$T_{\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)} v = d_1^{l_1} \ldots d_n^{l_n} v,$$

где $l_1, \ldots, l_n$ – набор целых чисел; такие наборы называются **весами** представления. Введем на множестве всех весов представления T лексикографич. (= алфавитный) порядок, а именно мы скажем, что вес $l_1, \ldots, l_n$ старше веса $l'_1, \ldots, l'_n$, если выполнена хотя бы одна из следующих систем неравенств:

$$1)\ l_1 > l'_1,$$

$$2)\ l_1 = l'_1,\ l_2 > l'_2$$

$$3)\ l_1 = l'_1,\ l_2 = l'_2,\ l_3 > l'_3$$

и т. д. Тогда старший вес $m_1, \ldots, m_n$ представления T – это старший из весов представления в описанном выше смысле.

Итак, пусть T – представление $U(n)$ со старшим весом $m_1^{(n)}, \ldots, m_n^{(n)}$. Рассмотрим в $U(n)$ подгруппу $U(n-1)$, состоящую из всех матриц, оставляющих на месте последний базисный вектор. Оказывается, что ограничение представления T на подгруппу $U(n-1)$ раскладывается в однократную прямую сумму представлений группы $U(n-1)$ со старшими весами $m_1^{(n-1)}, \ldots, m_{n-1}^{(n-1)}$, удовлетворяющими условию

$$m_1^{(n)} \geqslant m_1^{(n-1)} \geqslant m_2^{(n)} \geqslant m_2^{(n-1)} \geqslant m_3^{(n)} \geqslant \ldots \geqslant m_n^{(n)}.$$

Ограничим каждое из полученных представлений $U(n-1)$ на $U(n-2)$, потом каждое из полученных представлений $U(n-2)$ ограничим на $U(n-3)$ и т. д. Продолжая этот процесс вплоть до группы $U(1)$, мы разложим пространство представления T в прямую сумму одномерных подпространств, выбирая в каждом из этих подпространств по вектору, мы получаем базис в пространстве представления T, он и называется базисом Гельфанда – Цетлина (предложен в 1950). В этом базисе удается записать явные формулы (формулы Гельфанда – Цетлина) для нек-рых генераторов алгебры Ли (а именно, для матриц E_{ij}, где $i-j = 0, \pm 1$, а через E_{ij} обозначена матрица, у к-рой на месте ij стоит единица, а остальные элементы – нули), а также для нек-рых элементов группы. Существуют также явные формулы для операторов, переводящих вектор старшего веса для $U(n)$ в векторы старшего веса для $U(n-1)$, $U(n-2)$, ...

Аналогичный метод применим для построения базисов в конечномерных представлениях групп $O(n, \mathbb{C})$ в нек-рых бесконечномерных представлениях. Для серии групп $Sp(2n, \mathbb{C})$ изложенная схема непригодна, однако аналог Г.–Ц. б. существует.

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Штерн А. И., Представления групп Ли, М., 1983. *Ю. А. Неретин.*

ГЕНЕРАТОР алгебры Ли – образующий элемент алгебры Ли, то есть любой ненулевой элемент – поскольку любой ненулевой элемент может быть включен в некоторую систему образующих алгебры.

См. также *Суперсимметрия.* *Ю. А. Неретин.*

ГЕНЕРАТОР группы, инфинитезимальный оператор, – точнее, генератор представления $T_g = T(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ группы Ли G, параметризованной в окрестности ее единичного элемента e каноническими параметрами φ^α, – оператор

$$I_\alpha = \partial T / \partial \varphi|_{\varphi^\alpha = 0}.$$

Канонич. параметризация всегда существует и означает, что $g(0, \ldots, 0) = e$, а элементы G вида $g(0, \ldots, \varphi^\alpha, \ldots 0)$ образуют окрестность однопараметрич. подгруппы группы G. Г. группы I_α порождают *Ли алгебру* представления T_g и удовлетворяют соотношениям

$$[I_\alpha, I_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma I_\gamma,$$

где $C_{\alpha\beta}^\gamma$ – структурные константы алгебры. Если представление T_g унитарно, Г. группы I_α антиэрмитовы; в физике принято вводить эрмитов базис в алгебре Ли:

$$L_\alpha = iI_\alpha.$$

В квантовой теории физич. величинам соответствуют эрмитовы операторы L_α. Напр., для группы вращений $O(3)$ параметры φ^α соответствуют углам поворотов вокруг осей x, y, z, Г. группы – компонентам углового момента M_α, а соотношения алгебры Ли – перестановочным соотношениям для M_α:

$$[M_\alpha, M_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma$$

В классич. механике, где алгебру Ли порождают *Пуассона скобки*, Г. группы реализуются как функции канонич. переменных. Важным примером является группа *калибровочных преобразований*, для к-рой Г. группы – связи первого рода (см. *Гамильтонов формализм*).

См. также *Вращений группа*.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969, гл. 2, доп. А; [2] Румер Ю. Б., Фет А. И., Теория унитарной симметрии, М., 1970; [3] Эллиот Дж., Добер П., Симметрия в физике, пер. с англ., т. 1–2, М., 1983. *В. П. Павлов.*

ГЕНЕРАТОР полугруппы – см. *Полугруппа.*

ГЕНЕРАТОР представления – см. *Генератор* группы.

ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА турбулентностью – процесс генерации звуковых волн за счет нелинейных взаимодействий турбулентных пульсаций скорости u_i, $i = 1, 2, 3$, самих с собой. Пульсации давления P в возникающих при этом звуковых волнах в первом приближении могут быть определены из уравнения

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta P = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

где a_0 – скорость звука, отвечающая средним значениям плотности и давления среды (см. [1], [2]). Г. з. часто приводит к возникновению резких шумов большой интенсивности при работе инженерных устройств, порождающих быстрые турбулентные струи или другие высокоскоростные турбулентные течения; борьба с такими шумами является важной технич. задачей.

Лит.: [1] Lighthill M. J., «Proc. Roy. Soc., Ser. A», 1954, v. 222, № 1148, p. 1–32; [2] его же, там же, 1962, v. 267, № 1329, p. 147–82; [3] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967, § 20.3; [4] Акустика турбулентных потоков, М., 1983. *А. М. Яглом.*

ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ турбулентностью – процесс усиления или поддержания поля случайными движениями электропроводящей жидкости или газа. Наглядное представление об этом дает следующая модель («восьмерка» Зельдовича). Рассматривается начальное распределение поля в виде кольцеобразной петли магнитных линий длины L и площадью сечения S, так что магнитный поток через него равен HS, где H – напряженность поля. Пусть движения растягивают петлю вдвое с сохранением объема ($L \to 2L$, $S \to S/2$) и магнитного потока, а затем сворачивают ее в восьмерку, накладывают одно кольцо восьмерки на другое и сливают их. В результате получается петля той же длины и сечения, что и исходная, но с удвоенным магнитным потоком и полем. При n-кратном повторении процедуры поток и поле растут как 2^n. Модель может быть математически формализована, напр. в форме двумерного преобразования (с разрывом) типа известного «преобразования пекаря».

Способно ли заданное турбулентное течение (случайное распределение скорости) неограниченно долго усиливать или поддерживать магнитное поле? Известно, что для скалярной величины (температура, дым, примесь в турбулентном потоке) ответ отрицателен в силу принципа максимума, речь может идти только о временном усилении скаляра. (Псевдо-) векторный характер магнитного поля дает возможность найти положительное решение проблемы. Методами теории случайных процессов доказано, что обновляющееся через конечное время случайное течение хорошо проводящей жидкости приводит к неограниченному экспоненциальному росту компактного начального распределения магнитного поля (без учета обратного влияния поля на движение). Скорость роста (старший показатель Ляпунова) поля, описываемого уравнением параболич. типа, но с коэффициентами, зависящими от времени, является своеобразным аналогом старшего собственного значения. Распределение генерируемого поля (аналог собственной функции) оказывается перемежаемым: на фоне слабо растущего поля имеются редкие, но интенсивные концентрации в виде магнитных жгутов.

Если турбулентность отрицательно неинвариантна благодаря средней спиральности (среднее значение от скалярного произведения скорости на вихрь отлично от нуля), то наряду с флуктуационным распределением она способна генерировать и среднее магнитное поле с гладким распределением.

Г. м. п. турбулентностью важна для объяснения происхождения магнитных полей планет, звезд, галактик, а также представляет интерес при конструировании крупных технич. установок с жидкометаллич. массами, напр. ядерных реакторов-размножителей.

Лит.: [1] Моффат Г. К., Возбуждение магнитного поля в проводящей среде, пер. с англ., М., 1980; [2] Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., «Успехи физич. наук», 1985, т. 145, с. 593–628. *А. А. Рузмайкин.*

ГЕНКИ – МИЗЕСА УСЛОВИЕ – см. *Пластичности математическая теория.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ, геодезическая,– геометрическое понятие, обобщающее понятие прямой (или отрезка прямой) евклидовой геометрии на случай пространств более общего вида. Так, Г. л. на поверхности – линии на поверхности, достаточно малые дуги к-рых являются на этой поверхности кратчайшими путями между их концами. На плоскости Г. л. суть прямые, на круговом цилиндре – винтовые линии, на сфере – большие круги. Не всякая дуга Г. л. является на поверхности кратчайшим путем. Напр., на сфере дуга большого круга, бóльшая полуокружности, не будет на этой сфере кратчайшей между своими концами.

Так как определение Г. л. связано только с измерениями на поверхности, они относятся к объектам внутренней геометрии поверхности. Понятие Г. л. широко применяется в теоретич. и практич. вопросах геодезии.

См. также *Риманова геометрия.* *М. И. Войцеховский.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК – *динамическая система* с непрерывным временем f^t на единичном касательном расслоении SM риманова многообразия M. Отображение f^t (t фиксировано) сопоставляет вектору $v \in SM$ вектор, получающийся при параллельном сдвиге v вдоль задаваемой им геодезической на расстояние t. Г. п. служат для описания движений по инерции на римановых многообразиях.

Я. Б. Песин.

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ – требование однозначности некоторых асимптотических разложений на геодезической. Пусть l – замкнутая геодезическая на римановом многообразии M, причем ограничены на бесконечности все решения соответствующего уравнения Якоби.

При выполнении нек-рых дополнительных условий можно построить асимптотич. разложения, формально удовлетворяющие уравнению для собственных функций оператора Лапласа на многообразии M и экспоненциально малые вне нек-рой окрестности l. Требование их однозначности на l и есть геодезическое квантование.

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972. *В. М. Бабич.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ механическая, голономная связь,– связь *голономной системы.* См. также *Связи механические.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА – см. *Статика.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЕДИНИЦЫ – единицы измерения, которые получаются, если положить скорость света и гравитационную постоянную равными единице. Масса и длина в Г. е. имеют размерность времени. Так, напр., масса Земли в Г. е. равна $1{,}5 \cdot 10^{-11}$ секунд, а ее радиус – $2{,}1 \cdot 10^{-2}$ секунд. Использование Г. е. особенно удобно в специальной

и общей теории относительности и в других релятивистских теориях. *А. Т. Ильичев.*

ГЕОМЕТРОДИНАМИКА – вариант *единой теории поля*, сводящей (не всегда последовательно) все физические объекты к геометрическим. Г.– чисто геометрич. описание гравитации, электромагнетизма, неквантованного заряда и долгоживущих частиц, как чисто классич. концентраций массы-энергии. В настоящее время Г. не является еще последовательно развитой теорией, многие части ее не имеют достаточного математич. обоснования.

Лит.: [1] Уилер Дж. А., Гравитация, нейтрино и Вселенная, пер. с англ., М., 1962; [2] его же, Предвидение Эйнштейна, пер. с англ., М., 1970. *М. И. Войцеховский.*

ГЕОМЕТРО-ОПТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – асимптотическое решение уравнений, описывающих волновой процесс, имеющее вид:

$$u \sim e^{-i\omega t + i\omega\tau(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(x)}{(-i\omega)^j}, \quad x = (x^1, x^2, x^3). \qquad (1)$$

Здесь u – функция, описывающая волновое поле, ω – частота или параметр, ей пропорциональный, $\omega \gg 1$, $u_j(x)$ – искомые функции. Существует ряд обобщений, аналогов и вариантов разложения (1), к-рые тоже называются Г.-о. п. Иногда под Г.-о. п. подразумевают главный член разложения (1).

Пусть волновой процесс описывается волновым уравнением с переменной скоростью

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt} - \Delta u = 0, \quad u = u(t, x), \qquad (2)$$

и ряд (1) удовлетворяет уравнению (2). Тогда должно выполняться уравнение эйконала

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^j} \right)^2 = (\nabla \tau)^2 = \frac{1}{c^2(x)} \qquad (3)$$

и рекуррентная система уравнений переноса:

$$2\nabla\tau\nabla u_j + u_j \Delta\tau = \Delta u_{j-1}, \; u_{-1} \equiv 0, \; j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Используя лучи, то есть экстремали интеграла Ферма

$$\int ds/c, \quad ds^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(dx^j\right)^2,$$

можно найти $\tau(x)$ и последовательно проинтегрировать уравнения (4).

По заданной разложением (1) падающей «волны», используя граничные условия на отражающей или преломляющей поверхности можно в виде (1) найти отраженную и преломленную «волны».

Г.-о. п. можно строить для уравнений Максвелла, упругости. В скалярном случае вместо (1) можно рассматривать выражение

$$\exp(-i\omega t + i\omega\tau(x) + V_0(x) - V_1/(-i\omega) + \ldots).$$

Вариантом Г.-о. п. является пространственно-временное разложение

$$u \sim e^{ip\theta(x,t)} \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,t) \Big/ (ip)^j, \quad p \gg 1. \qquad (5)$$

В таком виде можно представить волны, модулированные по амплитуде и частоте, волновые пакеты.

Ряды вида (1) или (5) с комплексными $\tau(x)$ позволяют описать так наз. гауссовы пучки, волны Рэлея, гауссовы пучки волн Рэлея. Используя более сложные разложения, чем (1) или (5), можно построить выражения для волны шепчущей галереи, Лява, в линейном приближении волны на поверхности тяжелой жидкости и т. д. Эти волны будут распространяться вдоль лучей, будет иметь смысл нек-рый аналог уравнений (3)–(4).

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е., Геометрическая теория дифракции, М., 1978; [3] Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И., Геометрическая оптика неоднородных сред, М., 1980; [4] Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А., Пространственно-временной метод. Линейные и нелинейные волны, Л., 1985. *В. М. Бабич.*

ГЕОСТРОФИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – статистический ансамбль вихрей и волн Россби – Блиновой (в земной атмосфере, Мировом океане, верхних слоях больших планет и Солнца) синоптических масштабов $L \gg H$ (H – толщина слоя), в которых горизонтальный градиент давления приблизительно уравновешивается силой Кориолиса, так что негидростатическая часть давления равна

$$p' \approx \rho f \psi,$$

где ψ – горизонтальная функция тока, f – параметр Кориолиса, ρ – плотность. Г. т. описывается уравнением сохранения потенциального вихря

$$A\psi + f$$

(A – аналог трехмерного лапласиана). *А. С. Монин.*

ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – *турбулентность* в природных течениях в земной атмосфере, Мировом океане, морях, реках, озерах и т. д., а при иногда практикуемом (и в случае Г. т. оправданном) расширительном применении термина «геофизическая» (в смысле «космофизическая») – также и на других планетах, в атмосфере и недрах Солнца, других звезд, космических газовых облаках и даже в течениях звезд в галактиках и галактик в Метагалактике, если их идеализировать как жидкости со своеобразными дальними (гравитационными) взаимодействиями между «частицами».

Для Г. т. специфично, во-первых, сильное влияние на нее стратификации и среды, то есть изменений ее плотности ρ по вертикали (направлению силы тяжести), в частности, специфична сжимаемость среды и, более того, ее бароклинность, то есть зависимость величины ρ не только от давления p, но и от других термодинамич. параметров. Точнее, нужно рассматривать потенциальную плотность

$$\rho_* = \rho - \int_{p_0}^{p} c^{-2}\, dp$$

(c – адиабатич. скорость звука), то есть плотность, адиабатически приведенную к стандартному давлению p_0 (на Земле обычно считается $p_0 = 1$ бар).

Локальной характеристикой стратификации служит

$$N^2(z) = -g\partial\rho_*/\rho_*\partial z,$$

где z – вертикальная координата, растущая вверх, а g – ускорение силы тяжести. Если $N^2 > 0$ (тогда N называется частотой Вяйсяля–Брента), то архимедова сила является возвращающей, то есть стратификация гидростатически устойчива, турбулентность должна тратить энергию на работу против архимедовых сил и поэтому развивается слабо, нередко концентрируясь лишь в отдельных узких слоях. При $N^2 < 0$ архимедова сила является ускоряющей, стратификация неустойчива, служит источником энергии турбулентной конвекции и турбулентность развивается бурно.

При наличии сдвига осредненной скорости течения $U(z)$ гидродинамич. неустойчивость усиливается и имеет место не только при $N^2(z) < 0$, но и при $N^2(z) > 0$, пока число Ричардсона

$$\mathrm{Ri} = N^2 |U'|^{-2}$$

не превосходит нек-рого критич. значения $\mathrm{Ri}_{кр} > 0$ (в идеальной жидкости $\mathrm{Ri}_{кр} = 1/4$). Его аналогом является динамическое число Ричардсона

$$\mathrm{Rf} = -gm(\tau_x U' + \tau_y V')^{-1},$$

где m – вертикальный турбулентный поток массы, τ_x и τ_y – компоненты турбулентного напряжения трения. При этом

$$\mathrm{Rf} = (K_\rho / K)\mathrm{Ri},$$

где K_ρ и K – коэффициенты турбулентного массообмена и вязкости.

Во-вторых, для Г. т. специфично влияние вращения Земли (или рассматриваемого космич. объекта), характери-

зуемого, прежде всего, параметром Кориолиса $f=2\omega_z$, где ω_z – вертикальная проекция вектора угловой скорости вращения. Локально это влияние сводится к образованию у поверхности Земли в атмосфере и океане турбулентных пограничных слоев (так наз. экмановских слоев) толщиной $h\sim u_*/f$ (где $u_*=(\tau/\rho)^{1/2}$ – скорость трения), в к-рых происходит поворот среднего течения с высотой или глубиной (спираль Экмана). Глобально же изменения f по меридиану $\beta=\partial f/\partial y$ создают меридиональную возвращающую силу, к-рая порождает волны Россби–Блиновой, образующие квазидвумерную макротурбулентность (циклоны и антициклоны в атмосфере, синоптические вихри в океане, вихри в атмосфере Юпитера и Сатурна, включая Большое Красное Пятно, и, по-видимому, так наз. гигантские конвективные ячейки на Солнце).

Описание Г. т. осуществляется методами *полуэмпирической теории турбулентности* в сочетании с гипотезами подобия. В качестве основных динамич. уравнений обычно используются осредненные уравнения гидромеханики (*Рейнольдса уравнения*), как правило, в приближении Буссинеска, и уравнение для турбулентной энергии B, в случае горизонтального и горизонтально-однородного осредненного течения имеющие вид

$$\frac{\partial B}{\partial t}=K|U'|^2(1-\mathrm{Rf})-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial z}K_1\frac{\partial B}{\partial z},$$

причем коэффициент турбулентной вязкости и диффузии турбулентной энергии K и K_1, а также скорость диссипации турбулентной энергии ε нередко берутся в виде K, $K\sim B^{1/2}L$ и $\varepsilon\sim B^{3/2}L^{-1}$, где L – масштаб турбулентности (А. Н. Колмогоров, 1942; А. С. Монин, 1950). Диффузия турбулентности, описываемая здесь последним слагаемым, нелинейна, что порождает специфич. эффекты; напр., при диффузии турбулентности в слой с нейтральной стратификацией B затухает по степенному закону, а в слой с устойчивой стратификацией турбулентность может проникнуть лишь на конечное расстояние.

Для турбулентности в геофизич. пограничных слоях обычно принимается модель СГО (стационарной горизонтально-однородной турбулентности, одноточечные статистич. характеристики к-рой могут зависеть только от z). При этом применяется теория подобия Монина–Обухова, согласно к-рой в простейшем случае приземного слоя атмосферы осредненные поля скорости и температуры и энергонесущие компоненты турбулентности полностью определяются тремя размерными параметрами – скоростью трения u_*, нормированным вертикальным турбулентным потоком тепла $q/c_p\rho$ (c_p – удельная теплоемкость) и параметром плавучести αg ($\alpha=\theta^{-1}$ – коэффициент термич. расширения, θ – температура). Масштабом скорости служит $u_*/\varkappa$ (где $\varkappa\approx 0{,}4$ – постоянная Кармана), а масштабы длины L и температуры θ_* берутся в виде

$$L=-u_*^3(\varkappa\alpha g)^{-1}(q/c_p\rho)^{-1},$$
$$\theta_*=-(\varkappa u_*)^{-1}(q/c_p\rho).$$

При использовании этих масштабов безразмерные одноточечные характеристики турбулентности оказываются универсальными функциями безразмерной вертикальной координаты $\zeta=z/L$, причем можно указать три асимптотики этих универсальных функций. Асимптотика при $\zeta\to 0$ получается как при $z\to 0$, так и при $q\to 0$, так что существует подслой динамич. турбулентности, в к-ром влияние стратификации не сказывается (и, напр., $U'=u_*/\varkappa z$, так что профиль скорости течения оказывается логарифмическим

$$U=(u_*/\varkappa)\ln(z/z_0),$$

где z_0 – так наз. «высота шероховатости»). Асимптотика очень устойчивой стратификации при $\zeta\to+\infty$ получается из требования $\mathrm{Rf}\to R=\mathrm{Rf}_{\mathrm{кр}}$ (напр., $U'\sim u_*/\varkappa RL$). Асимптотика при $\zeta\to-\infty$ получается при $u_*\to 0$ [автомодельный режим свободной конвекции, напр., $u\sim c_1-c_2(u_*/\varkappa)|\zeta|^{-1/3}$].

При рассмотрении спектров турбулентности, ограничиваясь так наз. инерционно-конвективным интервалом волновых чисел k, в к-ром при нейтральной стратификации, согласно гипотезам подобия Колмогорова–Обухова (1941, 1949), структура турбулентности полностью определяется скоростями ε и ε_θ спектрального переноса кинетич. энергии и меры неоднородностей температурного поля, в стратифицированной среде надо учесть еще параметр плавучести αg. Тогда возникает масштаб плавучести

$$L_*\sim\varepsilon^{5/4}\varepsilon_\theta^{-3/4}(\alpha g)^{-3/2}$$

(А. М. Обухов, 1959), и если он попадет в инерционно-конвективный интервал, то спектральные плотности энергии и температуры принимают вид

$$E(k)=\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}\varphi(kL_*),$$
$$E_\theta(k)=\varepsilon_\theta\varepsilon^{-1/3}k^{-5/3}\varphi_\theta(kL_*),$$

где φ и φ_θ – нек-рые универсальные функции. При больших k (на мелкомасштабном конце инерционно-конвективного интервала) параметр плавучести выпадает, то есть функции φ и φ_θ стремятся к константам, и для спектров получаются законы пяти третей Колмогорова–Обухова. При малых $k\ll L_*^{-1}$ в случае устойчивой стратификации турбулентность тратит гораздо больше энергии на работу против архимедовых, чем против вязких сил, так что параметр ε выпадает, и получается

$$E\sim(\alpha g)^{4/5}\varepsilon_\theta^{2/5}k^{-11/5}$$

и

$$E_\theta\sim(\alpha g)^{-2/5}\varepsilon_\theta^{4/5}k^{-7/5}.$$

Функции φ и φ_θ рассчитаны при помощи динамич. уравнений (А. С. Монин, 1962).

Примером очень устойчиво стратифицированной среды служит океанский пикноклин (слой скачка плотности под верхним перемешанным слоем океана), в к-ром развиваются внутренние гравитационные волны с большими амплитудами, их обрушивание создает перемешанные пятна, а коллапс последних под действием архимедовых сил приводит к их расплыванию по горизонтали и превращению в тонкие турбулизованные слои или «блины», предсказанные А. Н. Колмогоровым в 1948–49 (вертикальная тонкослойная микроструктура океана, обнаруженная в 70-х гг. 20 в. методами непрерывного зондирования и оказавшаяся распространенной повсеместно). Количественная теория расплывания турбулентных пятен построена Г. И. Баренблаттом и А. С. Мониным (1978, 1979).

В экмановских пограничных слоях к указанным выше определяющим параметрам добавляется параметр Кориолиса f, возникает масштаб длины

$$h_0=\varkappa u_*/f,$$

и появляется внутренний параметр стратификации

$$\mu_0=h_0/L$$

(А. Б. Казанский, А. С. Монин, 1960). В теории подобия (в целях параметризации пограничных слоев в математич. моделях общей циркуляции атмосферы и океана) удобно использовать в качестве определяющих «внешние» параметры h, z_0, αg и перепады скорости U и потенциальной плотности $\delta\rho_*$ (или температуры $\delta\theta$ и солености δS) и выражать через них «внутренние» параметры u_* и m (или турбулентные потоки тепла и соли). Такие выражения (законы сопротивления, массообмена, теплообмена и солеобмена) получаются при сопряжении пристеночных логарифмич. законов с «законами дефекта» для внешней части пограничного слоя. Они содержат два безразмерных параметра μ и h/z_0 (в экмановских слоях вместо последнего иногда берется число Россби $\mathrm{Ro}=U/z_0f$). В частности, «толщина потери импульса» h при сильно устойчивой стратификации равна $h_0\mu_0^{-1/2}\ll h_0$, а при сильной неустойчивости равна $h_0|\mu_0|^{1/2}\gg h_0$.

В общей циркуляции земной атмосферы, Мирового океана, атмосфер больших планет и внешних слоев Солнца весьма существенную роль играет **микротурбулентность**. Движения в образующих ее вихрях квазигоризонтальны, квазигидростатичны и квазигеостатичны (то есть в них горизонтальный градиент давления приблизительно уравновешивается силой Кориолиса, и потому отклонения давления от гидростатич. распределения $p_0(z)$ имеют вид

$$p' \approx \rho f \psi,$$

где ψ – горизонтальная функция тока; такую турбулентность иногда называют *геострофической турбулентностью*. Основной характеристикой в этом случае является **потенциальный вихрь** ω_* (скалярное произведение абсолютного вихря скорости на градиент энтропии, деленное на ρ). Если $\rho = \rho(p, \theta)$, то при адиабатич. процессах ω_* сохраняется в жидких частицах (уравнение неадиабатич. эволюции ω_* вывел А. М. Обухов в 1962). В геострофич. турбулентности вихрь $\omega_* \sim A\psi + f$, где

$$A = \Delta + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z},$$

а Δ – горизонтальный лапласиан, и уравнение эволюции вихря ω_* приводит к виду

$$\frac{\partial A\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, A\psi)}{\partial(x,y)} + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varepsilon_*,$$

где ε_* – неадиабатич. факторы. При горизонтальном масштабе

$$L < L_R = HNf^{-1}$$

(**радиус деформации Россби**), где H – эффективная толщина слоя с макротурбулентностью; $A \approx \Delta$, то есть вертикальные взаимодействия относительно слабы и вертикальные неоднородности не размываются (**бароклинная структура**). При

$$L > L_R,$$

наоборот, вертикальные неоднородности быстро размываются (**баротропная структура**). При

$$L < L_\beta = (\varepsilon U/\beta)^{1/2},$$

где U – типичная скорость, третье слагаемое относительно мало, так как «β-эффект» на вихрях не сказывается. При

$$L > L_\beta,$$

наоборот, третье слагаемое доминирует над вторым, и получается уравнение для волн Россби–Блиновой с частотами

$$\sigma = -\beta k_x k^{-2}.$$

При

$$L < L_R,\ L_\beta$$

получается обычная двумерная турбулентность, но со временем среднее квадратичное значение L растет, бароклинные вихри баротропизируются и превращаются в волны.

Средний квадрат вихря $\langle(\Delta\psi)^2\rangle$ (**энстрофия**) в двумерной турбулентности или $\langle\omega_*^2\rangle$ (**потенциальная энстрофия**) в геострофич. турбулентности при адиабатич. процессах сохраняются и могут только передаваться по спектру (со скоростью ε_ω). От источника, локализованного в точке спектра $k = k_0$, происходит передача энергии в сторону больших масштабов (отрицательная турбулентная вязкость), формирующая колмогоровский спектр

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

и передача энстрофии (и пассивных примесей) в сторону малых масштабов, формирующая спектры

$$E(k) \sim \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3}$$

и

$$E_\theta(k) \sim \varepsilon_\theta \varepsilon_\omega^{-1/3} k^{-1};$$

точнее, спектральный перенос энстрофии оказывается нелокальным процессом, и последние два спектра приобретают логарифмич. поправки

$$(\ln k/k_0)^{-1/3}.$$

Коэффициент турбулентной диффузии в интервале переноса энстрофии имеет вид

$$K(r) \sim \varepsilon_\omega^{1/3} r^2 (\ln k_0 r)^{-2/3}$$

(А. П. Мирабель, А. С. Монин, 1983); нелокальная поправка здесь обеспечивает существование решения у полуэмпирич. уравнения турбулентной диффузии с мгновенным точечным источником.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1–2, М., 1965–67; [2] Ламли Дж. Л., Пановский Г.-А., Структура атмосферной турбулентности, пер. с англ., М., 1966; [3] Монин А. С., Озмидов Р. В., Океанская турбулентность, Л., 1981; [4] Монин А. С., «Успехи математич. наук», 1983, т. 38, в. 4, с. 113–131. *А. С. Монин.*

ГЕРЦА ПРИНЦИП прямейшего пути, принцип наименьшей кривизны,– один из *вариационных принципов классической механики*: всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямейшего пути. Под свободной системой Г. Герц (G. Hertz) понимает систему, не подверженную действию активных сил и стесненную только внутренними связями, накладывающими условия лишь на взаимное расположение точек системы. Прямейший путь определяется как такая траектория, элементарные дуги к-рой обладают наименьшей кривизной по сравнению с любыми другими дугами, допускаемыми связями и имеющими с рассматриваемой элементарной дугой общие начальную точку и касательную в ней, причем величина Z интерпретируется как кривизна траектории точки, изображающей положение системы в $3N$-мерном евклидовом пространстве с прямоугольными координатами

$$\sqrt{m_i}x_i,\ \sqrt{m_i}y_i,\ \sqrt{m_i}z_i.$$

Иными словами, принцип Герца утверждает, что среди всех совместимых со связями траекторий действительная траектория обладает наименьшей кривизной.

Принцип предложен Г. Герцем (1894). *В. В. Румянцев.*

ГЕРЦИГА–ПИРОГОВА–СИНАЯ УСЛОВИЕ – см. *Пирогова–Синая теорема.*

ГЕССА–АППЕЛЬРОТА СЛУЧАЙ – см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки.

ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКАЯ ТОЧКА – точка на *гетероклинической траектории.*

ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ – траектория *динамической системы*, стремящаяся при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ к различным периодическим траекториям (см. [1]) или положениям равновесия (здесь t – непрерывное или дискретное время). Решения, соответствующие гетероклиническим и *гомоклиническим траекториям*, описывают уединенные волны, а также различного рода дефекты в нелинейных средах с дисперсией. Напр., стационарные волны в среде, описываемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin u,$$

суть решения «маятникового уравнения»

$$u'' + a\sin u = 0,$$

отвечающие (на его фазовой плоскости) Г. т. (см. [2]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Новые методы небесной механики. Избр. тр., пер. с франц., т. 1, 2, М., 1971; [2] Бароне А., Патерно Дж., Эффект Джозефсона, пер. с англ., М., 1984.

В. С. Афраймович.

ГИББСА КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ – см. *Гиббса распределения, Статистический ансамбль.*

ГИББСА КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Гиббса распределения.*

ГИББСА КВАНТОВЫЙ АНСАМБЛЬ – см. *Статистический ансамбль.*

ГИББСА КЛАССИЧЕСКИЕ АНСАМБЛИ: канонический ансамбль Гиббса, большой канонический ансамбль Гиббса, малый канонический ансамбль Гиббса, микроканонический ансамбль Гиббса, квантовый ансамбль Гиббса – см. *Статистический ансамбль.*

ГИББСА МИКРОКАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ – см. *Гиббса микроканоническое распределение, Гиббса распределения, Статистический ансамбль.*

ГИББСА МИКРОКАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – равновесное распределение вероятностей для *статистического ансамбля* систем с заданной полной энергией $\mathscr{E}$ при постоянном объеме V и постоянном полном числе частиц N; соответствует микроканоническому ансамблю Гиббса. Установлено Дж. Гиббсом (J. Gibbs, 1901) для случая классич. статистики как один из основных законов статистич. физики.

В классич. статистич. механике функция распределения $f(p, q)$ зависит от координат q и импульсов p всех частиц через *Гамильтона функцию* $H(p, q)$, к-рая является интегралом движения системы. Согласно Г. м. р., все микроскопич. состояния в узком слое энергии $\Delta\mathscr{E} \ll \mathscr{E}$ равновероятны, а вероятности других состояний равны нулю, то есть

$$f(p,q) = \begin{cases} W^{-1}(\mathscr{E}, N, V) & \text{при } \mathscr{E} \leqslant H(p,q) \leqslant \mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}, \\ 0 & \text{вне этого слоя,} \end{cases}$$

$W(\mathscr{E}, N, V)$ – статистич. вес, определяемый из условия нормировки (суммарная вероятность пребывания системы во всех состояниях равна 1). Следовательно,

$$W(\mathscr{E}, N, V) = \left(N!h^{3N}\right)^{-1} \int H(p,q)\, dpdq,$$

$$dpdq = dp_1 dq_1 \ldots dp_{3N} dq_{3N};$$

эта величина слабо зависит от ширины слоя $\Delta\mathscr{E}$, при больших N этой зависимостью можно пренебречь. В случае классич. механики можно перейти к пределу $\Delta\mathscr{E} \to 0$ и записать Г. м. р. в виде

$$f(p, q) = W^{-1}(\mathscr{E}, N, V)\delta(H(p,q) - \mathscr{E}),$$

δ – дельта-функция. Статистич. вес связан с энтропией $S(\mathscr{E}, N, V)$ соотношением

$$W(\mathscr{E}, N, V) = \exp\{k^{-1} S(\mathscr{E}, N, V)\}.$$

В квантовой статистич. механике рассматривают ансамбль замкнутых, энергетически изолированных систем с объемом V и числом частиц N, имеющих одинаковую энергию $\mathscr{E}$ с точностью до $\Delta\mathscr{E}$. Величину $\Delta\mathscr{E}$ выбирают малой, но конечной, так как точная фиксация энергии в квантовой механике, в соответствии с *неопределенностей соотношением* между энергией и временем, потребовала бы бесконечного времени наблюдения. Предполагается, что для таких систем все квантовомеханич. состояния с энергией $\mathscr{E}_k$ от $\mathscr{E}$ до $\mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}$ равновероятны, а вне этого слоя их вероятность равна нулю. Такое распределение вероятности w состояний системы:

$$w(\mathscr{E}_k) = \begin{cases} W^{-1}(\mathscr{E}, N, V) & \text{при } \mathscr{E} \leqslant \mathscr{E}_k \leqslant \mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}, \\ 0 & \text{вне этого слоя,} \end{cases}$$

называется микроканонич. распределением Гиббса для квантового статистич. ансамбля. Здесь $W(\mathscr{E}, N, V)$ – статистич. вес, равный числу квантовых состояний в слое $\Delta\mathscr{E}$ при фиксированных $\mathscr{E}$, N, V; он определяется из условия нормировки вероятности

$$\sum_k w(\mathscr{E}_k) = 1.$$

В квантовом случае также можно устремить $\Delta\mathscr{E}$ к нулю, такому Г. м. р. соответствует статистич. оператор (*плотности матрица*)

$$\rho = W^{-1}\delta(\hat{H} - \mathscr{E}),$$

где $\hat{H}$ – гамильтониан системы.

Г. м. р. неудобно для практич. применений, так как для вычисления W нужно найти плотность распределения квантовых уровней для системы из большого числа частиц, что представляет собой сложную задачу. Г. м. р. важно для теоретич. исследований, так как из всех *Гиббса распределений* оно наиболее тесно связано с механикой. С помощью Г. м. р. доказывается теорема Гиббса о том, что малая подсистема большой системы, распределенной по Г. м. р., соответствует *Гиббса каноническому распределению*. Для конкретных задач удобнее рассматривать системы, находящиеся в тепловом контакте с окружающей средой, температура к-рой постоянна (с термостатом), и применять канонич. распределение Гиббса или рассматривать системы, для к-рых возможен обмен энергией и частицами с термостатом, и использовать большое канонич. распределение Гиббса. *Д. Н. Зубарев.*

ГИББСА ПЛОТНОСТЬ – см. *Гиббса случайное поле.*

ГИББСА ПРАВИЛО ФАЗ – см. *Степени свободы.*

ГИББСА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – равновесные распределения вероятностей пребывания систем из большого числа частиц в состояниях, реализуемых в различных физических условиях. Г. р.– фундаментальные законы статистич. механики; установлены Дж. Гиббсом (J. Gibbs, 1901) для случая классич. механики и обобщены Дж. Нейманом (J. Neumann, 1927) для квантовой механики.

Статистический ансамбль Гиббса. Для получения Г. р. вводится статистический ансамбль Гиббса: совокупность большого (в пределе бесконечно большого) числа копий данной системы (классической или квантовой), соответствующих заданным макроскопич. условиям. Рассматривается распределение систем (членов ансамбля) в фазовом пространстве координат q и импульсов p частиц или по квантовым состояниям всей системы.

Г. р. имеют место для классич. системы с функцией Гамильтона $H(p, q)$ в $6N$-мерном фазовом пространстве всех N частиц системы p, q, где

$$p = (p_1, \ldots, p_n),\ q = (q_1, \ldots, q_n),\ n = 3N,$$

с функцией распределения плотности вероятности $f(p, q)$ и для квантовых состояний системы с квантовыми уровнями ξ_i, к-рая описывается *статистическим оператором* $\hat{\rho}$ или *плотности матрицей.*

Функция распределения $f(p, q)$ удовлетворяет *Лиувилля уравнению*, а статистич. оператор $\hat{\rho}$ – квантовому уравнению Лиувилля – *Неймана уравнению.*

Микроканоническое распределение. В случае статистич. равновесия совокупность энергетически изолированных от окружающей среды систем с энергией $\mathscr{E}$ при постоянном объеме V с заданным числом частиц N (микроканонический ансамбль Гиббса) описывается *Гиббса микроканоническим распределением*, согласно к-рому все состояния системы в узкой области энергий ($\Delta\mathscr{E} \ll \mathscr{E}$) вблизи $\mathscr{E}$ равновероятны (основная гипотеза статистич. механики):

$$f(p,q) = \begin{cases} W(\mathscr{E}, N, V)^{-1} & \text{при } \mathscr{E} \leqslant H(p,q) \leqslant \mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}, \\ 0 & \text{вне слоя } \Delta\mathscr{E}, \end{cases}$$

где $W(\mathscr{E}, N, V)$ – статистич. вес макроскопич. состояния с заданными $\mathscr{E}$, N, V, то есть число микроскопич. состояний в энергетич. слое $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}$. Статистич. вес определяется из условия, что полная вероятность пребывания системы в любом из возможных состояний равна 1 (условие нормировки вероятности):

$$\int f(p,q)\, d\Gamma_N = 1,$$

где

$$d\Gamma_N = dpdq/N!h^{3N}$$

– плотность состояний, множитель $N!$ учитывает неразличимость частиц, $h = 6{,}626 \cdot 10^{-27}$ эрг·с – постоянная Планка. Следовательно,

$$W(\mathscr{E}, N, V) = \int \frac{dpdq}{N!h^{3N}},$$

где интегрирование ведется в пределах

$$\mathscr{E} \leqslant H_N(p, q) \leqslant \mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}.$$

Появление h связано с тем, что классич. Г. р. рассматривается как предельный случай квантового (см. *Квазиклассическое приближение*).

Микроканонич. Г. р. не чувствительно к выбору величины $\Delta\mathscr{E}$ и при $\Delta\mathscr{E} \to 0$ переходит в распределение

$$f(p, q) = A\delta(H_N(p, q) - \mathscr{E}),$$

где δ – дельта-функция, A – постоянная, определяемая из условия нормировки. Распределение вероятностей, соответствующее однородному распределению внутри слоя, – микроканонич. Г. р. по энергетич. поверхности

$$\sigma(H_N) = \text{const}\,|\text{grad}\,H_N|^{-1},$$

константа определяется из условия нормировки

$$\int \sigma(H_N)\, d\Gamma = 1,$$

grad H_N берется в фазовом пространстве.

Статистич. вес $W(\mathscr{E}, N, V)$ определяет *энтропию* системы S как функцию $\mathscr{E}$, N, V:

$$S = R \ln W(\mathscr{E}, N, V),$$

а следовательно, и все другие термодинамич. функции системы, определяемой заданной формой гамильтониана.

Каноническое распределение Гиббса – распределение вероятностей состояний статистич. ансамбля систем, к-рые находятся в тепловом равновесии со средой (термостатом) и могут обмениваться с ней энергией при постоянном объеме и постоянном числе частиц, соответствует каноническому ансамблю Гиббса:

$$f(p, q) = Z^{-1} \exp(-H_N(p, q)/kT),$$

$Z = Z(T, V, N)$ – статистич. интеграл, определяемый из условия нормировки f:

$$Z = \int \exp[-H_N(p,q)/kT]\, d\Gamma_N,$$

где интегрирование ведется по фазовому пространству всех N частиц. Канонич. Г. р. можно получить, если рассматривать совокупность данной системы и термостата как одну замкнутую изолированную систему и применить к ней микроканонич. Г. р. Тогда малая подсистема, функцию распределения к-рой можно найти интегрированием по фазовым переменным термостата, описывается канонич. Г. р. (теорема Гиббса).

В квантовой статистич. физике статистич. ансамбль характеризуется распределением вероятностей w_i квантовых состояний с энергией $\mathscr{E}_i$. Канонич. Г. р. для квантовой системы имеет вид

$$w_i = Z^{-1} \exp(-\mathscr{E}_i/kT),$$

где Z – статистич. сумма, определяемая из условия нормировки

$$\sum_i w_i = 1,$$

равна

$$Z = \sum_i \exp(-\mathscr{E}_i/kT),$$

где суммирование ведется по всем квантовым состояниям допустимой симметрии. В квантовом случае канонич. Г. р. можно представить с помощью статистич. оператора (матрицы плотности)

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp(-H/kT),$$

где H – гамильтониан системы. Такая форма удобна для приложений с использованием представления вторичного квантования для гамильтониана. Канонич. Г. р. как в классическом, так и в квантовом случаях определяет свободную энергию (энергию Гельмгольца) в переменных T, V, N, равную

$$F = -kT \ln Z,$$

где Z – статистич. интеграл или статистич. сумма. Канонич. Г. р. соответствует максимуму информационной энтропии при заданной средней энергии и при сохранении нормировки.

Большое каноническое распределение Гиббса – распределение вероятностей состояний статистич. ансамбля систем, к-рые находятся в тепловом и материальном равновесии со средой (термостатом и резервуаром частиц) и могут обмениваться с ними при постоянном объеме V, соответствует большому каноническому ансамблю Гиббса

$$f_N(p, q) = Z^{-1} \exp(-(H_N(p, q) - \mu N)/kT),$$

где μ – химич. потенциал, $Z = Z(T, \mu, V)$ – статистич. интеграл, определяемый из условия нормировки

$$\sum_{N \geqslant 0} \int f_N\, d\Gamma_N = 1,$$

равен

$$Z = \sum_{N \geqslant 0} \int \exp(-(H(p,q) - \mu N)/kT)\, d\Gamma_N.$$

Большое канонич. Г. р. можно вывести, если рассматривать совокупность данной системы вместе с термостатом и резервуаром частиц как большую изолированную и замкнутую систему и применить к ней микроканонич. Г. р. Тогда малая подсистема описывается большим канонич. Г. р., к-рое можно найти интегрированием по фазовым переменным термостата и резервуара частиц и суммированием по числу частиц (теорема Гиббса).

В квантовой статистике для большого канонич. Г. р.

$$w_{iN} = Z^{-1} \exp(-(\mathscr{E}_i - \mu N)/kT),$$

где условие нормировки

$$\sum_{i,N} w_{in} = 1$$

и

$$Z = \sum_{i, N \geqslant 0} \exp(-(\mathscr{E}_i - \mu N)/kT),$$

а статистич. оператор

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp(-(H - \mu N)/kT).$$

Большое канонич. Г. р. как в классическом, так и в квантовом случае определяет термодинамич. потенциал

$$\Omega = -kT \ln Z$$

в переменных T, μ, V, к-рый наиболее удобен для приложений, так как содержит лишь один экстенсивный параметр V. Большое канонич. Г. р. можно получить, если рассматривать совокупность данной системы, являющейся также резервуаром частиц, как одну замкнутую изолированную систему (теорема Гиббса для большого канонич. Г. р.).

Большое канонич. распределение соответствует максимуму информационной энтропии при заданных средней энергии и среднего числа частиц, а канонич. распределение – при заданной средней энтропии. В обоих случаях нормировка предполагается фиксированной (теоремы об экстремальных свойствах канонич. распределений, доказанные Дж. Гиббсом, 1901).

Термодинамическая эквивалентность распределений Гиббса. Все Г. р. вдали от областей сосуществования фаз и критич. точек, вследствие малости относительных флуктуаций, пропорциональных $N^{-1/2}$, термодинамически эквивалентны, то есть приводят к одинаковым термодинамич. функциям, после приведения их к одинаковым переменным с помощью преобразования Лежандра. В области фазовых переходов, вообще говоря, нет эквивалентности Г. р. относительно вычисления корреляционных функций и функций распределения флуктуаций.

В неравновесной статистич. механике возможно также использование идей статистич. ансамблей Гиббса, напр. с помощью отбора запаздывающих решений уравнения Лиувилля через граничные условия.

Лит.: [1] Гиббс Дж., Термодинамика, статистическая механика, пер. с англ., М., 1982; [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Статистическая физика, 3 изд., ч. 1, М., 1976; [3] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [4] Хилл Т., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1960, гл. 1–3; [5] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966, гл. 7–9; [6] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., М., 1973, гл. 2–3. *Д. Н. Зубарев.*

ГИББСА ТЕОРЕМА – см. *Гиббса распределения, Гиббса микроканоническое распределение.*

ГИББСА ТЕОРЕМА о фазах – см. *Энтропия.*

ГИББСА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Статистической механики математические задачи.*

ГИББСА – АППЕЛЯ УРАВНЕНИЯ – см. *Аппеля уравнения.*

ГИББСОВСКАЯ МЕРА – см. *Гиббсовское состояние.*

ГИББСОВСКАЯ ПОЛУГРУППА – *полугруппа*, определяемая следующим образом. Пусть $\mathfrak{S}_p(\mathscr{H})$ – банахово пространство компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, имеющих конечную p-норму:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{1\leqslant n<\infty}\lambda_n^p\right)^{1/p}, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Здесь $\lambda_n=\mu_n(|A|)$, где $\mu_n(|A|)$ – это n-е (с учетом вырождения) собственное значение оператора

$$|A| = (A^*A)^{1/2}.$$

Банаховы пространства $\{\mathfrak{S}_p(\mathscr{H})\}_{p=1}^{\infty}$ образуют *-идеалы в пространстве всех ограниченных операторов $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, причем имеют место включения:

$$\mathfrak{S}_1(\mathscr{H}) \text{ (ядерные операторы или Tr-класс)} \subset$$
$$\subset \mathfrak{S}_2(\mathscr{H}) \text{ (операторы Гильберта – Шмидта)} \subset \ldots \subset$$
$$\subset \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H}) \text{ (компактные операторы)} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}).$$

Сильно непрерывная на полуоси $\mathbb{R}_+^1\cup\{0\}$ полугруппа

$$G(t) = \exp(-tT)$$

в пространстве $\mathscr{H}$ называется гиббсовской, если

$$G:\mathbb{R}_+^1 \to \mathfrak{S}_1(\mathscr{H})$$

(см. [1]). Из непрерывности произведения, то есть

$$\|\cdot\|_p\text{-}\lim_{n\to\infty} A_nB_n = AB,$$

если

$$\|\cdot\|_p\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

и

$$\|\cdot\|_p\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n = B,$$

и из того, что $\mathfrak{S}_1(\mathscr{H})$ является *-идеалом в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, следует $\|\cdot\|_1$-непрерывность Г. п. на $\mathbb{R}_+^1$.

Г. п. естественным образом возникают в квантовой статистич. механике: с точностью до множителя они совпадают с матрицей плотности системы. Для конечной системы их генератором является соответствующий гамильтониан H, а параметром полугруппы – величина обратной температуры $\beta\in\mathbb{R}_+^1$, то есть

$$G(\beta) = \exp(-\beta H).$$

Именно в такой форме понятие Г. п. впервые появилось в работе [2].

Основное свойство Г. п. $G(t)$ и их возмущений

$$G_\Lambda(t) = \exp[-t(T+\Lambda U)],$$

быть $\|\cdot\|_1$-непрерывными (и даже $\|\cdot\|_1$-аналитическими, см. [1] и *Гиббсовская полугруппа*; аналитические свойства) по параметрам t, Λ используется для получения различных неравенств, а также теорем об аппроксимации. Первое утверждение такого рода – это свойство $\|\cdot\|_1$-компактности семейства Г. п. (см. [3]): пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – монотонное семейство самосопряженных в $\mathscr{H}$ операторов (то есть $T_{\alpha_1}<T_{\alpha_2}<\ldots$, либо $T_{\alpha_1}\geqslant T_{\alpha_2}\geqslant\ldots$) такое, что существует пара T_-, T_+, причем $T_-\leqslant T_\alpha\leqslant T_+$ и

$$\exp(-tT_-)\in\mathfrak{S}_p(\mathscr{H})$$

для $t\in\mathbb{R}_+^1$ и $1\leqslant p<\infty$. Тогда семейство полугрупп

$$\{G_\alpha(t)\}_{\alpha\in A}\subset\mathfrak{S}_1(\mathscr{H})$$

является $\|\cdot\|_1$-компактным. Это утверждение справедливо также, если полугруппы семейства продолжить до $\|\cdot\|_1$-аналитических в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$ операторнозначных функций. В качестве примера применения этого утверждения следует упомянуть следующее явление Клаудера для возмущений Г. п. Пусть T и U – положительные самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$ и T является генератором Г. п. Если общая область соответствующих квадратичных форм $Q=Q(T)\cap Q(U)$ плотна в $\mathscr{H}$, тогда для $\lambda\geqslant 0$ в пространстве $\mathscr{H}$ определена сумма операторов

$$H_\Lambda = T\dotplus\Lambda U$$

в смысле квадратичных форм. Семейство $\{H_\Lambda\}_{\Lambda\geqslant 0}$ монотонно. Поэтому для $t\in\mathbb{C}_+$ предел

$$\|\cdot\|_1\text{-}\lim_{\Lambda\downarrow 0} G_\Lambda(t) = G(t)$$

существует, причем

$$G(t) = \exp(-tH_0)$$

и генератор H_0 соответствует замыканию сужения квадратичной формы

$$t[\psi] = (T^{1/2}\psi,\ T^{1/2}\psi)$$

на Q. Если возмущение U достаточно сингулярно, то $H_0\neq T$. Второе утверждение такого рода – это формула Троттера и ее обобщения (см. [4]). При сформулированных выше условиях на пару операторов $\{T,\ U\}$ для $t\in\mathbb{R}_+^1$ имеет место *Троттера формула* в $\|\cdot\|_1$-топологии:

$$\|\cdot\|_1\text{-}\lim_{n\to\infty}\left[\exp\left(-\frac{t}{n}T\right)\exp\left(-\frac{t}{n}V\right)\right]^n = \exp(-TH)\Pi.$$

Здесь

$$H = T\dotplus U,$$

а Π – ортогональный проектор $\mathscr{H}$ на замыкание Q.

Лит.: [1] Zagrebnov V.A., «Comm. Math. Phys.», 1989, v. 120, № 4, p. 653–64; [2] Uhlenbrock D., «J. Math. Phys.», 1971, v. 12, № 10, p. 2503–12; [3] Zagrebnov V.A., «Comm. Math. Phys.», 1980, v. 3, p. 269–76; [4] Neidhardt H., Zagrebnov V.A., «Comm. Math. Phys.», 1989, v. 125, № 1, p. 75–95. *В. А. Загребнов.*

ГИББСОВСКАЯ ПОЛУГРУППА; аналитические свойства. Пусть T – генератор самосопряженной *гиббсовской полугруппы*

$$G(t) = \exp(-tT),$$

действующей в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, то есть

$$G:\mathbb{R}_+^1 \to \mathfrak{G}_i(\mathscr{H}).$$

Кроме того, пусть T является P-генератором (см. [1]): резольвента $(\xi_0-T)^{-1}$ принадлежит операторному идеалу $\mathfrak{G}_p(\mathscr{H})$ для нек-рого ξ_0 из резольвентного множества и $p\geqslant 1$. Если оператор U является T-ограниченным с относительной границей $b<1$, то есть

$$\|U\psi\|\leqslant a\|\psi\| + b\|T\psi\|,\ \psi\in\mathscr{D}(U);$$

тогда возмущенная полугруппа

$$G_\Lambda(z) = \exp\{-z(T+\Lambda U)\}$$

также является гиббсовской, если

$$\Lambda\in C_b = \{\xi\in\mathbb{C}:|\xi|<(2b)^{-1}\}$$

и $z\in S_{\Lambda,b}$, где сектор

$$S_{\Lambda,b} = \left\{z\in\mathbb{C}_+:\left|\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right|<\frac{\sqrt{1-2|\Lambda|b}}{|\Lambda|b}\right\}.$$

Более того, отображение

$$G_\Lambda(z): C_b \times S_{\Lambda,b} \to \mathfrak{G}_1(\mathcal{H})$$

является аналитическим в ядерной ($\|\cdot\|_1$-) топологии по обоим параметрам (см. [1]). В случае $b \to 0$ получают результат (см. [2]) об $\|\cdot\|_1$-аналитичности отображения

$$G_\Lambda(z): \mathbb{C} \times \mathbb{C}_+ \to \mathfrak{G}_1(\mathcal{H}),$$

причем требование, чтобы оператор T был p-генератором, теперь можно снять.

Лит.: [1] Zagrebnov V.A., «Comm. Math. Phys.», 1988, v. 120, № 4, p. 653–64; [2] Angelescu N., Nenciu G., Bundaru M., там же, 1975, v. 42, № 1, p. 29–30. *В. А. Загребнов.*

ГИББСОВСКИЙ ПРОЦЕСС – см. *Случайный процесс.*

ГИББСОВСКОЕ ПОЛЕ – см. *Случайное поле.*

ГИББСОВСКОЕ СОСТОЯНИЕ – равновесное состояние статистической системы, определяемое заданием *Гиббса распределения* (вероятностной гиббсовской меры) на фазовом пространстве. При этом фактически фиксируется способ усреднения физич. («наблюдаемых») величин, связанных с данной статистич. системой. Конкретный вид распределения Гиббса зависит от рассматриваемого ансамбля (см. *Микроканонический ансамбль, Канонический ансамбль, Большой канонический ансамбль*).

Одним из основных объектов изучения современной статистич. механики являются Г. с. бесконечных систем или предельные гиббсовские распределения. Это связано с тем, что адекватное описание термодинамич. свойств статистич. систем возможно лишь при условии перехода к бесконечным системам, то есть в *термодинамическом пределе.*

Рассмотрим большой канонич. конфигурационный ансамбль (по импульсам частиц произведено интегрирование).

Пусть

$$U(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Phi\left(|x_i - x_j|\right)$$

– потенциальная энергия, определяемая парным потенциалом взаимодействия, и пусть

$$W(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_k,\dots) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \geqslant 1} \Phi\left(|x_i - x_j|\right),$$

где

$$x_i \in \Lambda \subset \mathbb{R}^\nu,\ i \in \{1, \dots, n\};\ y_j \in \mathbb{R}^\nu \setminus \Lambda,\ j \in \{1, \dots, k\},$$

– потенциальная энергия взаимодействия системы n частиц, находящихся в ограниченной области Λ, и последовательности (конфигурации) частиц, находящихся вне этой области (рассматриваются только такие конфигурации, в к-рых число частиц конечно в любой ограниченной области $\Delta \subset \mathbb{R}^\nu$).

Условным гиббсовским распределением в области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ с граничным условием $Y = (y_1, \dots, y_k, \dots)$ в $\mathbb{R}^\nu \setminus \Lambda$ [то есть в $\mathbb{R}^\nu \setminus \Lambda$ сосредоточена система частиц, взаимодействующих с $X(x_1, \dots, x_n)$, с потенциалом взаимодействия Φ и параметрами z и β] называется распределение вероятностей на

$$\sum_{m \geqslant 0} \Lambda^m,$$

заданное на каждом Λ^m, плотностью

$$\rho_\Lambda(X \setminus Y) = z^n \frac{\exp[\beta U(X) - \beta W(X,Y)]}{\Xi(\Lambda, Y)}, \qquad (1)$$

где z – активность и

$$\Xi(\Lambda, Y) =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \int_{\Lambda^m} dx_1 \dots dx_m \exp\left[-\beta U(X) - \beta W(X,Y)\right].$$

Условное гиббсовское распределение, задаваемое формулой (1), существует, если ограничены функции $W(X, Y)$ (для почти всех X) и $\Xi(\Lambda, Y)$. Условное гиббсовское распределение является обобщением «обычных» гиббсовских распределений в области Λ со свободными граничными условиями, задаваемых плотностью $\rho_\Lambda(X \setminus \varnothing)$, где $\varnothing$ – пустое множество.

Предельным гиббсовским распределением с потенциалом Φ и параметрами z и β называется вероятностная мера μ на конфигурационном пространстве системы частиц в $\mathbb{R}^\nu$ такая, что условное гиббсовское распределение (1) существует с μ-вероятностью 1 и для любых ограничений измеримой области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ и конфигурации Y вне Λ, условное распределение вероятностей, вычисленное по мере μ внутри Λ при условии, что в $\mathbb{R}^\nu \setminus \Lambda$ находится конфигурация Y, совпадает (с вероятностью 1) с условным гиббсовским распределением при граничном условии Y. Условия, входящие в определение предельного гиббсовского распределения, называются ДЛР-условиями. Их можно сформулировать в виде уравнений относительно меры μ (см. *ДЛР-уравнения*). Обобщение определения предельного гиббсовского распределения на случай фазового пространства (с учетом максвелловского распределения по импульсам) очевидно.

Термин «предельное гиббсовское распределение» связан с тем, что мера μ может быть получена как предел условного гиббсовского распределения с соответствующими граничными условиями при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^\nu$. Свойства предельного гиббсовского распределения см. в ст. *Равновесные функции распределения* при произвольных значениях термодинамич. параметров.

Лит.: [1] Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И., «Доклады АН СССР», 1949, т. 66, № 321; [2] Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И., «Теоретич. и математич. физика», 1969, № 1, с. 252; [3] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [4] Ruelle D., «Comm. Math. Phys.», 1970, v. 18, p. 127; [5] Петрина Д.Я., Герасименко В.И., Малышев П.В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985; [6] Добрушин Р.Л. и др., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, Динамические системы статистической механики и кинетические уравнения – 3, М., 1985, с. 233–307. *П. В. Малышев.*

ГИДРОДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ – дифференциальные уравнения, описывающие движение жидкости или газа под действием внешних и внутренних сил и источников тепла. Независимыми переменными в системе Г. у. являются время t и совокупность x координат трехмерного евклидова пространства, а искомыми функциями – компоненты трехмерного вектора скорости $\boldsymbol{v}$ и дополнительные переменные, характеризующие состояние жидкости (плотность ρ, температура T, давление p и т. д.). Система координат, используемая ниже для записи Г. у., предполагается инерциальной.

Г.у. выводятся на основе общих законов сохранения в механике сплошной среды (см. [1], [2]). Предположим, что в нек-рой трехмерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (к-рая может изменяться со временем) имеется распределение масс с объемной плотностью $\rho(x, t)$. Закон сохранения массы приводит к уравнению неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad (1)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \operatorname{grad}$$

– оператор полного дифференцирования по времени.

Для формулировки закона сохранения импульса следует ввести в рассмотрение силы, действующие на жидкость. Они могут быть как внутренними (то есть действовать на произвольную трехмерную подобласть ω области Ω со стороны дополнения ω до Ω), так и внешними. Поле внешних сил, отнесенных к единице массы, обозначим через $\boldsymbol{f}(x, t)$. Функция $\boldsymbol{f}$, как правило, считается заданной. Относительно внутренних сил будем предполагать, что в каждой точке M границы $\partial\omega$ области ω в каждый момент времени t они могут

быть представлены поверхностной плотностью $\boldsymbol{p}_n(x, t)$, зависящей от единичного вектора $\boldsymbol{n}$ внешней нормали к $\partial\omega$ в точке M (поверхность $\partial\omega$ считается гладкой).

Из закона сохранения импульса вытекает, что поверхностные силы находятся в локальном равновесии. Это влечет представление

$$\boldsymbol{p}_n = P\boldsymbol{n},$$

где P – нек-рый тензор, называемый тензором напряжений. С его помощью уравнение движения записывается в виде

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \operatorname{div} P + \rho\boldsymbol{f}. \tag{2}$$

Далее постулируется симметричность тензора напряжений. Тогда из (2) будет вытекать закон сохранения момента количества движения. Уравнение (2) справедливо для любой сплошной среды, независимо от вида тензора напряжений P. Сплошная среда называется жидкостью, если P является функцией тензора скоростей деформаций D:

$$P = K(D)$$

(значения функции K – симметрич. тензоры 2-го ранга). Тензор скоростей деформаций D, по определению, есть симметричная часть тензора grad $\boldsymbol{v}$:

$$D = \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad}\boldsymbol{v} + (\operatorname{grad}\boldsymbol{v})^{\top}\right).$$

Предположим, что функция K не зависит явно от x и t и, сверх того, является изотропной функцией D (последнее означает, что ни в пространстве, ни в жидкости не существует выделенных направлений). В этом случае зависимость P от D имеет вид

$$P = K_0 I + K_1 D + K_2 D^2, \tag{3}$$

где I – единичный тензор, а K_0, K_1 и K_2 – скалярные функции, зависящие от главных инвариантов D_{I}, D_{II}, D_{III} и, возможно, термодинамич. переменных состояния.

Для замыкания системы Г. у. следует присоединить к (1)–(3) уравнение энергии:

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = -\operatorname{div}\boldsymbol{q} + P{:}D. \tag{4}$$

Здесь ε – удельная (то есть отнесенная к единице массы) внутренняя энергия, $\boldsymbol{q}$ – вектор потока тепла, $P{:}D$ означает свертку тензоров P и D. Ниже ограничимся случаем двупараметрич. среды, в к-рой все термодинамич. функции зависят от двух термодинамич. параметров состояния. Если эти два параметра – температура T и плотность ρ, то удельная внутренняя энергия должна выражаться через них:

$$\varepsilon = E(T, \rho). \tag{5}$$

Относительно вектора потока тепла $\boldsymbol{q}$ предположим, что $\boldsymbol{q}$ является изотропной функцией от градиента температуры и термодинамич. переменных. Это означает, что

$$\boldsymbol{q} = -\varkappa\operatorname{grad} T, \tag{6}$$

где $\varkappa$ – скалярная функция $|\operatorname{grad} T|$, T и ρ, называемая коэффициентом теплопроводности. Уравнения (1)–(6) образуют замкнутую систему Г. у. сжимаемой жидкости или газа.

Важный частный случай жидкостей составляют классические, или ньютоновские, жидкости (и газы). В этом случае зависимость P от D линейна,

$$P = (-p + \lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v})\,I + 2\mu D. \tag{7}$$

В соотношении (7) p – давление, λ и μ – скалярные функции термодинамич. переменных; $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = D_I$ – первый инвариант тензора D. Уравнение движения ньютоновской жидкости получается из (2), (7) и носит название уравнения Навье – Стокса:

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \operatorname{grad}(-p + \lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(2\mu D) + \rho\boldsymbol{f}. \tag{8}$$

В случае сжимаемой жидкости (газа) давление является термодинамич. переменной и должно быть задано как функция T и ρ с помощью уравнения состояния. Для многих реальных газов указанная зависимость хорошо аппроксимируется уравнением Клапейрона:

$$p = \rho RT, \tag{9}$$

где R – положительная постоянная, определяемая молекулярным составом газа (газовая постоянная). Газ, для к-рого выполнено уравнение состояния (9), называется совершенным. Внутренняя энергия совершенного газа зависит только от температуры, так что описание его термодинамики сводится к заданию функции $\varepsilon = E(T)$. В общем случае это описание характеризуется зависимостями (5) и

$$p = h(T, \rho). \tag{10}$$

Введем в рассмотрение еще одну термодинамич. переменную – удельную энтропию S – с помощью равенства, выражающего первый закон термодинамики:

$$TdS = d\varepsilon + pd(1/\rho). \tag{11}$$

Соотношения (1), (6) и (11) позволяют записать уравнение энергии (4) для ньютоновской жидкости в виде

$$\rho T\frac{dS}{dt} = \operatorname{div}(\varkappa\operatorname{grad} T) + \Phi, \tag{12}$$

в к-ром

$$\Phi = \lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2 + 2\mu D{:}D \tag{13}$$

– диссипативная функция. Известно, что коэффициент теплопроводности $\varkappa$ неотрицателен (теплота всегда передается от тел с большей температурой к телам с меньшей температурой). Из второго закона термодинамики следует, что в процессе движения жидкости механич. энергия может перейти в тепловую, но не наоборот. Это влечет требование неотрицательности функции Φ для произвольных D. Последнее, в силу (13), выполнено в том и только в том случае, когда

$$\mu \geqslant 0,\ 3\lambda + 2\mu \geqslant 0.$$

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие движения идеальной жидкости. Жидкость называют идеальной, если поток тепла $\boldsymbol{q}$ и диссипативная функция Φ тождественно равны нулю. Идеальную жидкость можно рассматривать как предельный случай вязкой сжимаемой жидкости, когда $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$, $\varkappa \to 0$. Тензор напряжений в идеальной жидкости является шаровым: $P = -pI$. Полагая в (8), (12) $\lambda = \mu = 0$, $\varkappa = 0$, получаем

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho\boldsymbol{f}, \tag{14}$$

$$\frac{dS}{dt} = 0. \tag{15}$$

Система (1), (14), (15) становится замкнутой, если к ней добавить термодинамич. уравнение состояния. Для случая идеальной жидкости это уравнение удобно выбрать в форме

$$p = f(\rho, S). \tag{16}$$

Систему (1), (14)–(16) называют также системой уравнений газовой динамики. Она широко используется для описания быстропротекающих процессов в сжимаемых средах, когда характерные времена изменения состояния среды под действием вязкости и теплопроводности много больше времен изменений, обусловленных фактором сжимаемости (см. [3], [4]). Важной особенностью системы (1), (14)–(16) является наличие у нее разрывных решений, описывающих такие явления, как распространение ударных волн.

Математич. модель газовой динамики, основанная на уравнениях (1), (14)–(16), изучена весьма подробно (см. [3], [4]). Что касается вопросов корректности начально-краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа, то к настоящему времени здесь имеются лишь отдельные результаты. Исключение составляет теория одномерных движений с постоянными коэффициентами вязкости и теплопроводности, развитая с достаточной полнотой (см. [5]).

Система соотношений (1)–(6) в равной мере применима к описанию движений как жидкости, так и газа. Однако если для газов свойство сжимаемости (то есть способность легко изменять плотность под действием изменений давления или температуры) является определяющим, то для собственно жидкостей это свойство выражено очень слабо. Так, если давление возрастает от одной до 100 атм при комнатной температуре, то плотность воды увеличивается всего на 0,5%. Поэтому большое распространение получила модель несжимаемой жидкости, основанная на предположении $\operatorname{div} v = 0$. Формально уравнения этой модели могут быть получены из (1)–(6). Однако следует подчеркнуть, что для несжимаемой жидкости давление p уже не является термодинамич. переменной, хотя и остается динамич. переменной. В частности, для ньютоновской несжимаемой жидкости вследствие (1), (7) давление может быть выражено через первый инвариант SpP тензора напряжений по формуле $p = -SpP/3$. С точки зрения термодинамики несжимаемая жидкость является однопараметрич. средой, в к-рой естественным параметром состояния является температура T, соотношение (11) принимает вид $TdS = d\varepsilon$, а зависимость (5) – вид $\varepsilon = E(T)$.

В несжимаемой жидкости плотность ρ, согласно (1), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{17}$$

Это уравнение всегда имеет решение $\rho = \text{const}$, что соответствует случаю однородной жидкости. (Об исследовании уравнений неоднородной вязкой несжимаемой жидкости см. [5].) Уравнения динамики однородной несжимаемой жидкости в предположениях о линейной зависимости (7) между тензорами P и D и о независимости коэффициента $\varkappa$ в формуле (6) от $|\operatorname{grad} T|$ имеют вид:

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{18}$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div}(2\mu D) + \rho f, \tag{19}$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) + 2\mu D : D. \tag{20}$$

Здесь μ (динамич. коэффициент вязкости), $c = E_T'$ (удельная теплоемкость) и $\varkappa$ (коэффициент теплопроводности) – параметры, характеризующие данную жидкость. Они, вообще говоря, зависят от температуры.

С математич. точки зрения система (18)–(20) мало изучена. При постоянных μ, c и $\varkappa$ уравнения (19), (20) принимают более простой вид и записываются так:

$$\frac{dv}{dt} = -\rho^{-1} \operatorname{grad} p + \nu \Delta v + f, \tag{21}$$

$$\frac{dT}{dt} = \chi \Delta T + 2c^{-1} \nu D : D. \tag{22}$$

Здесь введены обозначения: $\nu = \mu/\rho$ – кинематич. коэффициент вязкости, $\chi = \varkappa/\rho c$ – коэффициент температуропроводности, Δ – оператор Лапласа по переменным x.

Уравнения (18), (21) образуют замкнутую систему для определения функций v и p. Если ее решение известно, функция T находится из линейного уравнения (22) при соответствующих начальных и краевых условиях. Система (18), (21) представляет наиболее изученную и широко используемую в приложениях модель динамики вязкой несжимаемой жидкости. Теория начально-краевых задач для этой системы изложена в [6], [7].

Если на движение жидкости факторы сжимаемости и вязкости не оказывают существенного влияния, то такое движение можно описывать с помощью уравнений (14), (17), (18), называемых уравнениями идеальной несжимаемой жидкости. Система (14), (17), (18) и ее специализация при $\rho = \text{const}$ лежат в основе многих рассмотрений классич. и современной гидродинамики (см. [2], [8]), в частности теории волновых движений жидкости (см. [9]).

Лит.: [1] Жермен П., Курс механики сплошных сред, пер. с франц., М., 1983; [2] Седов Л. И., Механика сплошной среды, 4 изд., М., 1983; [3] Овсянников Л. В., Лекции по основам газовой динамики, М., 1981; [4] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, 2 изд., М., 1978; [5] Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н., Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосиб., 1983; [6] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [7] Темам Р., Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ, пер. с англ., М., 1981; [8] Бэтчелор Дж., Введение в динамику жидкости, пер. с англ., М., 1973; [9] Овсянников Л. В. [и др.], Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн, Новосиб., 1985.

В. В. Пухначев.

ГИДРОДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ сверхтекучей жидкости – система нелинейных дифференциальных уравнений, макроскопически полно описывающая эволюцию неравновесных состояний квантовых жидкостей, в которых длина волны де Бройля порядка межатомного расстояния. К квантовым жидкостям относятся ^{4}He, ^{3}He.

Набор параметров сокращенного описания, для к-рых формулируются уравнения сверхтекучей гидродинамики ^{4}He (Л. Д. Ландау, 1941, см. [1]–[2]), состоит из плотностей аддитивных интегралов движения ξ_α (ξ_0, ξ_k, ξ_4 – плотности энергии, импульса, массы) и фазы φ порядка параметра (или сверхтекучей скорости $v_s = \frac{\hbar}{m}\nabla\varphi$, m – масса атома ^{4}He):

$$\dot{\xi}_\alpha = -\nabla_k \xi_{\alpha k}, \quad \dot{v}_s = \nabla \frac{Y_4 + Yv_s}{Y_0}. \tag{*}$$

Здесь плотности ξ_α и соответствующие им плотности потоков $\xi_{\alpha k}$ в терминах термодинамич. потенциала Гиббса $\omega(Y, v_s)$ имеют вид

$$\xi_\alpha = \frac{\partial \omega Y_0}{\partial Y_\alpha}, \quad \xi_{\alpha k} = -\frac{\partial \omega Y_k}{\partial Y_\alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial v_{sk}} Y_0 \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{Y_4 + Yv_s}{Y_0},$$

где Y_α – термодинамич. силы (Y_0^{-1} – температура, $-Y_k Y_0^{-1}$ – нормальная скорость, $-Y_4 Y_0^{-1}$ – химич. потенциал). В силу инвариантности Галилея потенциал ω является функцией только трех комбинаций термодинамич. сил Y_α и сверхтекучей скорости v_s:

$$\omega(Y_\alpha, v_s) = \omega\left(Y_0, (Y_k + Y_0 v_{sk})^2, Y_4 + Yv_s + Y_0 \frac{v_s^2}{2}\right).$$

Уравнения (*) описывают адиабатич. течение жидкости.

Сверхтекучий ^{3}He в отсутствие магнитного поля существует в двух разных фазах: ^{3}He – A, ^{3}He – B. Набор параметров сокращенного описания, по сравнению с ^{4}He, содержит плотность спинового момента. Кроме того, гидродинамич. величинами, связанными с параметром порядка, в A-фазе являются единичные векторы пространственной и спиновой анизотропии, а в B-фазе – углы, определяющие ориентацию спиновой части параметра порядка относительно орбитальной (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Халатников И. М., Теория сверхтекучести, М., 1971; [2] Паттерман С., Гидродинамика сверхтекучей жидкости, пер. с англ., М., 1978; [3] Сверхтекучесть гелия-3, Сб. ст., М., 1977; [4] Квантовые жидкости и кристаллы, Сб. ст., М., 1979.

М. Ю. Ковалевский.

ГИДРОДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ, статистические решения, – вероятностная мера, сосредоточенная на решениях системы *Навье – Стокса уравнений*, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости.

Система Навье – Стокса имеет вид

$$\partial u(t,x)/\partial t + \sum_1^3 u^j \, \partial u/\partial x^j =$$

$$= \nu \Delta u + \nabla p(t,x) + f(t,x), \quad \operatorname{div} u = 0,$$

где $u = (u^1, u^2, u^3)$ – скорость, p – давление, f – плотность внешних сил, $\nu > 0$ – коэффициент вязкости, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – об-

ласть, заполненная жидкостью. На границе $\partial\Omega$ этой области обычно задаются условия прилипания:

$$u(t, x) = 0 \quad \text{при} \quad x = (x^1, x^2, x^3) \in \partial\Omega,$$

а при $t = 0$ начальное условие:

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Пусть $u_0(x) = u_0(x, \omega)$ – случайное векторное поле с распределением вероятностей μ, а $u(t, x, \omega)$ – решение указанной задачи. Тогда мера P, задающая распределение вероятностей для $u(t, x, \omega)$, называется статистическим решением, отвечающим начальной мере μ.

М. И. Вишик, А. В. Фурсиков.

ГИДРОМАГНИТНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, магнитногидродинамическая турбулентность,– совокупность случайных взаимодействующих магнитных и гидродинамических полей электропроводящей жидкости. Г. т. возбуждается и поддерживается в космич. условиях (ядра планет, межпланетная среда, конвективные зоны звезд, газовые диски в двойных звездных системах и галактиках), а также в нек-рых современных крупных технич. установках, напр. в жидкометаллич. теплоносителе ядерных реакторов-размножителей.

Общей теории Г. т. пока не существует, ввиду математич. трудностей, стоящих при рассмотрении полной системы уравнений магнитной гидродинамики. Известен целый ряд частных, приближенных и модельных решений, а также результаты физич. экспериментов и космич. наблюдений. В одном предельном случае, когда можно пренебречь влиянием гидродинамич. движений на (сильное) магнитное поле, Г. т. превращается в гидродинамич. турбулентность проводящей жидкости в заданном магнитном поле. В другом предельном случае, когда пренебрегают воздействием магнитного поля на движения, дело сводится к изучению поведения магнитного поля при заданном турбулентном течении (задачи гидромагнитного динамо). Оба предельных случая хорошо изучены и рассматриваются отдельно.

Полезной моделью служит двумерная Г. т. несжимаемой жидкости. Идеально проводящее невязкое плоское течение характеризуется тремя квадратичными сохраняющимися величинами

$$\int\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi}\right)dxdy, \quad \int A^2\,dxdy, \quad \int \boldsymbol{v}\boldsymbol{H}\,dxdy,$$

где $\boldsymbol{v}$, ρ – скорость и плотность жидкости, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{A}$ – магнитное поле и его вектор-потенциал. Первый интеграл – это полная (кинетическая плюс магнитная) энергия, третий называется кросс-спиральностью, второй не имеет названия и возникает только в двумерном случае. В отличие от случая двумерной гидродинамич. турбулентности, в двумерной Г. т. энстрофия, то есть $\int (\mathrm{rot}\, v)^2 dxdy$ не сохраняется. Если к двумерной диссипативной Г. т. подводить только кинетич. энергию, то, при условии убывания магнитного поля на бесконечности, магнитная энергия временно растет, а затем исчезает (Я. Б. Зельдович, 1956). Современные вычислительные эксперименты показали, что при инжектировании полной энергии возникает каскад энергии от больших к меньшим масштабам и обратный каскад величины $\int A^2 dxdy$. Кроме того, при малой диссипации и достаточно плавном распределении скорости пространственные распределения вихря, плотности тока и магнитного поля оказываются существенно неоднородными, перемежаемыми, в то время как в двумерной гидродинамич. турбулентности распределение вихря достаточно однородно.

В трехмерном случае известна модель (Р. Крейкнан [2]), в к-рой Г. т. представляется совокупностью случайных несфазированных магнитногидродинамич. волн, распространяющихся в различных направлениях с альфвеновской скоростью в каждом масштабе. Отсюда вытекает равенство кинетич. и магнитной спектральной плотностей в каждом масштабе так наз. инерционного интервала. В слабой Г. т., когда преобладают тройные взаимодействия, это приводит к спектру $k^{-3/2}$. В этой модели, однако, весьма существенно предположение о несфазированности волн, так как при этом теряется свойство перемежаемости Г. т., то есть присутствие структурных элементов, отмеченное выше на примере двумерной модели. Исследование Г. т. в приближении гидромагнитного динамо указывает на перемежаемость распределения магнитного поля, к-рое концентрируется в (сфазированные) жгуты или слои.

Особую роль в Г. т. могут играть топологич. особенности течения и магнитного поля, в частности присутствие средней спиральности (см. *Спиральная турбулентность*).

С появлением суперкомпьютеров начались численные исследования трехмерной Г. т.; напр., выполнено прямое интегрирование уравнений индукции и Навье – Стокса для несжимаемого потока со случайной короткокоррелированной силой, достигнув пространственного разрешения, соответствующего числам Рейнольдса порядка 100 (группа Ю. Фриша, см. [3]).

Лит.: [1] Моффат Г. К., Возбуждение магнитного поля в проводящей среде, пер. с англ., М., 1980; [2] Kraichnan R. H., «Physics Fluids», 1965, v. 8, p. 1385–87; [3] Meneguzzi M., Frisch U., Pouquet A., «Phys. Rev. Lett.», 1981, v. 47, p. 1060–64.

А. А. Рузмайкин.

ГИДРОМАГНИТНОЕ ДИНАМО – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ГИЛЬБЕРТА – ШМИДТА ОПЕРАТОР – см. *Интегральный оператор.*

ГИЛЬБЕРТА – ШМИДТА ТЕОРИЯ – см. *Интегральное уравнение.*

ГИЛЬБЕРТОВА АЛГЕБРА – *алгебра* A с инволюцией над полем комплексных чисел, снабженная невырожденным скалярным произведением $(|)$, причем выполняются следующие аксиомы:

1) $(x|y) = (y^*|x^*)$ для всех $x, y \in A$;

2) $(xy|z) = (y|x^*z)$ для всех $x, y, z \in A$;

3) для всех $x \in A$ отображение $y \to xy$ пространства A в A непрерывно;

4) множество элементов вида xy, $x, y \in A$, всюду плотно в A.

Примерами Г. а. являются алгебры $L^2(G)$ (относительно свертки), где G – компактная топологич. группа, и алгебра операторов Гильберта – Шмидта в данном гильбертовом пространстве.

Пусть A – Г. а., H – гильбертово пространство – пополнение A, U_x и V_x – элементы алгебры ограниченных линейных операторов в H, являющиеся продолжениями по непрерывности умножений слева и справа на x в A. Отображение $x \to U_x$ (соответственно $x \to V_x$) есть невырожденное представление алгебры A (соответственно алгебры с инволюцией, противоположной A) в гильбертовом пространстве H. Слабое замыкание семейства операторов U_x (соответственно V) является алгеброй Неймана в H; она называется левой (соответственно правой) алгеброй Неймана данной Г. а. A и обозначается $U(A)$ (соответственно $V(A)$); $U(A)$ и $V(A)$ являются коммутантами друг друга; это – полуконечные алгебры Неймана. Любая Г. а. однозначно определяет нек-рый точный нормальный полуконечный след на алгебре Неймана $U(A)$; обратно, если даны алгебра Неймана $\mathfrak{U}$ и точный нормальный полуконечный след на $\mathfrak{U}$, то можно построить Г. а. такую, что левая алгебра Неймана этой Г. а. изоморфна $\mathfrak{U}$, и след, определяемый на $\mathfrak{U}$ Г. а., совпадает с исходным (см. [1]). Таким образом, Г. а. является средством изучения полуконечных алгебр Неймана и следов на них; нек-рое обобщение понятия Г. а. позволяет изучать аналогичными средствами не обязательно полуконечные алгебры Неймана (см. [2]).

Лит.: [1] Dixmier J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2 ed., P., 1969; [2] Takesaki M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, B., 1970.

А. И. Штерн.

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО – комплексное *векторное пространство*, являющееся бесконечномерным полным *евклидовым пространством*. Это означает, что Г. п. H есть множество элементов, на к-ром, помимо операций векторного пространства (сложения и умножения на число), задана также комплекснозначная функция от пары аргументов x, y из H, обозначаемая (x, y) и удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам):

1) $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$;

2) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;

3) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$, $\alpha \in \mathbb{C}^1$;

4) $(x, y) = (y, x)^*$;

* означает комплексное сопряжение (иногда рассматривают вещественные Г. п., к-рые являются векторными пространствами над полем $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяют аксиоме 3) с $\alpha \in \mathbb{R}^1$). Функция (x, y) называется скалярным, или внутренним, произведением. В силу аксиомы 1) на H также определена неотрицательная функция

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

к-рая обладает всеми свойствами нормы на векторном пространстве; по отношению к ней H является нормированным и банаховым (то есть полным нормированным) пространством. Понятие «Г. п.» возникло в начале 20 в. в основном благодаря работам Д. Гильберта (D. Hilbert).

Данное определение соответствует так наз. абстрактному Г. п.; выбирая в качестве элементов H последовательности, функции или операторы определенных типов, получают различные классы конкретных Г. п.

Примеры. 1) Пространство l^2 – совокупность всех последовательностей $x = \{x_n\}$, где x_n – комплексные числа, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Умножение на число, сложение и скалярное произведение задаются формулами:

$$\alpha x = \{\alpha x_n\}; \quad x + y = \{x_n + y_n\}; \quad (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^*.$$

Аналогично построено пространство состояний конечномерной квантовой системы в представлении вторичного квантования.

2) Пространство $L^2(a, b)$ – совокупность всех комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом на промежутке $[a, b]$ вещественной оси. Скалярное произведение функций f, g из $L^2(a, b)$ задается формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g^*(x)\, dx.$$

Обобщением на случай $a = -\infty$, $b = \infty$ является пространство $L^2(\mathbb{R}^1)$.

3) Пространство $L^2(\mathbb{R}^1, d\mu)$ – совокупность всех комплекснозначных функций f, интегрируемых с квадратом на $\mathbb{R}^1$ по нек-рой мере μ. Скалярное произведение задается формулой

$$(f, g) = \int f(x) g^*(x)\, d\mu(x).$$

Примеры 2) и 3) описывают собственные функции одномерного уравнения Шредингера, собственные функции краевых задач в методе разделения переменных и т. д.

4) Пространство $H(D)$ – совокупность всех аналитич. функций в единичном круге D комплексной плоскости. Скалярное произведение задается формулой

$$(f, g) = \iint_D f(z) g^*(z)\, dx dy, \quad z = x + iy.$$

Нередко (напр., при квантовании электромагнитного поля) приходится рассматривать пространства, к-рые не являются полными в смысле сходимости по норме $\| \ \|$ и(или) допускают равенство $(x, x) = 0$ для нек-рых $x \neq 0$. Каждое такое пространство называется предгильбертовым; существует стандартная процедура, позволяющая достроить его до обычного Г. п. Важный подкласс составляют сепарабельные Г. п., размерность к-рых (в смысле векторных пространств) равна мощности счетного множества. Этот подкласс весьма широк [в частности, все Г. п. в примерах 1)–4) сепарабельны; все подпространства сепарабельного Г. п. сепарабельны] и является основным для физич. приложений: в большинстве физич. моделей число состояний счетно. Любые два сепарабельных Г. п. изоморфны между собой, что позволяет выбрать удобную для физич. интерпретации форму. (Изоморфизм Г. п. H_1 и H_2 определяется как взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные соотношения в H_1 и H_2 и скалярное произведение.) Как всякому топологич. векторному пространству Г. п. H сопоставляется сопряженное векторное пространство H^* линейных непрерывных функционалов на H; важное отличительное свойство Г. п. составляет теорема Рисса, согласно к-рой H^* изоморфно H и для любого $f \in H^*$ найдется единственный элемент $x \in H$ такой, что $f(y) = (x, y)$ для всех $y \in H$.

Геометрия Г. п. является непосредственным обобщением геометрии конечномерных евклидовых пространств. Обширный спектр геометрич. свойств связан с отношением ортогональности: два вектора $x, y \in H$ (или два множества $M, N \subset H$) называются взаимно ортогональными, если $(x, y) = 0$ [или соответственно $(z, w) = 0$ для всех $z \in M$, $w \in N$]. Для каждого подпространства $M \subset H$ множество всех векторов из H, ортогональных к M, образует подпространство $M^{\perp}$, называемое ортогональным дополнением M и обладающее тем свойством, что

$$M \oplus M^{\perp} = H$$

($\oplus$ обозначает прямую сумму подпространств векторного пространства, в случае Г. п. отличающуюся тем дополнительным свойством, что элементы этой суммы взаимно ортогональны). Размерность M равна коразмерности $M^{\perp}$, $M^{\perp\perp} = M$. Каждый вектор $x \in H$ можно однозначно представить в виде $x = z + w$, где $z \in M$, $w \in M^{\perp}$; вектор z называется проекцией x на M. На этом основано, напр., выделение физич. степеней свободы в калибровочных теориях.

Одним из главных орудий анализа и конкретных расчетов в Г. п. служат ортонормированные базисы. Набор $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in A$, элементов Г. п. H (A – произвольное, не обязательно счетное, множество индексов) называется ортонормированной системой, если $(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, где символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ равен 1 при $\alpha = \beta$ и 0 – при $\alpha \neq \beta$. Эта система называется полной (или замкнутой), если любой вектор, ортогональный ко всем e_α, $\alpha \in A$, равен 0. Всякая полная ортонормированная система называется ортонормированным базисом в H.

Примеры ортонормированных базисов. 1) Система тригонометрич. функций $\{\exp(2\pi i n t),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ в $L^2(0, 1)$.

2) Система *Лежандра многочленов* $P_n(x)$ в $L^2(-1, 1)$.

3) Система *Лагерра многочленов* $L_n(x)$ в $L^2([0, \infty), e^{-x} dx)$.

4) Система *Эрмита многочленов* $H_n(x)$ в $L^2((-\infty, \infty), e^{-x^2} dx)$.

Во всяком Г. п. существует ортонормированный базис, все ортонормированные базисы данного Г. п. равномощны, и их мощность равна размерности H; в частности, H является сепарабельным тогда и только тогда, когда в нем существует счетный ортонормированный базис. Основное свойство ортонормированного базиса $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in A$: любой вектор $x \in H$ обладает однозначным разложением в виде

$$x = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha e_\alpha;$$

при этом

$$c_\alpha = (x, e_\alpha) \text{ и } \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2.$$

Последнее равенство называется равенством Парсеваля, а также, с учетом его очевидной геометрич. интерпретации, теоремой Пифагора; числовые множители c_α называются коэффициентами Фурье вектора x в ортонормированном базисе $\{e_\alpha\}$. Простота и удобство ортонормированных базисов сделали их общепринятыми в физич. приложениях, поэтому в физике предпочтительны сепарабельные Г. п., для к-рых существует стандартный метод построения ортонормированных базисов из произвольной системы линейно независимых векторов $u_1, u_2, \ldots$, имеющей плотную в H линейную оболочку. Данный метод называется процессом ортогонализации Грама – Шмидта и состоит в рекурсивном построении ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ из векторов u_i с помощью вспомогательной системы $\{v_i\}$, определяемой формулами:

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2 - \|v_1\|^{-2}(v_1, u_2)v_1, \ldots,$$

$$v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \|v_k\|^{-2}(v_k, u_n)v_k;$$

векторами искомого ортонормированного базиса тогда будут

$$e_i = v_i / \|v_i\|,$$

причем для любого $n = 1, 2, \ldots$ линейные оболочки наборов $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(u_1, \ldots, u_n)$ совпадают между собой. Указанный процесс служит обычным способом построения ортонормированных систем функций; в частности, все ортогональные многочлены в примерах 2)–4) получаются путем ортогонализации системы одночленов $1, x, x^2, \ldots$ в соответствующих Г. п.

Применения Г. п. В математич. и физич. приложениях возникают различные классы пространств, являющихся обобщениями Г. п.

1) Пространства l^p и L^p, $p \geqslant 1$.

Пространство l^p – совокупность всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}$, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Это линейное нормированное пространство с нормой

$$\|x\| = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right\}^{1/p}.$$

Пространство $L^p(a, b)$ – совокупность всех комплекснозначных функций, интегрируемых с p-й степенью на промежутке $[a, b]$, есть также линейное нормированное пространство с нормой

$$\|f\| = \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p}$$

(функции, совпадающие между собой почти всюду по мере Лебега на $[a, b]$, отождествляются). Основную область применений этих пространств составляют уравнения математич. физики.

2) Пространства с *индефинитной метрикой* со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, не удовлетворяющим, вообще говоря, аксиомам 1) и 4). В конечномерном случае такие пространства называются псевдоевклидовыми, к их числу принадлежит, в частности, *Минковского пространство-время* без учета кривизны. В бесконечномерном случае наиболее важный класс пространств с индефинитной метрикой образуют так наз. J-пространства, или пространства Крейна. В них, наряду с индефинитным скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, действует также обычное скалярное произведение (x, y), по отношению к к-рому каждое такое пространство H является Г. п.; оба произведения связаны между собой посредством так наз. метрического оператора, или оператора Грама J:

$$\langle x, y\rangle = (x, Jy)$$

для всех $x, y \in H$; $J = P_+ - P_-$, где $P_\pm$ – проекционные операторы в H такие, что $P_+ + P_- = I$ (I – единичный оператор).

Пространства Крейна применяют в механике и в ряде моделей квантовой теории поля; они используются для строгой формулировки калибровочной квантовой теории поля.

3) Оснащенные Г. п. представляют собой расширения Г. п. H, включающие не содержащиеся в H элементы и получаемые с помощью выделения плотного линейного подмножества Ω в Г. п. (любой элемент из H является пределом последовательности элементов из Ω). Подмножество Ω можно наделить своей топологией, более сильной, чем топология H, и определить сопряженное топологич. пространство Ω^*; поскольку из $\Omega \subset H$ следует, что $\Omega^* \supset H^*$, а $H^* = H$ (с точностью до изоморфизма), получается конструкция из трех пространств – триплет $\Omega \subset H \subset \Omega^*$, к-рый и носит название оснащенного Г. п. Введение расширенного пространства Ω^* – стандартный прием при рассмотрении неограниченных операторов и операторов с непрерывным спектром. Поскольку такие операторы типичны для физич. задач (напр., операторы координаты и импульса), то оснащенные Г. п. находят применение во многих областях физики. Одна из таких областей – аксиоматич. квантовая теория поля, весь формализм к-рой можно развить исходя из оснащенного Г. п. $S(\mathbb{R}^4) \subset L^2(\mathbb{R}^4) \subset S^*(\mathbb{R}^4)$, где S – пространство основных функций Шварца, а S^* – сопряженное к нему пространство *обобщенных функций* умеренного роста.

Сфера применений Г. п. в современной физике почти необозрима. Г. п.– центральный математич. объект, лежащий в основе всего аппарата квантовой физики. Представление множества состояний физич. системы с помощью Г. п. есть фундаментальный элемент математич. структуры в самом широком спектре физич. теорий: квантовой механике, квантовой статистич. физике, классич. и квантовой теории поля; оно является возможным также и в классич. механике. Такой же универсальностью обладает и представление наблюдаемых физич. систем с помощью самосопряженных операторов в Г. п. Наиболее тесная связь, достигающая почти полного сращивания между физич. и математич. исследованиями, сложилась между аппаратом Г. п. и квантовой механикой. Наконец, широкие и разнообразные применения Г. п. находят при изучении уравнений математич. физики, описывающих различные физич. процессы.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Морен К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; [3] Халмош П., Гильбертово пространство в задачах, пер. с англ., М., 1970; [4] Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1982. *С. С. Хоружий.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – диффеоморфизм или гладкий поток, имеющий гиперболические траектории (см. *Гиперболичность*). Основные классы Г. д. с.: системы Аносова (все траектории равномерно гиперболичны), *частично гиперболические динамические системы*, системы с ненулевыми *Ляпунова показателями* (множество неравномерно гиперболич. траекторий имеет положительный фазовый объем), системы с *гиперболическим множеством* (множество равномерно гиперболич. траекторий имеет нулевой фазовый объем), в том числе A-системы и *гиперболические аттракторы*. *Я. Б. Песин.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ – см. *Гиперболичность.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ФОРМА дифференциального приближения – одна из двух основных форм дифференциальных приближений для разностных схем нестационарной газовой динамики. Г. ф. получается непосредственно из разностного оператора, аппроксимирующего уравнения Эйлера, путем его разложения в ряд Тейлора по сеточным параметрам. Первые члены разложения представляют собой вторые производные по времени t и по пространственной координате x с различными знаками

$$+|A|\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |B|\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Наличие этих членов обусловливает *гиперболичность* получаемого дифференциального приближения.

Лит.: [1] Шокин Ю. И., Яненко Н. Н., Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике, Новосибирск, 1985; [2] Давыдов Ю. М., Дифференциальные приближения и представления разностных схем, М., 1981. *Ю. М. Давыдов.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР – компактное инвариантное *гиперболическое множество* Λ динамической системы f^t, у которого существует такая окрестность $U \supset \Lambda$, что

$$\overline{f^t(U)} \subset U \text{ и } \Lambda = \bigcap_{t \geqslant 0} f^t(U).$$

Г. а. состоит из неустойчивых слоев своих точек.

Лит.: [1] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975. *Я. Б. Песин.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Эллиптический интеграл.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО гладкой динамической системы $\{S^t\}$ – компактное подмножество F фазового многообразия M, целиком состоящее из траекторий, в окрестности каждой из которых поведение (по отношению к ней) всех соседних траекторий (включая и те, которые не лежат в F) напоминает поведение траекторий возле седла. Точнее, Г. м. гладкой динамич. системы $\{S^t\}$ – это такое компактное инвариантное подмножество F фазового многообразия M, что в каждой точке $x \in F$ в касательном пространстве T_xM к M имеются подпространства E^s_x и E^u_x, для к-рых выполняются следующие два условия.

1) Действие дифференциалов $\widetilde{S}^t_x : T_xM \to TS^t_xM$ отображений $S^t : M \to M$ в точке x на векторы $\xi \in E^s_x$, $\eta \in E^u_x$ удовлетворяет неравенствам:

$$|\widetilde{S}^t_x\xi| \leqslant a|\xi|e^{-ct} \text{ при } t \geqslant 0,$$
$$|\widetilde{S}^t_x\xi| \geqslant b|\xi|e^{-ct} \text{ при } t \leqslant 0,$$
$$|\widetilde{S}^t_x\eta| \leqslant a|\eta|e^{ct} \text{ при } t \leqslant 0,$$
$$|\widetilde{S}^t_x\eta| \geqslant b|\eta|e^{ct} \text{ при } t \geqslant 0$$

с нек-рыми константами a, b, $c > 0$, не зависящими от x.

2) Если $\{S^t\}$ – каскад (то есть время t принимает целочисленные значения), то

$$T_xM = E^s_x \oplus E^u_x,$$

а если $\{S^t\}$ – поток (то есть время t непрерывно), то

$$T_xM = E^s_x \oplus E^u_x \oplus E^n_x,$$

где E^n_x – одномерное подпространство, натянутое на вектор фазовой скорости (тем самым предполагается, что последний нигде на F не обращается в нуль). Кроме того, для удобства нек-рых формулировок бывает целесообразно причислить к Г. м. такие положения равновесия потоков, для к-рых собственные значения матрицы линеаризованной системы расположены вне мнимой оси.

Классич. пример Г. м. потока – периодич. траектория, для к-рой лишь один мультипликатор уравнения в вариациях равен по модулю единице. У нек-рых систем все фазовое пространство является Г. м. Много примеров Г. м. было обнаружено при изучении динамич. систем классич. происхождения (напр., в небесной механике, см. [1]). В общем виде Г. м. были введены С. Смейлом (S. Smale) в 1965 (см. [2]), и с тех пор они играют важную роль в теории гладких динамич. систем, будучи как объектом исследования, так и составной частью многих примеров (см. также [3]).

Лит.: [1] Кушниренко А. Г., Каток А. Б., Алексеев В. М., Гладкие динамические системы, в кн.: Девятая летняя математич. школа, Киев, 1972, с. 50–341; [2] Смейл С., «Успехи математич. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113–85; [3] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975. *Д. В. Аносов.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение* с частными производными второго порядка.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ ПРИНЦИП – принцип, состоящий в неувеличении при голоморфных отображениях конформно инвариантной метрики, которая вводится в каждой плоской области, имеющей более двух граничных точек (или римановой поверхности гиперболич. типа). В случае, когда область – единичный круг $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, эта метрика задается элементом длины

$$ds = (1 - |z|^2)^{-1}|dz|.$$

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *В. В. Горяйнов.*

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ – свойство *динамической системы*, выражающее определенный тип поведения ее траекторий. Он соответствует такому поведению близких (точнее, бесконечно близких) траекторий, при к-ром имеются траектории, притягивающиеся к исходной при $t \to +\infty$, и другие, притягивающиеся к ней же при $t \to -\infty$. В целом эта картина напоминает поведение траекторий в окрестности седловой особой точки. Траектория, окрестность к-рой допускает указанное выше описание, называется гиперболической, а динамич. система, имеющая такие траектории, – *гиперболической динамической системой.*

Если $f^t(x)$ – гиперболич. траектория динамич. системы f^t ($t \in \mathbb{Z}$ или $t \in \mathbb{R}$) на гладком римановом многообразии M, то в каждой точке $f^t(x)$ существуют два подпространства $E^s_t(x)$ и $E^u_t(x)$ касательного пространства $T_{f^t(x)}M$, называемые устойчивым и неустойчивым такие, что

1) $df^\tau E^s_t(x) = E^s_{t+\tau}(x)$, $df^\tau E^u_t(x) = E^u_{t+\tau}(x)$;

2) для всякого $\tau \geqslant 0$

$$\|df^\tau v\| \leqslant C(t)\lambda^\tau \|v\|, \ v \in E^s_t(x),$$
$$\|df^\tau v\| \leqslant C(t)\lambda^\tau \|v\|, \ v \in E^u_t(x),$$

где $0 < \lambda < 1$, $C(t) > 0$ – нек-рые постоянные, $\|\cdot\|$ – норма в $T_{f^t(x)}M$, индуцированная римановой метрикой;

3) $\angle(E^s_t(x), E^u_t(x)) \geqslant K(t)$,

где $K(t) > 0$ – нек-рая постоянная.

Если $C(t)$ и $K(t)$ не зависят от t, Г. называется равномерной (или сильной), в противном случае – неравномерной (или слабой); в этом случае

$$C(t+\tau) \geqslant C(t)\exp(-\varepsilon\tau), \ K(t+\tau) \geqslant K(t)\exp(-\varepsilon\tau)$$

с малым ε (по сравнению с $-\ln\lambda$). Если $E^s_t(x)$ и $E^u_t(x)$ порождают все $T_{f^t(x)}M$, то Г. называется полной, в противном случае – частичной.

В малой окрестности каждой точки гиперболич. траектории $f^t(x)$ существуют гладкие локальные устойчивые и неустойчивые подмногообразия $V^s_t(x)$ и $V^u_t(x)$, касающиеся $E^s_t(x)$ и $E^u_t(x)$. Они характеризуются тем, что проходящие через них траектории стремятся к траектории $f^t(x)$ (с экспоненциальной скоростью) при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ (см. *Адамара – Перрона теорема*).

Гиперболич. траектория неустойчива, то есть «почти все» траектории, начинающиеся вблизи нее, со временем от нее «убегают» (кроме тех, что начинаются на $V^s_t(x)$ или $V^u_t(x)$). Для гиперболич. динамич. систем характерно, что эти траектории сразу же, либо с течением времени, попадают в окрестность нек-рой другой гиперболич. траектории. Это приводит к тому, что траектории «запутываются» между собой и глобальная топологич. картина их поведения оказывается очень сложной. При этом «типичная» в нек-ром естественном смысле, траектория является хаотической, то есть ее поведение не отличимо от случайного. Точнее, это означает, что гиперболич. динамич. система обладает инвариантной мерой, сосредоточенной на множестве гиперболич. траекторий с «хорошими» эргодич. свойствами.

Лит.: [1] Песин Я. Б., Общая теория гладких гиперболических динамических систем, в кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 123–72. *Я. Б. Песин.*

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – частное решение гипергеометрического уравнения (уравнения Гаусса):

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]u' - \alpha\beta u = 0, \qquad (*)$$

регулярное в окрестности точки $z=0$ комплексной плоскости при $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ и любых значениях α и β. Г. ф. при $|z|<1$ можно представить с помощью гипергеометрич. ряда (ряда Гаусса):

$$u_1(z) = F(\alpha,\beta;\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!},$$

где

$$(a)_n \equiv a(a+1)\ldots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a).$$

Основное интегральное представление

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\,dt$$

при $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ определяет однозначную функцию, регулярную во всей плоскости z с разрезом вдоль вещественной оси при $z \geqslant 1$. Справедлива формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z).$$

Любые три функции $F(\alpha_i, \beta_i; \gamma_i; z)$, $i=1, 2, 3$, в случае, когда $\alpha_i-\alpha_k$, $\beta_i-\beta_k$, $\gamma_i-\gamma_k$ – целые числа, связаны между собой соотношением

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(z)F(\alpha_i, \beta_i; \gamma_i; z) = 0,$$

где $C_i(z)$ – нек-рые многочлены по z. Существуют также функциональные соотношения, напр.:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = F(\beta, \alpha; \gamma; z),$$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z).$$

Если α и β – нуль или целое отрицательное число, то Г. ф. превращается в многочлен, к-рый с точностью до постоянного множителя совпадает с многочленом Якоби (см. *Ортогональные многочлены*). Через Г. ф. выражаются многие элементарные и специальные функции, напр. сферич. функции, эллиптич. интегралы и т. д. (см. также *Вырожденная гипергеометрическая функция*). Г. ф. находят применение в квантовой механике, теории волн и других областях.

Второе линейно независимое решение уравнения (*) при $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ можно записать следующим образом:

$$u_2(z) = z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z).$$

Обобщенная гипергеометрическая функция задается так наз. обобщенным гипергеометрич. рядом

$${}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p; \gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n\cdots(\gamma_q)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

В этих обозначениях

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z).$$

Существуют обобщения Г. ф. на случай многих переменных.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., т. 1, 2 изд., М., 1973; [2] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, 2 изд., М., 1984; [3] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979. *В. И. Битюцков.*

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Гипергеометрическая функция, Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

ГИПЕРЗВУК – см. *Звуковые волны.*

ГИПЕРПОЛОДИЯ – см. *Эйлера–Пуансо случай.*

ГИПЕРФУНКЦИЯ – дальнейшее (вслед за *обобщенной функцией*) развитие классического понятия функции. Г. введены M. Cato (M. Sato) в конце 50-х гг. 20 в. Основой послужило *аналитическое представление* обобщенной функции с отказом от требования существования у представляющих аналитич. функций граничных значений в каком-либо смысле. Г. являются главным элементом нового раздела математики – микролокального анализа, тесно связанного с теорией линейных уравнений с частными производными и с комплексным анализом.

Пусть $\mathscr{H}$ – пучок ростков аналитич. функций в $\mathbb{C}^n$. Пусть O – область в $\mathbb{R}^n$ и Ω – ее комплексная окрестность (то есть область в $\mathbb{C}^n$ такая, что $\Omega \cap \mathbb{R}^n = 0$). Линейное пространство $\mathscr{B}(O)$ Г. на O, по определению, есть $\boldsymbol{H_O(\Omega; \mathscr{H})}$ – n-я группа когомологий комплексной области Ω с коэффициентами в пучке $\mathscr{H}$ и с носителями в вещественной области O. Согласно общим теоремам алгебраич. топологии, $\mathscr{B}(O)$ не зависит от выбора Ω. Всякая Г. $g \in \mathscr{B}(O)$ задается набором $\{f_j;\ j=1, \ldots, N\}$ функций $f_j(z)$, аналитических в тубоидах $D_j(O)$, где число N и тубоиды $D_j(O)$ зависят от g. Верно и обратное – всякий набор аналитич. функций указанного вида задает Г. Набор $\{f_j;\ j=1,\ldots,N\}$ задает нулевую Г. тогда и только тогда, когда существуют функции $f_{jk}(z) = -f_{kj}(z)$, аналитические в тубоидах $D_{jk}(O) = D_{kj}(O) \supset D_j(O) \cup D_k(O)$ и такие, что

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{N} f_{jk}(z), \quad z \in D_j(O), \quad j = 1,\ldots,N$$

(см. также *Аналитическое представление* обобщенной функции). Таким образом, $\mathscr{B}(O)$ можно отождествить с факторпространством $R(O)/Z(O)$, где линейное пространство $R(O)$ состоит из всех конечных наборов $\{f_j\}$ указанного вида, а его подпространство $Z(O)$ образовано наборами, задающими нулевую Г. Пространство $\mathscr{B}(O)$ не обладает разумной отделимой локально выпуклой топологией. Аналитич. представление обобщенных функций осуществляет вложение важнейших пространств обобщенных функций (включая *Шварца распределения* и *ультрараспределения*) в пространство Г.

Для подобласти ω области O определено отображение сужения $\mathscr{B}(O) \to \mathscr{B}(\omega)$. Для Г. $g \in \mathscr{B}(O)$, задаваемой набором $\{f_j\}$, где функции f_j аналитичны в тубоидах $D_j(O)$, сужение $g|_\omega \in \mathscr{B}(\omega)$ представляется набором $\{f_j|_\omega\}$, где $f_j|_\omega$ – сужения функций f_j на тубоиды $D_j(\omega) = D_j(O) \cap \omega + i\mathbb{R}^n$. С такой операцией сужения Г. образуют пучок, причем вялый. Первое означает, что Г. полностью определяются своими локальными сужениями и всякое семейство локально определенных попарно согласованных Г. «склеивается» в единую Г. Второе означает, что каждая Г., изначально определенная в области O, продолжается на все $\mathbb{R}^n$.

Носитель $\operatorname{supp} g$ Г. $g \in \mathscr{B}(O)$ определяется как наименьшее замкнутое подмножество из O, вне к-рого g равна нулю. Множество Г. $g \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, носители к-рых лежат в компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, отождествляется с пространством вещественных *аналитических функционалов* $\mathscr{A}'[K]$. Исходя из этого, в начале 60-х гг. A. Мартино (A. Martineau) дано эквивалентное определение Г. как локально конечной суммы вещественных аналитич. функционалов.

Всякая вещественная аналитич. функция $\Phi(x) \in \mathscr{A}(O)$ является мультипликатором на пространстве Г. $\mathscr{B}(O)$. Для Г. g, задаваемой набором $\{f_j\}$, функции $f_j(z)$ аналитичны в тубоидах $D_j(O)$, произведение Φg определяется набором $\{\Phi f_j\}$, где функции $\Phi(z)f_j(z)$ аналитичны в тубоидах $D_j(O) \cap \Omega$, Ω – комплексная окрестность области O, в к-рую, по определению, аналитически продолжается $\Phi(x)$.

Для Г. $g \in \mathscr{B}(O)$, задаваемой набором $\{f_j\}$, частная производная $D_\nu g \in \mathscr{B}(O)$ определяется набором $\{D_\nu f_j\}$, где

$D_\nu = \partial/\partial x_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Наряду с дифференциальными операторами конечного порядка в пространстве Г. действуют и операторы бесконечного порядка

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha D^\alpha,$$

где постоянные коэффициенты c_α удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{|\alpha|\to\infty}} \sqrt{|c_\alpha|\alpha!} = 0,$$

мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Лит.: [1] Шапира П., Теория гиперфункций, пер. с франц., М., 1972; [2] Хермандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, пер. с англ., т. 1, М., 1986.

В. В. Жаринов.

ГИПЕРЦЕПНОЕ УРАВНЕНИЕ – приближенное замкнутое нелинейное интегральное уравнение для парной функции распределения $n_2(r)$:

$$\ln n_2(r) = -\beta V(r) + n\int ds[n_2(s) - 1 -$$

$$- \ln n_2(s) - \beta V(s)][n_2(|r - s|) - 1],$$

где $V(r)$ – потенциал парного взаимодействия частиц, n – плотность числа частиц, β – обратная температура. Г. у. впервые получено диаграммным методом и описывает поведение систем с большой плотностью.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., М., 1978, т. 1, гл. 8; [2] Lecuwen J. M. van, Groeneweld J., de Boer J., «Physica», 1959, v. 25, № 5, p. 792.

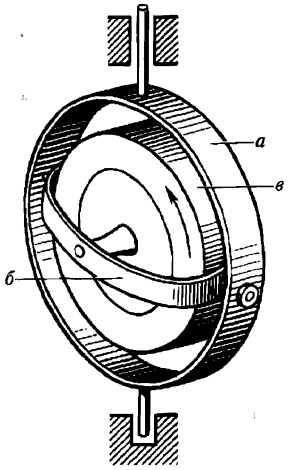
Д. П. Санкович.

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Риманова поверхность.*

ГИРОМАГНИТНОЕ ОТНОШЕНИЕ – см. *Спин.*

ГИРОСКОП – быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого (ось симметрии), проходящая через неподвижную точку, может изменять свое направление в пространстве.

Классич. Г. в кардановом подвесе представлен на рис. Карданов подвес используется для конструктивного обеспечения неподвижной точки. Он состоит из двух колец, оси вращения к-рых взаимно перпендикулярны и пересекаются в одной точке O, лежащей на оси симметрии Г. (ротора). Если центр тяжести совпадает с центром карданова подвеса O, то Г. называется астатическим (уравновешенным), в противном случае – тяжелым.



Классический карданов подвес: *а* – внешнее кольцо; *б* – внутреннее кольцо; *в* – ротор.

Если момент M_O сил, приложенных к ротору, относительно точки O равен нулю, то такой Г. сохраняет направление оси симметрии в инерциальном пространстве независимо от характера движения основания, на к-ром он установлен. Если $M_O \neq 0$, то ось симметрии не сохраняет направления в инерциальном пространстве. Характер ее движения зависит от соотношения скорости Ω вращения тела вокруг оси симметрии и скорости ω обращения самой оси. При $\omega \ll \Omega$ движение оси называется прецессионным. В этом случае кинетич. момент $\boldsymbol{K}$ тела мало отличается от так наз. собственного кинетич. момента $H(H = C\Omega$, где C – полярный момент инерции тела), что позволяет перейти к основному уравнению прецессионной теории Г. $\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{M}_O$ (см. *Гироскопа математическая теория*).

Задача о движении Г. в кардановом подвесе является обобщением классич. задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки и для нее может обсуждаться вопрос интегрируемости.

Современные Г. служат датчиками инерциальной информации и используются для определения ориентации объекта, его угловой скорости и ускорения, линейного ускорения, вертикали места, для стабилизации объекта и т. д. Точность современных систем управления движением самолетов, кораблей, ракет, космич. объектов в первую очередь определяется точностью гироскопич. приборов. Это обстоятельство, а также задачи понижения стоимости и миниатюризации стимулируют поиск новых принципов построения Г. В настоящее время уже известен целый ряд физич. явлений и принципов, на основе к-рых могут быть построены гироскопич. приборы: вибрационные, шаровые, магнитогидродинамические, волновые, лазерные, ядерные и другие Г.

ГИРОСКОПА МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ – теория, описывающая поведение быстро вращающегося симметричного твердого тела, имеющего одну неподвижную точку,– *гироскопа* (рис. 1). Все фигурирующие ниже векторы рассматриваются в нек-рой *инерциальной системе отсчета.*

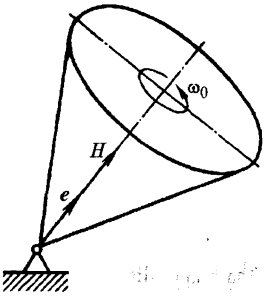


Рис. 1. Гироскоп: $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор оси динамической симметрии тела; $\boldsymbol{H}$ – кинетический момент гироскопа; ω_0 – угловая скорость.

Пусть вектор $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор оси динамич. симметрии тела, C – момент инерции тела вокруг этой оси (полярный момент инерции), A – момент инерции тела вокруг любой оси, перпендикулярной оси динамич. симметрии (экваториальный момент инерции), J – тензор инерции тела, имеющий в главных осях вид

$$J = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix}.$$

Тензор инерции обладает свойствами: $J\boldsymbol{e} = C\boldsymbol{e}$ и $J\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{r}$ для любого $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{e}$, то есть векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{r}$ являются собственными векторами тензора инерции. Мгновенная угловая скорость тела Ω, а также момент приложенных к телу внешних сил N представимы разложениями по собственным векторам тензора инерции

$$\Omega = \omega_0 \boldsymbol{e} + \omega \quad (\omega \boldsymbol{e} = 0),$$

$$N = n_0 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{n} \quad (\boldsymbol{n}\boldsymbol{e} = 0).$$

Момент количества движения тела равен

$$\boldsymbol{K} = J\Omega = J(\omega_0 \boldsymbol{e} + \omega) = C\omega_0 \boldsymbol{e} + A\omega = H\boldsymbol{e} + A\omega,$$

где через $H\boldsymbol{e}$ обозначен так наз. собственный кинетич. момент гироскопа (H – его модуль).

Уравнения динамики гироскопа имеют вид

$$\dot{H}\boldsymbol{e} + H\dot{\boldsymbol{e}} + A\boldsymbol{e} \times \ddot{\boldsymbol{e}} = n_0 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{n}.$$

Они могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{H} &= n_0, \\ A\boldsymbol{e} \times \ddot{\boldsymbol{e}} + H\dot{\boldsymbol{e}} &= \boldsymbol{n}. \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Обычно положение динамически симметричного твердого тела вокруг оси симметрии интереса не представляет, поэтому приведенные уравнения определяют фазовое со-

стояние гироскопа, выражаемое переменными H, $\boldsymbol{e}$, $\dot{\boldsymbol{e}}$, то есть величиной собственного кинетич. момента, единичным вектором его направления и скоростью изменения этого вектора.

Если проекция момента приложенных к гироскопу сил на ось симметрии равна нулю ($n_0 = 0$), то собственный кинетич. момент постоянен по модулю $H = \text{const}$ и уравнения (1) понижаются в порядке.

Движение гироскопа по инерции. В этом случае $n_0 = 0$, $\boldsymbol{n} = 0$ и $H = (\boldsymbol{Ke})$. Это означает, что в движении по инерции угол между неподвижным в пространстве вектором $\boldsymbol{K}$ и осью симметрии постоянен, то есть ось гироскопа описывает конич. поверхность. Вектор $\boldsymbol{e}$ описывает конич. поверхность с постоянной угловой скоростью $\lambda = \frac{1}{A}\boldsymbol{K}$. Такое движение называется свободной размерной прецессией гироскопа.

Движение тяжелого гироскопа. Пусть центр масс гироскопа лежит на оси динамич. симметрии, радиус-вектор центра масс имеет вид $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}$, r – расстояние от точки подвеса. Тогда в поле тяжести на гироскоп действует момент

$$N = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P} = r\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{P} = rmg\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_g,$$

где m – масса, g – ускорение свободного падения, $\boldsymbol{P}$ – сила веса. Поскольку скалярное произведение $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{P}) = 0$, то $n_0 = 0$ и $H = \text{const}$.

Уравнения (1) приобретают вид:

$$A\boldsymbol{e} \times \ddot{\boldsymbol{e}} + H\dot{\boldsymbol{e}} = d\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_g \ (d = rmg). \qquad (2)$$

Это уравнение также допускает частное решение вида $\dot{\boldsymbol{e}} = \nu \times \boldsymbol{e}$, представляющее собой регулярную прецессию. Пусть $\nu = \nu\boldsymbol{e}_g$ – постоянная угловая скорость прецессии, направленная по силе тяжести; условие существования такой прецессии:

$$-A\nu^2(\boldsymbol{ee}_g) + H\nu + d = 0. \qquad (3)$$

Два значения угловой скорости прецессии, если $\cos\alpha \neq 0$:

$$\nu = \frac{H \pm \sqrt{H^2 + 4Ad\cos\alpha}}{2A\cos\alpha}, \qquad (4)$$

где α – угол между осью симметрии гироскопа и направлением силы тяжести. Зависимость корней от величины кинетич. момента удобно анализировать, если разрешить (3) относительно H:

$$H = \frac{A\nu^2\cos\alpha - d}{\nu}.$$

Эта зависимость изображена на рис. 2. Качественно различными являются три случая. Первый случай $\cos\alpha = 0$ означает ортогональность оси симметрии гироскопа полю тяжести. Частота прецессии одна $\nu = -d/H$, направление скорости прецессии противоположно полю тяжести, если $H > 0$. Второй случай $\cos\alpha > 0$ (центр масс находится ниже центра подвеса). В этом случае имеются две частоты прецессии, определяемые по формуле (4). Третий случай $\cos\alpha < 0$ (центр масс находится выше центра подвеса). В этом случае регулярная прецессия не существует, если $H^2 < -4Ad\cos\alpha$, имеется одна частота, если $H^2 = -4Ad\cos\alpha$; и – две частоты, если $H^2 > -4Ad\cos\alpha$.

При больших значениях H приближенные значения для частот прецессии можно определять, если вместо (3) записать:

$$-A\nu^2\cos\alpha + H\nu = 0, \ H\nu + d = 0.$$

Из первого соотношения получается приближенное значение для большей частоты $\nu \simeq H/A\cos\alpha$, называемой частотой быстрой прецессии, или нутации. Из второго соотношения получается приближенное значение для меньшей частоты $\nu \simeq -d/H$, называемое частотой медленной прецессии, или просто прецессии. Частота нутации пропорциональна H, не зависит от неуравновешенности d и совпадает с полученной выше частотой прецессии

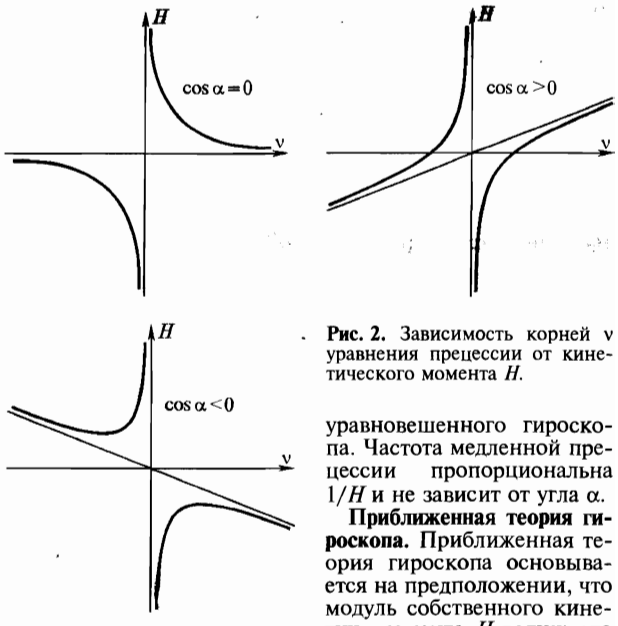


Рис. 2. Зависимость корней ν уравнения прецессии от кинетического момента H.

уравновешенного гироскопа. Частота медленной прецессии пропорциональна $1/H$ и не зависит от угла α.

Приближенная теория гироскопа. Приближенная теория гироскопа основывается на предположении, что модуль собственного кинетич. момента H велик; это означает, что в выражении для полного момента количества движения $\boldsymbol{K} = H\boldsymbol{e} + A\boldsymbol{\omega}$ полагают $H \gg |A\boldsymbol{\omega}|$ и тогда $\boldsymbol{K} \cong H\boldsymbol{e}$, что приводит к следующему приближенному виду уравнений (1):

$$\dot{H} = n_0, \ H\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{n},$$

к-рые называются уравнениями прецессионной теории, или прецессионными уравнениями. При приложении к оси гироскопа силы он движется не по направлению силы, а по направлению момента, то есть перпендикулярно силе.

Устойчивость вертикального положения волчка Лагранжа. Симметричным, или лагранжевым, волчком называется закрепленное в неподвижной точке O твердое тело, у к-рого эллипсоид инерции в O есть эллипсоид вращения и центр тяжести лежит на оси вращения. В уравнениях (2) имеется два стационарных решения ($\dot{\boldsymbol{e}} \equiv 0$):

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_g \text{ и } \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{e}_g.$$

Первое соответствует нижнему положению равновесия, второе – верхнему. Слова «низ» и «верх» связаны с направлением силы тяжести, то есть вектора $\boldsymbol{e}_g$.

Пусть ε – малое отклонение от положения равновесия: $\boldsymbol{e} = \varepsilon \pm \boldsymbol{e}_g$. Если выбрать оси неподвижной системы координат так, чтобы $\boldsymbol{e}_g = (0, 0, -1)$, то приращение ε можно искать в виде $\varepsilon = (x, y, 0)$. Тогда уравнение (2) запишется в виде системы:

$$\pm A\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \end{vmatrix} + H(\dot{x}, \dot{y}, 0) = d\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Или:

$$\mp A\ddot{x} + H\dot{y} = dx,$$
$$\pm A\ddot{y} + H\dot{x} = -dy.$$

Характеристич. определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \mp A\lambda^2 - d & H\lambda \\ -H\lambda & \mp A\lambda^2 - d \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда следует

$$(A\lambda^2 \pm d)^2 = -H^2\lambda^2.$$

Знак + соответствует нижнему положению равновесия, для него корни:

$$\lambda = \pm\frac{H}{2A}i \pm \sqrt{-\frac{H^2}{4A^2} - \frac{d}{A}}$$

являются чисто мнимыми. Отсюда следует устойчивость нижнего положения равновесия. Знак − соответствует верхнему положению равновесия. Для него

$$\lambda = \frac{\pm Hi \pm \sqrt{-H^2 + 4Ad}}{2A},$$

откуда следует, что устойчивость имеет место лишь при достаточно большом H:

$$H^2 \geqslant 4Ad.$$

Это условие устойчивости вертикального положения равновесия волчка называется условием Маиевского. Это условие совпадает при $\cos\alpha = -1$ с условием существования регулярной прецессии.

Если симметричное тяжелое тело раскрутить достаточно быстро, чтобы выполнялось приведенное условие, то вертикальное положение оси симметрии, при к-ром центр масс лежит выше точки подвеса, становится устойчивым.

Если учесть сколь угодно малые диссипативные силы, то устойчивость нарушается, каким бы большим ни был кинетич. момент H. Тем не менее найденное условие устойчивости имеет большое практич. значение: если оно не выполнено, то развитие неустойчивости происходит быстро и оно почти не зависит от диссипации, если последняя невелика. Если же это условие выполнено, то, несмотря на формальную неустойчивость при наличии диссипации, развитие этой неустойчивости тем медленнее, чем меньше диссипативные силы и чем больше H. Приведенное условие разделяет область «катастрофической» неустойчивости и область «вялой» неустойчивости (временной устойчивости).

Гироскоп в карданове подвесе. Одним из способов технич. реализации закрепления гироскопа в неподвижной точке является карданов подвес, состоящий из двух колец, сопряженных друг с другом и с гироскопом (ротором) так, как это показано на рис. 3. Полученная система трех тел не сохраняет полностью всех свойств идеального гироскопа. Для описания ее динамики полагают, что оси вращения колец совпадают с их главными центральными моментами инерции. Проекции абсолютной угловой скорости внешнего кольца на его главные оси имеют вид: $\{\dot\alpha, 0, 0\}$; проекции абсолютной угловой скорости внутреннего кольца на его главные оси: $\{\dot\alpha\cos\beta, \dot\beta, \dot\alpha\sin\beta\}$; все то же самое для ротора: $\{\dot\alpha\cos\beta, \dot\beta, \dot\alpha\sin\beta + \dot\gamma\}$, где γ − угол поворота ротора относительно внутреннего кольца.

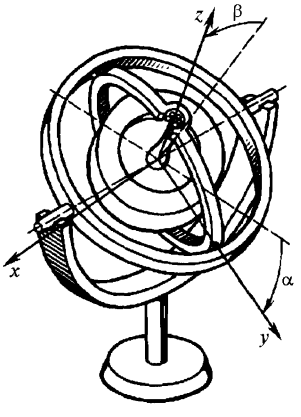


Рис. 3. Карданов подвес.

Пусть A_2 − момент инерции наружного кольца вокруг его оси вращения, A_1, B_1, C_1 − главные моменты инерции внутреннего кольца и A, $B=A$, C − главные моменты инерции ротора; кинетич. энергия всей системы трех тел записывается в виде:

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot\alpha^2 F(\beta) + \dot\beta^2 B_0 + C(\dot\gamma + \dot\alpha\sin\beta)^2\right].$$

Здесь

$$F(\beta) = A_2 + (A_1 + A)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta,\ B_0 = A + B_1.$$

В случае, если на гироскоп никаких внешних моментов не действует, кинетич. энергия является первым интегралом движения. Поскольку она от углов α и γ не зависит, то эти углы являются циклич. координатами, что позволяет выписать еще два интеграла

$$H = \frac{\partial T}{\partial\dot\gamma} = C(\dot\gamma + \dot\alpha\sin\beta) \equiv \text{const},$$

$$G = \frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} = \dot\alpha F(\beta) + C(\dot\gamma + \dot\alpha\sin\beta)\sin\beta \equiv \text{const}.$$

Выражая из этих соотношений $\dot\alpha$ и $\dot\gamma$ через постоянные G и H и подставляя их в выражение для кинетич. энергии, можно получить уравнение

$$B_0\dot\beta^2 + \frac{(G - H\sin\beta)^2}{F(\beta)} = 2E \equiv \text{const},$$

решение к-рого сводится к гиперэллиптич. квадратурам. Качественное поведение траекторий в плоскости $(\beta, \dot\beta)$ изображено на рис. 4 для случая достаточно быстрого вращения ($H > G$).

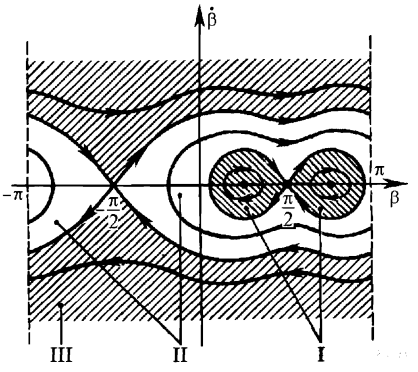


Рис. 4. Качественное поведение траекторий движения гироскопа.

Выделяются три области, в к-рых характер движения различен: I − область либрационных движений вокруг одной из особых точек $\beta = \arcsin G/H$ или $\beta = \pi - \arcsin G/H$; II − область либрационных движений вокруг сразу трех особых точек (к указанным двум добавляется еще $\beta = \pi/2$), в этом движении у гироскопа дважды за период складываются кольца; III − область ротационных движений, изменение угла β монотонно нарастающее. Изменение угла $\alpha(t)$ носит периодич. характер, если движение соответствует областям II и III. Если движение соответствует области I, то к периодич. составляющей $\alpha(t)$ добавляется линейно растущая составляющая со временем. Это означает, что в гироскопе в карданове подвесе при отсутствии внешних сил и наличии малых колебаний оси вектор кинетич. момента систематически изменяет свое направление в пространстве (эффект Магнуса). Количественно этот эффект описывается формулой

$$\dot\alpha_{\text{ср}} = -\frac{H(A_2 + C_1)B_0^2}{2F^2(\beta_0)}\Delta^2\sin\beta_0,$$

где

$$\dot\alpha_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{G - H\sin\beta}{F(\beta)}\,dt,$$

$\beta_0 = \arcsin G/H$ − угол, в окрестности к-рого осуществляются колебания, Δ − произвольная постоянная, T − период.

Систематич. эволюция вектора момента количества движения в отсутствие приложенных внешних моментов объясняется появлением моментов реакции опор наружного кольца, перпендикулярных оси его вращения.

Если на гироскоп действуют внешние силы, то, используя полученное ранее выражение для кинетич. энергии, уравнения движения можно представить в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} - \frac{\partial T}{\partial\alpha} = Q_\alpha,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\beta} - \frac{\partial T}{\partial\beta} = Q_\beta,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\gamma} - \frac{\partial T}{\partial\gamma} = Q_\gamma,$$

дающих следующий вид уравнений

$$\frac{d}{dt}(\dot\alpha + H\sin\beta) = Q_\alpha,$$

$$B_0\ddot\beta - \frac{1}{2}\dot\alpha^2 F'(\beta) - H\dot\alpha\cos\beta = Q_\beta,\quad \dot H = Q_\gamma.$$

В инженерных расчетах полагают величину кинетич. момента H достаточно большой и постоянной. Пренебрегая в левых частях уравнений членами, не содержащими H, получают прецессионные уравнения:

$$H\beta\cos\beta = Q_\alpha,\ -H\dot{\alpha}\cos\beta = Q_\beta,$$

широко используемые в инженерной практике.

Лит.: [1] Магнус К., Гироскоп. Теория и применение, пер. с нем., М., 1974; [2] Ишлинский А. Ю., Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация, М., 1976. *В. Ф. Журавлев.*

ГЛАВНАЯ КРИВИЗНА – экстремальное значение нормальной кривизны поверхности (то есть кривизны плоского сечения поверхности, проходящего через нормаль к ней).

ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ ряда Лорана – см. *Лорана ряд.*

ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ интеграла – значение несобственного интеграла, регуляризованного по Коши. Для Г. з. интеграла используют следующие обозначения:

$$P\int,\ \text{⨍},\ \text{v. p.}\int$$

(сокращение v. p. от valeur principale; предложено О. Коши, A. Cauchy). Модели, применяемые для описания физич. явлений, как правило, идеализируют реальность, отбрасывая несущественные или усложняющие детали. При математич. обработке таких моделей и возникают несобственные интегралы. На практике встречаются три случая.

1) Интеграл в неограниченных пределах:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Регуляризация состоит во введении симметричных конечных пределов – A, A, тогда

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx,$$

если этот предел существует. Для нечетной функции $f(x)$ Г. з. интеграла равно нулю.

2) Интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

от неограниченной функции $f(x)$, интегрируемой на любой части интервала (a, b), не содержащей особой точки c, $a<c<b$. Регуляризация состоит в симметричном «вырезании» окрестности точки c из интервала:

$$P\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b\right) f(x)dx,$$

если этот предел существует.

3) Интеграл типа Коши

$$\int_L f(\xi)\,d\xi/(\xi - a),$$

где L – контур в комплексной плоскости, ξ – точка на нем, а функция f интегрируема на L (см. *Коши интеграл*). Регуляризация состоит в «вырезании» из L части, содержащейся в круге радиуса ε с центром в a. Г. з. интеграла типа Коши дается формулами Сохоцкого

$$(\xi - a \pm i0)^{-1} = \mp i\pi\delta(\xi - a) + P(\xi - a)^{-1},$$

определяющими обобщенную функцию $P(\xi-a)^{-1}$ через граничное значение аналитич. функции $(z-a)^{-1}$ и дельта-функцию $\delta(\xi - a)$. *Е. Д. Соломенцев.*

ГЛАВНОЕ РАССЛОЕНИЕ – см. *Расслоение.*

ГЛАВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ – см. *Малые колебания.*

ГЛАВНЫЕ ОСИ инерции – см. *Момент инерции.*

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР – см. *Статика.*

ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ – см. *Статика.*

ГЛАВНЫЙ СИМВОЛ оператора, гамильтониан,– функция на кокасательном расслоении T^*M к гладкому многообразию M, определяемая по $1/h$-псевдодифференциальному оператору $\hat{H}$ следующим образом.

Пусть

$$\hat{H}\left(e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\varphi(x)\right) \sim e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\sum_{k=0}^{\infty} F_k\left(x, S, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi\cdot h^k.$$

Функция $F_0(x, S)$ зависит лишь от дифференциала dS функции $S(x)$ в точке x_0 и поэтому представляет собой функцию на T^*M, к-рая и называется главным символом оператора.

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [2] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978. *Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.*

ГЛАДКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – см. *Динамическая система.*

ГЛАДКИЙ ГОМЕОМОРФИЗМ – см. *Диффеоморфизм.*

ГЛАДКОЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Многообразие.*

ГЛАДКОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ – см. *Тензорное поле.*

ГЛИСОНА ТЕОРЕМА – теорема, дающая описание всех состояний на множестве L ортопроекторов сепарабельного гильбертова пространства размерности $\geqslant 3$ (см. [1]): для каждого состояния ω определена однозначно матрица плотности S такая, что $\omega(P) = \mathrm{tr}(SP)$, $P\in L$. В математич. аппарате квантовой механики Г. т. применяется для построения исчисления наблюдаемых (см. [2]) и в проблеме скрытых параметров (см. [3]).

Лит.: [1] Gleason A. M., «J. Math. Mech.», 1957, v. 6, № 6, p. 885–93; [2] Макки Дж., Лекции по математическим основам квантовой механики, пер. с англ., М., 1965; [3] Холево А. С., Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры, М., 1985. *А. Н. Шерстнев.*

ГЛОБАЛЬНАЯ НАБЛЮДАЕМАЯ – см. *Наблюдаемых алгебра.*

ГЛОБАЛЬНАЯ СТОХАСТИЧНОСТЬ – см. *Хаос.*

ГЛОБАЛЬНОЕ КАЛИБРОВОЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Динамическая симметрия.*

ГЛОБАЛЬНОЙ ДУАЛЬНОСТИ ГИПОТЕЗА – см. *Квантовая хромодинамика*; правила сумм.

ГЛУБОКОНЕУПРУГИЙ ПРОЦЕСС – процесс взаимодействия лептонов с адронами, сопровождающийся большой передачей энергии E и импульса $\boldsymbol{q}$ (причем $|E^2 - |\boldsymbol{q}|^2| \gg$ $\gg 1\ \text{ГэВ}^2$), в которых происходит множественное рождение адронов. Основные Г. п.:

1) глубоконеупругое рассеяние электронов, мюонов и нейтрино на нуклонах (часто, говоря о Г. п., имеют в виду только эти процессы рассеяния);

2) аннигиляция e^-e^+ в адроны при высоких энергиях сталкивающихся электронов и позитронов, наблюдаемая на встречных пучках;

3) рождение в адронных столкновениях при высоких энергиях лептонных пар (e^+e^- или $\mu^+\mu^-$) с большой массой (то есть с большой суммарной энергией в системе центра инерции пары).

Г. п. родственны процессы столкновения адронов, в к-рых рождаются так наз. прямые фотоны с большими поперечными импульсами p_t, а также процессы, в к-рых с большими p_t рождаются струи адронов или отдельные адроны. Такие процессы носят название жестких.

Уже первые опыты по глубоконеупругому рассеянию электронов нуклонами в 1969 обнаружили, что нуклон не похож на однородное желе, а содержит точечные составляющие – жесткие крупинки, при столкновении с к-рыми электрон резко меняет свой первоначальный импульс. Это открытие в нек-ром смысле было аналогично открытию атомного ядра при рассеянии α-частиц в опытах Э. Резерфорда (E. Rutherford).

Р. Фейнман (R. Feynman) назвал точечные составляющие адронов партонами. Более поздние эксперименты привели к заключению, что партоны – это *кварки*. В Г. п. кварки взаимодействуют с лептонами на малых расстояниях, и в силу *асимптотической свободы* кварки ведут себя при этом как почти свободные точечные партоны. Партонная модель объяснила наблюдаемое на опыте свойство масштабной инвариантности глубоконеупругого рассеяния (*Бьеркена скейлинг*). Как само явление скейлинга, так и небольшие отклонения от скейлинга, обнаруженные в более точных экспериментах, объясняются квантовой хромодинамикой. Согласно ей, наряду с партонами-кварками в Г. п. должны появляться и партоны-глюоны. Это предсказание подтверждается экспериментальными данными, согласно к-рым глюонные партоны несут примерно половину полного импульса быстрого адрона.

Лит.: [1] Окунь Л. Б., Лептоны и кварки, М., 1981.

Л. Б. Окунь.

ГЛЭШОУ – ВАЙНБЕРГА – САЛАМА МОДЕЛЬ, стандартная модель электрослабых взаимодействий,– последовательная теория, единым образом описывающая слабые и электромагнитные взаимодействия элементарных частиц. Г.– В.– С. м. в настоящее время хорошо согласуется с многочисленными экспериментальными данными. Эта модель включает в себя прежнюю 4-фермионную $(V-A)$-теорию слабых взаимодействий в качестве своего низкоэнергетич. предела, а также квантовую электродинамику. Помимо объединения слабых и электромагнитных взаимодействий модель предсказала существование нового физич. явления – нейтральных токов, то есть процессов, обусловленных обменом нейтральным тяжелым векторным бозоном (напр., процесса $V_\mu N \to V_\mu X$). Это явление было обнаружено в экспериментах на ускорителе ЦЕРН в 1973, что послужило сильным аргументом в пользу Г.– В.– С. м. Другим подтверждением этой модели стало открытие в 1983 промежуточных векторных W- и Z-бозонов в протон-антипротонных соударениях на ускорителе ЦЕРН, а также совпадение их измеренных характеристик с предсказаниями теории. За работы (см. [1]) по созданию модели Ш. Глэшоу (S. Glashow), С. Вайнбергу (S. Weinberg) и А. Саламу (A. Salam) присуждена Нобелевская премия 1979 года.

Модель Г.– В.– С. м. строится в три этапа.

1) Задаются исходные поля (векторные, спинорные и скалярные). Записывается лагранжиан взаимодействия этих полей, симметричный относительно поворотов из группы $SU(2) \times U(1)$, причем углы этих поворотов не постоянны, а меняются от точки к точке (такие повороты называются локальными калибровочными преобразованиями). Особенность таких преобразований состоит в том, что, действуя на векторные поля, они не только поворачивают их, но еще и сдвигают. Другой особенностью лагранжиана является вид самодействия скалярных полей (так наз. потенциал Хиггса, минимум его расположен не в точке 0).

2) Делается переход от исходных полей к физическим. Такой переход вызван двумя причинами. Во-первых, не всем компонентам калибровочного поля отвечают физич. степени свободы (напр., в случае простейшего калибровочного поля – электромагнитного – имеются 4 компоненты и лишь две физич. степени свободы фотона). Во-вторых, исходные поля нельзя считать физическими из-за смещенного минимума потенциала (напр., исходное скалярное поле с потенциалом Хиггса нефизическое и потому имеет мнимую массу).

3) Исходный лагранжиан переписывается в терминах новых, теперь уже физич. полей, к-рым сопоставляются известные частицы (кварки, лептоны, фотон и промежуточные бозоны). При этом он оказывается инвариантным лишь относительно локальных калибровочных преобразований, отвечающих электромагнитной $U(1)$-симметрии. Из четырех исходных калибровочных полей лишь фотон остается безмассовым, тогда как три других векторных бозона становятся тяжелыми. Этапы 2) и 3) обычно называют эффектом спонтанного нарушения калибровочной $SU(2) \times U(1)$-симметрии (см. в этой связи работу [2], где приведены аргументы в пользу альтернативной точки зрения о невозможности спонтанного нарушения локальной калибровочной симметрии).

Полный вид лагранжиана Г.– В.– С. м. в терминах исходных полей и в базисе физич. полей не приводится из-за его громоздкости.

В применении к низкоэнергетич. слабым процессам Г.– В.– С. м. дает те же результаты, что и старая 4-фермионная $(V-A)$-теория слабых взаимодействий (если отвлечься от существования нейтральных токов). Однако если в прежней теории можно было проводить вычисления физич. величин лишь в низшем порядке теории возмущений (свойство, называемое неперенормируемостью), то рассматриваемая теория является перенормируемой, то есть позволяет рассчитывать высшие поправки к вероятностям любых процессов. Величины нек-рых из них можно измерить в прецизионных экспериментах.

Основные направления экспериментальных исследований по проверке Г.– В.– С. м. таковы.

1) Измерение сечений процессов упругого рассеяния нейтрино и антинейтрино (ν_e, $\bar{\nu}_e$, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$) на электроне, а также различных процессов рассеяния нейтрино на нуклонах (упругое, глубоконеупругое и др.), обусловленных слабыми нейтральными токами.

2) Измерение p-нечетных асимметрий в eD-рассеянии (право-левая поляризованная асимметрия) в аннигиляции $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ или $\tau^+\tau^-$ (асимметрия вперед-назад), измерение эффектов нарушения четности в атомах. Все эти эффекты обусловлены интерференцией слабого нейтрального и электромагнитного токов.

3) Измерение характеристик $W^\pm$- и Z-бозонов (масс, ширин распада и др.).

4) Изучение различных слабых распадов с целью извлечь значения углов смешивания Кобаяши – Маскавы и проверить механизм нарушения CP-инвариантности и т. д.

5) Поиски t-кварка и хиггсовского бозона.

6) Поиски явлений «вне стандартной модели» (то есть требующих для своего описания расширения или модификации Г.– В.– С. м.): измерение массы нейтрино, поиски нейтринных осцилляций и несохранение лептонного числа; поиски новых калибровочных бозонов, тяжелых кварков и лептонов, поиски внутренней структуры у кварков и лептонов, существование суперсимметричных партнеров частиц и т. д.

В настоящее время одной из наиболее важных проблем является экспериментальное обнаружение хиггсовского бозона, масса к-рого, к сожалению, не предсказывается Г.– В.– С. м. Ряд аргументов указывает на то, что этот бозон должен быть тяжелее нескольких ГэВ, однако с уверенностью можно утверждать лишь, что $M_H \geqslant 14$ МэВ. Поиски хиггсовского бозона осложняются еще и тем, что его взаимодействие с нуклонами и электронами весьма слабо, поэтому его следует искать в процессах распада тяжелых частиц (напр., Z-бозона или b-кварка).

Несмотря на отличное согласие с опытом, Г.– В.– С. м. все же не может считаться вполне удовлетворительной по ряду причин: никак не фиксируется *Вайнберга угол*, один из важнейших параметров теории, никак не объясняются структура и количество поколений и спектр масс фермионов, нельзя естественным образом решить проблему калибровочной иерархии (то есть огромную разницу в масштабах масс хиггсовского бозона и планковской) и др. Стремление преодолеть эти недостатки вызвало к жизни новые направления исследований, ставящих своей целью включить Г.– В.– С. м. в рамки более широкой теории, позволяющей решать нек-рые из указанных проблем. Примерами таких расширенных теорий могут служить *великого объединения модели*, модели так наз. техницвета, суперсимметричные, супергравитационные и суперструнные теории, модели с составными частицами и др. Вопрос о справедливости

нек-рых из этих моделей, возможно, будет в течение ближайшего времени решен вводом в строй новых мощных ускорителей частиц.

Лит.: [1] Glashow S., «Nucl. Phys.», 1961, v. 22, p. 579–88; [2] Weinberg S., «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1264–66; [3] Salam A., Elementary particle theory, L., 1968, p. 367–77; [4] Власов В. В. и др., «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1987, т. 18, с. 5–38; [5] Abers E., Lee B., «Phys. Rep.», 1973, v. 9C, p. 1–141; [6] Окунь Л. Б., Лептоны и кварки, М., 1981.

А. Ю. Игнатьев.

ГЛЮБОЛ – см. *Глюон.*

ГЛЮОН – нейтральная векторная частица с нулевой массой покоя, которая осуществляет перенос сильных взаимодействий между *кварками*, «склеивая» их в *адроны.* При обмене Г. *аромат* кварков сохраняется. Впервые понятие о Г. было введено в теорию сильных взаимодействий в [1]. Современная теория сильных взаимодействий – *квантовая хромодинамика* – предполагает существование восьми Г., реализующих присоединенное представление цветовой группы $SU(3)_{color}$. При этом каждому из восьми Г. приписывается соответствующее квантовое число – *цвет.*

Лагранжиан взаимодействия квантовой хромодинамики содержит члены, характеризующие кроме кварк-глюонного взаимодействия трехглюонное и четырехглюонное самодействие. Наличие подобного нетривиального самодействия является особенностью лагранжиана неабелевой калибровочной теории, к-рая характеризует ее отличие от лагранжиана квантовой электродинамики (см. [2], [3]).

В соответствии с гипотезой *конфайнмента* Г., как и кварки, отсутствуют в свободном состоянии. Их характерными проявлениями в процессе электрон-позитронной аннигиляции является наблюдение трех узких пучков адронов (струй), из к-рых один возникает в результате превращения в адроны (адронизации) вылетающих Г., а два других образуются за счет адронизации кварков. В глубоконеупругом лептон-нуклонном рассеянии Г. проявляют себя как переносчики доли энергии нуклона, к-рой недосчитываются участвующие в процессе кварки (см. [3]). Другим важным следствием существования Г. является возможность образования в различных процессах так наз. глюониев (или глюболов), то есть адронов, состоящих из валентных Г. В ряде экспериментов обнаружены частицы, свойства к-рых согласуются с ожидаемыми свойствами Г. (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Nambu Y., в кн.: Preludes in theoretical physics, Amst., 1966, p. 133–42; [2] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988; [3] Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф., Калибровочные теории в физике элементарных частиц, пер. с англ., М., 1987; [4] Прокошкин Ю. Д., «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1987, т. 18, в. 3, с. 503–74; [5] «Phys. Lett.», 1988, v. B204, p. 1–486.

А. Л. Катаев.

ГЛЮОНИЙ – см. *Глюон.*

ГОДОГРАФ – кривая, являющаяся множеством концов переменного вектора (вектор-функции), значения которого при разных значениях аргумента отложены от некоторого общего начала O (см. *Вектор*). Если, напр., положение движущейся точки определять ее радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, проводимым из начала отсчета O, то Г. вектора $\boldsymbol{r}$ дает траекторию точки (рис. 1). Определив значения вектора скорости $\boldsymbol{v}$ точки в разные моменты времени и отложив эти векторы от общего начала O_1, получают Г. вектора скорости (рис. 2) и т. д.

Производная от переменного вектора $\boldsymbol{u}(t)$ по аргументу t дает вектор, направление к-рого совпадает с направлением касательной к Г. дифференцируемого вектора в соответствующей точке. Так, направление вектора скорости точки в положении M_1, равного $\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_1$, совпадает с направлением касательной к Г. вектора $\boldsymbol{r}$ в этой точке; направление вектора ускорения точки в положении M_1, равного $\boldsymbol{w}_1 = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_1$, совпадает с направлением касательной к Г. вектора $\boldsymbol{v}$ в точке M_1'.

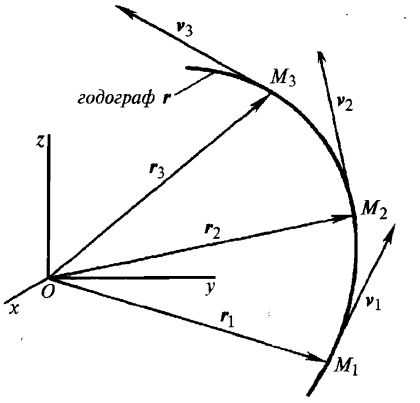


Рис. 1. Годограф радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ движущейся точки M.

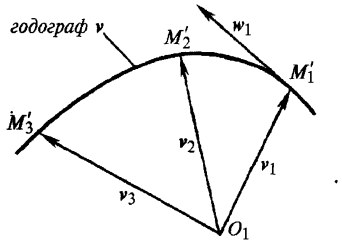


Рис. 2. Годограф вектора $\boldsymbol{v}$ скорости движущейся точки M.

ГОДОГРАФ векторнозначной функции $M(t)$ действительного переменного t – множество концов вектора $M(t)$, начало которого для всех t есть фиксированная точка. Часто в качестве $v(t)$ выбирают скорость движения точки и строят Г. скорости.

В случае $t = x + iy \in \mathbb{C}$ и векторного поля $v(t) = v^1(x,y) + iv^2(x,y)$, заданного комплексным потенциалом $f(t) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, множество комплексно сопряженных к $v^1 + iv^2$ величин $v = v^1 - iv^2 = \overline{df/dt}$ образует область на плоскости Г. скорости. Введение на плоскости Г. полярных координат $\tau = |v|$ и α – угла наклона вектора скорости к оси абсцисс с последующим переходом от зависимости $(x,y) \to (v^1, v^2)$ к зависимости $(v^1, v^2) \to (\tau, \alpha)$ называется преобразованием годографа (см. *Годографа метод*).

Преобразование Г. в сочетании с *Лежандра преобразованием* широко применяется для сведения дифференциальных уравнений математич. физики к линейному виду, исследования краевых задач с неизвестными границами и т. д.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., О газовых струях, М.–Л., 1949; [2] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, 2 изд., М., 1977.

Ю. Е. Хохлов.

ГОДОГРАФА МЕТОД, преобразование годографа,– метод, позволяющий свести однородную систему двух квазилинейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} u_t &= a(u,v)u_x + b(u,v)v_x, \\ v_t &= c(u,v)u_x + d(u,v)v_x \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

относительно двух функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ к линейной системе

$$\left.\begin{aligned} -x_u &= a(u,v)t_v - b(u,v)t_u, \\ x_v &= c(u,v)t_v - d(u,v)t_u \end{aligned}\right\}$$

от соответствующих обратных функций $t(u, v)$ и $x(u, v)$.

Впервые Г. м. был применен к интегрированию уравнений движения идеального газа (см. [1]). Г. м. позволяет линеаризовать дифференциальные уравнения с частными производными 2-го порядка, сводимые к системе (1), и совпадает в этом случае с линеаризацией уравнений *Лежандра преобразованием* (см. [2]).

Обобщенный метод годографа – метод, применимый к системам гидродинамич. типа с диагональной матрицей

$$u^i_t = v_i(u^1, \ldots, u^n)u^i_x,\ u^i = u^i(x, t),\ i = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

и позволяющий свести систему (2) к линейной системе уравнений

$$\partial_i w_k = \frac{\partial_i v_k}{(v_i - v_k)}(w_i - w_k), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad i \neq k, \qquad (3)$$

относительно коэффициентов $w_i(u^1, \ldots, u^n)$ коммутирующих с (2) потоков (то есть симметрий (2)) того же вида при выполнении условий «полугамильтоновости» (см. [1]):

$$\partial_i = \left(\frac{\partial_j v_k}{v_j - v_k}\right) = \partial_j\left(\frac{\partial_i v_k}{v_i - v_k}\right), \quad i \neq j \neq k.$$

Связь решений (2) и (3) дает формула обобщенного преобразования годографа

$$w_i(u) = v_i(u)t + x.$$

Лит.: [1] Мизес Р., Математическая теория течений сжимаемой жидкости, пер. с англ., М., 1961; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., «Успехи математич. наук», 1989, т. 44, в. 6, с. 29–98.

С. П. Царев.

ГОДОГРАФА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Годографа метод.*

ГОЛДЕНА – ТОМПСОНА НЕРАВЕНСТВО – неравенство для положительных самосопряженных операторов, определяемое следующим образом. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, а $\mathfrak{S}_p(H)$ – банахово пространство компактных операторов с конечной $\|\cdot\|_p$-нормой:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p(A)\right)^{1/p},$$

где $\lambda_n(A)$ – собственные значения оператора $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Если A и B – положительные самосопряженные операторы, оператор $A+B$ в существенном сопряжен на их общей области определения $D(A)\cap D(B)$ и, по крайней мере, один из них порождает *гиббсовскую полугруппу*, тогда

$$\exp\{-(A+B)^{\sim}\} \in \mathfrak{S}_1(H)$$

и имеет место неравенство Голдена – Томпсона (см. [1], [2]):

$$\operatorname{tr}\exp\{-(A+B)^{\sim}\} \leqslant \operatorname{tr}[\exp(-A)\exp(-B)],$$

что эквивалентно

$$\|\exp\{-(A+B)^{\sim}\}\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \|\exp(-A/2)\exp(-B)\exp(-A/2)\|_1.$$

Обобщение Г.– Т. н. для $p>1$:

$$\|\exp\{-(A+B)^{\sim}\}\|_p \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-A/2)\exp(-B)\exp(-A/2)\|_p$$

содержится в работе [3], см. также [4]. Для $p=\infty$ это неравенство известно как лемма Сигала (см. [4]). С помощью одного неравенства Вейля Г.– Т. н. можно обобщить на случай произвольной функции φ такой, что отображение $t \to \varphi(e^t)$ выпукло (см. [4]):

$$\operatorname{tr}\varphi[\exp\{-(A+B)^{\sim}\}] \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{tr}\varphi[\exp(-A/2)\exp(-B)\exp(-A/2)].$$

Лит.: [1] Golden S., «Phys. Rev.», 1965, v. 137B, № 4, p. 1127–28; [2] Thompson C., «J. Math. Phys.», 1965, v. 6, № 11, p. 181–213; [3] Ruskai M. B., «Comm. Math. Phys.», 1972, v. 26, № 4, p. 280–89; [4] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 4: Анализ операторов, пер. с англ., М., 1982.

В. А. Загребнов.

ГОЛДСТОУНА ТЕОРЕМА: спонтанное нарушение непрерывной глобальной симметрии приводит к появлению безмассовой бесспиновой частицы. Установлена в [1]; эта безмассовая частица называется голдстоуновским бозоном. *Спонтанное нарушение симметрии*, конечно, остается симметрией системы. Но эта симметрия проявляется не в инвариантности основного состояния относительно преобразований этой симметрии, а в появлении голдстоуновской моды (существовании голдстоуновского бозона).

Примерами голдстоуновских возбуждений в нерелятивистской теории многих тел являются спиновые волны в ферромагнетике, фононы в кристаллич. твердых телах и жидком гелии.

Лит.: [1] Goldstone J., «Nuovo Cim.», 1961, v. 19, p. 154.

ГОЛДСТОУНОВСКАЯ МОДА – см. *Голдстоуна теорема, Спонтанное нарушение симметрии.*

ГОЛДСТОУНОВСКИЙ БОЗОН – см. *Голдстоуна теорема.*

ГОЛОВАСТИК – см. *Фейнмана диаграмма.*

ГОЛОГРАФИЯ – возможность записи и воспроизведения полей. Г. обнаружена Д. Габором [1] для записи в плоской светочувствительной среде. Бурное развитие Г. последовало после того, как в 1962–64 были применены лазер и внеосевая схема записи. Двумерная Г. оказалась лишь частным случаем трехмерной, обладающей более полным комплексом отображаемых свойств (см. [2]). В многочисленных разделах Г. изучаются типы и виды голограмм, формирование изображений, аппаратура, методы, теория спеклона и т. д. (см. [3]–[5]).

Принципы Г. подробно изложены в физич. литературе, однако строгое описание явлений, происходящих при плоской Г., сталкивается с трудностями, связанными с отсутствием математич. постановки задачи рассеяния волн на полупрозрачном экране, что имеет прямое отношение к проблеме «черного тела» (см. [6]). Поставить задачу введением каких-либо условий на экране не удается. Эту трудность можно преодолеть с помощью введения подходящих условий поглощения на экране (см. [7]). С их помощью определяется характеристика пропускания голограммы и рассчитывается рассеянная волна. При этом применяется теория коротковолновых асимптотик и фронтов осцилляций по параметру $\lambda = c/\omega$, $\lambda \to 0$ (физически – длина волны λ много меньше характерного размера L).

Пусть оператор $\Gamma^S \equiv \Gamma^S_\lambda$ определен формулой

$$\Gamma^S(\psi) = \int_S G(x,y)M(n_y)\psi(y)\,d\sigma(y).$$

Здесь n_y – внешняя нормаль к поверхности S, $d\sigma$ – элемент площади поверхности, $G = G_\lambda$ обозначает удовлетворяющее условиям излучения левое фундаментальное решение для системы Максвелла,

$$M(p) = \begin{Vmatrix} 0 & -\Lambda(p) \\ \Lambda(p) & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\Lambda(p) = [p\times\ldots]$ – матрица векторного умножения на $p \in \mathbb{R}^3$.

На экран падает волна

$$\Phi(t) = \int \varphi_\omega \exp(-i\omega t)\,d\omega.$$

Условие А. Волна Φ_+, прошедшая экран, задается формулой

$$\Phi_+ = \int \Gamma^S_{c/\omega}(f_\omega\varphi_\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega,$$

где f_ω – скалярная функция на экране (характеристика пропускания на частоте ω). Область, где $f_\omega = 1$, прозрачна для волн с частотой ω, а область, где $f_\omega = 0$, абсолютно поглощает.

Пусть экран S получен как позитивный отпечаток (то есть на S помещается светочувствительный материал и освещается световой волной Φ; по негативному отпечатку изготовляется позитивный).

Условие Б. Характеристика пропускания полученного экрана имеет вид:

$$f_\omega = \rho^1(y)F_\omega\left(\int \rho^2(t)I(y,t)\,dt\right),$$

где $I = \Phi\Phi^*$ – интенсивность светового импульса, функции $\rho^1, \rho^2 \in C_0^\infty$ описывают переходные процессы. Предполагается, что существует интервал, где функция F_ω линейна.

Ниже для простоты рассматриваются лишь монохроматич. волны с частотой ω. Множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен.

Сигнальная волна ψ, несущая информацию, является суммой волн, распространяющихся по направлениям, близким к фиксированному направлению n_0. Помимо сигнальной волны на экран S с той же стороны направляется когерентная ей опорная волна φ, являющаяся суммой трех плоских волн

$$\varphi_j \exp(i\langle n_j x\rangle/\lambda),\ j=1,\ 2,\ 3.$$

Направления n_j взаимно ортогональны и наклонены к S под одинаковым углом. Поляризация этих трех волн фиксируется так, чтобы компонента напряженности электрич. поля в волне φ_1 была коллинеарна вектору n_3, а в волнах φ_2 и φ_3 – векторам n_1 и n_2 соответственно.

Полученный после фотографирования волны $\psi+\varphi$ позитивный отпечаток (голограмма) имеет в силу условия Б характеристику пропускания

$$f=\rho^1 F_\omega\Big(\int \rho^2\, dt(\varphi+\psi)(\varphi^*+\psi^*)\Big),$$

где $\rho^1=1$ на S.

Для восстановления записанной на голограмме информации позитивный отпечаток помещается на прежнее место и направляется опорная волна $\varphi\exp(i\delta)$, возможно с нек-рым сдвигом фазы δ. В силу условия А за голограммой будет распространяться волна

$$\psi_+=\Gamma^S(f(\psi_-+\varphi\exp(i\delta))),$$

где ψ_- – отраженная волна. Основной математич. задачей Г. является сравнение волны ψ_+ с исходным сигналом ψ.

Теорема (см. [7]). Существует такой конус с осью n_0, что если носитель осцилляций сигнальной волны лежит в нем, то на линейном участке своей характеристики пропускания плоская голограмма с точностью до умножения на комплексную константу восстанавливает каждую монохроматич. компоненту исходного сигнала, в том числе и ее поляризацию, с точностью до $O((\lambda/L)^n)$, $n>0$ – любое.

Таким образом, плоская голограмма позволяет восстанавливать направление распространения и поляризацию волны. Использование объемной Г. с нек-рыми специальными фотоэмульсиями позволяет восстанавливать также волны во времени (см. [5]).

Лит.: [1] Gabor D., «Proc. Roy. Soc.», 1949, v. A197, p. 454–87; [2] Денисюк Ю. Н., Принципы голографии, Л., 1978; [3] Оптическая голография, т. 1–2, пер. с англ., М., 1982; [4] Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В., Обращение волнового фронта, М., 1985; [5] Ребане К. К., «Успехи физич. наук», 1986, т. 148, в. 3, с. 542–45; [6] Борн М., Вольф Э., Основы оптики, 2 изд., пер. с англ., М., 1973; [7] Карасев М. В., Маслов В. П., «Доклады АН СССР», 1985, т. 285, № 5, с. 1055–58. *А. А. Перескоков.*

ГОЛОМОРФНАЯ КАРТА – см. *Риманова поверхность.*

ГОЛОМОРФНАЯ ФОРМА – комплекснозначная дифференциальная k-форма, определенная на комплексном многообразии M^n и имеющая в локальных координатах $z=(z^1,\ ...,\ z^n)$ вид

$$h^k=\sum_{i_1<\ldots<i_k} h_{i_1\ldots i_k}(z)\,dz^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz^{i_k},$$

где все функции $h_{i_1\ldots i_k}(z)$ голоморфны. Иначе говоря, это $(k,0)$-форма на M^n, удовлетворяющая соотношению $\bar\partial h^k=0$.

(p,q)-формы – элементы пространства $\varepsilon^{p,q}$ – это всевозможные формы вида

$$\omega^{p,q}=\sum_{i_1<\ldots<i_p,\,j_1<\ldots<j_q}\omega_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q}(z,\bar z)\,dz^{i_1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar z^{j_1}\wedge\ldots\wedge d\bar z^{j_q},$$

где $\omega_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q}(z,\bar z)$ – гладкие комплекснозначные функции $2n$ вещественных переменных $\operatorname{Re} z^j$, $\operatorname{Im} z^j$. Произвольная k-форма ω^k однозначно представляется в виде суммы

$$\omega^k=\omega^{k,0}+\omega^{k-1,1}+\ldots+\omega^{0,k}.$$

Внешний дифференциал (p,q)-формы $\omega^{p,q}$ лежит в пространстве $\varepsilon^{p+1,q}+\varepsilon^{p,q+1}$, то есть

$$d\omega^{p,q}=\partial\omega^{p,q}+\bar\partial\,\omega^{p,q},$$

где $\partial\omega^{p,q}\in\varepsilon^{p+1,q}$ и $\bar\partial\,\omega^{p,q}\in\varepsilon^{p,q+1}$. Тем самым оператор d представляется в виде суммы $d=\partial+\bar\partial$.

Эти определения инвариантны относительно голоморфных замен координат. Голоморфные и мероморфные формы на римановых поверхностях называются абелевыми дифференциалами. *П. Г. Гриневич.*

ГОЛОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Аналитическая функция, Голоморфное отображение.*

ГОЛОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – отображение f из области U n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$

$$f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$$

такое, что в координатах оно задается m голоморфными функциями от n комплексных переменных.

Пусть U – область в $\mathbb{C}^n$ с координатами $z=(z^1,\ ...,\ z^n)$, к-рую можно рассматривать как область в $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $x^j=\operatorname{Re} z^j$, $y^j=\operatorname{Im} z^j$. Комплекснозначная дифференцируемая функция $2n$ вещественных переменных $f(x,y)$ называется голоморфной в U, если она удовлетворяет уравнениям Коши – Римана $\bar\partial_j f=0$, где $\bar\partial_j=\partial/\partial x^j+i\partial/\partial y^j=2\partial/\partial\bar z^j$.

Отображение $f:U\to G$ называется биголоморфным, если оно голоморфно вместе с обратным ему.

Теорема Хартогса. Функция f голоморфна в U тогда и только тогда, когда она голоморфна по каждой переменной в отдельности.

Если функция f голоморфна в поликруге $|z^j-a^j|<r_j$, то она представима в нем рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{k_1\ldots k_n\geqslant 0} c_{k_1\ldots k_n}(z^1)^{k_1}\ldots(z^n)^{k_n}.$$

См. также *Риманова поверхность.*

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1976. *П. Г. Гриневич.*

ГОЛОМОРФНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – реализация гильбертова пространства в виде пространства Фока – Баргмана F_2 (см. [1], [2]) целых аналитических функций и указание действия в нем фундаментальных операторов, таких как операторы *рождения и гибели процессов* $a^\#$. Г. п. связано с концепцией *когерентных состояний.*

Пусть $\{|z\rangle,\ z\in\mathbb{C}\}$ – семейство когерентных состояний для системы с одной степенью свободы $d=1$ (случай $d>1$ не имеет принципиальных отличий, см. [2], [3]):

$$|z\rangle=D(z)|0\rangle,$$

$$D(z)=e^{-\frac{1}{2}|z|^2}e^{za^+}e^{\bar z a},\quad z\in\mathbb{C},$$

где $|0\rangle$ – вакуум пространства Фока H. Произвольный нормированный вектор $|\psi\rangle=\sum c_n/n\rangle$ в H $(a^+a/n\rangle=n/n\rangle)$ определяет функцию

$$\psi(z)=\langle z|\psi\rangle=e^{-\frac{1}{2}|z|^2}f(\bar z),$$

где

$$f(\bar z)=\sum c_n u_n(\bar z),\quad u_n(\bar z)=\frac{(\bar z)^n}{\sqrt{n!}}.$$

Следовательно, каждому вектору состояния $|\psi\rangle\in H$ может быть сопоставлена функция (символ состояния) $f(\bar z)$, являющаяся целой (анти)аналитич. функцией, так как в силу условия нормировки

$$\langle\psi|\psi\rangle=\sum|c_n|^2=1$$

ряд, определяющий $f(\bar z)$, сходится для любого $z\in\mathbb{C}$. Множество F_2 таких функций является гильбертовым пространством по скалярному произведению

$$(f,g)=\int e^{-|z|^2}f(\bar z)\overline{g(\bar z)}\,d\mu(z),\quad d\mu(z)=d(\operatorname{Re} z)d(\operatorname{Im} z).$$

Функция f является символом нек-рого состояния тогда и только тогда, когда $(f,f)=\|f\|^2<\infty$. Базису Фока $|n\rangle$ в H соответствуют символы $u_n(\bar{z})$; когерентному состоянию $|\xi\rangle$ – пуассоновский символ

$$f_\xi(\bar{z})=\exp\left\{-\frac{1}{2}|\xi|^2+\xi\bar{z}\right\}.$$

Оператору A в H соответствует символ оператора $A(\bar{z},z)=\langle z|A|z\rangle$. Операторы $a^\#$ и $D(z)$ действуют в F_2 по формулам

$$af(\bar{z})=\frac{d}{d\bar{z}}f(\bar{z}),\quad a^+f(\bar{z})=\bar{z}f(\bar{z}),$$

$$D(z)f(\bar{z})=\exp\left\{-\frac{1}{2}|\xi|^2+\xi\bar{z}\right\}f(\bar{z}-\bar{\xi}).$$

Г. п. для бесконечных ($d=\infty$) систем рассматривалось в [4], [5]. Пространство F_2 является примером пространств Ароншайна (см. [6]) с воспроизводящими ядрами, с к-рыми связана концепция непрерывных представлений Клаудера (см. [7]), обобщающих Г. п. Использование Г. п. упрощает вычисление континуальных интегралов. Дальнейшее развитие теория Г. п. получила в схеме квантования Березина (см. [5]).

Лит.: [1] Фок В. А., Работы по квантовой теории поля, Л., 1957; [2] Bargmann V., «Comm. Pure Appl. Math.», 1961, v. 14, № 3, p. 187–214; 1967, v. 20, № 1, p. 1–101; [3] Переломов А. М., Обобщенные когерентные состояния и их применения, М., 1987; [4] Сигал И., Математические проблемы релятивистской физики, пер. с англ., М., 1968; [5] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [6] Aronszajn N., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 68, № 2, p. 337–404; [7] Klauder J. R., «J. Math. Phys.», 1963, v. 4, № 8, p. 1055–58, 1058–73; 1964, v. 5, № 2, p. 177–87; [8] Klauder J. R., McKenna J., там же, 1964, v. 5, № 7, p. 878–96; 1965, v. 6, № 1, p. 68–87. *Е. В. Дамаскинский.*

ГОЛОМОРФНОСТИ ОБЛАСТЬ – см. *Аналитическая функция, Полная аналитическая функция.*

ГОЛОМОРФНОСТЬ – см. *Аналитическая функция.*

ГОЛОМОРФНЫЙ АТЛАС – см. *Риманова поверхность.*

ГОЛОНОМИИ ГРУППА расслоения с группой G и связностью – совокупность элементов $g\in G$ таких, что точки x из базы группы G и xg^{-1} могут быть соединены горизонтальным путем. Более наглядно: выберем вектор в пространстве, касательном к слою (он называется вертикальным), с началом в точке x фиксированного слоя и обнесем выбранный слой по замкнутому пути в базе. При переносе слоя начало вертикального вектора переносится по горизонтальному пути. В результате слой оказывается преобразованным, а точка x исходного слоя переходит в точку $x^1=xg^{-1}$. Структура Г. г. отражает свойства пространства в нек-рой области, ее свойства тесно связаны с *фундаментальной группой* базы, при этом Г. г. в разных точках сопряжены. Различают: локальную Г. г., к-рая определяется путями, лежащими в окрестности точки x (алгебра Ли локальной Г. г. определяется тензором кривизны и его ковариантными производными); ограниченную Г. г. использующую пути, стягиваемые в точку x, ее элементы – произведения конечного числа элементов локальной Г. г., а сама она – нормальный делитель в G; наконец, глобальную Г. г., использующую любые пути.

Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии, пер. с франц., М., 1960; [2] Коноплева Н. П., Попов В. Н., Калибровочные поля, 2 изд., М., 1980.

М. И. Войцеховский.

ГОЛОНОМНАЯ СИСТЕМА – механическая система, в которой все наложенные связи являются геометрическими (не дифференциальными). Связи системы (см. *Связи механические*) называются геометрическими, или голономными, если они накладывают ограничения только на возможные положения точек системы в разные моменты времени, но не на их скорости, и выражаются математически уравнениями вида

$$f_j(x_i,y_i,z_i,t)=0,\ j=1,2,\ldots,k, \qquad (1)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты, t – время, k – число наложенных связей. Координаты точек системы должны при ее движении удовлетворять как дифференциальным уравнениям движения, так и уравнениям связей (1). Если же связи системы накладывают ограничения не только на возможные положения точек системы, но и на их скорости и выражаются математически уравнениями вида

$$f_j\left(x_i,y_i,z_i,\frac{dx_i}{dt},\frac{dy_i}{dt},\frac{dz_i}{dt},t\right), \qquad (2)$$

к-рые не могут быть непосредственно проинтегрированы, то такие связи называются кинематическими (дифференциальными, или неголономными), а система с такими связями называется *неголономной системой.*

Напр., при качении колеса по прямолинейному рельсу координата x центра колеса и угол φ поворота колеса вокруг его центра связаны соотношением $\frac{dx}{dt}=R\frac{d\varphi}{dt}$, вытекающим из равенства $v=\omega R$, где ω – угловая скорость колеса, v – скорость его центра, R – радиус. Однако это соотношение сразу интегрируется и дает $x=R\varphi+C$. Следовательно, указанная связь не является дифференциальной и колесо, катящееся по прямолинейному рельсу, представляет собой Г. с. Наоборот, для шара, катящегося по шероховатой горизонтальной плоскости, уравнения, выражающие тот факт, что точка касания шара имеет скорость, равную нулю, не могут быть проинтегрированы и эта система является неголономной.

Разделение механич. систем на голономные и неголономные весьма существенно, так как к Г. с. применимы многие сравнительно простые уравнения механики и общие принципы, которые несправедливы для неголономных систем. Движение Г. с. может изучаться с помощью уравнений Лагранжа, канонич. уравнений механики, уравнения Гамильтона – Якоби, а также с помощью принципа наименьшего действия в форме Гамильтона – Остроградского или Мопертюи – Лагранжа. К Г. с. приложимы также все те общие теоремы механики и дифференциальные вариационные принципы классической механики, к-рые справедливы и для *неголономных систем.* *С. М. Targ.*

ГОМЕОМОРФИЗМ, гомеоморфное отображение, топологических пространств X и Y – взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное отображение $f: X\to Y$. При Г. открытые (замкнутые) множества из X отображаются на открытые (замкнутые) множества из Y. Гомеоморфные пространства называются топологически эквивалентными, а объекты, не изменяющиеся при Г., – топологическими инвариантами (таковы, напр., связность, компактность, размерность и т. д.). *М. И. Войцеховский.*

ГОМЕОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Гомеоморфизм.*

ГОМОКЛИНИЧЕСКАЯ ТОЧКА – точка на *гомоклинической траектории.*

ГОМОКЛИНИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ – траектория L *динамической системы*, стремящаяся при $t\to\pm\infty$ к одной и той же (в отличие от *гетероклинической траектории*) периодической траектории $L\neq\Gamma$ либо к одному и тому же положению равновесия $L\neq\Gamma$. Если траектория L гиперболична, то $\Gamma\subset W^s\cap W^u$, где W^s (W^u) – устойчивое (неустойчивое) многообразие L. При этом, если L периодична, а пересечение $W^s\cap W^u$ трансверсально на Γ, то содержащееся в окрестности $\Gamma\cup L$ инвариантное множество имеет сложную структуру и, в частности, обладает счетным множеством седловых периодич. траекторий, – наличие подобной Г. т. является критерием «стохастичности» динамич. системы.

Лит.: [1] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975. *В. С. Афраймович.*

ГОМОМОРФИЗМ группы – отображение φ из группы G_1 в группу G_2 такое, что для любых элементов h_1, h_2 группы G_1 выполнено соотношение

$$\varphi(h_1h_2)=\varphi(h_1)\varphi(h_2).$$

Г. переводит единицу $e_{(1)}$ группы G_1 в единицу $e_{(2)}$ группы G_2, а обратный к элементу h — в обратный к его образу: $\varphi(h^{-1})=\varphi(h)^{-1}$. Ядром Г. называется множество всех h таких, что $\varphi(h)=e_{(2)}$. Ядро Г. является нормальным делителем в G_1. *Ю. А. Неретин.*

ГОРИЗОНТ — см. *Пространство-время* теории относительности.

ГОРИЗОНТ СОБЫТИЙ — граница области будущего в пространстве-времени, из которой движущиеся частицы и лучи света могут достичь бесконечности будущего (см. *Пространство-время* теории относительности). Г. с. представляет собой регулярную изотропную гиперповерхность, то есть световые конусы, касающиеся Г. с., лежат по одну сторону от него и частицы, движущиеся по времениподобным кривым, а также световые лучи могут пересекать Г. с. только в одном направлении. Пространство-время, содержащее Г. с., описывает *черную дыру* (или несколько взаимодействующих черных дыр). Г. с. обладает рядом замечательных свойств. Через каждую его точку проходит направленная в будущее нулевая геодезическая, не имеющая в будущем конечных точек. При выполнении ряда естественных условий каждая связная компонента пересечения Г. с. пространственноподобной гиперповерхностью компактна и односвязна, а в случае стационарного пространства-времени гомеоморфна 2-сфере.

Лит.: [1] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977. *А. Т. Ильичев.*

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ПУТЬ — см. *Связность.*

ГОРИЗОНТОВ ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА — глобальное геометрическое строение горизонтов событий, представляющих собой границу H^+ прошлого конформной бесконечности будущего J^+ в ориентируемом по времени асимптотически плоском пространстве-времени (см. *Пространство-время* теории относительности). Горизонт черной дыры, являясь ахрональной границей (никакие две точки горизонта не могут быть соединены времениподобной кривой), обладает к тому же специальным свойством, установленным Б. Картером [1], к-рое заключается в том, что через каждую точку горизонта H^+ проходит направленная в будущее нулевая геодезическая (генератор H^+), не имеющая в будущем конечных точек. Генераторы горизонта при продолжении в прошлое могут пересекаться в каустике, где они попадают на H^+ из области внешних сношений. Каустики могут возникать при слиянии черных дыр или при падении излучения на черную дыру. Если генератор попадает на горизонт H^+, то он уже никогда его не покидает, причем через каждую точку H^+ вне каустики проходит один и только один генератор и при продолжении в будущее генераторы не могут пересекаться. В случае черной дыры Шварцшильда, напр., горизонт образован нулевыми геодезическими — мировыми линиями фотонов, захваченными гравитационным полем при $r=2m$. При выполнении сильного энергетич. условия и принципа космич. цензуры, то есть асимптотич. предсказуемости в будущем (см. *Сингулярности пространства-времени*), площади сечения бесконечно тонких пучков генераторов горизонта не могут убывать при движении в будущее. Это свойство позволяет установить справедливость второго закона термодинамики черных дыр о неубывании площади горизонта при любых взаимодействиях (см. [2]). Важным физич. следствием теоремы Картера о Г. г. с. также является тот факт, что черная дыра не может распадаться на несколько черных дыр, так как при этом часть генераторов горизонта при движении в будущее необходимо должна пересекаться.

Лит.: [1] Carter B., «Gen. Relat. and Grav.», 1971, v. 1, № 4, p. 349–91; [2] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977. *А. Т. Ильичев.*

ГОРИЗОНТОВ ТОПОЛОГИЯ — топология горизонтов событий, представляющих собой границу H^+ прошлого конформной бесконечности будущего J^+ в асимптотически плоском пространстве-времени (см. *Пространство-время* теории относительности). Если асимптотически плоское пространство-время сильно предсказуемо с пространственноподобной гиперповерхности S, то есть если кроме предсказаний об окрестности J^+ (см. *Сингулярности пространства-времени*) можно делать предсказания еще и относительно нек-рой окрестности горизонта событий H^+ с S, то в любой момент времени, характеризующего эволюцию горизонта, двумерная граница черной дыры компактна и односвязна. Если к тому же черная дыра стационарна и содержит материальные поля, удовлетворяющие гиперболич. уравнениям и условию энергодоминантности ($T_{ij}N^iL^j\geqslant 0$ для любой пары направленных в будущее времениподобных векторов с компонентами N_i и L_j), то каждая связная компонента границы горизонта событий гомеоморфна 2-сфере (см. [1]). Стационарная конфигурация, когда имеется несколько связных компонент границы, возможна в случае нескольких невращающихся заряженных черных дыр с массами, равными заряду (в геометрич. единицах). Конфигурация находится в безразличном равновесии, так как гравитационное притяжение компенсируется электростатич. отталкиванием.

Из описанных топологич. свойств горизонта событий стационарной черной дыры при ряде дополнительных физически разумных предположений следует, что стационарность влечет за собой аксиальную симметрию. Этот факт имеет важное значение, так как дает исчерпывающую информацию о свойствах изометрии пространства-времени, к-рое, вероятно, образуется в результате гравитационного коллапса.

Лит.: [1] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977. *А. Т. Ильичев.*

ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА РЕШЕНИЕ — решение уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки (см. [1], [2]). Г.–Ч. р. отвечает случаю, когда между главными моментами инерции существует соотношение $I_1=I_2=4I_3$, проекция главного момента количества движения на вертикаль равна нулю и центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Уравнения Эйлера–Пуассона для Г.–Ч. р. помимо интегралов

$$F_1=4(\omega_1^2+\omega_2^2)+\omega_3^2-2a\gamma_1=k,$$
$$F_2=4(\omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2)+\omega_3\gamma_3=0,$$
$$F_3=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$$

допускают интеграл

$$F_4=\omega_3(\omega_1^2+\omega_2^2)+a\omega_1\gamma_3=g,$$

где $a=P\alpha/I_3$, P — вес тела, I_3 — момент инерции относительно оси симметрии тела, α — расстояние от неподвижной точки до лежащего на подвижной оси Ox_1 центра тяжести тела, k и g — произвольные постоянные. На совместном уровне интегралов заменой переменных

$$2a\gamma_1=u^2-uv+v^2-k,\quad 2a\gamma_2=\frac{U_1U_2-V_1V_2}{u+v},\quad 2a\gamma_3=\frac{U_1V_2+V_1U_2}{u+v},$$
$$8ap=U_1V_2-V_1U_2,\quad 8aq=U_1V_1+U_2V_2,\quad r=u-v,$$
$$U_1^2=u^3-ku-4g-2au,\quad V_1^2=v^3-kv-2av+4g,$$
$$U_2^2=-u^3+ku+4g-2au,\quad V_2^2=-v^3+kv-2av-4g$$

уравнения движения приводятся к виду

$$\frac{du}{U_1U_2}-\frac{dv}{V_1V_2}=0,\quad \frac{2udu}{U_1U_2}+\frac{2vdv}{V_1V_2}=dt$$

и задача решается в гиперэллиптич. функциях времени.

Изучалось движение тела, приведенного в быстрое вращение относительно горизонтально расположенной глав-

ной оси инерции Ox_1 (см. [3], [4]). При выполнении условий $k \neq 0$, $k\alpha^2 \neq 4g^2$ существуют средние и главные движения собственного вращения и линии узлов; исследована их зависимость от отношения частот (см. [5]). Выполнено интегрирование уравнений движений для Г.–Ч. р. с помощью представления Лакса (см. [6]).

Лит.: [1] Горячев Д. Н., «Математич. сб.», 1900, т. 21, с. 431–38; [2] Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 1, М.– Л., 1948, с. 118–24; [3] Сретенский Л. Н., «Изв. АН СССР. Отделение техн. наук», 1953, № 1, с. 109–19; [4] Архангельский Ю. А., Динамика быстровращающегося твердого тела, М., 1985; [5] Козлов В. В., Методы качественного анализа в динамике твердого тела, М., 1980; [6] Bobenko A. I., Kuznetsov V. B., «J. Phys., A», 1988, v. 21, № 9, p. 1999–2006; [7] Сретенский Л. Н., «Докл. АН СССР», т. 149, № 2, с. 282–94. *А. А. Буров.*

ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА СЛУЧАЙ – см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки.

ГРАВИТАЦИОННАЯ МАССА – физическая величина, характеризующая свойства тела как источника тяготения. Равна *инертной массе*. См. также *Весомая масса*.

ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ УРАВНЕНИЯ – уравнения, описывающие свойства поля тяготения, то есть универсального притяжения между любыми телами, определяемого массой этих тел. Впервые уравнение, описывающее гравитационное взаимодействие двух точечных тел, было предложено И. Ньютоном (I. Newton), строго говоря, вне рамок теории поля. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, сила, действующая со стороны первого тела на второе для точечных тел, равна

$$F_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2 r_{12}}{r_{12}^3}, \qquad (1)$$

где r_{12} – радиус-вектор, исходящий из точки, в к-рой расположено первое тело, в точку расположения второго тела, r_{12} – его модуль, m_1 и m_2 – массы тел. Коэффициент γ не зависит от массы тел и расстояния между ними и является универсальной гравитационной постоянной, равной приблизительно $6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3 г$^{-1}$ сек$^{-2}$. Представив (1) в виде

$$F = -\gamma m_1 \operatorname{grad} \varphi, \qquad (2)$$

можно ввести в теорию гравитационный потенциал φ точечного тела, равный

$$\varphi = -\gamma \frac{m}{r}, \qquad (3)$$

где m – масса тела, создающего гравитационное поле, r – расстояние до этого тела. Используя принцип суперпозиции, согласно к-рому гравитационный потенциал нескольких тел равен сумме гравитационных потенциалов, создаваемых каждым из этих тел по отдельности, и нек-рые другие естественные предположения, из (3) можно получить уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho(r), \qquad (4)$$

к-рому подчиняется гравитационный потенциал φ, создаваемый распределением вещества с плотностью $\rho(r)$.

Уравнение Пуассона является одним из основных уравнений математич. физики, на опыте изучения к-рого в значительной степени сформировался аппарат этой науки. При исследовании уравнения (4) можно показать, в частности, что потенциал вне центрально симметричного распределения вещества совпадает с потенциалом точечного тела, помещенного в центре распределения и имеющего массу, равную суммарной массе распределения.

Силы тяготения играют тем большую роль, чем больше масштабы рассматриваемых объектов. Так, гравитационная сила, действующая между двумя электронами, в $5 \cdot 10^{42}$ раз меньше электростатич. сил, действующих между ними. Однако в мире небесных тел, для к-рых электрич. заряды с высокой точностью компенсируют друг друга, сила тяготения является главной силой, поскольку силы тяготения являются исключительно силами притяжения и не могут компенсировать друг друга.

Закон всемирного тяготения и вся ньютоновская теория гравитации с огромной точностью согласуются с экспериментами, лабораторными и космич. наблюдениями. Учет поправок к этому закону необходим лишь в сравнительно специальных случаях, напр. при исследовании движения планеты Меркурий или при решении тех задач космич. навигации, где необходима особо высокая точность расчета.

Однако внимательное исследование уравнения Пуассона вскрывает определенные внутренние трудности. Напр. не вполне ясно, как следует ставить задачи для уравнения (4) в бесконечном пространстве в том случае, когда распределение плотности ρ не убывает на бесконечности (так наз. гравитационный парадокс). Уравнение Пуассона, являясь уравнением эллиптич. типа, описывает распространение взаимодействий с бесконечной скоростью (дальнодействие) и не вписывается в рамки представлений специальной теории относительности. Ординарным способом решения этих трудностей было бы создание релятивистской теории тяготения в плоском пространстве по образцу электродинамики. Уравнения такой теории можно записать в виде

$$-\Box\gamma_{ik} = \frac{16\pi\gamma}{c^4}\tau_{ik}, \qquad (5)$$

где $\Box$ – оператор Д'Аламбера, γ_{ik} – тензор, описывающий гравитационное поле, τ_{ik} – тензор источников гравитационного поля, c – скорость света. Необходимость тензорной релятивистской теории тяготения является наблюдательным фактом: попытка ввести векторный потенциал гравитационного поля, одна из координат к-рого в нерелятивистском пределе совпадает с потенциалом φ, дает количественно неправильное предсказание для аномалий движения Меркурия.

Фактически развитие науки пошло по другому пути и А. Эйнштейн (A. Einstein), отталкиваясь от равенства гравитационной и инертной массы (принцип эквивалентности), создал общую теорию относительности, в к-рой гравитационное взаимодействие описывается на языке геометрии искривленного пространства-времени. В рамках этой теории уравнения типа (5) получаются в так наз. постньютоновских приближениях слабого гравитационного поля, учитывающих, однако, релятивистские эффекты. В рамки постньютоновских приближений можно уложить основные наблюдательные данные, количественно фиксирующие отклонения от предсказаний ньютоновской теории тяготения, напр. в уже упоминавшиеся аномалии в движении Меркурия, а также многие гравитационные эффекты, к-рые еще лежат за гранью наблюдательных возможностей, но существование к-рых представляется несомненным, напр. гравитационное излучение. Однако мощное идейное воздействие общей теории относительности на все развитие современной космологии и астрофизики, а также теория элементарных частиц позволило связать в единую систему многие явления, не имеющие гравитационной природы в узком смысле этого слова: реликтовое космологич. излучение, красное смещение в спектрах далеких астрономич. объектов и др. Поэтому сейчас можно в определенном смысле говорить о наблюдательном подтверждении релятивистских представлений в теории тяготения именно в форме общей теории относительности.

Строго говоря, общая теория относительности не содержит самого понятия гравитационного поля и, следовательно, его уравнений. Вместо этого возникает представление о 4-мерном искривленном пространстве-времени, в к-ром свободные пробные частицы движутся по времениподобным (и изотропным) геодезическим. При этом под свободными понимаются частицы, не испытывающие иных воздействий, кроме гравитационных. В каком-то смысле геометрич. язык общей теории относительности сопоставим с описанием явления гравитации в физике Аристотеля, где имелось представление об абсолютном верхе и абсолютном низе, то есть о неизотропном пространстве.

Роль уравнений гравитационного поля в общей теории относительности играют уравнения Эйнштейна, ус-

танавливающие связь между кривизной пространства-времени и свойствами заполняющего его вещества и излучений. Эти уравнения имеют вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ik}, \qquad (6)$$

где R_{ik} – тензор Риччи, выражающийся через компоненты метрич. тензора g_{ik} и их первые и вторые производные, R – свертка тензора Риччи, называемая скалярной кривизной, T_{ik} – тензор энергии-импульса вещества и всех физич. полей, кроме гравитационного, тензор T_{ik} также может включать в свою структуру компоненты g_{ik}.

Уравнения Эйнштейна можно получить из вариационного принципа, в к-ром действие для гравитационного поля имеет вид

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi\gamma} \int R\sqrt{-g}\, d\Omega,$$

впервые предложенный Д. Гильбертом (D. Hilbert). Здесь g – определитель метрич. тензора, $d\Omega$ – элемент 4-мерного объема.

Уравнения Эйнштейна, в отличие от уравнения Пуассона, нелинейны, поэтому в общей теории относительности не выполнен принцип суперпозиции. Физически это означает, что гравитационное поле имеет нек-рую энергию, причем масса, соответствующая этой энергии, в свою очередь создает гравитационное поле. Важным отличием уравнений Эйнштейна от других полевых уравнений является то, что уравнения движения являются следствием уравнений поля. Уравнения, описывающие физич. поля, определяющие тензор энергии-импульса, напр. электромагнитное поле, не являются следствием уравнений Эйнштейна, и их нужно добавить к уравнениям (6).

В настоящее время известно много точных решений уравнений Эйнштейна, обладающих различными симметриями и соответствующих различным видам тензора энергии-импульса. Имеются определенные представления о структуре общего решения этих уравнений. Разработана постановка ряда задач математич. физики для уравнений Эйнштейна и прежде всего задачи Коши. С точки зрения представлений задачи Коши уравнения Эйнштейна являются системой уравнений гиперболич. типа, что соответствует конечности скорости распространения гравитационного взаимодействия.

Многие конкретные решения уравнений Эйнштейна получили ясную физич. интерпретацию. Однако система понятий общей теории относительности очень сильно отличается от понятийного аппарата всей предшествующей физики. Напр., одновременно с решением уравнений (6) строится та область, в к-рой они должны быть решены. Хотя во многих конкретных случаях удается сформулировать законы сохранения энергии и импульса с учетом гравитационного поля (напр., для островного распределения вещества, плотность к-рого быстро спадает на бесконечности), в полной мере представление о законах сохранения не является адекватным для общей теории относительности. Эта теория содержит также внутренние ограничения своей применимости: из многих первоначально регулярных распределений вещества за конечное собственное время образуются сингулярности, в к-рых такие физич. величины, как плотность, температура и т. п., могут обращаться в бесконечность. Вблизи сингулярностей общая теория относительности в обычном смысле неприменима. Наконец, представления нелинейной общей теории относительности несовместимы с линейной квантовой механикой.

В процессе развития общей теории относительности и физики элементарных частиц постепенно происходит их взаимное сближение, в ходе к-рого решаются отмеченные трудности. В частности, в рамках общей теории относительности удалось описать физич. поля со спином, для чего потребовалось ввести представление о пространстве-времени как о пространстве аффинной связности с кручением. Рассматриваются представления о финслеровом пространстве-времени. Была развита теория рождения частиц в гравитационном поле и сформулированы квантовомеханич. поправки к общей теории относительности (одним из первых такие поправки предложил А. Д. Сахаров). Представление о так наз. *космологической постоянной* удалось связать с современными представлениями о физич. вакууме. В рамках теории с космологич. постоянной уравнения Эйнштейна принимают вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ik},$$

где Λ – величина, характеризующая свойства физич. вакуума. В рамках теории *суперпространства* удалось нащупать точки соприкосновения в представлениях об искривленном пространстве-времени и линейном пространстве состояний. Развиваются многомерные теории элементарных частиц, являющиеся далекими обобщениями *Калуцы–Клейна теории*. В этих теориях кроме трех пространственных и одной временной координаты имеются дополнительные внутренние размерности, с помощью к-рых описываются свойства элементарных частиц. Вдали от космологич. сингулярности эти дополнительные размерности компактифицированы, свернуты до ультрамалых размеров и прямо нам не заметны. Предлагаются различные нестандартные теории тяготения, включающие новые, ненаблюдаемые сейчас на опыте физич. поля, напр. теория Бранса–Дикке с дополнительным скалярным полем. В теории элементарных частиц развиваются теории *калибровочных полей* и *Янга–Миллса полей*, представления к-рых перекликаются с представлениями общей теории относительности. Наконец, постепенно вырисовываются контуры так наз. *великого объединения взаимодействий*, то есть теории поля, объединяющей все известные взаимодействия, включая гравитационное, наподобие того, как электродинамика объединяет электричество и магнетизм. Развитие этих теорий в значительной степени ограничивается тем, что их эффекты очень слабы в окружающем нас мире и проявляются либо на очень ранних стадиях развития Вселенной, либо при исследовании процессов при сверхвысоких энергиях.

Лит.: [1] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.– Л., 1946; [2] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1, 2, М., 1960; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [4] Синг Дж., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963; [5] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [6] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971; [7] Зельдович Я. Б., «Успехи физич. наук», 1981, т. 133, в. 3, с. 479–503; [8] Зельдович Я. Б., Долгов А. Д., там же, 1980, т. 130, в. 4, с. 559–614.

Д. Д. Соколов.

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ – изменения гравитационного поля, распространяющиеся в пространстве с фундаментальной скоростью c. Г. в. излучаются массами, движущимися с переменным ускорением. Подобно электродинамике, предсказывающей существование не связанного с зарядами свободного электромагнитного поля – электромагнитных волн, релятивистская теория гравитации – общая теория относительности – предсказывает существование не связанного с массами свободного гравитационного поля – Г. в. Воздействуя на тела, Г. в. должны вызывать относительное смещение их частей (деформацию тел). На этом явлении основаны попытки обнаружения Г. в., однако они до сих пор не обнаружены из-за чрезвычайно малой интенсивности и крайне слабого взаимодействия с веществом.

Распространение Г. в. Слабые Г. в. представляют собой возмущения гравитационного поля, к-рые описываются симметричным тензором второго ранга $h_{\mu\nu}$, соответствующим малым возмущениям метрики Минковского (см. *Минковского пространство-время*) $\eta_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \qquad (1)$$

Тензор $h_{\mu\nu}$ рассматривается как тензорное поле на фоне плоского пространства-времени, при этом все операции

поднимания и опускания тензорных индексов производятся с помощью невозмущенного метрич. тензора $\eta_{\mu\nu}$.

При определенном выборе системы отсчета (или при определенной калибровке), аналогичной лоренцовой калибровке в электродинамике, на $h_{\mu\nu}$ налагаются дополнительные условия:

$$\frac{\partial \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \qquad (2)$$

где $\bar{h}^{\nu}_{\mu} = h^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu} h$, $h = h^{\mu}_{\mu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, δ^{ν}_{μ} – символ Кронекера (по совпадающим верхнему и нижнему индексам производится суммирование). В этой калибровке линеаризованные уравнения Эйнштейна в пустоте сводятся к волновому уравнению для $h_{\mu\nu}$:

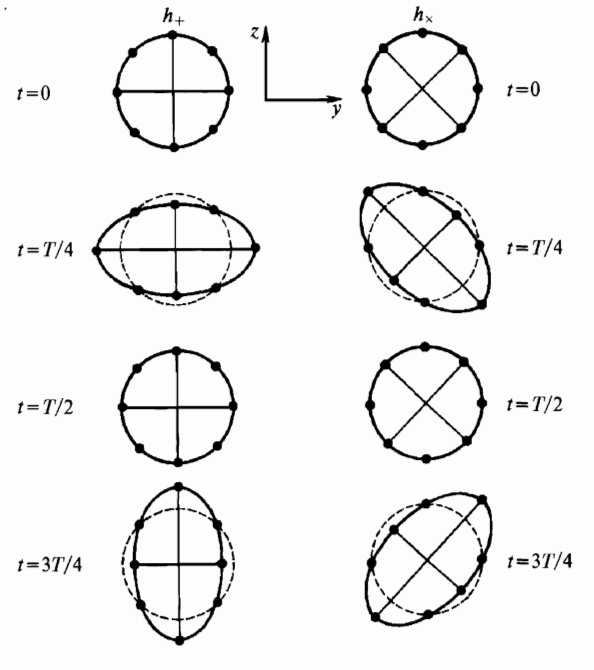
$$\Box h^{\nu}_{\mu} \equiv \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h^{\nu}_{\mu} = 0, \qquad (3)$$

где $\Box$ – оператор Д'Аламбера, Δ – оператор Лапласа.

В малой области пространства-времени Г. в. можно считать плоской. Если в качестве оси x выбрать направление распространения волны, то подходящим выбором системы отсчета можно обратить в нуль все компоненты $h_{\mu\nu}$, кроме компонент $h_{22} = -h_{33} \equiv h_+$ и $h_{23} \equiv h_\times$, то есть Г. в. является поперечной, а поляризация волны определяется следующим двумерным тензором второго ранга в плоскости yz:

$$h_{ab} = \begin{Vmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{Vmatrix}, \quad a,b = 2,3. \qquad (4)$$

Компоненты h_+ и $h_\times$ описывают две независимые поляризации Г. в., к-рые отличаются друг от друга поворотом на угол $\pi/4$ в плоскости yz (см. рис.).



Смещение пробных частиц в поляризованной гравитационной волне для двух независимых поляризаций. До начала прохождения волны частицы располагались на окружности. Каждый рисунок показывает последовательные положения частиц через четверть периода волны.

Если в отсутствие Г. в. квадрат расстояния между соседними пробными частицами равен

$$dl_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad (5)$$

то в волне расстояние оказывается переменным:

$$dl^2 = dl_0^2 + h_+(dy^2 - dz^2) + 2h_\times dx dy. \qquad (6)$$

Из (6) становится ясным физич. смысл величин h_+ и $h_\times$: этими величинами определяются относительные смещения (а также относительные скорости и ускорения) пробных частиц в гравитационной волне (см. рис.).

Поток энергии в Г. в. направлен вдоль оси распространения волны и равен

$$t^{0x} = \frac{c^2}{16\pi G}\left(\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2\right), \qquad (7)$$

где G – гравитационная постоянная.

Величина (7) представляет собой компоненту так наз. псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. В отличие от истинного тензора, любая компонента псевдотензора может быть локально обращена в нуль соответствующим выбором системы отсчета. Последнее есть следствие *эквивалентности принципа*: локально гравитационное поле может быть устранено переходом в ускоренную систему отсчета. Однако после усреднения по многим длинам волн псевдотензор переходит в истинный тензор и усредненная таким способом компонента $\langle t^{0x} \rangle$ уже не может быть обращена в нуль никаким выбором системы отсчета. Это означает, что, в отличие от электромагнитной волны, энергия Г. в. не локализована.

Понятие слабой Г. в. обобщается и на случай, когда фоновое пространство-время является произвольно искривленным, $g^{(0)}_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$, то есть пространство-время не является пространством-временем Минковского. Если длина волны $\lambda \ll R$, где R – характерный радиус кривизны фонового пространства-времени, то $h_{\mu\nu}$ в волне описывается уравнением

$$h_{\mu\nu}{}^{;\rho}{}_{;\rho} = 0, \qquad (8)$$

где ; означает ковариантное дифференцирование. Уравнение (8) является обобщением уравнения (3). И в этом случае псевдотензор энергии-импульса, усредненный по участкам пространства-времени с размерами L, такими, что $\lambda \ll L \ll R$, превращается в истинный тензор в фоновом пространстве-времени и описывает влияние самих Г. в. на фоновую кривизну. Указанное обобщение представляет большой интерес, напр. в космологии при рассмотрении так наз. космологич. (или первичных) Г. в., распространяющихся на фоне однородной и изотропной Вселенной (пространство-время Фридмана).

Кроме того, известны точные решения уравнений Эйнштейна, к-рые представляют собой обобщения слабой Г. в. на случай сильного гравитационного поля ($|h_{\mu\nu}| \sim 1$).

В дальнейшем будет рассмотрено излучение слабых Г. в.

Источники Г. в. Уравнения Эйнштейна при наличии материи могут быть записаны в виде:

$$\Box \bar{h}^{\mu}_{\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}\tau^{\mu}_{\nu}, \qquad (9)$$

где $\tau^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu} + t^{\mu}_{\nu}$, T^{μ}_{ν} – тензор энергии-импульса материи, а t^{μ}_{ν} – псевдотензор гравитационного поля. Решение уравнения (9) имеет вид:

$$\bar{h}^{\mu}_{\nu} = -\frac{4G}{c^4}\int \left(\tau^{\mu}_{\nu}\right)_{t-R/c} dV/R \qquad (10)$$

(dV – элемент объема). Формула (10) справедлива для любых источников. Но если массы в источнике движутся со скоростями, много меньшими скорости света, то решение (10) можно существенно упростить, положив всюду в (10) $R = R_0$, где R_0 – расстояние от центра масс системы до точки, в к-рой определяется $h_{\mu\nu}$. Если воспользоваться соотношением

$$\frac{\partial \tau^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \qquad (11)$$

к-рое непосредственно вытекает из (2) и (9), то, дважды применяя интегрирование по частям и формулу Гаусса,

можно показать, что (10) в пределе медленных движений сводится к выражению

$$h_{ik} = -\frac{2G}{3c^4 R_0}\ddot{D}_{ik}, \quad i,k = 1,2,3, \tag{12}$$

где

$$D_{ik} = \int \rho[3x^i x^k - (x^i)^2]dV$$

– тензор квадрупольного момента (ρ – плотность материи в источнике).

В общей теории относительности, в отличие от электродинамики, отсутствует дипольное гравитационное излучение: вследствие равенства тяжелой (гравитационной) и инертной массы, а также закона сохранения импульса вторая производная по времени от дипольного момента

$$d_i = \int \rho x^i\, dV$$

(определяющая дипольное излучение) обращается в нуль,

$$\ddot{d}_i = \int \dot{p}^i dV,$$

где p^i – компонента плотности импульса. Таким образом, гравитационное излучение носит в основном квадрупольный характер [h_{ik}, связанные с более высокими мультиполями, много меньше, чем величина (12)].

Из (7) и (12) следует, что вдали от источника поток энергии излучения $\mathscr{E}_{\text{гр}}$ в элемент телесного угла, проинтегрированный по всем направлениям, равен

$$L_{\text{гр}} = \int t^{0r} R^2\, d\Omega \equiv -\frac{d\mathscr{E}_{\text{гр}}}{dt} = \frac{G}{45c^5}\dddot{D}_{ik}^2. \tag{13}$$

Скорость потери энергии за счет излучения Г. в. может быть получена и без привлечения псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. Показано, что в ближней неволновой зоне гравитационное поле может быть описано модифицированным потенциалом, к-рый отличается от обычного ньютоновского потенциала качественной добавкой

$$\Phi^{\text{реак}} = \frac{G}{15c^5}\ddddot{D}_{ik}\, x^i x^k, \tag{14}$$

соответствующей силе реакции излучения (аналог силы радиационного трения в электродинамике)

$$\boldsymbol{F}^{\text{реак}} = -m\nabla\Phi^{\text{реак}}. \tag{15}$$

Тогда потеря энергии системой (источником) равна

$$\frac{d\mathscr{E}^{\text{реак}}}{dt} = \int \boldsymbol{v}\boldsymbol{F}^{\text{реак}} dV = -\frac{G}{45c^5}\ddddot{D}_{ik}\dot{D}_{ik}. \tag{16}$$

Усредняя (16) по нескольким периодам или характерным временам, дважды применяя интегрирование по частям, приходим к той же величине скорости потери энергии, что и (13).

Учитывая, что по порядку величины

$$\ddot{D}_{ik} \sim mr^2/T^3 \sim mv^3/r$$

(m, r, T и v – характерные масса, размер, время и скорость в несферич. самогравитирующей системе), из (13) можно получить простые оценочные формулы:

$$L_{\text{гр}} \sim \frac{G}{c^5}\left(\frac{m}{r}\right)^2 v^6 \sim L_0\left(\frac{r_g}{r}\right)^2\left(\frac{v}{c}\right)^6, \tag{17}$$

где $L_0 \equiv c^5/G \approx 3{,}6\cdot 10^{59}$ эрг/с, r_g – *гравитационный радиус* источника. Для гравитационно связанных систем

$$v \sim \left(\frac{Gm}{r}\right)^{1/2}, \quad T \sim \left(\frac{r^3}{Gm}\right)^{1/2}, \tag{18}$$

и поэтому

$$L_{\text{гр}} \sim L_0\left(\frac{r_g}{r}\right)^5, \Delta\mathscr{E}_{\text{гр}} \approx L_{\text{гр}}T \sim mc^2\left(\frac{r_g}{r}\right)^{7/2}. \tag{19}$$

Так как из (12) следует, что

$$h \sim \left(\frac{r_g}{R}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^2, \tag{20}$$

то

$$h \sim 3\cdot 10^{-18}\left(\frac{\varepsilon}{0{,}1}\right)^{2/7}\frac{(m/M_\odot)}{(R/10_{\text{км}})}, \tag{21}$$

где $\varepsilon = \Delta\mathscr{E}_{\text{гр}}/mc^2 \sim (r_g/r)^{7/2}$ – эффективность гравитационного излучения.

Основными источниками Г. в. являются следующие астрофизич. объекты и явления: двойные звездные системы (излучение носит периодич. характер); быстро вращающиеся (не аксиально симметричные по форме) пульсары (периодич. излучение); столкновения компактных объектов – нейтронных звезд или черных дыр – в плотных скоплениях (излучение носит характер всплесков); взрывы сверхновых (всплески); несферич. коллапс, к-рый может предшествовать взрыву сверхновой (всплески); космологич. Г. в. (излучение носит характер стохастич. шума) и др.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971; [3] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 1–3, М., 1977; [4] Захаров В. Д., Гравитационные волны в общей теории относительности, М., 1972.

В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев.

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПАРАДОКС – см. *Гравитационного поля уравнения.*

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Гравитационного поля уравнения.*

ГРАВИТАЦИОННЫЙ РАДИУС – параметр

$$r_g = 2\gamma m/c^2$$

(γ – гравитационная постоянная, m – масса тела, создающего поле, c – скорость света), входящий в выражение пространственно-временного интервала для черной дыры Шварцшильда. Так, напр., в координатах Шварцшильда t, r, φ, ϑ зависимость метрики от r_g имеет вид

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Изотропная гиперповерхность $r = r_g$ соответствует *горизонту событий* черной дыры Шварцшильда.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988.

А. Т. Ильичев.

ГРАВИТОН – см. *Квантовая теория гравитации.*

ГРАДИЕНТ – вектор, показывающий направление наибольшего роста скалярной функции $\varphi(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – координатные орты. Г. в нек-рой точке направлен по нормали к поверхности (линии) уровня в этой точке, длина Г. $\sqrt{(\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2}$.

Свойства Г.:

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi,$$
$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\operatorname{grad} f(\varphi) = f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi.$$

См. также *Векторный анализ.*

В. И. Битюцков.

ГРАДИЕНТ антисимметрического тензорного поля с координатами $T_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ – кососимметрическое тензорное поле типа $(0, k+1)$ с координатами

$$(dT)_{j_1 \ldots j_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1}(-1)^{q+1}\frac{\partial T_{j_1 \ldots \hat{j}_q \ldots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}};$$

здесь $\hat{j}_q$ обозначает, что индекс j_q пропущен.

Пусть E – гильбертово пространство, $f: U \subset E \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, $df: U \to E^*$ – ее дифференциал. Тогда градиент

$$\operatorname{grad} f = \nabla f: U \to E$$

функции f определяется равенством

$$\langle \nabla f(u),\, e\rangle = df(u)(e)$$

для произвольного вектора e. Если E – конечномерное пространство, то Г. в смысле второго определения получается из Г. в смысле определения первого с помощью поднятия индексов. *В. В. Трофимов.*

ГРАДИЕНТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – *поток*, задаваемый градиентом гладкой функции f на гладком многообразии. При дифференцировании f непосредственно получается ковариантный вектор (напр., в конечномерном случае в координатной окрестности U с локальными координатами $x^1,\dots,x^n$ это будет вектор с компонентами $\partial f/\partial x^1,\dots,\partial f/\partial x^n$), тогда как вектор фазовой скорости является контравариантным. Переход от одного к другому осуществляется с помощью какой-либо римановой метрики, от выбора к-рой (наряду с f) зависит, таким образом, определение Г. д. с.; часто у вектора фазовой скорости еще меняют знак. В приведенном примере Г. д. с. в области U описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx^j/dt = \pm\textstyle\sum_j g^{ij}\,\partial f/\partial x^j, \quad j=1,\dots,n,$$

где коэффициенты g^{ij} образуют матрицу, обратную по отношению к матрице коэффициентов $\|g_{ij}\|$ метрич. тензора; подразумевается, что во всех n уравнениях правая часть берется с одним и тем же знаком «плюс» или «минус». Часто под Г. д. с. понимают системы несколько более общего типа. *Д. В. Аносов.*

ГРАМА ОПЕРАТОР – см. *Гильбертово пространство.*

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ в классе гиперфункций – обобщенное *граничное значение* функции f, аналитической в тубоиде $D(O)$, где O – область в $\mathbb{R}^n$. По определению, Г. з. f в классе *гиперфункций* есть гиперфункция $\mathrm{bv} f\in\mathscr{B}(O)$, задаваемая набором из одного элемента – самой функции f, то есть $\mathrm{bv} f$ есть класс эквивалентности f в $R(O)/Z(O)$. *В. В. Жаринов.*

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ в классе распределений – обобщенное *граничное значение* функции f, аналитической в тубоиде $D(O)$, в пространстве *Шварца распределений* $\mathscr{D}'(O)$ при $y\to 0$, где O – область в $\mathbb{R}^n$. Такое Г. з. существует тогда и только тогда, когда $f(x+iy)$ имеет локально медленный рост при $y\to 0$, то есть когда справедлива оценка: для каждого $x\in O$ существуют подобласть $\omega\subset O$, содержащая x, непустой открытый конус C и числа R, M, $m>0$ такие, что

$$|f(x+iy)|\leqslant M|y|^{-m},\ x+iy\in\omega+iC_R.$$

В. В. Жаринов.

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ в классе ультрараспределений – обобщенное *граничное значение* функции f, аналитической в тубоиде $D(O)$, в каком-либо из пространств *ультрараспределений* при $y\to 0$. *В. В. Жаринов.*

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ в классе умеренных распределений – см. *Владимирова алгебра.*

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ в классе Фурье гиперфункций – обобщенное *граничное значение* функции f, аналитической в клиновой области $\mathbb{R}^n+iC_R$, в пространстве *Фурье гиперфункций* $\mathscr{B}(\mathbb{D}^n)=\varkappa'_+(\mathbb{D}^n)$ при $y\to 0$, где C – открытый связный конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле. Такое Г. з. существует, когда f удовлетворяет оценке: для любого $\varepsilon>0$ и любой области $B\Subset C_R$ существует $M>0$ такое, что

$$|f(z)|\leqslant Me^{\varepsilon|x|},\ z=x+iy\in\mathbb{R}^n+iB$$

($B\Subset C_R$ означает, что B ограничена и ее замыкание $\bar{B}\subset C_R$). *В. В. Жаринов.*

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ функции (обобщенное) – граничное значение, распространяющее понятие поточечного граничного значения *аналитической функции*. Понятие обобщенного Г. з. впервые стало систематически использоваться в 50-х гг. 20 в. в аксиоматич. квантовой теории поля, где была доказана одна из фундаментальных теорем многомерного комплексного анализа – *Боголюбова теорема «острие клина»*, в к-рой обобщенное Г. з. сыграло существенную роль. В настоящее время это понятие активно применяется в комплексном анализе и в теории обобщенных функций (см. *Аналитическое представление* обобщенной функции).

Пусть $f(z)$ – функция комплексного переменного $z=x+iy$, аналитическая в клиновой области (область – открытое связное множество) $O+iC_R=\{x+iy;\ x\in O,\ y\in C_R\}\subset\mathbb{C}^n$, где O – область в $\mathbb{R}^n$, C – открытый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле, $C_R=\{y\in C;\ |y|<R\}$. Пусть $\mathscr{F}(O)$ – основное пространство (см. *Обобщенная функция*), состоящее из функций, определенных в области O. Обобщенная функция $\mathrm{bv} f\in\mathscr{F}'(O)$ называется обобщенным граничным значением функции f в $\mathscr{F}'(O)$ при $y\to 0$, если

$$(\mathrm{bv} f,\varphi)=\lim_{y\to 0,\,y\in C}\int f(x+iy)\varphi(x)\,d^nx,\quad \varphi\in\mathscr{F}(O).$$

Область $D(O)\subset\mathbb{C}^n$ называется тубоидом над областью $O\subset\mathbb{R}^n$, если ее можно представить в виде объединения (возможно несчетного) семейства клиновых областей, то есть

$$D(O)=\bigcup\nolimits_{a\in A} O_a+iC_{a,R_a},$$

где A – множество индексов, области $O_a\subset O$ покрывают область O. Пусть $\mathscr{F}(O)$ – основное пространство с *разложением единицы*. Пусть функция $f(z)$, аналитическая в тубоиде $D(O)$, в каждой клиновой области O_a+iC_{a,R_a} имеет обобщенное Г. з. $\mathrm{bv} f_a$ в $\mathscr{F}'(O_a)$ при $y\to 0$ в C_a, причем эти локальные обобщенные Г. з. «склеиваются» в единую обобщенную функцию $\mathrm{bv} f\in\mathscr{F}'(O)$ (для этого необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{bv} f_a=\mathrm{bv} f_b$ на $O_a\cap O_b$, когда последнее пересечение не пусто). Тогда $\mathrm{bv} f$ называется обобщенным граничным значением аналитич. функции $f(z)$ в $\mathscr{F}'(O)$ при $y\to 0$.

Лит.: [1] Жаринов В. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1983, т. 162, с. 1–80.

В. В. Жаринов.

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ – см. *Краевая задача, Математической физики классические уравнения.*

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА аналитических функций – свойства *аналитических функций*, проявляющиеся при приближении к границе области определения.

Можно считать, что понимаемое в самом широком смысле изучение Г. с. аналитич. функций началось с *Сохоцкого теоремы* и *Пикара теоремы* о поведении аналитич. функций в окрестности изолированной *существенно особой точки*, полученных во 2-й половине 19 в.

В связи с тем, что изучение Г. с. аналитич. функций связано прежде всего с геометрией границы Г области определения D аналитич. функции $f(z)$ одного комплексного переменного z, в теории Г. с. аналитич. функций выделились три основных направления.

а) Изучение поведения $f(z)$ в окрестности изолированной граничной точки $a\in\Gamma$. Наибольшее значение имеет случай существенно особой точки a, к к-рому относятся теорема Сохоцкого и теорема Пикара.

б) Изучение поведения $f(z)$ в том случае, когда граница Г есть всюду разрывное множество.

в) Изучение поведения $f(z)$ в том случае, когда область D ограничена непрерывной замкнутой кривой Г. Наибольшее внимание исследователей привлек случай в), о к-ром говорится ниже.

Пусть аналитич. функция $f(z)$ определена в конечной односвязной области D комплексной плоскости z, ограниченной жордановой спрямляемой кривой Г. Основными проблемами, характерными для классич. направления изучения Г. с. аналитич. функций, являются следующие.

1) Проблема существования граничных значений, то есть вопрос о том, при каких условиях и в каком смысле существуют граничные значения $f(z)$ при приближении точки z к Г. Эта проблема, как и последующие, иначе может быть сформулирована как задача о выделении достаточно обширных классов аналитич. функций в D, имеющих в том или ином смысле граничные значения на достаточно массивных множествах точек Г.

2) Проблема граничного представления $f(z)$, то есть вопрос о том, при каких условиях и при помощи какого аналитич. аппарата может быть выражена зависимость функции $f(z)$ от ее граничных значений на Г. Здесь, очевидно, для различных классов аналитич. функций аналитич. аппарат будет варьироваться.

3) Проблема единственности, или вопрос о том, какими свойствами должно обладать множество $E \subset \Gamma$, чтобы две аналитич. функции того или иного класса совпадали всюду в D, если их граничные значения на E совпадают.

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, кол. 1098–1102; [2] Голубев В. В., Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М., 1950.

Е. Д. Соломенцев.

ГРАССМАНА АЛГЕБРА, внешняя алгебра,– алгебра, порожденная антикоммутирующими образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть совокупность всевозможных линейных комбинаций из произведений образующих x_i, в которых все сомножители различны, так как

$$x_i x_k + x_k x_i = 0, \qquad (1)$$

и, в частности, $x_k^2 = 0$ при любом k. Размерность Г. а. как линейного пространства равна 2^n, базис состоит из 2^n одночленов:

$$1,\ x_i,\ i \leqslant n,\quad x_i x_j,\ i < j \leqslant n,$$
$$x_i x_j x_k,\ i < j < k \leqslant n,\ \ldots,\ x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Любой элемент Г. а. $f(x)$ можно представить в виде следующей конечной суммы:

$$f(x) = f + \sum_i f^i x_i + \sum_{i<j} f^{ij} x_i x_j + \ldots + f^{1\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n. \qquad (2)$$

На случай грассмановых переменных обобщается ряд понятий обычного анализа, в частности дифференцирование и интегрирование. Чтобы найти левую производную от одночлена $x_1 \ldots x_\beta$ по переменной x_α, нужно, пользуясь (1), переставить x_α на первое слева место и вычеркнуть ее. Аналогично определяется правая производная. Производная от общего элемента Г. а. есть сумма производных от одночленов в разложении (2). Интеграл на Г. а. задается правилами Березина:

$$\int dx^\alpha = 0, \quad \int dx^\alpha x_\beta = \delta^\alpha_\beta,$$

при этом кратный интеграл понимается как повторный. Символ dx^α не есть обычный дифференциал, его следует трактовать формально. Интеграл на Г. а. обладает нек-рыми свойствами обычного интеграла, в частности возможно интегрирование по частям. С другой стороны, интегрирование на Г. а. эквивалентно дифференцированию:

$$\int dx^\alpha f(x) = \partial f(x)/\partial x_\alpha.$$

Интегрирование по грассмановым переменным позволяет построить *функциональный интеграл*, представляющий *Грина функции* фермионных полей.

В. И. Огиевецкий.

ГРАССМАНА ЛАГРАНЖЕВО МНОГООБРАЗИЕ Λ_n – множество всех *Лагранжа плоскостей* линейного $2n$-мерного симплектического пространства.

$\Lambda_1 = \mathbb{R}P^1 \cdot \Lambda_2$ изоморфно квадрике $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 - w^2 = 0$ в $\mathbb{R}P^4$; Λ_2 является факторизацией $S^2 \times S^1$ по антиподальной инволюции $(x, y) \mapsto (-x, -y)$; $\dim \Lambda_n = n(n+1)/2$. Г. л. м. является однородным пространством: $\Lambda_n = U_n / O_n$.

М. Э. Казарян.

ГРАССМАНОВЫ ПЕРЕМЕННЫЕ – образующие *Грассмана алгебры* x_i, удовлетворяющие соотношениям

$$\{x_i, x_j\} = x_i x_j + x_j x_i = 0.$$

Произвольный элемент алгебры с n образующими есть многочлен вида

$$f(x) = \sum_{a_i = 0,1} C(a_1, \ldots, a_n) x_n^{a_n} \ldots x_1^{a_1}.$$

В силу перестановочных соотношений (коммутативности) при $i = j$ получается $x_i^2 = 0$, так что степени образующих выше первой исчезают. Произведение k различных Г. п. называется одночленом степени k. Элементы алгебры Грассмана, представимые в виде линейной комбинации одночленов четной степени, называются четными, а представимые в виде линейной комбинации одночленов нечетной степени – нечетными. На грассмановой алгебре можно ввести дифференциальное исчисление (см. [1], [2]). Определяются левая $\frac{\partial}{\partial x_p} f$ и правая $f \frac{\partial}{\partial x_p}$ производные элемента f по Г. п. x_p. В силу линейности операции дифференцирования для этого достаточно задать производные на одночленах. Пусть

$$\frac{\partial}{\partial x_p} x_{i_1} \ldots x_{i_s} = \delta_{i_1 p} x_{i_2} \ldots x_{i_s} - \delta_{i_2 p} x_{i_1} x_{i_3} \ldots x_{i_s} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{s-1} \delta_{i_s p} x_i \ldots x_{i_{s-1}},$$
$$x_{i_1} \ldots x_{i_s} \frac{\partial}{\partial x_p} = \delta_{i_s p} x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}} - \delta_{i_{s-1} p} x_{i_1} \ldots x_{i_{s-2}} x_{i_s} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{s-1} \delta_{i_1 p} x_{i_2} \ldots x_{i_s}.$$

Производные обладают следующими свойствами:

1) Пусть f_1 – четный, f_2 – нечетный, а f – произвольный элементы грассмановой алгебры. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(f_1 f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f_1\right) f - f_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_p}(f_2 f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f_2\right) f + f_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f\right)$$

и аналогичные формулы для левых производных.

2) $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f\right) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right)\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$

Для грассмановой алгебры с четным числом образующих, заданных в виде $x_1, x_1^+, \ldots, x_n, x_n^+$ можно ввести операцию инволюции, действующую на произвольный элемент вида

$$f(x, x^+) = \sum_{a_i, b_i = 0,1} C(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)(x_n)^{a_n} \ldots$$
$$\ldots (x_1)^{a_1} (x_n^+)^{b_n} \ldots (x_1^+)^{b_1}$$

по правилу

$$f \to f^+(x, x^+) = \sum_{a_i, b_i = 0,1} C^*(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)(x_n)^{b_n} \ldots$$
$$\ldots (x_1)^{b_1} (x_n^+)^{a_n} \ldots (x_1^+)^{a_1}.$$

Для грассмановых алгебр с инволюцией со скалярным произведением инволютивные Г. п. можно представить в виде $\varepsilon(x)$, $\varepsilon^+(x)$, где x пробегает нек-рое множество M с мерой dx (см. [1]). При этом любой элемент грассмановой алгебры представим в виде функционала от функций с антикоммутирующими значениями

$$f(\varepsilon, \varepsilon^+) = \sum_{n,m} \int \varphi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \varepsilon(x_1) \ldots \varepsilon(x_n) \times$$
$$\times \varepsilon^+(y_1) \ldots \varepsilon^+(y_m)\, dx^n dy^m,$$

где $\varphi(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m)$ – комплекснозначные, кососимметрич. функции, вообще говоря, обобщенные.

Интерес к Г. п., введенным Г. Грассманом (H. Grassmann) в середине 19 в., связан, в частности, с тем, что они естественным образом возникают при квантовании фермиполей.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] его же, Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными, М., 1983; [3] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980.

С. А. Федотов.

ГРАФ – множество V вершин и набор E неупорядоченных и упорядоченных пар вершин; обозначается через $G(V, E)$. Неупорядоченная пара вершин называется ребром, упорядоченная пара – дугой. Г., содержащий только ребра, называется неориентированным; Г., содержащий только дуги,– ориентированным. Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами (дугами одного направления), такие ребра (дуги) называются кратными. Дуга (или ребро) может начинаться и кончаться в одной и той же вершине, такая дуга (ребро) называется петлей. Вершины, соединенные ребром или дугой, называются смежными; ребра, имеющие общую вершину, – также смежными. Ребро (дуга) и любая из его двух вершин называются инцидентными. Говорят, что ребро (u, v) соединяет вершины u и v, а дуга (u, v) начинается в вершине u и кончается в вершине v.

Каждый Г. можно представить в евклидовом пространстве множеством точек, соответствующих вершинам, к-рые соединены линиями, соответствующими ребрам (или дугам) Г.,– укладка Г. В 3-мерном пространстве любой Г. можно представить таким образом, что линии, соответствующие ребрам (дугам), не пересекаются во внутренних точках. Класс Г., называемых плоскими, допускает представление в 2-мерном пространстве.

Существуют различные способы задания Г. Пусть v_1, v_2, ..., v_n – вершины графа $G(V, E)$, а e_1, e_2, ..., e_m – его ребра. Матрицей смежности, соответствующей графу G, называется матрица $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, у к-рой элемент a_{ij} равен числу ребер (дуг), соединяющих вершины v_i и v_j (идущих из v_i в v_j), и $a_{ij} = 0$, если соответствующие вершины не смежны. В матрице инцидентности $B = \|b_{ij}\|$ графа G элемент $b_{ij} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, и $b_{ij} = 0$, если вершина v_i и ребро e_j не инцидентны. Г. можно задать посредством списков, напр. указанием пар вершин, соединенных ребрами (дугами), или заданием для каждой вершины множества смежных с ней вершин (степенью вершины v называется число ребер, инцидентных v).

Последовательность ребер (v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}), ..., (v_{r-1}, v_r) называется маршрутом, соединяющим вершины v_0 и v_r. Маршрут замкнут, если $v_0 = v_r$. Маршрут, содержащий все вершины или ребра Г. и обладающий определенными свойствами, называется обходом Г.

В проблематике теории Г. можно выделить направления, носящие более комбинаторный или более геометрический характер. К первым относятся, напр., задачи о построении Г. с заданными свойствами, задачи о подсчете и перечислении Г. с фиксированными свойствами. Геометрический (топологический) характер носят, напр., задачи, связанные с обходами Г., и задачи, возникающие при укладке Г. на различных поверхностях.

В. П. Козырев.

ГРИБОВА НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ – см. *Калибровочное условие.*

ГРИНА АНЗАТЦ – см. *Парастатистика.*

ГРИНА ИНТЕГРАЛ – см. *Гармоническая функция, Грина формулы.*

ГРИНА МАТРИЦА – см. *Грина функция.*

ГРИНА РАЗЛОЖЕНИЕ – см. *Парастатистика.*

ГРИНА ТЕОРЕМА – см. *Векторный анализ.*

ГРИНА ФОРМУЛЫ – формулы интегрального исчисления функций многих переменных, связывающие значения n-кратного интеграла по области D n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $(n-1)$-кратного интеграла по кусочно гладкой границе $\partial D = \Gamma$ этой области. Г. ф. получаются интегрированием по частям интегралов от *дивергенции* векторного поля, непрерывного в $\overline{D} = D + \Gamma$ и непрерывно дифференцируемого в D.

В простейшей Г. ф.

$$\int_\Gamma [Pdx + Qdy] = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy \qquad (1)$$

криволинейный интеграл по контуру Г выражается через двойной интеграл по области $D \subset \mathbb{R}^2$. При этом область D ориентируется естественным образом, а на границе Г берется индуцированная ориентация, известная как обход против часовой стрелки. Формула (1) имеет простой гидродинамич. смысл: поток через границу области Г жидкости, текущей по плоскости со скоростью $v = (Q, -P)$, равен интегралу по области D от интенсивности (дивергенции)

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

распределенных в D источников и стоков. В этом смысле Г. ф. (1) подобна *Остроградского формуле* (см. также *Стокса формула*).

Формулу (1) иногда называют формулой Гаусса и формулой Римана.

Дж. Грину (G. Green, 1828) принадлежат следующие Г. ф. теории *потенциала*

$$\int_D \left[v\Delta u + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^i}\right] dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial N} ds. \qquad (2)$$

– подготовительная Г. ф. и

$$\int_D [u\Delta v - v\Delta u] dx = \int_\Gamma \left[u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N}\right] ds, \qquad (3)$$

где D – область $\mathbb{R}^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, $dx = dx^1 dx^2 dx^3$ – элемент объема G, ds – элемент площади Г, $N = (N_1, N_2, N_3)$ – единичная внешняя (ко)нормаль к Г,

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^3 N_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

– оператор дифференцирования в направлении (ко)вектора N, а

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$$

– оператор Лапласа.

Формулы (2), (3) справедливы и в случае, когда D есть область $\mathbb{R}^n$, $x = (x^1, ..., x^n)$, $dx = dx^1 ... dx^n$ – элемент объема D, ds – элемент $(n-1)$-мерного объема Г, а

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)^2$$

– оператор Лапласа с n независимыми переменными.

Г. ф. служат источником ряда соотношений, полезных для изучения свойств решения краевых задач, выяснения вида краевых задач, получения решения в явном виде и т. п. Напр., для гармонической в D функции $u(x)$ из (2) при $v(x) = 1$ следует теорема Гаусса:

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N} ds = 0.$$

Для достаточно гладких в $\overline{D}$ функций $u(x)$, $w(x)$ и функции

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}|x-y|^{2-n} + w(x), & \text{если } n \geqslant 3, \\ -\ln|x-y| + w(x), & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

имеющей при $x=y$ такую же особенность, как и фундаментальное решение оператора Лапласа, верны следующие Г. ф.:

$$\int_D \left[u\Delta w + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right]dx = cu(y) + \int_D u\frac{\partial v}{\partial N}ds, \qquad (4)$$

$$\int_D [u\Delta w - v\Delta u]dx = cu(y) + \int_D \left[u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N}\right]ds. \qquad (5)$$

Здесь

$$c = \begin{cases} \omega_n, & \text{если } y \in D, \\ \frac{1}{2}\omega_n, & \text{если } y \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } y \notin \bar{D}, \end{cases}$$

а $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ есть площадь $(n-1)$-мерной единичной сферы пространства $\mathbb{R}^n$. При этом для $y \in \Gamma$ предполагается, что граница Γ имеет непрерывную касательную плоскость в нек-рой окрестности y.

Формулы (4) и (5) служат основой получения интегральных представлений решений основных *краевых задач* теории потенциала. Напр., отсюда для гармонической в D функции $u(x)$ получаем формулу, или интеграл, Грина

$$u(y) = \frac{1}{c}\int_\Gamma \left[v(x)\frac{\partial u}{\partial N} - u(x)\frac{\partial v}{\partial N}\right]ds, \qquad (7)$$

играющую важную роль в теории *гармонических функций*.

Лит.: [1] Green G., An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, Nottingham, [1828]; [2] Максвелл Д., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, пер. с англ., М., 1954; [3] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 2, 20 изд., М., 1966; [4] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [5] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966.

Л. П. Купцов.

ГРИНА ФУНКЦИЯ в квантовой теории поля — одна из основных величин, определяющих движение частиц и состояние полей; представляет собой среднее по вакууму от *хронологического произведения* операторов полей. По своему смыслу понятие Г. ф. в квантовой теории поля близко к понятию Г. ф. в математич. физике и используется в тех же целях — как вспомогательная величина при расчетах физич. характеристик и решении уравнений при заданных источниках.

В квантовой механике частицы волновая функция $\psi(x)$ определяется уравнением вида

$$L(x)\psi(x) = 0,$$

где $L(x)$ — нек-рый оператор, x — точка пространства-времени. Здесь Г. ф. $G(x, x')$ определяется уравнением

$$L(x)\,G(x, x') = \delta(x - x'),$$

где $\delta(x-x')$ — дельта-функция, и, следовательно, имеет точно такой же смысл, как в математич. физике. В квантовой теории поля волновую функцию частицы заменяет величина $u(x)|0\rangle$, где $u(x)$ — оператор поля, $|0\rangle$ — *вектор состояния* вакуума. Для свободных полей одночастичная (двухточечная) Г. ф., называемая иначе функцией распространения, или пропагатором:

$$D^c(x-x') = \langle 0|\,Tu(x)\,u(x')\,|0\rangle \qquad (1)$$

(где T — знак хронологич. упорядочения, а скобки $\langle 0|\ldots|0\rangle$ означают усреднение по вакууму), является Г. ф. неоднородного уравнения поля, то есть удовлетворяет уравнению с точечным источником. Напр., для скалярного поля пропагатор удовлетворяет неоднородному *Клейна — Гордона уравнению*

$$(\Box - m^2)\,D^c(x) = -\delta(x) \qquad (2)$$

($\Box$ — оператор Д'Аламбера, m — масса кванта поля; используется система единиц $\hbar = c = 1$).

С физич. точки зрения, функция $D^c(x-x')$ — так наз. причинная функция Грина — описывает причинную связь процессов рождения и уничтожения частицы в различных точках x, x'.

Полное решение уравнения (2) представляется в виде частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Решением однородного уравнения являются так наз. перестановочная функция Паули — Йордана $D(x)$ и ее частотные компоненты $D^{\pm}(x)$. К частным решениям неоднородного уравнения (2), помимо введенной выше причинной (индекс c) Г. ф., относятся известные из классич. теории взаимодействующих полей запаздывающая (ret) и опережающая (adv) Г. ф. С помощью фурье-преобразования получаются следующие представления для Г. ф. скалярного поля:

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k\exp(-ikx)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon},$$

$$\overset{\text{ret}}{D}{}^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k\exp(-ikx)}{m^2 - k^2 \mp 2ik_0\varepsilon},$$

$$\varepsilon \to +0,$$

где k — 4-импульс виртуальной частицы. Бесконечно малая добавка в знаменателе этих выражений определяет правила обхода полюсов в точке $k^2 = m^2$ при интегрировании в комплексной плоскости энергии k_0 и однозначно задает данную Г. ф.

Причинные Г. ф. спинорного и векторного полей могут быть выражены через причинную Г. ф. скалярного поля действием дифференциальных операторов, стоящих в уравнениях для соответствующих свободных полей.

Г. ф. свободных полей являются одним из основных составных элементов *Фейнмана диаграмм*.

Обобщением свободных одночастичных Г. ф. на случай наличия взаимодействия являются многочастичные, или n-точечные, Г. ф.:

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\langle 0|\,T\{u_1(x_1)\ldots u_n(x_n)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \qquad (3)$$

Здесь $u_i(x_i)$ — операторы полей в представлении взаимодействия, S — матрица рассеяния. В перенормированной теории возмущений Г. ф. (3) содержат все *радиационные поправки*, соответствующие как связным, так и несвязным диаграммам Фейнмана с n внешними линиями, и представляются в виде степенного ряда по константе взаимодействия [при этом все вакуумные вклады, пропорциональные $\langle 0|S|0\rangle$, факторизуются и сокращаются со знаменателем в (3)]. Такие Г. ф. называются полными функциями Грина.

Важными величинами являются также так наз. связные и сильносвязные (или одночастично неприводимые) Г. ф., представляющие собой сумму соответственно связных и сильносвязных диаграмм Фейнмана. Пример сильносвязной Г. ф.— *вершинная часть*. Связные и сильносвязные Г. ф. входят в систему уравнений Дайсона.

Полные Г. ф. могут быть также определены через функциональный интеграл; такое определение особенно полезно при квантовании калибровочных полей.

Лит.: [1] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 4 изд., М., 1981; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980.

Д. И. Казаков.

ГРИНА ФУНКЦИЯ в статистической механике — обобщение временно́й *корреляционной функции*, тесно связанное с вычислением наблюдаемых физических величин для системы многих частиц. Применение Г. ф. связано с тем, что для нахождения статистич. характеристик системы многих частиц нужно знать не детальное поведение каждой частицы, а только усредненное поведение одной или двух частиц под действием остальных.

В квантовой статистич. механике Г. ф. (запаздывающие и опережающие) определяют через средние значения коммутаторов или антикоммутаторов двух операторов A и B в *Гейзенберга представлении*:

$$G^{\text{ret}}_{AB}(t-t') = \theta(t-t')\,(i\hbar)^{-1}\langle[A(t), B(t')]\rangle$$

$$G^{\text{adv}}_{AB}(t-t') = -\theta(t'-t)\,(i\hbar)^{-1}\langle[A(t), B(t')]\rangle,$$

где $\theta(t)=1$ при $t>0$ и $\theta(t)=0$ при $t<0$, $\langle ... \rangle$ – усреднение по большому канонич. распределению Гиббса (см. *Гиббса распределения*), $[A, B]=AB-hBA$, где $h=\pm 1$. Значение h выбирается из соображений удобства: если A, B – бозе-операторы, то обычно выбирают $h=1$, для ферми-операторов $h=-1$. Представление Гейзенберга вводят при помощи оператора $\mathcal{H}=H-\mu N$, где H – оператор Гамильтона системы многих частиц, μ – химич. потенциал, N – оператор полного числа частиц, $(i\hbar)^{-1}[A, B]_{h=1}$ – квантовая скобка Пуассона.

Используют также причинные Г. ф.

$$G^{c}_{AB}(t-t')=(i\hbar)^{-1}\langle TA(t)\,B(t')\rangle,$$

где T – символ хронологич. упорядочения операторов, располагающего стоящие после него операторы слева направо в порядке убывания времени и меняющего знак на обратный при нечетном числе ферми-операторов.

Запаздывающие Г. ф. описывают реакцию системы на возмущение с энергией

$$H^{1}_{t}=-BF(t)\,e^{\varepsilon t},$$

$(\varepsilon\to+0)$. Если система при $t\to-\infty$ находилась в статистич. равновесии, то к моменту t среднее значение A равно

$$\langle A\rangle_t=\langle A\rangle-\int_{-\infty}^{t}G_{AB}(t-t')F(t')e^{\varepsilon t'}dt'$$

или

$$\langle A\rangle_t=\langle A\rangle-\int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{1/kT}\langle B(t'-i\hbar\lambda)A(t)\rangle\,F(t')e^{\varepsilon t'}dt'd\lambda.$$

Эти формулы называются формулами Кубо.

Причинные Г. ф. не имеют столь простого физич. смысла, но они тесно связаны с теорией возмущений при нулевой температуре, то есть с вычислением основного состояния системы. Наиболее тесно связаны с теорией возмущений при температуре отличной от нуля (то есть с термодинамич. теорией возмущений) – мацубаровские Г. ф., введенные Т. Мацубарой (T. Matsubara, 1955). Они отличаются от причинных Г. ф. тем, что операторы берутся не в обычном представлении Гейзенберга, а в представлении, зависящем от нек-рого «мнимого» времени $-i\tau$, изменяющегося в интервале от $-i/kT$ до нуля:

$$\psi(x,\tau)=e^{\tau\mathcal{H}}\psi(x)\,e^{-\tau\mathcal{H}},$$
$$\overline{\psi}(x,\tau)=e^{\tau\mathcal{H}}\psi^{+}(x)\,e^{-\tau\mathcal{H}},$$

где $\psi(x)$, $\psi^{+}(x)$ – операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям *Бозе – Эйнштейна статистики* или *Ферми – Дирака статистики*. Для таких Г. ф. можно построить диаграммную технику при конечных температурах, аналогичную диаграммной технике квантовой теории поля. Все ее основные понятия (собственно энергетич. части, вершинные функции) можно перенести на случай ненулевой температуры.

Г. ф. удовлетворяют системе зацепляющихся уравнений, к-рые получаются при дифференцировании Г. ф. по t. Вводя для запаздывающих и опережающих Г. ф. одинаковые обозначения

$$G_{AB}(t-t')=\langle\langle A(t)\,B(t')\rangle\rangle,$$

получают

$$i\hbar\partial G_{AB}(t-t')/\partial t=\langle[A, B]\rangle\,\delta(t-t')+$$
$$+\langle\langle A(t)\,\mathcal{H}B(t')-\mathcal{H}A(t)\,B(t')\rangle\rangle.$$

Это уравнение выражает исходные Г. ф. через Г. ф. более высокого порядка, для к-рых можно получить подобные уравнения и т. д. Уравнения такого типа одинаковы для запаздывающих, опережающих и причинных Г. ф., следовательно, их нужно дополнить граничными условиями, что можно сделать с помощью спектральных представлений. Временные корреляционные функции удовлетворяют таким же уравнениям, как и Г. ф., но без члена с δ-функцией, поэтому Г. ф. описывают влияние на корреляции мгновенных возмущений. Очевидна их аналогия с Г. ф., к-рые применяют при решении краевых задач математич. физики.

Уравнения для Г. ф. являются точными, поэтому решение этой цепочки уравнений в общем случае чрезвычайно сложно. Однако, если в системе есть малые параметры (напр., малая плотность или малое взаимодействие), оказывается возможным выразить высшие Г. ф. через низшие и «расцепить» цепочку для Г. ф., получив для них замкнутую систему уравнений.

Для временных корреляционных функций удобны спектральные представления

$$\langle B(t')A(t)\rangle=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_{BA}(\omega)e^{i\omega(t'-t)}d\omega,$$

где $\mathcal{J}_{BA}(\omega)$ – спектральная плотность временных корреляционных функций. Отсюда можно получить спектральные представления для запаздывающих и опережающих Г. ф. и построить единую аналитич. функцию в комплексной плоскости ω, к-рая в верхней полуплоскости совпадает с запаздывающей, а в нижней с опережающей Г. ф. Такая Г. ф. удобна для приложений, с ее помощью можно выразить $\mathcal{J}_{BA}(\omega)$ через скачок Г. ф. на действительной оси:

$$G_{AB}(\omega+i\varepsilon)-G_{AB}(\omega-i\varepsilon)=(i\hbar)^{-1}(e^{\hbar\omega/kT}-h)\,\mathcal{J}_{BA}(\omega).$$

Спектральные представления для мацубаровских Г. ф. можно получить, если продолжить их периодически на все значения τ вне интервала $\left(0, \beta=\frac{1}{kT}\right)$ и разложить в ряд Фурье по частотам $\omega_n=2n\pi/\beta$ для ферми-частиц и $\omega_n=(2n+1)\pi/\beta$ для бозе-частиц. Фурье-компоненты определены лишь для дискретных ω_n, но их можно аналитически продолжить на все ω и получить тем самым временные корреляционные функции.

Особенно важны одночастичные Г. ф., для к-рых $A=\psi(x)$, $B=\psi^{+}(x')$: действительная и мнимая части полюса этих Г. ф. определяют спектр и затухание элементарных возбуждений системы многих частиц. Г. ф. используют также в статистич. механике классич. систем. В этом случае квантовые скобки Пуассона надо заменить на классические $\{A, B\}$, а представление Гейзенберга – на

$$A(t)=e^{iLt}A,$$

где L – оператор Лиувилля, определяемый равенством $iLA=\{A, \mathcal{H}\}$. Г. ф. применяются также в теории неравновесных процессов.

Лит.: [1] Зубарев Д. Н., «Успехи физич. наук», 1960, т. 71, с. 71; [2] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, 2 изд., М., 1975; [3] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962; [4] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975.

Д. Н. Зубарев.

ГРИНА ФУНКЦИЯ евклидова – см. *Швингера функция*.

ГРИНА ФУНКЦИЯ линейного дифференциального оператора L (линейного дифференциального уравнения $Lu(x)=f(x)$) – функция $G(x, x')$, задающая ядро интегрального оператора, обратного к L. Поскольку ядром единичного оператора является дельта-функция $\delta(x-x')$, Г. ф., трактуемая как обобщенная функция, удовлетворяет уравнению

$$L_xG(x, x')=\delta(x-x'). \qquad (1)$$

Всякое решение уравнения (1) называется фундаментальным решением исходного дифференциального уравнения; следовательно, Г. ф.– также нек-рое фундаментальное решение. Из (1) следует, что при $x\neq x'$ Г. ф. удовлетворяет однородному уравнению

$$L_xG=0.$$

Решение неоднородного уравнения

$$Lu(x)=f(x) \qquad (2)$$

определяется интегралом

$$u(x)=\int G(x,x')f(x')\,dx'. \qquad (3)$$

Г. ф. $G(x, x')$ представляет собой «отклик» в точке x системы, описываемой дифференциальным уравнением, на единичный точечный источник, помещенный в точку x'. По этой причине Г. ф. часто называют также функцией источника. Для самосопряженного оператора L Г. ф. $G(x, x')$ удовлетворяет соотношению взаимности $G(x, x') = G^*(x', x)$ (* означает комплексное сопряжение), то есть отклик в точке x на точечное возмущение в x' равен отклику в x' на точечное возмущение в x. Впервые Г. ф. введена Дж. Грином (G. Green) в 1828. Г. ф.– существенная часть математич. аппарата современной физики. Интегральное соотношение (3), заменяющее дифференциальное уравнение (2), позволяет представить поле, созданное нек-рой системой источников, в виде суперпозиции вкладов отдельных точечных источников; оно удобно для построения теории возмущений и т. п.

Чтобы задать дифференциальный оператор L, нужно, кроме операции дифференцирования, определить еще класс функций, на к-рые действует эта операция. Ограничения на функции диктуются физич. постановкой задачи и выступают обычно в виде нек-рого числа краевых условий, к-рым подчинены функции $u(x)$. Г. ф. дифференциального оператора называют также Г. ф. соответствующей краевой задачи. Г. ф. $G(x, x')$ краевой задачи удовлетворяет краевым условиям по x при любом фиксированном x'. Поэтому если $G_0(x, x')$ – любое фундаментальное решение уравнения (не обязательно удовлетворяющее краевым условиям), то Г. ф. $G(x, x')$ представляется в виде суммы:

$$G(x, x') = G_0(x, x') + g(x, x'), \qquad (4)$$

где $g(x, x')$ – решение однородного уравнения

$$L_x g(x, x') = 0,$$

выбранное так, чтобы функция $G(x, x')$ удовлетворяла заданным краевым условиям. Построить Г. ф. в явном виде удается в сравнительно небольшом числе случаев для нек-рых видов областей.

Ниже даны примеры конкретных Г. ф.

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть

$$L = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) d^k/dx^k,$$

а краевые условия представляют собой n линейных соотношений между значениями $u^{(j)}(a)$ и $u^{(i)}(b)$, $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$, младших производных функции $u(x)$ на концах отрезка. Тогда Г. ф., удовлетворяя при каждом x' краевым условиям по x и при $x \neq x'$ – однородному уравнению

$$L_x G(x, x') = 0,$$

должна иметь в точке $x = x'$ непрерывные производные вплоть до $(n-2)$-й и разрывную $(n-1)$-ю производную, причем скачок в этой точке равен

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x' + 0, x') - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (x' - 0, x') = \frac{1}{p_n(x')}.$$

Эти требования, дополненные естественными предположениями о гладкости по переменным x, x' при $x \neq x'$, определяют $G(x, x')$. Напр., дифференциальный оператор 2-го порядка

$$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

с краевыми условиями

$$u(a) = u(b) = 0$$

имеет Г. ф., равную

$$G(x, x') = \frac{1}{p(x)w(x)} \begin{cases} u_1(x)u_2(x') & \text{при } a \leqslant x \leqslant x', \\ u_1(x')u_2(x) & \text{при } x' \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

где $w(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$, а u_1 и u_2 – какие-либо линейно независимые решения уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие условиям $u_1(a) = u_2(b) = 0$.

2. Уравнение Лапласа. Пусть

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad |x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2},$$

а

$$\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2.$$

Фундаментальным решением уравнения Лапласа

$$\Delta u(x) = 0$$

служит функция

$$G_0(x, x') = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \ln|x - x'| & \text{при } n = 2, \\ -\Gamma(n/2)/2\pi^{n/2}(n-2)|x - x'|^{n-2} & \text{при } n \geqslant 3, \end{cases}$$

$\Gamma(n)$ – гамма-функция.

В практически важном случае трехмерного пространства Г. ф.

$$G_0(x, x') = -1/4\pi|x - x'|.$$

Согласно формуле (4), Г. ф. различных краевых задач для уравнения Лапласа получают, добавляя к $G_0(x, x')$ подходящую гармонич. функцию, обеспечивающую выполнение краевых условий. Напр., при $n = 3$ для шара $|x| < R$ задаче $\Delta u = f(x)$ с краевым условием $u(x)|_{|x|=R} = 0$ отвечает Г. ф.

$$G(x, x') = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|x - x'|} - \frac{R}{|x'|}\frac{1}{|x - \tilde{x}'|}\right],$$

где $x' = R^2 x'/|x'|^2$ – точка, симметричная точке x' относительно сферы $|x| = R$. Аналогичной краевой задаче для полупространства $x_3 > 0$, то есть краевому условию $u(x)|_{x_3 = 0} = 0$ отвечает Г. ф. вида

$$G(x, x') = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|x - x'|} - \frac{1}{|x - \tilde{x}'|}\right],$$

где точка $\tilde{x}'$ симметрична точке $x' = (x_1', x_2', x_3')$ относительно плоскости $x_3 = 0$, то есть $\tilde{x}' = (x_1', x_2', -x_3')$. Г. ф. в этих двух случаях представляет собой потенциал точечного заряда, помещенного в точку x' внутри заземленной проводящей сферы (1-й случай) или в присутствии заземленной проводящей плоскости (2-й случай). При $n = 2$ Г. ф. *Дирихле задачи* для односвязной области с достаточно гладкой границей имеет вид

$$G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \ln\left|\frac{w(z) - w(z')}{1 - w(z)w^*(z')}\right|, \quad z = x_1 + ix_2.$$

Здесь $w = w(z)$ – нек-рая функция аргумента $z = x_1 + ix_2$, конформно отображающая область на единичный круг $|w| < 1$.

В следующих примерах приводятся только фундаментальные решения $G_0(x, x')$, связанные с Г. ф. соотношением (4).

3. Уравнение теплопроводности:

$$L = \partial/\partial t - a^2\Delta,$$

$$G_0(x, t; x', t') = \theta(t - t')[4\pi a^2(t - t')]^{-n/2} \exp\left[-\frac{|x - x'|^2}{4a^2(t - t')}\right],$$

где $\theta(x)$ – ступенчатая функция: $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$.

4. Уравнение Гельмгольца:

$$L = \Delta + k^2,$$

$$G_0(x, x') = (2ik)^{-1} \exp(ik|x - x'|) \quad \text{при } n = 1;$$

$$G_0(x, x') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - x'|) \quad \text{при } n = 2,$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля;

$$G_0(x, x') = -(4\pi|x - x'|)^{-1} \exp(ik|x - x'|) \text{ при } n = 3.$$

5. Волновое уравнение:

$$L = \Box_a = \partial^2/\partial t^2 - a^2\Delta,$$

$$G_0(x, t) = (2a)^{-1}\theta(at - |x|) \text{ при } n = 1,$$

$$G_0(x, t) = (2\pi a)^{-1}(a^2t^2 - |x|^2)^{-1/2}\theta(at - |x|) \text{ при } n = 2;$$

$$G_0(x, t) = (2\pi a)^{-1}\theta(t)\delta(a^2t^2 - |x|^2) \text{ при } n = 3,$$

для упрощения принято $x' = t' = 0$. Полученная Г. ф. называется запаздывающей, поскольку она обращается в нуль при $t - t' < 0$. Подставляя Г. ф. в (3), получим решение неоднородного волнового уравнения в виде

$$u(x,t) = (a^2/4\pi)\int dx' |x - x'|^{-1} f(x', t - a^{-1}|x - x'|),$$

носящем в электродинамике название запаздывающего потенциала.

6. Уравнение Клейна – Гордона:

$$L = \Box_a + m^2,$$

$$G_0(x,t) = (2\pi a)^{-1}\theta(at)\delta(a^2t^2 - |x|^2) - (m/4\pi a^3) \times$$
$$\times \theta(at - |x|)(t^2 - a^{-2}|x|^2)^{-1/2} J_1\left(m\sqrt{t^2 - a^{-2}|x|^2}\right)$$

при $n = 3$, где J_1 – функция Бесселя. Полученная Г. ф. также называется запаздывающей.

Г. ф. играет важную роль также в задачах о спектре дифференциальных операторов. Если самосопряженный оператор L имеет Г. ф., то задача на собственные значения

$$Lu = \lambda u$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int G(x,x')\, u(x')\, dx',$$

к к-рому можно применить теорию Фредгольма. Задача $Lu = \lambda u$ имеет не более счетного числа собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, все λ_i вещественны и не имеют конечных точек сгущения. Если комплексное число λ не является собственным значением оператора L, то можно построить Г. ф. $G(x, x'; \lambda)$ оператора $L - \lambda I$, где I – единичный оператор. Функция $G(x, x'; \lambda)$, называемая резольвентой оператора L, является мероморфной функцией параметра λ, причем ее полюсами служат собственные значения оператора L. Таким образом, спектр оператора L можно найти, изучая его резольвенту $G(x, x'; \lambda)$.

При изучении систем уравнений $Lu = f$ роль Г. ф. играют так наз. матрицы Грина. Они позволяют выразить решение неоднородной краевой задачи для системы в виде интегралов от произведений матрицы Грина на векторы правой части системы. Для подобных задач полезен интеграл Дюамеля. Напр., частное решение неоднородной системы

$$\boldsymbol{u}' = A(x)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(x),$$

где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{F}$ – n-компонентные векторы, $A(x)$ – квадратная матрица порядка n, записывают в виде

$$\boldsymbol{u}(x) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{w}(x,s)\, ds,$$

где $\boldsymbol{w}(x, s)$ – решение однородной системы $\boldsymbol{w}' = A(x)\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}(x, s)|_{x=s} = \boldsymbol{F}(s)$. Матрица $A(x)$ может содержать дифференциальные операторы, поэтому метод применим к уравнениям с частными производными.

Лит.: [1] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

Л. П. Купцов.

ГРИНОВА ЕМКОСТЬ – см. *Емкость* множества.

ГРИОЛИ ПРЕЦЕССИЯ – см. *Регулярная прецессия.*

ГРИФФИТСА ЛЕММА: если последовательность выпуклых дифференцируемых функций сходится поточечно к предельной функции (необходимо выпуклой), то и последовательность производных сходится к производной от предельной функции в точках ее непрерывной дифференцируемости. Более общая лемма сформулирована М. Фишером (см. [2]): пусть дана последовательность выпуклых вниз функций $\{f_k(x)\}$, $x \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}^1$, к-рая сходится при $k \to \infty$ к предельной функции $f(x)$; тогда для производных слева, d^-f/dx, и производных справа, d^+f/dx, в любой точке $x \in \mathrm{I}$ справедливы неравенства

$$\frac{d^-f(x)}{dx} \leqslant \lim_{k\to\infty} \inf \frac{d^-f_k(x)}{dx} \leqslant \lim_{k\to\infty} \sup \frac{d^+f_k(x)}{dx} \leqslant \frac{d^+f(x)}{dx}.$$

Лемма Фишера используется в методе *аппроксимирующего гамильтониана* для вывода неравенств, обобщающих уравнение самосогласования в термодинамич. пределе.

Лит.: [1] Griffiths R. B., «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 1215; [2] Fischer M. E., там же, 1965, v. 6, p. 1643–53.

Й. Г. Бранков.

ГРИФФИТСА НЕРАВЕНСТВА – неравенства для корреляторов классической спиновой системы Изинга. Пусть $\Lambda = \{x_1, \ldots, x_V\}$ – конечное множество гиперкубич. решетки $\mathbb{Z}^\nu$ и пусть σ_x равно 1 или -1 для каждого узла $x \in \Lambda$. Для всякого подмножества $X \subset \Lambda$ положим

$$\sigma^X = \prod_{x\in X} \sigma_x$$

и пусть $J_X \geqslant 0$ или $J_X = +\infty$, а $J_\varnothing = 0$. Введем обозначения

$$U'(\sigma_{x_1}, \ldots, \sigma_{x_V}) = -\sum_{X\subset\Lambda} J_X \sigma^X,$$

$$Z = \sum_\sigma \exp\left[-U'(\sigma_{x_1}, \ldots, \sigma_{x_V})\right],$$

коррелятор

$$\langle \sigma^X \rangle = Z^{-1} \sum_\sigma \sigma^X \exp\left[-U'(\sigma_{x_1}, \ldots, \sigma_{x_V})\right].$$

Сумма по σ производится по всем 2^V наборам $\sigma_{x_1}, \ldots, \sigma_{x_V}$. В этих обозначениях Г. н. имеют вид:

$$\langle \sigma^X \rangle \geqslant 0;\ \langle \sigma^X \sigma^Y \rangle \geqslant \langle \sigma^X \rangle \langle \sigma^Y \rangle.$$

Г. н. используются для доказательства существования фазового перехода 1-го рода для решеток Изинга. Г. н. перенесены на произвольные значения спина, а также обобщены на некоммутативные системы.

Лит.: [1] Griffiths R. B., «J. Math. Phys.», 1967, t. 8, p. 478; [2] Kelly D. G., Sherman S., там же, 1968, t. 9, p. 466; [3] Рюэль Д., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1971.

Д. П. Санкович.

ГРОНУОЛЛА ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ – см. *Площадей метод.*

ГРУБАЯ СИСТЕМА – гладкая *динамическая система*, обладающая свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом ее возмущении, отстоящем от нее в C^1-метрике не более чем на δ, существует *гомеоморфизм* фазового пространства, который сдвигает точки не более чем на ε и переводит траектории невозмущенной системы в траектории возмущенной. Формально определение предполагает заданной нек-рую *риманову метрику* на фазовом многообразии. Фактически о Г. с. обычно говорят либо когда фазовое многообразие замкнуто, либо когда траектории входят в нек-рую компактную область G с гладкой границей, не касаясь последней, причем возмущение и гомеоморфизм рассматривают только на G. Ввиду компактности выбор метрики не играет роли.

Таким образом, при малом (в смысле C^1) возмущении Г. с. получается система, эквивалентная исходной по всем своим топологич. свойствам (однако приведенное определение содержит еще дополнительное требование, чтобы эта эквивалентность осуществлялась посредством гомеоморфизма, близкого к тождественному). Иногда термин «грубость» употребляют в более широком смысле, напр. имея в виду только сохранение при малых возмущениях того или иного свойства системы (в этом случае лучше говорить о грубости данного свойства).

Г. с. были введены А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [1]. При малой размерности фазового многообразия (единица для дискретного времени и единица или два для непрерывного) Г. с. допускают простую характеристику в терминах качественных свойств поведения траекторий и образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех динамич. систем, снабженном C^1-топологией (см. [1], [2]); таким образом, системы с более сложным и более чувствительным к малым возмущениям поведением траекторий можно в этом случае рассматривать как исклю-

чительные). В бóльших размерностях ни один из этих фактов не имеет места (см. [3]).

Лит.: [1] Андронов А. А., Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, № 5, с. 247–50; [2] Peixoto M. M., «Topology», 1962, v. 1, № 2, p. 101–20; 1963, v. 2, № 2, p. 179–80; [3] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 1, с. 113–85. *Д. В. Аносов.*

ГРУНСКОГО НЕРАВЕНСТВО – см. *Однолистности условия.*

ГРУППА – множество G, на котором определено умножение, то есть для любых двух элементов $g_1, g_2 \in G$ определено их произведение $g_1g_2 \in G$, обладающее свойствами:

1) $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ (ассоциативность);

2) существует элемент $e \in G$, называемый единицей, такой, что $eg = ge = g$ для любого $g \in G$;

3) для любого $g \in G$ существует элемент $g^{-1} \in G$, называемый обратным, такой, что $g^{-1}g = gg^{-1} = e$.

Свойство коммутативности (то есть $g_1g_2 = g_2g_1$) в общем случае не требуется, если же это соотношение выполняется для любых элементов Г. G, то G называется абелевой, или коммутативной, Г.

Как в физике, так и в математике, Г. чаще всего выступают как Г. преобразований. Набор G преобразований (то есть взаимно однозначных отображений) множества X в себя является Г., если:

он содержит тождественное преобразование множества X,

вместе с каждым $g \in G$ в G входит обратное к g преобразование g^{-1},

композиция (произведение) любых двух элементов из G входит в G.

Примерами Г. преобразований служат Г. всех параллельных переносов трехмерного пространства, Г. всех отображений конечного множества в себя (называемая также симметрической группой, или группой подстановок).

Обычно Г. преобразований определяется как Г. всех преобразований, сохраняющих нек-рое свойство (тогда условия, определяющие Г., выполняются сами собой). В этом случае говорят, что G – группа симметрий.

Примеры: Г. всех движений плоскости (то есть всех преобразований, сохраняющих расстояние), Г. движений квадрата (то есть Г. всех преобразований плоскости, переводящих квадрат в себя), кристаллографич. Г. (то есть Г. симметрии кристалла), Г. симметрии молекул, Г. симметрий физич. законов (*Пуанкаре группа, Лоренца группа, Галилея группа, Вращений группа*). Наличие у какого-либо дифференциального уравнения достаточно большой группы симметрий часто позволяет явно его решить (в сущности на этом основан метод разделения переменных).

Понятие Г. появилось впервые в работах Э. Галуа (E. Galois, 1832), посвященных решениям алгебраич. уравнений в радикалах.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Алгебра. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 11, М., 1986; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Вейль Г., Симметрия, пер. с нем., М., 1968. *Ю. А. Неретин.*

ГРУППИРОВКА ФОТОНОВ – эффект одновременного преимущественного излучения групп фотонов. Описывается условием

$$G^{(2)}(0) \geqslant G^{(2)}(\tau)$$

для степени когерентности (см. *Излучения статистика*). В классич. рассмотрении возможность Г. ф. следует из отрицательности дисперсии интенсивности излучения и принципа ослабления корреляций. В квантовом рассмотрении Г. ф. соответствует излучению с суперпуассоновской статистикой излучения. *А. С. Шумовский.*

ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА конечной группы – ассоциативная алгебра $C(G)$ с базисом

$$e_{g_1}, \ldots, e_{g_n},$$

где g_i – элементы группы G, умножение в которой определяется соотношениями

$$e_{g_i}e_{g_j} = e_{g_ig_j}.$$

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – размерности всех неприводимых представлений группы G, то

$$C(G) = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathrm{Mat}\,(\lambda_j),$$

где $\mathrm{Mat}\,(n)$ – алгебра всех матриц порядка $n \times n$. Если T – представление группы G, то формула

$$\tau\left(\sum \alpha_i e_{g_i}\right) = \sum \alpha_i T g_i$$

задает представление Г. а. $C(G)$, иными словами

$$\tau(xy) = \tau(x)\tau(y).$$

Групповая алгебра группы Ли G – алгебра функций на G с операцией *свертки*. Здесь не уточняется, какие именно функции рассматриваются: рассматривая различные классы функций на G, можно получить различные Г. а. Простейший вариант – алгебра всех интегрируемых по левой мере Хаара функций.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1978. *Ю. А. Неретин.*

ГРУППОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ – см. *Вириальное разложение.*

ГРУППОВОЕ СВОЙСТВО – см. *Кластерное свойство.*

ГРЭДА – ШАФРАНОВА УРАВНЕНИЕ – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ГУКА ЗАКОН – закон, устанавливающий линейную зависимость между *деформацией тензором* ε_{lm} и *напряжений тензором* σ_{ik} в упругой среде

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}\varepsilon_{lm},$$

где λ_{iklm} – тензор модулей упругости; открыт Р. Гуком (R. Hooke, 1660). В случае изотропного твердого тела существуют два независимых модуля упругости и Г. з. имеет вид:

$$\sigma_{ij} = (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl})\varepsilon_{kl},$$

где λ и μ – упругие постоянные Ламе, δ_{ik} – символ Кронекера. В случае кристалла вид тензора λ_{iklm} определяется точечной группой симметрии этого кристалла. *И. В. Барьяхтар.*

ГУППТА – БЛЕЙЛЕРА ФОРМАЛИЗМ – см. *Квантовая электродинамика.*

ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ – см. *Рауса–Гурвица критерий.*

ГУСТАВСОНА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА – см. *Гамильтона функция*; нормальная форма.

ГЮЙГЕНСА ПРИНЦИП – см. *Звуковые волны.*

ГЮЙГЕНСА ЭФФЕКТ – см. *Звуковые волны.*

ГЮЙГЕНСА – ФРЕНЕЛЯ ПРИНЦИП – см. *Киркгофа формула.*

Д

ДАВЛЕНИЕ – см. *Механика.*

ДАВЛЕНИЕ в термодинамике – термодинамический параметр P, определяющий элементарную работу

$$dw = PdV,$$

совершаемую системой при медленном (квазистатическом) изменении ее объема V, вызываемом перемещением внешних тел. При деформации упругих тел сила, действующая на единицу поверхности, не перпендикулярна к ней; вместо Д. в этом случае вводят тензор напряжений σ_{ik}, σ_{ii} – нормальные напряжения, σ_{ik}, $i \neq k$,– касательные напряжения. Элементарная работа равна

$$dw = -\sum_{i,k} \sigma_{ik} du_{ik},$$

du_{ik} – элемент тензора деформаций. При равномерном всестороннем сжатии отличны от нуля лишь нормальные напряжения, равные Д. Тогда

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik},$$

δ_{ik} – символ Кронекера.

В статистич. физике Д. определяется как производная от средней энергии E по объему при постоянной энтропии S,

$$P = -(\partial E/\partial V)_S,$$

или как производная от свободной энергии F по объему при постоянной температуре T, то есть

$$P = -(\partial F/\partial V)_T.$$

Зависимость P от T и V дается *состояния уравнением.* В равновесном состоянии $P \geqslant 0$, однако возможны метастабильные состояния с $P < 0$.

См. также *Термодинамические функции.* *Д. Н. Зубарев.*

ДАЙСОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – обобщение *Вигнера распределения*, характеризующее предельную спектральную плотность распределения в случайных ансамблях матриц, обладающих иными свойствами инвариантности, чем ортогонально инвариантный ансамбль Вигнера (унитарный ансамбль и др.). Основной качественный эффект, характерный для Д. р.,– явление отталкивания спектральных уровней. Как и распределение Вигнера, Д. р. возникает в связи с описанием спектров тяжелых ядер. *С. А. Молчанов.*

ДАЙСОНА УРАВНЕНИЯ в квантовой теории – уравнения движения для квантовой системы с бесконечным числом степеней свободы (напр., системы квантовых полей), записанные не для операторных полевых функций, а для пропагаторов (одночастичных *Грина функций*) и вершинных функций. Д. у. представляют собой бесконечную цепочку зацепляющихся нелинейных интегральных уравнений, аналогичную цепочке уравнений для *корреляционных функций* (многочастичных *распределения функций*) статистич. механики. Они могут быть получены либо из уравнений Швингера, либо графич. путем – суммированием вкладов *Фейнмана диаграмм.*

В квантовой электродинамике [где они впервые были получены Ф. Дайсоном (F. Dyson)] два первых Д. у. для «одетых взаимодействием» электронного G и фотонного D пропагаторов имеют вид

$$G(x,y) = G^0(x-y) + e\int G^0(x-z)A_\nu(z)\gamma^\nu\, dz\, G(z,y) -$$

$$- ie\iiint G^0(x-z)\,dz\,\gamma^\mu\, G(z,\tau)\,d\tau\,\Gamma^\nu(\tau,y;\eta)\,d\eta D_{\mu\nu}(\eta,z),$$

$$D_{\mu\nu}(x,y) = D^0_{\mu\nu}(x-y) - ie\iiint D^0_{\mu\rho}(x-\zeta)\,d\zeta \times$$

$$\times \mathrm{Sp}\,[\gamma^\rho G(\zeta,\eta)\,d_\eta\Gamma_\nu(\eta,\theta;y)\,d\theta G(\theta,\zeta)],$$

где γ^ν – *Дирака матрицы*, $\nu = 0, 1, 2, 3$, G^0 и D^0 – «голые» пропагаторы (то есть *Грина функции* свободных полей), $A(x)$ – внешнее электромагнитное поле (если оно отлично от нуля), одетое *радиационными поправками*, а Γ_ν – вершинная функция квантовой электродинамики, для к-рой, в свою очередь, может быть выписано интегральное уравнение, содержащее наряду с G, D и Γ электронфотонную 4-концевую вершинную функцию $K_{\mu\nu}$, и т. д. (x, y, z – пространственно-временные точки). Таким образом, любая конечная система Д. у. является незамкнутой.

С распространением квантовополевых методов Д. у. стали использоваться в квантовой статистич. физике, теории турбулентности и нек-рых других областях теоретич. физики.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984, § 38. *Д. В. Ширков.*

Д'АЛАМБЕРА ОПЕРАТОР – дифференциальный оператор

$$\Box \equiv \Delta - c^{-2}(\partial^2/\partial t^2),$$

где Δ – *Лапласа оператор*, c – постоянная. Назван по имени Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert). Д. о. называется также даламбертианом или волновым оператором, так как с его помощью удобно записывать *волновое уравнение.* Рассматривают также обобщенный Д. о.

$$\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right),$$

где $g^{\alpha\beta}$ – метрич. тензор, g – детерминант соответствующей ему матрицы. *С. В. Молодцов.*

Д'АЛАМБЕРА ПРИНЦИП – один из *вариационных принципов классической механики.*

Д'АЛАМБЕРА УРАВНЕНИЕ – неоднородное *волновое уравнение*

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f(\boldsymbol{r}, t).$$

В случае одной пространственной координаты это уравнение описывает малые колебания бесконечно тонкой однородной струны. В 1747 Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert) сформулировал эту задачу в виде уравнения и получил решение соответствующей задачи Коши (см. *Д'Аламбера формула*). *С. В. Молодцов.*

Д'АЛАМБЕРА ФОРМУЛА – формула, описывающая решение *Коши задачи* для одномерного *волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = f(x,t)$$

в области $t > 0$, $-\infty < x < \infty$, с начальными условиями $\psi(x,t)|_{t=0} = \varphi_1(x)$, $\psi_t'(x,t)|_{t=0} = \varphi_2(x)$:

$$\psi(x,t) = -(c/2)\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau,\zeta)\,d\zeta d\tau +$$

$$+ (2c)^{-1}\int_{x-ct}^{x+ct}\varphi_2(\xi)\,d\xi + [\varphi_1(x+ct) + \varphi_1(x-ct)]/2.$$

При этом $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ должны быть дважды непрерывно дифференцируемы, а функция $f(x, t)$ должна быть непрерывна вместе с первой производной по x в полуплоскости $t \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$. Д. ф. получена Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert) в 1747.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

С. В. Молодцов.

Д'АЛАМБЕРА – ЛАГРАНЖА ПРИНЦИП – один из *вариационных принципов классической механики*; обобщение принципа возможных перемещений и принципа Д'Аламбера (J. D'Alembert); предложен Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1788): для действительного движения системы сумма элементарных работ активных сил $F_i(t, r_j, \dot{r}_j) \in C^1$ и сил инерции $-m_i w_i$ на любых возможных перемещениях δr_i равна нулю:

$$\sum_i (F_i - m_i w_i)\delta r_i = 0 \qquad (*)$$

в любой момент времени.

В Д.–Л. п. сравниваются положения системы в ее действительном движении с бесконечно близкими положениями, допускаемыми связями в рассматриваемый момент времени. Соотношение (*) определяет зависимость между активными силами, вызываемыми ими при наложенных связях ускорениями и возможными перемещениями. Выражая необходимое и достаточное условие соответствия действительного движения, являющегося одним из кинематически возможных движений, заданным активным силам, уравнение (*) является общим уравнением динамики. Когда все ускорения $w_i = 0$, уравнение (*) принимает вид общего уравнения статики.

Уравнения движений содержатся в уравнении (*). Для получения полной системы независимых дифференциальных уравнений динамики достаточно выразить возможные перемещения δr_i через систему независимых перемещений и подставить в уравнение (*). Таким путем могут быть получены, напр., уравнения Лагранжа, Аппеля и любая другая система независимых дифференциальных уравнений движения. Если же из семейства возможных перемещений выделить какое-либо одно перемещение и подставить его в уравнение (*), то полученное соотношение будет являться или одним из дифференциальных уравнений движения системы или следствием из них. Таким способом можно получить, напр., общие теоремы (законы) динамики: о количестве движения, моменте количества движения, кинетич. энергии.

В. В. Румянцев.

Д'АЛАМБЕРА – ЭЙЛЕРА УСЛОВИЯ – см. *Коши–Римана условия.*

ДАЛАМБЕРТИАН – см. *Д'Аламбера оператор.*

ДАЛЬНИЙ И БЛИЖНИЙ ПОРЯДОК – наличие пространственной корреляции микроструктуры вещества либо в пределах всего макроскопического образца (дальний порядок), либо в области с конечным радиусом корреляции (ближний порядок). Состояние вещества, характеризуемое наличием дальнего порядка, называется упорядоченной фазой, а состояние, в к-ром дальний порядок отсутствует,– неупорядоченной фазой. Фазовый переход из неупорядоченной фазы в упорядоченную может быть переходом первого или второго рода. Если упорядочение происходит в результате фазового перехода второго рода, то в неупорядоченной фазе есть ближний порядок, причем при приближении к точке перехода корреляционный радиус $R_c \to \infty$.

Различаются следующие виды упорядочения: координационное (в расположении частиц вещества); ориентационное (в ориентации частиц); магнитное (упорядочение в ориентации магнитных моментов).

В жидкости вероятность пребывания атома в точке с пространственной координатой $\boldsymbol{r}$ или ее удельная плотность в среднем одинаковы, то есть средняя удельная плотность $\bar{\rho}$ не зависит от $\boldsymbol{r}$. Однако в жидкости существуют корреляции в расположении соседних атомов. *Корреляционная функция*, описывающая отклонения ρ от $\bar{\rho}(\delta\rho)$ в разных точках жидкости:

$$\Phi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \delta\rho(\boldsymbol{r})\,\delta(\boldsymbol{r}'), \qquad (1)$$

отлична от 0 при $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' < R_c$. Таким образом, атомы жидкости на расстояниях, меньших R_c, образуют ближний координационный порядок. Отклонение ρ от $\bar{\rho}$ называется параметром порядка.

При кристаллизации возникает периодич. пространственная модуляция ρ, так как атомы в кристаллах занимают положения, отвечающие узлам кристаллич. решетки. В результате отклонение плотности от средней $\bar{\rho} \to \delta\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) - \bar{\rho}(\boldsymbol{r})$ становится периодич. функцией координат. Это означает, что в кристаллах имеет место дальний координационный порядок.

Другой пример координационного упорядочения дают сплавы.

И в кристаллах и в сплавах высокотемпературная фаза является неупорядоченной. Такая ситуация, как правило, типична для всех видов упорядочения. При повышении температуры разупорядочивающее тепловое движение становится более интенсивным, что приводит при достаточно высоких температурах к разрушению корреляций, то есть к отсутствию дальнего порядка и ослаблению ближнего порядка (к уменьшению R_c).

В изотропной жидкости, состоящей из анизотропных, но случайно ориентированных молекул, может происходить фазовый переход в анизотропную жидкость, в к-рой молекулы имеют преимущественную ориентацию. Параметром порядка при таком ориентационном упорядочении является спонтанная поляризация или константа анизотропии диэлектрич. проницаемости, равные 0 в изотропной жидкости и отличные от 0 в жидком кристалле.

Магнитное упорядочение состоит в том, что магнитные моменты атомов, ориентированные при высокой температуре в разных точках независимо (парамагнетик), при понижении температуры ниже точек Кюри или Нееля упорядочиваются и либо имеют одинаковое направление и ориентацию (ферромагнетик), либо одинаковое направление, но разные ориентации. В последнем случае они образуют магнитные подрешетки, причем ориентации магнитных моментов для атомов каждой подрешетки одинаковы, а для атомов разных подрешеток – противоположны (антиферромагнетик). Параметром порядка в ферромагнетиках является намагниченность.

Все перечисленные виды упорядочения имели в качестве параметра порядка классич. величины. Имеется важная группа упорядочивающихся систем, в к-рых параметром порядка является макроскопич. волновая функция всего образца. Такое квантовое упорядочение есть, напр., в сверхтекучем состоянии изотопов гелия и в сверхпроводящей фазе металлов. В этих случаях при температуре T выше температуры фазового перехода T_λ волновые функции всех частиц, относящиеся к удаленным друг от друга точкам пространства, скоррелированы. Упорядоченное состояние характеризуется скоррелированной фазой волновых функций частиц, к-рая может измениться во всем образце в целом, но не может измениться независимо в разных точках.

Лит.: [1] Физическая энциклопедия, т. 1, М., 1988, с. 556–58; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 3 изд., ч. 1, М., 1976; [3] Френкель Я. И., Кинетическая теория жидкостей, Л., 1975; [4] Паташинский А. З., Покровский В. Л., Флуктуационная теория фазовых переходов, 2 изд., М., 1982; [5] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Физическая кинетика, М., 1979.

Д. Е. Хмельницкий.

ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕ – см. *Взаимодействие.*

ДАННЫХ АНАЛИЗ – см. *Анализ данных.*

ДАРБУ КОНТАКТНАЯ ТЕОРЕМА – см. *Контактная геометрия.*

ДАРБУ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА – см. *Симплектическая геометрия.*

ДАРБУ ТЕОРЕМА: в окрестности любой точки *симплектического многообразия* можно выбрать координаты p_1, ...,

p_n, q_1, ..., q_n, в которых *симплектическая структура* имеет вид

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n.$$

См. также *Контактная геометрия, Контактный диффеоморфизм.*

М. Э. Казарян.

ДВОЙНОГО СЛОЯ ПОТЕНЦИАЛ – выражение вида

$$u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y}\left(h(r_{xy})\right)\mu(y)\, ds_y, \qquad (1)$$

где Γ – граница произвольной ограниченной N-мерной области $G \subset E^N$, $N \geqslant 2$, n_y – внешняя по отношению к области G нормаль к границе Γ в точке y, $\mu(y)$ – плотность потенциала – функция, заданная на Γ, $h(r_{xy})$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$h(r_{xy}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(N-2)\omega_N} r_{xy}^{2-N}, & N > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r_{xy}}, & N = 2, \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$\omega_N = 2(\sqrt{\pi})^N / \Gamma(N/2)$$

– площадь поверхности единичной $(N-1)$-мерной сферы,

$$r_{xy} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}$$

– расстояние между точками x и $y \in E^N$. Граница Γ принадлежит классу $C^{(1,\lambda)}$; она является поверхностью или дугой Ляпунова.

Выражение (1) может быть истолковано как *потенциал*, создаваемый диполями, помещенными на Γ, направление к-рых в каждой точке $y \in \Gamma$ совпадает с направлением внешней нормали n_y, а интенсивность равна $\mu(y)$.

Если $\mu(y) \in C^{(0)}\Gamma$, то $u(x)$ определено для всех $x \subset E^N$ (в частности, и для $x \in \Gamma$) и обладает следующими свойствами.

1) Всюду в $E^N \setminus \Gamma$ функция $u(x)$ имеет производные всех порядков ($\in C^{(\infty)}$) и удовлетворяет уравнению Лапласа, причем производные по координатам точки x можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.

2) При переходе через границу Γ функция $u(x)$ испытывает разрыв. Пусть x_0 – произвольная точка на Γ, $u^+(x_0)$ и $u^-(x_0)$ – предельные значения изнутри и извне, тогда $u^\pm(x_0)$ существуют и равны

$$u^\pm(x_0) = \pm\frac{\mu(x_0)}{2} + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y}\left(h(r_{x_0 y})\right)\mu(y)\, ds_y, \qquad (3)$$

причем интеграл в формуле (3) как функция $x_0 \in \Gamma$ принадлежит $C^{(0,\alpha)}$ при любом $0 \leqslant \alpha < 1$, кроме того, функция, равная u в G и u^+ на Γ, непрерывна в $G+\Gamma$, а функция, равная u в $E^N \setminus (G+\Gamma)$ и u^- на Γ, непрерывна в $E^N \setminus G$.

3) Если плотность $\mu(y) \in C^{(0,\alpha)}$ и $\alpha \leqslant \lambda$, то $u(x)$, продолженная так же, как в 2) на $G+\Gamma$ или $E^N \setminus G$, принадлежит классу $C^{(0,\alpha)}$ в $G+\Gamma$ или в $E^N \setminus G$.

4) Если $\alpha > 1-\lambda$, а x_1 и x_2 – две точки, принадлежащие нормали, выходящей из точки x_0, симметричные относительно точки x_0, то

$$\lim_{x_1 \to x_0}\left(\frac{\partial u(x_2)}{\partial n} - \frac{\partial u(x_1)}{\partial n}\right) = 0. \qquad (4)$$

В частности, если существует одна из производных $\partial u^+(x_0)/\partial n$, $\partial u^-(x_0)/\partial n$, то существует и другая, причем $\partial u^+(x_0)/\partial n = \partial u^-(x_0)/\partial n$. Это свойство справедливо также, если $\mu(y) \in C^{(0)}(\Gamma)$, а $\Gamma \in C^{(2)}$.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977.

И. А. Шишмарев.

ДВОЙНОЙ СОЛИТОН – см. *Бризер.*

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОБЪЕКТ, дуальный объект, $\hat{G}$ к группе G – множество классов эквивалентности унитарных представлений группы G.

Лит.: [1] Диксмье М., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

Ю. А. Неретин.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – однозначная *аналитическая функция* $f(z)$, имеющая только изолированные особенности на всей конечной плоскости комплексного переменного z и такая, что существуют два числа p_1, p_2, отношение которых не является действительным числом и которые являются периодами $f(z)$, то есть p_1, p_2 таковы, что имеет место тождество

$$f(z+p_1) = f(z+p_2) = f(z).$$

(Если отношение p_1/p_2 действительно и рационально, то $f(z)$ – однопериодич. функция; если оно иррационально, то $f(z) \equiv \text{const}$.) Все числа вида $mp_1 + np_2$, где m, n – целые, также являются периодами $f(z)$. Все периоды данной Д. ф. образуют дискретную абелеву группу по сложению, называемую группой периодов (или модулем периодов), базис к-рой (базис периодов) состоит из двух примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_3) \neq 0$. Все остальные периоды этой Д. ф. представимы в виде $2m\omega_1 + 2n\omega_3$, где m, n – целые. Не существует аналитич. функций одного комплексного переменного, кроме констант, имеющих более двух примитивных периодов.

Точки вида $2m\omega_1 + 2n\omega_3$, где m, n – целые, образуют решетку периодов, разбивающую всю плоскость z на параллелограммы периодов. Точки (числа) z_1, z_2, для к-рых

$$z_1 - z_2 = 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

называются конгруэнтными (сравнимыми по модулю периодов). В конгруэнтных точках Д. ф. $f(z)$ принимает одно и то же значение, поэтому достаточно изучить поведение $f(z)$ в каком-либо основном параллелограмме периодов. Обычно в качестве такового принимается множество точек

$$\{z = z_0 + 2t_1\omega_1 + 2t_3\omega_3;\ 0 \leqslant t_1 < 1,\ 0 \leqslant t_3 < 1\},$$

то есть параллелограмм с вершинами

$$0,\ z_0 + 2\omega_1,\ z_0 + 2\omega_2 = z_0 + 2\omega_1 + 2\omega_3,\ z_0 + 2\omega_3.$$

Не существует отличной от константы Д. ф., регулярной во всем основном параллелограмме периодов. Мероморфные Д. ф. называются *эллиптическими функциями.* Обобщение понятия эллиптич. функций на случай функций $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ от $n \geqslant 1$ комплексных переменных носит название *абелевых функций.*

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968, гл. 7.

Е. Д. Соломенцев.

ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – идеализированная модель крупномасштабных атмосферных и океанических движений, когерентных структур в хорошо перемешанных пограничных слоях и других турбулентных средах, где компонента вектора скорости, перпендикулярная к плоскости течения, сильно подавлена. Д. т. наблюдается в лабораторных экспериментах с вращающимися бассейнами, в к-рых слой жидкости малой глубины находится в поле силы Кориолиса, и при движении проводящей жидкости под действием достаточно сильного поперечного магнитного поля. Д. т. численно моделируется на ЭВМ.

Д. т. кроме энергии имеет еще один адиабатич. интегральный инвариант – средний квадрат вихря, называемый *энстрофией* (возникающий из-за отсутствия эффекта растяжения вихревых нитей). Это приводит к тому, что энергия передается (в отличие от трехмерной колмогоровской турбулентности) в сторону больших масштабов, формируя инерционный интервал спектра с «законом пяти третей». Энстрофия переносится в малые масштабы по спектральному «закону минус трех».

Лит.: [1] Мирабель А. П., Монин А. С., «Успехи механики», 1979, т. 2, в. 3, с. 47–95.

А. П. Мирабель.

ДВУМЕРНЫХ ПЛЕНОК ИНДЕКС – аналог *Маслова индекса* кривой на лагранжевом многообразии. Пусть (M, ω) – симплектич. многообразие, Σ – двумерная гладкая поверхность с гладкой границей, лежащей в нек-ром лагранжевом многообразии, $\{U_\alpha\}$ – покрытие Σ картами, в к-рых форма ω имеет вид $dp_\alpha \wedge dq_\alpha$, T – триангуляция Σ такая, что каждая ее грань лежит в одной, ребро – в пересечении двух, а вершина – в пересечении трех карт. Пусть каждое ребро T включено в нек-рое лагранжево многообразие. Индекс грани определяется как сумма индексов Маслова ребер, а индекс пленки – как сумма индексов граней. Если Σ – цикл, то его индекс равен (mod 2) значению на Σ второго класса Штиффеля–Уитни.

Лит.: [1] Карасев М. В., Маслов В. П., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1983, т. 47, № 5, с. 999–1029; [2] Карасев М. В., «Функциональный анализ и его приложения», 1986, т. 20, в. 1, с. 21–32. *В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин.*

ДВУСТОРОННЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА – см. *Фурье интеграл.*

ДВУСТОРОННИЙ СДВИГ БЕРНУЛЛИ – см. *Бернулли сдвиг.*

ДВУТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА – см. *Пропагатор.*

ДВУХ ЦЕНТРОВ ЗАДАЧА – модельная квантовомеханическая задача с оператором энергии $H(R)$ вида

$$H(R) = -\Delta_x + V_1(|x - R/2|) + V_2(|x + R/2|),\ x,\ R \in \mathbb{R}^3.$$

Наиболее полно Д. ц. з. исследована в случае кулоновских потенциалов $V_i(r) = z_i/r$. Уравнение Шредингера для задачи двух кулоновских центров:

$$H(R)\Psi = \varepsilon(R)\Psi,$$

допускает разделение переменных в вытянутых сфероидальных координатах, что отвечает существованию трех коммутирующих интегралов движения. Собственные значения $\varepsilon_n(R)$, называемые термами, в Д. ц. з. являются функциями только $|R|$, то есть

$$\varepsilon_n(R) = \varepsilon_n(|R|).$$

Термы $\varepsilon_n(|R|)$ и $\varepsilon_m(|R|)$, $n \neq m$, имеют пересечения и квазипересечения. Д. ц. з. возникает при решении квантовой задачи трех частиц в рамках *адиабатического приближения.*

Лит.: [1] Комаров М. В., Пономарев Л. М., Славянов С. Ю., Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции, М., 1976; [2] Мотт Н., Месси Г., Теория атомных столкновений, пер. с англ., М., 1969. *С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.*

ДВУХЖИДКОСТНАЯ МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ДВУХЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ в теории сверхтекучести ^{4}He – эвристическое представление сверхтекучего состояния в виде двух компонент жидкости – нормальной и сверхтекучей (см. [1]). Этим компонентам по предположению сопоставляются соответственно плотности массы ρ_n и ρ_s, а также скорости $\boldsymbol{v}_n$ и $\boldsymbol{v}_s$, причем $\rho_n + \rho_s = \rho$, $\rho_n \boldsymbol{v}_n + \rho_s \boldsymbol{v}_s = \pi$, где ρ – плотность массы и π – плотность импульса сверхтекучего ^{4}He. Теория сверхтекучести ^{4}He, созданная Л. Д. Ландау (1941), существенно опирается на Д. м., в связи с чем гидродинамич. уравнения этой теории получили название уравнений двухжидкостной гидродинамики.

Лит.: [1] Tisza L.,«Nature», 1938, v. 141, p. 913; [2] Халатников И. М., Теория сверхтекучести, М., 1971. *М. Ю. Ковалевский.*

ДВУХЧАСТИЧНОЕ РАССЕЯНИЕ – рассеяние в системе двух частиц с оператором Шредингера, задаваемым в *центра масс системе* выражением

$$H = -\Delta + V(x),\ x \in \mathbb{R}^3,$$

Δ – лапласиан в $\mathbb{R}^3$, $V(x)$ – потенциал. Волновые операторы $W_\pm$, определяющие *рассеяния задачи решения*, являются интегральными операторами. Ядра этих операторов после преобразования Фурье по второму аргументу удовлетворяют стационарному уравнению Шредингера:

$$-\Delta W_\pm(x, p) + V(x) W_\pm(x, p) = p^2 W_\pm(x, p)$$

с асимптотич. граничным условием

$$W_\pm(x, p) = \exp\{i(x, p)\} + f_\pm\left(\frac{x}{|x|}, p\right)\frac{\exp\{\pm i|p||x|\}}{|x|}\{1 + o(1)\}.$$

Функция $f_\pm\left(\frac{x}{|x|}, p\right)$, называемая амплитудой рассеяния, связана с двухчастичной *T-матрицей* формулой

$$f_\pm\left(\frac{x}{|x|}, p\right) = -2\pi^2 T\left(\pm|p|\frac{x}{|x|}, p, p^2 \pm i \cdot 0\right).$$

Особенности Д. р. в случае дальнодействующих потенциалов см. в ст. *Кулоновское рассеяние.*

Лит.: [1] Гольдбергер М., Ватсон К., Теория столкновений, пер. с англ., М., 1967; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 3. Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1982. *С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.*

ДЕ СИТТЕРА ГРУППА – группа движений (то есть преобразований, сохраняющих метрику) пространства-времени постоянной кривизны, так наз. пространства де Ситтера (см. *Де Ситтера пространство-время*). Д. С. г. представляет собой 10-параметрич. группу Ли; ее используют для анализа геометрии пространства де Ситтера и построения квантовой теории полей в этом пространстве. Особая роль пространства де Ситтера связана с тем, что оно описывает нетривиальное гравитационное поле, обладающее максимально возможной (10-параметрич.) симметрией. Кроме пространства де Ситтера 10-параметрич. группой движений обладает лишь *Минковского пространство-время*, соответствующее нулевому гравитационному полю.

Пространство де Ситтера S – 4-мерное искривленное пространство, к-рое можно определить как псевдосферу

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 - (x^5)^2 = \rho^2$$

в 5-мерном псевдоевклидовом пространстве $E_{4,1}$ с метрикой, определяемой выражением

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 - (dx^5)^2. \qquad (*)$$

Число ρ играет роль радиуса кривизны пространства де Ситтера. Пространство $E_{4,1}$ обладает группой движений, к-рая кроме сдвигов (трансляций) включает псевдоортогональные преобразования; они сами по себе образуют группу $O(4, 1)$, причем преобразования из этой группы переводят псевдосферу S в себя и сохраняют метрику на ней, то есть являются движениями пространства S. Группу $O(4, 1)$ называют группой де Ситтера. Иногда под Д. С. г. понимают подгруппу $SO(4, 1)$, к-рая выделяется требованием, чтобы все входящие в нее линейные преобразования (матрицы) обладали единичным детерминантом. Пространство де Ситтера можно отождествить с факторпространством Д. С. г. по подгруппе Лоренца (см. *Лоренца группа*), $S = SO(4, 1)/SO(3, 1)$. Иногда рассматривают пространство де Ситтера 2-го рода (или антидеситтеровское пространство). Его можно представить как псевдосферу S', определяемую уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 - (x^5)^2 = \rho^2$$

в 5-мерном псевдоевклидовом пространстве $E_{3,2}$ с метрикой, определяемой выражением (*). Группой движений пространства S' является группа $SO(3, 2)$ [или $O(3, 2)$] псевдоортогональных преобразований пространства $E_{3,2}$. Эту группу также называют Д. С. г.

В пределе $\rho \to \infty$ любая сколь угодно малая окрестность любой точки пространства де Ситтера (1-го или 2-го рода) переходит в пространство Минковского, а Д. С. г. на этой области переходит в *Пуанкаре группу.*

Д. С. г. порождается поворотами в 10 координатных плоскостях 5-мерного пространства. Формальная замена $x_k \to ix_k$ для части координат делает метрику евклидовой, а Д. С. г. переходит в группу $SO(5)$. Каждый элемент ее представляется, напр., в виде

$$g = \prod_{i<j} \exp\left(\sum \alpha_{ij} M_{ij}\right),$$

где α_{ij} – вещественные параметры, а $M_{ij} = x_j \partial/\partial x_i - x_i \partial/\partial x_j$ – генераторы поворотов, образующие алгебру Ли группы

$SO(5)$:

$$[M_{ij},\ M_{kl}] = \delta_{ik}M_{jl} - \delta_{jk}M_{il} - \delta_{il}M_{jk} + \delta_{jl}M_{ik}.$$

Алгебра Ли Д. С. г. получается обратной заменой $ix_k \to x_k$. Алгебры Ли групп $SO(4,\ 1)$, $SO(3,\ 2)$ и $SO(5)$ являются различными вещественными формами одной и той же комплексной алгебры Ли. По этой причине конечномерные представления Д. С. г. можно получить из конечномерных представлений группы $SO(5)$ умножением на мнимую единицу матриц, представляющих нек-рые из генераторов. Получающиеся в результате представления Д. С. г. оказываются неунитарными. Унитарные неприводимые представления Д. С. г. (кроме тривиального) являются бесконечномерными.

Лит.: [1] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [2] Менский М. Б., Метод индуцированных представлений: пространство-время и концепция частиц, М., 1976; [3] Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1980.

М. Б. Менский.

ДЕ СИТТЕРА ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ – четырехмерное пространство-время постоянной кривизны. Подобно *Минковского пространству-времени*, Д. С. п.-в. максимально симметрично и (в зависимости от знака кривизны) обладает 10-параметрич. группой симметрии $O(4,\ 1)$ (Д. С. п.-в. 1-го рода) или $O(3,\ 2)$ (Д. С. п.-в. 2-го рода, или антидеситтеровское пространство, см. *Де Ситтера группа*). Д. С. п.-в. является частным однородным и изотропным решением уравнений Эйнштейна общей теории относительности, в правой части к-рых на месте тензора энергии-импульса материи T_μ^ν стоит так наз. космологич. постоянная Λ, то есть

$$(8\pi G/c^4)T_\mu^\nu = \Lambda\delta_\mu^\nu,$$

где G – гравитационная постоянная, δ_μ^ν – символ Кронекера ($\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$). Именно в этом контексте оно было введено В. де Ситтером (W. de Sitter) в 1917. Тензор кривизны Д. С. п.-в. выражается через его метрич. тензор $g_{\mu\nu}$ формулой

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = (1/3\Lambda)(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}).$$

Наибольший интерес представляет Д. С. п.-в. 1-го рода, соответствующее случаю $\Lambda > 0$. Оно наиболее просто реализуется в виде гиперболоида в 5-мерном псевдоевклидовом пространстве (одна координата – временная, остальные – пространственные). Д. С. п.-в. 1-го рода обладает *горизонтом событий*, поэтому, в отличие от пространства-времени Минковского, для любого события в нем *световой конус* будущего (совпадающий с областью причинного влияния данного события) не покрывает при $t \to \infty$ всего пространства. С точки зрения космологии Д. С. п.-в. 1-го рода является частным случаем однородных и изотропных моделей Фридмана, в к-рых плотность обычной материи равна нулю, а масштабный фактор (размер Вселенной) имеет следующую зависимость от времени:

$$a(t) = cH^{-1}\operatorname{ch}(Ht),\ a(t) = a_0e^{Ht} \text{ и } a(t) = cH^{-1}\operatorname{sh}(Ht)$$

соответственно для закрытой, плоской и открытой моделей Фридмана, где $H = (\Lambda c^2/3)^{1/2}$, $a_0 = \text{const}$ (все три решения описывают одно и то же пространство-время в разных системах отсчета, но только первое из них покрывает Д. С. п.-в. полностью). Экспоненциально быстрое расширение при $t \to \infty$ есть результат гравитационного отталкивания, вызванного космологич. постоянной.

Д. С. п.-в. 1-го рода играет важную роль в космологии в двух случаях. Во-первых, если $\Lambda > 0$, то космологич. модели Фридмана будут асимптотически стремиться к Д. С. п.-в. при $t \to \infty$ (для закрытой модели Фридмана это утверждение верно, если влияние космологич. постоянной на эволюцию модели станет существенным ранее, чем произойдет смена расширения на сжатие, вызванная кривизной 3-мерного пространства). Таким образом, при $\Lambda > 0$ Д. С. п.-в. может приближенно описывать будущее нашей Вселенной. Во-вторых, согласно сценарию раздувающейся Вселенной, наша Вселенная могла приближенно совпадать с Д. С. п.-в. (или его частью) и испытывать экспоненциальное расширение в течение нек-рого времени в прошлом, на очень раннем этапе своей эволюции. При этом необходимая эффективная космологич. постоянная создается квантово-гравитационными эффектами или потенциальной энергией нек-рого квантового скалярного поля, возникающего в моделях так наз. великого объединения взаимодействий или в теории супергравитации. Несмотря на относительную непродолжительность такой деситтеровской стадии, Вселенная за это время могла расшириться от сверхмикроскопич. размеров $\sim 10^{-33}$ см до громадных масштабов, к-рые к настоящему моменту будут значительно превосходить размер видимой части Вселенной ($\sim 10^{28}$ см). В этом случае наблюдаемая в настоящее время высокая степень крупномасштабной однородности и изотропии видимой части Вселенной объясняется тем, что в нек-ром интервале времени в прошлом она находилась в максимально симметричном деситтеровском состоянии.

Лит.: [1] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977.

А. А. Старобинский.

ДЕБАЕВСКОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ – явление, количественное объяснение которого и вид экранированного потенциала впервые даны П. Дебаем (P. Debye) и Э. Хюккелем (E. Huckel) в 1923.

Согласно закону Кулона, две изолированные частицы взаимодействуют посредством дальнодействующего потенциала (см. *Кулоновский потенциал взаимодействия*). Если же система состоит из большого числа положительно и отрицательно заряженных частиц (оставаясь в целом нейтральной), то взаимодействие двух частиц, расположенных на определенном расстоянии $l \geqslant l_D$ (l_D – дебаевский радиус), уменьшается (экранируется) благодаря распределению вокруг ионов одного знака частиц с противоположным знаком. Математич. выражение этого принципа состоит в том, что энергия взаимодействия между двумя частицами определяется не кулоновским потенциалом, а потенциалом Дебая:

$$\varphi^{\text{эк}}(x) = q|x|^{-1}\exp\left[-\frac{|x|}{l_D}\right].$$

См. *Дебая–Хюккеля теория*.

А. Л. Ребенко.

ДЕБАЯ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Дебаевское экранирование*.

ДЕБАЯ–ХЮККЕЛЯ ТЕОРИЯ – теория, представляющая собой нестрогое описание взаимодействия системы заряженных частиц в приближении среднего поля. Эта теория предсказывает экспоненциальную скорость убывания корреляций и асимптотич. выражения для давления p и плотности ρ частиц в системе:

$$p \sim 2zkT + \frac{kT}{12\pi l_D^3},\quad \rho \sim z + \frac{1}{16\pi l_D^3},$$

где z – химич. активность, k – постоянная Больцмана, $l_D = (2\beta z)^{-1/2}$ – дебаевский радиус экранирования взаимодействия. Исходным в Д.–Х. т. является уравнение Пуассона–Больцмана:

$$-\Delta\varphi(x) = 4\pi\sum_i q_i\rho_i(x);$$

здесь $\rho_i(x)$ – плотность заряженных частиц сорта i, определяемая формулой Больцмана

$$\rho_i(x) = \rho_{0,i}\exp\left[-q_i\frac{\varphi(x)}{kT}\right],$$

где $\rho_{0,\,i}$ – плотность частиц в отсутствии поля. Предполагается, что система в целом электрически нейтральна, то есть

$$\sum_i q_i\rho_{0,i} = 0.$$

Суть приближения Д.–Х. т. состоит в разложении экспоненты в выражении для $\rho_i(x)$ в ряд по степеням $\varphi(x)$ до членов первого порядка. Физически это предположение может быть обосновано слабостью взаимодействия ионов, энергия к-рых $q_i\varphi(x)$ считается малой по сравнению с тепловой энергией kT. Подставляя сделанное приближение в

уравнение Пуассона–Больцмана и учитывая условие электронейтральности, получают уравнение

$$(-\Delta + l_D^{-2})\varphi(x) = 0,$$

к-рое и определяет дебаевский экранированный потенциал:

$$\varphi(x) = \varphi^{\text{эк}}(x) = q\frac{\exp[-|x|/l_D]}{4\pi|x|},$$

а также искомые значения давления и плотности в системе.

Строгое доказательство Д.–Х. т. для зарядово симметричных систем в пределе, когда $\varepsilon = 1/kTl_D$ стремится к нулю, дано в работе [2]. Существование *дебаевского экранирования* для малых $\varepsilon \neq 0$ было установлено в работах [3]–[4]. Обобщение на случай квантовых кулоновских систем сделано в работе [5].

Лит.: [1] Debye P., Huckel E., «Phys. Z.», 1923, Bd 24, № 9, S. 185; [12 Kennedy T., «Comm. Math. Phys.», 1983, v. 92, № 2, p. 269; [3] Brydges D., там же, 1978, v. 58, № 3, p. 313; [4] Brydges D., Federbush P., там же, 1980, v. 73, № 3, p. 197; [5] Fontaine J. P., там же, 1986, v. 103, № 2, p. 24. *А. Л. Ребенко.*

ДЕ-БРОЙЛЯ ДЛИНА тепловой волны – см. *Активность.*

ДЕЙСТВИЕ – фундаментальная физическая величина, задание которой как функции переменных, описывающих состояние системы, полностью определяет динамику системы. Исторически понятие Д. было введено в механике *голономных систем* (систем со связями, не зависящими от скоростей). Д. S для промежутка времени (t_1, t_2) определяется как

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt, \qquad (1)$$

где $L = T - U$ – *Лагранжа функция*, зависящая от описывающих состояние системы обобщенных координат q_i и скоростей $\dot{q}_i = dq_i/dt$ ($i = 1, \ldots, n$; n – число степеней свободы) и, возможно, времени t. При этом кинетич. энергия T квадратична по скоростям, а потенциальная U не зависит от них. Исходными считались уравнения Ньютона, а оправданием для введения понятия Д. служило наблюдение, что эти уравнения получаются как уравнения Эйлера–Лагранжа в вариационном *наименьшего действия принципе*: $\delta S = 0$ при независимых вариациях $\delta q(t)$ с условием $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ на границе.

Уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (1)$$

эквивалентны *Гамильтона уравнения*, получающиеся из требования $\delta S = 0$ для Д. в эквивалентной (1) форме

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)\right]dt \qquad (2)$$

при независимых вариациях $\delta q_i(t)$ и $\delta p_i(t)$ (здесь H – *Гамильтона функция*, p_i – обобщенные импульсы). Система обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i,\ p_i = -\partial H/\partial q_i$$

служит характеристич. системой для уравнения Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right), \qquad (3)$$

к-рое является нелинейным уравнением с частными производными, а интегральные кривые уравнений Гамильтона – характеристиками уравнения (3). Д. есть полный интеграл уравнения (3),

$$S = S(\alpha_i, q_i, t) + \alpha_{n+1},$$

зависящий от $n+1$ произвольных постоянных α_k, и является производящей функцией канонич. преобразования от переменных p_i, q_i к новым переменным $P_i = \alpha_i$, $Q_i = \partial S/\partial\alpha_i$. Новая функция Гамильтона $H(P_i, Q_i, t)$ тождественно обращается в 0, вследствие чего новые переменные P, Q постоянны (и выражаются через начальные данные). Тем самым знание полного интеграла (3) сводит задачу интегрирования уравнений движения к разрешению относительно q_i алгебраич. уравнений

$$Q_i = \partial S(P_j, q_j, t)/\partial P_i.$$

В современной теоретич. физике Д. рассматривается как основная фундаментальная величина при формулировке любой теории, особенно полевой, а динамич. уравнения выводятся из *вариационных принципов классической механики.* Задача построения теории формулируется как задача выбора обобщенных координат и скоростей, описывающих состояние системы, и вида функции Лагранжа, зависящей от них. Значение понятия Д. возрастает для полевых систем еще и потому, что важнейшие для них принципы инвариантности формулируются наиболее удобно и компактно как инвариантность Д. (см. *Лагранжев формализм*, *Лагранжиан*); в ряде случаев соображения инвариантности почти полностью определяют теорию. Напр., электродинамикой без источников называется теория, где в качестве координат выбирают 4-потенциал $A_\mu(x)$, а требования релятивистской и калибровочной инвариантности и линейности уравнений поля фиксируют Д. в виде

$$S = \int\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)^2 dx,$$

где $x = (\boldsymbol{x}, t) \equiv \{x_\mu\}$ – точка пространства-времени. Кроме того, благодаря *Нетер теореме* инвариантность Д. относительно каждой однопараметрич. группы преобразований влечет за собой закон сохранения одной, явно строящейся по функции Лагранжа (или функции Гамильтона) физич. величины.

Не менее фундаментальна роль Д. в квантовой теории, где состояния системы описываются векторами гильбертова пространства, а динамич. переменным отвечают операторы. Если базис пространства одномерной системы образован собственными векторами $|q\rangle$ оператора координаты, то стандартному постулату квантования эквивалентно определение амплитуды перехода $\langle q_2(t_2)|q_1(t_1)\rangle$ из состояния с координатой q_1 в момент t_1 в состояние с координатой q_2 в момент t_2 как *функционального интеграла*

$$\left\langle q_2(t_2)|q_1(t_1)\right\rangle = \int\prod dq(t)\exp\left(-i/\hbar\int_{t_1}^{t_2} L(q,t)\right)dt, \qquad (4)$$

где $\prod$ (знак умножения) показывает, что интегрирование экспоненты от класич. Д. ведется по всем возможным траекториям, начинающимся в q_1 в момент t_1 и кончающимся в q_2 в момент t_2. Такая функциональная формулировка особенно удобна для квантовой теории поля: она позволяет ясно следить за инвариантностью на всех этапах, в частности в процедуре перенормировки. Наконец, функциональная формулировка (4) проясняет переход к классич. теории: в квазиклассич. пределе $\hbar \to 0$, где фазы $S/\hbar$ велики, основной вклад в интеграл дает область, где S стационарно, то есть $\delta S = 0$ при вариации траекторий. Таким образом, принцип наименьшего действия для классич. траекторий оказывается следствием квантовой динамики в квазиклассич. пределе. В определенном смысле Д. «более важно» для квантовой теории, чем для классической: квантовую динамику определяют все возможные траектории, а классическую – лишь экстремали.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; [2] их же, Механика, 3 изд., М., 1973; [3] Дирак П., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Медведев Б. В., Начала теоретической физики, М., 1977; [5] Рамон П., Теория поля, пер. с англ., М., 1984. *В. П. Павлов.*

ДЕЙСТВИЕ алгебры Ли – см. *Ли группа.*

ДЕЙСТВИЕ вдоль пути γ: $[0, 1] \to M$ на *симплектическом многообразии* M с *симплектической структурой* $\omega = d\lambda$ – функционал, значение которого на γ равно

$$S(\gamma) = \int_\gamma (\lambda - H)\,dt,$$

где $H: M\times\Delta\to\mathbb{R}$ – функция Гамильтона, а $\Delta\subset\mathbb{R}$ – интервал времени. Экстремалями этого функционала являются траектории гамильтоновой системы с гамильтонианом H.

См. также *Симплектическая геометрия.* *М. Э. Казарян.*

ДЕЙСТВИЕ по Гамильтону – см. *Вариационные принципы классической механики, Гамильтона – Остроградского принцип.*

ДЕЙСТВИЕ по Лагранжу – см. *Вариационные принципы классической механики, Гамильтона – Якоби уравнение, Лагранжа принцип.*

ДЕЙСТВИЕ по Якоби – см. *Вариационные принципы классической механики, Якоби принцип.*

ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ ПЕРЕМЕННЫЕ – см. *Гамильтонова система.*

ДЕЙСТВИЯ ФУНКЦИОНАЛ – см. *Случайное возмущение.*

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ – см. *Прямое произведение.*

ДЕЛОНЕ МЕТОД – см. *Усреднения метод.*

ДЕЛЬТА-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ – см. *Регуляризация* обобщенной функции.

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ, $\delta(x)$,– то же, что *Дирака дельта-функция.* См. также *Обобщенная функция.*

ДЕСИТТЕРА ГРУППА – см. *Де Ситтера группа.*

ДЕТАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИНЦИП – см. *Основное кинетическое уравнение.*

ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА ТЕОРИЯ – см. *Эргодическая теорема.*

ДЕТОНАЦИИ ВОЛНЫ – см. *Ударные волны.*

ДЕФЕКТ МАСС – см. *Масса.*

ДЕФОРМАЦИЙ ТЕНЗОР – симметрический тензор, задающий геометрию деформированного твердого тела. Д. т. выражается формулой:

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{du_i}{dx_k}+\frac{du_k}{dx_i}+\frac{du_i}{dx_i}\frac{du_k}{dx_k}\right),\quad i,k=1,2,3.$$

Здесь $u_i=x_i'-x_i$ – компоненты вектора смещений, где x_i – координата точки тела до смещения, x_i' – после смещения. Изменение элемента длины dl' деформированного тела связано с Д. т. соотношением

$$dl'^2=(\delta_{ik}+2\varepsilon_{ik})\,dx_i dx_k,$$

где $\delta_{ik}dx_i dx_k$ – квадрат элемента длины недеформированного тела, δ_{ik} – символ Кронекера. *И. В. Барьяхтар.*

ДЕФОРМАЦИЯ – см. *Бифуркация, Версальная деформация.*

ДЖАФФЕ КЛАСС – класс пространств типа S', основные пространства которых содержат *разложение единицы.* Д. к. введен в середине 60-х гг. 20 в. А. Джаффе [2] в связи с проблемой локальности взаимодействия в аксиоматич. квантовой теории поля.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969, с. 293; [2] Jaffe A., «Phys. Rev.», 1967, v. 158, p. 1454–61.

В. В. Жаринов.

ДЖЕТ – см. *Расслоение струй.*

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ Вейерштрасса, ζ-функция,– см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

ДИАГОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ Паде – см. *Паде аппроксимация.*

ДИАГРАММ МЕТОД в теории турбулентности – метод, основанный на графическом представлении в виде диаграмм Фейнмана отдельных членов разложения решений уравнений гидродинамики в формальный ряд теории возмущений по степеням константы взаимодействия – числу Рейнольдса. Свойства диаграмм позволяют производить частичное суммирование ряда с целью получения замкнутых интегральных уравнений, содержащих в качестве неизвестных искомые величины турбулентного потока.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967; [2] Гледзер Е. Б., Монин А. С., «Успехи математич. наук», 1974, т. 29, в. 3, с. 111–59.

Е. Б. Гледзер.

ДИАНАЛИТИЧЕСКАЯ КАРТА – см. *Клейнова поверхность.*

ДИАНАЛИТИЧЕСКИЙ АТЛАС – см. *Клейнова поверхность.*

ДИВЕРГЕНЦИЯ векторного поля $\boldsymbol{a}$ (в точке x, y, z) – скалярная величина

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\boldsymbol{a}$. Если вектор $\boldsymbol{a}$ – скорость частицы в установившемся течении несжимаемой жидкости, то $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ в точке с координатами x, y, z обозначает интенсивность источника ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}>0$) или стока ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}<0$), находящегося в этой точке, или отсутствие источника или стока ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$). Д. есть предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую данную точку, к объему, ограничиваемому ею, когда эта поверхность стягивается к точке.

Свойства Д.:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b},$$
$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{a}=\Delta\varphi,\ \Delta\text{ – оператор Лапласа},$$
$$\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{b},\operatorname{rot}\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\operatorname{rot}\boldsymbol{b}).$$

См. также *Векторный анализ.* *В. И. Битюцков.*

ДИЗЪЮНКТНОСТЬ – отношение в классе унитарных представлений. А именно, унитарные представления T_1 и T_2 называются дизъюнктными, если не существует ненулевого *сплетающего оператора* из T_1 в T_2. Представления T_1 и T_2 дизъюнктны тогда и только тогда, когда никакое подпредставление представления T_1 не эквивалентно никакому подпредставлению представления T_2. *Ю. А. Неретин.*

ДИКВАРК – см. *Лептокварк.*

ДИККЕ МОДЕЛЬ – модель, описывающая взаимодействие системы N двухуровневых излучателей с квантованным электромагнитным полем. В общем случае Д. м. задается гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\hbar\varepsilon_i\sigma_i^z+\sum_k\hbar\omega_k a_k^+a_k-$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_k(g_{ik}\sigma_i^+ + g_{ik}^*\sigma_i^-)(a_k e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\vec{\boldsymbol{r}}_i}+a_k^+e^{-i\vec{\boldsymbol{k}}\vec{\boldsymbol{r}}_i}),$$

в к-ром $\hbar\varepsilon_i$ – энергия межуровневого перехода i-го излучателя, $\hbar\omega_k$ – энергия кванта излучения с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и поляризацией ν, суммирование по $k\equiv\{\boldsymbol{k},\nu\}$ обозначает суммирование и по $\boldsymbol{k}$, и по ν, a_k^+ и a_k – операторы рождения и гибели фотона, $\sigma_i^\pm\equiv\frac{1}{2}(\sigma_i^x\pm i\sigma_i^y)$ – лестничные операторы, σ_i^α, $\alpha=x, y, z$,– матрицы Паули, ассоциированные с i-м излучателем, находящимся в точке $\boldsymbol{r}_i$,

$$g_{ik}=(2\pi\hbar/V\omega_k)^{1/2}(\boldsymbol{d}_i,\boldsymbol{e}_\nu),$$

V – объем квантования, $\boldsymbol{d}_i$ – дипольный момент перехода i-го излучателя, $\boldsymbol{e}_\nu$ – единичный вектор поляризации с номером ν.

Обычно для вычислений используется Д. м. в приближении вращающейся волны, когда в гамильтониане взаимодействия оставляют лишь резонансные слагаемые типа $\sigma_i^+a_k$ и $\sigma_i^-a_k^+$, а нерезонансные вида $\sigma_i^+a_k^+$ и $\sigma_i^-a_k$ отбрасывают. Если длина волны излучения гораздо больше характерных размеров системы, то переходят к сосредоточенной Д. м., гамильтониан к-рой не содержит суммирований по k. Это эквивалентно переходу к одномодовой Д. м., в приближении вращающейся волны, задающейся гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\hbar\varepsilon_i\sigma_i^z+\hbar\omega a^+a-\sum_{i=1}^{N}(g_i\sigma_i^+a+g_i^*\sigma_i^-a^+).$$

Д. м.– одна из основных моделей для описания коллективных процессов в квантовой оптике, предложена Р. Дикке [1].

Лит.: [1] Dicke R. H., «Phys. Rev.», 1954, v. 93, № 1, p. 99–110; [2] Аллен Л., Эберли Д., Оптический резонанс и двухуровневые атомы, пер. с англ., М., 1978; [3] Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А., Кооперативные явления в оптике, М., 1988. *В. И. Юкалов.*

ДИКРИТИЧЕСКИЙ УЗЕЛ – см. *Узел.*

ДИЛАТАЦИОННАЯ АНОМАЛИЯ – см. *Аномалия.*

ДИНАМИКА – раздел механики, посвященный изучению движения материальных тел под действием приложенных к ним сил. В основе Д. лежат *Ньютона законы механики*, из к-рых получаются все уравнения и теоремы, необходимые для решения задач Д.

Согласно первому закону (закону инерции), материальная точка, на к-рую не действуют силы, находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения по отношению к *инерциальной системе отсчета*; изменить это состояние может только действие силы. Второй закон, являющийся основным законом Д., устанавливает, что при действии силы материальная точка (или поступательно движущееся тело) с массой m получает ускорение $\boldsymbol{w}$, определяемое равенством

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}. \qquad (1)$$

Третьим законом является закон о равенстве действия и противодействия. Когда к телу приложено несколько сил, $\boldsymbol{F}$ в уравнении (1) означает их равнодействующую. Этот результат следует из закона независимости действия сил, согласно к-рому при действии на тело нескольких сил каждая из них сообщает телу такое же ускорение, какое она сообщила бы, если бы действовала одна.

В Д. рассматриваются два типа задач, решения к-рых для материальной точки (или поступательно движущегося тела) находятся с помощью уравнения (1).

Задачи первого типа состоят в том, чтобы, зная движение тела, определить действующие на него силы. Классич. примером решения такой задачи является открытие И. Ньютоном (I. Newton) закона всемирного тяготения: зная установленные И. Кеплером (J. Kepler) на основании обработки результатов наблюдений законы движения планет, И. Ньютон показал, что это движение происходит под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния между планетой и Солнцем. В технике такие задачи возникают при определении сил, с к-рыми движущиеся тела действуют на связи, то есть другие тела, ограничивающие их движение (см. *Связи механические*), напр. при определении сил давления колес на рельсы, а также при нахождении внутренних усилий в различных деталях машин и механизмов, когда законы движения этих машин (механизмов) известны.

Задачи второго типа являются в Д. основными и состоят в том, чтобы по действующим на тело силам определить закон его движения. Для решения этих задач необходимо знать так наз. начальные условия, то есть положение и скорость тела в момент начала его движения под действием заданных сил. Примеры таких задач: по величине и направлению скорости снаряда в момент его вылета из канала ствола (начальная скорость) и действующим на снаряд при его движении силе тяжести и силе сопротивления воздуха найти закон движения снаряда, в частности его траекторию, горизонтальную дальность полета, время движения до цели; по известным скорости автомобиля в момент начала торможения и силе торможения найти время движения и путь до остановки; по силе упругости рессор и весу кузова вагона определить закон его колебаний.

Задачи Д. для твердого тела (при его непоступательном движении) и различных механич. систем решаются с помощью уравнений, к-рые получаются как следствия второго закона Д., применяемого к отдельным частицам системы или тела; при этом еще учитывается равенство сил взаимодействия между этими частицами (третий закон Д.). В частности, таким путем для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, получается уравнение:

$$I_z\varepsilon = M_z, \qquad (2)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – угловое ускорение тела, M_z – вращающий момент, равный сумме моментов действующих сил относительно оси вращения. Если известен закон вращения, то уравнение (2) позволяет найти вращающий момент (задача первого типа); если же известны вращающий момент и начальные условия, то есть начальное положение тела и начальная угловая скорость, то из уравнения (2) можно найти закон вращения (задача второго типа).

При изучении движения механич. систем часто применяют так наз. общие теоремы Д., к-рые также могут быть получены как следствия второго и третьего законов Д. К ним относятся теоремы о движении центра масс (или центра инерции) и об изменении *количества движения*, *момента количества движения* и кинетич. энергии системы. Иной путь решения задач Д. связан с использованием вместо второго закона Д. принципов механики (см. *Вариационные принципы классической механики*) и получаемых с их помощью уравнений движения, в частности *Лагранжа уравнений* механики.

Уравнение (1) и все следствия из него справедливы только при изучении движения по отношению к так наз. инерциальной системе отсчета, к-рой для движения внутри Солнечной системы с высокой степенью точности является звездная система (система отсчета с началом в центре Солнца и осями, направленными на удаленные звезды), а при решении большинства инженерных задач – система отсчета, связанная с Землей. При изучении движения по отношению к неинерциальным системам отсчета, то есть системам, связанным с ускоренно движущимися или вращающимися телами, уравнение движения можно также составлять в виде (1), если к силе $\boldsymbol{F}$ прибавить так наз. переносную и *Кориолиса силы* инерции. Такие задачи возникают при изучении влияния вращения Земли на движение тел по отношению к земной поверхности, а также при изучении движения различных приборов и устройств, установленных на движущихся объектах (судах, самолетах, ракетах и др.).

Помимо общих методов изучения движения тел под действием сил в Д. рассматриваются специальные задачи: теория *гироскопа*, *колебаний и волн теория*, теория *устойчивости движения*, *удара* и др. С помощью законов Д. изучается также движение сплошной среды, в частности упруго и пластически деформируемых твердых тел, жидкостей и газов. Наконец, в результате применения методов Д. к изучению движения конкретных объектов возник ряд специальных дисциплин: небесная механика, внешняя баллистика, Д. автомобиля, самолета, ракеты и т. п. *С. М. Targ.*

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ – см. *Статистический ансамбль.*

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА – раздел механики, в котором изучается движение *твердого тела*, складывающееся из движения одной произвольно отмеченной точки O (обычно это – центр масс) и движения около нее как неподвижной точки, определяющееся тем самым (поступательной) скоростью точки O и угловой скоростью около O. Это движение описывается законом движения центра масс и теоремой о моменте количества движения (о кинетич. моменте), а именно, в неподвижной системе координат изменение импульса $\boldsymbol{p}$ описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{f}$ – сумма внешних сил, действующих на тело,а изменение кинетич. момента $\boldsymbol{m}$ – уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = \boldsymbol{k}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{k}$ – сумма моментов внешних сил. При этом импульс пропорционален скорости $\boldsymbol{v}$ центра масс, а кинетич. момент линейно зависит от угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Если момент $\boldsymbol{k}$ не зависит от положения твердого тела, то (2) описывает чистое

вращение; в свою очередь, если сила f не зависит от ориентации тела, то центр масс движется как материальная точка, а вращение около нее происходит независимо.

Кинетич. энергия T твердого тела квадратично зависит от v, ω и может быть представлена в виде суммы двух частей:

$$T=\frac{\mu v^2}{2}+\sum a_{ij}\omega_i\omega_j, \qquad (3)$$

μ – масса тела; первый член в (3) есть кинетич. энергия поступательного движения – она имеет такой вид, как если бы вся масса μ тела была сосредоточена в центре инерции, а второй – кинетич. энергия вращательного движения с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр инерции. Ее изменение описывается уравнением

$$\frac{dI}{dt}=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{k}), \qquad (4)$$

к-рое является следствием уравнений (1) и (2), если учесть, что

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{v}}=\mu\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{m}=\frac{\partial I}{\partial\boldsymbol{\omega}}, \quad \boldsymbol{m}=\mathcal{A}\boldsymbol{\omega}, \qquad (5)$$

где $\mathcal{A}$ – матрица $\{a_{ij}\}$, определяющая эллипсоид инерции. Пусть $k(Oxyz)$ – неподвижная система координат, O – какая-либо фиксированная точка тела (полюс) и $K(OXYZ)$ – подвижная, жестко скрепленная с телом система координат. Тогда положение (произвольно выбранной) точки C тела в момент времени t – движение – это семейство отображений $K\to k$, определяемое формулой

$$\boldsymbol{r}(t)=\mathcal{B}(t)\boldsymbol{R}+\boldsymbol{s}(t), \quad \boldsymbol{r}(t)=OC, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{r}(t)$ – радиус-вектор точки C в неподвижной системе координат, а $\boldsymbol{R}$ – ее радиус-вектор в подвижной системе. Вращение твердого тела определяется матрицей поворота $\mathcal{B}(t)$, а сдвиг вектором $\boldsymbol{s}(t)$. Таким образом, пространство конфигураций (конфигурационное многообразие) твердого тела – шестимерное многообразие $\mathbb{R}^3\times SO(3)$, то есть прямое произведение трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ переносов и группы $SO(3)$ поворотов. Отсюда получается выражение для скорости $\boldsymbol{v}$ точки C (при $\boldsymbol{s}=0$ это формула Эйлера):

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}]+\dot{\boldsymbol{s}} \qquad (7)$$

(поскольку действие оператора $\dot{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}$ сводится к векторному умножению: $\omega\leftrightarrow\dot{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{-1}$). Вектор ω называется угловой скоростью тела в неподвижной системе координат, или просто угловой скоростью в пространстве. Переходя к подвижной системе координат, получают скорость

$$V=\mathcal{B}^{-1}\boldsymbol{v}$$

и угловую скорость Ω в теле

$$\Omega\leftrightarrow\mathcal{B}^{-1}\dot{\mathcal{B}},$$

то есть

$$\Omega=\mathcal{B}^{-1}\omega. \qquad (8)$$

Именно в осях, связанных с самим телом (а, точнее, с эллипсоидом инерции) и построенных относительно центра масс, удобно формулировать уравнения движения твердого тела. При этом обычно полагают, что эти жестко связанные с телом оси направлены по главным (центральным) осям инерции. Кроме того, в этих осях обнаруживается наиболее простая связь между импульсом $\boldsymbol{P}$ и скоростью центра масс $\boldsymbol{w}=\mathcal{B}^{-1}\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{P}=\mu\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{p}=\mathcal{B}\boldsymbol{P}$ (где μ – масса тела) и кинетич. моментом $\boldsymbol{M}$ и угловой скоростью Ω:

$$\boldsymbol{M}=\mathcal{A}\Omega, \quad \boldsymbol{m}=\mathcal{B}\boldsymbol{M}$$

(здесь $\mathcal{A}$ – диагональная матрица; подробнее: $\Omega=p\boldsymbol{i}+q\boldsymbol{j}+r\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{M}=A p\boldsymbol{i}+B q\boldsymbol{j}+Cr\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – орты подвижной системы координат). Тогда уравнения (1) и (2) принимают соответственно вид

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}, \qquad (1^*)$$

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=[\boldsymbol{M},\Omega]+\boldsymbol{K}, \qquad (2^*)$$

а кинетич. энергия выражается так:

$$T=\frac{1}{2}\mu w^2+Ap^2+Bq^2+Cr^2.$$

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 3 изд., М., 1973; [3] Кирпичников С. Н., Новоселов В. С., Математические аспекты кинематики твердого тела, Л., 1986.

С. Я. Степанов.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА; интегрируемые и неинтегрируемые задачи. Представление о реальном теле как сплошном недеформируемом (абсолютно твердом), используют при изучении движения и естественных, и технических объектов, чем и определяется роль *динамики твердого тела* (см. [1]). В сохраняющейся до настоящего времени форме динамич. и кинематич. уравнения созданы Л. Эйлером (L. Euler) в 1749–58; работы были начаты в связи с анализом движения оси Земли, выполнявшимся одновременно с Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert). Формализовал вывод уравнений Ж. Лагранж (J. Lagrange, 1813). В так наз. классич. задачах Д. т. т. уравнения допускают интегралы энергии и момента количества движения, известен интегрирующий множитель (константа). Обладающие таким свойством задачи охвачены уравнениями

$$\left.\begin{gathered} G_1^{\bullet}+\omega_2G_3-\omega_3G_2=M_1, \quad \nu_1^{\bullet}=\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3,\\ G_1=\mathcal{J}_{1i}\omega_i, \quad M_1=\left(\nu_2F+\frac{\partial f}{\partial\nu_2}\right)\omega_3-\\ -\left(\nu_3F+\frac{\partial f}{\partial\nu_3}\right)\omega_2+\nu_2\frac{\partial\Pi}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial\Pi}{\partial\nu_2}, \end{gathered}\right\} \qquad (1)$$

в к-рых функции

$$\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3), f(\nu_1,\nu_2,\nu_3), F(\nu_1,\nu_2,\nu_3) \qquad (2)$$

определены на сфере

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1. \qquad (3)$$

Дополняют последнее соотношение интегралы

$$\omega_iG_i+\Pi=2h, \ \nu_iG_i+f=k. \qquad (4)$$

В частности, при

$$\Pi=\frac{1}{2}N_{ij}\nu_i\nu_j-\mu_i\nu_i, \quad f=\lambda_i\nu_i-\frac{1}{2}E_{ij}\nu_i\nu_j, \quad F=0$$

имеем уравнения задачи о движении в жидкости тела с циркуляционными течениями через имеющиеся в нем отверстия и с циркулирующей жидкостью в полостях тела. При дополнительных условиях $N_{ij}=0$, $E_{ij}=0$ получаются уравнения задачи о движении тяжелого гиростата. Алгебраичность (1), (4) по отношению к ω_i обеспечила возможность понижения порядка системы уравнений. В задаче о гиростате использована алгебраичность (1), (4) по отношению к ν_i, что позволило свести задачу к одному интегродифференциальному уравнению (см. [3]).

В исследованиях технич. направленности важен учет непотенциальных взаимодействий тел. Уточняя постановку задачи о взаимодействии тела с жидкостью, учитывают ее вязкость. Разделение задач гидродинамики и Д. т. т. достигнуто введением малого параметра и осреднением. Если кинематич. вязкость ν велика, то компоненты момента количества системы могут быть взяты в виде

$$G_i=J_{ij}\omega_j-\rho\nu^{-1}P_{ij}\omega_j^{\bullet}, \quad P_{ij}=-\int_D\ni_j(\boldsymbol{r}\times z_i)\,dv,$$

где ρ – плотность жидкости, вектор $\boldsymbol{r}$ указывает частицу жидкости в полости D тела, а z_i – зависящие лишь от формы полости функции, определяемые как решения трех стационарных линейных краевых задач. Для малой вязкости найдено другое выражение

$$G_i=J_{ij}\omega_j+\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}E_{ij}\int_{t_0}^{t}\frac{\omega_j(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$E_{ij}=\oint_{\partial D}(r\times\ni_i+\nabla\Phi_i)(r\times\ni_j+\nabla\Phi_j)\,ds,$$

Φ_i – потенциалы Жуковского. В теории движения проводящего тела в электромагнитном поле отделяют взаимодейст-

вия, существенно отличающиеся временными масштабами. Напр., при малой глубине проникновения магнитного поля момент сил, действующих на проводящее тело, представлен в виде

$$\left[P^0 H^\infty(t) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} P^1 \int_0^t \frac{H^\infty(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right] \times H^\infty,$$

где $H^\infty(t)$ – напряженность однородного магнитного поля; P^0, P^1 – зависящие лишь от формы тела тензоры, ε – малый параметр.

Трудности математич. моделирования движения систем тел побудили принимать дополнительные ограничения не только в постановках задач, в большинстве к-рых изучают лишь простейшие стационарные движения и, в лучшем случае,– их окрестности (устойчивость, малые колебания). Традиционно здесь использование лагранжева или гамильтонова формализмов.

В строгой постановке задачи о движении систем связанных тел обстоятельно изучали для конкретных объектов, таких как гироскоп в карданове подвесе, спутник с двойным вращением. Последний представлен системой двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферич. шарниром, и задача сведена к двум уравнениям

$$\frac{d\lambda}{d\tau} - \mu\xi \operatorname{ctg}^2\tau = \Lambda, \quad \frac{d\mu}{d\tau} + \lambda\xi \operatorname{tg}^2\tau = M, \qquad (5)$$

из к-рых определяют $\lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$, после чего из $\frac{d\tau}{dt} = -\varkappa$ находят $t(\tau)$. Более общие модели включают гиросистемы с возможными конструктивными несовершенствами. Система состоит из гиростатов S^k, корпусы к-рых закреплены на осях l^k в корпусе гиростата S^0. Вот одна из полученных математич. моделей:

$$\left(J\omega + \varphi^\bullet \sum_{k=1}^n \dot{j}_k C^k + \sum_{k=0}^n H^k\right)^\bullet = M,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi^\bullet}\right)^\bullet - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \qquad (6)$$

Уравнения движения системы гиростатов, корпусы к-рых последовательно сочленены сферич. или цилиндрич. шарнирами, записаны в наиболее естественных для задач Д. т. т. переменных – компонентах угловой скорости каждого из тел в неизменно связанных с ним осях и компонентах в тех же осях векторов фиксированного в пространстве базиса. Новые постановки задач для систем тел, относительные движения к-рых подчинены неголономным связям, появились как обобщения классич. задач, рассмотренных С. А. Чаплыгиным [4].

Интегрируемость (неинтегрируемость) задач Д. т. т. интересовала многих крупнейших ученых. Обнаруженные Л. Эйлером и Ж. Лагранжем точные решения изучали С. Пуассон (S. Poisson), Л. Пуансо (L. Poinsot) и др. Необходимость расширения математич. аппарата стимулировала развитие теории эллиптич. и абелевых интегралов и их обращающих функций. Установлено, что в обоих случаях интегрирование производится посредством тета-функций, аргумент к-рых – линейная функция времени, и основные переменные задачи являются однозначными функциями времени, не имеющими для всех его конечных значений других особенностей, кроме полюсов. Именно это математич. свойство послужило исходным при построении С. В. Ковалевской решения задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Оно связано с условием существования четвертого алгебраич. интеграла, и, как оказалось, других таких случаев интегрируемости в этой задаче нет. В. В. Козлов (см. [5]) доказал, что при различных значениях главных моментов инерции для неподвижной точки и при отличном от нуля значении параметра Пуанкаре не существует и аналитического по этому параметру интеграла. Эти теоремы существенно используют предположение, что все постоянные интегрирования произвольны. Они не отрицают существования решений с алгебраич. инвариантными соотношениями.

В отличие от предлагавшихся ранее определений инвариантного соотношения, следующее определение содержит и алгоритм его построения. Системе уравнений $x_i^\bullet = X_i(x, a)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, с параметрами $a = (a_1, \ldots, a_m)$ сопоставлен характеризуемый параметрами $c = (c_1, \ldots, c_p)$ класс функций $f^{(0)}(x, a, c)$, порождающий последовательность $f^{(k)}(x, a, c) = X_i \partial f^{(k-1)}/\partial x_i$. Вместе с интегралами $J_j(x, a) = C_j$, $j = 1, \ldots, s$ (если таковые имеются) соотношения $f^{(k)}(x, a, c) = 0$ составляют систему уже конечных уравнений. Если будут найдены значения a_*, c_*, C_*, при к-рых в этой системе имеется не более чем $n-1$ функционально независимых соотношений, то уравнения $x_i^\bullet = X_i(x, a_*)$ в дополнение к интегралам $J_j(x, a_*) = C_{*j}$ имеют инвариантное соотношение $f^{(0)}(x, a_*, c_*) = 0$; при $f^{(1)}(x, a, c) \equiv 0$ это – интеграл. Так как в большинстве задач Д. т. т. $X_i(x, a)$ могут быть выбором переменных представлены многочленами, то построение алгебраич. инвариантного соотношения сводится к последовательному использованию известного в алгебре метода исключения. Во всех найденных к настоящему времени случаях интегрируемости классич. задач инвариантные соотношения – многочлены (см. [1]).

Хотя переход от одного тела к системе связанных тел существенно усложняет задачу, однако и здесь найдены случаи интегрируемости. Ряд новых решений получен и в задаче о движении тела, подчиненного неголономной связи.

Движение тела воспроизводится качением неизменно связанной с ним линейчатой поверхности (подвижного аксоида) по неподвижной в пространстве линейчатой поверхности (неподвижному аксоиду), и если эти поверхности найдены, движение тела представлено в наглядной форме со всеми его особенностями и, тем самым, получено полное решение задачи механики. Поскольку в Д. т. т. основные переменные отнесены к осям, связанным с телом, то в каждом решении они определяют подвижный аксоид. В задаче о движении тела, имеющего неподвижную точку, аксоиды – конусы. Их направляющие линии – соответственно подвижный и неподвижный годографы угловой скорости. Неподвижный годограф определяется уравнениями

$$\omega_\zeta = \omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \omega_3\nu_3, \ \omega_\rho^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_\zeta^2,$$

$$\omega_\rho^2 d\alpha = (\omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3)d\omega_1 + (\omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1)d\omega_2 +$$

$$+(\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)d\omega_3.$$

Полные решения построены для большинства найденных случаев интегрируемости задач Д. т. т. (см. [1], [2]). Высокая наглядность результатов достигается при получении необходимого объема информации на основе созданных алгоритмов средствами ЭВМ и вынесении ее на экран дисплея (или лист графопостроителя). Новая форма представления результата – компьютерный фильм, представляющий движение тела качением подвижного аксоида по неподвижному.

Лит.: [1] Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А., Классические задачи динамики твердого тела, Киев, 1978; [2] Харламов М. П., Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела, Л., 1988; [3] Харламова Е. И., Мозалевская Г. В., Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела, Киев, 1986; [4] Чаплыгин С. А., Исследования по динамике неголономных систем, М.– Л., 1949; [5] Козлов В. В., Методы качественного анализа в динамике твердого тела, М., 1980.

П. В. Харламов.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА; неголономные связи – раздел механики, изучающий движение систем твердых тел с идеальными по Лагранжу неголономными связями (накладывающими ограничения не только на координаты, но и на скорости точек). Исторически первым и

наиболее содержательным примером механич. системы с идеальными неголономными связями является задача о движении твердого тела по поверхности без скольжения (см. ниже). Другими примерами являются задачи Чаплыгина и Суслова.

Задача Чаплыгина (см. [1]). Твердое тело («сани») опирается на горизонтальную плоскость двумя свободно скользящими ножками и точкой C прикосновения режущего колесика (закругленного лезвия). Уравнение неголономной связи

$$\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$$

(x и y – декартовы координаты точки C на плоскости, φ – угол плоскости колесика с осью абсцисс) выражает кинематич. условие, что скорость точки C тела в любой момент времени направлена вдоль плоскости колесика. Собственно «санями» называется частный случай, когда центр масс тела лежит в плоскости колесика. При любом расположении центра масс уравнения движения тяжелого тела по горизонтальной плоскости интегрируется в квадратурах.

Задача Суслова (см. [2]). Тяжелое твердое тело движется вокруг неподвижной точки и неизменно соединено с одним концом длинной, гибкой и не поддающейся кручению нити, другой конец к-рой закреплен неподвижно. Пусть касательная к нити в точке C соединения ее с телом постоянно проходит через точку опоры O. Тогда в каждый момент времени проекция мгновенной угловой скорости тела ω на ось OC, фиксированную в теле, равна нулю $(\omega)_{OC}=0$. Это кинематич. условие представляет идеальную неголономную связь. Задача интегрируется в гипергеометрич. функциях в случае, когда точка O совпадает с центром масс тела, и в эллиптич. функциях – когда центр масс расположен в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, построенного для точки O.

Движение твердого тела по поверхности без скольжения. Твердое тело, ограниченное выпуклой поверхностью, касается неподвижной опорной поверхности не более, чем в одной точке. Уравнения движения тела, отнесенные к жестко связанной с телом подвижной системе координат с началом в центре масс G тела, имеют вид:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\omega}\times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}, \qquad (1)$$

$$\Theta\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\Theta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{R}. \qquad (2)$$

Здесь m – масса тела, $\boldsymbol{v}$ – скорость точки G, ω – угловая скорость, $\boldsymbol{R}$ – реакция плоскости, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{M}$ – соответственно главный вектор и главный момент внешних активных сил при приведении к точке G, Θ – центральный тензор инерции, $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки касания тела с опорной поверхностью.

Условие, что мгновенная скорость этой точки тела равна нулю:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = 0, \qquad (3)$$

представляет в скалярной записи два неголономных и одно конечное уравнение связи.

Наиболее подробно изучены частные задачи: движение однородного шара по поверхности 2-го порядка (см. [4]), движение тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости. Для тяжелого тела на плоскости

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{M} = 0, \\ \boldsymbol{\gamma} = -\frac{\operatorname{grad} f(\boldsymbol{r})}{|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{r})|}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где g – ускорение свободного падения, $f(\boldsymbol{r})$ – уравнение поверхности тела. Уравнения (1) – (4) образуют замкнутую систему уравнений относительно $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}$. Классич. случаи интегрируемости: тело вращения, ограниченное круговым ребром с острым краем (обруч) (см. [3], [5]); шар с трехосным центральным эллипсоидом инерции, центр к-рого совпадает с геометрич. центром шара (см. [8]).

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 1, М.–Л., 1948, с. 15–25; [2] Суслов Г. К., Теоретическая механика, М.–Л., 1946; [3] Раус Э. Дж., Динамика системы твердых тел, т. 2, пер. с англ., М., 1983; [4] Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 1, М.–Л., 1948, с. 57–75; [5] Аппель П., Теоретическая механика, пер. с франц., т. 2, М., 1960; [6] Мак-Миллан В. Д., Динамика твердого тела, пер. с англ., М., 1951; [7] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., Динамика неголономных систем, М., 1967; [8] Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 1, М.–Л., 1948, с. 76–101. *А. В. Карапетян, А. С. Сумбатов.*

ДИНАМИКИ ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Д'Аламбера – Лагранжа принцип.*

ДИНАМИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ – совокупность явлений, происходящих в системе с параметрами, когда параметры медленно изменяются со временем и проходят через бифуркационное значение. Если $\boldsymbol{x}$ – вектор фазовых координат системы, а $\boldsymbol{y}$ – вектор параметров, то дифференциальные уравнения, изучаемые в теории Д. б., могут быть записаны в виде быстро-медленной системы

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon),\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon),\ x\in\mathbb{R}^m,\ y\in\mathbb{R}^n,\ 0<\varepsilon\ll 1.$$

Здесь ε характеризует скорость изменения параметров. Предполагается, что в пространстве медленных переменных (параметров) y имеется поверхность Σ, соответствующая бифуркации в быстром уравнении (уравнении для x при $y=\text{const}$, $\varepsilon=0$), и что y – компонента решения полной системы попадает на эту поверхность. Результаты теории Д. б. в нек-рых случаях совершенно отличны от предсказанной «квазистатической» теории, согласно к-рой при медленном переходе через точку бифуркации, соответствующую смене устойчивости состояния (равновесия, цикла) быстрого уравнения, фазовая точка должна отслеживать асимптотически устойчивое состояние. Так, если система аналитична, то Д. б., при к-рой равновесие быстрой системы теряет устойчивость из-за перехода пары сопряженных собственных чисел через мнимую ось не в точке 0, сопровождается следующими явлениями затягивания потери устойчивости. Фазовая точка, притянувшаяся к устойчивому равновесию за время $1/\varepsilon$ до момента бифуркации, будет двигаться вблизи потерявшего устойчивость равновесия в течение времени порядка $1/\varepsilon$, так что параметры y успеют измениться на величину порядка 1. Лишь затем может произойти срыв с равновесия. Аналогичное затягивание сопровождает в аналитич. системах Д. б., при к-рой цикл быстрой системы теряет устойчивость, оставаясь невырожденным (пара мультипликаторов пересекает единичную окружность не в точке 1 или один мультипликатор в точке -1). Если система неаналитична (хотя, быть может, принадлежит классу C^∞), то явление затягивания, вообще говоря, отсутствует: срыв с потерявшего устойчивость равновесия или цикла может происходить (и, в общем случае, происходит) вблизи точки бифуркации.

Д. б., при к-рой сливаются и исчезают устойчивое и неустойчивое равновесия быстрой системы, играет центральную роль в теории релаксационных колебаний. Здесь также при нек-рых условиях и уже при конечной гладкости существуют решения (так наз. «утки»), для к-рых фазовая точка, притянувшаяся к асимптотически устойчивому равновесию, движется после слияния равновесий в течение времени порядка $1/\varepsilon$ вблизи неустойчивого равновесия быстрой системы.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 5, М., 1986, с. 3–218; [2] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [3] Нейштадт А. И., «Дифференциальные уравнения», 1987, т. 23, № 12, с. 2060–67; 1988, т. 24, № 2, с. 226–33; [4] Benoit E., Callot J.-L., Diener F., Diener M., «Collect. Math.», 1980, v. 31, № 1. *А. И. Нейштадт.*

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА – однопараметрическая полугруппа отображений, описывающая марковскую (в общем случае, необратимую) эволюцию открытой системы.

Возможны два эквивалентных способа задания Д. п.– в пространстве состояний и в алгебре наблюдаемых системы (см. *Наблюдаемых алгебра*). Пусть для определенности задана алгебра Неймана $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве H с единичным оператором I. Динамической полугруппой называется семейство $\{\Phi_t,\ t\geqslant 0\}$ отображений алгебры $\mathcal{A}$ в себя, удовлетворяющее условиям:

1) Φ_0 – тождественное отображение;

2) Φ_t – нормальное *вполне положительное отображение* такое, что $\Phi_t(I) = I$ для любого $t > 0$;

3) $\Phi_t\Phi_s = \Phi_{t+s}$ для $t,s \geqslant 0$;

4) $\Phi_t(X) \to X$ при $t \to 0$ для любого $X \in \mathcal{A}$ в ультраслабой операторной топологии.

Если $\mathcal{A}$ – коммутативная алгебра функций на нек-ром «фазовом пространстве» $\mathcal{E}$, то это соответствует полугруппе переходных операторов в теории марковских случайных процессов; если же $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(H)$ – алгебра всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, то говорят о квантовой динамической полугруппе.

Важной проблемой математич. теории Д. п. является характеризация инфинитезимального оператора $\mathcal{L}$, к-рый определяется формулой

$$\mathcal{L}(X) = \lim_{t \to 0+} t^{-1}[\Phi_t(X) - X],$$

где имеется в виду предел в ультраслабой операторной топологии. Если область определения $D(\mathcal{L})$ есть *-подалгебра $\mathcal{A}$, то $\mathcal{L}$ является вполне диссипативным отображением таким, что $\mathcal{L}(I) = 0$ (см. *Диссипативное отображение*). Инфинитезимальные операторы полностью описаны лишь для непрерывных по норме Д. п. В этом случае $\mathcal{L}$ является ограниченным отображением в $\mathcal{A}$ вида

$$\mathcal{L}(X) = i[H,X] + \Phi(X) - \frac{1}{2}\{\Phi(I)X + X\Phi(I)\}, \quad X \in \mathcal{A},$$

где Φ – вполне положительное отображение в $\mathcal{A}$, H – самосопряженный оператор из $\mathcal{A}$ (см. [2]). Для квантовой Д. п. это сводится к формуле Линдблада:

$$\mathcal{L}(X) = i[H,X] + \sum_j \left\{L_j^* X L_j - \frac{1}{2}\left(L_j^* L_j X + X L_j^* L_j\right)\right\}, \qquad (1)$$

где $H = H^*$, L_j, $\sum L_j^* L_j \in \mathfrak{B}(H)$ (см. [7], [5]).

В физич. приложениях квантовые Д. п. возникают как решения марковского управляющего уравнения

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(X) = \mathcal{L}(\Phi_t(X)), \qquad (2)$$

к-рое получается при рассмотрении взаимодействия *квантовой открытой системы* с резервуаром в *марковском приближении* (см. [1], [3]). Формулы (1), (2) дают наиболее общий вид марковского управляющего уравнения, согласующийся с вероятностной интерпретацией квантовой механики. В конкретных моделях операторы H, L_j в соотношениях (1), (2) определяются гамильтонианом взаимодействия и состоянием резервуара. Эргодич. свойства Д. п. описывают в марковском приближении процесс релаксации открытой системы к равновесному состоянию (см. [4]).

В общем плане естественна постановка обратной проблемы расширения Д. п. до группы автоморфизмов, то есть представления марковской динамики квантовой системы в виде проекции обратимой динамики системы, взаимодействующей с окружением (см. [6]). Возможность такого расширения, означающая согласованность понятия Д. п. с принципами статистич. механики, обуславливается, главным образом, свойством полной положительности.

Лит.: [1] Alicki R., Lendi K., «Lect. Notes in Phys.», 1987, v. 286; [2] Christensen E., Evans D. E., «J. Lond. Math. Soc.», 1979, v. 20, p. 358–68; [3] Davies E. B., Quantum theory of open systems, L.– N. Y., 1976; [4] Frigerio A., «Commun. Math. Phys.», 1978, v. 63, p. 269–76; [5] Gorini V. [a. o.], «Rep. Math. Phys.», 1978, v. 13, p. 149–73; [6] Kummerer B., «J. Funct. Anal.», 1985, v. 63, p. 139–77; [7] Lindblad G., «Comm. Math. Phys.», 1979, v. 65, p. 281–94.

А. С. Холево.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ квантовой системы, алгебра, генерирующая спектр, группа неинвариантности, – симметрия полного пространства *векторов состояния* системы, образующих одно неприводимое представление некоторой группы или алгебры Ли, операторы которой объединяют в одно семейство все состояния системы и включают в себя операторы переходов между различными состояниями.

Вырождение уровней энергии квантовой системы, находящейся в стационарном состоянии, связано с наличием у нее нек-рой симметрии (группы инвариантности), то есть с наличием набора операторов, коммутирующих с гамильтонианом системы, к-рые обычно образуют конечномерную алгебру Ли. Помимо вырождений, связанных с явной симметрией гамильтониана (напр., относительно вращений в трехмерном пространстве), существует скрытая симметрия, объясняющая так наз. случайное вырождение уровней энергии системы. Примером такой симметрии, объясняющей вырождение уровней с одинаковым главным квантовым числом и различными орбитальными моментами в атоме водорода, является симметрия $O(4)$ в импульсном пространстве (фоковская симметрия; предложена В. А. Фоком в 1935). Аналогично «случайное» вырождение уровней трехмерного изотропного гармонич. осциллятора связано с наличием у него симметрии относительно унитарной группы $U(3)$. Операторы алгебры соответствующих групп переводят одно выбранное состояние, принадлежащее заданному уровню энергии, во все остальные состояния, принадлежащие тому же уровню энергии; при этом ортогональные состояния, принадлежащие данному уровню, образуют базис неприводимого представления группы симметрии (группы инвариантности).

В отличие от группы инвариантности, действие операторов динамич. группы (группы неинвариантности, или динамич. алгебры Ли) на одно выбранное стационарное состояние квантовой системы порождает все остальные стационарные состояния системы, связывая таким образом все стационарные состояния системы, в том числе принадлежащие различным уровням, в одно семейство – мультиплет. При этом группа симметрии (группа инвариантности) системы является подгруппой группы Д. с. Так, для атомов водорода группой Д. с. является конформная $O(4, 2)$ динамич. группа, одно неприводимое вырожденное представление к-рой содержит все его связанные состояния, а для трехмерного квантового гармонич. осциллятора – группа $U(3, 1)$. Среди генераторов группы Д. с. обязательно есть не коммутирующие с гамильтонианом, действие к-рых переводит волновые функции состояний с одним уровнем энергии квантовой системы в волновые функции состояний с другими энергиями (то есть соответствует квантовым переходам между уровнями системы).

Нахождение динамич. группы симметрии физич. задачи, с одной стороны, эквивалентно решению *Шредингера уравнения* (или *Дирака уравнения, Клейна – Гордона уравнения*) для данной системы, с другой стороны – позволяет использовать хорошо развитый математич. аппарат теории представлений групп Ли и получать соотношения типа рекуррентных соотношений для матричных элементов операторов физич. величин, что важно при расчетах физич. эффектов по теории возмущений (напр., при расчете эффекта Штарка для атома водорода).

Группа Д. с. квантовой системы определяется неоднозначно. Так, для атома водорода наряду с конформной группой $O(4, 2)$ Д. с. может являться также группа де Ситтера $O(4, 1)$, а для трехмерного осциллятора – неоднородная симплектич. группа $ISp(6, R)$ [для N-мерного осциллятора – $ISp(2N, R)$]. Выбор той или иной группы Д. с. квантовой системы определяется удобством при расчетах.

В физике элементарных частиц интерес к Д. с. связан с попытками установить симметрию лагранжиана взаимодействия по известному из опыта спектру масс частиц.

Лит.: [1] Малкин И. А., Манько В. И., Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, М., 1979.

В. И. Манько.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ твердого тела – свойство тела, заключающееся в том, что эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения (при этом симметричность самого тела не обязательна).

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – (в первоначальном значении термина) механическая система с конечным числом

степеней свободы. Состояние такой системы обычно характеризуется ее расположением (конфигурацией) и скоростью изменения последнего, а закон движения указывает, с какой скоростью изменяется состояние системы.

В простейших случаях состояние можно охарактеризовать посредством величин $w_1, \ldots, w_m$, к-рые могут принимать произвольные (действительные) значения, причем двум различным наборам величин $w_1, \ldots, w_m$ и $w_1', \ldots, w_m'$ отвечают различные состояния, и обратно, а близость всех w_i' к w_i означает близость соответствующих состояний системы. Закон движения тогда записывается в виде автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{w}_i = f_i(w_1, \ldots, w_m), \ i = 1, \ldots, m. \qquad (1)$$

Рассматривая значения $w_1, \ldots, w_m$ как координаты точки w в m-мерном пространстве, можно геометрически представить соответствующее состояние Д. с. посредством этой точки w. Последнюю называют фазовой (иногда также изображающей, или представляющей) точкой, а пространство — фазовым пространством системы. (Прилагательное «фазовый» связано с тем, что в прошлом состояния системы нередко называли ее фазами.) Изменение состояния со временем изображается как движение фазовой точки по нек-рой линии (так наз. фазовой траектории; часто, впрочем, ее называют просто траекторией) в фазовом пространстве. В последнем определено векторное поле, сопоставляющее каждой точке w выходящий из нее вектор $f(w)$ с компонентами

$$(f_1(w_1, \ldots, w_m), \ldots, f_m(w_1, \ldots, w_m)). \qquad (2)$$

Дифференциальные уравнения (1), к-рые с помощью введенных обозначений можно сокращенно записать в виде

$$\dot{w} = f(w), \qquad (3)$$

означают, что в каждый момент времени векторная скорость движения фазовой точки (или, как часто говорят, вектор фазовой скорости; не путать с употреблением того же термина в оптике и вообще при рассмотрении различных волновых процессов) равна вектору $f(w)$, исходящему из той точки w фазового пространства, где в данный момент находится движущаяся фазовая точка. В этом состоит так наз. кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений (1).

Напр., состояние частицы без внутренних степеней свободы (*материальной точки*), движущейся в потенциальном поле с потенциалом $U(x_1, x_2, x_3)$, характеризуется ее положением $x = (x_1, x_2, x_3)$ и скоростью $\dot{x}$; вместо последней можно использовать импульс $p = m\dot{x}$, где m — масса частицы. Закон движения можно записать в виде

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = -\operatorname{grad} U(x). \qquad (4)$$

Формулы (4) представляют собой сокращенную запись системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Фазовым пространством здесь служит 6-мерное евклидово пространство, шесть компонент вектора фазовой скорости суть компоненты обычной скорости и силы, а проекция фазовой траектории на пространство x_i (параллельно пространству импульсов) есть траектория частицы в обычном смысле слова.

В ряде случаев оказывается, что невозможно установить такое соответствие между всеми состояниями Д. с. и точками евклидова пространства, к-рое обладало бы желаемыми свойствами, однако такое соответствие можно установить локально, то есть для состояний, к-рые достаточно близки друг к другу. Сохраняя термин «фазовое пространство» для совокупности всех состояний Д. с., можно сказать, что в общем случае фазовое пространство является не евклидовым пространством, а нек-рым дифференцируемым многообразием W^m. Локально, то есть в любой карте (локальной системе координат) многообразия W^m, движение Д. с. описывается системой дифференциальных уравнений вида (1). Глобальное же (то есть пригодное для всех состояний Д. с.) и инвариантное (то есть не зависящее от выбора карты) описание движения дается уравнением (3), в к-ром f является заданным W^m векторным полем, сопоставляющим каждой точке w вектор $f(w)$, лежащий в касательном пространстве к многообразию в этой точке; уравнение (3) означает, что в процессе движения фазовая точка, совпадающая в данный момент времени с точкой $w \in W^m$, имеет в этот момент скорость $f(w)$. В локальных координатах вектор $f(w)$ представляется посредством своих компонент (2), и (3) сводится к (1).

Даже во многих случаях, когда фазовое пространство является евклидовым, часть движений рассматриваемой Д. с. может описываться посредством векторного поля на нек-ром инвариантном многообразии W, то есть подмногообразии фазового пространства, обладающем тем свойством, что траектория, проходящая через какую-нибудь точку $w \in W$, целиком лежит в W. Так, уже в предыдущем примере, если ограничиться движениями с определенным значением энергии E, нужно рассматривать систему (4) не во всем 6-мерном евклидовом пространстве переменных (x, p), а на его 5-мерном подмногообразии, выделяемом уравнением

$$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E,$$

где $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Инвариантность этого многообразия отражает тот факт, что при движении частицы в потенциальном поле ее энергия сохраняется, то есть $p^2/2m + U(x)$ является первым интегралом системы (4) (так наз. интеграл энергии). Много аналогичных примеров связано с *циклическими координатами*.

Примером Д. с. с неевклидовым фазовым пространством является твердое тело с неподвижной точкой O. Если ввести две ортогональные системы координат с началом в O — одну неподвижную, а другую жестко связанную с телом, то очевидно, что положение твердого тела будет характеризоваться расположением второй системы координат относительно первой, то есть ортогональной матрицей 3-го порядка с определителем 1 (или каким-нибудь эквивалентным способом). Поэтому совокупность всевозможных положений данной механич. системы (или, как говорят, ее конфигурационное пространство) есть специальная ортогональная группа 3-го порядка $SO(3)$. Фазовым же пространством W^6 является *касательное расслоение* группы $SO(3)$, ибо скорость изменения положения характеризуется касательным вектором к $SO(3)$. В качестве локальных координат в $SO(3)$ (выбор таковых автоматически определяет и нек-рые локальные координаты в W^6) обычно принимают углы Эйлера; тогда уравнения движения записываются как уравнения Эйлера (движения твердого тела).

Изложенная выше кинематич. интерпретация автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) [или картина движения фазовых точек в фазовом многообразии согласно уравнению (3)] никак не связана с тем, описывают ли эти уравнения какую-либо механич. систему. Поэтому термин «Д. с.» стал применяться в более широком смысле, означая произвольную физич. (скажем, радиотехнич.) систему, описываемую дифференциальными уравнениями вида (1) или (3), а затем — и просто систему дифференциальных уравнений такого вида, безотносительно к ее происхождению. Среди всех Д. с. в этом расширенном смысле слова Д. с. механики выделяются нек-рыми специфич. свойствами; большинство из них относится к специальному классу *гамильтоновых систем*. (Однако в механике рассматриваются и системы, не входящие в этот класс,— таково, напр., большинство *неголономных систем*. В то же время гамильтоновы системы встречаются и в ряде вопросов физики.)

В этом смысле понятие Д. с. эквивалентно понятию автономной системы дифференциальных уравнений вида (1) или (3). Однако практически о Д. с. говорят тогда, когда

речь идет о качественной картине поведения всех траекторий во всем фазовом пространстве (глобальная теория) или по крайней мере в нек-рой его части (локальная теория); в теории Д. с. особенно большое внимание уделяется поведению фазовых траекторий при неограниченном возрастании времени. Из отдельных же траекторий в теории Д. с. интересуются обычно теми, свойства к-рых могут в значительной степени влиять на качественную картину, хотя бы локальную.

Для системы двух уравнений вида (1) ($m=2$) кинематич. интерпретация дает весьма наглядный и эффективный способ исследования, поскольку векторное поле $f(w)$ и фазовые траектории могут быть практически изображены на фазовой плоскости. Уже в случае трех уравнений ($m=3$) пришлось бы производить соответствующие построения в 3-мерном пространстве, что довольно затруднительно, а при $m>3$ подобные практич. возможности вообще отпадают. Поэтому при $m\geqslant 3$ (а в ряде случаев и при $m=2$) роль кинематич. интерпретации состоит в использовании при исследовании дифференциальных уравнений геометрич. понятий, методов и языка, в той или иной степени обобщающих привычные из повседневной жизни геометрич. представления.

Уже сравнительно слабые предположения о векторном поле $f(w)$ (напр., его дифференцируемость) гарантирует то, что для каждой точки $w_0\in W^m$ существует ровно одно решение $w(t)$ уравнения (3), имеющее w_0 своим начальным значением: $w(0)=w_0$. Физически это соответствует тому, что при заданном законе движения (3) состояние системы в любой момент времени полностью определяется ее начальным состоянием. Вообще говоря, это решение может быть определено не для всех t, а лишь на нек-ром отрезке времени. В глобальной теории Д. с. делается дополнительное предположение, что при любом начальном значении соответствующее решение определено при всех t, тогда как в локальных вопросах обычно нецелесообразно делать какие-либо предположения о дальнейшем поведении тех траекторий, к-рые покидают рассматриваемую область фазового пространства.

При выполнении указанного предположения, если каждому $w_0\in W^m$ сопоставить то состояние, куда перейдет за время t фазовая точка, движущаяся согласно (3) и вышедшая при $t=0$ из w_0, то получится нек-рое отображение S_t фазового пространства W^m в себя:

$$S_t w_0 = w(t),$$

где $w(t)$ – решение (3) и $w(0)=w_0$. Отображения S_t образуют непрерывную однопараметрич. группу *диффеоморфизмов* фазового многообразия W^m [групповое свойство $S_tS_s=S_{t+s}$ является следствием автономности системы (3)]. В порядке иллюстрации в литературе нередко проводят аналогию с известным из повседневной жизни и ранее всего изученным в науке примером, где возникает подобное семейство преобразований пространства,– стационарным течением жидкости или газа: за время t частица жидкости перетекает из точки w_0 в S_tw_0. (Впрочем, эта аналогия довольно поверхностна, ибо воображаемая «фазовая жидкость», «текущая» в фазовом пространстве, отличается от реальных сплошных сред отсутствием взаимодействия между соседними частицами.) В связи с этим в качестве синонима термина «Д. с.» употребляется термин «поток».

В физич. литературе принято говорить об ансамбле динамических систем. Это означает, что каждому из возможных состояний данной физич. системы (то есть каждой точке фазового пространства) мысленно сопоставляется нек-рая физич. система, описываемая уравнением (3) и находящаяся в этом состоянии; полученную совокупность однотипных систем (никак не взаимодействующих друг с другом), различающихся только состояниями, к-рыми они обладают в данный момент, и называют «ансамблем». На этом языке преобразованиям S_t фазового пространства соответствует эволюция «ансамбля», заключающаяся в изменении состояния входящих в него систем.

При разработке глобальных аспектов теории Д. с. понятие Д. с. подверглось дальнейшему обобщению. В наиболее широком смысле под динамической системой понимают произвольное действие группы (или даже полугруппы) G на нек-ром множестве W, именуемом фазовым пространством. Это значит, что для любого $g\in G$ определено отображение S_g: $W\to W$, причем $S_{g_1}S_{g_2}=S_{g_1g_2}$, и если e – единица G, то S_e – тождественное преобразование (то есть $S_e(w)=w$ для всех w). Совокупность точек $S_g(w_0)$, где w_0 фиксировано, а g пробегает G, называется траекторией (или орбитой), проходящей через точку w_0, или, короче, траекторией этой точки. Группа G обычно считается топологич. группой, фазовое пространство – топологич. пространством, или пространством с мерой, а отображение

$$G\times W\to W,\ (g,\ w)\to S_g(w) \qquad (5)$$

предполагается, соответственно, непрерывным или измеримым, причем в последнем случае обычно предполагается, что отображения S_g сохраняют меру (то есть прообраз измеримого подмножества фазового пространства измерим и имеет ту же меру). Соответствующие направления в теории Д. с. называются топологической динамикой (см. [6], [11]) и эргодической теорией (см. [4], [5], [7], [12]). Если G – группа Ли, W – гладкое многообразие, а отображение (5) гладкое, то говорят о гладкой динамической системе.

Впрочем, во всех трех направлениях основными являются случаи, когда G – либо группа $\mathbb{R}$ действительных чисел, и тогда Д. с. называют потоком (хотя иногда этот термин употребляют как синоним термина «Д. с.» в наиболее общем его значении), либо G – группа $\mathbb{Z}$ целых чисел, и тогда для таких Д. с. был предложен термин каскад (говорят также о динамической системе с дискретным временем, но этот термин может означать также и только то, что в G берется дискретная топология). Гладкий поток, для к-рого отображение (5) – класса C^2, определяется гладким векторным полем

$$f(w)=\frac{d}{dt}S_t(w)\Big|_{t=0}$$

– при изменении t точка $w=S_t(w_0)$ движется согласно (3). В случае каскада отображения S_n получаются итерированием преобразования S_1 и обратного к нему (вариант: итерированием одного только отображения S_1); для гладкого каскада все S_n суть диффеоморфизмы.

Среди названных трех направлений в теории Д. с. топологич. динамика имеет ярко выраженный теоретикомножественный характер, а ее роль вначале была как бы вспомогательной. Дело в том, что обсуждение ряда понятий (неблуждающая точка, предельное множество траекторий, минимальное множество, почти периодичность, дистальность, устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону и др.) и связей между ними, важных для трактовки более конкретных объектов – гладких Д. с.,– целесообразно провести в более абстрактной обстановке, отвлекаясь от задания Д. с. при помощи диффеоморфизма или уравнения (3). Это и делается в топологич. динамике. Позднее она получила значительное развитие, главным образом, в направлении изучения нек-рых минимальных множеств и их расширений (см. [13]–[15]).

Зарождение эргодич. теории связано с классич. (доквантовой) статистич. физикой. При обосновании последней возник вопрос, можно ли, не решая гамильтонову систему дифференциальных уравнений, к-рая описывает движение частиц, образующих рассматриваемое макроскопич. тело, и даже не зная начальные значения для ее решения (что означало бы задание мгновенных положений и скоростей всех этих частиц), указать свойства статистич. характера, проявляющиеся в поведении при $t\to\infty$ всех или почти всех

ее фазовых траекторий. Напр., существует ли при почти всех w предел переменного среднего

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(S_t w)\,dt, \qquad (6)$$

где $g(w)$ есть функция, заданная на фазовом пространстве, и зависит ли этот предел от w? Приведенное выше определение Д. с., принятое в эргодич. теории, является результатом абстрагирования от конкретного происхождения систем статистич. физики, в частности от их гамильтоновой структуры; от последней удерживается лишь одно из ее следствий – сохранение меры при преобразованиях S_t. В данном случае такое абстрагирование служит не только для логич. анализа понятий, но и приводит к значительному увеличению общности теории, позволяя включить в нее разнообразный материал, связанный с теорией вероятностей, функциональным анализом, теорией чисел, топологич. алгеброй. Наличие связей с рядом разделов математики делает содержание эргодич. теории достаточно богатым, чтобы обеспечить ее успешное развитие в качестве самостоятельной научной дисциплины. Наряду с изучением статистики решений при $t\to\infty$, включающим как доказательство существования предела (6) при почти всех w и вывод условий, необходимых при его независимости от w, так и ряд других свойств (напр., перемешивание), большую роль в эргодич. теории играет проблема изоморфизма Д. с., исследование к-рой привело к построению ряда инвариантов Д. с. и выделению нек-рых классов Д. с. с интересными свойствами.

Теория гладких Д. с. (см. [7], [8], [10]) в значительной степени сливается с качественной теорией дифференциальных уравнений, в особенности когда речь идет о конкретно заданной системе (1) или когда (независимо от способа задания изучаемой Д. с.) существенно используются соображения, относящиеся к выписанным в более или менее явном виде дифференциальным уравнениям. Гладкие Д. с. исследуются и локально, и глобально. К числу локальных свойств относится исследование положений равновесия и других упомянутых выше специальных типов траекторий для потоков и их аналогов для каскадов, квазипериодич. движений и инвариантных многообразий для тех и других, а также и нек-рых классов инвариантных множеств. Исследование этих объектов включает в себя их обнаружение и локализацию, а также изучение в их окрестности поведения других траекторий Д. с. При исследовании неподвижных точек каскадов, положений равновесия и периодич. решений потоков применяются как аналитич., так и топологич. методы (см. [2], [3], [9]); для других объектов – только аналитические. Многие из этих методов связаны со следующей постановкой вопроса (или в равной степени применимы при ней): что происходит с потоком или каскадом, имеющим определенные свойства (локальные или глобальные), при малом изменении определяющего его векторного поля или диффеоморфизма? К такому подходу примыкают также и нек-рые из результатов и понятий глобальной теории, в особенности связанные со стремлением выделить такие свойства или классы Д. с., к-рые были бы в нек-ром смысле «типичными». Другие результаты глобального характера относятся к определенным классам Д. с., зачастую возникшим из смежных дисциплин.

В специальном случае потоков на двумерных поверхностях можно получить более или менее удовлетворительную информацию о могущих здесь представиться различных вариантах поведения фазовых траекторий; это особенно относится к системам (1) с $m=2$ (два уравнения) (теория Пуанкаре – Бендиксона, см. [1]–[3], [9]) и потокам без неподвижных точек на торе (см. [2], [9], [10]). Однако при этом остается открытым вопрос, как именно ведут себя траектории той или иной конкретной системы. Большое число работ посвящено исследованию последнего вопроса для различных классов уравнений. Особое положение потоков на двумерных поверхностях связано с тем, что в этом случае траектория локально разбивает фазовое пространство. Поэтому естественное многомерное обобщение соответствующей теории относится не к Д. с.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.–Л., 1949; [2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958, гл. 13–17; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [4] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [5] «Успехи математич. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–172; [6] Gottschalk W. H., Hedlund G. A., Topological dynamics, Providence, 1955; [7] Arnold V. I., Avez A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, P., 1967; [8] Смейлс С., «Успехи математич. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113–85; [9] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [10] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975; [11] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Кишн., 1970; [12] Синай Я. Г., Введение в эргодическую теорию, Ер., 1973; [13] Бронштейн И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Кишн., 1975; [14] Ellis R., Lectures on topological dynamics, N. Y., 1969; [15] Veech W. A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 83, № 5, p. 775–830.

О современном состоянии теории динамич. систем см. обзоры: «Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные исследования. Динамические системы, вып. 1–9», М., 1985–91. *Д. В. Аносов.*

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА с непрерывным временем – см. *Поток.*

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА с чисто точечным спектром – важный для эргодической теории класс *динамических систем.* Пусть $\{S^t\}$ – эргодическая (см. *Эргодичность*) однопараметрич. группа преобразований вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\{U^t\}$ – сопряженная с ней группа унитарных операторов. Д. с. с чисто точечным спектром определяется тем, что $\{U^t\}$ имеет полную систему *собственных функций.* В этом случае каждое *собственное значение* имеет кратность 1 и их множество образует абелеву группу. Такие Д. с. играют важную роль в теории интегрируемых Д. с. Так, в случае интегрируемости гамильтоновой системы в смысле Арнольда–Лиувилля на почти каждой эргодич. компоненте возникает Д. с. с чисто точечным спектром. Для рассматриваемых Д. с. спектр образует полную систему метрич. инвариантов (см. *Изоморфизм* динамических систем).

Простейший пример стационарного случайного процесса, порождающего Д. с. с чисто точечным спектром, имеет вид

$$X(t)=\sum a_s\cos(\omega_s t+\varphi_s)+\sum b_s\sin(\omega_s t+\varphi_s),$$

где a_s, b_s – постоянные, а фазы φ_s случайны. Условие стационарности и эргодичности накладывает жесткие ограничения на совместные распределения фаз (см. [2]).

Лит.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981. *Е. И. Динабург.*

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки, *Эйлера уравнения* в механике твердого тела.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ДАЛЬНИЙ ПОРЯДОК – свидетельство существования меняющейся во времени корреляции между значениями некоторой физической характеристики неравновесной многочастичной системы в разных точках, удаленных друг от друга на расстояния гораздо большие среднего межчастичного. Д. д. п. обобщает понятие дальнего порядка (см. *Дальний и ближний порядок*) для равновесных или стационарных систем на неравновесные нестационарные системы. В том случае, когда для неравновесной системы имеет смысл термодинамич. предельный переход, при к-ром число частиц N и объем системы V стремятся к бесконечности, так что плотность N/V стремится к константе, тогда можно различать динамический бесконечно дальний порядок и динамический квазидальний порядок. Первый отвечает ситуации, при к-рой корреляция сохраняется на сколь угодно больших расстояниях, а второй – ситуации, когда корреля-

ция существует между точками, удаленными друг от друга на конечное расстояние, значительно превышающее среднее межчастичное, однако для бесконечно удаленных друг от друга точек корреляция отсутствует. В случае конечных неравновесных систем Д. д. п. по необходимости имеет смысл квазидального порядка.

Количественно Д. д. п. характеризуется зависящим от времени параметром порядка, динамич. параметром порядка. Роль последнего может играть любая наблюдаемая величина, по к-рой удобно классифицировать качественно различные состояния системы. Напр., при переходе неравновесного ферромагнетика в парамагнетик средняя намагниченность является функцией времени и служит динамич. параметром порядка. При превращении неравновесного сегнетоэлектрика в параэлектрик Д. д. п. характеризуется зависящей от времени средней поляризацией образца. В этих примерах динамич. параметр порядка представляет собой естественное обобщение равновесного параметра порядка. В других случаях такой простой аналогии может и не быть.

При рассмотрении коллективных процессов в системе N двухуровневых излучателей, взаимодействующих с квантованным полем, в качестве динамич. параметра порядка, служащего мерой установления корреляций в системе, можно выбрать динамич. поляризацию

$$P(t)=\left[\sum_{i\neq j}^{N}\left\langle \boldsymbol{p}_i^{+}(t)\,\boldsymbol{p}_j^{-}(t)\right\rangle\right]^{1/2},$$

в к-рой $\boldsymbol{p}_i^{\pm}(t)\equiv \boldsymbol{d}_i\sigma_i^{\pm}(t)$, где $\boldsymbol{d}_i$ – дипольный момент перехода для i-го излучателя, $\sigma_i^{\pm}(t)$ – представление Гейзенберга для лестничных операторов $\sigma_i^{\pm}=\frac{1}{2}(\sigma_i^{x}\pm i\sigma_i^{y})$, где σ_i^{α}, $\alpha=x, y, z$, – матрицы Паули, $\langle\hat{A}(t)\rangle$ – статистич. среднее от гейзенберговского оператора $\hat{A}(t)$ с матрицей плотности начального состояния. Динамич. поляризация $P(t)$ связана с интенсивностью когерентного излучения $I_{\mathrm{coh}}(t)$. Для одномодовой *Дикке модели*, состоящей из одинаковых излучателей с частотой ω, эта связь достаточно проста:

$$P(t)=\left[\frac{3c^3}{4\omega^4}I_{\mathrm{coh}}(t)\right]^{1/2}.$$

Для многомодовых моделей такой простой связи может и не быть. За динамич. параметр порядка можно взять и непосредственно интенсивность когерентного излучения, или безразмерную величину – коэффициент когерентности

$$C_{\mathrm{coh}}(t)\equiv I_{\mathrm{coh}}(t)/I_{\mathrm{inc}}(t),$$

являющийся отношением интенсивности когерентного излучения к интенсивности некогерентного излучения.

В случае одномодовой модели Дикке решение уравнений движения для *Блоха вектора* в квазиклассич. приближении при полностью инвертированной в начальный момент времени системе излучателей дает интенсивность когерентного излучения

$$I_{\mathrm{coh}}(t)=\frac{\hbar\omega}{4\tau_1}N^2\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{t-t_0}{2\tau_N}\right),$$

здесь τ_1 – время спонтанного распада одного уединенного излучателя, τ_1^{-1} равно коэффициенту Эйнштейна для спонтанного распада, τ_N – время спонтанного распада коллектива из N излучателей, t_0 – время задержки, через к-рое система излучателей становится скоррелированной,

$$\tau_1=\frac{3\hbar c^3}{4d^2\omega^3},\quad \tau_N=\frac{\tau_1}{N},\quad t_0=\frac{\tau_1\ln N}{N},$$

где $d\equiv|\boldsymbol{d}_i|$. Интенсивность $I_{\mathrm{coh}}(t)$ имеет зависимость N^2 от числа излучателей, характерную для сверхизлучения. Динамич. поляризация

$$P(t)=\frac{d}{2}N\,\mathrm{sech}\left(\frac{t-t_0}{2\tau_N}\right)$$

имеет форму острого пика шириной τ_N с максимумом в точке t_0. Резкое возрастание динамич. параметра порядка является отражением того, что излучатели в системе скоррелированы, а их излучение когерентно. Хотя когерентность и представляет собой качественно новое свойство, однако говорить при этом о фазовом переходе, вообще говоря, нельзя по двум причинам. Во-первых, в той или иной степени когерентность всегда имеет место для практически любого коллектива излучателей. Во-вторых, для того чтобы нек-рый аналог термодинамич. фазы мог существовать в течение времени порядка τ_N, необходимо, чтобы это время было гораздо больше времени установления локального равновесия для данной системы N излучателей $\tau_{\mathrm{loc}}\sim Na/c$, где a – среднее расстояние между излучателями. Так как $\tau_N\sim 1/N$, а $\tau_{\mathrm{loc}}\sim N$, то неравенство $\tau_N\gg\tau_{\mathrm{loc}}$ не может выполняться для произвольных N.

Таким образом, появление в системе Д. д. п. не всегда можно связать с фазовым переходом. Это обстоятельство служит важным отличием Д. д. п. от бесконечно дальнего порядка, проявляющегося при равновесных фазовых переходах, а также при неравновесных фазовых переходах, когда система находится хотя и в неравновесном, но стационарном состоянии.

Лит.: [1] Шумовский А. С., Юкалов В. И., Фазовые состояния и переходы, Дубна, 1985; [2] Кудрявцев И. К., Химические нестабильности, М., 1987; [3] Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А., Кооперативные явления в оптике, М., 1988.

В. И. Юкалов.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ – см. *Бернулли уравнение.*

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Марковское отображение.*

ДИНАМИЧЕСКОЕ ЧИСЛО Ричардсона – см. *Ричардсона число.*

ДИОН – гипотетическая частица, обладающая как магнитным, так и электрическим зарядом; иными словами, Д.– это электрически заряженный магнитный *монополь.* Д. соответствуют специальным топологически нетривиальным решениям уравнений неабелевых *калибровочных полей.*

ДИПОЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – приближение, используемое при рассмотрении излучателей (атомов, ядер, молекул) с характерными размерами, гораздо меньшими длины волны излучения. При этом энергия взаимодействия отдельного излучателя с дипольным моментом перехода $\boldsymbol{d}$ (магнитным моментом μ) и электрич. поля $\boldsymbol{E}$ (магнитного поля $\boldsymbol{H}$) записывается в форме $-\boldsymbol{dE}(-\mu\boldsymbol{H})$.

Лит.: [1] Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А., Кооперативные явления в оптике, М., 1988.

В. И. Юкалов.

ДИПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Мультиполя потенциал.*

ДИРАКА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ – *обобщенная функция* $\delta(x)$, действующая по правилу

$$(\delta,\Phi)=\Phi(0),$$

где $\Phi(x)$ – основная функция. Введена П. Дираком (P. Dirac) в кон. 20-х гг. 20 в. *В. В. Жаринов.*

ДИРАКА МАТРИЦА – (4×4)-матрица, действующая на спиновую переменную 4-компонентного спинора (биспинора) Дирака (ψ). Д. м. входят в квантовое волновое уравнение для релятивистской частицы со спином 1/2, а также в гамильтонианы взаимодействия полей, в случае если во взаимодействии участвуют частицы со спином 1/2 (напр., в гамильтониан слабого взаимодействия). Д. м. α_k ($k=1, 2, 3$) и β представляют собой эрмитовы матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_k\alpha_l+\alpha_l\alpha_k=2\delta_{kl},\\&\alpha_k\beta+\beta\alpha_k=0,\quad \beta^2=1\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

(δ_{kl} – символ Кронекера). При вычислении сечений процессов с участием частиц со спином 1/2 явный вид Д. м. не нужен, достаточно использовать соотношения (1). Однако при решении *Дирака уравнения* удобно пользоваться определенным представлением Д. м. Часто применяют представление, в к-ром матрица β диагональна (представление Ди-

рака–Паули). В этом представлении матрицы α_k и β имеют вид:

$$\alpha_k = \begin{Vmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{Vmatrix}, \quad \beta = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где σ_k – *Паули матрицы*, а I – единичная (2×2)-матрица. Форма уравнения Дирака, записанного в ковариантном виде, зависит от выбора метрики. В метрике Паули $[x=(\boldsymbol{x}, x_4=ix_0)$, $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ – пространственная координата, x_0 – время; применяется система единиц, в к-рой $\hbar=c=1]$ уравнение Дирака для свободной частицы массы m имеет вид:

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = 0, \quad \mu = 1,2,3,4 \tag{3}$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам – в данном случае по μ – производится суммирование), где

$$\gamma_k = i\alpha_k\beta = -i\beta\alpha_k, \ \gamma_4 = \beta \tag{4}$$

– эрмитовы матрицы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Важную роль в физике частиц играет матрица

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \tag{6}$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\gamma_\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma_\mu = 0, \ \gamma_5^2 = 1, \ \gamma_5^+ = \gamma_5 \tag{7}$$

($^+$ означает эрмитово сопряжение). В представлении Дирака–Паули матрица γ_5 имеет вид:

$$\gamma_5 = \begin{Vmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Путем перемножения матриц γ можно построить следующие 16 независимых Д. м.:

$$1; \ \gamma_\mu; \ \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu); \ \gamma_\mu\gamma_5; \ \gamma_5. \tag{9}$$

Любая (4×4)-матрица может быть разложена по полной системе матриц (9). Между Д. м. имеет место ряд соотношений, часто использующихся в приложениях, напр.:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu &= \delta_{\mu\rho}\gamma_\nu + \delta_{\mu\nu}\gamma_\rho + \delta_{\rho\nu}\gamma_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\gamma_\tau\gamma_5, \\ \delta_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}\sigma_{\rho\tau}\gamma_5. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Здесь $\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}$ – абсолютно антисимметричный (относительно перестановки любых двух индексов) тензор, $\varepsilon_{1234}=1$.

Если метрика выбрана так, что скалярное произведение 4-мерных векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равно:

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^0\boldsymbol{B}^0 - \boldsymbol{AB} = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu, \tag{11}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

[то есть $x=(x^0, \boldsymbol{x})$, x^0 – время, $\boldsymbol{x}(x^1, x^2, x^3)$], где $g_{00}=1$, $g_{ik}=-\delta_{ik}$, $g_{0i}=g_{i0}=0$, то уравнение Дирака имеет вид:

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi = 0. \tag{12}$$

Матрицы γ^μ связаны с матрицами α и β соотношениями

$$\gamma^0 = \beta, \ \gamma^k = \beta\alpha_k, \ \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{13}$$

и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{14}$$

Из (13) видно, что γ^0 – эрмитова матрица, γ^k – антиэрмитовы матрицы.

Лит.: [1] Паули В., Общие принципы волновой механики, пер. с нем., М.–Л., 1947; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [3] Бьеркен Д. Д., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1978.

С. М. Биленький.

ДИРАКА МОНОПОЛЬ – см. *Монополь.*

ДИРАКА ПОЛЕ – физическое поле частиц со спином 1/2 (электронов, мюонов, кварков и др.). При *Лоренца преобразованиях* и поворотах в пространстве преобразуется как 4-компонентный спинор (биспинор). В квантовой теории поля во *взаимодействия представлении* оператор Д. п. $\psi(x)$ удовлетворяет *Дирака уравнению* для свободной частицы. Лагранжиан свободного Д. п. имеет вид (в системе единиц $\hbar=c=1$):

$$L = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi, \tag{1}$$

где по повторяющемуся индексу $\mu=0, 1, 2, 3$ производится суммирование; m – масса спинорной частицы, γ^μ – *Дирака матрицы*, x^μ – 4-мерные координаты, черта над ψ означает дираковское сопряжение: $\bar{\psi}=\psi^+\gamma^0$ (крестом помечено эрмитово сопряжение). 4-мерный вектор энергии-импульса (4-импульса)

$$P_\mu = i\int \bar{\psi}\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi\, dx \tag{2}$$

является сохраняющейся величиной. Здесь P_0 – энергия, $\boldsymbol{P}$ – импульс Д. п. [интегрирование в (2) проводится по всему пространству].

Если ψ – неэрмитов оператор, то Д. п. описывает заряженные частицы, при этом оператор заряда дается выражением

$$Q = e\int \bar{\psi}\gamma^0\psi\, d\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

где e – заряд частицы. Сохранение заряда поля является следствием инвариантности относительно глобальных *калибровочных преобразований.*

Разложение оператора $\psi(x)$ по полной системе решений уравнения Дирака с определенными импульсами имеет вид:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{\sqrt{2p_0}}[a_\lambda(p)e^{-ipx}u_\lambda(p) + \\ + \tilde{a}_\lambda^+(p)e^{ipx}u_\lambda(-p)]\,d\boldsymbol{p}. \tag{4}$$

Здесь $a_\lambda(p)$ и $\tilde{a}_\lambda^+(p)$ – операторы уничтожения частицы и рождения античастицы с 4-импульсом $p=(\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}, \boldsymbol{p})$ и спиральностью $\lambda=\pm 1/2$, а спиноры $u_\lambda(p)$, $u_\lambda(-p)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m)\, u_\lambda(p) &= 0, \\ (\gamma^\mu p_\mu + m)\, u_\lambda(-p) &= 0, \\ (\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \gamma^\alpha p^\alpha, \ \alpha &= 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Д. п. квантуется так, чтобы для системы частиц выполнялся принцип Паули. В соответствии с этим принципом операторы рождения и уничтожения удовлетворяют перестановочным соотношениям антикоммутации

$$\left.\begin{aligned} \left[a_\lambda(p), a_{\lambda'}^+(p')\right]_+ &= \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'), \\ \left[\tilde{a}_\lambda(p), \tilde{a}_{\lambda'}^+(p')\right]_+ &= \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'), \\ \left[a_\lambda(p), a_{\lambda'}(p')\right]_+ &= \left[\tilde{a}_\lambda(p), \tilde{a}_{\lambda'}(p')\right]_+ = \\ &= [a_\lambda(p), \tilde{a}_{\lambda'}(p')]_+ = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Операторы 4-импульса P_μ и заряда Q Д. п. следующим образом выражаются через операторы рождения и уничтожения:

$$\left.\begin{aligned} P_\mu &= \int\left[a_\lambda^+(p)a_\lambda(p) + \tilde{a}_\lambda^+(p)\tilde{a}_\lambda(p)\right]p_\mu\, d\boldsymbol{p}, \\ Q &= e\int\left[a_\lambda^+(p)a_\lambda(p) - \tilde{a}_\lambda^+(p)\tilde{a}_\lambda(p)\right]d\boldsymbol{p} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(операторы $a_\lambda^+(p)a_\lambda(p)$ и $\tilde{a}_\lambda^+(p)\tilde{a}_\lambda(p)$ являются соответственно операторами числа частиц и числа античастиц в состоянии с 4-импульсом p и спиральностью λ).

Полная система *векторов состояния* строится путем дей-

ствия операторов a_λ^+ и $\tilde{a}_\lambda^+$ на вакуумное состояние $|0\rangle$. Так, $a_\lambda^+(p)|0\rangle$ и $\tilde{a}_\lambda^+(p)|0\rangle$ представляют собой векторы одночастичного состояния (соответственно) частицы и античастицы с импульсом p и спиральностью λ, а вектор

$$a_{\lambda_1}^+(p_1)a_{\lambda_2}^+(p_2)\dots a_{\lambda_n}^+(p_n)|0\rangle \qquad (8)$$

описывает состояние n частиц с импульсами и спиральностями $p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2; \dots; p_n, \lambda_n$. В соответствии с *Ферми–Дирака статистикой* вектор (8) антисимметричен относительно перестановки любой пары переменных p_i, λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Лит.: [1] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Бьёркен Д.Д., Дрелл С.Д., Релятивистская квантовая теория, пер. с англ., т. 2, М., 1978. *С. М. Биленький.*

ДИРАКА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – см. *Взаимодействия представление.*

ДИРАКА СТРУНА – см. *Монополь.*

ДИРАКА УРАВНЕНИЕ – квантовое (волновое) уравнение для релятивистской частицы со спином 1/2 (электрона, мюона, кварка и других частиц). Получено (для электрона) в 1928 П. Дираком (P. Dirac) из следующих требований:

1) уравнение для волновой функции частицы $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ ($\boldsymbol{x}$ – пространственные координаты, t – время) должно быть линейным для того, чтобы выполнялся принцип суперпозиции состояний;

2) в уравнение должна входить первая производная функции $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ по времени с тем, чтобы задание ψ в начальный момент определяло волновую функцию в любой последующий момент времени;

3) уравнение должно быть инвариантным относительно *Лоренца преобразований*, то есть иметь один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета;

4) величина $\psi^+(\boldsymbol{x}, t)\psi(\boldsymbol{x}, t)$ (где $^+$ означает эрмитово сопряжение) должна иметь физич. смысл плотности вероятности нахождения частицы в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени t;

5) уравнение для свободной частицы (массы m) должно быть построено так, чтобы состояние с импульсом $\boldsymbol{p}$ и энергией $\mathscr{E}$ было его решением только в случае, если выполняется релятивистское соотношение $\mathscr{E}^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ (используется система единиц $\hbar = c = 1$).

Всем этим требованиям удовлетворяет система уравнений для функции $\psi(x)$, к-рая имеет четыре компоненты и записывается в виде столбца:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$

(x – точка пространства-времени). При преобразованиях Лоренца и пространственных поворотах они преобразуются как компоненты 4-компонентного спинора (биспинора).

Ковариантный вид Д. у. зависит от выбора метрики пространства-времени. Если метрика выбрана так, что $x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2$, где $g_{\mu\nu}$ – метрич. тензор ($x^0 = t$), то уравнение имеет вид

$$i\gamma^\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0, \qquad (1)$$

где γ^μ – *Дирака матрицы*, $\mu = 0, 1, 2, 3$ (по повторяющемуся индексу предполагается суммирование). Сопряженный биспинор $\overline{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\overline{\psi}(x)}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + \overline{\psi}(x)m = 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) для 4-мерного вектора тока $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ вытекает уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \qquad (3)$$

Временна́я компонента вектора тока равна плотности вероятности нахождения частицы в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени x^0, а его пространственные компоненты являются компонентами 3-мерного вектора потока вероятности.

При данном импульсе $\boldsymbol{p}$ Д. у. имеет четыре линейно независимых решения: два решения с положительной энергией $\mathscr{E} = p_0$ ($p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$) и два решения с отрицательной энергией $\mathscr{E} = -p_0$. Они могут быть записаны (соответственно) в следующем ковариантном виде:

$$\psi_{\pm p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}u(\pm p)e^{\mp ipx}, \qquad \textbf{(4)}$$

где спиноры $u(p)$, $u(-p)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\hat{p} \mp m)u(\pm p) = 0 \qquad (5)$$

($\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \gamma^\alpha p^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$).

Для сопряженных спиноров имеем:

$$\overline{u}(\pm p)(\hat{p} \mp m) = 0. \qquad (6)$$

Для каждой из пар спиноров в качестве независимых могут быть выбраны решения с определенной спиральностью (проекцией спина на направление импульса) $\lambda = \pm 1/2$. В представлении Дирака–Паули (в к-ром γ^0 диагональна) эти решения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u_\lambda(p) &= N\begin{pmatrix} \nu_\lambda \\ \dfrac{2\lambda|\boldsymbol{p}|}{p_0+m}\nu_\lambda \end{pmatrix}; \quad \mathscr{E} = p_0, \quad \lambda = \pm 1/2, \\ u_\lambda(-p) &= N\begin{pmatrix} \dfrac{-2\lambda|\boldsymbol{p}|}{p_0+m}\nu_\lambda \\ \nu_\lambda \end{pmatrix}; \quad \mathscr{E} = -p_0, \quad \lambda = \pm 1/2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Здесь ν_λ – 2-компонентный спинор, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}\nu_\lambda = \lambda\nu_\lambda, \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – *Паули матрицы*, а множитель N определяется нормировкой спинора $u(\pm p)$. Используются следующие нормировки (для каждого значения λ):

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ (u(\pm p))^+u(\pm p) = 1, \quad N = \sqrt{(p_0+m)/2p_0}, \\ &\text{б)}\ \overline{u}(\pm p)u(\pm p) = \pm 1, \quad N = \sqrt{(p_0+m)/2m}, \\ &\text{в)}\ \overline{u}(\pm p)\gamma^0u(\pm p) = 2p_0, \quad N = \sqrt{p_0+m}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

при этом $\nu^+\nu = 1$.

Для $m = 0$ решения свободного Д. у. являются собственными функциями матрицы $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$:

$$\gamma^5 u_\lambda(\pm p) = \mp 2\lambda u_\lambda(\pm p). \qquad (10)$$

В матричные элементы процессов со слабым взаимодействием спиноры $u_\lambda(p)$, описывающие нейтрино, входят в виде $\frac{1}{2}(1+\gamma^5)u_\lambda(p)$. Если масса нейтрино равна нулю, то

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)u_\lambda(p) = 0 \quad \text{при } \lambda = 1/2,$$

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)u_\lambda(p) = u_\lambda(p) \quad \text{при } \lambda = -1/2,$$

то есть спиральность нейтрино равна $-1/2$. Частице с отрицательной энергией соответствует антинейтрино (см. ниже), его спиральность равна $+1/2$.

В нерелятивистском случае $\beta = |\boldsymbol{p}|/p_0 \ll 1$ (в системе СГС $\beta = v/c$, где v – скорость частицы), и спиноры $u_\lambda(\pm p)$ с точностью до линейных по β членов даются выражениями:

$$u_\lambda(p) = N\begin{pmatrix} \nu_\lambda \\ \beta\lambda\nu_\lambda \end{pmatrix}, \quad u_\lambda(-p) = N\begin{pmatrix} -\beta\lambda\nu_\lambda \\ \nu_\lambda \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что для нерелятивистской частицы «нижние» («верхние») компоненты решений Д. у. с положительной (отрицательной) энергией много меньше «верхних» («нижних») компонент.

Приведем следующие полезные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(\pm p)\gamma^{\mu}u(\pm p) &= \pm(p^{\mu}/m)\bar{u}(\pm p)u(\pm p),\\ u(\pm p)\gamma^{5}u(\pm p) &= 0,\\ p_{\mu}\bar{u}(\pm p)\gamma^{\mu}\gamma^{5}u(\pm p) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Для вычисления сечения процессов с участием релятивистских частиц со спином 1/2 необходимо знать суммы:

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}(p)\bar{u}_{\lambda}(p) \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda} u_{\lambda}(-p)\bar{u}_{\lambda}(-p).$$

Если спиноры $u_{\lambda}(\pm p)$ нормированы условиями

$$\bar{u}_{\lambda}(\pm p)\,\gamma^{0}u_{\lambda}(\pm p) = 2p_0,$$

то

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}(\pm p)\bar{u}_{\lambda}(\pm p) = \hat{p} \pm m. \qquad (13)$$

Решения Д. у. с отрицательной полной энергией – несомненная трудность квантовой механики релятивистской частицы. Для ее устранения П. Дирак предположил, что состоянием с минимальной энергией (вакуумным состоянием) является состояние, в к-ром все уровни с отрицательной энергией заполнены. Если из этого заполненного «моря» состояний с отрицательной энергией вырвать одно состояние (образовать так наз. дырку Дирака), то полученное при этом состояние будет иметь положительную энергию. Масса частицы, описываемой этим состоянием, равна массе электрона, а ее заряд противоположен заряду электрона. Такая частица – античастица по отношению к электрону – была открыта К. Андерсоном (C. Anderson) в 1932 и называется позитроном.

Последовательная реализация идеи Дирака о существовании решений с отрицательной энергией требует по существу выхода за рамки одночастичного уравнения для релятивистской частицы и осуществляется только в квантовой теории поля.

Как отмечалось, Д. у. инвариантно относительно преобразований Лоренца

$$(x')^{\mu} = a^{\mu}_{\nu}x^{\nu},$$

где $a^{\mu}_{\nu}a^{\nu}_{\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma}$ (δ^{μ}_{σ} – символ Кронекера). Если записать преобразование спинора в виде

$$\psi'(x') = U\psi(x), \qquad (14)$$

где U – (4×4)-матрица, то из условия инвариантности Д. у. следует, что

$$U^{-1}\gamma^{\mu}U = a^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}. \qquad (15)$$

Сопряженный спинор преобразуется следующим образом:

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\,U^{-1}. \qquad (16)$$

Для преобразований Лоренца

$$(x')^1 = \frac{x^1+\beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (x')^0 = \frac{x^0+\beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (x')^2 = x^2, \quad (x')^3 = x^3$$

матрица U имеет вид

$$U = \exp(\gamma^0\gamma^1\eta/2), \qquad (17)$$

где $\operatorname{th}\eta = \beta$ (β – скорость одной системы относительно другой). Для преобразования из системы покоя частицы в систему, где ее импульс равен $\boldsymbol{p}$, а энергия p_0, имеем:

$$U = \sqrt{\frac{p_0+m}{2m}}\left(1 + i\frac{\gamma^{\alpha}p^{\alpha}\gamma^0}{p_0+m}\right), \quad \alpha = 1,2,3. \qquad (18)$$

При построении лагранжианов взаимодействия в квантовой теории поля широко используются трансформационные свойства величин $\bar{\psi}O^k\chi$, где ψ и χ – биспиноры Дирака (спинорные поля Дирака), а

$$O^k = 1; \quad \gamma^{\mu}; \quad \sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{2i}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}); \quad \gamma^{\mu}\gamma^5; \quad \gamma^5$$

– полная система 16 матриц Дирака. Из (14)–(16) следует, что

$\bar{\psi}\chi$ – скаляр,

$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\chi$ – четырехмерный вектор,

$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\chi$ – тензор второго ранга,

$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\chi$ – псевдовектор,

$\bar{\psi}\gamma^5\chi$ – псевдоскаляр.

Волновое уравнение для релятивистской частицы со спином 1/2 в электромагнитном поле может быть получено из уравнения для свободной частицы заменой

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} \to \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + ieA_{\mu}\right)\psi, \qquad (19)$$

где e – электрич. заряд частицы, а $A_{\mu} = (\varphi, -\boldsymbol{A})$ – четырехмерный потенциал электромагнитного поля (φ – скалярный потенциал, $\boldsymbol{A}$ – векторный). Таким образом, Д. у. для электрона (мюона) в электромагнитном поле имеет вид:

$$i\gamma^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + ieA_{\mu}\right)\psi - m\psi = 0. \qquad (20)$$

Это уравнение инвариантно относительно локальных калибровочных преобразований

$$\left.\begin{aligned} \psi'(x) &= e^{i\Lambda(x)}\psi(x),\\ A'_{\mu}(x) &= A_{\mu}(x) - \frac{1}{e}\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x^{\mu}}, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где $\Lambda(x)$ – произвольная вещественная функция x. В нерелятивистском пределе в первом порядке по β для «верхнего» спинора $\nu_{\lambda}(x)$ из Д. у. (20) вытекает *Паули уравнение*. При этом для магнитного момента электрона автоматически получается правильное значение $e\hbar/2mc$ (в СГС системе единиц). Если учитывать также члены второго порядка по β, то в уравнении для $\nu_{\lambda}(x)$, вытекающем из Д. у. в центральном поле $V(r)$ (r – расстояние до центра), возникает потенциал спин-орбитального взаимодействия:

$$V_{\text{с.-о.}} = \frac{1}{2m^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma L}. \qquad (22)$$

Здесь $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}]$ – оператор орбитального момента. Д. у. в кулоновском поле точечного ядра с зарядом Ze, $V = -Ze^2/r$ может быть решено точно. Для уровней энергии электрона в атоме возникает при этом выражение

$$\mathscr{E}_{nj} = m\left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n-(j+1/2)+\sqrt{(j+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad (23)$$

Квантовое число n принимает целые значения 1, 2, 3, ..., а квантовое число полного момента j – полуцелые такие, что $j+1/2 \leqslant n$ ($\alpha \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры). Если $Z\alpha \ll 1$, то с точностью до членов $(Z\alpha)^4$ из (23) следует:

$$\mathscr{E}_{nj} \approx m\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{n^2}\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\right]\right\}. \qquad (24)$$

Квантовое число n соответствует, таким образом, главному квантовому числу нерелятивистской теории. Уровни энергии в релятивистском случае классифицируются, как и в нерелятивистской теории, путем задания n, j и квантового числа орбитального момента l. В таблице приведены первые четыре уровня:

Обозначение уровня	n	l	j	$\mathscr{E}_{nj}$
$1S_{1/2}$	1	0	1/2	$m\sqrt{1-(Z\alpha)^2}$
$2S_{1/2}$	2	0	1/2	$m\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}{2}}$
$2P_{1/2}$	2	1	1/2	$m\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}{2}}$
$2P_{3/2}$	2	1	3/2	$\frac{m}{2}\sqrt{4-(Z\alpha)^2}$

Разность уровней $2P_{1/2}$ и $2P_{3/2}$ (тонкое расщепление уровней) обусловлена спин-орбитальным взаимодействием (22). Уровни $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$, отличающиеся четностью и обладающие одними и теми же значениями n и j, оказываются в теории Дирака вырожденными. Учет эффектов квантовой электродинамики приводит к тому, что это вырождение снимается, при этом уровень $2S_{1/2}$ лежит выше уровня $2P_{1/2}$. Этот так наз. лэмбовский сдвиг уровней измерен на опыте и находится в блестящем согласии с предсказаниями квантовой электродинамики.

Лит.: [1] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 4 изд., М., 1981; [2] Бьёркен Д. Д., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория, пер. с англ., т. 1–2, М., 1978.

С. М. Биленький.

ДИРАКА УРАВНЕНИЕ; асимптотическое решение – асимптотическое при $h\to 0$ решение задачи Коши для системы уравнений

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = H(-ih\nabla, x, t)\psi, \quad \psi = {}^t(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4), \tag{1}$$

$$H(p,x,t) = c\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\Big(p-\frac{e}{c}A_k(x,t)\Big) + \rho mc^2 + eA_0(x,t), \tag{2}$$

$$x = (x_1,x_2,x_3), \quad p = (p_1,p_2,p_3),$$

где α_k, $k=1, 2, 3$, ρ – матрицы Дирака (см. [1]), $A_k(x, t)$, $A_0(x, t)\in C^\infty(\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^1_t)$ – потенциалы электромагнитного поля, с начальным условием $\psi|_{t=0}=\psi_0(x, h)$, удовлетворяющим принципу соответствия. Последнее означает (см. [2]), что функция $\psi_0(x, h)$ представима либо через канонич. оператор с вещественной фазой, ассоциированной с лагранжевым многообразием Λ^3_0, либо через канонич. оператор с комплексной фазой, ассоциированной с изотропным многообразием Λ^k_0, $0\leqslant k<3$, с комплексным ростком r^3_0 (см. *Изотропное подмногообразие* с комплексным ростком).

Асимптотич. решения уравнения (1) в простейшей ситуации: в первом случае для $\Lambda^3_0=\{(p, x)\in\mathbb{R}^6_{p,x},\ p=\nabla S_0(x)\}$, когда

$$\psi|_{t=0} = e^{\frac{i}{h}S_0(x)}f(x), \tag{3'}$$

и во втором случае для $k=0$, $\Lambda^0_0=\{p=p_0,\ x=x_0\}$, когда

$$\psi|_{t=0} = e^{\frac{i}{h}S_0(x,\xi)}f(x_0), \quad \xi=(p_0,x_0)\in\mathbb{R}^6_{p,x}, \tag{3''}$$

$$S_0(x,\xi) = \langle p_0, x-x_0\rangle + \langle (x-x_0), B_0(x-x_0)\rangle,$$

где B_0 – комплексная симметричная (3×3)-матрица, $\operatorname{Im} B_0>0$. Без ограничения общности можно считать, что B_0 – диагональна, $B_0=\operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3)$, $\operatorname{Im} b_j>0$, $j=1, 2, 3$. В этом случае векторы

$$a_1=(b_1, 0, 0, 1, 0, 0),\ a_2=(0, b_2, 0, 0, 1, 0),$$
$$a_3=(0, 0, b_3, 0, 0, 1) \tag{4}$$

образуют базис на комплексном ростке r^3_0 в точке Λ^0_0.

Пусть $\lambda^\pm(p, x, t)$ – собственные значения постоянной кратности, равной двум, $E_\pm(p, x, t)$ – отвечающие им проекторы матрицы $H(r)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^\pm(p,x,t) = eA_0(x,t)\pm\varepsilon(p,x,t),\\
&\varepsilon(p,x,t) = \Big(c^2\Big(p-\frac{e}{c}A\Big)^2 + m^2c^4\Big)^{1/2},\\
&E_\pm(p,x,t) = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1\pm\frac{1}{\gamma} & \pm\langle\sigma,\beta\rangle\\ \pm\langle\sigma,\beta\rangle & 1\pm\frac{1}{\gamma}\end{Vmatrix},\\
&\gamma=\frac{\varepsilon}{mc^2}, \quad \beta=\frac{c(p-e/cA(x,t))}{\varepsilon(p,x,t)},
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – матрицы Паули, и $\mathcal{U}(p, x, t)$ – унитарная матрица, приводящая H к диагональному виду

$$\mathcal{U}(p,x,t) = (2\gamma(1+\gamma))^{-1}\begin{Vmatrix} 1+\gamma & -\gamma\langle\sigma,\beta\rangle\\ \gamma\langle\sigma,\beta\rangle & 1+\gamma\end{Vmatrix},$$

$$E_\pm\mathcal{U} = \mathcal{U}P_\pm, \quad P_\pm=\frac{1}{2}(1\pm\rho).$$

Начальную вектор-функцию f, входящую в начальные данные Коши, можно представить в виде $f=E_+f+E_-f$. Ниже рассматривается только случай $f=E_+f$, когда соответствующие квазиклассич. решения описывают состояния электрона (в случае $f=E_-f$ – для состояний позитрона формулы аналогичны при замене λ^+ на λ^-).

Уравнения классич. релятивистской механики имеют вид

$$\dot p^+ = -\frac{\partial\lambda^+}{\partial x}(p^+,x^+,t), \quad \dot x^+ = \frac{\partial\lambda^+}{\partial p}(p^+,x^+,t), \tag{6}$$

$$\frac{dS^+}{dt} = \sum_{k=1}^{3}p^+_k\frac{\partial\lambda^+}{\partial p_k} - \lambda^+, \tag{7}$$

$r^+_t(x_0)=(P(t, x_0), X(t, x_0))$, $S^+(x_0, t)$ – решения (6), (7) с начальными данными $x^+(0)=x_0$, $p^+(0)=\nabla S_0(x_0)$, $S^+(0)=S_0(x_0)$ для задачи (1), (3′) и $r^+_t(\xi)=(P(t, \xi), X(t, \xi))$, $\xi=(p_0, x_0)$, $S^+(\xi, t)$ – решения (6), (7) с начальными данными $x^+(0)=x_0$, $p^+(0)=p_0$, $S^+(0)=0$ для задачи (1), (3″).

Пусть

$$\Pi(p,x,t) = \frac{e}{2mc}\Big\langle\sigma, \frac{\boldsymbol{H}(x,t)}{\gamma(p,x,t)} - \frac{\beta\times\boldsymbol{E}(x,t)}{\gamma(p,x,t)+1}\Big\rangle,$$

где $\boldsymbol{H}(x, t)=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ – магнитное и $\boldsymbol{E}(x, t)=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla A_0$ – электрич. поле. Оператор

$$\exp\Big(-i\int_0^t\Pi(x_0,\tau)d\tau\Big)$$

переводит начальное условие $f|_{t=0}=f$ в решение уравнения

$$i\frac{df}{dt} + \Pi(x_0,t)f = 0, \quad \Pi(x_0,t) = \Pi\big(r^+_t(x_0),t\big).$$

Оператор

$$\exp\Big(-i\int_0^t\Pi(\xi,\tau)d\tau\Big)$$

переводит начальное условие $f|_{t=0}=f$ в решение уравнения

$$i\frac{df}{dt} + \Pi(\xi,t)f = 0, \quad \Pi(\xi,t) = \Pi\big(r^+_t(\xi),t\big).$$

Пусть точка (x, t) не является фокусом на траектории $X(x_0, t)$:

$$J(x_0,t) = \det\Big(\frac{\partial X_i(x_0,t)}{\partial x_{0j}}\Big)\neq 0$$

(в этом случае множество решений уравнения $x=X(x_0, t)$ состоит не более чем из конечного числа точек $x_{0k}(x, t)$, $k=1, 2, \ldots, k_0$) и пусть коэффициенты уравнения Дирака и начальное условие ограничены вместе со всеми своими производными. Тогда решение задачи (1), (3′) может быть представлено при $h\to 0$ в виде (см. [3]):

$$\psi(x,t,h) = \sum_{k=1}^{k_0}J^{-1/2}(x_{0k},t)\sqrt{\frac{1-\beta^2(x_{0k},t)}{1-\beta^2(x_{0k},0)}}\times$$

$$\times\exp\Big[\frac{i}{h}S^+(x_{0k},t) - \frac{\pi h}{2}m(x_{0k},t)\Big]\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}(x_{0k},t)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} v(x_{0k},t)\\ \frac{\gamma}{\gamma+1}\langle\sigma,\beta\rangle(x_{0k},t)v(x_{0k},t)\end{pmatrix} + O(h), \quad x_{0k}=x_{0k}(x,t),$$

где

$$v(x_0,t) = \exp\Big(-i\int_0^t\Pi(x_0,\tau)d\tau\Big)v_0(x_0),$$

$$v_0(x_0) = \big(P_+\mathcal{U}^{-1}E_+\big)(x_0,\nabla S_0(x_0))f(x_0)\in\mathbb{C}^2,$$

$m(x_{0k}, t)$ – индекс траектории $X(x_{0k}, t)$.

Пусть $a_j(t, \xi) = (w^j(t, \xi), z^j(t, \xi))$, $j = 1, 2, 3$,– комплексные решения системы в вариациях, отвечающей функции $\lambda^+(p, x, t)$ из (5) и заданной фазовой траектории $(r_t^+(\xi), t \in [0, T])$:

$$\dot{w} = -\lambda_{xp}^+(r_t^+(\xi))\, w - \lambda_{xx}^+(r_t^+(\xi))z,\ w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3,$$

$$\dot{z} = \lambda_{pp}^+(r_t^+(\xi))\, w + \lambda_{px}^+(r_t^+(\xi))z,\ z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$$

с начальными условиями (4), и пусть

$$B(t, \xi) = [w^1, w^2, w^3],\ C(t, \xi) = [z^1, z^2, z^3].$$

Матрица $C(t, \xi)$ невырождена, $J(t, \xi) = \det C(t, \xi) \neq 0$ и $Q(t, \xi) = B(t, \xi)\, C^{-1}(t, \xi)$ – симметричная матрица с положительной мнимой частью. Пусть на промежутке $[0, T]$ существует решение $r_t^+(\xi)$ системы Гамильтона (6) и пусть коэффициенты Д. у. ограничены вместе со всеми своими производными. Тогда решение задачи (1), (3″) может быть представлено при $h \to 0$ в виде (см. [4]):

$$\psi^{\xi,b}(x,t,h) = N_0(h) \exp\left[\frac{i}{h}\left(S^+(t,\xi) + \langle P(t,\xi), x - X(t,\xi)\rangle\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\langle x - X(t,\xi), Q(t,\xi)(x - X(t,\xi))\rangle\right] \times$$

$$\times J^{-1/2}(t,\xi)\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(r_t^+(\xi)\right)}\begin{pmatrix} \nu(t,\xi) \\ \frac{\gamma}{\gamma+1}\langle\sigma,\beta\rangle\left(r_t^+(\xi)\right)\nu(t,\xi) \end{pmatrix} + O(h^{1/2}), \quad (8)$$

где

$$\nu(t,\xi) = \exp\left(-i\int_0^t \Pi(\xi,\tau)d\tau\right)\nu_0(x_0),$$

$$\nu_0(x_0) = \left(P_+ \mathscr{F}^{-1} E_+\right)(\xi) f(x_0) \in \mathbb{C}^2,$$

$$N_0(h) = \left(\prod_{j=1}^3 \operatorname{Im} b_j (\pi h)^{-3}\right)^{1/4}.$$

Формула (8) задает семейство асимптотич. ($h \to 0$) решений Д. у. ($\xi = (p_0, x_0) \in \mathbb{R}^6_{p,x}$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $\operatorname{Im} b_j > 0$, $j = 1, 2, 3$,– параметры семейства), названных **квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями электрона** (см. [4]) и обобщающих понятие когерентных и коррелированных когерентных состояний нерелятивистских квадратичных квантовых систем на релятивистский случай в произвольном внешнем поле. При фиксированном значении набора параметров (ξ, b) квазиклассич. динамич. состояние электрона $\psi^{\xi,b}(x, t, h)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) в начальный момент времени оно минимизирует соотношение неопределенности Гейзенберга, если $\operatorname{Re} b_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, и соотношение неопределенности Шредингера, если $\operatorname{Re} b_j \neq 0$ (см. [5]) (**условие когерентности**);

2) средние квантовомеханич. операторов координат и импульсов в этом состоянии в пределе при $h \to 0$ являются решениями классич. уравнений движения Лоренца (**условие траекторной когерентности**);

3) средние квантовомеханич. в этом состоянии спинового оператора – псевдовектора поляризации Баргмана (см. [6]) в пределе при $h \to 0$ являются решениями классич. релятивистских уравнений движения спина – Баргмана – Мишеля – Телегди уравнения (**условие спиновой когерентности**);

4) состояние $\psi^{\xi,b}(x, t, h)$ является вакуумным относительно бозонных операторов уничтожения

$$\hat{a}_j(t, \xi, b) = (2 \operatorname{Im} b_j h)^{-1/2}\left(\langle z^j, \Delta\hat{p}\rangle - \langle w^j, \Delta\hat{x}\rangle\right),$$

$$\Delta\hat{p} = -ih\nabla - P(t, \xi),\ \Delta\hat{x} = x - X(t, \xi),$$

– динамич. приближенных ($\operatorname{mod} h^{3/2}$) симметрий уравнения (1). Соответствующие $\psi^{\xi,b}(x, t, h)$ фоковские состояния

$$\psi_\nu^{\xi,b}(x,t,h) = (\nu!)^{-1/2}\prod_{j=1}^3 \hat{a}_j^+(t,\xi,b)\psi^{\xi,b}(x,t,h),$$

где

$$\hat{a}_j^+(t, \xi, b) = (2 \operatorname{Im} b_j h)^{-1/2}\left(\langle\bar{z}^j, \Delta\hat{p}\rangle - \langle\bar{w}^j, \Delta\hat{x}\rangle\right)$$

(черта над z^j, w^j – комплексное сопряжение) – операторы рождения, $[\hat{a}_k, \hat{a}_j^+] = \delta_{kj}$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\nu_j = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3$.

Лит.: [1] Дирак П., Принципы квантовой механики. пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [3] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [4] Белов В. В., Маслов В. П., «Доклады АН СССР», 1989, т. 305, № 3, с. 574–80; [5] Додонов В. В., Курмышев Е. В., Манько В. И., «Труды Физич. ин-та АН СССР», 1986, т. 176, с. 128–50; [6] Bargmann V., Wigner E., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1948, v. 34, p. 211–23. *В. В. Белов.*

ДИРИХЛЕ ЗАДАЧА, первая краевая задача,– одна из *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть, напр., в ограниченной области Ω с границей Γ задано эллиптич. уравнение 2-го порядка

$$L_u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$. **Задачей Дирихле** для уравнения (1) в области Ω называется следующая задача: из множества всех решений уравнения (1) требуется выделить те, к-рые в каждой граничной точке удовлетворяют условию

$$u(x)|_{x \in \Gamma} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция. Вопросы, связанные с этой задачей, рассматривались еще К. Гауссом (C. Gauss, 1840), а затем П. Дирихле (P. Dirichlet, 1850).

Для областей Ω с достаточно гладкой границей Γ решение $u(x)$ Д. з. можно представить интегральной формулой

$$u(x) = \int_\Gamma \varphi(x_0)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n_0}d\sigma, \quad (2)$$

где $\partial G(x, x_0)/\partial n_0$ – производная по направлению внутренней нормали в точке $x_0 \in \Gamma$ *Грина функции* $G(x, x_0)$, характеризуемой следующими свойствами:

1) $G(x, x_0) = s_n^{-1} r^{2-n} + \gamma(x, x_0)$ при $n \geqslant 3$

или

$$G(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + \gamma(x,x_0) \quad \text{при } n = 2,$$

где $r = |x - x_0|$ – расстояние между точками x и x_0, s_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\gamma(x, x_0)$ – регулярная в Ω гармонич. функция как относительно координат x, так и относительно координат x_0;

2) $G(x, x_0) = 0$, когда $x_0 \in \Omega$, $x \in \Gamma$.

Для шара, полупространства и нек-рых других простейших областей функция Грина строится явно и формула (1) дает эффективное решение Д. з. Получаемые при этом для шара и полупространства формулы носят название *Пуассона формул.*

Д. з. является одной из основных проблем теории *потенциала.* Она служила и служит как бы пробным камнем для разрабатываемых новых методов, к-рые затем, в той или иной мере, становятся достоянием общей теории уравнений с частными производными. *В. И. Битюцков.*

ДИРИХЛЕ ИНТЕГРАЛ – функционал, связанный с решением *Дирихле задачи* для *Лапласа уравнения* вариационным методом. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^1, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а функция $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ (пространству Соболева), определенная на Ω и интегрируемая с квадратом вместе со своей обобщенной производной.

Интегралом Дирихле для функции $u(x)$ называется выражение

$$D[u]=\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

Для нек-рой заданной на Г функции $\varphi(x)$ рассматривается множество π_φ функций из $W_2^1(\Omega)$, к-рые удовлетворяют граничному условию $u|_{x\in\Gamma}=\varphi$. Если множество π_φ не пусто, то существует единственная функция $u_0(x)\in\pi_\varphi$, для к-рой

$$D[u_0]=\inf_{u\in\pi_\varphi} D[u],$$

и эта функция является гармонической в области Ω. Верно и обратное утверждение: если гармонич. функция $u_0(x)$ принадлежит множеству π_φ, то на ней достигается $\inf D[u]$. Таким образом, $u_0(x)$ является обобщенным из $W_2^1(\Omega)$ решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Однако не для всякой функции φ можно найти такую функцию $u_0(x)$. Существуют даже непрерывные на Г функции, для к-рых множество π_φ пусто, то есть в пространстве $W_2^1(\Omega)$ не существует ни одной функции $u(x)$, удовлетворяющей условию $u|_{x\in\Gamma}=\varphi$. Классич. решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с такой граничной функцией φ не может иметь конечного Д. и. и не является обобщенным решением из пространства $W_2^1(\Omega)$. *А. К. Гущин.*

ДИРИХЛЕ ПРИНЦИП – метод решения *краевых задач* для эллиптических уравнений с частными производными сведением их к вариационным задачам отыскания минимумов некоторых функционалов в определенных классах функций. В узком смысле Д. п. означает решение первой краевой задачи

$$u|_{\partial G}=\varphi \qquad (1)$$

в области G с границей ∂G для уравнения Лапласа

$$\Delta u=0 \qquad (2)$$

сведением ее к отысканию минимума *Дирихле интеграла*

$$D(u)=\int \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dG, \quad u=u(x_1,\dots,x_n)$$

в классе функций, удовлетворяющих условию

$$D(u)<+\infty \qquad (3)$$

и условию (1).

Д. п. возник и получил широкое распространение в начале 19 в. Он применялся как с чисто теоретич. целями для доказательства существования и единственности решений краевых задач, так и при решении практически важных задач. Наиболее четкая и полная формулировка Д. п. для класса функций непрерывных вместе со своими частными производными, по-видимому, была дана в лекциях П. Дирихле (P. Dirichlet), опубликованных в 1876 одним из его учеников. Доказательства, данные П. Дирихле, были неполны, в частности, у него даже не ставился вопрос о необходимости доказательства существования минимума рассматриваемого функционала в классе допустимых функций, то есть функций, удовлетворяющих условиям (1) и (3). В конце 60-х гг. 19 в. Д. п. был подвергнут критике К. Вейерштрассом (K. Weierstrass), показавшим на примере, что дифференциальная краевая задача (1), (2) при нек-рой граничной непрерывной функции φ может иметь решение, а соответствующая вариационная задача – нет, за счет того, что в этом случае интеграл Дирихле для решения задачи (1), (2) обращается в бесконечность. Обосновать Д. п. в предположении, что существует хоть одна допустимая функция, удалось лишь Д. Гильберту (D. Hilbert) на рубеже 19 и 20 вв. Дальнейшее существенное развитие Д. п. содержится в работах С. Л. Соболева, показавшего, что всякая функция, определенная на n-мерной области и имеющая в ней обобщенные частные производные достаточно высокого порядка, принадлежащие пространству L_p, $p\geqslant 1$, принимает на всяком достаточно гладком m-мерном многообразии, $0\leqslant m<n$, естественные устойчивые граничные значения. Это позволило С. Л. Соболеву сформулировать и обосновать Д. п. для полигармоних. уравнения, причем и в случае, когда граница области состояла из многообразий различной размерности.

Возникновение Д. п. явилось существенным этапом в развитии теории краевых задач уравнений с частными производными, так как оно означало создание принципиально новой точки зрения на эту теорию. Д. п. и его всевозможные модификации, основанные, в конце концов, на сведении рассматриваемой задачи к той или иной вариационной задаче, получили широкое распространение как в различных разделах самой математики, так и в ее приложениях. Это связано с тем, что этот метод позволяет как доказывать общие теоремы о решениях уравнений, так и получать их конкретные решения в виде пределов так наз. минимизирующих последовательностей (то есть последовательностей допустимых функций, значения минимизирующего функционала на к-рых стремятся к его минимуму), при этом численные методы, основанные на построении минимизирующих последовательностей, удобны для отыскания приближенных решений на ЭВМ. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДИСКРЕТНАЯ ГРУППА – см. *Топологическая группа.*

ДИСКРЕТНАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ – группа Г гомеоморфизмов хаусдорфова топологического пространства X такая, что для любых точек x и y из X найдутся такие их окрестности U и V соответственно, что множество

$$\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma(U)\cap V\neq\varnothing\}$$

конечно. Простейшие свойства Д. г. п.: если Г – Д. г. п. пространства X, то стабилизатор

$$\Gamma_x=\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma x=x\}$$

любой точки $x\in X$ конечен и орбита

$$\Gamma_x=\{\gamma x\,|\,\gamma\in\Gamma\}$$

любой точки $x\in X$ дискретна; если X – метрич. пространство, а Г – группа его изометрий, то Г дискретна тогда и только тогда, когда выполняются указанные два свойства. *В. В. Трофимов.*

ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – см. *Символическая динамика.*

ДИСКРЕТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Распределение.*

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР – см. *Линейный оператор, Спектр* оператора.

ДИСКРИМИНАНТ ростка в голоморфной функции – множество параметров λ таких, что гиперповерхность нулевого уровня $\{x: F(x,\lambda)=0\}$ особая. Деформация ростка f:

$$F(x,\lambda):(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^k,\,0\times 0)\to(C,\,0). \qquad \textit{С. В. Чмутов.}$$

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Ударные волны.*

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ – интегральные представления функций отклика, описывающих реакцию равновесной стационарной физической системы на внешние воздействия. Д. с. отражают аналитич. свойства функций отклика в комплексной плоскости частоты (энергии), фиксируют их частотную зависимость и приводят к ряду ограничивающих их неравенств, правил сумм и т. п. В более узком смысле Д. с. связывают рефракцию распространяющихся в системе волн с их поглощением; сюда же относятся Д. с. для процессов рассеяния в квантовой механике и квантовой теории поля. Д. с. имеют универсальный вид, не зависящий от конкретной динамики системы, и используются во многих разделах физики: в динамике диспергирующих сред (отсюда название «Д. с.»), в физике элементарных частиц и др.

Вывод Д. с. не требует сведений о структуре и динамике системы, а основан на общем принципе причинности: «никакое физич. событие не может повлиять на уже происшедшие события». Соответственно, реакция системы в момент

времени t на воздействие в момент t' описывается функцией отклика $R(t-t')$, равной нулю при $t<t'$, а фурье-компонента $R(\omega)$ этой функции конечна и потому аналитична в верхней полуплоскости частоты ω. Использование интеграла Коши приводит к простейшему безвычитательному дисперсионному соотношению:

$$\operatorname{Re} R(\omega) = \pi^{-1} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \operatorname{Im} R(\omega')/(\omega' - \omega), \qquad (1)$$

справедливому, если $R \to 0$ при $\omega \to \infty$. Здесь P – символ главного значения интеграла. Для полиномиально растущих с ω функций $R(\omega)$ в (1) входит отношение $R(\omega)$ к полиному соответствующей степени ω, что дает Д. с. «с вычитаниями»; именно так строятся перенормированные Д. с. в квантовой теории поля. Реальный вывод Д. с. в большинстве случаев гораздо сложнее приведенной схемы из-за необходимости учета ряда факторов: дополнительных аргументов функции отклика, требований релятивистского принципа причинности («не влияют друг на друга также события, связанные пространственноподобным вектором») и др.

Исторически первыми Д. с. были *Крамерса–Кронига соотношения*, связывающие действительную и мнимую части показателя преломления среды, к-рая обладает частотной дисперсией. Более общие Д. с., охватывающие и случай пространственной дисперсии, имеют вид (1) с заменой R величинами

$$\varepsilon^{-1}(\omega, \boldsymbol{k}) - 1, \ [\mu^{-1}(\omega, \boldsymbol{k}) - \omega^2 \varepsilon(\omega, \boldsymbol{k})/k^2 c^2]^{-1}, \qquad (2)$$

прямо связанными с продольной и поперечной функциями Грина электромагнитного поля в однородной изотропной среде (ε и μ – диэлектрич. и магнитная проницаемости, $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор). Д. с. для величины ε, когда $R = \varepsilon(\omega, \boldsymbol{k}) - 1$, справедливы лишь в пределе $\boldsymbol{k} = 0$, в к-ром эта величина становится функцией отклика. Релятивистскому принципу причинности отвечают Д. с., введенные М. А. Леонтовичем в 1961 и отличающиеся от Д. с. для величин (2) заменой в правой части $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k} - (\omega' - \omega)\boldsymbol{u}c^{-1}$ ($\boldsymbol{u}$ – произвольный вектор, $u \leqslant 1$). В сочетании с флуктуационно-диссипативной теоремой, связывающей $\operatorname{Im} R$ с процессами диссипации в среде, Д. с. дают информацию об общих свойствах последней.

Д. с. для функций Грина важны также в квантовой теории многих тел и квантовой теории поля. Д. с. для фейнмановской одночастичной функции Грина ферми-системы при $T = 0$ имеет вид (1) с добавлением фактора $\operatorname{sign}(\hbar\omega' - \zeta)$ под интегралом, переходящего в $\operatorname{cth}[(\hbar\omega' - \zeta)/Tk]$ при конечной температуре T, ζ – химич. потенциал. Д. с. для фейнмановской функции Грина $D(z)$ квантованного скалярного поля дается спектральным представлением ($z = \omega^2 c^{-2} - k^2$):

$$\operatorname{Re} D(z) - \pi^{-1} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \operatorname{Im} D(z')/(z' - z). \qquad (3)$$

В квантовой теории поля большое значение имеют также Д. с. для более сложных, чем функции Грина, функций отклика: формфакторов, амплитуд рассеяния и др. Особую роль играют Д. с. для амплитуды упругого рассеяния вперед, связывающие, в силу *оптической теоремы*, непосредственно наблюдаемые величины: действительную часть амплитуды и полное сечение рассеяния. Экспериментальная проверка Д. с., выведенных непосредственно из общих принципов квантовой теории поля, показала применимость этих принципов вплоть до масштабов $\sim 10^{-16}$ см. Д. с. послужили исходным пунктом целого ряда методов описания сильного взаимодействия (см. *Дисперсионных соотношений метод*). Однако они в значительной мере утратили свою исключительную роль в связи с успехами квантовой хромодинамики как динамич. теории сильного взаимодействия.

Лит.: [1] Агранович В. М., Гинзбург В. Л., Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, 2 изд., М., 1979; [2] Бартон Г., Дисперсионные методы в теории поля, пер. с англ., М., 1968; [3] Нуссенцвейг Х. М., Причинность и дисперсионные соотношения, пер. с англ., М., 1976.

Д. А. Киржниц.

ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕТОД – подход в теории элементарных частиц, выражающий динамические свойства теории на языке *дисперсионных соотношений* – интегральных соотношений типа *Коши интеграла* для амплитуды процесса взаимодействия между элементарными частицами. Дисперсионные соотношения являются прямым следствием фундаментальных принципов квантовой теории поля, в первую очередь физич. принципа причинности, и не зависят от конкретного механизма взаимодействия. Поэтому, с одной стороны, дисперсионные соотношения позволяют экспериментально проверить основные положения квантовой теории поля, с другой – играют принципиальную роль в теории сильного взаимодействия, где основной метод расчетов квантовой теории поля – *возмущений теория* – применим лишь в ограниченной области высоких энергий и больших передач импульса (благодаря асимптотич. свободе). Сформулированное теорией дисперсионных соотношений понятие об амплитудах различных процессов в системе элементарных частиц как о различных граничных значениях единой аналитич. функции оказалось фундаментальным для дальнейшего развития теории элементарных частиц.

Впервые дисперсионные соотношения появились в классич. теории дисперсии света, изучающей зависимость показателя преломления среды от частоты света (см. *Крамерса–Кронига соотношения*). Здесь, исходя из принципа причинности, удалось получить универсальные, то есть не зависящие от природы вещества, соотношения – дисперсионные соотношения между вещественной и мнимой частями показателя преломления.

В квантовой теории поля информация о взаимодействии частиц содержится в амплитуде перехода i невзаимодействующих начальных частиц в f невзаимодействующих конечных частиц, к-рая зависит от 4-импульсов $p_k = (\varepsilon_k, \boldsymbol{p}_k)$ и остальных квантовых чисел частиц. Лоренц-инвариантность, а также другие принципы симметрии позволяют выделить зависимость амплитуды перехода от остальных квантовых чисел частиц и представить ее в виде суммы слагаемых вида $\Lambda_\alpha M_\alpha$. Операторы Λ_α содержат всю информацию о принципах симметрии, а скалярные функции M_α зависят от 4-импульсов на поверхности энергии, $\varepsilon_k = (\boldsymbol{p}_k^2 + m_k^2)^{1/2}$ (где ε_k, $\boldsymbol{p}_k$, m_k – соответственно энергия, импульс и масса частиц k; используется система единиц $\hbar = c = 1$). Амплитуда F_α вне поверхности энергии связана с M_α соотношением

$$M_\alpha = \int \prod_{(if)} d\varepsilon_k (2\varepsilon_k)^{-1/2} \delta\left(p_k^2 - m_k^2\right) F_\alpha$$

(δ – дельта-функция). Скалярные функции F_α определяют динамику процесса, то есть ту часть зависимости его от импульсов, к-рая не выявляется принципами симметрии. Ряд важных сведений о свойствах F_α может быть получен из фундаментальных принципов квантовой теории поля вне зависимости от конкретного механизма взаимодействия. Условие причинности, унитарность S-матрицы (матрицы рассеяния) и нек-рые предположения о спектре масс (в частности, отсутствие частиц с нулевыми массами) позволяют установить, что любая амплитуда F_α является граничным значением аналитич. функции, зависящей только от инвариантных комбинаций 4-импульсов: p_i^2, $(p_k + p_l)^2$, $(p_j + p_k + p_l)^2$ и т. д. Это граничное значение получается, когда аргументы F_α стремятся к вещественным значениям (своим для каждого канала) при положительных мнимых добавках. Оказывается, далее, что аналитич. функция – одна и та же для любого канала, то есть для любого разбиения $i + f$ частиц на i начальных и f конечных. Тем самым амплитуды различных каналов являются граничными значениями единой аналитич. функции F и связаны перекрестной симметрией. Условие унитарности показывает, где функция F имеет особенности: по каждой инвариантной переменной s функция F имеет полюсы и разрезы вдоль вещественной

оси, отвечающие соответственно одночастичным и многочастичным промежуточным состояниям в канале, в к-ром s является квадратом полной энергии. (Полюсов по «массовым» переменным p_k^2 нет благодаря условию нормировки функций Грина в квантовой теории поля.) Если иных особенностей, кроме требуемых унитарностью, нет, а F достаточно быстро убывает при больших s, интегральная формула Коши дает простейшее дисперсионное соотношение:

$$F(s) = \frac{g^2}{s-m^2} + \frac{1}{\pi}\int \frac{\operatorname{Im} F(s')}{s'-s}\,ds' \qquad (1)$$

(g^2 – безразмерная константа взаимодействия). Здесь интегрирование ведется по области, где отлична от нуля $\operatorname{Im} F$, причем условия унитарности и перекрестной симметрии позволяют выразить эту мнимую часть через амплитуды рассматриваемого и других переходов.

Использовать дисперсионные соотношения в физике элементарных частиц предложили в 1954 М. Гелл-Ман (M. Gell-Mann), М. Голдбергер (M. Goldberger) и В. Тирринг (W. Thirring), а первое строгое доказательство необходимых для этого аналитич. свойств амплитуд дано в 1956 Н. Н. Боголюбовым на примере упругого рассеяния π-мезонов на нуклонах. Доказательство дисперсионных соотношений послужило толчком и к развитию математич. методов (в теории аналитич. функций многих комплексных переменных). Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров и другие установили ряд новых теорем об аналитич. продолжении (в частности, теорему об острие клина и ее обобщения).

Амплитуда перехода частиц *1* и *2* в частицы *3* и *4* зависит от шести инвариантных переменных: четырех «массовых», p_k^2, инвариантной энергии $s=(p_1+p_2)^2$ и инвариантной передачи 4-импульса $t=(p_1-p_3)^2$ [удобно ввести еще одну передачу 4-импульса $u=(p_1-p_4)^2$, связанную с независимыми переменными s, t соотношением $s+u+t=\sum_k p_k^2$]. Н. Н. Боголюбов показал, что при вещественных значениях $p_k^2=m_k^2$ и ограниченной передаче импульса, $-t_0<t<0$, амплитуда πN-рассеяния аналитична как функция s в комплексной плоскости с разрезами вдоль вещественной оси. В дальнейшем этот результат был распространен на рассеяние ππ, πK, KK, πΛ, πΣ, фоторождение $\gamma N\to\pi N$ и нек-рые виртуальные процессы. Однако аналитич. свойства амплитуд таких процессов, как NN- и KN-рассеяние, до сих пор не доказаны, хотя эти процессы детально изучены на опыте. Кроме того, существенно снижены ограничения на передачу импульса.

Дисперсионные соотношения послужили основой ряда строгих следствий фундаментальных принципов квантовой теории поля. Это, во-первых, асимптотич. теоремы, связывающие характеристики различных процессов при высоких энергиях. Первым утверждением такого рода явилась *Померанчука теорема* об асимптотич. совпадении постоянных полных сечений рассеяния частицы и античастицы на одной и той же мишени. Она имеет ряд обобщений и не противоречит современным экспериментальным данным.

Для рассеяния вперед ($t=0$) $\operatorname{Im} F$, согласно *оптической теореме*, выражается через полное сечение рассеяния. Экспериментально обнаружен рост полных сечений, согласующийся с ограничением Фруассара. В этой ситуации простейшее дисперсионное соотношение (1) требует модификации и записывается не для самой амплитуды $F(s)$, а для комбинации $[F(s)-F(s_0)]/(s-s_0)$, где точку вычитания s_0 удобно выбрать на пороге реакции: $s_0=(m_1+m_2)^2$. В получающемся дисперсионном соотношении с вычитанием константу вычитания $F(s_0)$ можно выразить через длину рассеяния. Такое дисперсионное соотношение связывает (для πN-рассеяния) непосредственно наблюдаемые величины и константу g^2, и его проверка до 400 ГэВ в лабораторной системе дала прямое экспериментальное подтверждение общих принципов квантовой теории поля, из к-рых оно выводится.

Рост полных сечений обнаружен в π^+p-, K^+p-, $p\bar{p}$-, pp-взаимодействиях, что позволяет надеяться на аналогичное поведение всех полных сечений бинарных адронных процессов. При этом существенно, что экспериментальные данные не противоречат максимально быстрому росту полных сечений с увеличением энергии, достигающему ограничения Фруассара. Измерение в широком интервале энергий вещественной части амплитуды рассеяния на нулевой угол π^+p- и pp-процессов позволило на основе дисперсионных соотношений установить, что рост полных сечений ожидается по крайней мере до энергии 2000 ГэВ в системе центра инерции.

Д. с. м. позволил получить ряд строгих результатов об асимптотич. поведении многочастичных процессов. Наиболее полно это было сделано А. А. Логуновым и другими для множественных процессов с выделенными частицами – инклюзивных процессов. Для них были, в частности, найдены асимптотич. ограничения скорости роста дифференциальных сечений. Экспериментальное исследование этих процессов в области сильного взаимодействия (Серпухов, 1968) привело к установлению явления масштабной инвариантности.

Поскольку дисперсионные соотношения оперируют с наблюдаемыми в принципе характеристиками взаимодействия – амплитудами перехода, сечениями, в физику элементарных частиц прочно вошел язык метода дисперсионных соотношений, и прежде всего понятие об амплитудах как о граничных значениях аналитич. функции, связанных перекрестной симметрией. Более того, принятые без доказательства дисперсионные соотношения часто кладут в основу теоретич. схем полуфеноменологич. характера.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [2] Хагедорн Р., Причинность и дисперсионные соотношения, пер. с англ., «Успехи физич. наук», 1967, т. 91, в. 1; [3] Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А., Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях, М., 1967; [4] Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Хрусталев О. А., Ограничения на поведение сечений упругих и неупругих процессов при высоких энергиях, «Элементарные частицы и атомное ядро», 1972, т. 3, в. 1, 3; [5] Общие принципы квантовой теории поля и их следствия, М., 1977. *В. А. Мещеряков, В. П. Павлов.*

ДИСПЕРСИЯ – одна из характеристик распределения вероятностей случайной величины, наиболее употребительная мера рассеяния ее значений. Дисперсия $\mathsf{D}X$ случайной величины X определяется как *математическое ожидание* $\mathsf{E}(X-m)^2$ квадрата отклонения X от ее математич. ожидания $m=\mathsf{E}X$:

$$\mathsf{D}X=\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^2.$$

Для случайной величины X с дискретным распределением

$$p_k=\mathsf{P}\{X=x_k\}$$

Д. определяется формулой

$$\mathsf{D}X=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-m)^2\,p_k$$

при условии, что ряд сходится, а для случайной величины X с непрерывным распределением, имеющим плотность вероятности $p(x)$,– формулой

$$\mathsf{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\,p(x)\,dx,$$

если этот интеграл сходится.

Наряду с Д. в качестве меры рассеяния (той же размерности, что и сама случайная величина) используется квадратный корень из Д.:

$$\sigma=\sqrt{\mathsf{D}X}$$

– квадратичное отклонение X. Если $\mathsf{D}X=0$, то случайная величина X принимает с вероятностью 1 единственное значение m. В теории вероятностей большое значение имеет теорема: Д. суммы независимых случайных величин равна сумме Д. этих величин. Это свойство выделяет Д. среди других характеристик рассеяния. В математич. статистике важную роль для характеристики качества статистич. оценок играет их Д. *В. И. Битюцков.*

ДИСПЕРСИЯ – термин, означающий неоднородность корней λ_j дисперсионного (характеристического) уравнения, то есть

$$\lambda_j(\sigma k, x, t, \delta) \neq \sigma\lambda_j(k, x, t, \delta), \ \sigma > 0.$$

Дисперсионное уравнение

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\omega - \lambda_j(k,x,t,\delta)\right) = \det L(\omega,k,x,t,\delta,0) = 0, \qquad (1)$$

где $\operatorname{Im}\lambda_j = 0$, $\omega = \partial S/\partial t$, $k = \partial S/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, δ – параметр, выводится из системы дифференциальных уравнений порядка m с параметром $h \to 0$:

$$L\left(-ih\frac{\partial}{\partial t}, -ih\frac{\partial}{\partial x}, x, t, \delta, h\right)u = 0 \qquad (2)$$

при построении ВКБ-асимптотики (2) с фазой $S(x, t)$ (см. *ВКБ-метод*). Д. считается сильной, если для всех $\delta \in [0, 1]$ корни λ_j неоднородны, и слабой, если $\delta = \delta(h) \to 0$ и

$$\lambda_j(k, x, t, \delta) = \lambda_j^0(k, x, t) + O(h),$$

λ_j^0 однородны по k. При слабой Д. фазы ВКБ-асимптотики (2) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi_j(x)\exp\left(ijS^0(x)/h\right)$$

определяются из конечного числа дисперсионных уравнений (1) при $\delta = 0$. Случаи сильной Д. и слабой Д. принципиально различаются для уравнений со *слабой нелинейностью*, так как приводят к разным *многоволновым процессам*.

Г. А. Омельянов.

ДИССИПАТИВНАЯ СИСТЕМА – *динамическая система*, у которой полная механическая энергия (то есть сумма кинетической и потенциальной энергий) при движении непрерывно уменьшается (рассеивается), переходя в другие, немеханические формы энергии (напр., в теплоту). Понятие Д. с. употребляют в физике также и в применении к немеханич. системам, во всех случаях, когда энергия упорядоченного процесса переходит в энергию неупорядоченного процесса, в конечном счете – в тепловую.

Примерами Д. с. могут служить: твердые тела, между к-рыми действуют силы сухого или жидкостного трения; вязкая (или упруговязкая) среда, в к-рой напряжения зависят от скоростей деформаций; колебания электрич. тока в системе контуров, затухающие при наличии омич. сопротивления из-за перехода энергии в джоулево тепло, и т. д. Практически все системы, с к-рыми приходится реально сталкиваться в земных условиях, являются Д. с. Рассматривать их как консервативные, то есть как системы, в к-рых механич. энергия сохраняется, можно лишь в отдельных случаях приближенно, отвлекаясь от ряда реальных свойств системы.

Движение Д. с. изучают с помощью обычных уравнений динамики для систем материальных точек, твердых тел или сплошных сред, включая в число действующих сил так наз. диссипативные силы или силы сопротивления. Однако интегрирование получающихся уравнений бывает в большинстве случаев связано со значительными трудностями, особенно когда зависимость диссипативных сил от характеристик движения (напр., от скоростей) не выражается в простой аналитич. форме или когда точное решение задачи связано с необходимостью одновременно интегрировать уравнения движения среды и тела, движущегося в этой среде (задачи о движении тел в воде или в воздухе, о проникании в грунт, пробивании брони и т. п.).

Изучение движения Д. с. значительно упрощается в случаях, когда скорости перемещений настолько малы, что диссипативные силы можно считать линейными функциями скоростей. В этих случаях диссипация энергии может быть охарактеризована так наз. *диссипативной функцией*, численно равной половине полной механич. энергии системы, рассеивающейся в единицу времени, и диссипативные силы могут быть просто выражены через эту функцию. С помощью диссипативной функции можно исследовать процесс затухания малых колебаний системы около ее положения равновесия, затухания упругих колебаний тел и т. п.

Д. с. не следует отождествлять с неконсервативными системами, в к-рых возможна не только диссипация энергии, но и приток энергии извне. Поэтому, напр., в неконсервативных системах могут иметь место такие явления, как автоколебания, возникающие при равенстве расхода и притока энергии, что в Д. с. невозможно.

С. М. Тарг.

ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ, функция рассеяния,– функция, вводимая для учета влияния сил вязкого трения на движение механической системы и характеризующая степень убывания механической энергии этой системы, а также вообще для учета перехода энергии упорядоченного движения в энергию неупорядоченного движения (в конечном счете – в тепловую); имеет размерность мощности. Д. ф. может быть построена для механич. систем, у к-рых скорости макроскопич. движений настолько малы, что силы сопротивления движению можно считать линейно зависящими от скоростей. Если положение такой системы определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$, то для нее Д. ф. является квадратичной формой обобщенных скоростей $\dot{q}_i = dq_i/dt$:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k,$$

где $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ – размерные коэффициенты, зависящие в общем случае от координат q_i. Величина F всегда положительна и численно равна половине полной механич. энергии E системы, рассеивающейся в единицу времени:

$$F = \frac{1}{2}\left|\frac{dE}{dt}\right|.$$

Зная Д. ф., можно вычислить соответствующую каждой координате q_i силу сопротивления

$$Q_i^{(R)} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}$$

и составить дифференциальные уравнения движения системы в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{(R)}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

где $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ – функция Лагранжа для данной системы.

Д. ф. может также вводиться для характеристики сил внутреннего трения при движении сплошной среды (жидкости, газа, деформируемого твердого тела). В этом случае Д. ф.– квадратичная форма компонент тензора скоростей деформаций с коэффициентами, характеризующими вязкость среды. Напр., для изотропной среды Д. ф., отнесенная к единице объема, имеет вид

$$\Phi = \mu\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ik}^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\theta^2,$$

где ε_{ik} – компоненты тензора скоростей деформации (деформаций удлинения при $i = k$ и деформаций сдвига при $i \neq k$), $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – скорость объемного расширения, μ и λ – коэффициенты вязкости, характеризующие соответственно вязкость при сдвиге и вязкость при объемном расширении. В частности, для несжимаемой вязкой жидкости ($\theta = 0$) выражение Ф, если учесть, что $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, имеет вид

$$\Phi = \mu[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)],$$

где μ – ньютонов коэффициент вязкости.

Уравнения движения среды в компонентах напряжений имеют вид

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = F_i + \frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где ρ – плотность, x_i – координаты, v_i – проекции скорости, F_i – проекции силы, действующей на единицу объема, σ_{ik} – компоненты тензора напряжений. Если для данной среды Д. ф. известна, то учесть влияние внутреннего трения можно, заменив в уравнениях движения все σ_{ik} на $\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}$,

где σ'_{ik} – компоненты «диссипативного» тензора напряжений, вычисляемые из равенств

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ik}}.$$

В частности, для изотропной среды

$$\sigma'_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\theta \quad \text{и т.д.}; \quad \sigma'_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \quad \text{и т. д.}$$

Понятие Д. ф. употребляется в применении и к немеханич. системам, когда уравнения движения могут быть записаны в лагранжевой форме. Так, напр., колебания электрич. тока I_i в i-м контуре системы контуров могут быть записаны, как вышеприведенные уравнения Лагранжа, в к-рых под q_i нужно понимать заряд e_i на обкладках i-го конденсатора, под $\dot{q}_i$ – соответствующий ток $I_i = \frac{\partial e_i}{\partial t}$, под Д. ф.– величину $R = \sum R_i \dot{e}_i^2/2$, где R_i – омич. сопротивление i-го контура. Тогда диссипативный член в правой части уравнения Лагранжа будет равен

$$Q_i^R = -\frac{\partial R}{\partial \dot{e}_i}.$$

Он характеризует в данном случае переход энергии упорядоченного тока в джоулево тепло.

Понятие о Д. ф. используется при изучении движения *диссипативных систем*, в частности для учета влияния сопротивлений на малые колебания системы около ее положения равновесия, для исследования затухания колебаний в упругой среде, для учета тепловых потерь при затухании колебаний электрич. тока в системе контуров и др.

Лит.: [1] Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Теория звука, пер. с англ., т. I, 2 изд., М., 1955, гл. 4; [2] Ландау Л. и Лифшиц Е., Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976; [3] их же, Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954, ч. 1, § 16, ч. 2, § 29; [4] их же, Электродинамика сплошных сред, М., 1959, § 48; [5] Невзглядов В. Г., Теоретическая механика, М., 1959, § 100, 158. *С. М. Тарг.*

ДИССИПАТИВНОЕ ЛАГРАНЖЕВО МНОГООБРАЗИЕ – см. *Маслова канонический оператор.*

ДИССИПАТИВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – линейное отображение $\mathcal{L}$ в C^*-алгебре $\mathcal{A}$, обладающее свойствами:

1) область определения $D(\mathcal{L})$ является плотной $*$-подалгеброй $\mathcal{A}$;

2) $\mathcal{L}(X^*) = \mathcal{L}(X)^*$ при $X \in D(\mathcal{L})$;

3) $\mathcal{L}(X^*X) - X^*\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(X^*)X \geqslant 0$ для $X \in D(\mathcal{L})$.

Если вместо условия 3) выполняется:

3′) для любого $n = 1, 2, \ldots$ и любых $X_1, \ldots, X_n \in D(\mathcal{L})$ $(n \times n)$-матрица с элементами

$$\mathcal{L}(X_i^* X_j) - X_i^* \mathcal{L}(X_j) - \mathcal{L}(X_i^*)X_j$$

является положительной, то отображение $\mathcal{L}$ называется вполне диссипативным.

Если $\mathcal{L}$ ограничено, то условие 3) эквивалентно тому, что полугруппа отображений $\Phi_t = \exp t\mathcal{L}$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет *Кадисона – Шварца неравенству*

$$\Phi_t(X^*X) \geqslant \Phi_t(X^*)\Phi_t(X),$$

а условие 3′) эквивалентно тому, что все Φ_t, $t \geqslant 0$, являются вполне положительными сжатиями в C^*-алгебре $\mathcal{A}$.

Лит.: см. [2], [6] при ст. *Динамическая полугруппа.* *А. С. Холево.*

ДИССИПАТИВНЫЙ ОПЕРАТОР – см. *Полугруппа.*

ДИССИПАЦИЯ энергии турбулентности – процесс рассеяния кинетической энергии турбулентности, то есть ее перехода в теплоту в результате внутреннего (вязкого) трения в жидкости. Диссипацией называется также мера скорости этого процесса, равная количеству энергии ε, переходящему в теплоту за единицу времени в единице массы жидкости. Величина в общем случае задается формулой:

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2\rho}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\zeta}{\rho}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2,$$

где x_i, $i = 1, 2, 3$,– декартовы координаты, u_j, $j = 1, 2, 3$,– три компоненты вектора скорости, δ_{ij} – символ Кронекера, ρ – плотность жидкости, μ – коэффициент вязкости, а ζ – второй коэффициент вязкости. В случае несжимаемой жидкости

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

и формула для ε заметно упрощается:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

А. М. Яглом.

ДИСТАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – *динамическая система* $\{T^t\}$ с метрическим фазовым пространством X такая, что для любых точек $x \neq y$ нижняя грань расстояний

$$\inf_t \rho(T^t x, T^t y) > 0.$$

Если в нек-рой динамич. системе какая-либо пара точек $x \neq y$ обладает последним свойством, то говорят, что эта пара точек дистальна; таким образом, Д. д. с.– это динамич. система, для к-рой все пары точек $x \neq y$ дистальны.

Приведенное определение годится для «общих» динамич. систем, когда «время» t пробегает произвольную группу G. Содержательные результаты получаются, если G локально компактна (основными являются «классические» случаи каскада или потока, то есть когда $G = \mathbb{Z}$ или $G = \mathbb{R}$, но рассуждения при этом почти не упрощаются), а X компактно. Особый интерес при этом представляет тот случай, когда X является *минимальным множеством* (общий случай в известном смысле сводится к этому, а именно, при указанных ограничениях на G и X замыкание каждой траектории оказывается минимальным множеством). Важнейший пример Д. д. с.– система, возникающая в замыкании почти периодич. траектории какой-нибудь динамич. системы. Другой пример – нильпотоки (см. [1]). Как и в этих примерах, строение Д. д. с. с минимальным множеством X при указанных условиях допускает довольно детальное описание алгебраич. характера (см. [2]; изложение теории Д. д. с. и их обобщений и библиографию см. в [3]).

Лит.: [1] Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966; [2] Furstenberg H., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 3, p. 477–515; [3] Бронштейн И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Киш., 1975. *Д. В. Аносов.*

ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ – см. *Рассеяния теория.*

ДИФФЕОМОРФИЗМ, дифференцируемый гомеоморфизм, гладкий гомеоморфизм,– взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение f: $M \to N$ дифференцируемого многообразия M (напр., области в евклидовом пространстве) в дифференцируемое многообразие N, обратное к которому тоже является непрерывно дифференцируемым. Если $f(M) = N$, то говорят, что M и N диффеоморфны. С точки зрения дифференциальной топологии, диффеоморфные многообразия имеют одинаковые свойства, и она интересуется классификацией многообразий с точностью до Д. (последняя не совпадает с более грубой классификацией с точностью до *гомеоморфизма*, исключая случаи малых размерностей).

Хотя сам термин «Д.» был введен сравнительно недавно, фактически многочисленные преобразования и замены переменных, давно используемые в математике, являются Д., а многие семейства преобразований – группами Д. В частности, это относится к Д., сохраняющим ту или иную дополнительную структуру на многообразии (напр., контактную, симплектическую, конформную или комплексную). Исторически такие Д. в ряде случаев получили особые названия (в указанных примерах – контактные преобразования и канонич. отображения, конформные отображения и биголоморфные отображения), вместо к-рых в последнее время нередко употребляют термин «Д.» с добав-

лением прилагательного, характеризующего сохраняемую структуру (напр., «симплектический Д.» вместо «канонического преобразования»). *Д. В. Аносов.*

У-ДИФФЕОМОРФИЗМ – см. *У-система.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СВЯЗЬ механическая, кинематическая связь, неголономная связь,– связь *неголономной системы.* См. также *Связи механические.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА – алгебраическая функция от дифференциалов координат. Используется в математич. анализе и дифференциальной геометрии, а также в их приложениях. В физич. приложениях дифференциал координаты dx^i понимают как «бесконечно малое приращение» и заменяют конечным, но достаточно малым приращением Δx^i. Поэтому Д. ф. оказывается функцией, зависящей от разностей координат двух «бесконечно близких» точек. Д. ф. можно определить в любом *многообразии.*

Важнейшим примером Д. ф. является метрика (квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками в *римановом пространстве*):

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)dx^i dx^j,$$

определяемая *метрическим тензором* g_{ij} (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, n – размерность многообразия). Произвольная симметричная Д. ф. степени r имеет вид:

$$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_r}(x^1, \ldots, x^n)dx^{i_1} \ldots dx^{i_r}$$

и определяется симметричным ковариантным тензорным полем ранга r (см. *Тензор*). Несимметричное ковариантное тензорное поле также определяет Д. ф. В этом случае входящие в определение формы дифференциалы (приращения) координат, $dx^i_{(1)}$, $dx^i_{(2)}$, ... различны:

$$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_r}(x^1, \ldots, x^n)dx^{i_1}_{(1)} \ldots dx^{i_r}_{(r)}.$$

Напр., антисимметричный дискриминантный тензор $\eta_{i_1 \ldots i_n}$ определяет в n-мерном евклидовом пространстве форму степени n вида:

$$\omega = \eta_{i_1 \ldots i_n}dx^{i_1}_{(1)} \ldots dx^{i_n}_{(n)} = \det \left\| dx^i_{(j)} \right\|$$

– элемент объема (это объем параллелепипеда, вдоль j-й стороны к-рого приращение координат равно $dx^i_{(j)}$).

При переходе к другой системе координат дифференциалы dx^i и коэффициенты Д. ф. $\omega_{i_1 \ldots i_r}$ меняются согласованно, так что сама форма ω остается неизменной (инвариантной).

Особенно важны так наз. внешние Д. ф., определяемые тензорами, антисимметричными по всем индексам. Для внешней Д. ф. степени (ранга) r используют запись

$$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_r}(x^1, \ldots, x^n)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}, \qquad (*)$$

где $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$ (так наз. внешнее произведение дифференциалов) – формальное выражение, антисимметричное по всем индексам. Коэффициенты $\omega_{i_1 \ldots i_r}$ не обязательно антисимметричны, но в Д. ф. ω дает вклад лишь антисимметричная часть $\omega_{[i_1 \ldots i_r]}$. Выражение (*) пригодно лишь в том случае, если все многообразие покрывается одной системой координат. В противном случае Д.ф. следует представить в виде суммы Д. ф., каждая из к-рых обращается в 0 за пределами одной координатной окрестности, то есть представима в виде (*). Внешнюю Д. ф. ранга r обычно называют r-формой. Внешняя Д. ф. не может иметь ранг выше n (иначе она обращается в 0). Формой ранга 0, по определению, является функция на многообразии (тензор нулевого ранга).

Каждой r-форме ω вида (*) можно сопоставить $(r+1)$-форму

$$d\omega = \left(\partial \omega_{i_1 \ldots i_r} / \partial x^i\right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r},$$

к-рая называется внешней производной или внешним дифференциалом формы ω. Вторичное применение операции d обращает в 0 любую внешнюю Д. ф., то есть $dd = 0$. Внешняя производная 0-формы, то есть функции, совпадает с ее дифференциалом:

$$d\varphi = (\partial \varphi / \partial x^i)dx^i,$$

поэтому

$$d\omega = (d\omega_{i_1 \ldots i_r}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}.$$

Внешняя Д. ф. ω называется замкнутой, если $d\omega = 0$, и точной, если существует такая форма σ, что $\omega = d\sigma$. В силу свойства $dd = 0$ всякая точная форма является замкнутой. Обратное справедливо не всегда, напр. это так на многообразии, покрываемом одной системой координат. Поэтому классы замкнутых форм, отличающихся на точные формы, можно использовать для характеристики топологии многообразия.

Для r-формы ω и s-формы σ определена $(r+s)$-форма:

$$\omega \wedge \sigma = \omega_{i_1 \ldots i_r}\sigma_{j_1 \ldots j_s}dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s},$$

называемая их внешним произведением и удовлетворяющая соотношениям:

$$\sigma \wedge \omega = (-1)^{rs}\omega \wedge \sigma,$$

$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge (d\sigma).$$

В n-мерном евклидовом (псевдоевклидовом) пространстве, где при помощи метрич. тензора можно поднимать тензорные индексы, для внешних Д. ф. определяется операция перехода к дуальным Д. ф.:

$$*\omega = \frac{1}{(n-r)!}\omega^{i_1 \ldots i_r}\eta_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_{n-r}}dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{n-r}},$$

переводящая r-форму в $(n-r)$-форму.

В римановом пространстве внешнюю производную можно выразить через *ковариантные производные*:

$$d\omega = (\nabla_i \omega_{i_1 \ldots i_r})dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r},$$

так как в силу симметричности *Кристоффеля символов* члены, отличающие ковариантную производную от обычной, не дают вклада в $d\omega$. В римановом пространстве вводят также операцию внешнего кодифференциала, понижающего ранг формы:

$$\delta\omega = -r\nabla^i \omega_{[i_1 \ldots i_{r-1}]}dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{r-1}}.$$

На ориентируемых многообразиях корректно определен интеграл от внешней Д. ф. максимального ранга. Если n – размерность многообразия, то

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} = \eta^{i_1 \ldots i_n}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

и поэтому n-форму ω можно представить в виде:

$$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_n}dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} = \sigma dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где

$$\sigma = \omega_{i_1 \ldots i_n}\eta^{i_1 \ldots i_n} = n!\,\omega_{1 \ldots n}$$

(последнее равенство справедливо лишь в случае, когда величина $\omega_{i_1 \ldots i_n}$ антисимметрична по всем индексам). При замене координат величина σ преобразуется по закону

$$\sigma'(x'^1, \ldots, x'^n) = \det(\partial x^i / \partial x'^j)\sigma(x^1, \ldots, x^n),$$

совпадающему с законом преобразования плотности, если якобиан $\det(\partial x^i / \partial x'^j)$ положителен. Поэтому величина σ ведет себя как плотность для ориентируемых многообразий. Для такого многообразия интеграл от формы ω равен

$$\int \omega = \int \sigma(x^1, \ldots, x^n)dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= n! \int \omega_{1 \ldots n}(x^1, \ldots, x^n)dx^1 \ldots dx^n,$$

где фигурирует система координат положительной ориентации.

Если ω – нек-рая форма максимального ранга на ориентируемом многообразии, то умножая ее на произвольную функцию φ, можно получить новую форму $\varphi\omega$, к-рую также можно интегрировать. Поэтому форму ω можно использовать как меру, чтобы интегрировать по этой мере любые функции на многообразии. В частности, на римановом ориентируемом многообразии можно использовать форму

$$\omega = \sqrt{g}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

(риманову меру).

Интегрирование форм является мощным инструментом в приложениях главным образом потому, что для интегралов от форм справедлива теорема, обобщающая *Стокса формулу* из обычного векторного анализа в $\mathbb{R}^3$. В общем случае теорема Стокса выражается формулой

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где через ∂M обозначена граница M. Для многообразия M размерности n ранг формы ω равен $n-1$ и совпадает с размерностью многообразия ∂M. Ориентация многообразия ∂M в теореме Стокса согласуется с ориентацией многообразия M. Для этого в M (в окрестности нек-рой граничной точки его) выбирается такая система координат $\{x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$, в к-рой граница ∂M определяется условием $x^n = 0$, а внутренним точкам многообразия M соответствуют значения $x^n > 0$. Тогда совокупность чисел $\{x^1, \ldots, x^{n-1}\}$ может служить системой координат на ∂M.

Частными случаями сформулированной теоремы являются не только обычная формула Стокса, но и формула Остроградского, и целый ряд других интегральных соотношений, применяемых в физике, в частности в теории поля.

На примере электродинамики видно, как естественно выражаются физич. законы в терминах внешних форм и интегралов от них: 4-вектор тока I_i, $i = 0, 1, 2, 3$, определяет 1-форму

$$I = I_i dx^i,$$

а тензор напряженности электромагнитного поля F_{ij} – 2-форму

$$F = (1/2)\, F_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

в пространстве-времени ($x^0 = ct$). В этих терминах первая пара уравнений Максвелла, к-рая в обычных 4-мерных обозначениях записывается как

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0,$$

принимает вид

$$dF = 0,$$

а вторая

$$\partial F^{ij}/\partial x^j = 4\pi c^{-1} I^i$$

выражается через дуальные формы в виде

$$d{*}F = 4\pi c^{-1} {*} I.$$

С помощью теоремы Стокса из этих уравнений легко выводятся соотношения (интегральная форма уравнений Максвелла):

$$\int_{\partial V} F = 0, \quad \int_{\partial V} {*}F = 4\pi c^{-1} \int_V {*}I,$$

где V – любая 3-мерная гиперповерхность в 4-мерном пространстве-времени. Напр., если V – чисто пространственный объем (то есть область на гиперплоскости постоянного времени), то первое соотношение означает обращение в 0 магнитного потока через любую замкнутую поверхность, а второе утверждает, что поток электрич. поля через замкнутую поверхность пропорционален полному заряду, находящемуся внутри нее.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, 2 изд., М., 1985; [3] Зорич В. А., Математический анализ, ч. 1–2, М., 1981–84; [4] Шутц Б., Геометрические методы математической физики, пер. с англ., М., 1984.

М. Б. Менский.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ – см. *Больцмана уравнение.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – уравнение, содержащее неизвестные функции и производные неизвестных функций (или их дифференциалы). Д. у. делятся на обыкновенные, в к-рых неизвестные функции зависят от одной независимой переменной, и уравнения с частными производными, в к-рых неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных. Рассматривают также системы Д. у. как обыкновенных, так и с частными производными. Порядком Д. у. называется наивысший из порядков производных или дифференциалов, входящих в уравнение. Общим решением обыкновенного Д. у. n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

называется такое семейство функций

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

непрерывно зависящих от n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, что при соответствующем выборе этих постоянных может быть получено любое частное решение этого Д. у. Если каждая функция y, определяемая соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

(и удовлетворяющая соответствующим условиям гладкости), представляет собой общее решение Д. у., то такое соотношение называется общим интегралом.

В механике и физике Д. у. обычно определяют общие законы течения того или иного явления; чтобы получить из этих законов определенные количественные результаты, обычно на неизвестные функции накладывают добавочные, так наз. начальные или краевые условия, в к-рых требуют, чтобы неизвестные функции, а иногда и нек-рые их производные принимали заданные значения при нек-рых определенных значениях независимой переменной (см. *Коши задача*, *Краевая задача*). Такие дополнительные условия позволяют выделить из общего решения Д. у. определенное отвечающее поставленной задаче частное решение.

В. И. Битюцков.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; аналитическая теория – раздел теории обыкновенных *дифференциальных уравнений*, в котором решения исследуют методами теории аналитических функций. Поскольку написать решение в явном виде удается лишь для нек-рых Д. у., возникла задача исследования различных свойств решений по виду уравнения. В результате появились два направления в исследовании Д. у.: аналитич. теория Д. у. и теория *динамических систем*. В аналитич. теории Д. у. исследуют поведение решений на всей комплексной плоскости, расположение особых точек, поведение решений в их окрестности и т. д. В частности, методами аналитич. теории Д. у. изучают свойства специальных функций математич. физики. Аналитич. теория Д. у. существенна для задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки, задач гидро- и аэродинамики, теории солитонов и др. Методы и результаты аналитич. теории Д. у. различны для линейных и нелинейных Д. у.

Линейная теория. Рассмотрим систему из n уравнений

$$w' = A(z)w + f(z), \qquad (1)$$

где $w(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z))$, $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$, $A(z)$ – матрица-функция порядка $n \times n$ с элементами $a_{ik}(z)$, и скалярное уравнение порядка n

$$w^{(n)} + a_1(z) w^{(n-1)} + \ldots + a_n(z) w = f(z). \qquad (2)$$

Аналитичность решений. Пусть D – область в комплексной плоскости z, все элементы $a_{ik}(z)$ и функции $f_i(z)$ аналитичны в D. Если область D односвязна, то все решения системы (1) являются однозначными аналитическими в D вектор-функциями, в неодносвязной области решения являются, как правило, многозначными. То же справедливо для уравнения (2).

Особые точки и их классификация. Рассмотрим однородные уравнения, соответствующие (1) и (2):

$$w'(z) = A(z)\,w, \qquad (3)$$

$$w^{(n)} + a_1(z)w^{(n-1)} + \ldots + a_n(z)w = 0. \qquad (4)$$

Точка z_0 называется особой точкой системы (3) или уравнения (4), если она является особой точкой для одного из элементов $a_{ik}(z)$ (коэффициентов $a_i(z)$). Пусть z_0 – полюс, тогда система (3) имеет фундаментальную матрицу $W(z)$ вида

$$W(z) = \Phi(z)(z - z_0)^P,$$

где P – постоянная матрица, матрица-функция $\Phi(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k (z - z_0)^k,$$

сходящийся в нек-ром кольце вида

$$0 < |z - z_0| < R.$$

Особая точка z_0 называется регулярной, если ряд Лорана для $\Phi(z)$ содержит конечное число отрицательных степеней $z - z_0$, и иррегулярной в противном случае. Это косвенная классификация: она дается в терминах свойств решений, а не коэффициентов системы. Аналогично классифицируются особые точки уравнения (4). Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ называется особой точкой системы (3), если точка $t = 0$ – особая для системы

$$w_t' = -t^{-2} A(t^{-1}) w,$$

полученной из (3) заменой переменного $z = 1/t$; аналогично для уравнения (4).

Регулярные особые точки – наиболее простой и хорошо изученный тип особых точек. Точка z_0 является регулярной особой точкой уравнения (4) тогда и только тогда, когда

$$a_i(z) = (z - z_0)^{-i} p_i(z),$$

где функции $p_i(z)$ аналитичны в точке z_0. Точка $z = \infty$ является регулярной особой точкой уравнения (4) тогда и только тогда, когда $a_i(z) = z^{-i} q_i(z)$, где функции $q_i(z)$ аналитичны в точке $z = \infty$. Определяющее уравнение в регулярной особой точке z_0 имеет вид:

$$\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - n + 1) + p_1(z_0)\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - n + 2) + \ldots$$
$$\ldots + p_n(z_0) = 0,$$

его корни называются характеристическими показателями в точке z_0. Если ни одна из разностей $\rho_i - \rho_k$, $i \neq k$, не есть целое число, то уравнение (4) имеет следующую фундаментальную систему решений:

$$w_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i} \varphi_i(z), \ \varphi_i(z_0) = 1, \ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где функции $\varphi_i(z)$ аналитичны в точке z_0. Если среди этих разностей есть целые числа, то решения могут содержать целые степени логарифма $\ln(z - z_0)$.

Уравнение 2-го порядка с регулярной особой точкой z_0 имеет вид:

$$w'' + (z - z_0)^{-1} p_1(z) w' + (z - z_0)^{-2} p_2(z) w = 0, \qquad (5)$$

где функции $p_1(z)$, $p_2(z)$ аналитичны в точке z_0; определяющее уравнение таково:

$$\rho(\rho - 1) + \rho p_1(z_0) + p_2(z_0) = 0.$$

Если $\rho_1 - \rho_2$ – нецелое число, где ρ_i – характеристич. показатели, то уравнение (5) имеет фундаментальную систему решений

$$w_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i} \varphi_i(z),$$

где функции $\varphi_i(z)$ аналитичны в точке z_0, $\varphi_i(z_0) = 1$. Если $\rho_1 - \rho_2$ есть целое неотрицательное число, то уравнение (5) имеет фундаментальную систему решений

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \varphi_1(z),$$

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \varphi_2(z) + \theta w_1(z) \ln(z - z_0),$$

где θ – постоянная, функции $\varphi_i(z)$ аналитичны в точке z_0, $\varphi_i(z_0) = 1$.

Примеры: уравнение Эйри: $w'' - zw = 0$, $z = \infty$ – иррегулярная особая точка; уравнение Бесселя: $z^2 w'' + zw' + (z^2 - \gamma^2)w = 0$, $z = 0$ – регулярная, $z = \infty$ – иррегулярная особая точка; гипергеометрич. уравнение: $z(1 - z)w'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0$ имеет регулярные особые точки: 0, 1, ∞.

Уравнением класса Фукса называется уравнение (4), все особые точки к-рого на римановой сфере являются регулярными. Известен общий вид таких уравнений. Все основные Д. у. 2-го порядка, возникающие в задачах математич. физики, можно получить из уравнения с пятью регулярными независимыми особыми точками; при этом разности характеристич. показателей в каждой особой точке равны 1/2.

Точка z_0 является регулярной особой точкой системы (3), если

$$A(z) = (z - z_0)^{-1} B(z),$$

где матрица-функция $B(z)$ аналитична в точке z_0, $B(z_0) \neq 0$. Если все разности $\rho_i - \rho_k$, $i \neq k$, где ρ_i – собственные значения матрицы $B(z_0)$, не являются целыми числами, то система (3) имеет фундаментальную матрицу вида

$$W(z) = \Phi(z)(z - z_0)^P,$$

где P – диагональная матрица с элементами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, матрица-функция $\Phi(z)$ аналитична в точке z_0 и невырождена. Если среди этих разностей есть целые числа, то фундаментальная матрица содержит целые степени $\ln(z - z_0)$. Неизвестны необходимые и достаточные условия того, что z_0 – регулярная особая точка системы (3). Система

$$w' = w \sum_{k=0}^{m} A_k (z - a_k)^{-1},$$

где a_k – различные комплексные числа, A_k – постоянные ненулевые матрицы порядка $n \times n$ и $A_1 + \ldots + A_m \neq 0$, является системой класса Фукса и имеет регулярные особые точки $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$.

Иррегулярные особые точки. Пусть в системе (3)

$$A(z) = z^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k}, \quad A_0 \neq 0,$$

где $r \geqslant 0$ – целое, ряд сходится при $|z| > R$, тогда $z = \infty$ есть иррегулярная особая точка, и система имеет фундаментальную матрицу вида

$$W(z) = S(z) \exp Q(z),$$

где $Q(z)$ – диагональная матрица, элементы к-рой являются многочленами от $z^{1/n}$, $n > 0$ – целое:

$$q_{ii}(z) = q_{i0} z^{l_i/n} + q_{i1} z^{(l_i - 1)/n} + \ldots + q_{i,l_i - 1} z^{1/n}.$$

Элементы s_{ik} матрицы S имеют вид:

$$s_{ik}(z) = z^{r_{ik}} \sum_{m=0}^{m_{ik}} \sigma_{ikm}(z) \ln^m z,$$

$$\sigma_{ikm}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{ikml} z^{-l/n}.$$

Эти ряды сходятся лишь в исключительных случаях и являются асимптотич. разложениями нек-рой фундаментальной матрицы в нек-рых секторах комплексной плоскости z при $|z| \to \infty$. Асимптотика фундаментальной системы решений уравнения 2-го порядка

$$w'' - z^r (a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots) w = 0$$

дается ВКБ-формулой

$$w_{1,2} \sim z^{-r/4} \exp\left(\pm \int_{z_0}^{z} t^{r/2} (a_0 + a_1 t^{-1} + \ldots)^{1/2} dt \right)$$

(см. *Квазиклассическое приближение*) при $|z| \to \infty$, z лежит в секторе $\alpha < \arg z < \beta$, $\beta - \alpha < 2\pi/(r + 2)$.

Нелинейная теория. Рассмотрим систему из n уравнений и задачу Коши

$$w' = f(z, w),\ w(z_0) = w_0. \qquad (6)$$

Теорема Коши. Пусть вектор-функция $f(z, w)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, $w = w_0$, тогда существует, и притом только одно, решение задачи (6), аналитичное в окрестности точки z_0.

Если аналитически продолжить это решение, то оно будет иметь особую точку. Одно из основных различий между линейными и нелинейными уравнениями состоит в том, что решения линейного уравнения имеют только неподвижные особые точки (они совпадают с особыми точками коэффициентов и правой части), решения нелинейного уравнения могут иметь иные (подвижные) особые точки.

Пример: уравнение $w' = w^2$, решение $w = -(z - C)^{-1}$ имеет полюс в точке $z = C$, C – любое.

Классификация особых точек следующая.

1) Алгебраическая особая точка. Вблизи точки $z = a$ решение представимо сходящимся рядом по целым или дробным степеням $z - a$:

$$w(z) = (z - a)^{p/q} \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - a)^{i/q},$$

где p, q – целые числа, $q \geqslant 1$.

2) Трансцендентная особая точка. Это такая неалгебраич. особая точка, что существует $\lim\limits_{z \to a} w(z)$.

Пример: $w = \ln(z - C)$.

3) Существенно особая точка. Предел $\lim\limits_{z \to a} w(z)$ не существует. Уравнение

$$P(z, w, w') = 0$$

не имеет подвижных существенно особых точек, если P – многочлен от w, w' с аналитическими по z коэффициентами.

Рассмотрим автономную систему из n уравнений

$$w' = f(w),\ w = (w_1, \ldots, w_n),\ f = (f_1, \ldots, f_n), \qquad (7)$$

вектор-функция $f(w)$ аналитична в окрестности точки $w = 0$ и $f(0) = 0$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы Якоби

$$f'(0) = \partial f_i / \partial w_j |_{w=0},$$

то есть матрицы линеаризованной системы. Они называются резонансными, если

$$\lambda_s = \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j$$

при нек-ром s, где $m_j \geqslant 0$ – целые числа,

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \geqslant 2,$$

и нерезонансными – в противном случае.

Теорема Пуанкаре. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нерезонансны и лежат по одну сторону от нек-рой прямой в комплексной плоскости λ, проходящей через начало координат. Тогда с помощью аналитич. замены переменных $w = g(u)$, $g(0) = 0$ система (7) приводится к виду

$$u_j' = \lambda_j u_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

в нек-рой окрестности точки $w = 0$.

Лит.: [1] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939; [2] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.–Л., 1950; [3] Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958; [5] Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978; [6] Федорюк М. В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1983.

М. В. Федорюк.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; группа преобразований – совокупность взаимно однозначных преобразований (независимых и зависимых переменных x, u), образующих группу относительно композиции преобразований и сохраняющих вид рассматриваемого уравнения. Для однопараметрич. группы преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x, u, a) \equiv x + \xi(x, u)a + o(a), \\ u' &= \varphi(x, u, a) \equiv u + \eta(x, u)a + o(a) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

линейный дифференциальный оператор

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u}$$

называется ее инфинитезимальным оператором. При заданном инфинитезимальном операторе преобразования (1) находятся из уравнений Ли

$$\frac{dx'}{da} = \xi(x', u'), \quad \frac{du'}{da} = \eta(x', u'); \quad x'|_{a=0} = x, \quad u'|_{a=0} = u \qquad (2)$$

и образуют локальную [ввиду разрешимости уравнений (2) в малом] группу. Напр., уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

допускает однопараметрич. группы переносов $t' = t + a$ и $x' = x + a$ с инфинитезимальными операторами $X = \frac{\partial}{\partial t}$ и $X = \frac{\partial}{\partial x}$, группу преобразований Галилея $t' = t$, $x' = x + 2at$, $u' = ue^{-(ax + a^2 t)}$ с инфинитезимальным оператором

$$X = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}$$

и т. д.

Построение максимально широкой допускаемой группы требует решения так наз. определяющих уравнений, представляющих собой переопределенную систему линейных Д. у. относительно координат $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$ инфинитезимального оператора (см. [1], § 5; [2], § 4.2). Множество решений определяющих уравнений образует алгебру Ли и поэтому порождает многопараметрич. допускаемую локальную группу.

Допускаемая группа характеризует свойства симметрии Д. у. и используется для его интегрирования или качественного исследования (см. в [2] обсуждение принципа Гюйгенса с групповой точки зрения). Одним из важных достижений С. Ли (S. Lie) явилось открытие того, что известные частные методы понижения порядка и интегрирования в квадратурах конкретных типов обыкновенных Д. у., казавшиеся искусственными и лишенными внутренней связи, могут быть выведены единообразно при помощи теории групп. В механике теория групп широко используется для нахождения законов сохранения ([2], гл. 5) и построения отдельных классов точных решений нелинейных уравнений с частными производными.

Наряду с группами точечных преобразований (1) применяется более широкий класс формальных групп Ли–Беклунда, преобразования к-рых зависят не только от x, u, но и от производных u по x любых порядков (см. [2]). Для группового анализа уравнений с малым параметром введено понятие приближенной группы преобразований (см. [6]), что позволяет находить симметрии, устойчивые относительно малых возмущений Д. у.

Лит.: [1] Овсянников Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978; [2] Ибрагимов Н. Х., Группы преобразований в математической физике, М., 1983; [3] Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х., «Математич. сб.», 1988, т. 136, № 4, с. 435–50.

Н. Х. Ибрагимов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ с частными производными второго порядка – уравнение, которое содержит хотя бы одну производную 2-го порядка от неизвестной функции $u(x)$ и не содержит производных более высокого порядка. Напр., линейное уравнение 2-го порядка имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) + f(x) = 0, \qquad (1)$$

где точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит нек-рой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, в к-рой определены действительнозначные функции $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, и в каждой точке $x \in \Omega$ хотя бы один из коэффициентов $a_{ij}(x)$ отличен от нуля. Для любой точки $x_0 \in \Omega$ существует такое неособое преобразование независи-

мых переменных $\xi = \xi(x)$, что уравнение (1) в новых координатах $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{*}(\xi)\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{*}(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} + \\ + c^{*}(\xi)u(\xi) + f^{*}(x) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется канонич. видом уравнения (1) в точке x_0.

Число k положительных и число l отрицательных в точке ξ_0 коэффициентов $a_{ii}^{*}(\xi)$ в уравнении (2) зависит только от коэффициентов $a_{ij}(x)$ уравнения (1). Это обстоятельство позволяет классифицировать Д. у. (1) следующим образом. Если $k = n$ или $l = n$, то уравнение (1) называется эллиптическим в точке x_0; если $k = n-1$, а $l = 1$, или $k = 1$, а $l = n-1$, то – гиперболическим; если $k + l = n$ и $1 < k < n-1$, то – ультрагиперболическим. Уравнение называется параболическим (в широком смысле) в точке x_0, если хотя бы один из коэффициентов $a_{ii}^{*}(\xi)$ равен нулю в точке $\xi_0 = \xi(x_0)$, $k + l < n$; уравнение называется параболическим в точке x_0, если только один из коэффициентов $a_{ii}^{*}(\xi)$ равен нулю в точке ξ_0 (пусть $a_{11}^{*}(\xi_0) = 0$), а все остальные коэффициенты $a_{ii}^{*}(\xi)$ одного знака и коэффициент $b_1^{*}(\xi_0) \neq 0$.

В случае двух независимых переменных ($n = 2$) тип уравнения удобнее определять с помощью функции

$$\Delta(x) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Так, уравнение (1) является эллиптическим в точке x_0, если $\Delta(x_0) > 0$; гиперболическим, если $\Delta(x_0) < 0$, и параболическим в широком смысле, если $\Delta(x_0) = 0$.

Уравнение называется эллиптическим, гиперболическим и т. д. в области, если оно эллиптично, соответственно, гиперболично и т. д. в каждой точке этой области. Так, напр., уравнение Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

эллиптично при $y > 0$, гиперболично при $y < 0$ и параболично в широком смысле при $y = 0$.

К решению Д. у. 2-го порядка сводится весьма широкий класс физич. задач. См., напр., *Волновое уравнение, Телеграфное уравнение, Теплопроводности уравнение, Лапласа уравнение, Пуассона уравнение, Гельмгольца уравнение.*

А. К. Гущин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ с частными производными первого порядка – уравнение, связывающее искомую функцию $u(x)$, ее первые производные $D_i u = u_{x_i}$, $i = 1, ..., n$, и независимые переменные $x = (x_1, ..., x_n)$. Всякая система Д. у. с частными производными может быть приведена к нек-рой системе уравнений 1-го порядка. Для этого достаточно ввести в качестве новых искомых функций все частные производные от каждой функции $u_i(x)$ до порядка $l_i - 1$ включительно, если хотя бы одна производная порядка l_i входит в какое-либо уравнение рассматриваемой системы. При этом систему следует пополнить новыми уравнениями, выражающими равенство различных смешанных производных. Напр., уравнение 2-го порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

после введения вспомогательных искомых функций $v = u_x$, $w = u_y$ приводится к следующей системе уравнений 1-го порядка:

$$F(x, y, u, v, w, v_x, v_y, w_y) = 0,$$
$$u_x - v = 0,$$
$$u_y - w = 0,$$
$$v_y - w_x = 0$$

(последние три уравнения не независимы).

Одно Д. у. с частными производными 1-го порядка с одной искомой функцией задается соотношением:

$$F(x, u, p) = 0, \qquad (1)$$

где $p = (p_1, p_2, ..., p_n) = (D_1 u, D_2 u, ..., D_n u)$. Всякое решение $u = u(x)$ уравнения (1) при определенных требованиях определяет нек-рую поверхность (интегральную поверхность) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $(x_1, ..., x_n, u)$, причем p_i являются компонентами вектора нормали к этой поверхности.

Полным интегралом уравнения (1) называется решение

$$u = \varphi(x, a) \qquad (2)$$

уравнения (1), существенно зависящее от n параметров $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Если из n-параметрич. семейства поверхностей (2) выделить $(n-k)$-параметрич. семейство, предполагая параметры a связанными k соотношениями $\omega_i(a) = 0$, $i = 1, 2, ..., k$, то соответствующие решения, зависящие от произвольных функций, называются общими интегралами.

Переопределенные системы – это системы уравнений вида (1), в к-рых число независимых уравнений больше числа искомых функций. Такие системы, вообще говоря, противоречивы, и выделение классов непротиворечивых (совместных) систем составляет предмет теории совместности Д. у. с частными производными.

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 2, М., 1979, кол. 324–328.

Н. Н. Кузнецов, Б. Л. Рождественский.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР – оператор, заданный дифференциальным выражением и действующий в пространстве функций. Дифференциальное выражение обобщает понятие производной. Обыкновенное дифференциальное выражение строится следующим образом. Пусть $F(x, y_0, y_1, ..., y_n)$ – вещественная функция $n+2$ переменных, определенная для значений своих аргументов в прямоугольной области $\Delta = I \times J_0 \times J_1 \times ... \times J_n$, где I, J_k – отрезки числовой оси (возможно, уходящие на ∞). Отвечающее ей дифференциальное выражение $F(x, u, du/dx, ..., d^n u/dx^n)$ определено на функциях $u(x)$ с необходимыми свойствами дифференцируемости в Δ: для x из I все $d^k u/dx^k$ существуют и принимают значения из J_k при $0 \leqslant k \leqslant n$. Максимальный порядок производной называется порядком дифференциального выражения. Дифференциальное выражение называется квазилинейным, если F линейна по y_n, и линейным, если она линейна по всем y_k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Все остальные дифференциальные выражения называются нелинейными. Для дифференциальных выражений с частными производными независимые переменные $x = x_1$, ..., x_m пробегают область в $\mathbb{R}^m$, а остальными аргументами F являются функция $u(x)$ и ее частные производные $D^{\alpha}u = \partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_m}/\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_m^{\alpha_m}$. Квазилинейность дифференциального выражения с частными производными означает линейность F по всем производным максимального порядка, а его линейность – линейность F по всем производным и самой функции u. Вся эта терминология автоматически переносится на Д. о.

Помимо дифференциального выражения, Д. о. определяется классом функций, в к-ром он действует. С математич. точки зрения различным классам функций (с разными свойствами гладкости и разными граничными условиями) отвечают различные Д. о. Это различие имеет и физич. интерпретацию.

В большинстве физич. примеров Д. о. линейны. Важнейшие из них – *операторы* квантовой механики. Напр., операторы импульса $\hat{p}_j$, орбитального момента $\hat{M}_j$, гамильтониан $\hat{H}$ для волновых функций $\varphi(q_j)$ в координатном пред-

ставлении реализуются как Д. о.:

$$\hat{p}_j = -i\hbar\partial/\partial q_j, \quad \hat{M}_j = -i\hbar(q_k\partial/\partial q_l - q_l\partial/\partial q_k),$$

$$\hat{H} = -(\hbar^2/2m)\sum_j \left(\partial^2/\partial q_j^2\right) + V(q)$$

(здесь j, k, l — циклич. перестановки индексов 1, 2, 3; m — масса, V — потенциальная энергия частицы). Физич. интерпретация их собственных значений требует, чтобы эти Д. о. были самосопряженными операторами. Но даже в тривиальной физич. ситуации одномерного свободного движения на полуоси $0 \leqslant q < \infty$ гамильтониан $\hat{H} = -(\hbar^2/2m)\,\partial^2/\partial q^2$ будет самосопряженным Д. о. лишь для волновых функций $\psi(q)$, удовлетворяющих граничным условиям $\psi'(0) + a\psi(0) = 0$ с вещественным a. Такие функции можно представить как суперпозицию $\exp(-ikq) + \alpha\exp(ikq)$ приходящей и уходящей плоских волн с импульсом k, где $\alpha = (ik-a)/(ik+a)$ описывает изменение фазы при отражении в точке $q=0$. Таким образом, разные граничные условия описывают разные законы отражения и, следовательно, разные физич. ситуации.

С помощью дифференциальных выражений формулируют и дифференциальные уравнения. Поэтому вопросы существования, единственности, зависимости от начальных данных для решений дифференциальных уравнений естественно ставятся на языке свойств Д. о. как вопросы об области определения, ядре, непрерывности обратного оператора. Напр., теоремы существования решений доказывают с помощью метода сжатых отображений — классич. метода теории операторов. Существенную информацию дают исследование спектра Д. о. и свойств его резольвенты, разложение по его собственным функциям, изучение возмущений Д. о. Наиболее развита теория линейных Д. о., к-рые вообще являются важнейшим примером неограниченных операторов (см. *Линейный оператор*). В дифференциальной геометрии и физич. приложениях особую роль играет класс Д. о., не меняющихся или меняющихся специальным образом при действии на дифференциальное выражение преобразований из нек-рой группы. Д. о. служат для описания структуры ряда математич. объектов. Напр., *обобщенную функцию* медленного роста можно представить как результат действия Д. о. на непрерывную функцию степенного роста.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [2] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [3] Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., М., 1982.

В. П. Павлов.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — см. *Многообразие.*

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ — см. *Аналитическая функция.*

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ ГОМЕОМОРФИЗМ — см. *Диффеоморфизм.*

ДИФФУЗИИ КОЭФФИЦИЕНТ — см. *Диффузионный процесс, Ричардсона закон четырех третей.*

ДИФФУЗИИ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка, описывающее процесс диффузии в случае, когда перенос вещества вызван лишь градиентом его концентрации (в отличие от термодиффузии и т. п.). Д. у. чаще всего записывают в виде

$$\partial u/\partial t = \operatorname{div}(D\operatorname{grad} u) - qu + F, \qquad (1)$$

где $u(\boldsymbol{x}, t)$ — концентрация вещества в точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ среды в момент времени t, D — коэффициент диффузии, q — коэффициент поглощения, а F — интенсивность источников вещества. Величины D, q и F обычно являются функциями $\boldsymbol{x}$ и t, а также могут зависеть от концентрации $u(\boldsymbol{x}, t)$. В последнем случае уравнение (1) становится нелинейным. В анизотропной среде коэффициент диффузии D является тензорным полем.

Наиболее полно исследовано линейное Д. у., когда коэффициенты диффузии D и поглощения q — постоянные величины. В этом случае уравнение (1) является уравнением параболич. типа, для к-рого в математич. физике разработаны различные методы решения: метод разделения переменных, метод источников или функций Грина, метод интегральных преобразований и т. д. Для выделения единственного решения линейного уравнения (1) необходимо также задать начальные и граничные условия (если диффундирующее вещество заполняет конечный объем V, ограниченный боковой поверхностью S). Обычно рассматривают следующие линейные граничные условия для Д. у.:

1) на границе S поддерживается заданное распределение вещества $u_0(\boldsymbol{x}, t)$:

$$u(\boldsymbol{x}, t)\big|_S = u_0(\boldsymbol{x}, t);$$

2) на S поддерживается заданная плотность потока вещества, входящего в V через S:

$$-D\partial u(\boldsymbol{x}, t)/\partial \boldsymbol{n}\big|_S = u_1(\boldsymbol{x}, t),$$

где $\boldsymbol{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности S;

3) S полупроницаема, и диффузия во внешнюю среду с заданной концентрацией $u_0(\boldsymbol{x}, t)$ через S происходит по линейному закону

$$k\partial u(\boldsymbol{x}, t)/\partial \boldsymbol{n} + h[u(\boldsymbol{x}, t) - u_0(\boldsymbol{x}, t)]\big|_S = 0.$$

Простейшее Д. у.

$$\partial u(\boldsymbol{x}, t)/\partial t = D\partial^2 u/\partial x^2;\ t > 0, \qquad (2)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty,$$

имеет решение вида

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,x',t)\varphi(x')dx',$$

$$G(x,x',t) = (4\pi Dt)^{-1/2}\exp\left[-(x-x')^2/4Dt\right]$$

— фундаментальное решение Д. у. (2).

Методы решения Д. у. с переменными коэффициентами диффузии менее развиты. В нек-рых частных случаях, напр., если D зависит только от концентрации u, можно аналитически найти точные решения Д. у. с переменной D.

Нелинейные математич. модели диффузии и теплопроводности (уравнение и граничные условия) условно делят на следующие классы:

1) от концентрации u зависят D или q (нелинейность 1-го рода);

2) нелинейность содержится в граничных условиях (нелинейность 2-го рода);

3) нелинейность возникает вследствие зависимости мощностей внутренних источников F от концентрации u.

Одномерные нелинейные Д. у. можно решить различными приближенными аналитич. методами. Двумерные и трехмерные нелинейные Д. у. при сложной конфигурации границ области и сложных законах изменения характеристик среды, внешних и внутренних источников вещества, переменных границ области, где происходит диффузия, поддаются решению только численными методами с применением ЭВМ. С математич. точки зрения Д. у., являясь частным случаем дифференциального уравнения, описывающего процесс установления равновесного распределения, совпадает с *теплопроводности уравнением* и аналогично *Навье—Стокса уравнению* для ламинарного потока несжимаемой жидкости и т. д.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [2] Коздоба Л. А., Методы решения нелинейных задач теплопроводности, М., 1975; [3] Райченко А. И., Математическая теория диффузии в приложениях, Киев, 1981; [4] Crank J., The mathematics of diffusion, 2 ed., Oxf., 1975.

С. И. Азаков.

ДИФФУЗИОННЫЙ МАСШТАБ СООТВЕТСТВИЯ — см. *Хаос.*

ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС — *марковский процесс* X_t, переходная плотность вероятности которого $p(y,t|x,s)$ удовлетворяет трем условиям (для любого $\varepsilon > 0$):

$$a)\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|>\varepsilon} dy\ p(y, t+\Delta t|x,t) = 0$$

(это условие обеспечивает непрерывность с вероятностью 1 траекторий Д. п.);

б) существует функция $a(x, t)$, называемая дрейфом, такая, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} dy\,(y-x)\,p(y,t+\Delta t|x,t)=a(x,t);$$

в) существует функция $\sigma(x, t)$, квадрат которой $\sigma^2(x, t)$ называется коэффициентом диффузии, такая, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} dy\,(y-x)^2\,p(y,t+\Delta t|x,t)=\sigma^2(x,t).$$

В силу этих условий, выполняющихся равномерно по x и по t, уравнение Колмогорова–Чепмена для переходной плотности вероятности Д. п. может быть преобразовано в линейное дифференциальное уравнение с частными производными, к-рое можно представить как прямое уравнение Колмогорова (в физич. литературе оно носит название уравнения Фоккера – Планка):

$$\frac{\partial}{\partial t}p(y,t|x,s)=-\frac{\partial}{\partial y}a(y,t)p(y,t|x,s)+\\+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma^2(y,t)p(y,t|x,s) \qquad (1)$$

или как обратное уравнение Колмогорова:

$$-\frac{\partial}{\partial s}p(y,t|x,s)=a(x,s)\frac{\partial}{\partial x}p(y,t|x,s)+\\+\frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(y,t|x,s). \qquad (2)$$

Если $p(y, t|x, s)$ имеет непрерывную по y и t производную $\frac{\partial}{\partial t}p(y, t|x, s)$ такую, что

$$\frac{\partial}{\partial y}a(y, t)p(y, t|x, s) \text{ и } \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma^2(y, t)p(y, t|x, s)$$

непрерывны по y, то $p(y, t|x, s)$ является фундаментальным решением уравнения (1). Если функция $p(y, t|x, s)$ непрерывна по x и s вместе со своими производными $\frac{\partial}{\partial x}p(y, t|x, s)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(y, t|x, s)$, то она является фундаментальным решением уравнения (2). Как следует из уравнений (1), (2), Д. п. определяется своими первыми двумя моментами.

Для однородного по времени Д. п.

$$p(y,t|x,s)=p(y,t-s|x,0)=p(y,\tau|x),$$

когда дрейф и коэффициент диффузии не зависят от времени, прямое и обратное уравнения Колмогорова принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}p(y,\tau|x)=-\frac{\partial}{\partial y}a(y)p(y,\tau|x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma^2(y)p(y,\tau|x),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}p(y,\tau|x)=a(x)\frac{\partial}{\partial x}p(y,\tau|x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(y,\tau|x).$$

Прямое и обратное уравнения Колмогорова являются основой аналитич. методов исследования Д. п.

Д. п. тесно связаны со стохастич. дифференциальными уравнениями. Марковский процесс X_t с почти наверное непрерывными траекториями, удовлетворяющий условиям а), б), в), может быть представлен как решение стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dX_t=a(X_t, t)dt+\sigma(X_t, t)dW_t,$$

где W_t – стандартный *винеровский процесс* (процесс броуновского движения), функции $a(x, t)$ и $\sigma(x, t)$, $t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$, непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условиям: условию Липшица – существует такое K, что $|a(x_t, t)-a(y, t)|+|\sigma(x_t, t)-\sigma(y, t)|\leqslant K|x-y|$ и условию роста $|a(x_t, t)|^2+|\sigma(x_t, t)|^2\leqslant K^2(1+|x|^2)$. При этом переходная плотность вероятности процесса X_t существует и удовлетворяет уравнению (1). Метод стохастич. дифференциальных уравнений позволяет строить марковские и диффузионные процессы, приняв за исходный стандартный винеровский процесс.

Многомерный Д. п. – марковский процесс $X_t=\{X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\}$ в n-мерном пространстве, переходная плотность вероятности к-рого удовлетворяет следующим условиям: для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|>\varepsilon} d^n y\;p(y,t+\Delta t|x,t)=0,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} d^n y(y_i-x_i)\;p(y,t+\Delta t|x,t)=a_i(x,t),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} d^n y(y_i-x_i)(y_k-x_k)\times\\\times p(y,t+\Delta t|x,t)=\sigma_{ik}(x,t).$$

Вектор $a(x_t, t)=\{a_1(x, t), \ldots, a_n(x, t)\}$ характеризует дрейф процесса, диффузионная матрица $\sigma(x, t)$ характеризует среднеквадратичное отклонение процесса X_t за малый промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

Прямое и обратное уравнения Колмогорова для многомерного Д. п. имеют соответственно вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(y,t|x,s)=-\frac{\partial}{\partial y_i}a_i(y,t)p(y,t|x,s)+\\+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_t\partial y_k}\sigma_{ik}(y,t)p(y,t|x,s),$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}p(y,t|x,s)=a_i(x,s)\frac{\partial}{\partial x_i}p(y,t|x,s)+\\+\frac{1}{2}\sigma_{ik}(x,s)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}p(y,t|x,s).$$

Многомерный Д. п., описываемый данными уравнениями, может быть представлен как решение стохастич. дифференциальных уравнений:

$$dX_t^{(i)}=a_i(X_t, t)dt+b_{ik}(X_t, t)dW_t^{(k)},$$

где $W_t^{(i)}$ – стохастически независимые стандартные винеровские процессы, $\mathsf{E}\{W_t^{(i)}W_s^{(k)}\}=\delta_{ik}\min(t, s)$, матрица $b(x, t)$ и матрица $\sigma(x, t)$, входящие в многомерные прямое и обратное уравнения Колмогорова, связаны соотношением $\sigma_{ik}(x, t)=(b(x, t)\,b^{\top}(x, t))_{ik}$.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей (Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы), 3 изд., М., 1987; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1977. *Н. В. Ласкин.*

ДИХОТОМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС – *стационарный случайный процесс* $\{\xi(t), t\in\mathbb{R}\}$, который представляет собой *Маркова цепь* с непрерывным временем и двумя значениями $\{x_1, x_2\}$, $x_1<x_2$. Таким образом, случайные реализации Д. п. кусочно постоянны, все непрерывны справа (либо слева) и принимают два неслучайных значения x_1 и x_2. Случайные точки изменения $\{\tau_k, k=\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ каждой реализации представляют собой так наз. пуассоновский поток со средним временем ожидания λ^{-1}, к-рое является параметром Д. п. Это означает, что число точек изменения $N(t_0, t)$ процесса $\{\xi(t)\}$ на полуинтервале $(t_0, t]$ имеет *Пуассона распределение* с плотностью λ:

$$\mathsf{P}\{N(t_0,t)=n\}=\frac{1}{n!}[\lambda(t-t_0)]^n e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Частный случай Д. п. с $X_1=-1$ и $x_2=1$ иногда называют телеграфным процессом $\{\eta(t)\}$. Д. п. общего вида с произвольными x_1, x_2 связан с телеграфным процессом формулой

$$\xi(t)=\frac{1}{2}[x_1+x_2+(x_2-x_1)\eta(t)].$$

Д. п. является удобной и простой моделью в задачах математич. физики в случайнонеоднородных слоистых средах.

Лит.: [1] Кляцкин В. И., Стохастические уравнения и волны в случайнонеоднородных средах, М., 1980. *Ю. П. Вирченко.*

ДЛИНА вектора – см. *Вектор.*

ДЛИНА рассеяния – см. *Рассеяния теория*, *Эффективный радиус рассеяния.*

ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ ПРИНЦИП в классическом варианте – неравенство, связывающее указанные ниже геометрические характеристики и называемое также неравенством Альфорса.

Для голоморфной в области D функции f пусть $n(w)$ – число корней уравнения $f(z)=w$, расположенных в D, и

$$p(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(\rho e^{i\theta})d\theta, \quad \rho>0.$$

Тогда, если $l(\rho)$ – суммарная длина кривых в D, на к-рых $f(z)=\rho$, а σ – площадь области D, то

$$\int_0^{\infty}\frac{(l(\rho))^2}{\rho p(\rho)}d\rho<2\pi\sigma.$$

Это неравенство и различные его обобщения получили многочисленные приложения в теории аналитич. функций и теории отображений.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Суворов Г. Д., Обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений, Киев, 1985.

В. В. Горяйнов.

ДЛР-УРАВНЕНИЯ, Добрушина – Лэнфорда – Рюэля равновесные уравнения,– уравнения относительно вероятностной меры, задающей гиббсовское распределение бесконечной системы (предельное гиббсовское распределение).

Рассмотрим бесконечную непрерывную систему частиц в пространстве $\mathbb{R}^\nu$. Конфигурациями такой системы называют конечные или счетные подмножества $X\subset\mathbb{R}^\nu$ такие, что $\operatorname{card}(X\cap\Delta)<\infty$ для любой ограниченной области $\Delta\subset\mathbb{R}^\nu$. Конфигурации частиц отождествимы с функциями, определенными на $\mathbb{R}^\nu$ и принимающими неотрицательные целые значения, равные в каждой точке числу частиц, находящихся в этой точке. Линейное пространство таких функций обозначим $\mathfrak{X}$ (для произвольной ограниченной области – $\mathfrak{X}_\Lambda$) и введем в нем, естественным образом, топологию и σ-алгебру борелевских подмножеств $\mathcal{S}$ (см. [3]–[5]).

Разобьем пространство $\mathbb{R}^\nu$ на кубы

$$Q(\boldsymbol{r})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^\nu:\lambda(r^i-1/2)\leqslant x^i<(r^i+1/2)\lambda\},$$

где $0<\lambda\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{r}\in\mathbb{Z}^\nu$, r^i, x^i, $i=1,\ldots,\nu$, – координаты, соответственно, векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{x}$, $|\boldsymbol{r}|=\sup_i r^i$. Пусть $n(X,\boldsymbol{r})$ – число частиц данной конфигурации, попадающих в куб $Q(\boldsymbol{r})$. Мера μ на конфигурационном пространстве $(\mathfrak{X},\mathcal{S})$ называется мерой умеренного роста, если она сосредоточена на множестве

$$U_{N\geqslant 0}S_N,$$

где

$$S_N=\Big\{X\in\mathfrak{X}:\sum_{\boldsymbol{r}:|\boldsymbol{r}|\leqslant l}n(X,\boldsymbol{r})^2\leqslant N^2(2l+1)^\nu \text{ для всех } l\Big\}.$$

Условие умеренного роста ограничивает при фиксированном N среднюю плотность частиц в каждом из кубов со стороной $(2l+1)\lambda$.

ДЛР-у. вводятся для вероятностных мер на $(\mathfrak{X},\mathcal{S})$, удовлетворяющих условию умеренного роста, и имеют вид:

$$\int_{\mathfrak{X}}\mu(dX)\varphi(X)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\int_{\Delta^m}dx_1\ldots dx_m\,e^{-\beta U(x_1,\ldots,x_m)}\times$$
$$\times\int_{\mathfrak{X}_{\mathbb{R}^\nu\setminus\Delta}}\mu(dy)\,e^{-\beta W(x_1,\ldots,x_m;Y)}\varphi(\omega_\Delta(x_1,\ldots,x_m)+Y), \qquad (*)$$

где φ – произвольная функция из $\mathcal{L}_1(\mathfrak{X},\mu)$, Δ – ограниченное множество на $\mathbb{R}^\nu$, $Y\in\mathfrak{X}_{\mathbb{R}^\nu\setminus\Delta}$, $\omega_\Delta:\sum_{m=0}^{\infty}\Delta^m\to\mathfrak{X}_\Delta$ – отображение, ставящее в соответствие произвольной конфигурации в Δ функцию $X\in\mathfrak{X}_\Delta$. Равенство (*) означает, что при отображении множества

$$\Big(\sum_{m\geqslant 0}\Delta^m\Big)\mathfrak{X}_{\mathbb{R}^\nu\setminus\Delta}$$

на $\mathfrak{X}$ мера μ представляет собой образ $e^{-\beta W}[\mu_1\times\mu_2]$, где μ_2 – сужение меры μ на $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}^\nu\setminus\Delta}$, а мера μ_1 имеет сужение

$$\frac{z^m}{m!}e^{-\beta U(x_1,\ldots,x_m)}dx_1\ldots dx_m$$

на Δ^m.

Вероятностные меры (распределения), удовлетворяющие ДЛР-у., определяют предельные *гиббсовские состояния.* Для широкого класса потенциалов взаимодействия решение ДЛР-у. единственно при малых z ($\nu>1$) и при $\nu=1$. При больших z и $\nu>1$ множество решений ДЛР-у. имеет более сложную структуру.

Обобщение на случай мер, заданных на фазовом пространстве, очевидно (см., напр., [4], [5]).

Лит.: [1] Добрушин Р. Л., «Функц. анализ и прилож.», 1968, т. 2, с. 31–44; [2] Lanford O. E., Ruelle D., «Comm. Math. Phys.», 1969, v. 13, p. 194–215; [3] Ruelle D., там же, 1970, v. 18, p. 127; [4] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985; [5] Добрушин Р. Л., Маслова Н. Б., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки. Динамические системы статистической механики и кинетические уравнения, III. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 233–307.

П. В. Малышев.

ДЛР-УСЛОВИЯ – см. *Гиббсовские состояния.*

ДОБРУШИНА – ЛЭНФОРДА – РЮЭЛЯ УРАВНЕНИЯ – см. *ДЛР-уравнения.*

ДОЛГОТА – см. *Координаты.*

ДОМИНАНТНЫЙ ВЕС – линейный функционал λ на *Картана подалгебре* такой, что для любого простого корня α_j число

$$\frac{2\langle\lambda,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}$$

неотрицательно.

Ю. А. Неретин.

ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ ПРИНЦИП – сформулированное Н. Бором (N. Bohr, 1927) принципиальное положение квантовой механики, согласно которому получение экспериментальной информации об одних физических величинах, описывающих микрообъект (элементарную частицу, атом, молекулу), неизбежно связано с потерей информации о некоторых других величинах, «дополнительных» к первым (канонически сопряженных с первыми). Такими взаимно дополнительными величинами являются, напр., координата и импульс частицы. В квантовой механике дополнительным физич. величинам соответствуют операторы, не коммутирующие между собой.

С физич. точки зрения Д. п. часто объясняют (следуя Н. Бору) влиянием измерительного прибора, к-рый всегда является макроскопич. объектом, на состояние микрообъекта. При точном измерении одной из дополнительных величин (напр., координаты частицы) с помощью соответствующего прибора другая величина (импульс) в результате взаимодействия частицы с прибором претерпевает полностью неконтролируемое изменение. Такое толкование Д. п. подтверждается анализом простейших экспериментов (напр., измерение координаты частицы с помощью микроскопа), однако, с более общей точки зрения, оно наталкивается на возражения философского характера. С позиций современной квантовой теории измерений роль прибора заключается в «приготовлении» нек-рого состояния квантовой системы. Состояния, в к-рых взаимно дополнительные величины имели бы одновременно точно определенные значения, принципиально невозможны, причем если одна из таких величин точно определена, то значения другой полностью не определены. Таким образом, фактически Д. п. отражает объективные свойства квантовых систем, не связанные с существованием наблюдателя, проводящего эксперимент. Пример взаимно дополнительных описаний состояния микрообъекта – пространственно-временная и импульсно-энергетич. картины.

Д. п. сыграл важную роль в становлении квантовой механики. *Д. В. Гальцов.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МОДУЛЬ эллиптического интеграла – см. *Эллиптический интеграл.*

ДОСТОВЕРНОСТИ УРОВЕНЬ – см. *Анализ данных.*

ДРЕЙФ – см. *Диффузионный процесс.*

ДРЕЙФОВАЯ СКОРОСТЬ – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ДРЕЙФОВОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ – функция вида

$$w = L(z) = \frac{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + b}{c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n + d},$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)$ – комплексные или действительные переменные, a_j, b, c_j, d – комплексные или действительные коэффициенты, $|c_1| + \ldots + |c_n| + |d| > 0$. Если $|c_1| = \ldots = |c_n| = 0$, то Д.-л. ф. является целой линейной функцией; если ранг матрицы $A = \left\| \begin{matrix} a_1 \ldots a_n & b \\ c_1 \ldots c_n & d \end{matrix} \right\|$ равен единице, то $L(z)$ – постоянная. Собственно Д.-л. ф. получается, если $|c_1| + \ldots + |c_n| > 0$ и ранг A равен двум; ниже эти условия предполагаются выполненными.

В случае $n = 1$ и действительных $a_1 = a$, $c_1 = c$, $z_1 = z$ график Д.-л. ф. есть равнобочная гипербола с асимптотами $z = -d/c$ и $w = a/c$. В случае $n = 2$ и действительных a_1, a_2, b, c_1, c_2, d, z_1, z_2 график Д.-л. ф. есть гиперболич. параболоид.

В случае $n = 1$ Д.-л. ф. $L(z)$ есть аналитич. функция комплексного переменного z всюду в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением точки $z = -d/c$, в к-рой $L(z)$ имеет простой полюс. При $n \geqslant 1$ Д.-л. ф. $L(z)$ есть *мероморфная функция* в пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$, имеющая полярным множеством множество

$$\{z \in \mathbb{C}^n;\ c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n + d = 0\}.$$

Е. П. Долженко, Е. Д. Соломенцев.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, дробно-линейное преобразование,– отображение комплексного пространства $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, осуществляемое *дробно-линейными функциями.*

В случае комплексной плоскости $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ – это отличное от константы отображение вида

$$z \to w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где $ad - bc \neq 0$; часто применяется унимодулярная нормировка $ad - bc = 1$. Всякое Д.-л. о. доопределяется соответствиями $\infty \to a/c$ и $-d/c \to \infty$ до взаимно однозначного отображения расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Простейшими среди Д.-л. о. являются линейные: $z \to w = \tilde{a}z + \tilde{b}$, получающиеся при $c = 0$. Всякое нелинейное Д.-л. о. представимо в виде суперпозиции двух линейных отображений и отображения L_0: $z \to w = 1/z$.

Е. Д. Соломенцев.

ДРОБОВОГО ШУМА ПРОЦЕСС – см. *Пуассоновский процесс.*

ДУАЛЬНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА – см. *Дифференциальная форма.*

ДУАЛЬНОЕ ПОЛЕ – см. *Дуальность.*

ДУАЛЬНОСТИ ОПЕРАТОР – оператор на многообразии M^n размерности n в присутствии метрики g_{ij}, определяемый равенством

$$(*T)_{i_{k+1} \ldots i_n} = \frac{1}{k!} \sqrt{\det(g_{ij})}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} T^{i_1 \ldots i_k},$$

где

$$T^{i_1 \ldots i_k} = g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_k j_k} T_{j_1 \ldots j_k},$$

компонента $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ отлична от нуля, лишь если среди индексов $i_1, \ldots, i_n$ нет повторяющихся и тогда $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = +1$, если $\operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_n) = 1$ и -1, если $\operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_n) = -1$. Д. о. задает изоморфизм пространства кососимметрич. тензоров типа $(0, k)$ на пространство кососимметрич. тензоров типа $(0, n-k)$. Иногда Д. о. называется оператором Ходжа или *-оператором. *В. В. Трофимов.*

ДУАЛЬНОСТЬ антисимметричных тензоров на n-мерном ориентированном римановом многообразии M задается формулой

$$\tilde{F}_{j_1 \ldots j_{n-k}} = \frac{1}{k!} \sqrt{g}\, \varepsilon_{j_1 \ldots j_{n-k}\, i_1 \ldots i_k} F^{i_1 \ldots i_k},$$

где g – детерминант метрического тензора, ε – полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты. Иначе говоря, переход к дуальному тензору осуществляется поднятием индексов и последующей сверткой с тензором, соответствующим форме объема. Это же преобразование, рассматриваемое как операция на дифференциальных формах, обозначается * и называется оператором Ходжа. Естественным скалярным произведением двух форм одинаковой степени служит

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \int_M \omega \wedge *\omega'.$$

Эти определения применимы и к алгеброзначным тензорам и формам. Если

$$F = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

– напряженность калибровочного поля на 4-мерном многообразии, то решения уравнений дуальности $*F = \pm F$ называются самодуальными и антисамодуальными полями. В случае неабелевой калибровочной группы имеются решения с нетривиальным целочисленным топологич. зарядом

$$q = (1/32\pi^2) \langle F, *F \rangle$$

– инстантоны.

Лит.: [1] Шутц Б., Геометрические методы математической физики, пер. с англ., М., 1984; [2] Шварц А. С., Квантовая теория поля и топология, М., 1989. *М. А. Соловьев.*

ДУАЛЬНОСТЬ реджеонно-резонансная в теории сильных взаимодействий – корреляция между вкладами в амплитуду рассеяния резонансных промежуточных состояний и полюсов Редже, которые доминируют, соответственно, при низких и высоких энергиях. Построение дуальных амплитуд связано со следующей задачей: найти симметрич. функцию двух переменных, имеющую по каждой из них лишь полюсные особенности, причем такие, что вычет в каждом полюсе по одной из переменных является многочленом по другой. Решение выражается через Г-функцию.

Лит.: [1] Шелест В. П., Зиновьев Г. М., Миранский В. А., Модели сильновзаимодействующих элементарных частиц, М., 1976; [2] Маринов М. С., «Успехи физич. наук», 1977, т. 121, № 3, с. 378–425. *М. А. Соловьев.*

ДУБА ТЕОРЕМА – см. *Орнштейна–Уленбека процесс.*

ДУГА графа – см. *Граф.*

ДУФФИНГА УРАВНЕНИЕ – обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$x'' + kx' + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = F \cos \omega t, \qquad (*)$$

где $k > 0$, ω_0, α, F, ω – постоянные. Это уравнение представляет собой важный пример системы (с одной степенью свободы) с нелинейной восстанавливающей силой $f(x) = -\omega_0^2 x - \alpha x^3$ и затуханием, совершающей вынужденные колебания при гармонич. внешнем воздействии $F(t) = F \cos \omega t$. При $\alpha > 0$ говорят о жесткой упругой силе, а при $\alpha < 0$ – о мягкой. Впервые исследование решений уравнения (*) предпринял Г. Дуффинг [1].

Решения Д. у. в замкнутой форме получить не удается. Доказано, что оно имеет большое число разнообразных периодич. решений. В уравнении (*) возможны гармонич. колебания $x = A\cos\omega t$ с амплитудой $A = A(\omega)$, к-рая является функцией частоты (амплитудная кривая); для нек-рых значений частоты ω могут иметь место несколько видов колебаний, отличающихся по амплитуде. При определенных условиях в Д. у. возникают субгармонич. колебания с частотами ω/n, где n – целое число. Для изучения решений уравнения (*) часто применяются методы малого параметра.

Лит.: [1] Duffing G., Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung, Braunschweig, 1918; [2] Стокер Д., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [3] Хаяси Т., Нелинейные колебания в физических системах, пер. с англ., М., 1968. *Н. Х. Розов.*

ДЫНКИНА ДИАГРАММА – граф, определяемый базисом $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ пространства гомологий, состоящим из *исчезающих циклов*. Д. д. имеет μ вершин, i-я и j-я вершины к-рой соединены ребром кратности $(\Delta_i \circ \Delta_j)(\cdot\circ\cdot)$ – симметричная *пересечений форма*. *С. В. Чмутов.*

ДЭВИСА МОДЕЛЬ – модель неидеального бозе-газа. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ – сосуд в d-мерном евклидовом пространстве, объем сосуда $|\Lambda| = V$. Пусть $\{\varepsilon_k(\Lambda)\}_{k\geqslant 1}$ – спектр одночастичного гамильтониана T_Λ^σ, соответствующего самосопряженному расширению оператора $T_\Lambda = (-\Delta/2m)$, $D(T_\Lambda) = C_0^\infty(\Lambda)$ с граничными условиями σ на $\partial\Lambda$. Здесь Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$, а m – масса частицы. Пусть Ω – пространство финитных последовательностей $\omega = \{\omega_k\}_{k\geqslant 1}$ неотрицательных целых чисел. Тогда величины $n_k : \omega \to \omega_k$, $k = 1, 2, \ldots$, называемые числами заполнения соответствующих уровней одночастичного спектра, а гамильтониан идеального бозе-газа в сосуде Λ имеет вид:

$$T_\Lambda(\omega) = \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon_k(\Lambda) n_k(\omega).$$

Сужение

$$T_\Lambda | \Omega^{(N)} = T_\Lambda^{(N)},$$

где

$$\Omega^{(N)} = \Big\{\omega \in \Omega : \sum_{k\geqslant 1} \omega_k = N\Big\},$$

соответствует системе N идеальных бозонов в сосуде Λ.

Пусть

$$N_\Lambda(\omega) = \sum_{k\geqslant 1} n_k(\omega),$$

тогда модель Дэвиса определяется гамильтонианом (см. [1]):

$$H_\Lambda(\omega) = T_\Lambda(\omega) + \frac{g}{2V} N_\Lambda^2(\omega), \quad g \geqslant 0,$$

к-рый соответствует включению между бозонами отталкивания (для $g < 0$ система неустойчива), пропорционального квадрату плотности числа частиц. Д. м. является точно решаемой в том смысле, что соответствующие плотности термодинамич. потенциалов, плотность бозе-конденсата и структура предельных распределений, порождаемых на Ω гиббсовским распределением

$$P_\Lambda[\omega] = \Xi_\Lambda^{-1} \exp\{-\beta(H_\Lambda(\omega) - \mu N_\Lambda(\omega))\},$$

β – обратная температура, μ – химич. потенциал, могут быть найдены в явном виде. Обобщение и свойства Д. м. для случая взаимодействия вида $V\omega(N_1(\omega)/V)$, где $\omega(x) : \mathbb{R}_+^1 \Rightarrow \mathbb{R}^1$ – полуограниченная снизу непрерывная функция, см. [2]–[3].

Лит.: [1] Davies E., «Comm. Math. Phys.», 1972, v. 28, № 1, p. 69–86; [2] Загребнов В. А., Папоян В., «Теоретич. и математич. физика», 1986, т. 69, № 3, с. 420–38; [3] Levis J. T., Pule J. V., Zagrebnov V. A., «Helv. Phys. Acta», 1988, v. 61, № 8, p. 1063–78. *В. А. Загребнов.*

ДЮАМЕЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ – функция

$$(\hat{A}, \hat{B}) = \int_0^1 d\mu \left\langle e^{\beta\mu\hat{H}} \hat{A} e^{-\beta\mu\hat{H}} \hat{B} \right\rangle_{\beta\hat{H}},$$

где $\hat{A}$, $\hat{B}$ – операторы, $\hat{H}$ – гамильтониан, β – обратная температура и $\langle\ldots\rangle_{\beta\hat{H}}$ – температурное гиббсовское среднее с гамильтонианом $\hat{H}$ и обратной температурой β в объеме V. Д. к. ф. обладает свойством скалярного произведения. Д. к. ф. названа по имени Ж. Дюамеля (J. Duhamel); введена в статистич. механику Н. Н. Боголюбовым [1].

Лит.: [1] Bogolyubov N. N., «Phys. Abh. S. U.», 1962, v. 1, № 1, p. 229; [2] Roepstorff G., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 46, № 3, p. 253. *Д. П. Санкович.*

E

ЕВКЛИДОВА КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – раздел квантовой теории поля, в котором квантовые поля определены на 4-мерном евклидовом пространстве. Связь между Е. к. т. п. и обычной релятивистской квантовой теорией поля наиболее прозрачна в *аксиоматической квантовой теории поля*. Вакуумное ожидание произведения квантовых полей является граничным значением *Вайтмана функции*, к-рая голоморфна в произведении 4-мерных труб будущего. В частности, она голоморфна, если все временные переменные чисто мнимые и имеют положительную мнимую часть, а пространственные переменные вещественные. Сужение функции Вайтмана на такое множество называется *Швингера функцией*. Такие функции интерпретируются как вакуумные ожидания от произведений евклидовых квантовых полей.

Впервые идея перехода к мнимым временам (с целью замены индефинитной метрики Минковского положительно определенной евклидовой метрикой) появилась в работе Ф. Дайсона (F. Dyson, 1949). Затем предложение рассматривать область мнимых времен выдвинули Е. С. Фрадкин, Т. Накано (T. Nakano), Дж. Вик (G. Wick) и, особенно настойчиво, Ю. Швингер (J. Schwinger). На возможность чисто евклидова подхода к квантовой теории поля впервые указал К. Симанзик (K. Symanzik). В 1973–75 К. Остервальдер (K. Osterwalder) и Р. Шрадер (R. Schrader) сформулировали аксиомы для функций Швингера, эквивалентные системе аксиом Вайтмана. Однако аксиомы Остервальдера – Шрадера мало пригодны для приложений. Поэтому вопрос о связи Е. к. т. п. с теорией Вайтмана до сих пор открыт. Евклидово квантовое поле представляет собой обобщенное *марковское случайное поле*. Это позволило применить к Е. к. т. п. методы статистич. физики и привело к бурному развитию конструктивной квантовой теории поля.

Лит.: [1] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Конструктивная теория поля, сб. статей, пер. с англ., М., 1977; [3] Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход, сб. статей, пер. с англ., М., 1978.

Ю. М. Зиновьев.

ЕВКЛИДОВА МЕТРИКА – см. *Метрический тензор.*

ЕВКЛИДОВА ФУНКЦИЯ ГРИНА – см. *Швингера функция.*

ЕВКЛИДОВО ДЕЙСТВИЕ – см. *Инстантон.*

ЕВКЛИДОВО КВАНТОВОЕ ПОЛЕ; $P(\varphi)_{\nu+1}$-модели – класс моделей скалярного нейтрального поля в пространстве $\mathbb{R}^{\nu+1}$, формальное евклидово действие которых имеет вид

$$S(\xi)=\int_{\mathbb{R}^{\nu+1}}\left[(\nabla\xi)^2(x)+m^2\xi^2(x)+\lambda P(\xi(x))\right]dx, \qquad (1)$$

где $\{\xi(x),\ x\in\mathbb{R}^{\nu+1}\}$ – поле, $P(\cdot)$ – ограниченный снизу полином, $\lambda>0$ – параметр.

Полное и математически корректное определение и построение таких полей (в рамках так наз. марковского подхода, см. [1]) в случае $\nu=1$ исходят из следующих посылок.

1) Поле $\{\xi(x)\}$, соответствующее действию (1), задается как обобщенное *марковское случайное поле* в $\mathbb{R}^2$, инвариантное относительно движений и обладающее рядом дополнительных свойств [общая редукция построения квантового евклидова поля к построению марковского поля (см. [1]) составляет основу упомянутого выше «марковского подхода»].

2) На интуитивно-эвристическом уровне «плотность» распределения вводимого марковского поля $\{\xi(x)\}$ относительно (несуществующей) меры

$$\prod_{x\in\mathbb{R}^2}d\xi(x)$$

имеет вид

$$\text{const}\cdot\exp(-S(\xi)). \qquad (2)$$

Такой вид возникает как обобщение фейнмановского подхода в квантовой механике с помощью функциональных интегралов, хорошо изученного для систем с конечным числом степеней свободы (см. [2]).

Определение (и одновременно построение) моделей $P(\varphi)_2$ состоит в придании точного математич. смысла формуле (2). Для этого сначала рассматривается случай $\lambda=0$ («свободное» поле), при к-ром действие (1) имеет вид положительной квадратичной формы

$$S_{\lambda=0}(\xi)=\left((-\Delta+m^2)\xi,\xi\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \qquad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^2)$, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в этом пространстве. Формула (2) подсказывает, что в этом случае поле $\{\xi(x)\}$ следует считать обобщенным *гауссовым случайным полем* со средним нуль и ковариационным функционалом

$$\langle\xi(\varphi_1),\xi(\varphi_2)\rangle=\left((-\Delta+m^2)^{-1}\varphi_1,\varphi_2\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)}=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\tilde\varphi_1(k)\overline{\tilde\varphi_2(k)}\,d^2k}{k^2+m^2}, \qquad (4)$$

где $\varphi_1,\ \varphi_2\in S(\mathbb{R}^2)$ – гладкие быстро убывающие функции, $\tilde\varphi_1,\ \tilde\varphi_2$ – их преобразования Фурье, а $\xi\in S(\mathbb{R}^2)$ – обобщенная функция умеренного роста, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – среднее по распределению μ_0 гауссова поля. Далее, в случае $\lambda>0$ распределение поля $\lambda P(\varphi)_2$ задается в виде так наз. гиббсовской перестройки (см. [4]) гауссова поля, а именно, сначала строится так наз. локальное возмущение этого поля с распределением

$$d\mu_\Lambda=\frac{1}{z_\Lambda}\exp\left\{-\lambda:\int_\Lambda P(\xi(x))dx:\right\}, \qquad (5)$$

где $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$ – ограниченная область,

$$:\int_\Lambda P(\xi(x))dx:$$

– так наз. виковская регуляризация функционала

$$\int_\Lambda P(\xi(x))dx,$$

а Z_Λ – нормирующий множитель. Глобальное возмущение получается как термодинамич. предел

$$\mu=\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^2}\mu_\Lambda, \qquad (6)$$

где предельный переход $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^2$ означает предел по любой расширяющейся последовательности областей, заполняющих все пространство $\mathbb{R}^2$, а сходимость (6) понимается как слабая сходимость конечномерных распределений мер μ_Λ.

В случае $\lambda\ll1$ все шаги описанного построения обоснованы, полученное поле является марковским и обладает всеми нужными свойствами. В случае $\lambda\gg1$ также удается провести эти построения, но при этом может возникнуть несколько предельных полей (фазовый переход). В случае $\nu=3$ описанный подход применим только к нек-рым полиномам $P(\cdot)$, а при построении локального возмущения (5) требуется введение так наз. контрчленов (то есть более сложной регуляризации функционала $\int_\Lambda P(\xi(x))\,dx$). Другой близкий к этому подход связан с применением методов и идей *ренормализационной группы.*

Лит.: [1] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984; [3] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [5] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи математич. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67–122; [6] Малышев В. А., Ультрафиолетовые проблемы в теории поля, в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. и математич. статистика, т. 24, М., 1986.

Р. А. Минлос.

ЕВКЛИДОВО КВАНТОВОЕ ПОЛЕ; решетчатые модели – решетчатые аналоги (то есть определенные на решетке $\mathbb{Z}^{\nu+1}$) моделей непрерывных евклидовых полей в пространстве $\mathbb{R}^{\nu+1}$, $\nu=1,\ 2,\ 3$. Понятие евклидова решетчатого поля аксиоматически вводится следующим образом.

Полевая алгебра $\mathfrak{A}$ – нек-рая (топологическая) алгебра с единицей $\mathbb{1}$ и инволюцией $*: A\to A^*,\ A\in\mathfrak{A}$, в к-рой выделено семейство образующих (полевых) переменных

$$\{\eta_{x,\alpha},\ \eta^*_{x,\alpha},\ x=(x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^\nu)\in\mathbb{Z}^{\nu+1},\ \alpha\in M\},$$

помеченных точками решетки $\mathbb{Z}^{\nu+1}$, а иногда ее ребрами $b=(x_1,\ x_2),\ (x_1-x_2)=1,\ x_1,\ x_2\in\mathbb{Z}^{\nu+1}$, и еще, быть может, индексами α из нек-рого множества M.

Трансляции определяются представлением группы сдвигов решетки, к-рое задается с помощью гомоморфизмов $\tau_s,\ s\in\mathbb{Z}^{\nu+1}$, алгебры $\mathfrak{A}$, действующих на образующие $\eta_{x,\alpha},\ \eta^*_{x,\alpha}$ по формуле

$$\tau_s\eta_{x,\alpha}=\eta_{x+s,\alpha},\ \tau_s\eta^*_{x,\alpha}=\eta^*_{x+s,\alpha},\ s\in\mathbb{Z}^{\nu+1}. \qquad (1)$$

Отражение «во времени» (то есть отражение в плоскости $x^0=0$) представляется инволюцией $\theta:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{A}$, коммутирующей с исходной инволюцией $*$ и действующей на образующие по формуле

$$\theta\eta_{x,\alpha}=\sum\nolimits_\beta\gamma_{\alpha,\beta}\eta^*_{\nu x,\beta},\quad \theta\eta^*_{x,\alpha}=\sum\nolimits_\beta\overline{\gamma_{\alpha,\beta}}\eta_{\nu x,\beta}, \qquad (2)$$

где ν – отражение $\mathbb{Z}^{\nu+1}$ в плоскости $x^0=0$, а $\gamma=\{\gamma_{\alpha,\beta}\}$, $\gamma^2=E$ – нек-рая матрица.

Поле (евклидово) на $\mathfrak{A}$ определяется нек-рым квазисостоянием $\langle\cdot\rangle$ (то есть усреднением – линейным функционалом на алгебре $\mathfrak{A}$ таким, что $\langle\mathbb{1}\rangle=1$ и удовлетворяющим условиям:

1) $\langle\tau_sA\rangle=\langle A\rangle,\ A\in\mathfrak{A},\ s\in\mathbb{Z}^{\nu+1}$ (**трансляционная инвариантность**);

2) $\langle\theta A\rangle=\langle\bar{A}\rangle$, $A\in\mathfrak{A}$ (отражательная инвариантность);

3) $\langle A\theta A\rangle\geqslant 0$, $A\in\mathfrak{A}_+$ (положительность в смысле Остервальдера – Шрадера), где $\mathfrak{A}_+<\mathfrak{A}$ – подалгебра, порожденная образующими $\{\eta_{x,\alpha}, \eta^*_{x,\alpha}, x=(x^0, ..., x^\nu), x^0\geqslant 0, \alpha\in M\}$ (алгебра «будущего»).

Большой класс решетчатых моделей евклидова поля составляют так наз. киральные бозе-поля со значениями в нек-ром (топологическом) пространстве Σ. В этом случае полевой алгеброй служит алгебра $C(\Omega)$ непрерывных ограниченных функций, заданных на совокупности $\Omega=\Sigma^{\mathbb{Z}^{\nu+1}}$ конфигураций поля (то есть функций $\sigma=\{\sigma(x), x\in\mathbb{Z}^{\nu+1}\}$ на $\mathbb{Z}^{\nu+1}$ со значениями в Σ), снабженной тихоновской топологией. Полевые переменные выбираются в виде $\eta_{x,\alpha}=\varphi_\alpha(\sigma(x))$, $x\in\mathbb{Z}^{\nu+1}$, $\alpha\in M$, где $\{\varphi_\alpha(\cdot), \alpha\in M\}$ – нек-рый набор образующих алгебры $C(\Sigma)$. Отражение θ в описываемом случае определяется единичной матрицей $\gamma=E$. Каждая модель бозе-поля задается своим (формальным) евклидовым действием

$$S(\sigma)=\sum_{x,\mu}P\left(\eta_{x,\alpha},\eta^*_{x,\alpha},\eta_{x+e\mu,\alpha},\eta^*_{x+e\mu,\alpha}\right), \qquad (3)$$

где $P(\cdot)$ – вещественный ограниченный снизу полином от переменных $\{\eta_{x_1,\alpha},\eta^*_{x_1,\alpha},\eta_{x_2,\alpha},\eta^*_{x_2,\alpha}\}$, где $x_1, x_2\in\mathbb{Z}^{\nu+1}$, $e\mu$, $\mu=0, ..., \nu$, – единичные орты решетки $\mathbb{Z}^{\nu+1}$, а (формальное) суммирование в (3) происходит по всем парам (x, μ). Предполагается далее, что в пространстве Σ фиксирована нек-рая мера χ, и квазисостояние $\langle\cdot\rangle$ на алгебре $C(\Omega)$ определяется как предел на всюду плотном множестве цилиндрич. функций $f\in C(\Omega)$:

$$\langle f\rangle=\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{Z}^{\nu+1}}\langle f\rangle_\Lambda.$$

Здесь для каждого конечного множества $\Lambda\subset\mathbb{Z}^{\nu+1}$

$$\langle f\rangle_\Lambda=\frac{1}{z_\Lambda}\int_{\Sigma^\Lambda}f\exp\{-S_\Lambda\}\prod_{x\in\Lambda}d\chi(\sigma(x)),$$

где S_Λ – конечная часть суммы (3):

$$S_\Lambda=\sum\nolimits^{(1)}P\left\{\eta_{x_1,\alpha},\eta^*_{x_1,\alpha},\eta_{x_2,\alpha},\eta^*_{x_2,\alpha}\right\} \qquad (4)$$

(в $\sum^{(1)}$ суммирование проводится по $(x_1, x_2)\subset\Lambda$, $|x_1-x_2|=1$), а Z_Λ – нормирующий множитель (статистич. сумма). Предел $\Lambda\nearrow\mathbb{Z}^{\nu+1}$ означает предел по произвольной возрастающей последовательности конечных подмножеств $\Lambda\subset\mathbb{Z}^{\nu+1}$, заполняющих в объединении всю решетку. Построенное таким образом квазисостояние $\langle\cdot\rangle$ на $C(\Omega)$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Примерами решетчатых бозе-полей служат модель Изинга и модель Янга – Миллса (калибровочное поле).

Первую модель (Изинга), хотя и возникшую в статистич. физике, можно рассматривать как простейшую модель евклидова квантового поля. Пространством значений здесь служит множество $\Sigma=\{-1, 1\}$ с мерой $\chi(\{1\})=\chi(\{-1\})=1/2$, а действие равно

$$S(\sigma)=\sum\nolimits^{(2)}J\sigma(x)\sigma(x'),$$

$$\sigma=\{\sigma(x)=\pm 1, x\in\mathbb{Z}^{\nu+1}\}$$

(в $\sum^{(2)}$ суммирование проводится по (x, x'), $|x-x'|=1$).

Калибровочное поле определено на ориентированных ребрах решетки $\sigma=\{\sigma(b), b=(x_1, x_2), |x_1-x_2|=1, x_1, x_2\in\mathbb{Z}^{\nu+1}\}$ и принимает значения из нек-рой компактной группы Σ с мерой Хаара χ. При этом рассматриваются лишь конфигурации поля, удовлетворяющие условию $\sigma(-b)=\sigma^{-1}(b)$ для любого ребра b ($-b$ – ребро противоположной ориентации), а в качестве алгебры $\mathfrak{A}$ выбирается алгебра C^{gouge} непрерывных функций, инвариантных относительно калибровочных преобразований $\sigma(b)\to\gamma(x_1)\sigma(b)\gamma^{-1}(x_2)$, $b=(x_1, x_2)$, действующих в пространстве конфигураций. Здесь $\gamma=\{\gamma(x), x\in\mathbb{Z}^{\nu+1}$, – произвольная функция на $\mathbb{Z}^{\nu+1}$ со значениями в группе Σ. Действие в этой модели имеет вид

$$S(\sigma)=\sum\nolimits_p\mathrm{Re}\,g_0(\sigma_p), \qquad (5)$$

где суммирование берется по всем двумерным граням решетки, $\sigma_p=\Pi_{b\in\partial p}\sigma(b)$, а $g_0(\cdot)$ – характер нек-рого (простейшего) неприводимого представления группы.

Другой класс решетчатых моделей евклидовых полей образуют ферми-поля. В этом случае $\mathfrak{A}$ – грассманова алгебра с (антикоммутирующими) образующими

$$\{\eta_{x,\alpha}, \eta^*_{x,\alpha}, x\in\mathbb{Z}^{\nu+1}, \alpha\in M\}$$

(см. [2]), помеченными точками сдвинутой решетки $\tilde{\mathbb{Z}}^{\nu+1}\subset\mathbb{Z}^\nu\times\tilde{\mathbb{Z}}^1$, где $\tilde{\mathbb{Z}}^1$ – решетка полуцелых чисел. Действие S снова имеет вид (4), где $P\{\eta_{x_1,\alpha},\eta^*_{x_1,\alpha},\eta_{x_2,\alpha},\eta^*_{x_2,\alpha}\}$ – четный полином от образующих, инвариантный относительно инволюции в $\mathfrak{A}$. Квазисостояние $\langle\cdot\rangle$ на $\mathfrak{A}$ снова определяется как предел

$$\langle\cdot\rangle=\lim_{\Lambda\nearrow\tilde{\mathbb{Z}}^{\nu+1}}\langle\cdot\rangle_\Lambda, \qquad (6)$$

где для любого конечного $\Lambda\subset\tilde{\mathbb{Z}}^{\nu+1}$

$$\langle f\rangle_\Lambda=\frac{1}{z_\Lambda}\int_{\mathfrak{A}_\Lambda}f\exp(-S_\Lambda)\prod\nolimits^{(1)}d\eta_{x,\alpha}\prod\nolimits^{(2)}d\eta^*_{x,\alpha}$$

(в $\prod^{(1)}$ и в $\prod^{(2)}$ умножение проводится по $x\in\Lambda$, $\alpha\in M$), $\mathfrak{A}_\Lambda\subset\mathfrak{A}$ – подалгебра, порожденная образующими $\{\eta_{x,\alpha}, \eta^*_{x,\alpha}, x\in\Lambda, \alpha\in M\}$, а

$$\int_{\mathfrak{A}_\Lambda}\dots\prod\nolimits^{(1)}d\eta_{x,\alpha}\prod\nolimits^{(2)}d\eta^*_{x,\alpha}$$

– так наз. интеграл Березина по этой алгебре, то есть линейный функционал на $\mathfrak{A}_\Lambda$, равный нулю на всех мономах вида $\Pi\eta_{x,\alpha}\Pi\eta^*_{x,\alpha}$, кроме «полного» монома $\Pi_{x\in\Lambda,\,\alpha\in M}\eta_{x,\alpha},\eta^*_{x,\alpha}$, содержащего все образующие алгебры $\mathfrak{A}_\Lambda$, на к-ром этот функционал равен единице. При надлежащем выборе полинома $P\{\eta_{x_1,\alpha},\eta^*_{x_1,\alpha},\eta_{x_2,\alpha},\eta^*_{x_2,\alpha}\}$ и матрицы γ в (2) квазисостояние (6) удовлетворяет требованиям 1), 2), 3).

Пример решетчатого ферми-поля – свободное дираковское поле в $\tilde{\mathbb{Z}}^{3+1}$. Здесь при каждом $\gamma\in\tilde{\mathbb{Z}}^{3+1}$ имеется восемь образующих $\{\eta_{x,\alpha}, \eta^*_{x,\alpha}, \alpha=0, 1, 2, 3\}$, а действие имеет вид:

$$S=\sum_{x,\alpha,\beta,\mu}\left[\eta_{x,\alpha}\gamma^\mu_{\alpha,\beta}\eta^*_{x+e\mu,\beta}+\eta_{x,\alpha}\gamma^\mu_{\alpha,\beta}\eta^*_{x-e\mu,\beta}\right]+$$

$$+\sum_{x,\alpha}m\eta_{x,\alpha}\eta^*_{x,\alpha}, \qquad (7)$$

где m – параметр, а $\gamma^\mu=\{\gamma^\mu_{\alpha,\beta}\}$, $\mu=0, 1, 2, 3$, – матрицы Дирака (то есть самосопряженные матрицы, удовлетворяющие условиям $\gamma^\mu\gamma^{\mu'}+\gamma^{\mu'}\gamma^\mu=0$, $\mu\neq\mu'$, $(\gamma^\mu)^2=E$).

Существуют также модели, включающие как бозе-, так и ферми-поля. Наиболее известный пример – решетчатая модель хромодинамики, описывающая взаимодействие дираковского поля на решетке $\tilde{\mathbb{Z}}^{3+1}$ с калибровочным полем на этой решетке, принимающим значения в группе $SU(4)$. Действие в этой модели представляется как сумма янг-миллсовского действия (5) (в к-ром g_0 – характер основного представления этой группы в пространстве $\mathbb{C}^4$), дираковского действия (7) и действия

$$S_{\text{вз}}=h\sum\nolimits_{x,\alpha,\beta,\mu}\eta_{x,\alpha}\sigma_{\alpha,\beta}(x,x+e\mu)\eta^*_{x+e\mu,\beta},$$

определяющего взаимодействие между полями. Здесь

$$\sigma(\beta)=\{\sigma_{\alpha,\beta}(b)\}\subset SU(4),$$

где b – ребро $\mathbb{Z}^{3+1}$, h – параметр.

Лит.: [1] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Зайлер Э., Калибровочные теории, пер. с англ., М., 1985; [3] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984.

Р. А. Минлос.

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО – конечномерное *векторное пространство* с положительно определенным *скалярным произведением*. Является непосредственным обобщением обычного трехмерного пространства. В Е. п. существуют декартовы координаты, в к-рых скалярное произведение (x, y) векторов $x=(x_1, ..., x_n)$ и $y=(y_1, ..., y_n)$ имеет вид:

$$(x, y)=x_1y_1+...+x_ny_n.$$

В произвольных координатах скалярное произведение по определению удовлетворяет условиям: 1) $(x, x)\geqslant 0$, $(x, x)=0$ лишь при $x=0$; 2) $(x, y)=(y, x)^*$; 3) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$; 4) $(x, y+z)=(x, y)+(x, z)$, где α – любое комплексное число, * означает комплексное сопряжение. В Е. п. имеет место неравенство Коши

$$|(x, y)|^2\leqslant(x, x)(y, y).$$

Число

$$|x|=\sqrt{(x,x)}$$

называется нормой (или длиной) вектора x, а угол θ между векторами x, y находят из формулы

$$\cos\theta=(x, y)/|x|\ |y|.$$

Первоначально евклидовыми назывались пространства, в к-рых выполнены аксиомы евклидовой геометрии, основными понятиями к-рой являются длина векторов и угол между ними. Бесконечномерное Е. п. обычно называется *гильбертовым пространством*. Пространство, в к-ром нарушено условие 1) положительности скалярного произведения, называется псевдоевклидовым пространством.

С. В. Молодцов.

ЕГОРОВА ТЕОРЕМА – см. *Симплектическая геометрия.*

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – единая теория материи, призванная свести все многообразие свойств элементарных частиц и их взаимопревращений (взаимодействий) к небольшому числу универсальных принципов. Такая теория еще не построена и рассматривается скорее как стратегия развития физики микромира.

Первым примером объединения различных физич. явлений (электромагнитных, световых) принято считать *Максвелла уравнения*. Следующим этапом были попытки А. Эйнштейна (A. Einstein) объединить электромагнитные и гравитационные явления на основе общей теории относительности, связывающей гравитационные взаимодействия материи с геометрич. свойствами пространства-времени. Предпринимались также попытки объединения взаимодействий на основе нелинейного спинорного поля [В. Гейзенберг (W. Heisenberg), 1958]. Однако существенно продвинуться в этих направлениях не удалось.

Более плодотворным оказался путь расширения глобальной симметрии уравнений движения до локальной *калибровочной инвариантности*, справедливой в каждой точке пространства-времени. Формулировка этого принципа принадлежит Р. Утияме (R. Utiyama), к-рый, в частности, показал (1956), что его применение к симметрии пространства-времени (группе Лоренца) приводит к теории гравитации Эйнштейна. На основе применения принципа локальной калибровочной симметрии к изотопической инвариантности, выполненного Р. Миллсом (R. Mills) и Янгом (Yang Chen Ning), Ш. Глэшоу (Sh. Glashow), С. Вайнбергом (S. Weinberg), а также А. Саламом (A. Salam), была построена в начале 70-х гг. объединенная теория слабого и электромагнитного взаимодействий *лептонов* и *кварков*. Наиболее существенное предсказание этой теории – наличие трех тяжелых (в 80–90 протонных масс) слабо взаимодействующих векторных частиц – промежуточных векторных бозонов, играющих роль переносчиков слабого взаимодействия (открыты экспериментально в 1983). Делаются попытки включения в эту схему и *квантовой хромодинамики* – теории сильного взаимодействия кварков и *глюонов*; это так наз. *великое объединение взаимодействий*, объединяющее в одно семейство (один супермультиплет) кварки и лептоны. Важным предсказанием различных моделей великого объединения является нарушение законов сохранения барионного и лептонного чисел, приводящее, в частности, к нестабильности протона со временем жизни 10^{30}–10^{34} лет. Проводятся эксперименты по наблюдению такой нестабильности. Предпринимаются попытки объединения взаимодействий на основе гипотезы о составной природе кварков и лептонов.

Другим направлением объединения, включающим также и гравитационное взаимодействие, является расширение калибровочной симметрии до так наз. *суперсимметрии*, объединяющей частицы с различными спинами (и, следовательно, с разными статистич. свойствами). Пока эти попытки не привели к достаточно удовлетворительной с физич. точки зрения схеме (см. *Супергравитация*).

Значительные надежды на объединение всех взаимодействий связываются с теорией *суперструн* в многомерном (26-мерном или 10-мерном) пространстве. При этом имеется возможность сделать мир «лишних» измерений (сверх 4-мерного пространства-времени) замкнутым с радиусом порядка планковской длины ($\sim 10^{-33}$ см) и рассматривать преобразования в нем как преобразования *внутренней симметрии*. На этом пути можно получить теорию, содержащую все взаимодействия всех известных фундаментальных частиц. Такая теория, однако, предсказывает существование большого количества не наблюдаемых пока «лишних» частиц с большой (>1 ТэВ) массой.

А. В. Ефремов.

ЕДИНИЧНЫЙ ВЕКТОР – см. *Вектор.*

ЕДИНИЧНЫЙ СОЛИТОН – см. *Беклунда преобразование.*

ЕДИНСТВЕННОСТИ СВОЙСТВО – см. *Гармоническая функция, Степенной ряд.*

ЕДИНСТВЕННОСТИ ТЕОРЕМА для аналитических функций: две функции, аналитические в области $D\subset\mathbb{C}$ и совпадающие на каком-либо множестве, имеющем предельную точку в D, совпадают и во всей области D. Иными словами, если предельная точка множества нулей аналитич. функции f принадлежит области D, то $f(z)=0$.

Е. т. представляет собой классич. внутреннее свойство аналитич. функций (см. [1]) и, в то же время, допускает обобщение на тот случай, когда нули f лежат на границе области аналитичности (граничные Е. т. Н. Н. Лузина и И. И. Привалова, 1925, см. [2]). Е. т. в приведенной формулировке на аналитич. функции в $\mathbb{C}^n$ не распространяется, хотя имеются различные обобщения и для пространственного случая (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 2; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.–Л., 1950; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 3 изд., ч. 1–2, М., 1985; [4] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13–142.

Ю. Е. Хохлов.

ЕМКОСТНАЯ МЕРА – см. *Емкость* множества.

ЕМКОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Емкость* множества.

ЕМКОСТЬ множества – функция множества, возникшая в *потенциале теории* как аналог физического понятия электростатической емкости.

Пусть S и S^* – две гладкие замкнутые гиперповерхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, причем S^* охватывает S. Такую систему называют конденсатором (S, S^*). Пусть $u(x)$ – гармонич. функция в области D между S и S^*, принимающая значения 1 на S и 0 на S^*. Емкостью конденсатора $C(S, S^*)$ называется число

$$C(S,S^*)=-\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_{S'}\frac{\partial u(x)}{\partial n}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_D|\mathrm{grad}u(x)|^2d\omega, \qquad (1)$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\partial u/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к любой промежуточной гиперповерхности S', лежащей между S и S^* и охватывающей S, $d\sigma$ – элемент площади S', $d\omega$ – элемент объема. Иначе Е. конденсатора $C(S, S^*)$ можно определить как нижнюю грань интегралов

$$\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_D |\operatorname{grad} v(x)|^2 d\omega$$

в классе всех непрерывно дифференцируемых в D функций $v(x)$, к-рые на S и S^* принимают значения, соответственно, 1 и 0. Если гиперповерхность $S^* = S(0, R)$ есть сфера достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, то, переходя в (1) к пределу при $R \to \infty$, получают емкость компакта K, ограниченного гиперповерхностью S, называемую также гармонической емкостью K, или ньютоновой емкостью K:

$$C(K) = \lim_{R\to\infty} C(S, S(0, R)),$$

при этом $0 \leqslant C(K) < \infty$. Е. $C(K)$ есть аналог электростатич. Е. уединенного проводника K.

В случае плоскости $\mathbb{R}^2$ конденсатор (L, L^*) есть система двух гладких замкнутых непересекающихся простых кривых L и L^*, причем L^* охватывает L. Пусть $u(x)$ – гармонич. функция в области D между L и L^*, принимающая значения 1 на L и 0 на L^*. Емкостью конденсатора $C(L, L^*)$ называют число

$$C(L, L^*) = -\frac{1}{2\pi}\int_{L'} \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds = \frac{1}{2\pi}\int_D |\operatorname{grad} u(x)|^2 d\omega,$$

где ds – элемент длины дуги линии L', лежащей между L и L^* и охватывающей L. Пусть кривая $L^* = S(0, R)$ есть окружность достаточно большого радиуса R с центром в начале, тогда предельный переход при $R \to \infty$ в формуле

$$W(K) = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{C(L, S(0,R))} - \ln R\right]$$

дает винеровскую емкость, или постоянную Робена, компакта K, ограниченного линией L; винеровская Е. может принимать любые значения, $-\infty < W(K) < \infty$. Чаще используется логарифмическая емкость, называемая также гармонической, или конформной:

$$C(K) = e^{-W(K)} = \lim_{R\to\infty} R e^{-\frac{1}{C(L, S(0,R))}}, \qquad (2)$$

к-рая изменяется в пределах $0 \leqslant C(K) < \infty$.

Е. компакта K, ограниченного гиперповерхностью S, при $n \geqslant 3$ можно определить и несколько иначе. Пусть $v_K(x)$ – емкостный, или равновесный, потенциал этого компакта, то есть гармоническая всюду вне K, регулярная на бесконечности функция, принимающая на S значение 1. Тогда

$$C(K) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_S \frac{\partial v_K(x)}{\partial n} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_{D'} |\operatorname{grad} v_K(x)|^2 d\omega, \qquad (3)$$

где D' – внешность S. Формула (3) показывает, что Е. $C(K)$ есть совокупная положительная мера $\mu(S)$, распределенная на S и такая, что ньютонов потенциал простого слоя, порождаемый этой мерой, в точности совпадает с емкостным потенциалом $v_K(x)$, то есть

$$\left.\begin{aligned} v_K(x) &= \int_S \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}, \quad x \in D', \\ C(K) &= \int_S d\mu(y) = \mu(S). \end{aligned}\right\}$$

Мера μ называется емкостной, или равновесной, мерой.

В классе всех положительных борелевских мер λ на K таких, что $\lambda(K) = \mu(S) = C(K)$, емкостная мера μ дает минимум интегралу энергии

$$E(\lambda) = \int\int_{K\times K} \frac{d\lambda(x)d\lambda(y)}{|x-y|^{n-2}}. \qquad (4)$$

Иначе говоря, Е. $C(K)$ можно определить формулой

$$C(K) = 1/\inf E(\lambda),$$

где нижняя грань берется в классе всех положительных мер λ, сосредоточенных на K и нормированных условием $\lambda(K) = 1$.

При $n = 2$, вследствие особого поведения логарифмич. потенциала на бесконечности, вышеуказанное построение емкостного потенциала возможно только для конденсатора, напр. для $(L, S(0, R))$ при помощи *Грина функции* $G(x, y)$ для внутренности D'' окружности $S(0, R)$ в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_K(x; S(0,R)) &= \int_L G(x,y)d\mu(y), \quad x \in D, \\ C(L, S(0,R)) &= \int_L d\mu(y) = \mu(L), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где емкостный потенциал $u_K(x; S(0, R))$ совпадает в D с ранее введенной для конденсатора $(L, S(0, R))$ гармонич. функцией $u(x)$. Е., определяемая по формулам (5), иногда называется гриновой емкостью; эта конструкция возможна при любом $n \geqslant 2$. Формула

$$W(K) = 1/\inf E(\lambda), \quad \lambda(K) = 1,$$

при $n = 2$ дает винеровскую Е. компакта K, так как интеграл энергии

$$E(\lambda) = \int\int_{K\times K} \ln\frac{1}{x-y} d\lambda(x)d\lambda(y) \qquad (6)$$

теперь не всегда положителен.

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964. *Е. Д. Соломенцев.*

ЕСТЕСТВЕННАЯ ГРАНИЦА аналитической функции – см. *Аналитическое продолжение*, *Полная аналитическая функция*.

ЕСТЕСТВЕННАЯ ОБЛАСТЬ существования аналитической функции – см. *Полная аналитическая функция*.

ЕСТЕСТВЕННАЯ ШИРИНА УРОВНЯ – см. *Ширина уровня*.

ЕСТЕСТВЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ динамической системы – см. *Символическая динамика*.

Ж, З

ЖЕВРЕЯ ВОЛНОВОЙ ФРОНТ – см. *Волновой фронт.*

ЖЕВРЕЯ КЛАСС – класс пространств *ультрараспределений* с определяющими последовательностями

$$M_p=(p!)^s \text{ или } p^{sp} \text{ или } \Gamma(1+sp),$$

где число $s>1$. *В. В. Жаринов.*

ЖЕСТКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Изгибание поверхности.*

ЖЕСТКАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ – см. *Устойчивости потеря.*

ЖЕСТКИЙ ПРОЦЕСС – см. *Глубоконеупругий процесс.*

ЖИВЫХ СИЛ ТЕОРЕМА – см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки.

ЖИДКОСТЬ – см. *Гидродинамики уравнения.*

ЖУКОВСКОГО ТЕОРЕМА – одна из основных теорем аэродинамики несжимаемой идеальной жидкости, доказанная Н. Е. Жуковским в 1904 методами теории функций комплексного переменного: подъемная сила, действующая на обтекаемый профиль крыла, равна произведению величины скорости потока на бесконечности, плотности среды и циркуляции скорости. Направление подъемной силы можно получить поворотом на прямой угол вектора скорости потока на бесконечности против направления циркуляции.

Ж. т. допускает обобщение на случай дозвуковых течений сжимаемой жидкости, но неверна при звуковых и сверхзвуковых скоростях обтекания.

Лит.: [1] Жуковский Н. Е., Гидродинамика, Собр. соч., т. 2, М.–Л., 1949; [2] его же, Теоретические основы воздухоплавания, Собр. соч., т. 6, М.–Л., 1950; [3] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. 1, М., 1963; [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Гидродинамика, 3 изд., М., 1986.

Ю. Е. Хохлов.

ЖУКОВСКОГО ФУНКЦИЯ – рациональная функция комплексного переменного

$$w=(z+1/z)/2,$$

введенная Н. Е. Жуковским в 1911 для построения и изучения профиля (крыла) Жуковского. Ж. ф. осуществляет *конформное отображение* внешности круга на внешность профиля Жуковского и позволяет получить основные формулы аэродинамики для сил и моментов, действующих на крыло самолета в дозвуковом потоке идеальной жидкости.

Ю. Е. Хохлов.

ЖУРДЕНА ПРИНЦИП – один из *вариационных принципов классической механики.*

ЗАВИСИМОСТИ ОБЛАСТЬ – см. *Пространство-время* теории относительности.

ЗАВОРОТА ТОЧКА – см. *Поворота точка.*

ЗАМЕДЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ – см. *Релятивистские эффекты.*

ЗАМКНУТАЯ ВНЕШНЯЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА – см. *Дифференциальная форма.*

ЗАМКНУТАЯ ВСЕЛЕННАЯ – см. *Космологические модели.*

ЗАМКНУТАЯ МАГНИТНАЯ ЛОВУШКА – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ЗАМКНУТОЕ МНОЖЕСТВО – см. *Топологическое пространство.*

ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ КВАНТОВАНИЕ – см. *Изотропных торов квантование.*

ЗАПАЗДЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА – см. *Грина функция* в квантовой теории поля, *Грина функция* в статистической механике.

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Грина функция.*

ЗАПОЛНЕНИЯ ЧИСЛА – см. *Дэвиса модель.*

ЗАПРЕТА ПРИНЦИП – см. *Паули принцип, Спин.*

ЗАРЯД – физическая величина, являющаяся источником поля, посредством которого осуществляется взаимодействие частиц, обладающих этой характеристикой (электрический З., слабый З., цветовой З.). Зарядом называются также нек-рые физич. величины, сохраняющиеся (точно или приближенно) в процессах превращения частиц, обусловленных определенными типами взаимодействия (напр., барионное число, лептонное число, гиперзаряд, странность). При операции зарядового сопряжения все З. меняют свой знак (то есть частица и античастица обладают равными по величине, но противоположными по знаку З.). Законам сохранения З. отвечает инвариантность теории относительно глобальных калибровочных преобразований (то есть преобразований в пространстве внутренних симметрий). Для того чтобы сохраняющаяся величина выступала в качестве источника поля, теория должна быть инвариантной относительно локальных калибровочных преобразований (см. *Калибровочная инвариантность*). Создаваемые в этом случае поля являются векторными полями, а отвечающие им частицы – кванты полей – обладают спином 1 и должны быть безмассовыми. Взаимодействие между З., осуществляемое посредством таких полей, должно быть, вообще говоря, дальнодействующим (если нет *спонтанного нарушения симметрии*, благодаря к-рому кванты полей могут приобретать массу). В электродинамике электрич. З. играет именно эту двоякую роль, являясь, с одной стороны, сохраняющейся величиной, а с другой – источником электромагнитного поля и его безмассовых квантов (фотонов).

Барионному числу, странности и т. п. не соответствуют какие-либо дальнодействующие поля. Эти З. могут быть связаны только с глобальной калибровочной симметрией. Если в природе реализуется только строгая локальная калибровочная симметрия, то глобальная симметрия может быть приближенной и эти З. не должны быть строго сохраняющимися.

В калибровочной теории поля З. являются генераторами группы внутренних симметрий в пространстве состояний. Однако не все они могут характеризовать состояние физич. системы, а только коммутирующая друг с другом часть.

В электродинамике имеется только один тип З.– электрический. Поэтому в квантовой электродинамике имеется только одно калибровочное поле – электромагнитное, отвечающее теории инвариантности относительно локальных калибровочных преобразований с абелевой группой симметрии $U(1)$. В случае группы симметрии $SU(n)$ существует n^2-1 различных типов калибровочных полей и З., из к-рых $n-1$ коммутируют друг с другом, то есть могут характеризовать состояние физич. системы. При этом кванты полей обладают З. и обязательно взаимодействуют между собой.

Закон взаимодействия соответствующих полей однозначно задается условием калибровочной инвариантности. Если локальные калибровочные преобразования отвечают простой или полупростой группе Ли, напр. группе $SU(n)$, то взаимодействие всех З. характеризуется одной и той же константой взаимодействия.

Примерами теорий с несколькими З. являются калибровочная теория электрослабого взаимодействия, основанная на группе $SU(2)\times U(1)$, и калибровочная теория сильного взаимодействия – квантовая хромодинамика, основанная на группе цветовой симметрии $SU(3)_c$. В теории электрослабого взаимодействия имеются две константы, связь между к-рыми характеризуется параметром теории $\sin^2\theta_w$ (где θ_w – *Вайнберга угол*). В квантовой хромодинамике есть всего одна константа взаимодействия всех восьми цветовых З. (и квантов соответствующих цветовых полей – *глюонов*) α_s. Величины констант из-за радиационных поправок, обусловленных поляризацией вакуума, слабо (логарифмически) зависят от квадрата передаваемого 4-импульса $|q^2|$, если $|q^2|$ достаточно велико, то есть расстояние между частицами достаточно мало. Эта зависимость определяется на основе *ренормализационной группы*. Константа квантовой хромодинамики уменьшается с ростом $|q^2|$ (то есть с расстояния между цветовыми З.), что отвечает асимптотич. свободе сильного взаимодействия, и растет с уменьшением $|q^2|$ (с увеличением расстояния). Ввиду гипотетич. явления *удержания цвета* объекты с цветовым З. в свободном состоянии не существуют. Экстраполяция тенденции изменения величин констант квантовой хромодинамики и электрослабого взаимодействия в область асимптотически больших переданных 4-импульсов ($|q^2|^{1/2}\sim 10^{15}$ ГэВ/с) приводит к одинаковой величине всех трех констант. Это обстоятельство позволяет рассматривать сходство в описании взаимодействий электрослабого взаимодействия и квантовой хромодинамики как проявление единой фундаментальной калибровочной природы всех взаимодействий. Представление о такой единой природе реализуется в *великого объединения моделях*, рассматривающих З. электрослабого взаимодействия и квантовой хромодинамики в рамках единой группы калибровочных преобразований.

Топологич. структура спонтанного нарушения калибровочной симметрии великого объединения приводит к появлению в теории *топологических зарядов*. Во всех имеющихся моделях великого объединения предсказывается существование топологически устойчивых решений, описывающих частицы с магнитным З. и массой $\sim 10^{16}$ ГэВ/с – *магнитных монополей*.

В рамках локальных суперсимметричных моделей объединения взаимодействий появляется возможность единого описания всех четырех фундаментальных взаимодействий, включая и гравитационное. При этом в теории наряду с 4-векторными токами возникают спинорные токи (и спинорные З.). *М. Ю. Хлопов.*

ЗАРЯДОВОЕ ПРОСТРАНСТВО – пространство, вводимое для описания внутренних (то есть не связанных со свойствами пространства-времени) симметрий. Поля $\Psi(x)$, реализующие нек-рое представление группы внутренней симметрии Ω, принимают значения в З. п., к-рое является пространством представления группы Ω. Будучи разложено по нек-рому базису в З. п., поле $\Psi(x)$ представляется в виде набора компонент $\Psi(x)=\{\Psi_1, ..., \Psi_m\}$, отвечающих различным значениям заряда. Примерами З. п. могут служить пространство изотопич. спина (группа внутренней симметрии $SU(2)$), пространство цвета (группа внутренней симметрии $SU(3)$) и т. д. *А. А. Славнов.*

ЗАРЯЖЕННЫЙ ТОК – см. *Ток*.

ЗАХАРОВА – ШАБАТА УРАВНЕНИЕ – см. *Алгебро-геометрические методы* в теории поля.

ЗАХВАТ В РЕЗОНАНС – явление, возникающее в системах с быстро вращающимися фазами

$$\dot I = \varepsilon g(I,\varphi,\varepsilon),\ \dot\varphi = \omega(I)+\varepsilon f(I,\varphi,\varepsilon),$$
$$I\in\mathbb{R}^n,\ \varphi_{\mathrm{modd}\,2\pi}\in T^m,\ 0<\varepsilon\ll 1.$$

В пространстве медленных переменных I имеются резонансные поверхности, выделяемые условием целочисленной линейной зависимости компонент вектора частот

$$\omega(I):(k,\omega(I))\equiv k_1\omega_1(I)+...+k_m\omega_m(I)=0,$$

где

$$\omega=(\omega_1, ..., \omega_m),\ k=(k_1, ..., k_m)\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}.$$

Из-за дрейфа медленных переменных фазовая точка попадает на резонансную поверхность. При нек-рых соотношениях между фазами φ возможен захват: фазовая точка начинает двигаться вблизи резонансной поверхности, так что сохраняется возникшая соизмеримость частот. Захват может быть временным (на время порядка $1/\varepsilon$ или большее). При достаточно общих предположениях мера множества захватываемых за время $1/\varepsilon$ точек (из компакта в фазовом пространстве) мала; это следует из теоремы Аносова об усреднении (см. [1], *Усреднения метод*), в ряде случаев эта мера $\leqslant\sqrt{\varepsilon}$ (см. [2]). Однако на временах $\gg 1/\varepsilon$ (обычно на временах $\sim 1/\varepsilon^{3/2}$) эта мера может быть большой, ~ 1, так что захваты в резонанс и выходы из резонанса могут играть существенную роль во всей динамике системы. В фазовом пространстве начальные условия для траекторий с захватом и без захвата перемешаны. В пределе, при $\varepsilon\to 0$, захват приходится считать случайным событием и оценивать его вероятность. Для двухчастотных систем ($m=2$) движение захваченных точек, связь момента захвата и момента выхода описаны в [2, гл. 5, § 1].

Лит.: [1] Аносов Д. В., «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1960, т. 24, № 5, с. 721–42; [2] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, М., 1985, с. 5–303. *А. И. Нейштадт.*

ЗАХВАТЫВАНИЕ – см. *Вынужденные колебания*.

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ – колебания упругой среды (газообразной, жидкой или твердой).

Основные характеристики З. в. Энергетич. характеристикой З. в. является их интенсивность I, то есть плотность потока энергии. Интенсивность однозначно определяется амплитудой a З. в.:

$$a=\max|\delta p|,$$

где δp – возмущение давления. В волнах малой амплитуды интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды

$$I=\mathrm{const}\,a^2. \qquad (1)$$

Субъективно интенсивности соответствует громкость – величина, пропорциональная логарифму амплитуды. Единицей громкости является децибел (дб). Напр., громкость в дб едва слышимых звуков равна 10, разговора – 60, громкой музыки – 90, шума до боли в ушах – 110.

В плоской З. в. постоянной интенсивности возмущение давления δp зависит от координаты x и времени t не порознь, а посредством комбинаций $\tau=t-x/c$ (c – скорость З. в., в воздухе $c=330$ м/с): $\delta p=f(\tau)$. Функция $f(\tau)$ является периодической с нек-рым периодом T_0: $f(\tau+T_0)=f(\tau)$. Величина $\omega=2\pi/T_0$ называется частотой З. в. Человек слышит З. в. с частотой от 16 Гц до 20 кГц (1 Гц – одно колебание в секунду; малым частотам соответствуют низкие звуки, большим частотам – высокие звуки). З. в. с частотой ниже 16 Гц называется инфразвуком, выше 20 кГц – ультразвуком, самые высокочастотные упругие волны в диапазоне от 10^9 до 10^{13} Гц относят к гиперзвуку.

Важной характеристикой З. в. является их спектр, получаемый в результате разложения возмущения давления в ряд Фурье:

$$f(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\exp(2\pi i n\tau/T_0). \qquad (2)$$

Совокупность абсолютных значений коэффициентов Фурье $|a_n|$ называется тембром З. в. Благодаря тембру мы отли-

чаем скрипку от медной трубы, звук «А» от звука «О» и узнаем человека по голосу.

Распространение З. в. В газообразных и жидких средах упругой является только деформация всестороннего сжатия (деформация сдвига не обладает упругостью). Поэтому в таких средах З. в. являются продольными – направление колебательного движения частиц среды совпадает с направлением распространения волны. В продольной З. в. малой амплитуды изменение всех величин, в том числе и возмущения давления δp, описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta p - c^2\Delta\delta p = 0. \qquad (3)$$

Квадрат скорости звука c^2 равен сжимаемости

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}, \qquad (4)$$

где p – давление, ρ – плотность среды. Волновое уравнение (3) справедливо, если можно пренебречь диссипативными эффектами (вязкостью и конечной теплопроводностью). При распространении З. в. температура среды на участках сжатия повышается, а на участках разрежения – понижается. Обычно частота З. в. настолько велика, что за один период не успевает произойти сколько-нибудь заметного выравнивания температур, то есть каждый элемент среды является теплоизолированным. При этом сжимаемость следует вычислять при постоянной энтропии. В этом случае скорость звука c_S называется адиабатической. В противоположном предельном случае, когда частота З. в. настолько мала, что за период колебаний происходит выравнивание температур, сжимаемость следует вычислять при постоянной температуре. В этом случае скорость звука c_T называется изотермической. Согласно принципу Ле-Шателье

$$c_S > c_T.$$

В промежуточном случае, когда скорость выравнивания температур того же порядка, что и скорость изменения объема, возникает большая диссипация, и волновое уравнение не описывает распространение З. в. Скорость звука впервые была вычислена теоретически И. Ньютоном (I. Newton). Однако полученная им величина была заметно меньше экспериментальной. Причину этого расхождения обнаружил П. Лаплас (P. Laplace): И. Ньютон вычислил изотермич. скорость З. в. c_T, тогда как в эксперименте определялась адиабатич. скорость З. в. c_S.

Волновое уравнение (3) является уравнением с частными производными гиперболич. типа. Для таких уравнений справедлив принцип Гюйгенса: вместо того, чтобы вычислять возмущения в различных точках пространства, вызванные реальными источниками, можно окружить источники произвольной поверхностью и рассматривать возмущения в каждой точке поверхности как источник З. в. Интерференция этих возмущений приводит, в частности, к тому, что впереди фронта З. в. возмущение равно нулю.

В одномерном случае, когда δp зависит только от одной пространственной координаты, напр. x, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta p - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta p = 0. \qquad (5)$$

Его решением является сумма двух произвольных плоских волн

$$\delta p = f_1(x-ct) + f_2(x+ct). \qquad (6)$$

Функция $f_1(x-ct)$ описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x. Функция $f_2(x+ct)$ описывает плоскую волну, распространяющуюся в противоположном, отрицательном, направлении оси x. Из трех компонент скорости в плоской волне отлична от нуля только компонента v_x. Иными словами, скорость среды в плоской З. в. направлена вдоль направления распространения волны, то есть З. в. в газах и жидкостях являются продольными.

Важным частным случаем З. в. являются монохроматические волны, в к-рых все величины представляют собой гармонические, то есть синусоидальные функции своих аргументов. Такие функции удобно писать в виде вещественной части комплексного выражения

$$\delta p = \mathrm{Re}\{\varphi(x, y, z)\exp(-i\omega t)\}.$$

Функция φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi = 0. \qquad (7)$$

В частности, в плоской З. в., распространяющейся в направлении $\boldsymbol{k}$,

$$\delta p = \mathrm{Re}\{A\exp[i(\boldsymbol{kr}-\omega t)]\}, \qquad (8)$$

A – комплексная амплитуда, равная $A = a\exp(i\alpha)$. Тогда

$$\delta p = a\cos(\boldsymbol{kr}-\omega t+\alpha). \qquad (9)$$

Величина, стоящая под знаком косинуса, называется фазой волны, абсолютная величина k волнового вектора $\boldsymbol{k}$ – волновым числом. Согласно (7), $k = \omega/c$. Возмущения других гидродинамич. величин связаны с δp соотношениями:

$$\delta v_l = \frac{\delta p}{\rho c}; \quad \delta v_t = 0; \quad \delta_\rho = \frac{\delta p}{c^2},$$

где δv_l – возмущение компоненты скорости, параллельной $\boldsymbol{k}$, δv_t – возмущение компоненты скорости, перпендикулярной $\boldsymbol{k}$, $\delta\rho$ – возмущение плотности среды. Таким образом, возмущения всех гидродинамич. величин в З. в. определяются одним параметром – амплитудой a.

З. в. от точечного источника являются сферическими. В таких волнах возмущения давления, плотности и скорости среды зависят только от расстояния r от источника (и от времени). В расходящейся сферич. волне

$$\delta p = \frac{f(r-ct)}{r}.$$

В частности, в случае мгновенного точечного источника:

$$\delta p = \mathrm{const}\frac{\delta(r-ct)}{r}.$$

Это означает, что возмущение отлично от нуля только на фронте З. в. и обращается в нуль позади него. Такое поведение возмущений, называемое эффектом Гюйгенса, характерно для трехмерных З. в. В случае двумерных З. в. эффект Гюйгенса не имеет места – возмущение не обращается в нуль после прохождения фронта волны, а медленно затухает. Примером такого поведения являются круги на поверхности воды. Именно благодаря эффекту Гюйгенса возможна передача информации с помощью З. в. в трехмерном пространстве. В отличие от плоской волны, амплитуда к-рой остается постоянной, в сферич. волне амплитуда падает обратно пропорционально расстоянию до источника. Расходящаяся монохроматич. сферич. волна имеет вид:

$$\delta p = A\frac{1}{r}\exp[i(kr-\omega t)].$$

Отражение и преломление З. в. Когда З. в. падают на границу раздела между двумя различными средами, они отражаются и преломляются. Движение в первой среде является суммой двух волн (падающей и отраженной), а во второй среде имеется одна (преломленная) волна. Связь между всеми тремя волнами определяется граничными условиями на поверхности раздела. Частоты всех трех волн одинаковы. Направления распространения падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости. Угол падения равен углу отражения. Угол падения ν_1 и угол преломления ν_2 связаны соотношением

$$\frac{\sin\nu_1}{\sin\nu_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

c_1 и c_2 – скорости З. в. в первой и второй средах.

Собственные колебания. Если жидкость или газ находятся в сосуде конечных размеров, то З. в. отражаются от стенок. Взаимодействие первоначальной З. в. с отраженными волнами приводит к гашению всех колебаний, за исключением

колебаний с нек-рыми (дискретными) значениями частоты, называемыми собственными значениями. Соответствующие З. в. называются собственными колебаниями, или стоячими волнами. Число собственных частот бесконечно. Длина волны, соответствующая наименьшей собственной частоте, по порядку величины равна линейному размеру сосуда.

Рассеяние З. в. Если на пути распространения З. в. имеется какая-либо неоднородность, в частности флуктуация плотности среды, то происходит рассеяние З. в.: наряду с падающей волной появляются рассеянные волны, распространяющиеся во все стороны от рассеивающего тела. Рассеяние З. в. характеризуется его эффективным сечением $d\sigma$, определяемым как отношение средней (за период) рассеиваемой энергии к плотности потока энергии в падающей волне. Сечение имеет размерность площади и пропорционально 4-й степени частоты З. в. Этим, напр., объясняется тот факт, что вдали от оркестра слышен только барабан.

В масштабах, значительно превышающих длину волны, З. в. распространяются прямолинейно. Напротив, на расстояниях, сравнимых с длиной волны, происходит дифракция, то есть огибание препятствий. Благодаря этому можно слышать из-за угла.

Поглощение З. в. Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии З. в. При этом З. в. поглощаются, то есть их интенсивность уменьшается. Скорость диссипации характеризуется коэффициентом вязкости. Существуют два коэффициента вязкости – первая, или сдвиговая, вязкость и вторая, или объемная, вязкость. Обычно коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости имеют одинаковый порядок величины. Однако коэффициент объемной вязкости резко возрастает, если термодинамич. состояние среды характеризуется не только давлением и плотностью, но и еще какими-либо внутренними параметрами. Так, напр., если мы имеем дело с жидкостью или газом, представляющими собой смесь веществ, между к-рыми происходит химич. реакция, то при каждых данных плотности и давлении существует определенное состояние химич. равновесия, характеризующееся определенными концентрациями вещества в смеси. Если, напр., сжать жидкость, то вследствие нагрева состояние равновесия нарушится и начнет происходить реакция, в результате к-рой концентрации вещества будут стремиться принять равновесные значения, соответствующие новому значению температуры. Если время протекания реакции по порядку величины равно периоду З. в., то процесс сжатия будет сопровождаться внутренними процессами приближения к состоянию химич. равновесия. Но процессы установления равновесия необратимы, они сопровождаются возрастанием энтропии и, следовательно, диссипацией энергии. При этом объемная вязкость сильно возрастает. Этот эффект используется для определения времени протекания химич. реакций τ_c – поглощение З. в. имеет резкий максимум, если период З. в. равен τ_c. Вблизи твердой стенки имеется периодически меняющаяся по величине разность температур между жидкостью и стенкой, даже если средняя температура жидкости равна температуре стенки. На самой же поверхности температуры соприкасающихся жидкости и стенки должны быть одинаковыми. В результате, в тонком пристеночном слое жидкости возникает большой градиент температуры; температура резко меняется от колеблющегося значения в З. в. до постоянного значения на стенке. Наличие же больших градиентов температуры приводит к большой диссипации энергии путем теплопроводности. Аналогично, благодаря вязкости происходит сильная диссипация на границе жидкости с твердым телом.

З. в. в твердых телах. В твердом теле упругими являются не только объемные деформации (расширения или сжатия), но и деформации сдвига. В изотропном твердом теле З. в. разделяются на два типа: продольные и поперечные. В продольных З. в. смещение точек тела $\boldsymbol{u}$ параллельно направлению распространения $\boldsymbol{k}$, а в поперечных – перпендикулярно ему. Им соответствуют две скорости распространения З. в.– продольная c_l и поперечная c_t. При этом

$$c_l > c_t.$$

В анизотропном твердом теле (кристалле) З. в., вообще говоря, не разделяются на продольные и поперечные. Такое разделение, однако, происходит, если вектор $\boldsymbol{k}$ направлен вдоль нек-рого направления высокой симметрии.

При низких температурах, когда $\theta \leqslant \hbar\omega$ (θ – температура в энергетич. единицах, $\hbar$ – постоянная Планка), становятся существенными квантовые эффекты. При этом З. в. (как и любые волны) приобретают свойства частиц. Они называются *фононами*. Фонон с частотой ω и волновым вектором $\boldsymbol{k}$ имеет энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar\boldsymbol{k}$. Существенное свойство фононов состоит в том, что их может быть только целое число. В отличие от обычных частиц, число фононов не сохраняется. Фононы легко рождаются и гибнут при столкновениях с другими частицами и между собой. При этом выполняются законы сохранения энергии и импульса.

В отличие от газа в твердом теле нельзя привести в движение один атом – вследствие сильного взаимодействия при этом приходят в движение все атомы, то есть возникают фононы. Тепловое движение в твердом теле – это не движение отдельных атомов, как в газе, а совокупность фононов. Можно сказать, что в квантовой теории в каком-то смысле возродилась популярная в 18 в. теория теплорода.

В квантовой области может осуществиться ситуация, немыслимая в классич. физике, когда число фононов равно нулю. При этом совершенно отсутствуют тепловые флуктуации, что позволяет производить измерения с фантастич. точностью.

Совокупность фононов можно рассматривать как газ (или жидкость). В этом газе, в свою очередь, возникают волны плотности числа фононов, называемые вторым звуком.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Гидродинамика, 3 изд., М., 1986; [2] Стретт Дж. (лорд Рэлей), Теория звука, пер. с англ., 2 изд., т. 1–2, М., 1955. *В. П. Демуцкий, Р. В. Половин.*

ЗЕЛЬДОВИЧА «ВОСЬМЕРКА» – модель *генерации* магнитного поля турбулентностью.

ЗИГЕЛЯ СЛУЧАЙ – см. *Малые знаменатели.*

ЗИГЕЛЯ ТЕОРЕМА – см. *Фуксова группа.*

ЗНАЧИМОСТИ УРОВЕНЬ – см. *Анализ данных.*

ЗОНТИК – см. *Раскрытый зонтик, Сложенный зонтик Уитни, Катастроф теория.*

И, Й

ИДЕАЛ – подмножество I в алгебре A такое, что:

1) для любых $x, y \in I$ и любых скаляров α и β выполнено $\alpha x + \beta y \in I$;

2) для любого $x \in I$ и $a \in A$ выполнено $xa \in I$ и $ax \in I$.

Если имеет место лишь отношение $xa \in I$, то I называется левым идеалом, а в случае выполнения $ax \in I$ – правым идеалом. Для алгебр Ли вместо xa принята запись $[x, a]$. *Ю. А. Неретин.*

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ – см. *Гидродинамики уравнения.*

ИДЕАЛЬНАЯ СВЯЗЬ – см. *Связи механические.*

ИЕНСЕНА ФОРМУЛА – соотношение, связывающее значения *мероморфной функции* внутри круга с ее граничными значениями на окружности и с ее нулями и полюсами. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция в круге $|z| \leqslant R$; a_μ, $|a_\mu| \leqslant R$, и b_ν, $|b_\nu| \leqslant R$, – соответственно, все нули и полюсы $f(z)$, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность или порядок. Если $f(0) \neq 0$, то справедлива формула Иенсена:

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(Re^{i\varphi})\right| d\varphi + \\ + \sum_{|b_\nu|<R} \ln\frac{R}{|b_\nu|} - \sum_{|a_\mu|<R} \ln\frac{R}{|a_\mu|}, \qquad (1)$$

в к-рой суммы распространены на все нули и полюсы $f(z)$ внутри круга $|z| < R$. Небольшое видоизменение позволяет приспособить формулу (1) и для случая $f(0) = 0$.

Справедлива и более общая формула, названная формулой Пуассона – Иенсена и дающая значения $\ln|f(z)|$ в любой точке $z = re^{i\theta}$, отличной от нулей и полюсов:

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(Re^{i\varphi})\right| P(z, Re^{i\varphi}) d\varphi + \\ + \sum_{|b_\nu|<R} \ln\left|\frac{R^2 - \bar{b}_\nu z}{R(z-b_\nu)}\right| - \sum_{|a_\mu|<R} \ln\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\mu z}{R(z-a_\mu)}\right|, \qquad (2)$$

$$P(z, Re^{i\varphi}) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}, \quad r < R.$$

Формулу (2) можно рассматривать как обобщение *Пуассона интеграла* для круга. Точно так же, обобщая *Шварца интеграл* для круга, получают формулу Шварца – Иенсена:

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(Re^{i\varphi})\right| \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi + \\ + \sum_{|b_\nu|<R} \ln\frac{R^2 - \bar{b}_\nu z}{R(z-b_\nu)} - \sum_{|a_\mu|<R} \ln\frac{R^2 - \bar{a}_\mu z}{R(z-a_\mu)}. \qquad (3)$$

Возможно также построение формул типа (1)–(3) для полуплоскости и других областей. *Е. Д. Соломенцев.*

ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ – непрерывная деформация поверхности, при которой длины кривых на ней не изменяются. Следовательно, И. п. является непрерывным семейством так наз. изометрических преобразований поверхности, то есть таких отображений поверхности в пространство, для к-рых поверхность-образ имеет ту же метрику, что и исходная поверхность-прообраз.

Если поверхность допускает только тривиальное (то есть сводящееся к движению поверхности в пространстве как твердого тела) изгибание, то она называется неизгибаемой. Если для данной поверхности S любая изометричная ей поверхность получается из S движением с возможным добавлением зеркального отражения, то говорят, что S однозначно определяется своей метрикой. Если поверхность S^*, изометричная S, получается из S в процессе нек-рого ее изгибания, то говорят, что S наложима на S^*. Если поверхность S рассматривается как изометрич. погружение в пространство нек-рого риманова многообразия, то вопрос об однозначной определенности S сводится к вопросу о единственности решения нек-рой системы дифференциальных уравнений, а вопрос об изгибаемости S – к существованию для этой системы непрерывного семейства решений, включающего S. Пример нетривиального изгибания – процесс сворачивания листа бумаги «в трубочку», без разрывов и растяжения материалов.

Начальное поле скоростей гладкого (относительно нек-рого параметра t, принимаемого за время) И. п. порождает деформацию, называемую бесконечно малым изгибанием. При нетривиальных (то есть не являющихся начальным полем скоростей нек-рого движения) бесконечно малых И. п. расстояния на поверхности изменяются на порядок $o(t)$, $t \to 0$, в то время как пространственные расстояния между точками поверхности изменяются, вообще говоря, на порядок $O(t)$. Поверхность, не допускающая нетривиальных бесконечно малых изгибаний, называется жесткой, в противном случае – нежесткой.

Существование и свойства изгибаний и бесконечно малых И. п. существенно зависят от топологич. типа поверхности, от знака ее кривизны, от степени гладкости поверхности ее деформаций и т. д. Наиболее подробно эти вопросы изучены для поверхностей положительной кривизны в $\mathbb{R}^3$. Напр., доказано, что замкнутая выпуклая поверхность является неизгибаемой и жесткой. Примеров замкнутых изгибаемых поверхностей (в классе гладкости C^n, $n \geqslant 2$) пока неизвестно (1997), хотя замкнутые нежесткие поверхности существуют даже в аналитич. классе гладкости.

Изгибания и, особенно, бесконечно малые изгибания, тесно связаны с теорией упругих оболочек, так как при упругих деформациях растяжения в материале малы по сравнению с возможными изменениями внешней формы оболочки. Геометрич. жесткость или неизгибаемость поверхности означает устойчивость состояния равновесия оболочки в нек-ром диапазоне внутренних напряжений.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1988; [2] Погорелов А. В., Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, М., 1967; [3] Сабитов И. Х., Локальная теория изгибаний поверхностей, в кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 48, М., 1989; [4] Войцеховский М. И., в кн.: «Математическая энциклопедия», т. 2, М., 1979, с. 491. *И. Х. Сабитов.*

ИЗИНГА МОДЕЛЬ – см. *Квантовое евклидово поле*; решетчатые модели.

ИЗЛУЧЕНИЯ СТАТИСТИКА – квантовое свойство электромагнитного излучения, определяемое видом распределения числа фотонов. Изучается в квантовой оптике – разде-

ле оптики, посвященном исследованию квантовых корреляционных и флуктуационных свойств электромагнитных полей и их взаимодействия с веществом.

В соответствии с квантовой механикой, вся информация о статистич. свойствах системы содержится в матрице плотности $\hat{\rho}$, для к-рой в случае электромагнитного излучения удобно пользоваться разложением по состояниям Фока, образующим полный ортонормированный набор (см. *Фока пространство*),

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m} \rho(n,m)|n\rangle\langle m|; \quad \rho(n,m) = \langle n|\hat{\rho}|m\rangle; \quad \mathrm{Sp}\hat{\rho} = 1 \qquad (1)$$

или представлением Глаубера–Сударшана в разложении по *когерентным состояниям*:

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha. \qquad (2)$$

Наиболее распространенному в природе хаотическому (гауссову) излучению – равновесному тепловому излучению с температурой T – соответствует состояние электромагнитного поля с максимальной энтропией $S = (\hat{\rho}\ln\hat{\rho})$. В этом случае (1) имеет диагональный фоковский вид

$$\hat{\rho} = \sum \rho(n,n)|n\rangle\langle n|,$$

а функция распределения числа фотонов $\mathfrak{P}(n)$ соответствует *Бозе–Эйнштейна распределению*

$$\mathfrak{P}(n) \equiv \rho(n,n) = \langle n\rangle/(1+\langle n\rangle)^{1+n}$$

со средним числом фотонов

$$\langle n\rangle = [\exp(\omega/kT) - 1]^{-1},$$

где ω – энергия фотона и k – постоянная Больцмана. Весовая функция $P(\alpha)$ в (2) имеет для хаотич. излучения вид распределения Гаусса

$$P(n) = \frac{1}{\pi\langle n\rangle}\exp\{-n/\langle n\rangle\}; \quad |\alpha|^2 = n.$$

Другим важным случаем является когерентное излучение, генерируемое идеальным лазером. В этом случае весовая функция $P(\alpha)$ в (2) есть δ-функция Дирака ($\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$) и распределение числа фотонов имеет вид распределения Пуассона

$$\mathfrak{P}(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{\langle n\rangle^n}{n!}\exp\{-\langle n\rangle\}. \qquad (3)$$

И. с. с распределением числа фотонов более широким, чем (3), принято называть суперпуассоновской. В противоположном случае более узкого чем (3) распределения говорят о субпуассоновской статистике излучения; в этом случае весовая функция $P(\alpha)$ в (2) отрицательно определена, а соответствующее состояние поля не имеет классич. аналога.

С И. с. связано поведение непосредственно измеряемых в эксперименте корреляционных функций излучения различных порядков. Простейшая из таких функций в случае одномодового излучения есть

$$G^{(2)}(\tau) = \langle E^+(0)E^+(\tau)E(\tau)E(0)\rangle/\langle E^+E\rangle,$$

где E^+, E – квантовые амплитуды поля (см. *Гейзенберга представление, Вторичное квантование*), что соответствует квантовому обобщению классич. корреляции интенсивностей излучения. Для субпуассоновской статистики $\langle(n-\langle n\rangle)^2\rangle < \langle n\rangle$ и $G^{(2)}(0) < 1$, что соответствует эффекту *антигруппировки фотонов*. В случае суперпуассоновской статистики $\langle(n-\langle n\rangle)^2\rangle > \langle n\rangle$ и $G^{(2)}(0) > 1$, что соответствует *группировке фотонов*.

Лит.: [1] Карлов Н. В., Лекции по квантовой оптике, М., 1983; [2] Перина Я., Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений, пер. с англ., М., 1987; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Козеровский М., Чан Куанг, Шумовский А. С., «Журнал элементарных частиц и атомного ядра», 1988, т. 19, в. 4, с. 832–63.

А. С. Шумовский.

ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОД, отображений метод,– метод теории потенциала для решения некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными в области D, при котором выполнение краевых (граничных) условий на границе $\partial D = \Gamma$ достигается путем соответствующего подбора некоторых дополнительных источников поля, расположенных вне $\overline{D}$ и называемых источниками-изображениями.

Наибольшее развитие И. м. получил в электростатике. Пусть, напр., требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -2\pi\rho(x, y)$$

в полуплоскости

$$D = \{(x, y): y > 0, -\infty < x < +\infty\}$$

с заданной на границе

$$\Gamma = \{(x, y): y = 0, -\infty < x < +\infty\}$$

функцией $\psi(x)$, то есть требуется найти потенциал электрич. зарядов плотности $\rho(x, y)$, расположенных в D, при условии, что на Γ поддерживается потенциал $\psi(x)$. Известно, что для решения этой задачи достаточно знать *Грина функцию* $G(x, y; x_0, y_0)$, представляющую собой потенциал единичного точечного заряда в точке $(x_0, y_0) \in D$, когда граница Γ заземлена, то есть $G(x, 0; x_0, y_0) = 0$. При этом решение $u(x, y)$ исходной задачи выражается через $G(x, y; x_0, y_0)$ следующим образом:

$$u(x,y) = \iint_D \rho(x_0,y_0)G(x,y;x_0,y_0)dx_0dy_0 + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \psi(x_0)\frac{\partial G(x,y;x_0,0)}{\partial y_0}dx_0. \qquad (1)$$

Потенциал точечного заряда при отсутствии границ записывается в виде фундаментального решения уравнения Лапласа

$$\ln(1/\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}).$$

Добавляя отрицательный единичный заряд-изображение в точке $(x_0, -y_0)$ и составляя сумму потенциалов этих двух зарядов, получают искомую функцию Грина:

$$G(x,y;x_0,y_0) = \\ = \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}. \qquad (2)$$

В случае полосы

$$D = \{(x, y): 0 < y < b, -\infty < x < +\infty\},$$

отражая единичный заряд $(x_0, y_0) \in D$ от прямых $y = 0$ и $y = b$, получают бесконечную последовательность зарядов-изображений $-1, -1, +1, +1, \ldots$, расположенных, соответственно, в точках $(x_0, -y_0)$, $(x_0, 2b-y_0)$, $(x_0, -2b+y_0)$, $(x_0, 2b+y_0)$, ... Функция Грина в этом случае будет выражаться в виде бесконечного ряда потенциалов точечных зарядов.

Для области D в виде круга

$$D = \{(\rho, \varphi): 0 \leqslant \rho < a, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$$

изображением единичного заряда в точке (ρ_0, φ_0) будет отрицательный единичный заряд, расположенный в точке $(a^2/\rho_0, \varphi_0)$, являющейся отображением точки (ρ_0, φ_0) при помощи инверсии относительно окружности $\rho = a$.

При решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\rho(x, y, z)$$

в полупространстве

$$D = \{(x, y, z): z > 0, -\infty < x, y < +\infty\},$$

отражая единичный заряд $(x_0, y_0, z_0) \in D$ от плоскости $z = 0$, вместо (2) получают формулу

$$G(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = \\ = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

В случае шара

$$D=\{(r,\theta,\varphi):\ 0\leqslant r<a,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$$

следует применить *Кельвина преобразование*, и изображением единичного заряда в точке $(r_0, \theta_0, \varphi_0)\in D$ будет заряд величины $-a/r_0$, расположенный в точке $(a^2/r_0, \theta_0, \varphi_0)$, являющейся отображением точки $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ при помощи инверсии относительно сферы $r=a$. Отсюда получается, что если известно решение уравнения Пуассона

$$\Delta u=-4\pi\rho(r,\theta,\varphi)$$

в нек-рой области D, то функция

$$v(r,\theta,\varphi)=(a/r)u(a^2/r,\theta,\varphi)$$

дает решение уравнения Пуассона

$$\Delta v=-4\pi\rho'(r,\theta,\varphi)$$

с плотностью

$$\rho'(r,\theta,\varphi)=(a/r)^5\rho(a^2/r,\theta,\varphi)$$

в области D', являющейся отображением D при инверсии относительно сферы $r=a$. В такой форме И. м. иногда называют м е т о д о м и н в е р с и и. При применении метода инверсии необходимо обращать внимание на то, что краевые (граничные) условия, вообще говоря, также преобразуются.

Лит.: [1] С м а й т В., Электростатика и электродинамика, пер. с англ., М., 1954.

Е. Д. Соломенцев.

ИЗОКЛИНА – множество точек плоскости x, y, в которых наклон *направлений поля*, определяемого обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка $y'=f(x, y)$, один и тот же.

В. И. Битюцков.

ИЗОЛИРОВАННАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА д л я э л е м е н т а а н а л и т и ч е с к о й ф у н к ц и и $f(z)$ – точка a комплексной плоскости z, относительно которой выполняются условия: 1) этот элемент функции $f(z)$ не допускает *аналитического продолжения* по какому-либо пути в точку a; 2) существует такое число $R>0$, что в проколотой окрестности $U=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-a|<R\}$ точки a аналитическое продолжение элемента $f(z)$ возможно по любому пути.

Если при аналитич. продолжении $f(z)$ вдоль замкнутого пути, расположенного в U и окружающего a, напр. вдоль окружности $|z-a|=\rho$, $0<\rho<R$, получается новый элемент, отличный от исходного, то a называется *ветвления точкой*.

В проколотой окрестности U И. о. т. a однозначного характера функция $f(z)$ разлагается в *Лорана ряд*:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(z-a)^k$$

с правильной частью

$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z-a)^k$$

и главной частью

$$f_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(z-a)^k.$$

Поведение аналитич. функции $f(z)$ в проколотой окрестности U И. о. т. однозначного характера определяется в основном главной частью ряда Лорана.

См. также *Особая точка* аналитической функции.

Е. Д. Соломенцев.

ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Изгибание поверхности.*

ИЗОМОНОДРОМНОЕ РЕШЕНИЕ – см. *Изомонодромной деформации метод.*

ИЗОМОНОДРОМНОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТОД – метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих деформации некоторой линейной системы дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Параметрами деформации служат особые точки линейной системы, выступающие как независимые переменные нелинейных уравнений на остальные коэффициенты системы. Указанные нелинейные уравнения возникают как необходимые и достаточные условия постоянства *монодромии группы* линейной системы по всем параметрам деформации.

Впервые концепция И. д. м. возникла в работе Л. Шлезингера [1], где рассматривалась линейная система фуксова типа

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\Psi}{d\lambda}=A(\lambda)\Psi,\quad \lambda\in C,\\&A(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_\nu}{\lambda-a_\nu},\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где $(m\times m)$-матрицы A_ν, и все особые точки $a_1, a_2, \ldots, a_n\in C$ постоянны по λ. Группа монодромии системы (1) имеет образующие M_ν, соответствующие обходу по петле вокруг точек a_ν:

$$(\lambda-a_\nu)\mapsto(\lambda-a_\nu)e^{2\pi i}\Rightarrow\Psi\mapsto\Psi M_\nu.$$

Условие независимости матриц монодромии M_ν от параметров деформации, $\partial_{a_\mu}M_\nu=0$, $\mu, \nu=1, 2, \ldots, n$, эквивалентно системе нелинейных уравнений на коэффициенты (1) (система Шлезингера)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial A_\nu}{\partial a_\mu}=\frac{[A_\nu,A_\mu]}{a_\nu-a_\mu},\quad \mu\neq\nu,\\&\frac{\partial A_\nu}{\partial a_\mu}=-\sum_{\mu\neq\nu}\frac{[A_\nu,A_\mu]}{a_\nu-a_\mu}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Здесь матрицы монодромии M_ν как функции от переменных A_μ являются законами сохранения системы (2). С современной точки зрения система (2) является вполне интегрируемой, поскольку она представима как условие совместности линейной системы

$$\frac{d\Psi}{da_\nu}=-\frac{A_\nu}{\lambda-a_\nu}\Psi,\quad \nu=1,2,\ldots,n,\qquad(3)$$

и системы (1). Наличие дополнительной системы (3) на величины A_ν влечет, в свою очередь, постоянство группы монодромии по параметрам деформации.

Вычисление группы монодромии по начальным или граничным значениям решений нелинейного уравнения составляет прямую задачу теории монодромии. Напротив, в обратной задаче теории монодромии требуется найти коэффициенты линейной системы (1), то есть решение нелинейного уравнения, по заданной группе монодромии (см. *Монодромии теории обратные задачи*). В рамках обратной задачи теории монодромии удается установить существование, единственность и асимптотич. свойства решений нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью И. д. м.

Важными примерами таких уравнений являются шесть обыкновенных дифференциальных *Пенлеве уравнений* (см. [2]), обозначаемых PI–PVI. Все они представляются в виде условий совместности системы по x и системы (1) по λ при $m=2$, где матрица $A(\lambda)$ содержит дополнительные полюсы порядка выше первого в нуле (PIII) или на бесконечности (PI, PII, PIV) (см. [3]).

Для таких систем подробно исследована обратная задача теории монодромии, с помощью к-рой найдены формулы распределения полюсов и нулей, а также асимптотики общих решений уравнений Пенлеве в окрестности особых точек и явные формулы связи параметров этих асимптотик (см. [4]).

Другие нелинейные эволюционные уравнения типа Кортевега – де Фриса, представимые в виде уравнения нулевой кривизны

$$U_t-V_x+[U,V]=0$$

и интегрируемые методом обратной задачи, имеют классы так наз. и з о м о н о д р о м н ы х р е ш е н и й. Это те решения, к-рые помимо стандартной U-, V-пары:

$$\Psi_x=U(x,t,\lambda)\Psi,\ \Psi_t=V(x,t,\lambda)\Psi$$

обеспечивают условия совместности с дополнительным третьим уравнением по λ:

$$\Psi_\lambda=A(x,t,\lambda)\Psi,$$

где матрица A является рациональной по λ. В этот класс попадают, в частности, солитонные, конечнозонные и нек-рые автомодельные решения указанных уравнений (см. [5]).

Лит.: [1] Schlesinger L., «J. reine u. angew. Math.», 1912, Bd 141, S. 96–145; [2] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Харьков, 1939; [3] Сато М., Дзимбо М., Мива Т., Голономные квантовые поля, пер. с англ., М., 1983; [4] Its A. R., Novokshenov V. Yu., Isomonodromic deformation method in the theory of Painleve equations, «Lecture Notes in Math.», v. 1191, B.– N.Y., 1986; [5] Итс А. Р., «Изв. АН СССР», 1985, т. 49, № 3, с. 530–65.

В. Ю. Новокшенов.

ИЗОМОРФИЗМ – одно из основных понятий современной математики, возникшее сначала в пределах алгебры в применении к таким алгебраическим образованиям, как группы, кольца, поля и т. п., но оказавшееся весьма существенным для общего понимания строения и области всевозможных применений каждого раздела математики.

Понятие И. относится к системам объектов с заданными в них операциями или отношениями. В качестве простого примера двух изоморфных систем можно рассмотреть систему $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с заданной на ней операцией сложения $x=x_1+x_2$ и систему $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел с заданной на ней операцией умножения $y=y_1y_2$. Можно показать, что внутреннее «устройство» этих двух систем чисел совершенно одинаково. Для этого достаточно систему $\mathbb{R}$ отобразить в систему $\mathbb{R}_+$, поставив в соответствие числу x из $\mathbb{R}$ число $y=a^x$, $a>1$, из $\mathbb{R}_+$. Тогда сумме $x=x_1+x_2$ будет соответствовать произведение $y=y_1y_2$ чисел $y_1=a^{x_1}$ и $y_2=a^{x_2}$, соответствующих x_1 и x_2. Обратное отображение $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$ имеет при этом вид $x=\log_a y$. Из любого предложения, относящегося к сложению чисел системы $\mathbb{R}$, можно извлечь соответствующее ему предложение, относящееся к умножению чисел системы $\mathbb{R}_+$. Напр., если в $\mathbb{R}$ сумма

$$s_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$$

членов арифметич. прогрессии выражается формулой

$$s_n=\frac{n(x_1+x_n)}{2},$$

то в $\mathbb{R}_+$ произведение

$$p_n=y_1y_2\ldots y_n$$

членов геометрич. прогрессии выражается формулой

$$p_n=\sqrt{(y_1y_n)^n}$$

(умножению на n в системе $\mathbb{R}$ соответствует при переходе к системе $\mathbb{R}_+$ возведение в n-ю степень, а делению на два – извлечение квадратного корня).

Изучение свойств одной из изоморфных систем в значительной мере (а с абстрактно-математич. точки зрения – полностью) сводится к изучению свойств другой. Любую систему объектов S', изоморфную системе S, можно рассматривать как «модель» системы S («моделировать систему S при помощи системы S'») и сводить изучение самых разнообразных свойств системы S к изучению свойств «модели» S'.

Общее определение И. систем объектов с заданными на них отношениями между постоянным для каждого отношения числом объектов таково. Пусть даны две системы объектов S и S', причем в первой определены отношения

$$F_k(x_1, x_2, \ldots),\ k=1, 2, \ldots, n,$$

а во второй – отношения

$$F'_k(x'_1, x'_2, \ldots),\ k=1, 2, \ldots, n.$$

Системы S и S' с указанными на них отношениями называются изоморфными (обозначение $S\cong S'$), если между ними существует такое взаимно однозначное соответствие

$$x'=\varphi(x),\ x=\psi(x')$$

(где x – произвольный элемент S, а x' – произвольный элемент S'), что из наличия $F_k(x_1, x_2, \ldots)$ вытекает $F'_k(x'_1, x'_2, \ldots)$, и наоборот. Отображение φ называется изоморфным отображением, или изоморфизмом, системы S в S', а обратное ему отображение ψ – изоморфизмом системы S' в S. [В приведенном выше примере в системе $\mathbb{R}$ определено отношение $F(x, x_1, x_2)$, где $x=x_1+x_2$, в системе $\mathbb{R}_+$ – отношение $F'(y, y_1, y_2)$, где $y=y_1y_2$; взаимно однозначное соответствие устанавливается по формулам $y=a^x$, $x=\log_a y$.]

Понятие И. возникло в теории групп, где впервые был понят тот факт, что изучение внутренней структуры двух изоморфных систем объектов представляет собой одну и ту же задачу. Существование этого свойства подметил Р. Декарт (R. Descartes), он предвидел возможность «отождествлять» изоморфные отношения или операции (он называл их «подобными»). Термин «И.» был введен в сер. 19 в.

Аксиомы любой математич. теории определяют систему объектов, изучаемую этой теорией, всегда только с точностью до И.: аксиоматически построенная математич. теория, применимая к к.-л. одной системе объектов, всегда полностью применима к другой, изоморфной ей. Поэтому каждая аксиоматически изложенная математич. теория допускает не одну, а много «интерпретаций», или «моделей».

Частным случаем И. является автоморфизм – взаимно однозначное отображение

$$x'=\varphi(x),\ x=\psi(x')$$

системы объектов с заданными отношениями $F_k(x_1, x_2, \ldots)$ на самое себя, при к-ром из $F_k(x_1, x_2, \ldots)$ вытекает $F'_k(x'_1, x'_2, \ldots)$, и наоборот. Это понятие тоже возникло в теории групп, но потом оказалось существенным в самых различных разделах математики.

В. И. Битюцков, А. Н. Колмогоров.

ИЗОМОРФИЗМ динамических систем метрический – свойство двух *динамических систем* переходить друг в друга при подходящем отображении фазового пространства одной из них на фазовое пространство другой. Динамич. система $\{T^t\}$ (с дискретным или непрерывным временем), действующая в пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, изоморфна динамич. системе $\{T_1^t\}$, действующей в пространстве с мерой $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1)$, если существует такое измеримое отображение $\varphi:\Omega\to\Omega_1$, что

1) $\varphi\Omega=\Omega_1$;

2) φ обратимо, и обратное отображение φ^{-1} измеримо;

3) φ переводит меру P в меру P_1, то есть $\mathsf{P}(\varphi^{-1}F_1)=\mathsf{P}_1(F_1)$ для любого $F_1\subset\mathcal{F}_1$;

4) φ переводит $\{T^t\}$ в $\{T_1^t\}$, то есть $\varphi T^t\omega=T_1^t\varphi\omega$ при всех t и P-почти всех $\omega\in\Omega$ (исключительное множество меры нуль может зависеть от t). Обычно не делают различия между И. и И. по mod 0, определение к-рого отличается от приведенного тем, что пространства Ω, Ω_1 заменяются в нем на любые множества полной меры, соответственно $\{T^t\}$- и $\{T_1^t\}$-инвариантные.

При выполнении условий 1), 3), 4) динамич. система $\{T_1^t\}$ называется гомоморфным образом (или факторсистемой) динамич. системы $\{T^t\}$. Две системы, каждая из к-рых является гомоморфным образом другой, называются слабо изоморфными (см. [1]).

Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – вероятностное пространство и X – любая определенная на нем случайная величина, то сдвиги в пространстве реализаций случайного процесса X_t, где $X_t(\omega)=X(T^t\omega)$, $\omega\in\Omega$, образуют динамич. систему $\{T_1^t\}$, являющуюся гомоморфным образом системы $\{T^t\}$. Эти системы изоморфны в том или только в том случае, когда σ-алгебра, порожденная всеми X_t, совпадает с $\mathcal{F}$ (с точностью до множества меры нуль). Такого совпадения, как правило, можно добиться уже в классе случайных величин

X со счетным, а в нек-рых случаях даже с конечным числом значений (см. [2]–[4]). Если система $\{T^t\}$ сама порождена сдвигами в пространстве выборочных функций нек-рого стационарного в узком смысле случайного процесса Y_t, то отображение, переводящее $\{T^t\}$ в $\{T_1^t\}$, можно рассматривать как согласованное со сдвигом (стационарное) кодирование реализаций процесса Y_t реализациями процесса X_t. Если при этом почти наверное возможно однозначное декодирование, то имеет место И.

При переходе к гомоморфному образу динамич. системы сохраняются такие ее свойства, как *эргодичность, перемешивание, кратное перемешивание* и *К-перемешивание*, а *энтропия* не увеличивается; гомоморфный образ любого *Бернулли сдвига* изоморфен нек-рому сдвигу Бернулли (см. [5], [8]).

Свойства динамич. системы и порождаемые ею объекты (такие, напр., как энтропия и спектр), к-рые совпадают у изоморфных систем, называются метрическими инвариантами. Проблема И. динамич. систем заключается в том, чтобы найти для того или иного класса систем полный и достаточно обозримый набор инвариантов. Для динамич. систем с дискретным спектром такой набор состоит из одного спектра (см. [6]), для сдвигов Бернулли – из энтропии (см. [7], [8]); известны полные наборы инвариантов и для нек-рых других классов динамич. систем (см. [8]–[10]).

Лит.: [1] Синай Я. Г., «Доклады АН СССР», 1962, т. 147, № 4, с. 797–800; [2] Рохлин В. А., «Вестник Ленингр. ун-та», 1963, № 1, с. 26–32; 1965, № 13, с. 68–72; [3] Krieger W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 149, № 2, p. 453–64; [4] Krengel U., «J. Math. Anal. and Appl.», 1971, v. 35, № 3, p. 611–20; [5] Ornstein D., «Adv. Math.», 1970, v. 5, № 3, p. 349–64; [6] Neumann J., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 3, p. 587–642; [7] Ornstein D., «Adv. Math.», 1970, v. 4, № 3, p. 337–52; [8] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [9] Абрамов Л. М., «Известия АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 4, с. 513–30; [10] Вершик А. М., «Доклады АН СССР», 1962, т. 144, № 2, с. 255–57.

Б. М. Гуревич.

ИЗОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Изоморфизм.*

ИЗОСПИН – см. *Изотопическая инвариантность.*

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ СЖИМАЕМОСТЬ – см. *Сжимаемость.*

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ ЗВУКА – см. *Звуковые волны.*

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ – локальные координаты (u, v) на двумерной поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, в которых индуцированная *риманова метрика* имеет вид:

$$dl^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Если в нек-рых координатах (p, q) риманова метрика записывается вещественно-аналитич. функциями, то И. к. существуют и являются вещественно-аналитич. функциями от (p, q). Гауссова кривизна поверхности V^2 в И. к. имеет вид:

$$K = -\frac{1}{2f}\Delta \ln f,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}(u, v)$ минимальной поверхности, записанный в И. к., является гармоническим, то есть $\Delta \boldsymbol{r} = 0$.

А. В. Болсинов.

ИЗОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ – свойство симметрии сильных взаимодействий, обусловливающее существование особых семейств адронов – так называемых изотопических мультиплетов, состоящих из частиц с одинаковыми *квантовыми числами*, близкими по значению массами, но с отличающимися электрическими зарядами. И. и. находит свое выражение в неизменности сильных взаимодействий при замене адронов, участвующих в процессе, на другие, принадлежащие тому же изотопич. мультиплету.

Каждый изотопич. мультиплет характеризуется особой величиной, изотопическим спином (изоспином) I, к-рый определяет полное число частиц, входящих в мультиплет, равное $2I+1$. Изоспин может принимать значения 0, 1/2, 1, 3/2, 2...

С математич. точки зрения И. и. есть проявление инвариантности эффективных *лагранжианов* сильных взаимодействий относительно линейных преобразований входящих в них полей адронов, реализуемых в векторных пространствах, к-рые образуются полями, отвечающими различным компонентам изотопич. мультиплетов. Эти линейные преобразования составляют группу, изоморфную группе вращений 3-мерного пространства (обычно о нем говорят как об изотопическом пространстве). Изотопич. мультиплеты представляют собой неприводимые представления указанной группы. При преобразованиях группы компоненты изотопич. мультиплета переходят в линейные комбинации компонент того же мультиплета.

В рамках представлений о *кварках* динамич. причиной, обусловливающей существование И. и. в сильных взаимодействиях адронов, является близость масс u- и d-кварков и одинаковый характер их сильных взаимодействий. Последовательная замена в составе адронов u-кварков на d-кварки, находящихся в том же состоянии, позволяет получить все компоненты изотопич. мультиплета. На основе этих представлений устанавливается и тип группы, ответственный за И. и. Близость свойств u- и d-кварков по отношению к сильному взаимодействию эквивалентна утверждению, что сильные взаимодействия инвариантны (как показывает эксперимент, с точностью до нескольких процентов) относительно преобразований

$$u' = a_{11}u + a_{12}d,$$
$$d' = a_{21}u + a_{22}d,$$

где a_{ik} – комплексные числа. При этом необходимо, чтобы матрица $\|a\|$ была унитарной, а $\det \|a\| = 1$. Такие матрицы образуют группу $SU(2)$, к-рая локально изоморфна $O(3)$ – группе вращений 3-мерного пространства. Инвариантность сильного взаимодействия относительно группы вращений в изотопич. пространстве составляет одно из проявлений так наз. изотопической симметрии сильного взаимодействия; она была установлена экспериментально задолго до появления гипотезы кварков.

Лит.: [1] Физическая энциклопедия, т. 2, М., 1990, с. 118–20.

ИЗОТОПИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ – см. *Изотопическая инвариантность.*

ИЗОТОПИЧЕСКИЙ МУЛЬТИПЛЕТ – см. *Изотопическая инвариантность.*

ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН – см. *Изотопическая инвариантность.*

ИЗОТОПИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Изотопическая инвариантность.*

ИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – *турбулентность*, все конечномерные распределения вероятностей значений гидродинамических полей которой инвариантны относительно произвольных сдвигов, вращений и зеркальных отражений системы координат. И. т. реализуется лишь приближенно в исскуственных условиях (за решетками в аэродинамич. трубах, где вырождается с удалением от решетки), но математич. аппарат теории И. т. успешно применяется для описания статистич. режима мелкомасштабных компонент реальных турбулентных течений при больших значениях числа Рейнольдса.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, механика турбулентности, ч. 2, М., 1967.

М. М. Любимцев.

ИЗОТРОПНОЕ МНОГООБРАЗИЕ – подмногообразие *симплектического многообразия* (M^{2n}, ω), ограничение *симплектической структуры* ω на которое равно нулю. Все кривые изотропны. И. м. максимально возможной размерности n являются *лагранжевыми многообразиями*. Все изотропные ростки одной размерности симплектически эквивалентны.

М. Э. Казарян.

ИЗОТРОПНОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ – см. *КАМ-теория, Симплектическая геометрия.*

ИЗОТРОПНОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ с комплексным ростком – геометрический объект, возникающий при нахождении квазиклассических приближений с комплексными фазами (см. [1]). Пусть в $2n$-мерном фазовом пространстве M^{2n} с симплектич. структурой ω^2 задано изотропное k-мерное подмногообразие $\Lambda: \omega^2|_\Lambda = 0$. Комплексным ростком на Λ называется отображение $r^n: q \to r^n(q)$, сопоставляющее для любого $q \in \Lambda$ подпространство $r^n(q)$ комплексификации $T_q^{\mathbb{C}} M^{2n}$ касательного к M в точке q пространства, обладающее свойствами:

а) лагранжевости $r^n(q)$: $\omega^2(\xi, \eta) = 0$ для любых $\xi, \eta \in r^n(q)$;

б) $r^n(q) \supset T_q^{\mathbb{C}}\Lambda$;

в) диссипативности $r^n(q)$: $\omega^2(\xi, \bar{\xi})/i > 0$ для любых $\xi \in r^n(q) \setminus T_q^{\mathbb{C}}\Lambda$.

Векторное расслоение с базой Λ и слоями $r^n(q)$ называется изотропным подмногообразием с комплексным ростком.

См. также *Квантование изотропных торов*.

Лит.: [1] Маслов В. П., Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, М., 1977; [2] Валиньо Б., Доброхотов С. Ю., Нехорошев Н. Н., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 3, с. 233–34.

С. Ю. Доброхотов.

ИЗОТРОПНЫЙ ВЕКТОР – см. *Четырехмерный вектор.*

ИЗРАИЛЯ ТЕОРЕМА – см. *Черная дыра*; теоремы единственности.

ИМПЕДАНС – см. *Пассивная система.*

ИМПРИМИТИВНАЯ ГРУППА – *группа* G взаимно однозначных отображений на себя (подстановок) некоторого множества S, для которой существует разбиение множества S в объединение непересекающихся подмножеств $S_1, ..., S_m$, $m \geqslant 2$, обладающее следующими свойствами: число элементов хотя бы в одном из S_i больше единицы; для любой подстановки $g \in G$ и любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, существует такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что g отображает S_i на S_j.

Набор подмножеств $S_1, ..., S_m$ называется системой импримитивности, а сами подмножества S_i – областями импримитивности группы G. Не импримитивная группа подстановок называется примитивной.

Понятие И. г. подстановок имеет аналог для групп линейных преобразований векторных пространств. Именно, линейное представление ρ группы G называется импримитивным, если существует разложение пространства V представления ρ в прямую сумму собственных подпространств $V_1, ..., V_m$, обладающее следующим свойством: для любого элемента $g \in G$ и любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, найдется такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что $\rho(g)(V_i) = V_j$. Если V не обладает разложением указанного типа, то представление ρ называется примитивным. Импримитивное представление ρ называется транзитивно импримитивным, если для любой пары подпространств V_i и V_j из системы импримитивности существует такой элемент $g \in G$, что $\rho(g)(V_i) = V_j$.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969.

Н. Н. Вильямс, В. Л. Попов.

ИМПУЛЬС – то же, что *количество движения*. См. также *Обобщенный импульс.*

ИМПУЛЬС СИЛЫ – мера действия силы за некоторый промежуток времени; равняется произведению среднего значения силы $\boldsymbol{F}_{\text{ср}}$ на время t_1 ее действия:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}_{\text{ср}} t_1.$$

И. с. – величина векторная, и направлен он так же, как $\boldsymbol{F}_{\text{ср}}$. Точное значение И. с. за промежуток времени t_1 определяется интегралом:

$$S = \int_0^{t_1} F\,dt.$$

При движении материальной точки под действием силы $\boldsymbol{F}$ ее количество движения получает за время t_1 приращение, равное И. с.:

$$\boldsymbol{S} = m\boldsymbol{v}_1 - m\boldsymbol{v}_0$$

($m\boldsymbol{v}_0$ и $m\boldsymbol{v}_1$ – соответственно количество движения точки в начале и в конце промежутка времени t_1).

Понятие И. с. широко используется в механике, в частности в теории *удара*, где величина, равная импульсу ударной силы $\boldsymbol{F}_{\text{уд}}$ за время удара τ, называется ударным импульсом.

ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ квантовой механики (p-представление) – описание квантовомеханических систем, основанное на разложении *векторов состояния* $|\psi(t)\rangle$ по базисным векторам $|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ...\rangle$, отвечающим определенным значениям импульсов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ...$ каждой из частиц. Если число частиц n фиксировано, то

$$|\psi(t)\rangle = \int d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \dots d\boldsymbol{p}_n |\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n\rangle \times \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n | \psi(t)\rangle,$$

где амплитуда $\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n | \psi(t)\rangle$ представляет собой n-частичную волновую функцию в И. п. Вероятность того, что в момент времени t импульс 1-й частицы лежит в интервале $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1 + d\boldsymbol{p}_1)$, импульс 2-й частицы – в интервале $(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_2 + d\boldsymbol{p}_2)$ и т. д., пропорциональна

$$|\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n | \psi(t)\rangle|^2 d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \dots d\boldsymbol{p}_n.$$

Если взаимодействие в системе зависит лишь от относительных расстояний между частицами и отсутствуют внешние поля, нарушающие однородность пространства, то полный импульс $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + ... + \boldsymbol{p}_n$ сохраняется, и его можно обратить в 0, переходя в систему центра масс частиц. В результате число независимых импульсов, от к-рых зависит волновая функция, уменьшается на единицу.

Наиболее важное и адекватное применение И. п. находит в квантовомеханич. теории рассеяния. Особенно возрастает роль И. п. при переходе к релятивистскому описанию взаимодействий частиц в квантовой теории поля, где оно объединяется с энергетич. представлением в рамках одного четырехмерного p-представления.

См. также *Шредингера представление.*

В. Г. Кадышевский.

ИМПУЛЬСНОЕ ПРОСТРАНСТВО – пространство, точки которого определяют значения импульсов структурных элементов (частиц) системы. В общем случае – пространство обобщенных импульсов – переменных, канонически сопряженных обобщенным координатам. Размерность И. п. равна полному числу обобщенных координат, то есть числу степеней свободы S. Так, для системы N частиц без внутренних степеней свободы размерность И. п. $S = 3N$.

И. п. является подпространством, образующим вместе с пространством обобщенных координат фазовое пространство системы. При классич. описании (замкнутой) системы с S степенями свободы каждое состояние системы в любой момент времени полностью определяется значением S обобщенных координат q_i и S обобщенных импульсов p_i, то есть задается определенной точкой в фазовом пространстве. Соответственно каждая точка И. п. однозначно фиксирует импульсы составляющих систему частиц. В квантовой механике, согласно *неопределенностей соотношению*, частицы не могут характеризоваться одновременно точно определенными значениями координат и импульсов. Поэтому имеет смысл говорить только о числе состояний в данном (малом) объеме фазового пространства вокруг точки с координатами $\{q_i, p_i\}$.

А. Э. Мейерович.

ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА – для измеримого отображения T измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ в себя, такая мера μ, заданная на $\mathcal{F}$, что

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$$

для любого $A \in \mathcal{F}$. Инвариантность меры для T означает также, что

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int f(Tx)\,d\mu(x).$$

Е. И. Динабург.

ИНВАРИАНТНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ – регуляризация, сохраняющая инвариантность относительно некоторой группы преобразований. В более узком смысле термин «И. р.» применяется в квантовой теории поля для обозначения сохраняющей калибровочную инвариантность регуляризации интегралов, отвечающих диаграммам Фейнмана. Существование И. р. является достаточным условием возможности построения калибровочно инвариантной квантовой теории. Если это условие не выполнено, то возможно появление квантовых аномалий, нарушающих *калибровочную инвариантность* на квантовом уровне. В качестве И. р. применяют *размерную регуляризацию, высших ковариантных производных метод*, переход к калибровочной теории в решетчатом пространстве-времени. *А. А. Славнов.*

ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ – вид интегрирования для функций, аргументом которых являются элементы группы или точки однородного пространства (любую точку такого пространства можно перевести в другую заданным действием группы). И. и. согласовано с действием группы: значение интеграла не меняется при заменах переменных, отвечающих этому действию, а якобиан замены равен 1.

И. и.– стандартный прием для построения *функционального интеграла*, служащего эффективным средством изучения калибровочных полей, различных моделей квантовой теории поля.

Если пространство аргументов X является многообразием (то есть допускает введение локальных координат $x_1, \ldots, x_n$), И. и. функции $f(x)$ сводится к вычислению интеграла от дифференциальной формы $f\cdot\omega$, где $\omega=\rho(x)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$. Условие согласования имеет вид:

$$\int_X f\cdot\omega=\int_X T_g f\cdot\omega;$$

здесь T_g означает оператор сдвига на X с помощью $g\in G$:

$$T_g f(x)=f(g^{-1}x).$$

Пусть $X=G$ – топологич. группа, действующая на себя левыми сдвигами. И. и. существует тогда и только тогда, когда G локально компактна (в частности, на бесконечномерных группах И. и. не существует). Для подмножества $A\subset G$ И. и. характеристич. функции χ_A (равной 1 на A и 0 вне A) задает левую меру Хаара $\mu(A)$. Определяющим свойством этой меры является ее инвариантность при левых сдвигах: $\mu(g^{-1}A)=\mu(A)$ для всех $g\in G$. Левая мера Хаара на группе определена однозначно с точностью до положительного скалярного множителя. Если известна мера Хаара μ, то И. и. функции f дается формулой

$$\int_G f(g)d\mu(g).$$

Аналогичными свойствами обладает правая мера Хаара. Существует непрерывный гомоморфизм (отображение, сохраняющее групповое свойство) Δ_G группы G в группу (относительно умножения) положительных чисел, для к-рого

$$d\mu_l(gh)=\Delta_G(h)d\mu_l(g),\quad d\mu_r(hg)=\Delta_G(h)d\mu_r(g),$$
$$d\mu_r(g)=\mathrm{const}\cdot\Delta_G(g)d\mu_l(g)=\mathrm{const}\cdot d\mu_l(g^{-1}),$$

где $d\mu_r$ и $d\mu_l$ – правая и левая меры Хаара. Функцию $\Delta_G(g)$ называют модулем группы G. Если $\Delta_G\equiv 1$, то группа G называется унимодулярной; в этом случае правая и левая меры Хаара совпадают. Компактные, полупростые и нильпотентные (в частности, коммутативные) группы унимодулярны. Если G – n-мерная группа Ли и $\theta_1,\ldots,\theta_n$ – базис в пространстве левоинвариантных 1-форм на G, то левая мера Хаара на G задается n-формой $\omega=\theta_1\wedge\ldots\wedge\theta_n$. В локальных координатах

$$\theta_i=\sum_j\theta_{ij}(x)dx_j,\quad \omega=\det\|\theta_{ij}\|dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Для вычисления форм θ_i можно воспользоваться любой матричной реализацией группы G: матричная 1-форма $g^{-1}dg$ левоинвариантна, а ее коэффициенты являются левоинвариантными скалярными 1-формами, из к-рых и выбирается искомый базис. Напр., полная матричная группа $GL(n, R)$ унимодулярна и мера Хаара на ней задается формой $(\det g)^{-n}\bigwedge_{ij} dg_{ij}$.

Пусть $X=G/H$ – однородное пространство, для к-рого локально компактная группа G является группой преобразований, а замкнутая подгруппа H – стабилизатором нек-рой точки. Для того чтобы на X существовало И. и., необходимо и достаточно, чтобы для всех $h\in H$ выполнялось равенство $\Delta_G(h)=\Delta_H(h)$. В частности, это верно в случае, когда H компактна или полупроста.

Полной теории И. и. на бесконечномерных многообразиях не существует.

Лит.: [1] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988. *А. А. Кириллов.*

ИНВАРИАНТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ – *инвариантное множество* в фазовом многообразии M, являющееся подмногообразием M. Основные примеры: а) И. м. N автономного обыкновенного дифференциального уравнения $dx/dt=V(x)$ на многообразии M (фазовая кривая уравнения, проходящая через любую точку $p\in N$, целиком лежит в N); б) И. м. N диффеоморфизма $A: M\to M$ многообразия M (N удовлетворяет условию $A(N)=N$). Подмногообразие N является И. м. уравнения $dx/dt=V(x)$ (используют также термины «И. м. векторного поля V», «И. м. фазового потока поля V» и «интегральное многообразие поля V») тогда и только тогда, когда вектор поля V в каждой точке $p\in N$ касается N.

См. также *Динамическая система.* *М. Б. Севрюк.*

ИНВАРИАНТНОЕ МНОЖЕСТВО – такое подмножество N фазового пространства некоторой системы, что если состояние системы $x(t)$ в начальный момент времени $t=t_0$ принадлежит N, то $x(t)$ принадлежит N во все предыдущие и последующие моменты времени t. Любая фазовая кривая этой системы либо целиком лежит в N, либо не пересекается с N. Термин «И. м.» обычно употребляется только для автономных систем, когда закон, определяющий эволюцию системы, не зависит явно от времени. *М. Б. Севрюк.*

ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО – см. *Неприводимое представление.*

ИНВАРИАНТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ – см. *Эргодическая теорема.*

ИНВАРИАНТНОСТИ ГРУППА – см. *Инвариантность.*

ИНВАРИАНТНОСТЬ – фундаментальное физическое понятие, выражающее независимость физических закономерностей от конкретных ситуаций, в которых они устанавливаются, и от способа описания этих ситуаций. Понятие И. применяется также к физич. величинам, значения к-рых не зависят от способа описания.

И. формулируется как обобщение данных опыта и является физич. закономерностью. Среди прочих физич. закономерностей свойства И. выделены тем, что относятся к наиболее широкому кругу явлений, отражают наиболее общие и глубокие свойства физич. объектов. Поэтому иногда их называют принципами И. В ряде случаев понятие И. возникает только в определенных теоретич. рамках, и для его формулировки необходимо ввести принципиально ненаблюдаемые величины. Так, описание калибровочной И. происходит в терминах *потенциалов* поля (наблюдаемы их производные – напряженности) и фаз волновых функций (наблюдаемы квадраты их модулей – вероятности).

Изменение условий наблюдения часто эквивалентно изменению способа описания явления: смена места и времени наблюдения – сдвигу начала отсчета координат и времени, замена частиц на античастицы – операции зарядового со-

пряжения и т. п. Количественно это описывается преобразованиями физич. величин: координат, времени, потенциалов поля, волновых функций и т. д. Как правило, каждая совокупность таких преобразований образует группу; ее называют группой инвариантности, или группой симметрии. В *лагранжевом формализме* наличие непрерывных групп И. влечет за собой важные физич. следствия.

Принципы И. делятся на два основных класса. И. первого класса, наиболее фундаментальная, характеризует геометрич. структуру пространства-времени. Однородность и изотропность пространства и однородность времени приводят к И. физич. законов относительно группы сдвигов координат и времени и пространственных вращений. Для изолированной системы отсюда следует сохранение импульса, энергии и момента импульса. Эта И. является составной частью принципа относительности, содержащего дополнительно утверждение об И. относительно выбора инерциальной системы отсчета. И. первого класса универсальна и относится ко всем типам взаимодействий, к классич. и квантовой теории.

Ко второму классу относятся менее универсальные принципы И., характеризующие отдельные типы взаимодействий. Таковы И. относительно калибровочных преобразований, унитарной симметрии, цветовой симметрии; такова И. электромагнитного и сильного взаимодействий относительно обращения времени и пространственной инверсии.

Принципы И. играют фундаментальную роль в построении физич. теорий и формулируются обычно как И. действия относительно преобразований групп симметрии. Чаще всего И. действия обеспечивается требованием И. *лагранжиана*, к-рое в значительной степени фиксирует его вид. Однако встречаются ситуации, когда И. действия обеспечена тем, что преобразование симметрии меняет лагранжиан на полную производную, а не просто оставляет его инвариантным.

Если теория строится как аксиоматическая, принципы И. явно включаются в число аксиом и существенно используются при получении общих следствий теории.

При построении различных объединенных теорий возникла концепция приближенной, или нарушенной, И. Обычно в таких теориях имеется параметр с размерностью массы (напр., разность масс частиц, участвующих в преобразованиях симметрии); при энергиях, много больших этого параметра, И. считается точной. Такой же характер имеет *масштабная инвариантность*, появляющаяся у амплитуд перехода при энергиях, много больших масс всех частиц, участвующих в реакции.

С понятием И. тесно связано понятие ковариантности. В любой теории, обладающей свойством И. относительно преобразований данной группы, не все физич. величины инвариантны. Большинство из них меняется при преобразованиях группы. Технически удобнее, когда эти изменения определенным образом регламентированы; за И. теории значительно легче проследить, когда преобразование всех физич. величин под действием группы происходит по представлениям группы И. В этом случае сами величины и формулировка теории называются ковариантными. При ковариантной формулировке теории любое ее уравнение не меняет своего вида при преобразованиях группы И., так как все его члены преобразуются согласованно. Это помогает, напр., фиксировать зависимость отдельных, заранее неизвестных членов уравнения от остальных физич. величин, строить релятивистские обобщения нерелятивистских формул.

Лит.: [1] Вигнер Е., Этюды о симметрии, пер. с англ., М., 1971.

В. П. Павлов.

ИНВАРИАНТНЫЙ ЗАРЯД в квантовой теории поля — мультипликативная комбинация заряда и обезразмеренных функций Грина, инвариантная относительно преобразований *ренормализационной группы* и нормированная на заряд. В нек-рых схемах перенормировки И. з. совпадает с эффективным зарядом. И. з. является функцией импульсов, масс и зарядов и удовлетворяет функциональным и дифференциальным уравнениям ренормализационной группы с нулевой *аномальной размерностью*. Понятие И. з. было введено в 1955 Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым.

В квантовой теории поля И. з. отвечают каждой вершине взаимодействия. Так, в квантовой хромо- и электродинамике можно ввести следующие И. з.:

$$\bar{g}=g\Gamma(\{p^2/\lambda^2\}, m^2/\lambda^2, g)\prod_{i=1}^{3}G_i^{1/2}(p^2/\lambda^2, m^2/\lambda^2, g),$$

$$\bar{e}=eD^{1/2}(p^2/\lambda^2, m^2/\lambda^2, e),$$

где g и e — цветной и электрич. заряды соответственно, Γ — трехглюонная вершина, G и D — глюонный и фотонный пропагаторы, λ — точка нормировки, в к-рой И. з. равен обычному заряду.

И. з., наряду с *эффективным зарядом*, играет ключевую роль в решении уравнений ренормализационной группы и при анализе ультрафиолетовых и инфракрасных асимптотик функций Грина. В более общем случае И. з.— ренорм-инвариантная функция, нормированная на заряд.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984.

Д. И. Казаков.

ИНВАРИАНТНЫЙ ТОР — *инвариантное многообразие* динамической системы (отображения или фазового потока векторного поля), диффеоморфное или гомеоморфное n-мерному тору $T^n=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$. И. т. служит математич. описанием колебательных процессов в динамич. системах.

Простейшим примером И. т. является замкнутая траектория фазового потока векторного поля V (то есть периодич. решение дифференциального уравнения $dx/dt=V(x)$). Для общей теории И. т. этот пример нехарактерен, так как большинство аспектов этой теории в размерности $n=1$ для потоков становятся тривиальными. Поэтому, как правило, в общей теории И. т. рассматривают n-мерные И. т. потоков при $n\geqslant 2$ и отображений при $n\geqslant 1$. С помощью перехода к сечению Пуанкаре изучение И. т. T^n фазового потока часто можно свести к изучению И. т. T^{n-1} соответствующего отображения Пуанкаре. Другим простейшим примером И. т., тоже исключительным, являются И. т. в линейных системах.

В теории И. т. рассматриваются следующие вопросы: условия существования И. т. и устойчивость И. т. при малых шевелениях системы, поведение траекторий на И. т. и в его окрестности, бифуркации И. т. и семейств И. т.

Свойства И. т. резко различаются в динамич. системах с той или иной симметрией (напр., в гамильтоновых или обратимых системах) и в системах общего вида.

n-мерные И. т. гамильтоновых систем с $N\geqslant n$ степенями свободы (или n-мерные И. т. обратимых систем с фазовым пространством размерности $2N\geqslant 2n$, пересекающие N-мерное многообразие неподвижных точек обращающей инволюции) присутствуют в фазовом пространстве, как правило, в большом количестве, образуя n-параметрич. канторовы семейства, и $2n$-мерная мера объединения всех И. т. из данного семейства положительна. Движение на этих И. т. условно-периодично с сильно несоизмеримыми частотами. Гладкость И. т. лишь незначительно ниже гладкости самой системы, и если последняя бесконечно дифференцируема или аналитична, то таковы и И. т. (см. *КАМ-теория*).

Напротив, И. т. систем общего вида встречаются в фазовом пространстве, как правило, изолированно. Движение на этих И. т. не является, вообще говоря, условно-периодическим, и они часто имеют лишь конечную гладкость, даже если сама система бесконечно дифференцируема или аналитична.

Одной из широко распространенных бифуркаций И. т. является рождение $(n+1)$-мерных И. т. из n-мерных, напр. двумерного И. т. из предельного цикла. При другой типичной бифуркации И. т. постепенно теряет гладкость, превращается в *странный аттрактор*, оставаясь уже лишь топологич. подмногообразием фазового пространства, и, наконец, разрушается с возникновением стохастич. колебаний.

Лит.: [1] Самойленко А. М., Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы, М., 1987; [2] Broer H. W. [a. o.], «Mem. Amer. Math. Soc.», 1990, v. 83, № 421; [3] Анищенко В. С., Сложные колебания в простых системах, М., 1990. *М. Б. Севрюк.*

ИНВЕРСИИ МЕТОД – см. *Изображений метод.*

ИНВОЛЮТИВНОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ – см. *Симплектическая геометрия.*

ИНДЕКСНЫЙ КЛАСС МАСЛОВА – см. *Маслова канонический оператор.*

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА – обобщение скалярного произведения, когда на него не накладывается условие положительной определенности. В конечномерном векторном пространстве индефинитное скалярное произведение в координатной записи дается формулой

$$(x,y)=\sum_{i,j} g_{ij}x^{i*}y^{j}$$

(в случае комплексного пространства, знак * означает комплексное сопряжение) или

$$(x,y)=\sum_{i,j} g_{ij}x^{i}y^{j}$$

(в случае вещественного пространства); здесь $g\equiv\{g_{ij}\}$ – невырожденная эрмитова матрица (в комплексном случае) или невырожденная вещественная симметричная матрица (в вещественном случае). Вещественные пространства с И. м. называются также псевдоевклидовыми пространствами; важнейшим физич. примером является *Минковского пространство-время* (пространство-время специальной теории относительности). Псевдориманова геометрия (построенная по типу римановой, но с И. м.) лежит в основе математич. аппарата общей теории относительности (теории тяготения Эйнштейна – Гильберта). Комплексные пространства с И. м. (называемые псевдогильбертовыми пространствами) находят применение в квантовой теории поля.

См. также *Пространство с индефинитной метрикой.*

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [4] Надь К. Л., Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1969; [5] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С., Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, М., 1986. *А. И. Оксак.*

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ – см. *Вынужденное излучение.*

ИНДУЦИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – представление π локально компактной группы G, индуцированное представлением ρ ее замкнутой подгруппы H. Точнее, представление π группы G в некотором пространстве E функций f на группе G, принимающих значения в пространстве V представления ρ и удовлетворяющих условию

$$f(hg)=\rho(h)f(g)$$

для всех $g\in G$, $h\in H$, причем

$$[\pi(g_1)f](g)=f(gg_1)$$

для всех $f\in E$, g, $g_1\in G$. И. п. π обычно обозначается $\mathrm{Ind}\,\rho$. Операция построения И. п. является простейшим и важнейшим приемом построения представлений более сложных групп, исходя из представлений более простых групп, и для широких классов групп полное описание неприводимых представлений может быть дано в терминах И. п. или их обобщений.

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 2, М., 1979, кол. 558–61. *А. И. Штерн.*

ИНЕРТНАЯ МАССА, инерциальная масса,– мера способности тела сопротивляться ускорению: при заданной силе ускорение обратно пропорционально И. м.

См. также *Масса.*

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ МАССА, инертная масса,– см. *Масса.*

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА – *система отсчета*, в которой справедлив закон инерции: материальная точка, когда на нее не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Всякая система отсчета, движущаяся по отношению к И. с. о. поступательно, равномерно и прямолинейно, есть также И. с. о. Следовательно, теоретически может существовать любое число равноправных И. с. о., обладающих тем важным свойством, что во всех таких системах законы физики одинаковы (принцип относительности). Система отсчета, движущаяся по отношению к И. с. о. с ускорением, неинерциальна, и закон инерции в ней не выполняется.

Понятие И. с. о. является научной абстракцией. Реальная система отсчета всегда связывается с каким-нибудь конкретным телом (землей, корпусом корабля или самолета и т. п.), по отношению к к-рому и изучается движение различных объектов. Поскольку все реальные тела движутся с тем или иным ускорением, любая реальная система отсчета может рассматриваться как И. с. о. лишь с определенной степенью приближения. С очень высокой степенью точности инерциальной можно считать гелиоцентрич. систему, связанную с центром масс Солнечной системы и с осями, направленными на три далекие звезды. Такая И. с. о. используется главным образом в задачах небесной механики и космонавтики. Для решения большинства технич. задач И. с. о. можно считать систему, жестко связанную с Землей, а в случаях, требующих большей точности (напр., в гироскопии),– с центром масс Земли и осями, направленными на далекие звезды.

При переходе от одной И. с. о. к другой в классич. механике Ньютона для пространственных координат и времени справедливы *Галилея преобразования*, а в релятивистской механике – *Лоренца преобразования.* *С. М. Тарг.*

ИНЕРЦИИ ТЕНЗОР – см. *Механика, Момент инерции.*

ИНЕРЦИОННЫЙ ИНТЕРВАЛ МАСШТАБНОСТИ – см. *Колмогоровская автомодельность.*

ИНСТАНТОН – экстремаль евклидова действия (см. ниже). Точнее говоря, обычно этот термин относят к топологически нетривиальным экстремалям (поле называется топологически нетривиальным, если его нельзя соединить с классич. вакуумом непрерывным семейством полей, каждое из которых имеет конечное евклидово действие).

Топологически нетривиальная экстремаль евклидова действия описывает туннельный переход между двумя классич. вакуумами. Напр., в задаче о квантовом движении одномерной частицы в поле

$$U(q)=\lambda(q^2-a^2)^2$$

топологически нетривиальными экстремалями евклидова действия:

$$S=\int\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2+\lambda(q^2-a^2)^2\right)dt$$

являются поля

$$q(t)=\pm a\,\mathrm{arth}\left(a\sqrt{2\lambda}\,(t-c)\right),$$

описывающие туннельный переход между классич. вакуумами $q=\pm a$.

Наиболее важный пример – И. в калибровочных теориях (калибровочные инстантоны). Если $A_\mu(x)$ – калибровочное поле, определенное на пространстве Минковского и принимающее значения в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ компактной группы Ли G, то функционал действия $S(A)$ записывается в виде

$$S(A)=\frac{1}{4e^2}\int\sqrt{g}\left\langle F_{\mu\nu},F^{\mu\nu}\right\rangle d^4x, \qquad (1)$$

где $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]$ – тензор напряженности поля A_μ, $F_{\alpha\beta}=g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}F^{\mu\nu}$, $g_{\alpha\beta}$ – метрич. тензор, $g=\det g_{\alpha\beta}$, символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает инвариантное скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Евклидово действие задается той же

формулой, в к-рой метрич. тензор пространства Минковского $g_{\alpha\beta}$ заменен на метрич. тензор евклидова пространства $\delta_{\alpha\beta}$. Для того чтобы евклидово действие было конечно, нужно, чтобы поле $F_{\mu\nu}$ убывало на бесконечности. Накладывая естественные условия на скорость его убывания, можно доказать, что $A_\mu(x)$ на бесконечности близко чисто калибровочному полю $g^{-1}(x)\partial_\mu g(x)$, где $g(x)$ – функция, принимающая значения в группе и определенная вне нек-рого шара. Это позволяет сопоставить полю A_μ элемент $q(A)$ гомотопич. группы $\pi_3(G)$, определяемый функцией $g(x)$, рассматриваемой как отображение сферы большого радиуса S^3 в G (точнее, следует потребовать, чтобы сфера S^3 содержала внутри себя шар, вне к-рого определена функция $g(x)$). Элемент $q(A)$ определяет топологич. тип поля A_μ; поле A_μ топологически нетривиально, если $q(A)\neq 0$. Пусть для определенности G – простая компактная некоммутативная группа Ли; тогда $\pi_3(G)=\mathbb{Z}$ и $q(A)$ можно рассматривать как целое число. Его можно аналитически выразить в виде:

$$q(A)=\frac{1}{64\pi^2}\int d^4x\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\langle F_{\mu\nu},F_{\rho\sigma}\rangle \qquad (2)$$

при соответствующей нормировке скалярного произведения в $\mathfrak{G}$ (в случае $G=SU(n)$, $\mathfrak{G}=su(n)$ нормированное нужным образом скалярное произведение дается формулой $\langle a,\,b\rangle=-\mathrm{Sp}\,ab$; в общем случае следует наложить условие: наибольшая длина простого корня равна двум). Доказывается, что евклидово действие $S(A)$ оценивается снизу числом

$$8\pi^2e^{-2}|q(A)|$$

и что равенство

$$S(A)=8\pi^2e^{-2}|q(A)|$$

достигается при условии

$$F_{\alpha\beta}=\pm\tilde{F}_{\alpha\beta}, \qquad (3)$$

где $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ – тензор, двойственный к $F_{\alpha\beta}$, знак определяется знаком числа $q(A)$. Уравнение (3) носит название уравнения самодуальности (автодуальности) или антисамодуальности (антиавтодуальности) (в зависимости от знака); его решения являются экстремалями евклидова действия. При $q>0$ эти решения называются инстантонами, а при $q<0$ – антиинстантонами с топологич. числом q (конечно, все они являются И. в смысле данного выше общего определения). Если калибровочное поле A определено на четырехмерном ориентированном римановом многообразии, то (1) можно по-прежнему рассматривать как определение евклидова действия, а (2) – как определение топологич. числа поля A. Сформулированные выше результаты остаются справедливыми; калибровочное поле на многообразии можно интерпретировать как связность на главном расслоении над этим многообразием. Если многообразие замкнуто, то $q(A)$ отождествляется с характеристич. числом расслоения. Напряженность поля удобно рассматривать как 2-форму

$$F=\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta,$$

принимающую значения в слоях ассоциированного расслоения со слоем $\mathfrak{G}$; она отождествляется с кривизной связности. Уравнение (3) приобретает вид $F=\pm *F$, где $*$ означает переход к двойственной форме. Евклидово действие $S(A)$ с точностью до множителя записывается как скалярный квадрат $(F,\,F)$ формы F. Исследование минимума $S(A)$ при фиксированном топологич. числе $q(A)=(32\pi^2)^{-1}(F,\,*F)$ проводится с помощью тождества

$$(F\pm *F,\,F\pm *F)=2(F,\,F)\pm 2(F,\,*F)\geqslant 0.$$

Уравнение (3) конформно инвариантно. Это позволяет свести изучение И. в $\mathbb{R}^4$ к изучению И. на сфере S^4. Переход к изучению И. на компактном многообразии можно рассматривать также как пространственное обрезание. Изучение числа решений уравнения (3) на сфере S^4 (и, следовательно, в $\mathbb{R}^4$) проводится с помощью теории индекса эллиптич. операторов (см. [3]–[5]). В частности, для группы $SU(N)$, $N\geqslant 2$, решения с топологич. числом q образуют семейство, зависящее от $4N|q|-(N^2-1)$ параметров при $|q|\geqslant\frac{N}{2}$ и от $4q^2+1$ параметров при $1\leqslant|q|\leqslant\frac{N}{2}$. Калибровочно эквивалентные решения при этом отождествляются. Решения уравнения самодуальности для случая $G=SU(2)$, $q=1$ получены в виде:

$$A_\mu(x)=\frac{\lambda^2}{(x-a)^2+\lambda^2}u^{-1}\left(\frac{x-a}{|x-a|}\right)d_\mu u\left(\frac{x-a}{|x-a|}\right), \qquad (4)$$

где $u(n)=n^0+i\sigma n$ осуществляет топологич. эквивалентность S^3 и $SU(2)$; здесь $n^{0^2}=n^2=1$, σ – матрицы Паули. Параметр λ в (4) характеризует размер И., a – его положение. Считая, что группа $SU(2)$ стандартным способом вложена в $SU(N)$, можно рассматривать (4) как одноинстантонное решение для группы $SU(N)$; одноинстантонные решения для произвольной группы G также могут быть получены с помощью вложения группы $SU(2)$ в G. Приближенное решение уравнения самодуальности с топологич. числом q можно получить, склеивая q далеких друг от друга одноинстантонных решений. Напр., для $G=SU(N)$ следует рассмотреть поле, к-рое вдали от точек a_1, ..., a_q является чисто калибровочным, а в случае, если точка близка к a_i, имеет вид:

$$A_\mu(x)=V_i\lambda_i^2\left((x-a_i)^2+\lambda_i^2\right)^{-1}u^{-1}\left(\frac{x-a_i}{|x-a_i|}\right)d_\mu u\left(\frac{x-a_i}{|x-a_i|}\right), \qquad (5)$$

где $V_i\in SU(N)$, $|x-a_i|\ll|a_i-a_j|$, $\lambda_i\ll|a_i-a_j|$, $i\neq j$. Можно доказать, что вблизи от построенных только что приближенных решений уравнения самодуальности лежат точные q-инстантонные решения; это позволяет придать наглядный смысл параметрам И. Семейство точных q-инстантонных решений для группы $SU(2)$, зависящее от $5q+4$ параметров при $q\geqslant 3$ и от 13 параметров при $q=2$, можно получить с помощью подстановки:

$$A_\mu=\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu\rho,$$

где

$$\rho=\sum_{i=1}^{q+1}\lambda_i^2|x-a_i|^{-2},\quad \bar{\sigma}_{\mu\nu}=\sigma^a(\varepsilon_{0a\mu\nu}-\delta_{a\mu}\delta_{0\nu}+\delta_{a\nu}\delta_{0\mu})$$

– матрица, определяющая гомоморфизм алгебры Ли группы $SO(4)$ в алгебру Ли группы $SU(2)$. Было получено полное (но не очень явное) семейство q-инстантонных решений. Для группы $G=SU(2)=Sp(1)$ их конструкция имеет следующий вид. Пусть $M(x)=a+b\hat{x}$ – матричная функция, где a и b – постоянные $((1+q)\times q)$-мерные кватернионные матрицы, $\hat{x}$ – кватернион, отвечающий вектору x. Если матрица $R(x)=M^+(x)M(x)$ действительна и обратима для каждой точки x, то можно построить q-инстантонное поле по формуле

$$A_\mu(x)=N^+(x)\partial_\mu N(x),$$

где $N(x)$ – $(q+1)$-мерный кватернионный вектор-столбец, удовлетворяющий уравнениям

$$N^+(x)M(x)=0,\ N^+(x)N(x)=1.$$

Следует отметить, что изучение экстремалей функционала евклидова действия $(2+1)$-мерной теории сводится к изучению экстремалей функционала энергии $(3+1)$-мерной теории. Это позволяет отождествить И. $(2+1)$-мерной калибровочной теории с магнитными монополями ее $(3+2)$-мерного аналога. И. $(1+1)$-мерной модели с евклидовым действием

$$S(n)=\int\partial_\mu n^a\partial_\mu n^a d^2x, \qquad (6)$$

где $n=(n^1,\,n^2,\,n^3)$, $n^2=1$, можно отождествить с рациональными функциями комплексного переменного

$z=x^0+ix^1$ или комплексного переменного $\bar{z}=x^0-ix^1$. Всякая такая функция может рассматриваться как отображение в расширенную комплексную плоскость – сферу Римана S^2, к-рая с помощью стереографич. проекции отождествляется со сферой $|n|=1$. Аналогично, И. более общей $(1+1)$-мерной σ-модели, описывающей поля, принимающие значения в кэлеровом многообразии M, даются голоморфными и антиголоморфными отображениями сферы S^2 в M.

И. естественно возникают при попытке вычислить методом Лапласа функциональные интегралы, возникающие в евклидовом подходе к квантовой теории поля. При вычислении этим методом вклада в статистич. сумму или в функцию Грина от множества полей с данным топологич. числом q мы получаем (в первом приближении) интеграл по множеству N_q И. с топологич. числом q. Если мы имеем дело с калибровочной теорией, то при определении N_q калибровочно эквивалентные И. следует считать тождественными. На N_q возникает мера, выраженная через бесконечномерные детерминанты. Дело в том, что при применении метода Лапласа необходимо вычислять гауссов интеграл по направлениям, ортогональным к многообразию И. Это сводится к вычислению детерминанта. Другой детерминант возникает в случае калибровочной теории при применении трюка Фаддеева–Попова. Наконец, если в теории есть фермионы, то еще один детерминант возникает при интегрировании по фермионным полям. Задача о вычислении меры на N_q носит название задачи о вычислении квантовых флуктуаций И. Эта задача полностью решена для теории с евклидовым действием (6), те же методы позволяют исследовать ее для других двумерных теорий. В 4-мерном случае результаты менее полны; однако случай $q=1$ легко исследуется различными путями (напр., исходя из требования ренорминвариантности). Ответ в наиболее важном случае квантовой хромодинамики выглядит следующим образом:

$$d\mu=\prod_f m_f^3\exp\left(-\frac{8\pi^2}{e^2(\lambda)}\right)\frac{d\lambda d^4a}{\lambda^5},$$

где $e(\lambda)$ – эффективная константа связи, определяемая формулой

$$e^{-2}(\lambda)=e_0^{-2}-(8\pi^2)^{-1}\left(11-\frac{2}{3}n_f\right)\ln\frac{\lambda}{\lambda_0},$$

m_f – масса кварка, индекс f характеризует аромат кварка, n_f – число ароматов. Если массы кварков предполагаются равными нулю, то вклад топологически нетривиальных полей в статистич. сумму обращается в нуль, однако их вклад в фермионные функции Грина может быть ненулевым (в частности, в шеститочечную функцию Грина вносят вклад И. с $q=\pm1$). Учет инстантонного вклада при нулевых массах кварков приводит к нарушению киральной $U(1)$-симметрии $\psi\to\exp(\alpha\gamma^5)\psi$ и решению так наз. $U(1)$-проблемы (проблемы отсутствия голдстоуновского бозона, отвечающего киральной $U(1)$-симметрии). Инстантонные вычисления приводят также к предсказанию распада протона. Одним из способов вычисления меры на N_q при $q=1$ является использование диктуемого конформной аномалией закона изменения меры при конформных преобразованиях. Этот же способ позволяет почти полностью вычислить меру на M_q при $G=SU(2)$ (он дает зависимость от 12 из 13 инстантонных параметров). При больших q приходится прибегать к более сложным методам и ответы становятся менее явными. Для той же части многообразия N_q, к-рая отвечает q далеким друг от друга одноинстантонным решениям, можно записать меру на N_q как произведение мер на N_1; предпринимались также попытки ограничиться в инстантонных вычислениях только этой частью N_q приближенно разреженного инстантонного газа; однако это приближение во многих вопросах оказывается некорректным.

См. также *Алгебро-геометрические методы* в теории поля.

Лит.: [1] Раджараман Р., Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1985; [2] Хуанг К., Кварки, лептоны и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1985; [3] Райдер Л., Квантовая теория поля, пер. с англ., М., 1987; [4] Геометрические идеи в физике, пер. с англ., М., 1983; [5] Фрид Д., Уленбек К., Инстантоны и четырехмерные многообразия, пер. с англ., М., 1988; [6] Шварц А. С., Квантовая теория поля и топология, М., 1989; [7] Соколов А. А. и др., Калибровочные поля, М., 1986.

А. С. Шварц.

ИНСТРУМЕНТ – одно из основных понятий современной статистической теории квантового измерения. Понятие «И.» формализует наиболее общие правила изменения состояния при измерении, совместимые с вероятностной интерпретацией квантовой механики, и позволяет снять ряд трудностей в ее стандартной формулировке (см. *Воспроизводимости гипотеза, Квантовое измерение*).

Пусть H – гильбертово пространство квантовой системы, X – измеримое пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathcal{B}(X)$ (множество возможных исходов измерения). Инструментом называется функция множеств $\mathcal{M}(\cdot)$, сопоставляющая любому измеримому множеству $B\in\mathcal{B}(X)$ *операцию* $\mathcal{M}(B)$ таким образом, что:

1) $\mathcal{M}(X)$ – неселективная операция, то есть

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}(X)[T]=\mathrm{Tr}\,T$$

для любого ядерного оператора T в H;

2) $\mathcal{M}(\cdot)$ σ-аддитивна, то есть

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_i B_i\right)[T]=\sum_i \mathcal{M}(B_i)[T]$$

для любого конечного или счетного набора попарно непересекающихся множеств $B_i\in\mathcal{B}(X)$, где ряд сходится по ядерной норме. Если ρ – *плотности оператор*, описывающий состояние системы (статистич. ансамбль) перед измерением, то вероятность события, что исход измерения попадает в множество B, равна

$$\mu_\rho(B)=\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}(B)[\rho].$$

При этом состояние доли статистич. ансамбля, для к-рой это событие выполняется, описывается оператором плотности $\mathcal{M}(B)[\rho]/\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}(B)[\rho]$. В частности, изменение состояния всего статистич. ансамбля задается отображением $\rho\to\mathcal{M}(X)[\rho]$.

Сопряженным инструментом называется функция множеств $\mathcal{M}(B)^*$; $B\in\mathcal{B}(X)$, где $\mathcal{M}(B)^*$ – сопряженное к $\mathcal{M}(B)$ линейное положительное нормальное отображение алгебры $\mathfrak{L}(H)$ ограниченных операторов в H. Условие 1) принимает вид $\mathcal{M}(X)^*[I]=I$, где I – единичный оператор в H. С каждым И. связано *разложение единицы* $M(B)$; $B\in\mathcal{B}(X)$, где $M(B)=\mathcal{M}(B)^*[I]$, задающее распределение вероятностей исходов измерения по формуле

$$\mu_\rho(B)=\mathrm{Tr}\,\rho M(B);\ B\in\mathcal{B}(X).$$

Основной интерес представляют вполне положительные инструменты, для к-рых $\mathcal{M}(B)^*$ – вполне положительное отображение для любого $B\in\mathcal{B}(X)$. Такие И. соответствуют процессам косвенного измерения в квантовой механике. Общий пример вполне положительного И. дается формулой

$$\mathcal{M}(B)[T]=\int_B A(x)TA(x)^*\mu(dx),$$

где $A(x)$, $x\in X$,– семейство операторов, $\mu(dx)$ – мера на X, удовлетворяющие условию

$$\int_X A(x)^*A(x)\mu(dx)=I.$$

А. С. Холево.

ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ – см. *Интегральные функции.*

ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ – см. *Пуассона скобки.*

ИНТЕГРАЛ ПО ТРАЕКТОРИЯМ – то же, что *функциональный интеграл*, или континуальный интеграл.

ИНТЕГРАЛ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ, прямой интеграл представлений, непрерывная прямая сумма представлений,– понятие, обобщающее понятие разложения представления конечной или компактной группы в прямую сумму неприводимых подпредставлений на случай унитарных бесконечномерных представлений более общих групп.

Пусть дан набор гильбертовых пространств H_x, где x пробегает нек-рое множество X, на к-ром введена мера d_μ, и все H_x можно реализовать как подпространства в одном и том же гильбертовом пространстве H, причем для нек-рого (а значит и для любого) базиса e_k в H измеримы числовые функции

$$\alpha(x) = \langle e_k | P_x | e_l \rangle,$$

где через $\langle \cdot | \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в H, а через P_x — ортогональный проектор на H_x. (Случай, когда все H_x совпадают с H, вполне содержателен.) Можно считать (это не приведет к потере общности), что подпространство H_x натянуто на первые $n(x)$ базисных векторов в H, где $n(x)$ — измеримая функция на X, принимающая значения в множестве 1, 2, ..., ∞. Рассмотрим вектор-функцию $f(x)$ на X такую, что для любого x выполнено $f(x) \in H_x$. Назовем такую функцию измеримой, если для любого e_l числовая функция $\langle f(x), e_l \rangle$ измерима. Элементами пространства

$$\mathcal{H} = \int_X H_x d\mu$$

(прямого интеграла гильбертовых пространств H_x) являются измеримые вектор-функции $f(x)$ на X такие, что:

1) $f(x) \in H_x$,

2) $\int_X \langle f(x) | f(x) \rangle d\mu(x) < \infty$.

Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ вводится по формуле

$$(f, g) = \int_X \langle f(x) | g(x) \rangle d\mu(x).$$

Пусть теперь в каждом пространстве H_x задано унитарное представление T^x группы G, причем все числовые функции

$$\beta(x) = \langle e_k | T_g^x | e_l \rangle$$

измеримы. Определим представление

$$\tilde{T} = \int T_x d\mu(x)$$

группы G в пространстве $\mathcal{H}$ по формуле:

$$[\tilde{T}_g f](x) = T_g^x f(x);$$

оно и называется интегралом представления T^x. Если мера точки x равна 0 и T^x не совпадает ни с каким T^y, то T^x не является подпредставлением в $\tilde{T}$.

Пусть G — группа Ли. Тогда любое унитарное представление группы G может быть разложено в интеграл неприводимых представлений. На практике, чтобы построить такое разложение, обычно необходимо найти подходящее интегральное преобразование.

Лит.: Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

Ю. А. Неретин.

ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ — см. *Динамическая система.*

ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРИВАЯ — график решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений.

В. И. Битюцков.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — см. *Дифференциальное уравнение* с частными производными второго порядка.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Интегральные функции.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — подмногообразие, касающееся распределения. k-мерное распределение называется интегрируемым (или слоением), если через каждую точку многообразия проходит k-мерное И. м. Необходимые и достаточные условия интегрируемости распределения в терминах задающих его 1-форм дает теорема Фробениуса. Для распределения коразмерности 1, заданного 1-формой α, это условие: $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Максимальная размерность И. м. контактного распределения в M^{2n+1} равна n. Такие подмногообразия называются *лежандровыми многообразиями.*

С. А. Табачников.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, в к-ром неизвестная функция содержится под знаком интеграла. В классич. теории область определения Ω неизвестной функции является либо отрезком прямой или кривой — такие И. у. называют одномерными, либо областью конечномерного пространства или многообразия — такие И. у. называют многомерными; при этом в зависимости от типа рассматриваемого интеграла различают И. у. с интегралами Римана, Лебега, Стилтьеса, Коши и т. д. Рассматриваются И. у., у к-рых Ω является абстрактным множеством, на нек-рой σ-алгебре к-рого задана мера; такие И. у. охватывают и различные классы бесконечных систем с бесконечным числом переменных. Чаще всего рассматриваются И. у., в к-рых искомая функция принимает или скалярные значения, или значения из конечномерного пространства; в последнем случае И. у. по существу является системой И. у. Встречаются И. у., в к-рых искомые функции принимают значения в банаховых или еще более общих пространствах или многообразиях; ниже речь идет лишь об И. у., в к-рых неизвестные функции принимают скалярные значения.

К И. у. сводятся многие задачи математич. физики. Исследование этих И. у. часто оказывается существенно более простой задачей по сравнению с исходной проблемой. Тем самым теория И. у. оказывается одним из наиболее важных методов математич. физики. Сведение многих проблем математич. физики к И. у. осуществляется обычно при помощи *Грина функций.*

По характеру зависимости левой и правой частей И. у. от неизвестной функции различают линейные и нелинейные И. у. Среди линейных И. у. наиболее часто встречаются уравнения вида

$$a(x)u(x) + b(x)\int_\Omega k(x,y)u(y)dy = f(x); \qquad (1)$$

здесь $u(x)$ — неизвестная функция, $k(x, y)$, $a(x)$ и $b(x)$ — известные функции, первая из к-рых называется ядром И. у., а остальные — коэффициентами. Если интеграл в (1) понимается в смысле Римана или Лебега, то (1) называется интегральным уравнением Фредгольма. Если интеграл в (1) понимается как несобственный в каком-либо смысле, то (1) называется сингулярным линейным И. у.; среди сингулярных И. у. наиболее часто встречаются уравнения, в к-рых интеграл понимается в смысле главного значения Коши

$$\int_\Omega k(x,y)u(y)dy = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} k(x,y)u(y)dy \qquad (2)$$

[здесь $B(x, \varepsilon)$ — шар с центром в x радиуса ε]. И. у. (1) называется однородным, если $f(x) = 0$, и неоднородным — в противном случае. В частном случае, когда $a(x) = 0$ и $b(x) = 1$, И. у. (1) называется уравнением первого рода; когда $a(x) = \lambda$ (λ — ненулевое число) и $b(x) = -1$, И. у. (1) называется уравнением второго рода; в общем случае И. у. (1) часто называют уравнением третьего рода.

Среди многочисленных и самых разнообразных нелинейных И. у. наиболее часто встречаются интегральные уравнения Гаммерштейна

$$u(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y, u(y))dy \qquad (3)$$

и несколько более общие интегральные уравнения Урысона

$$u(x) = \int_\Omega k(x, y, u(y))dy. \qquad (4)$$

Из других классов нелинейных И. у. отметим уравнения вида

$$u(x) = g\Big(x, u(x), \int_\Omega k(x, y, u(x), u(y))\Big)dy \qquad (5)$$

и уравнения

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega \dots \int_\Omega k_n(x, y_1, \dots, y_n, u(x), u(y_1), \dots, u(y_n)) \times \times dy_1 \dots dy_n. \qquad (6)$$

Описанные классы И. у. далеко не исчерпывают все их многообразие. Так, в последние годы в математич. физике начали играть важную роль И. у. вида

$$u(x) = \int_\Omega k(x, y, u(y), u(\omega(y)))dy \qquad (7)$$

и И. у. вида

$$u(x,y) + \int_\Omega l(x,y,\xi,u(\xi,y))d\xi + \int_\Omega m(x,y,\eta,u(\eta,y))d\eta + \\ + \int_\Omega\int_\Omega n(x,y,\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta = f(x,y) \qquad (8)$$

(называемые обычно частично интегральными уравнениями); оба типа уравнений могут быть как линейными, так и нелинейными. Как правило, И. у. содержат различные числовые или функциональные параметры, что в одних случаях упрощает, а в других усложняет их рассмотрение.

Теория И. у. существенно зависит от того, какие их решения рассматриваются: непрерывные, гладкие, интегрируемые и т. д. В связи с этим каждое И. у. обычно рассматривается вместе с нек-рым пространством (классом) функций, в к-ром оно и исследуется. Классич. теория И. у. связана с их анализом в пространстве Чебышева C непрерывных функций и в пространствах Лебега L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, интегрируемых по Лебегу со степенью p при $p < \infty$ и ограниченных в существенном при $p = \infty$ функций. В настоящее время важную роль играют И. у. в пространствах Гельдера H_α или H^0_α, $0 < \alpha < 1$, в пространствах Орлича L_M и др.

Уже линейные И. у. (1), как правило, невозможно решить в явном виде; основным исключением являются И. у. с ядрами вида

$$k(x,y) = \sum_{j=1}^m a_j(x)b_j(y), \qquad (9)$$

называемыми вырожденными, решение к-рых сводится к исследованию конечной системы линейных алгебраич. уравнений. Поэтому в теории И. у. основную роль играют общие теоремы о свойствах решений И. у. и о различных их аналитич. представлениях, а также разнообразные приближенные методы отыскания этих решений.

Наиболее полная теория построена для И. у. Фредгольма второго рода:

$$\lambda u(x) - \int_\Omega k(x,y)u(y)dy = f(x), \qquad (10)$$

важнейших в приложениях к математич. физике. Эта теория оказалась во многом аналогичной теории конечных линейных алгебраич. систем; основные ее факты восходят к Э. Фредгольму (E. Fredholm); современный вид она приобрела после исследований Дж. Неймана (J. Neumann), Ф. Рисса (F. Riesz) и С. Банаха (S. Banach).

В предположении, что линейный интегральный оператор

$$Ku(x) = \int_\Omega k(x,y)u(y)dy \qquad (11)$$

является ограниченным в одном из пространств $X = C$ или $X = L_p$ $1 \leqslant p \leqslant \infty$, И. у. (10) при всех значениях параметра λ, за исключением нек-рого множества $\sigma(K)$ комплексной плоскости, называемого спектром оператора (11), имеет единственное решение в X при любой $f(x)$ из X. Это решение представимо в виде:

$$u(x) = R(\lambda, K)f(x),$$

где $R(\lambda, K)$ – аналитически зависящий от λ ограниченный в X оператор, называемый резольвентой. В частности, эти утверждения верны при $|\lambda| > \|K\|$ и даже при $|\lambda| > \rho(K)$, где $\|K\|$ – норма K в соответствующем пространстве:

$$\|K\| = \sup\{\|Ku\| : \|u\| \leqslant 1\},$$

а $\rho(K)$ – его спектральный радиус:

$$\rho(K) = \lim_{n\to\infty} \left(\|K^n\|\right)^{1/n};$$

при этих λ решение $u(x)$ И. у. (10) является пределом в X последовательных приближений

$$u_{n+1}(x) = \lambda^{-1}Ku_n(x) + \lambda^{-1}f(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (12)$$

и, более того, резольвента $R(\lambda, K)$ представима в виде сходящегося по норме операторов ряда Неймана

$$R(\lambda, K) = \sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n-1}K^n. \qquad (13)$$

Во многих важных случаях резольвента $R(\lambda, K)$ допускает представление

$$R(\lambda, K)f(x) = \lambda^{-1}f(x) + \int_\Omega r(\lambda, x, y)f(y)dy \qquad (14)$$

с ядром $r(\lambda, x, y)$, аналитически зависящим от параметра λ.

При дополнительном предположении, что интегральный оператор (11) или нек-рая его итерация K^n являются компактными в рассматриваемом пространстве X, справедливы существенно более сильные утверждения, связанные с тем, что в этом случае левая часть И. у. (10) оказывается фредгольмовым оператором в X; последнее означает справедливость для И. у. альтернативы Фредгольма, к-рая обычно формулируется при еще одном дополнительном (хотя и несущественном) предположении, что линейный интегральный оператор

$$K'v(x) = \int_\Omega k^*(x,y)v(y)dy \qquad (15)$$

с ядром $k^*(x, y) = \overline{k(y, x)}$ действует в пространстве X', к-рое совпадает с L_1 при $X = C$ и с $L_{p'}$, где $p' = \frac{p}{p-1}$ при $X = L_p$. Справедливость альтернативы Фредгольма для И. у. (10) означает, что множества решений линейных однородных уравнений

$$\lambda u(x) - \int_\Omega k(x,y)u(y)dy = 0, \qquad (16)$$

$$\lambda v(x) - \int_\Omega k^*(x,y)v(y)dy = 0 \qquad (17)$$

являются конечномерными подпространствами одинаковой размерности и И. у. (10) с фиксированной правой частью $f(x)$ разрешимо в том и только в том случае, когда эта правая часть для любого решения $v(x)$ И. у. (17) удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,dx = 0. \qquad (18)$$

В частности, И. у. (10) разрешимо в X для любой правой части из X в том и только в том случае, когда линейное однородное И. у. (16) имеет только нулевое решение; при этом И. у. (10) однозначно разрешимо.

Описанные теоремы опираются на предположения об ограниченности или компактности интегральных операторов (11) и (15). Для пространства C эти предположения выполнены, если ядро $k(x, y)$ непрерывно или имеет слабые особенности [то есть, если при нек-ром $\varepsilon < m$, где m – размерность области интегрирования Ω, ядро $|x-y|^\varepsilon k(x, y)$ непрерывно]; известны необходимые и достаточные условия на $k(x, y)$, при к-рых оператор (8) ограничен или компактен в C, и простые формулы для норм этих операторов. Для пространств L_p предположения об ограниченности или компактности также выполнены для непрерывных ядер и ядер со слабыми особенностями, однако простых и эффективных необходимых и достаточных условий ограниченности или компактности оператора (11) в терминах его ядра не существует. В этой связи представляют интерес различные достаточные признаки ограниченности и компактности таких операторов; наиболее важным из них является признак Гильберта–Шмидта: оператор (11) компактен в L_2, если его ядро интегрируемо с квадратом на $\Omega\times\Omega$, и признак Канторовича: оператор (11) компактен в L_p, $1 < p < \infty$, если

$$\int_\Omega |k(x,y)|dy, \quad \int_\Omega |k(x,y)|dx \in L_\infty.$$

Описанные результаты могут быть существенно дополнены для нек-рых специальных классов И. у. (10). Наиболее

важным из таких дополнений является так наз. теория Гильберта–Шмидта И. у. (10) с эрмитовосопряженными ядрами – так называются ядра $k(x, y)$, для к-рых $k^*(x, y) = \overline{k(x, y)}$.

Вторым важным классом И. у. (10) являются интегральные уравнения Вольтерра; в скалярном случае, когда Ω является отрезком, так называется уравнение (10), если $k(x, y) = 0$ при $y > x$. Основным фактом теории И. у. Вольтерра является теорема об обращении в нуль спектрального радиуса $\rho(K)$ соответствующего интегрального оператора (11) и, тем самым, справедливости (13) при всех ненулевых λ. Это утверждение имеет место, если ядро $k(x, y)$ непрерывно или интегрируемо с квадратом на $\Omega \times \Omega$ или если оператор (11) компактен.

Еще одним важным классом И. у. (10) являются И. у. с неотрицательным ядром $k(x, y)$ (в задачах математич. физики это свойство эквивалентно справедливости принципа максимума). Основным результатом для таких уравнений является теорема о существовании неотрицательной собственной функции у оператора (11), к-рой отвечает собственное значение, равное спектральному радиусу $\rho(K)$ оператора K. Это утверждение верно, если ядро $k(x, y)$ положительно почти всюду на $\Omega \times \Omega$. Существуют его различные варианты, относящиеся к неотрицательным ядрам, обращающимся в нуль на множествах положительной меры.

Теория И. у. (10) в случае, если оператор (11) и его итерации не являются компактными ни в одном из пространств C или L_p, резко усложняется; такие уравнения часто называют особыми И. у. Их теория, как и теория более общих И. у. (1), включая сингулярные И. у., в значительной степени состоит из различных утверждений об условиях на функции $a(x)$, $b(x)$ и $k(x, y)$, при к-рых левая часть соответствующего И. у. (1) является фредгольмовым или нетеровым оператором или, иными словами, когда для И. у. (1) справедлива или альтернатива Фредгольма, или все ее утверждения, за исключением совпадения размерностей подпространств решений линейных однородных И. у.:

$$a(x)u(x) + b(x)\int_\Omega k(x,y)u(y)dy = 0,$$

$$\overline{a(x)}\,v(x) + \overline{b(x)}\int_\Omega k^*(x,y)v(y)dy = 0.$$

Если левая часть И. у. (1) оказывается фредгольмовым или нетеровым оператором, то это И. у. эквивалентно нек-рому И. у. вида (11) с компактным в соответствующем пространстве оператором.

Исследование И. у. (1) в случаях, когда его левая часть не является фредгольмовым или нетеровым оператором, резко усложняется. Основная трудность такого исследования связана с некорректностью таких уравнений – в этих случаях малым изменениям правой части И. у. (1) соответствуют, вообще говоря, «немалые» изменения их решений. Наиболее полные результаты (теоремы Шмидта) здесь известны для И. у. (1) первого рода в случае, когда интегральный оператор (11) является компактным в L_2 (левая часть таких уравнений не может быть фредгольмовым или нетеровым оператором). Для некорректных И. у. известно довольно много результатов, особенно для И. у. Вольтерра первого рода и для И. у., ядрами к-рых являются функции Грина различных краевых задач. Большая часть результатов теории нелинейных И. у. получается непосредственным применением к ним общих принципов и теорем нелинейного анализа, поэтому теория нелинейных И. у. является главой общей теории нелинейных операторных уравнений. Здесь, как и в линейном случае, важную роль играют различные признаки ограниченности, непрерывности, компактности и т. д. в различных функциональных пространствах разнообразных нелинейных интегральных операторов, входящих в левые и правые части рассматриваемых уравнений.

Основными результатами в теории нелинейных И. у. являются разнообразные теоремы о разрешимости и однозначной разрешимости, теоремы о существовании нетривиальных решений и об оценках числа решений, теоремы о свойствах гладкости и устойчивости решений, теоремы о приближенном построении решений и т. д.

Лит.: [1] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1976; [2] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., т. 3, ч. 2, 2 изд., М., 1934; [3] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, М., 1950; [4] Интегральные уравнения, М., 1968; [5] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 3 изд., М., 1986; [6] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.– Л., 1962; [7] Краснов М. Л., Интегральные уравнения, М., 1975; [8] Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения, пер. с англ., 2 изд., М., 1957; [9] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, 2 изд., М., 1959; [10] его же, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962; [11] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [12] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 4 изд., М., 1984; [13] Привалов И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М., 1937; [14] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, 2 изд., М., 1979; [15] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., 1974; [16] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960. *П. П. Забрейко.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ – *специальные функции*, определяемые с помощью интегралов от элементарных функций. Из них наиболее распространены следующие.

Интегральная показательная функция – функция, определяемая для действительного $x \neq 0$ равенством

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

При $x > 0$ подинтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $t = 0$ и интегральная показательная функция понимается в смысле главного значения этого интеграла:

$$\mathrm{Ei}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{e^t}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \right\}.$$

Интегральная показательная функция представляется в виде рядов

$$\mathrm{Ei}(x) = C + \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}, \quad x < 0, \tag{1}$$

и

$$\mathrm{Ei}(x) = C + \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}, \quad x > 0, \tag{2}$$

где $C = 0{,}5772\ldots$ – так наз. постоянная Эйлера.

Имеет место асимптотич. представление:

$$\mathrm{Ei}(-x) \approx \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \ldots\right), \quad x \to +\infty.$$

Как функция комплексного переменного z, интегральная показательная функция

$$\mathrm{Ei}(z) = C + \ln(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!k}, \quad |\arg(-z)| < \pi,$$

– однозначная аналитич. функция в плоскости z с разрезом вдоль положительной действительной полуоси ($0 < \arg z < 2\pi$); значение $\ln(-z)$ выбирается при этом так, чтобы $-\pi < \mathrm{Im} \ln(-z) < \pi$. Поведение $\mathrm{Ei}(z)$ вблизи разреза описывается предельными соотношениями:

$$\lim_{\eta \to 0} \mathrm{Ei}(z + i\eta) = \mathrm{Ei}(z) - i\pi,$$

$$\lim_{\eta \to 0} \mathrm{Ei}(z - i\eta) = \mathrm{Ei}(z) + i\pi,$$

$$z = x + iy, \quad x > 0, \quad \eta > 0.$$

Асимптотич. представление в области $0 < \arg z < 2\pi$:

$$\mathrm{Ei}(z) \sim \frac{e^z}{z}\left(\frac{1!}{z} + \frac{2!}{z^2} + \ldots + \frac{k!}{z^k} + \ldots\right), \quad |z| \to \infty.$$

Иногда используют обозначения:

$$\mathrm{Ei}^+(z) = \mathrm{Ei}(z + i0), \quad \mathrm{Ei}^-(z) = \mathrm{Ei}(z - i0),$$

$$\mathrm{Ei}^*(z) = \overline{\mathrm{Ei}(z)} = \mathrm{Ei}(z) + \pi i.$$

Интегральный логарифм – функция, определяемая для действительного $x \neq 1$ равенством

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t};$$

при $x > 1$ подинтегральная функция имеет в точке $t = 1$ бесконечный разрыв и интегральный логарифм понимается в смысле главного значения этого интеграла:

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t} \right\}.$$

При малых x:

$$\mathrm{li}(x) \approx \frac{x}{\ln(1/x)}.$$

Интегральный логарифм представляется в виде ряда

$$\mathrm{li}(x) = C + \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(x))^k}{k!k},$$
$$k > 0, \quad x \neq 1.$$

Как функция комплексного переменного z, интегральный логарифм

$$\mathrm{li}(z) = C + \ln(-\ln z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln z)^k}{k!k}$$

– однозначная аналитич. функция в плоскости z с разрезами вдоль действительной оси от $-\infty$ до 0 и от 1 до $+\infty$ (мнимые части логарифмов берутся при этом в пределах от $-\pi$ до π). Поведение $\mathrm{li}(z)$ вблизи разреза $(1, +\infty)$ описывается предельными соотношениями:

$$\lim_{\eta \to 0} \mathrm{li}(x \pm i\eta) = \mathrm{li}(x) \mp \pi i, \quad x > 1, \quad \eta > 0.$$

Для действительного $x > 0$ иногда используют обозначение:

$$\mathrm{Li}(x) = \begin{cases} \mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x) & \text{при } 0 < x < 1, \\ \mathrm{li}(x) + \pi i = \mathrm{Ei}^*(\ln x) & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Интегральный синус – функция, определяемая для действительного $x > 0$ равенством

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Иногда используют обозначение:

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \equiv \mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Нек-рые соотношения:

$$\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x); \quad \mathrm{si}(x) + \mathrm{si}(-x) = -\pi;$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{si}^2(t)\, dt = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^{\infty} e^{-pt}\, \mathrm{si}(qt)\, dt = -\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{q};$$

$$\int_0^{\infty} \sin t\, \mathrm{si}(t)\, dt = -\frac{\pi}{4}; \quad \int_0^{\infty} \mathrm{Ci}(t)\, \mathrm{si}(t)\, dt = -\ln 2,$$

где $\mathrm{Ci}(t)$ – интегральный косинус (см. ниже). При малых x:

$$\mathrm{Si}(x) \approx x.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} P(x) - \frac{\sin x}{x} Q(x),$$

где

$$P(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{x^{2k}},$$

$$Q(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

Интегральный синус представляется в виде ряда

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3!3} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} + \ldots. \qquad (*)$$

Как функция комплексного переменного z, определяемая формулой (*), интегральный синус – целая функция z во всей плоскости z.

Интегральный косинус – функция, определяемая для действительного $x > 0$ равенством

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt = C + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t}\, dt.$$

Иногда используют обозначение:

$$\mathrm{ci}(x) \equiv \mathrm{Ci}(x).$$

Нек-рые соотношения:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{Ci}^2(t)\, dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-pt}\, \mathrm{Ci}(qt)\, dt = -\frac{1}{p} \ln\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right),$$

$$\int_0^{\infty} \cos t\, \mathrm{Ci}(t)\, dt = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\infty} \mathrm{Ci}(t)\, \mathrm{si}(t)\, dt = -\ln 2,$$

где $\mathrm{si}(t)$ – интегральный синус.

При малых x:

$$\mathrm{Ci}(x) \approx C + \ln x.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$\mathrm{Ci}(x) = \frac{\sin x}{x} P(x) - \frac{\cos x}{x} Q(x),$$

$$P(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{x^{2k}}, \quad Q(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

Интегральный косинус представляется в виде ряда

$$\mathrm{Ci}(x) = C + \ln x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!2k} + \ldots. \qquad (*)$$

Как функция комплексного переменного z, определяемая рядом (*), интегральный косинус – однозначная аналитич. функция в плоскости z с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси $(-\pi < \arg z < \pi)$; значение $\ln z$ выбирается так, чтобы $-\pi < \operatorname{Im} \ln z < \pi$. Поведение $\mathrm{Ci}(z)$ вблизи разреза описывается предельными соотношениями:

$$\lim_{\eta \to 0} \mathrm{Ci}(x \pm i\eta) = \mathrm{Ci}(|z|) \pm \pi i, \quad x < 0, \quad \eta > 0.$$

Формулы, связывающие И. ф.:

$$\mathrm{Ei}(x) = \mathrm{li}(e^x), \quad x < 0,$$

$$\mathrm{Ei}(\ln x) = \mathrm{li}(x), \quad x > 1,$$

$$\mathrm{Ei}(\pm ix) = \mathrm{Ci}(x) \pm i\, \mathrm{Si}(x) \mp \frac{\pi i}{2}, \quad x > 0,$$

$$\mathrm{si}(z) = \frac{1}{2i}[\mathrm{Ei}(iz) - \mathrm{Ei}(-iz)],$$

$$\mathrm{Ci}(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(iz) + \mathrm{Ei}(-iz)].$$

Графики функций $\mathrm{Ei}(x)$, $\mathrm{li}(x)$, $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$ приведены на рис. 1.

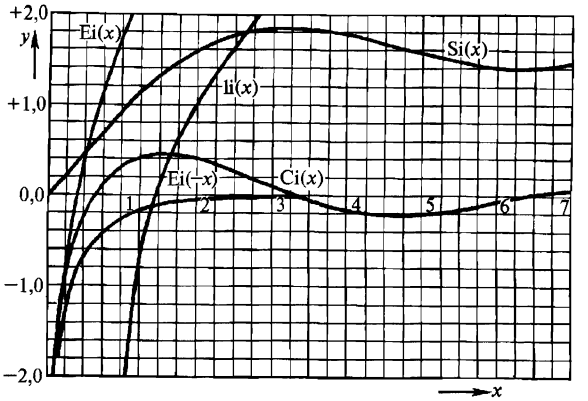


Рис. 1. Графики интегральной показательной функции $y = \mathrm{Ei}(x)$ и $y = \mathrm{Ei}(-x)$, интегрального логарифма $y = \mathrm{li}(x)$, интегрального синуса $y = \mathrm{Si}(x)$, интегрального косинуса $y = \mathrm{Ci}(x)$.

Интеграл вероятности, интеграл ошибок, – функция

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt, \quad |x| < \infty.$$

В теории вероятностей используется не интеграл вероятности, а функция *Гаусса распределения* (нормального распределения):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

– так наз. интеграл вероятности Гаусса. Для случайной величины X, имеющей нормальное распределение с математич. ожиданием 0 и дисперсией σ^2, вероятность неравенства $|X| \leqslant t$ равна $\operatorname{erf}(t/\sqrt{2})$. Для действительного x интеграл вероятности принимает действительные значения, в частности

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1.$$

Производная интеграла вероятности:

$$[\operatorname{erf}(z)]' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}.$$

Как функция комплексного переменного z, интеграл вероятности – целая функция от z.

Асимптотич. представление при больших z, $\operatorname{Re} z > 0$:

$$1 - \operatorname{erf}(z) \sim \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k} \frac{1}{z^{2k}}\right).$$

В окрестности $z = 0$ интеграл вероятности представляется в виде ряда

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z - \frac{z^3}{1!3} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} z^{2k+1} + \ldots\right).$$

Иногда используются следующие обозначения:

$$\Theta(x) = H(x) = \Phi(x) = \operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x).$$

График интеграла вероятности и его производной см. на рис. 2.

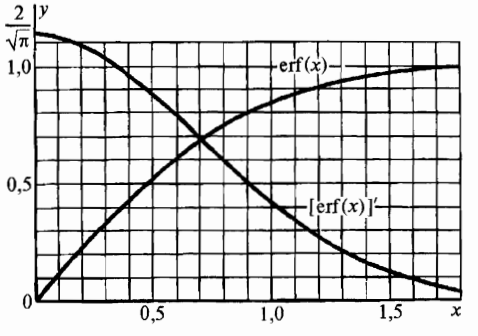


Рис. 2. График интеграла вероятности $y = \operatorname{erf}(x)$ и его производной $y = [\operatorname{erf}(x)]'$.

С интегралами Френеля $C(z)$ и $S(z)$ (см. ниже) интеграл вероятности связан соотношениями:

$$\frac{1+i}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} z\right) = C(z) + iS(z),$$

$$\frac{1-i}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} z\right) = C(z) - iS(z).$$

Интегралы Френеля – функции

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt,$$

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt;$$

$$\lim_{x \to +\infty} C(x) = \lim_{x \to +\infty} S(x) = \frac{1}{2}.$$

Интегралы Френеля представляются в виде рядов

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!(4k+1)},$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(4k+3)}.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sin x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cos x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Графики функций $C(x)$ и $S(x)$ см. на рис. 3.

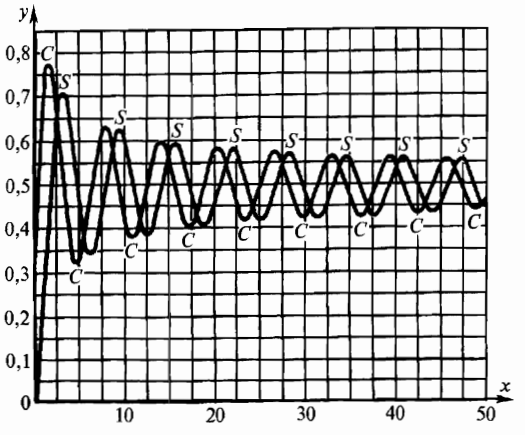


Рис. 3. Графики интегралов Френеля $y = C(x)$ и $y = S(x)$.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, 2 изд., М., 1984.

В. И. Битюцков.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ – дифференциальная k-форма ω на гладком многообразии M, интегралы от которой по некоторым k-мерным цепям c сохраняются заданным диффеоморфизмом $g: M \to M$, $\int_{gc} \omega = \int_c \omega$. И. и. называется абсолютным, если сохраняются интегралы по всем цепям, что равносильно тому, что $g^*\omega = \omega$. И. и. называется относительным, если сохраняются интегралы по замкнутым цепям.

Пусть на симплектич. многообразии (M^{2n}, ω) задан гамильтонов поток g^t с гамильтонианом $H: M \times \Delta \to \mathbb{R}$, где $\Delta = \{t\}$ – интервал оси времени. Поверхность $\Gamma \subset M \times \Delta$, составленная из фазовых траекторий, проходящих через нек-рую замкнутую гладкую кривую в расширенном фазовом пространстве $M \times \Delta$, называется трубкой траекторий.

Теорема. Если две замкнутые кривые γ_1 и γ_2 охватывают одну и ту же трубку траекторий, то интегралы формы $pdq - Hdt$ по ним одинаковы:

$$\int_{\gamma_1} p\, dq - H dt = \int_{\gamma_2} p\, dq - H dt.$$

Форма $pdq - Hdt$, определенная в пределах одной канонич. карты, называется *Пуанкаре – Картана интегральным инвариантом.*

Следствие. Фазовый поток g^t сохраняет интегралы формы pdq по замкнутым кривым.

Форма pdq называется *Пуанкаре интегральным инвариантом* (относительным).

Следствие. Симплектич. форма $\omega = d(pdq)$ является абсолютным И. и. фазового потока, то есть преобразования фазового потока являются симплектич. преобразованиями.

Следствие. Абсолютными инвариантами фазового потока являются и формы ω^1, ω^2, ..., ω^n.

Последняя из этих форм является фазовым объемом.

Следствие (*Лиувилля теорема* о фазовом объеме). Фазовый поток сохраняет объем в фазовом пространстве.

Если гамильтонова система имеет первые интегралы F_1, ..., F_m, то сужение фазового потока g^t на неособое инвариантное многообразие $M_f=\{F_i=f_i,\ i=1,\ ...,\ m\}$ сохраняет нек-рую меру с гладкой положительной плотностью: в качестве такой меры можно взять форму $d\sigma/V_m$, где $d\sigma$ – элемент объема M_f как вложенного подмногообразия, а V_m – m-мерный объем параллелепипеда со сторонами grad F_1, ..., grad F_m. Эта форма определяется лишь симплектич. структурой и не зависит от выбора метрики на M.

М. Э. Казарян.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС – см. *Интегральные функции.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ – см. *Интегральные функции.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР – обобщение понятия матрицы на бесконечномерный случай.

Матрица K_{ij} отображает векторы x_j из векторного пространства X в векторы $y_i=K_{ij}x_j$ пространства Y. Простейший линейный И. о., определяемый равенством

$$y(t)=\int_S K(t,s)x(s)\,ds,$$

отображает функции $x(s)$ из функционального пространства X (области определения) в функции $y(t)$ из функционального пространства Y (область значений); функция $K(t, s)$ называется ядром И. о. Чаще всего рассматривают И. о. на функциональных пространствах $C(S)$ (непрерывных на замкнутом множестве S функций) и $L^p(S)$ (интегрируемых на S со степенью p функций).

Среди И. о. наиболее изучены (вполне непрерывные) фредгольмовы операторы. Ядро K при этом называется фредгольмовым ядром. Напр., для И. о., действующего в $C(S)$, ядро K фредгольмово, если функция $K(t, s)$ непрерывна в квадрате $S\times S$. Для И. о. в $L^2(S)$ ядро фредгольмово, если выполнено неравенство:

$$\int_S\int_S|K(t,s)|^2\,dt\,ds<\infty.$$

Важным частным случаем фредгольмова оператора является оператор Гильберта – Шмидта (см. *Интегральное уравнение*). Встречаются И. о. с полярным ядром (со слабой особенностью):

$$K(t,s)=B(t,s)|t-s|^{-m},\quad 0<m<n,$$

где $|t-s|$ – расстояние между точками s и t n-мерного пространства. Для функций из $C(S)$ И. о. с полярным ядром будет фредгольмовым, если функция $B(t, s)$ непрерывна на $S\times S$; если $B(t, s)$ ограничена всюду в квадрате $S\times S$ и

$$\int_S\int_S|B(s,t)|^2\,ds\,dt<\infty,$$

то И. о. с полярным ядром фредгольмов на $L^2(S)$.

В математич. физике применяют различные типы И. о., возникающих при интегральных преобразованиях.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988; [2] Интегральные уравнения, М., 1968; [3] Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., М., 1982.

С. В. Молодцов.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС – см. *Интегральные функции.*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ по антикоммутирующим переменным – интегрирование по образующим x_1, ..., x_n, x_1^+, ..., x_n^+ алгебры Грассмана, определяемое следующим образом. Вводятся символы dx, подчиненные соотношениям антикоммутативности:

$$\left.\begin{aligned}\{dx_i,dx_j\}=\{dx_i,dx_j^+\}=\{dx_i^+,dx_j^+\}=0,\\ \{x_i,dx_j\}=\{x_i,dx_j^+\}=\{x_i^+,dx_j\}=\{x_i^+,dx_j^+\}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где $\{a, b\}=ab+ba$. Определяются однократные интегралы

$$\left.\begin{aligned}\int dx_i=\int dx_i^+=0,\\ \int x_i\,dx_i=\int x_i^+dx_i^+=1.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Кратные интегралы понимают как повторные. Формулы (1) и (2) однозначно определяют интеграл от любого одночлена $x_n^{\alpha_n}\cdot\ldots\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_n^{+\beta_n}\cdot\ldots\cdot x_1^{+\beta_1}$. На произвольные элементы грассмановой алгебры

$$f(x,x^+)=\sum\nolimits_{\alpha i,\,\beta_i=0,1}C(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\beta_1,\ldots,\beta_n)\times$$
$$\times\,(x_n)^{\alpha_n}\ldots(x_1)^{\alpha_1}(x_n^+)^{\beta_n}\ldots(x_1^+)^{\beta_1}\qquad(3)$$

интеграл распространяется по линейности.

Такие правила впервые последовательно были введены Ф. А. Березиным (см. [1], [2]). И. по антикоммутирующим переменным естественным образом возникает при квантовании ферми-полей в формализме континуального интегрирования (см. [3], [4]).

Для произвольного элемента $f(x, x^+)$

$$\int f(x,x^+)\,dx^+dx\equiv$$
$$\equiv\int f(x,x^+)\prod\nolimits_{i=1}^n dx_i^+dx_i=(-1)^{n-1}C(1,\ldots,1;1,\ldots,1),$$

где C – коэффициенты из записи элемента $f(x, x^+)$ в форме (3).

Для интегралов на грассмановой алгебре справедлива формула замены переменных. Ограничиваясь случаем, когда замена линейна, то есть

$$x_i=\sum\nolimits_j a_{ij}x'_j,\quad dx_i=\sum\nolimits_j a^{-1}_{ij}dx'_j,$$
$$x_i^+=\sum\nolimits_j b_{ij}x'^+_j,\quad dx_i^+=\sum\nolimits_j b^{-1}_{ij}dx'^+_j,$$

где a_{ij} – элементы матрицы A, a^{-1}_{ij} – элементы обратной матрицы A^{-1}, получим

$$\int f(x,x^+)\,dx^+dx=\det(A^{-1}B^{-1})\int f(ax',bx'^+)\,dx'^+dx'.$$

Для гауссовых интегралов имеются формулы (см. [2]–[4]):

$$\int\exp(-x^+Ax+\eta^+x+x^+\eta)=\det A\cdot\exp(\eta^+A^{-1}\eta),$$
$$\int\exp(-xBx)\prod\nolimits_{i=1}^n dx_i=\det{}^{1/2}B,$$

где

$$xAx=\sum x_i^+a_{ij}x_j;\quad xBx=\sum x_i\,b_{ij}x_j\quad(b_{ij}=-b_{ji}),$$
$$\eta^+x=\sum\eta_i^+x_i,\quad x^+\eta=\sum x_i^+\eta_i,$$
$$\{\eta_i,\eta_j\}=\{\eta_i^+,\eta_j\}=\{\eta_i^+,\eta_j^+\}=0.$$

Лит.: [1] Березин Ф. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 2, с. 311–14; [2] его же, Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [3] Васильев А. Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Л., 1976; [4] Попов В. Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, М., 1976.

С. А. Федотов.

ИНТЕГРИРОВАНИЯ МЕТОД по быстрым и медленным переменным – метод вычисления длинноволновых асимптотик функций Грина в квантовой теории поля и статистической физике в формализме функционального интеграла, аналог метода усреднения по быстрым движениям в нелинейной механике (см. [1]). Если в системе присутствуют кванты сколь угодно малой энергии, члены стандартной теории возмущений имеют так наз. инфракрасные сингулярности, поэтому желательна перестройка теории возмущений, к-рую и позволяет осуществить И. м. по быстрым и медленным переменным (см. [2], [3]).

Поле Ψ, по к-рому производится функциональное интегрирование, представляют в виде суммы «медленного» Ψ_0 и «быстрого» Ψ_1 полей. Напр., в статистич. физике системы бозе-частиц есть часть разложения Фурье

$$\Psi(x,\tau) = (\beta v)^{-1/2} \sum_{k,\omega} e^{i(\omega\tau + kx)} a(k,\omega)$$

с $|k| < k_0$ и $|\omega| < \omega_0$ (здесь $\omega = 2\pi n/\beta$ — так наз. частота Мацубара), Ψ_1 — разность $\Psi - \Psi_0$. В теории ферми-систем, где $\omega = (2n+1)\pi/\beta$, $a(k,\omega)$ — антикоммутирующие переменные, естественно определить медленное поле Ψ_0 условиями $||k| - k_F| < k_0$, так что импульсы k лежат в узком слое вблизи сферы Ферми $|k| = k_F$. В квантовой теории поля естественно назвать медленным полем Ψ_0 часть разложения Фурье

$$\Psi(x) = \int dk\, e^{ikx} \tilde{\Psi}(k)$$

с $|k^2| = |k_0^2 - k^2| < m_0^2$ (здесь $kx = k_0 x_0 - kx$).

Основная идея перестройки теории возмущений состоит в последовательном интегрировании в функциональном интеграле сначала по «быстрым», а затем по «медленным» переменным с использованием на этих двух этапах различных схем теории возмущений. На первом этапе интегрируют по быстрым полям $a(k,\omega)$ (или $\tilde{\Psi}(k)$), индексы к-рых (k,ω) (или k) лежат в области, характеризующей быстрые переменные, и используют теорию возмущений, в к-рой интегралы по импульсам обрезаны на нижнем пределе (k_0), и имеют вершины, описывающие взаимодействие медленного Ψ_0 и быстрого Ψ_1 полей. На втором этапе (интегрирование по медленным полям) можно добиться исчезновения инфракрасных сингулярностей, перейдя к нетривиальной схеме теории возмущений, использующей специфику системы. Напр., в теории сверхтекучих бозе-систем удобно взять полярные координаты $\rho(x,\tau)$, $\varphi(x,\tau)$ медленного поля $\Psi_0(x,\tau) = (\rho(x,\tau))^{1/2} e^{i\varphi(x,\tau)}$ за новые переменные функционального интегрирования. В теории сверхтекучих ферми-систем удобно перейти от интеграла по медленным ферми-полям к интегралу по нек-рым вспомогательным бозе-полям, соответствующим коллективным степеням свободы рассматриваемой системы.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [2] Попов В. Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, М., 1976; [3] Popov V. N., Functional integrals and collective excitations, Camb., 1988.

В. Н. Попов.

ИНТЕГРИРУЕМАЯ ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА; невырожденность — для системы

$$\dot{I} = 0,\ \dot{\varphi} = \partial H(I)/\partial I, \qquad (*)$$

где $I = (I_1, \ldots, I_n) \in \mathbb{R}^n$ — переменные действия, а $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in T^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ — угловые переменные,— функциональная независимость частот

$$\omega_i(I) = \partial H(I)/\partial I_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

условно-периодического движения по инвариантным торам $\{I = \text{const}\}$. Условие невырожденности имеет вид

$$\det\left(\frac{\partial\omega}{\partial I}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial I^2}\right) \neq 0.$$

Система (*) называется изоэнергетически невырожденной, если одна из частот ω_i не обращается в нуль, а отношения к ней остальных $n-1$ частот функционально независимы на гиперповерхностях уровня гамильтониана H. Условие изоэнергетич. невырожденности имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} \partial\omega/\partial I & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \partial^2 H/\partial I^2 & \partial H/\partial I \\ \partial H/\partial I & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Понятия невырожденности и изоэнергетич. невырожденности имеют локальные аналоги (для гамильтоновых систем в окрестности эллиптич. положения равновесия). Соответствующие формулировки, а также сведения о значении невырожденности для теории возмущений и теории малых колебаний см. в ст. *КАМ-теория.*

М. Б. Севрюк.

ИНТЕГРИРУЕМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Интегральное многообразие.*

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаками операций дифференцирования и интегрирования.

И.-д. у. возникают в задачах математич. физики, когда поведение моделируемой системы существенно определяется предыдущими состояниями системы (так наз. явления последействия, гистерезиса и т. п.). И.-д. у. встречаются, напр., при изучении явлений переноса энергии и диффузии нейтронов, в теории щелевых антенн, в задачах гидродинамич. теории смазки.

В зависимости от вида дифференциальных операций различают обыкновенные И.-д. у. и И.-д. у. с частными производными (напр., кинетич. уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова — Феллера).

В ряде случаев И.-д. у. можно свести к *интегральным уравнениям*, но часто при изучении И.-д. у. возникают специфич. явления, не свойственные дифференциальным и интегральным уравнениям.

С. В. Молодцов.

ИНТЕНСИВНАЯ ВЕЛИЧИНА, интенсивный параметр,— макроскопическая величина, значение которой для любой части физической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, одинаково. И. в. не зависит от массы системы или от числа частиц в системе. Примерами И. в. служат давление, температура и др.

А. В. Солдатов.

ИНТЕНСИВНЫЙ ПАРАМЕТР — см. *Интенсивная величина.*

ИНТЕРВАЛ пространства-времени — величина, характеризующая связь между двумя событиями, разделенными пространственным расстоянием и промежутком времени. В *инерциальной системе отсчета* и декартовых координатах квадрат И. равен

$$s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

где c — скорость света, Δt, Δx, Δy, Δz — соответственно промежуток времени и разности пространственных координат. В *Минковского пространстве-времени* И. играет роль, аналогичную расстоянию в геометрич. евклидовом пространстве, однако, подобно *четырехмерным векторам*, И. разделяются на пространственноподобные (s — мнимое, так что $s^2 < 0$), времениподобные (s — действительное, так что $s^2 > 0$) и изотропные ($s = 0$).

И. инвариантен относительно *Лоренца преобразований* и даже *Пуанкаре преобразований.*

М. И. Войцеховский.

ИНТЕРВАЛ событий — см. *Лоренца преобразование.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — см. *Скачкообразный марковский процесс.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ ГРУППА ЛИ — см. *Ли группа.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА — см. *Связность.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ — см. *Связность.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — см. *Генератор* группы, *Дифференциальное уравнение*; группа преобразований.

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР — см. *Казимира оператор.*

ИНФЛЯЦИОННАЯ ВСЕЛЕННАЯ — см. *Квантовая теория гравитации.*

ИНФОРМАЦИОННАЯ ЭНТРОПИЯ — см. *Энтропия.*

ИНФРАЗВУК — см. *Звуковые волны.*

ИНФРАКРАСНАЯ РАСХОДИМОСТЬ — термин, указывающий на некорректность определения квантовополевых величин в рамках формального применения метода теории возмущений. И. р. проявляются в *расходимости* фейнмановских интегралов (см. *Фейнмана диаграмма*) в области малых 4-мерных импульсов, что и объясняет происхождение этого

термина. Они встречаются только в квантовополевых моделях, включающих безмассовые частицы: фотон – в квантовой электродинамике, глюон – в квантовой хромодинамике, гравитон – в квантовой гравитации. Поэтому их называют также массовыми расходимостями. К ним относят также расходимости, возникающие в пределе нулевых масс. С физич. точки зрения они обусловлены дальнодействующим характером безмассовых полей, то есть медленным спаданием потенциала взаимодействия на больших расстояниях. Различают два основных типа: И. р. в диаграммах Фейнмана, рассматриваемых как функции в области 4-мерных импульсов, а также И. р. в матричных элементах матрицы рассеяния и в сечениях рассеяния.

И. р. первого типа обнаруживают тесную аналогию с *ультрафиолетовыми расходимостями*. Простейшая И. р. первого типа обусловлена фактором $\frac{1}{(p^2+i0)^2}$, возникающим в фейнмановском интеграле благодаря перемножению пропагаторов двух безмассовых линий с одинаковыми 4-мерными импульсами. И. р. первого типа оказываются наиболее «опасными», так как их наличие фактически свидетельствует о неприемлемых свойствах рассматриваемой квантовополевой модели. Однако в физически осмысленных теориях, таких, как квантовая электродинамика или квантовая хромодинамика, И. р. этого типа могут встретиться только в отдельных диаграммах, а после суммирования диаграмм Фейнмана каждого порядка теории возмущений они сокращаются. И. р. первого типа могут также порождаться неудачным выбором перенормировочной процедуры. Напр., *Боголюбова – Парасюка R-операция* в своем первоначальном виде неприменима в теориях с безмассовыми частицами именно из-за И. р., индуцированных разложениями в ряд Тейлора при нулевых 4-мерных импульсах.

Происхождение И. р. второго типа можно также объяснить неприменимостью разложения по числу испущенных частиц с малыми импульсами (мягких частиц). Однако в величинах, имеющих непосредственный физич. смысл, И. р. отсутствуют. Этим свойством обладают сечения рассеяния после суммирования по всем энергетически вырожденным начальным и конечным состояниям. В частности, в квантовой электродинамике необходимо производить суммирование по состояниям с произвольным числом мягких фотонов.

Среди И. р. второго типа выделяют класс коллинеарных расходимостей, обусловленных отсутствием запрета на превращение безмассовой частицы в состояния с безмассовыми частицами, имеющими параллельный импульс и обладающими теми же суммарными квантовыми числами, что и исходная частица. Такие И. р. проявляются в *расходимости* фейнмановских интегралов по переменной, представляющей собой угол между направлениями исходной и виртуальной безмассовых частиц. В квантовой электродинамике коллинеарные расходимости возникают лишь в пределе малой массы электрона, а в квантовой хромодинамике они присутствуют из-за самодействия глюонов. Тем не менее коллинеарные расходимости пропадают, если определять сечение рассеяния в заданный телесный угол и не фиксировать конечного числа частиц.

Поскольку в промежуточных расчетах приходится иметь дело с инфракрасно расходящимися величинами, используются различного рода регуляризации. Напр., временно вводится фиктивная ненулевая фотонная (или глюонная) масса. В окончательных же результатах для физически осмысленных сечений рассеяния И. р. исчезают, что проявляется в сокращении сингулярных членов по параметру регуляризации.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Muta T., Foundation of Quantum Chromodinamics, Singapore, 1987; [3] Бьеркен Дж., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория, М., 1978.

В. А. Смирнов.

ИРРАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Алгебраическая функция.*

ИРРЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА – см. *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

ИСКЛЮЧЕНИЯ БОЗОННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОД – метод построения иерархий операторных уравнений для модельных задач статистической механики, описывающих взаимодействия вещества с бозонными полями. К таким задачам относятся *Дикке модель* в теории сверхизлучения, *Фрелиха модель* в теории полярона и др.

Пусть модельная задача характеризуется гамильтонианом вида

$$H = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k + H_M + \sum_k e^{\varepsilon t}\left(M_k a_k + a_k^+ M_k^+\right), \qquad (1)$$

где a^+, a – бозе-операторы рождения и гибели (см. *Вторичное квантование*), H_M – гамильтониан вещества; последнее слагаемое описывает взаимодействие вещества, задаваемого операторами M, с полем. Предполагается, что в начальный момент времени бозе-поле находится в равновесном состоянии и что включение взаимодействия между полем и веществом совершается адиабатически. Уравнение движения для произвольного оператора O, относящегося к веществу, имеет вид

$$i\frac{\delta O}{\delta t} = [O, H] = [O, H_M] + \left[0, \sum_k (M_k a_k + a_k^+ M_k^+)\right], \qquad (2)$$

где $[A, B] = AB - BA$. Подставляя сюда формальное решение уравнений движения для бозе-операторов

$$a_k(t) = a_k(t_0)\exp\{-i\omega_k(t-t_0)\} - im_k^+(t),$$

$$m_k^+ = \int_{t_0}^t \exp\{i\omega_k(\tau - t)\} M_k^+(\tau)\, d\tau,$$

переходя к усреднению с матрицей плотности начального состояния $\rho(t_0)$, используя равенства

$$\left.\begin{aligned} \left\langle O, \tilde{a}_k \right\rangle_t &= N_k \left\langle \left[\tilde{a}_k, O\right] \right\rangle_t, \\ \left\langle \tilde{a}_k, O \right\rangle_t &= (1 + N_k)\left\langle \left[\tilde{a}_k, O\right] \right\rangle_t, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где

$$\langle \ldots \rangle_t \equiv \mathrm{Sp}\{\ldots \rho(t_0)\},\ \tilde{a}_k \equiv a_k(t_0)\exp\{-i\omega_k(t-t_0)\},$$

$$N_k \equiv \exp\{-\beta\omega_k\}/(1 - \exp\{-\beta\omega_k\}),$$

β – обратная температура начального равновесного состояния бозе-поля, и переходя к пределу $t_0 \to -\infty, \varepsilon \to 0$, можно получить иерархич. интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\delta}{\delta t}\langle 0\rangle_t + i\langle [O, H_M]\rangle_t =$$

$$= \sum_k \int_{-\infty}^t d\tau \exp\{i\omega_k(\tau - t)\}\left\{N_k\left\langle M_k^+(\tau)[O(t), M_k(t)]\right\rangle_t + \right.$$

$$\left. + (1 + N_k)\left\langle [M_k(t), O(t)] M_k^+(\tau)\right\rangle_t\right\} +$$

$$+ \sum_k \int_{-\infty}^t d\tau \exp\{-i\omega_k(\tau - t)\}\left\{N_k\left\langle [M_k^+(t), O(t)] M_k(\tau)\right\rangle_t + \right.$$

$$\left. + (1 + N_k)\left\langle M_k(\tau)[O(t), M_k^+(t)]\right\rangle_t\right\}. \qquad (4)$$

Соотношения (3) носят название леммы Боголюбова. Иерархич. уравнение (4) содержит только операторы, относящиеся к веществу, причем средние в правой части представляют собой двухвременные *корреляционные функции*, содержащие произведения операторов более высокого порядка, чем средние в левой части. Для получения из (4) замкнутой системы уравнений необходимо провести расцепление высших корреляторов, обусловленное физич. соображениями.

И. б. п. м. и получаемое на его основе иерархич. уравнение (4) применяются для описания динамики сверхизлу-

чения, кинетики полярона и в ряде других физич. задач с гамильтонианами, представимыми в виде (1). Метод развит Н. Н. Боголюбовым и Н. Н. Боголюбовым (мл.) (см. [1]).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1980, т. 11, в. 2, с. 245–300; [2] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., Шумовский А. С., Математические методы статистической механики модельных систем, М., 1989. *А. С. Шумовский.*

ИСПАРЕНИЯ КРИВАЯ – см. *Фазовая диаграмма.*

ИСТОЧНИКА ФУНКЦИЯ – см. *Грина функция.*

ИСТОЧНИК-ИЗОБРАЖЕНИЕ – см. *Изображений метод.*

ИСЧЕЗАЮЩИЙ ПОЛУЦИКЛ – класс когомологий неособого многообразия V_* уровня α_* голоморфной функции $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ такой, что $f|_{\mathbb{C}^{n-1}}$ имеет невырожденную критическую точку, не являющуюся критической точкой f, причем α_* – не критическое значение $f|_{\mathbb{C}^{n-1}}$. Рассматривается $V_*' = V_* \cap \mathbb{C}^{n-1}$ и $S' \subset V_*'$ – *исчезающий цикл* для $f|_{\mathbb{C}^{n-1}}$. Класс когомологий в $H_{n-1}(X_*, V_*')$, определяемый малой пленкой, затягивающей сферу S' в V_*, и называется исчезающим полуциклом. *С. В. Чмутов.*

ИСЧЕЗАЮЩИЙ ЦИКЛ – класс когомологий неособого многообразия V_{α_x} уровня α_* голоморфной функции $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, имеющей невырожденную критическую точку. По лемме Морса в окрестности невырожденной критич. точки f имеет вид:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \alpha + z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

Предполагается, что α_* – не критич. значение f. Рассматривается путь $\varphi(t)$ на $\mathbb{C}^1$:

$$\varphi(0) = \alpha_*, \ \varphi(1) = \alpha.$$

На многообразии $V_{\varphi(t)}$ уровня $\varphi(t)$ функции f выделяется сфера

$$S_t = \sqrt{\varphi(t) - \alpha}\, S^{n-1},$$

где

$$S^{n-1} = \{z\colon z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 1, \ \operatorname{Im} z_i = 0\}.$$

При $t=1$ сфера S_t вырождается в точку. Класс гомологий в $H_{n-1}(V_{\alpha_x})$, определяемый сферой S_0, и называется исчезающим циклом. *С. В. Чмутов.*

ИТО КВАНТОВАЯ ФОРМУЛА – см. *Квантовое стохастическое исчисление.*

ИТО СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Диффузионный процесс, Марковский процесс, Маркова цепь, Маркова цепь* с непрерывным временем.

ЙОРДАНОВА АЛГЕБРА – *алгебра*, в которой справедливы тождества:

$$xy = yx,$$
$$(x^2y)x = x^2(yx).$$

Такие алгебры впервые возникли в работе П. Йордана (P. Jordan, 1933), посвященной аксиоматизации основ квантовой механики, а затем нашли применения в алгебре, анализе и геометрии.

Пусть A – ассоциативная алгебра над полем характеристики $\neq 2$. Множество A с операциями сложения и йорданова умножения

$$a \circ b = 1/2\ (ab + ba)$$

образует алгебру $A^{(+)}$, к-рая является йордановой. Й. а., изоморфная подалгебре алгебры $A^{(+)}$ для нек-рой ассоциативной алгебры A, называется специальной. Роль специальных алгебр в теории Й. а. во многом аналогична роли ассоциативных алгебр в теории альтернативных алгебр. В основе этой аналогии лежит теорема о том, что всякая двупорожденная подалгебра Й. а. специальна. (Всякая двупорожденная подалгебра альтернативной алгебры ассоциативна.) Необходимое и достаточное условие специальности алгебры: Й. а. специальна тогда и только тогда, когда она изоморфно вложима в Й. а., каждое счетное подмножество к-рой лежит в подалгебре, порожденной двумя элементами.

См. также *Антикоммутатор.* *А. М. Слинько.*

ЙОСТА ФУНКЦИИ – функции

$$F_l(k) = \lim_{r \to 0} \frac{(-kr)^l}{(2l-1)!!} f_l(k, r),$$

$l = 0, 1, \ldots$, где f_l – решения Йоста *радиального уравнения Шредингера*:

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + l(l+1)/r^2 + V(r) - k^2\right\} f_l(k, r) = 0$$

с граничным условием $f_l(k, r) = l^{ikr} + o(1)$, $r \to \infty$. Й. ф. существуют при условии

$$\int_0^\infty r|V(r)|\,dr < \infty.$$

Основные свойства: 1) $F_l(k)$ голоморфна при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, 2) $F_l(-k^*) = F_l^*(k)$, 3) $F_l(k) = 1 + o(1)$, $k \to \infty$, 4) нули $F_l(k)$ в верхней полуплоскости соответствуют связанным состояниям для радиального уравнения Шредингера.

Лит.: [1] Альфаро В. де, Редже Т., Потенциальное рассеяние, пер. с англ., М., 1966; [2] Ньютон Р., Теория рассеяния волн и частиц, пер. с англ., М., 1969. *С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.*

К

КАБАНЭ УРАВНЕНИЕ – интегро-дифференциальное уравнение, являющееся моделью *Больцмана уравнения*:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v(\theta)\nabla_x N = \frac{cS}{\pi}\int_0^{2\pi} N(x,\varphi,t)\,N(x,\varphi+\pi,t)\,d\varphi - \\ - 2cSN(x,\theta,t)N(x,\theta+\pi,t).$$

Здесь $N(x,\ \theta,\ t)$ – плотность частиц в точке $x = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}$, имеющих скорость $v(\theta) = \boldsymbol{i}c\cos\theta + \boldsymbol{j}c\sin\theta$, c – модуль скорости, $t > 0$.

Лит.: [1] Cabanne H., Mathematical method in kinetic theory of gases, Frankfurt, 1980.

И. А. Кузин, В. П. Политюков.

КАВИТАЦИЯ – см. *Бернулли уравнение.*

КАДИСОНА – ШВАРЦА НЕРАВЕНСТВО – неравенство для положительного отображения Ф из C^*-алгебры $\mathcal{A}$ в C^*-алгебру $\mathcal{B}$:

$$\Phi(X)^*\Phi(X) \leqslant \|\Phi\|\Phi(X^*X),$$

для любого $X \in \mathcal{A}$ такого, что $XX^* = X^*X$. Если Ф – *вполне положительное отображение*, то К. – Ш. н. имеет место для любого $X \in \mathcal{A}$.

Лит.: [1] Kadison R. V., «Ann. Math.», 1952, v. 56, p. 494–503; [2] Størmer E., «Acta math.», 1963, t. 110, p. 233–78.

А. С. Холево.

КАДОМЦЕВА – ПЕТВИАШВИЛИ УРАВНЕНИЕ – уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t - 6uu_x - u_{xxx}) = 3\alpha^2 u_{yy},$$

описывающее нелинейные волны в двумерных средах со слабой дисперсией. Обладает той же степенью универсальности, что и *Кортевега – де Фриса уравнение* в одномерном случае (отсюда и второе название: двумерное уравнение Кортевега – де Фриса). Получено Б. Б. Кадомцевым и В. И. Петвиашвили в 1970 . К. – П. у. представляет собой *гамильтонову систему*, имеющую бесконечный набор интегралов движения; входящие в этот набор интегралы

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int u^2\,dx\,dy = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\left[\frac{u_x^2}{2} - u^3 - \frac{3\alpha^2}{2}w^2\right]dx\,dy = 0,$$

где

$$w = \int_{\infty}^{x} u_y\,dx,$$

имеют смысл законов сохранения импульса и энергии для среды, описываемой этим уравнением. К. – П. у. связано со многими известными уравнениями: обычным и радиальным уравнением Кортевега – де Фриса, стационарным К. – П. у. и др. Для К. – П. у. найдено несколько точных решений различного вида, в том числе одномерный *солитон*

$$u = 2\varkappa^2/\mathrm{ch}^2\varkappa(x - 4\varkappa^2 t - x_0), \qquad (*)$$

где $\varkappa$, x_0 – постоянные.

Свойства К. – П. у. зависят от знака величины α^2, к-рый определяется характером дисперсии. В среде с положительной дисперсией, когда $\alpha^2 > 0$, солитон (*) неустойчив по отношению к двумерным возмущениям. При $\alpha^2 < 0$ одномерный солитон устойчив.

См. также *Алгебро-геометрические методы* в теории поля.

Лит.: [1] Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980; [2] Солитоны, пер. с англ., М., 1983; [3] Абловиц М., Сигур Х., Солитоны и метод обратной задачи, пер. с англ., М., 1987.

Ю. А. Данилов.

КАЗИМИРА ОПЕРАТОР – оператор, составленный из *генераторов* I_α представления группы Ли, коммутирующий со всеми I_α и, следовательно, со всеми операторами представления. К. о. входят в полный набор П коммутирующих операторов, выделяемый из всевозможных эрмитовых функций генераторов, и составляют часть набора П, инвариантную относительно действия группы. Одновременные собственные значения К. о. классифицируют неприводимые представления группы.

В квантовой теории физич. величинам соответствуют эрмитовы операторы, а одновременные собственные значения операторов полного набора П называются квантовыми числами состояния, преобразующегося по данному представлению группы. Напр., у группы вращений $SO(3)$ имеется К. о.

$$\boldsymbol{I}^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$$

с собственным значением $j(j+1)$, где I_i – компоненты углового момента, а в качестве набора П можно взять $\boldsymbol{I}^2$ и I_3. У группы Пуанкаре два К. о.:

$$\boldsymbol{P}^2 = P_\alpha^2 = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2$$

и

$$W^2 = W_\alpha^2,$$

где

$$W_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}P_\beta M_{\gamma\delta},$$

а $M_{\gamma\delta}$ и P_β – компоненты 4-момента и 4-импульса. Собственные значения К. о. равны соответственно m^2 и $m^2 j(j+1)$, где m – масса, j – полный момент состояния.

См. также *Лоренца группа, Лоренца преобразование.*

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969, гл. 2; [2] Эллиот Дж., Добер П., Симметрия в физике, пер. с англ., т. 1–2, М., 1983.

В. П. Павлов.

КАЛИБРОВКА – см. *Калибровочное условие.*

КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ – инвариантность относительно *калибровочных преобразований*. К. и. имеет место в тех случаях, когда не все поля, участвующие в уравнениях движения, соответствуют наблюдаемым величинам. Напр., в уравнениях Максвелла–Дирака в электродинамике участвуют комплексные спинорные функции $\overline{\Psi}(x)$, $\Psi(x)$ и четырехмерный вектор $A_\mu(x)$. В то же время наблюдаемые могут быть выражены через тензор напряженности электромагнитного поля и модуль функции $|\Psi|$. Эти величины не меняются при переходе от полей $\overline{\Psi}$, Ψ, A_μ к полям $\overline{\Psi}'$, Ψ', A'_μ, получающимся из исходных с помощью калибровочного преобразования. Эти преобразования оставляют инвариантными и уравнения Максвелла–Дирака. Другими словами, поля $\overline{\Psi}$, Ψ, A_μ и $\overline{\Psi}'$, Ψ', A'_μ описывают одну и ту же физич. ситуацию. Аналогичным образом вводится понятие К. и. для неабелевых калибровочных групп. К. и. в этом случае означает, что уравнения, описывающие динамику системы, не меняются при переходе от полей $\Psi(x)$, реализующих нек-рое представление полупростой компактной группы внутренней симметрии Ω и калибро-

вочных полей $A_\mu(x)$, реализующих присоединенное представление алгебры Ли той же группы, к полям $\Psi^\omega(x)$, $A^\omega_\mu(x)$, получающимся из исходных с помощью калибровочного преобразования.

К. и. эквивалентна принципу относительности в зарядовом пространстве, к-рый утверждает, что в зарядовом пространстве не существует выделенного фиксированного базиса, относительно к-рого поля материи представляются в виде набора компонент $\Psi=(\Psi_1, ..., \Psi_n)$. Такой базис можно локально вводить произвольным образом в каждой точке пространства-времени. Локальное изменение базиса интерпретируется как изменение *калибровочного поля*, не затрагивающее наблюдаемых физич. величин. Таким образом, наблюдаемым соответствует целый класс калибровочно инвариантных конфигураций.

Чтобы практически работать с классами эквивалентных конфигураций, их надо как-то параметризовать, выбрав однозначных представителей в каждом классе. Обычно это достигается путем наложения на поля дополнительного *калибровочного условия*.

К. и. является одним из основных принципов построения моделей взаимодействий элементарных частиц (см. *Квантовая хромодинамика*, *Великое объединение взаимодействий*). Она практически однозначно фиксирует вид функции Лагранжа, описывающей систему взаимодействующих полей. Важным обобщением К. и. является суперкалибровочная инвариантность (см. *Суперсимметрия*).

См. также *Потенциал*.

Лит. см. при ст. *Калибровочное поле*. *А. А. Славнов.*

КАЛИБРОВОЧНАЯ ПУСТЫНЯ – см. *Великое объединение взаимодействий*.

КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ – см. *Внутренняя симметрия*.

КАЛИБРОВОЧНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ – две системы совместных уравнений Захарова – Шабата

$$\varphi'_{ix} = U_i(x, t, \lambda)\varphi_i,\ \dot\varphi_{it} = V_i(x, t, \lambda)\varphi_i,\ \ i=1, 2,$$

связанные следующим образом: если существует невырожденное и не зависящее от спектрального параметра λ преобразование $g(x, t)$ такое, что

$$\varphi_2(x, t, \lambda) = g(x, t)\varphi_1(x, t, \lambda)$$

и

$$U_2 = g'_x g^{-1} + gU_1 g^{-1},$$

$$V_2 = \dot g_t g^{-1} + gV_1 g^{-1}.$$

В. П. Котляров.

КАЛИБРОВОЧНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ – уравнения нулевой кривизны:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

порождаемые *калибровочно эквивалентными системами* уравнений Захарова–Шабата. Наиболее известной парой К. э. у. являются уравнение Ландау–Лифшица с анизотропией типа «легкая ось»:

$$\boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_{xx} + \beta(\boldsymbol{Sn})\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{n},\ \ \boldsymbol{S}^2=1,\ \beta\geqslant 0,$$

и нелинейное уравнение Шредингера (случай притяжения) (см. [1]):

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0.$$

Другой такой парой являются эллиптич. уравнение синус-Гордона

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \sin\varphi$$

и уравнение ферромагнетика Гейзенберга вида (см. [2]):

$$\boldsymbol{S}_{xx} + \boldsymbol{S}_{yy} + (\boldsymbol{S}_x^2 + \boldsymbol{S}_y^2)\boldsymbol{S} = 0,\ \ \boldsymbol{S}^2 = 1.$$

Лит.: [1] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., Гамильтонов подход в теории солитонов, М., 1986; [2] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х., Солитоны и нелинейные волновые уравнения, пер. с англ., М., 1988. *В. П. Котляров.*

КАЛИБРОВОЧНОЕ ПОЛЕ – поле, обеспечивающее инвариантность теории относительно *калибровочных преобразований*.

Простейшим примером К. п. является электромагнитное поле $A_\mu(x)$, связанное с калибровочной группой $U(1)$. Уравнение Дирака, описывающее свободные электроны, инвариантно относительно фазовых преобразований электрон-позитронных полей $\overline\Psi$, Ψ:

$$\Psi(x)\to e^{i\alpha}\Psi(x),\ \ \overline\Psi(x)\to e^{-i\alpha}\overline\Psi(x). \qquad (1)$$

Эта инвариантность отражает произвол выбора базиса в зарядовом пространстве – абсолютная величина фазы заряженного поля не имеет физич. смысла. Наблюдаемой является лишь разность фаз электронного и позитронного полей. Возможность независимого выбора базиса в зарядовом пространстве для различных пространственно-временных точек приводит к требованию инвариантности относительно локальных фазовых преобразований

$$\Psi(x)\to e^{i\alpha(x)}\Psi(x),\ \ \overline\Psi(x)\to e^{-i\alpha(x)}\overline\Psi(x). \qquad (2)$$

Свободное уравнение Дирака уже не инвариантно относительно преобразований (2). Однако система уравнений Максвелла–Дирака, описывающая взаимодействующие электрон-позитронное и электромагнитное поля

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu,\ \ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\\ &(i\gamma_\mu\partial_\mu - m + e\gamma_\mu A_\mu)\psi(x) = 0,\\ &j_\nu = e\overline\psi\gamma_\nu\psi, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

инвариантна относительно преобразований (2), если одновременно электромагнитное поле A_μ испытывает калибровочное преобразование

$$A_\mu\to A_\mu(x) + \frac{1}{c}\partial_\mu\alpha(x). \qquad (4)$$

Обобщение этой конструкции на случай неабелевых групп было впервые дано в 1954 Ч. Янгом (C. Yang) и Р. Миллсом (R. Mills). Роль электромагнитного поля играет в этом случае многокомпонентное поле $A^a_\mu(x)$, получившее название поля Янга–Миллса. Поля $\Psi(x)$ (поля материи) принимают значения в зарядовом пространстве, являющемся пространством представления нек-рой полупростой компактной группы Ω ($SU(2)$, $SU(3)$ и т. д.). Поле Янга–Миллса удобно описывать векторной функцией $A_\mu(x)$, принимающей значения в алгебре Ли группы Ω. Оно задается коэффициентами

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)t^a \qquad (5)$$

по отношению к базису генераторов присоединенного представления (t^a). Калибровочные преобразования, обобщающие преобразования (2), (4), имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\Psi(x)\to\Psi^\omega(x) = \exp\{\Gamma[\omega(x)]\}\Psi(x),\\ &A_\mu(x)\to A^\omega_\mu(x) = \omega(x)A_\mu(x)\omega^{-1}(x) + \partial_\mu\omega^{-1}(x)\omega(x). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Здесь $\Gamma(\omega)$ – генераторы группы Ω в представлении, реализуемом полями Ψ, а $\omega(x)$ при каждом x является матрицей в присоединенном представлении группы Ω. Можно положить

$$\omega(x) = \exp\{i\alpha^a(x)t^a\}.$$

Динамика полей Янга–Миллса фиксируется требованием калибровочной инвариантности. Взаимодействие поля Янга–Миллса с полями материи вводится путем замены производных в свободном лагранжиане на ковариантные производные

$$\partial_\mu\to\nabla_\mu = \partial_\mu - g\Gamma(A_\mu), \qquad (7)$$

где $\Gamma(A_\mu)$ – представление матриц A_μ, соответствующее рассматриваемому представлению калибровочной группы. Напр., если $\Omega = SU(2)$, а поля материи реализуют ее двумерное представление, то

$$\Gamma(A_\mu) = \Gamma\left(A^a_\mu t^a\right) = \frac{1}{2i}A^a_\mu\tau^a, \qquad (8)$$

где τ^a – матрицы Паули.

Лагранжиан самого поля Янга–Миллса имеет вид:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{8}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{8}\langle F_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}\rangle, \qquad (9)$$

где через $\langle\ ,\ \rangle$ обозначена форма Киллинга для алгебры Ли группы Ω, $F_{\mu\nu}$ – тензор напряженности поля Янга–Миллса:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]. \qquad (10)$$

Если ограничиться минимальным числом производных, то форма (9) является единственным лоренц-инвариантным выражением, инвариантным относительно неабелевых калибровочных преобразований (6).

Уравнения Эйлера – Лагранжа для поля Янга – Миллса имеют вид:

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \qquad (11)$$

где j_ν – ток полей материи.

Естественный геометрич. язык для описания полей Янга–Миллса дает теория расслоенных пространств. Полю Янга–Миллса в этой теории соответствует связность в главном расслоении. Подобно символам Кристоффеля в теории тяготения, К. п. описывает параллельный перенос в зарядовом пространстве. Если $\gamma(s)$ – контур в пространстве-времени, задаваемый уравнениями $x_\mu = x_\mu(s)$, то ковариантная производная в касательном направлении к этому контуру равна нулю:

$$\nabla_\mu \Psi(x)\Big|_{x=x(s)} \frac{dx_\mu}{ds} = 0. \qquad (12)$$

Тензор напряженности $F_{\mu\nu}$ является тензором кривизны зарядового пространства.

Инвариантность функции Лагранжа относительно калибровочных преобразований, зависящих от произвольной функции, приводит к линейной зависимости уравнений движения. Нек-рые из функций, параметризующих классич. решение, произвольным образом зависят от времени. При квантовании необходимо разделить истинные динамич. переменные и групповые параметры. Так, для поля Янга–Миллса компонента a представляет собой не динамич. переменную, а множитель Лагранжа. Соответствующий ей канонич. импульс

$$p_0^a = \delta\mathscr{L}/\delta\left(\frac{\partial A^a}{\partial x_0}\right)$$

тождественно обращается в нуль, а уравнение Эйлера – Лагранжа, получающееся при варьировании действия по A_0:

$$\nabla_i p_i = j_0,\ \ i = 1, 2, 3, \qquad (13)$$

не содержит производной по времени и поэтому не описывает динамику системы, а является уравнением связи. Общая теория квантования систем со связями была развита П. Дираком (P. Dirac, 1956), Л. Д. Фаддеевым (1969) и др. Ее суть состоит в том, что канонич. перестановочные соотношения накладываются лишь на истинные динамич. переменные, к-рые можно найти, решив уравнения связи и наложив на поля A_μ дополнительные условия, выбирающие единственного представителя в классе калибровочно эквивалентных конфигураций A_μ^ω. Эти условия называются условиями калибровки (см. *Калибровочное условие*). Если, напр., наложить на поля A_μ условие кулоновской калибровки $\partial_i A_i = 0$, то уравнения связи (13) можно явно решить, выразив продольную часть вектора импульса p_i через трехмерно поперечные компоненты p_i^{tr}, A_i^{tr}. Если подставить это решение в исходное действие, то оно будет зависеть лишь от поперечных компонент p_i^{tr}, A_i^{tr}, к-рые и являются в данном случае истинными динамич. переменными. На них можно наложить канонич. перестановочные соотношения. В электродинамике подобная процедура соответствует описанию системы в терминах поперечно поляризованных фотонов. В случае неабелевых К. п. решение уравнения (13) представляет собой бесконечный ряд по константе связи g, подстановка к-рого в действие порождает нелинейные по полям члены, отвечающие нулевым вершинам взаимодействия.

Релятивистски инвариантная теория возмущений для квантованного поля Янга – Миллса была развита Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым (1967) и Б. Де-Виттом (B. De-Witt, 1967) с помощью метода континуального интеграла. Фейнмановская диаграммная техника в этом случае может быть описана эффективным действием вида

$$S_{\text{эф}} = \int\left\{\frac{1}{8}\operatorname{Tr}\left[F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{2}{\beta}(\partial_\mu A_\mu)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 4\bar{c}(\Box c - g\partial_\mu[A_\mu, c])\right]\right\} d^4x. \qquad (14)$$

Здесь β – параметр, фиксирующий калибровку, $\bar{c}$, c – скалярные поля, подчиняющиеся статистике Ферми – Дирака. Эти поля называются духами Фаддеева – Попова. Они участвуют лишь во внутренних линиях фейнмановских диаграмм и отсутствуют в наблюдаемых асимптотич. соотношениях. Эффективное действие (14) содержит также нефизич. компоненты поля A_μ, отвечающие продольным и временным квантам. Роль духовых полей состоит в том, чтобы скомпенсировать вклад этих квантов и обеспечить унитарность матрицы рассеяния в пространстве физич. асимптотич. состояний.

Действие (14) инвариантно относительно преобразований, затрагивающих помимо К. п. A_μ духовые поля c, $\bar{c}$. Эта симметрия, заменяющая калибровочную инвариантность, получила название БРС-симметрии (C. Becchi, A. Ronet, R. Stora, 1976). БРС-симметрия лежит в основе альтернативного метода квантования К. п., при к-ром теория с самого начала рассматривается в расширенном пространстве, содержащем помимо физич. квантов духовые поля, а также продольные и временные кванты, а векторы физич. подпространства $|\Phi\rangle_{\text{физ}}$ выделяются условием

$$Q|\Phi\rangle_{\text{физ}} = 0, \qquad (15)$$

где Q – генератор БРС-преобразований.

Для вычисления вероятностей различных процессов необходимо провести процедуру перенормировки функций Грина К. п., устраняющую расходимости за счет перераспределения масс, зарядов и постоянных нормировки волновых функций. При этом наблюдаемые величины не должны зависеть от конкретного выбора условия калибровки и перенормированная матрица рассеяния должна быть унитарна в пространстве физич. состояний. Необходимым и достаточным условием согласованности перенормировочной процедуры с калибровочной инвариантностью является выполнение соотношений между функциями Грина, к-рые получили название тождеств Славнова–Тейлора (А. А. Славнов, 1972, J. C. Taylor, 1972). Эти соотношения обобщают *Уорда тождества* в электродинамике на случай неабелевых калибровочных полей. Они связаны с БРС-симметрией эффективного действия.

К. п. лежат в основе большинства современных моделей взаимодействия элементарных частиц. Их успешное применение в физике сильных взаимодействий обусловлено в первую очередь явлением асимптотич. свободы. При нек-рых ограничениях на калибровочную группу и число мультиплетов полей материи эффективное взаимодействие полей Янга – Миллса убывает на малых расстояниях или, что то же самое, при больших энергиях. Это явление, получившее название асимптотической свободы, подтверждается целым рядом экспериментов, в частности экспериментами по глубоконеупругому рассеянию.

В то же время на больших расстояниях эффективное взаимодействие неабелевых К. п. растет и теория возмущений по константе связи неприменима. Формально это проявляется в том, что интегралы, соответствующие диаграммам Фейнмана, расходятся при малых импульсах (см. *Инфракрасные расходимости*). В отличие от электродинамики, где существует регулярный метод устранения этих расходимостей, в неабелевых калибровочных теориях подобная процедура отсутствует. Для исследования калибровочных тео-

рий на больших расстояниях используют расчеты на больших компьютерах в рамках решетчатой регуляризации, при к-рой непрерывное пространство-время заменяется дискретной системой точек. Используют также теорию возмущений по параметру, связанному с размерностью калибровочной группы (N^{-1}-разложение), квазиклассич. разложений в окрестности частицеподобных классич. решений (инстантонов). Эти расчеты свидетельствуют в пользу справедливости гипотезы удержания (конфайнмента), согласно к-рой взаимодействие полей Янга – Миллса приводит к тому, что кванты поля Янга – Миллса, а также поля материи, реализующие нетривиальное представление калибровочной группы, в асимптотич. состояниях отсутствуют. Наблюдаемыми являются лишь калибровочно инвариантные объекты типа $(\overline{\Psi}\Psi)$, $\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$, отвечающие синглетным по отношению к калибровочной группе связанным состояниям исходных полей. Однако строгое доказательство гипотезы о конфайнменте пока отсутствует.

В физике слабых взаимодействий используют калибровочно инвариантные модели со спонтанно нарушенной симметрией. В этих моделях квантовые поправки вычисляются в окрестности несимметричного основного состояния. Благодаря эффекту Хиггса поля Янга – Миллса приобретают ненулевую массу; поэтому инфракрасные расходимости в подобных моделях отсутствуют. В то же время техника квантования и перенормировки К. п. практически без изменений переносится и на модели со спонтанно нарушенной симметрией.

Рассматриваются также различные обобщения К. п., в частности суперкалибровочные поля. В этом случае калибровочные преобразования становятся суперпреобразованиями (см. *Суперсимметрия*). Наконец, при расширенном толковании принципа калибровочной инвариантности в эту же схему укладываются гравитационное взаимодействие и модели релятивистских струн.

См. также *Евклидово квантовое поле.*

Лит.: [1] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988; [2] Тейлор Дж., Калибровочные теории слабых взаимодействий, пер. с англ., М., 1978; [3] Иниксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [4] Окунь Л. Б., Лептоны и кварки, М., 1981; [5] Хуанг К., Кварки, лептоны и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1985. *А. А. Славнов.*

КАЛИБРОВОЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – преобразование, описывающее переход к новому базису в зарядовом пространстве полей материи $\Psi(x)$ в окрестности пространственно-временной точки x при одновременном компенсирующем преобразовании *калибровочного поля* $A_\mu(x)$.

Бесконечно малое К. п. $\Psi \to \Psi^\omega$, $A_\mu \to A_\mu^\omega$ можно записать в виде:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha - [A_\mu, \alpha] = \nabla_\mu \alpha,$$
$$\delta \Psi = \Gamma(\alpha)\Psi, \qquad (1)$$

где $\omega(x) \approx 1 + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ принадлежит алгебре Ли группы Ω, $\Gamma(\alpha)$ – представление матрицы α, соответствующее представлению группы Ω, реализуемому полями материи Ψ, ∇_μ – ковариантная производная.

Множество преобразований (1) образует калибровочную группу, к-рую можно формально обозначить как $\widetilde{\Omega} = \prod_x \Omega(x)$.

См. также *Глэшоу–Вайнберга–Салама модель.*

А. А. Славнов.

КАЛИБРОВОЧНОЕ УСЛОВИЕ, калибровки условие, калибровка,– дополнительное условие, накладываемое на поля для выделения однозначных представителей в каждом классе калибровочно эквивалентных конфигураций. К. у. в общем случае имеет вид

$$\Phi(A_\mu, \Psi, x) = 0.$$

Здесь Φ – функционал от полей A_μ, Ψ и точки x, к-рый представляет собой элемент алгебры Ли калибровочной группы Ω. Поэтому число независимых К. у. совпадает с размерностью группы Ω. К. у. должно быть таким, чтобы система уравнений

$$\Phi(A_\mu^\omega, \Psi^\omega, x) = 0 \qquad (1)$$

имела однозначное решение $\omega(x)$. В общем случае для произвольных полей это условие не выполняется, что приводит к так наз. неоднозначности Грибова (В. Н. Грибов, 1978). Обычно квантовая теория строится как теория возмущений вблизи какого-либо основного состояния. В частности, теория возмущений по константе связи g предполагает условие $|gA_\mu| \ll 1$. В этом случае уравнения (1) имеют единственное решение, и К. у. выделяет единственного представителя в каждом калибровочном классе. Наиболее употребительными являются *кулоновская калибровка, лоренцева калибровка, гамильтонова калибровка, аксиальная калибровка* и *светового конуса калибровка.*

Лит.: [1] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988. *А. А. Славнов.*

КАЛИБРОВОЧНЫЙ ИНСТАНТОН – см. *Инстантон.*

КАЛЛАНА – СИМАНЧИКА УРАВНЕНИЯ – см. *Ренормализационная группа*; дифференциальные уравнения.

КАЛОРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ – см. *Состояния уравнение.*

КАЛУЦЫ – КЛЕЙНА ТЕОРИЯ – теория поля в 5-мерном пространстве-времени (одна временная и четыре пространственных координаты), объединяющая электромагнитное и гравитационное взаимодействия на геометрической основе. Предложена Т. Калуцей (Th. Kaluza, 1921) и О. Клейном (O. Klein, 1926). Впоследствии над ее развитием много лет работал А. Эйнштейн (A. Einstein). Дополнительная, пятая координата, вводимая в К.–К. т., является компактной (ее значения лежат на окружности) и имеет настолько малый размер, что для макроскопич. наблюдателя она не заметна (все измеряемые наблюдателем физич. величины не зависят от значений пятой координаты). Основной результат К.–К. т. состоит в том, что лагранжиан гравитационного взаимодействия в 5-мерном пространстве-времени, в качестве к-рого (по аналогии с общей теорией относительности) берется след 5-мерного тензора Риччи, с точки зрения 4-мерного макроскопич. наблюдателя представляется как сумма лагранжиана эйнштейновской теории гравитации в 4-мерном пространстве-времени и лагранжиана максвелловской теории электромагнитного взаимодействия. При этом смешанные компоненты метрич. тензора 5-мерного пространства-времени g_{A4} (где $A = 0, 1, 2, 3$, соответствуют обычным пространственно-временным координатам) интерпретируются как 4-мерный вектор-потенциал электромагнитного поля.

Первоначальная К.–К. т. имеет чисто историч. интерес, поскольку в ней нет места для элементарных частиц с полуцелым спином (фермионов), а также для сильного и слабого взаимодействий. Однако сама идея многомерных единых теорий поля переживает новый расцвет в связи с успехами теорий *суперсимметрии, супергравитации* и *суперструн.* В современных теориях типа К.–К. т. рассматривается искривленное пространство-время размерности $4 + d$ и предполагается, по аналогии с первоначальной К.–К. т., что дополнительные d измерений каким-либо образом компактифицируются в замкнутое d-мерное пространство (в нек-рых вариантах – в d-мерную сферу) с характерными размерами порядка так наз. планковской длины

$$l_{pl} = \sqrt{G\hbar/c^2} \approx 10^{-33}\ \text{см},$$

где G – ньютоновская гравитационная постоянная. Симметрия этого d-мерного пространства определяет внутренние и калибровочные симметрии сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий. В теорию может быть включена суперсимметрия, что позволяет объединить бозоны и фермионы. С точки зрения 4-мерного макроскопич. наблюдателя такая теория содержит бесконечное число

квантованных полей с различными спинами. При этом кванты тех полей, к-рые не зависят от координат d-мерного пространства, имеют массу

$$m \ll m_{pl} = \hbar / l_{pl} c \approx 10^{19}\ \text{ГэВ}/c^2,$$

а остальные поля – очень тяжелые:

$$m \geqslant m_{pl}$$

и поэтому не проявляются в лабораторных экспериментах (m_{pl} – *Планка масса*). Наибольший интерес представляет 10-мерная теория типа К.–К. т. ($d=6$), к-рая возникает в низкоэнергетич. $E \leqslant m_{pl} c$ пределе более фундаментальной теории нелокальных объектов – суперструн. Нек-рые варианты теории суперструн не содержат ультрафиолетовых расходимостей при специальном выборе группы симметрии ($E_8 \times E_8$, к-рая далее нарушается до $E_6 \times E_8$) *великого объединения моделей* сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий. Важно, что эта группа симметрии является удовлетворительной с точки зрения классификации элементарных частиц. *А. А. Старобинский.*

КАМ-ТЕОРИЯ – раздел теории возмущений и теории малых колебаний, в котором изучаются условно-периодические движения в *гамильтоновых системах* и родственных им (главным образом обратимых) системах. Название теории образовано по именам ее авторов – А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера (Т. Moser).

Предмет и основные результаты КАМ-т. Центральным результатом КАМ-т. для гамильтоновых уравнений является следующее утверждение.

Теорема. Типичная гамильтонова система с n степенями свободы обладает для каждого m, $1 \leqslant m \leqslant n$, семейством m-мерных изотропных инвариантных торов, по к-рым происходит условно-периодич. движение с m сильно несоизмеримыми частотами. Объединение всех m-мерных инвариантных торов имеет положительную $2m$-мерную меру.

Слово «типичная» здесь означает, что в функциональном пространстве всех гамильтоновых уравнений, заданных на фиксированном $2n$-мерном симплектич. многообразии, системы с указанным свойством образуют (в C^r-топологии для нек-рого достаточно большого r) непустое открытое множество.

Следствие. Гамильтонова система общего вида на гиперповерхностях уровня гамильтониана не эргодична.

Подмногообразие $\mathcal{L}$ симплектич. многообразия M называется изотропным, если ограничение на $\mathcal{L}$ симплектич. структуры равно нулю. Числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$ называются сильно несоизмеримыми типа $(\varkappa, \tau)$, если для всех $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$

$$|k_1\omega_1 + \ldots + k_m\omega_m| \geqslant \varkappa(|k_1| + \ldots + |k_m|)^{-\tau},$$

где $\varkappa > 0$ и $\tau > m-1$ – нек-рые константы, не зависящие от $\boldsymbol{k}$. Эти константы – одни и те же для частот условно-периодич. движения на всех инвариантных торах из данного семейства.

При $m < n$ инвариантные m-мерные торы называются неполномерными, или маломерными.

Аналогичные теоремы справедливы для обратимых уравнений, точных симплектич. диффеоморфизмов и обратимых диффеоморфизмов, а также для неавтономных гамильтоновых или обратимых уравнений с периодическими по времени правыми частями. В обратимом случае свойство изотропности торов заменяется на инвариантность относительно обращающей инволюции.

КАМ-т. тесно связана с теорией устойчивости движения и теорией адиабатич. инвариантов.

Глобальный и локальный аспекты КАМ-т. Для доказательства существования большого числа инвариантных торов у типичной гамильтоновой или обратимой системы используются следующие два основных подхода.

Глобальный подход: возмущение интегрируемых систем. Рассматривается «невозмущенная» интегрируемая (полностью или лишь на нек-ром подмногообразии) система, в фазовом пространстве к-рой инвариантные торы данной размерности m составляют гладкую $2m$-мерную поверхность. Если эта система удовлетворяет нек-рым известным условиям, то при любом достаточно малом и гладком ее возмущении большинство инвариантных торов не разрушается, а лишь слегка деформируется. Таким образом, окрестность невозмущенной системы в соответствующем функциональном пространстве доставляет искомый пример открытого множества систем, каждая из к-рых имеет много инвариантных торов.

Локальный подход: инвариантные торы около положения равновесия, периодич. решения или неподвижной точки. Рассматривается система $\mathfrak{M}$, заданная вблизи критич. элемента Γ – положения равновесия (для уравнений), периодич. траектории (для автономных уравнений) или неподвижной точки (для диффеоморфизмов). Если эта система удовлетворяет известным условиям $\mathfrak{A}$, то в каждой окрестности элемента Γ она обладает большим числом инвариантных m-мерных торов, к-рые при приближении к Γ располагаются все гуще. При этом любая система, достаточно близкая к $\mathfrak{M}$, имеет критич. элемент Γ', близкий к Γ, и также удовлетворяет условиям $\mathfrak{A}$. Таким образом, окрестность системы $\mathfrak{M}$ в соответствующем функциональном пространстве доставляет искомый пример открытого множества систем, каждая из к-рых имеет много инвариантных торов.

При локальном подходе роль невозмущенной системы играет нормальная форма около критич. элемента Γ, а роль величины возмущения – расстояние до Γ.

Почти все КАМ-теоремы можно расклассифицировать по следующим признакам:

а) тип симметрии – гамильтоновость или обратимость;

б) тип динамич. системы – автономные дифференциальные уравнения (то есть векторные поля), диффеоморфизмы или неавтономные периодические по времени уравнения;

в) ситуация, в к-рой доказывается существование инвариантных торов, – глобальная или локальная;

г) размерности фазового пространства, многообразия неподвижных точек обращающей инволюции (в обратимом случае) и инвариантных торов;

д) класс гладкости динамич. системы.

Теорема Колмогорова. Значительная часть исследований в КАМ-т. посвящена изучению инвариантных n-мерных торов гамильтоновых систем с n степенями свободы, близких к интегрируемым.

Пусть

$$\dot{I} = -\partial H/\partial\varphi, \quad \dot{\varphi} = \partial H/\partial I$$

– система с гамильтонианом

$$H(I, \varphi, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon),$$

где $I = (I_1, \ldots, I_n)$ – переменные действия, изменяющиеся в нек-рой (конечной) области $D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in T^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ – угловые переменные, а $\varepsilon \in \mathbb{R}$ – малый параметр. Невозмущенная система (с гамильтонианом $H_0(I)$) интегрируема, и ее фазовое пространство $D \times T^n$ расслоено на инвариантные n-мерные торы $\{I = \text{const}\}$, движение на к-рых условно-периодично с вектором частот $\omega(I) = \partial H_0(I)/\partial I$.

Теорема 1 (теорема Колмогорова, или основная теорема КАМ-т., см. [1]–[6]). Если гамильтониан H имеет гладкость C^r, $r > 2n$, по I и φ, а невозмущенная система невырождена ($\det \|\partial\omega/\partial I\| \neq 0$) или изоэнергетически невырождена $\det \begin{Vmatrix} \partial\omega/\partial I & \omega \\ \omega & 0 \end{Vmatrix} \neq 0$, то при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ в фазовом пространстве возмущенной системы содержатся инвариантные n-мерные торы (близкие к инвариантным торам невозмущенной системы), по к-рым происходит условно-периодич. движение с сильно несоизмеримыми частотами. Мера дополнения к объединению этих

торов имеет порядок $\sqrt{|\varepsilon|}$. В случае изоэнергетич. невырожденности инвариантные торы образуют большинство на каждом многообразии уровня H. Тор с частотами условно-периодич. движения типа $(\varkappa, \tau)$, где $n-1<\tau<(r/2)-1$, имеет гладкость C^{ρ} для любого $\rho<r-\tau-1$, а индуцируемый на нем поток – гладкость $C^{\rho-\tau}$. Если гамильтониан H бесконечно дифференцируем или аналитичен, то таковы и инвариантные торы и индуцируемые на них потоки.

Инвариантные торы возмущенной системы, существование к-рых гарантируется этой теоремой, называются колмогоровскими, а их объединение – колмогоровским множеством.

В первоначальных формулировках теоремы 1 (см. [1]–[4]) невозмущенная и возмущенная системы предполагались аналитическими. Ю. Пешель (J. Pöschel, 1980) доказал теорему 1 для невырожденного аналитического H_0 и возмущения εH_1 класса C^r, $r>2n$ (см. [6]), а Д. Саламон (D. Salamon, 1986, препринт) обобщил ее на случай, когда и H_0 имеет гладкость C^r, $r>2n$.

Здесь и далее под классами гладкости C^l понимаются гельдеровы пространства, так что числа l не обязательно целые.

Замечание 1. Пусть $\tau>n-1$ зафиксировано и Ω – область значений невозмущенных частот $\omega(I)$, а $\Omega_\varkappa$ – множество векторов из Ω типа $(\varkappa, \tau)$, где $\varkappa>0$. Мера дополнения $\Omega\setminus\Omega_\varkappa$ канторова множества $\Omega_\varkappa$ до Ω имеет порядок $\varkappa$. Если H_0, $H_1\in C^r$, где $r>2\tau+2>2n$, то существует такое $K>0$, что при $|\varepsilon|<K\varkappa^2$ для любого $\xi\in\Omega_\varkappa$ возмущенная система имеет инвариантный тор с вектором частот ξ.

Замечание 2. Пусть $\tau>n-1$ зафиксировано, H_0 аналитичен и $H_1\in C^r$, где $r>3\tau+2>3n-1$. Пусть $\xi\in\Omega_\varkappa$ и $|\varepsilon|<K\varkappa^2$. Тогда отличие инвариантного тора возмущенной системы с вектором частот ξ от инвариантного тора невозмущенной системы с этим же вектором частот не превышает $K_1|\varepsilon|\varkappa^{-1}$, где K_1 не зависит от $\varkappa$ и ε.

Замечание 3. Пусть $\tau>n-1$ фиксировано, H_0 аналитичен и $H_1\in C^r$, где $r>3\tau+2>3n-1$. Тогда при $|\varepsilon|<K\varkappa^2$ колмогоровские торы с частотами из $\Omega_\varkappa$ образуют гладкое (в нек-ром смысле) расслоение над $\Omega_\varkappa$, на пространстве к-рого возмущенная система в нек-ром смысле вполне интегрируема (см. [6]).

Инвариантные торы $\{I=\text{const}\}$ невозмущенной системы с соизмеримыми частотами $\omega_1(I)$, ..., $\omega_n(I)$ (так наз. резонансные торы; они всюду плотны, но их объединение имеет меру нуль) разрушаются при сколь угодно малом возмущении, многие из них при этом рассыпаются на конечные наборы инвариантных торов меньших размерностей (см. [12]). На месте резонансных торов остаются так наз. резонансные зоны, содержащие: 1) сложные бесконечные иерархич. структуры из инвариантных торов разных размерностей от 1 до n; 2) асимптотич. поверхности, состоящие из фазовых траекторий, приближающихся к этим торам при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$; 3) стохастич. слои с хаотич. поведением фазовых кривых (см. [6]).

Из теоремы 1 вытекает отсутствие эволюции переменных действия I в возмущенной системе для большинства (по мере) начальных условий. При $n=2$ двумерный инвариантный тор делит трехмерное многообразие уровня гамильтониана. Поэтому при $n=2$ в системах, близких к изоэнергетически невырожденным интегрируемым, эволюция переменных действия не возможна ни для каких начальных условий (см. [3]): для любого решения $(I(t), \varphi(t))$ возмущенной системы

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|I(t)-I(0)|<\text{const}\sqrt{|\varepsilon|}.$$

В то же время при $n>2$ фазовые траектории, выйдя из какой-либо точки (I_0, φ_0) вне колмогоровского множества, могут уходить далеко от тора $\{I=I_0\}$ вдоль резонансных зон (так наз. диффузия Арнольда, 1964; см. [5], [6]). Как показал Н. Н. Нехорошев (см. [5], [6]), скорость этой диффузии для аналитических H_0 и H_1 экспоненциально мала. Точнее, если H_0 удовлетворяет нек-рым дополнительным условиям общности положения, то для достаточно малых ε для всех решений $(I(t), \varphi(t))$ выполнено $|I(t)-I(0)|<|\varepsilon|^b$ при $|t|\leqslant|\varepsilon|^{-1}\exp(|\varepsilon|^{-a})$, где константы $a>0$, $b>0$ зависят только от H_0.

Примеры КАМ-теорем.

Локальный аналог теоремы 1. Пусть гамильтонова система с n степенями свободы и достаточно гладким гамильтонианом H имеет положение равновесия O, причем все собственные числа $\pm i\omega_1$, ..., $\pm i\omega_n$ линеаризованной системы в O чисто мнимы и нерезонансны до порядка $l\geqslant4$ включительно, то есть

$$k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n\neq0$$

при $k\in\mathbb{Z}^n$, $0<|k_1|+\ldots+|k_n|\leqslant l$. Тогда в окрестности O функцию H можно привести к нормальной форме Биркгофа (см. [5], [6], [9]):

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^n\omega_i\zeta_i+\sum_{i,j=1}^n\Omega_{ij}\zeta_i\zeta_j+f(\zeta)+O(|p|^{l+1}+|q|^{l+1}),$$

где $p\in\mathbb{R}^n$ и $q\in\mathbb{R}^n$ – канонически-сопряженные переменные,

$$\zeta_i=(p_i^2+q_i^2)/2 \text{ и } f=O(|\zeta|^3),$$

здесь $\Omega_{ij}=\Omega_{ji}$.

Теорема 2 (см. [4], [6]). Если система с гамильтонианом H невырождена ($\det(\Omega)\neq0$) или изоэнергетически невырождена $\left(\det\begin{Vmatrix}\Omega & \omega\\ \omega & 0\end{Vmatrix}\neq0\right)$, то в любой окрестности O она имеет инвариантные n-мерные торы, близкие к торам $\{\zeta=\text{const}\}$, по к-рым происходит условно-периодич. движение с сильно несоизмеримыми частотами. Относительная мера объединения этих торов в полидиске $\{\zeta_i<\varepsilon, i=1, \ldots, n\}$ не меньше $1-O(\varepsilon^{(l-3)/4})$. В изоэнергетически невырожденной системе инвариантные торы занимают большую часть каждого многообразия уровня H вблизи O.

Инвариантные торы, о к-рых идет речь в этой теореме, также часто называют колмогоровскими, а их объединение – колмогоровским множеством.

При $n=2$ из теоремы 2 вытекает устойчивость положения равновесия O в случае изоэнергетич. невырожденности.

Имеется аналог теоремы 1 для неполномерных торов. Невозмущенный гамильтониан (достаточно высокой гладкости) имеет вид $H=H(I, \varphi, p, q)$, где $I\in\mathbb{R}^m$, $\varphi\in T^m$, $p\in\mathbb{R}^{n-m}$ и $q\in\mathbb{R}^{n-m}$, причем p и q изменяются в окрестности O, а симплектич. структура есть

$$dI\wedge d\varphi+dp\wedge dq.$$

При $p=q=0$

$$H_p=H_q=0,\ H_\varphi=0;$$

здесь индексы означают дифференцирование по соответствующим переменным. Невозмущенная система имеет инвариантную $2m$-мерную поверхность $\Pi=\{p=q=0\}$, расслоенную на инвариантные m-мерные торы $\{p=q=0,\ I=\text{const}\}$, движение на к-рых условно-периодично с вектором частот $\omega(I)=H_I|_{p=q=0}$. Эволюция переменных p и q вблизи Π описывается уравнением

$$\begin{Vmatrix}\dot p\\ \dot q\end{Vmatrix}\approx M(I,\varphi)\begin{Vmatrix}p\\ q\end{Vmatrix},\quad M(I,\varphi)=\begin{Vmatrix}-H_{qp} & -H_{qq}\\ H_{pp} & H_{pq}\end{Vmatrix}_{|p=q=0}$$

Теорема 3. Пусть $\det(\omega_I)\neq0$ и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

а) ни при каких I и φ матрица $M(I, \varphi)$ не имеет чисто мнимых собственных чисел, причем ее $(n-m)$-мерные ин-

вариантные подпространства, отвечающие собственным числам в левой полуплоскости и в правой полуплоскости, не зависят от φ;

б) матрица $M(I)=M(I,\varphi)$ не зависит от φ и пара $(\omega(I), M(I))$ удовлетворяет нек-рым условиям нерезонансности.

Тогда при любом достаточно малом возмущении гамильтониана H большинство инвариантных торов, составляющих поверхность П, не разрушается, а лишь немного деформируется. По выжившим m-мерным торам происходит условно-периодич. движение с сильно несоизмеримыми частотами.

Эта теорема была доказана в работах Ю. Мозера (см. [8]), Ю. Н. Бибикова (1973), С. Граффа (S. Graff, 1974) и Э. Цендера (E. Zehnder, 1976) для различных вариантов условия а) и в работах В. К. Мельникова (1965, 1968), Л. Элиассона (L. Eliasson, 1988) и Ю. Пёшеля (см. [10]) для различных вариантов условия б). Этим же авторам принадлежит и локальный аналог теоремы 3 (то есть аналог теоремы 2 для неполномерных торов). (Соответствующая библиография приведена в [10]–[12].) Неполномерные торы в резонансных зонах гамильтоновых систем, близких к вполне интегрируемым, рассмотрены Д. В. Трещевым (см. [12]). Неполномерные торы для систем с вырожденным гамильтонианом построены Б. Либерманом (B. Lieberman, 1972, см. [11]).

КАМ-теоремы о неполномерных торах в обратимых системах доказаны Ю. Шойрле (J. Scheurle, 1979, 1987) и М. Б. Севрюком (см. [11]). И. О. Парасюк построил теорию инвариантных торов в обратимой (1982) или гамильтоновой (1984) системе, размерность к-рых превышает половину размерности фазового пространства (см. [11]).

Получен аналог теоремы 1 для обратимых диффеоморфизмов. Невозмущенный диффеоморфизм $A:(I,\varphi)\mapsto(I,\varphi+I)$, где $I\in\mathbb{R}^n$ и $\varphi\in T^n$, обратим относительно инволюции $G:(I,\varphi)\mapsto(I,-\varphi)$. Все фазовое пространство расслоено на n-мерные торы $\{I=\text{const}\}$, инвариантные относительно A и G.

Теорема 4 (М. Б. Севрюк, 1986, [11]). Для любых аналитич. отображений A' и G', достаточно близких к A и G соответственно и удовлетворяющих условию обратимости $A'G'A'=G'$, фазовое пространство содержит массивное множество n-мерных торов, инвариантных относительно A' и G' и близких к торам $\{I=\text{const}\}$. Кроме того, $(G')^2=\text{Identity}$, то есть G' является инволюцией.

Локальный аналог этой теоремы можно одновременно рассматривать и как аналог теоремы 2 для обратимых диффеоморфизмов.

Методы доказательств и историческая справка. Начало КАМ-т. положила работа А. Н. Колмогорова [1], содержавшая теорему 1 (в несколько иной формулировке). Идея доказательства этой теоремы, предложенная в [1] (см. также [2]), состоит в том, чтобы зафиксировать набор сильно несоизмеримых частот ω и искать инвариантный тор возмущенной системы с частотами $\omega_1,\ldots,\omega_n$ с помощью быстросходящейся итерационной процедуры, как в методе касательных Ньютона для нахождения корней уравнений. При этой процедуре строится бесконечная последовательность канонич. замен координат, области определения к-рых стягиваются к искомому тору.

Основная трудность при исследовании возмущений условно-периодич. движений связана с появлением в любой вычислительной схеме так наз. малых знаменателей – выражений вида

$$k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n,\quad k\in\mathbb{Z}^n,$$

на к-рые приходится делить и к-рые часто приводят к расходимости всей процедуры (см. [6]). В методе Колмогорова возмущенный гамильтониан после N-й замены координат зависит от фазы φ только в членах порядка ε^{2^N} (без учета малых знаменателей), и подобная квадратичная «сверхсходимость» парализует влияние малых знаменателей, если частоты $\omega_1,\ldots,\omega_n$ сильно несоизмеримы.

Доказательство теоремы Колмогорова было впервые подробно проведено В. И. Арнольдом (см. [3]). Он обобщил эту теорему на случай так наз. собственного вырождения, когда невозмущенный гамильтониан не зависит от нек-рых переменных действия (в [4] собственное вырождение рассмотрено в ситуации, локальной по этим переменным). Доказательство аналога теоремы Колмогорова для точных симплектич. диффеоморфизмов было впервые подробно изложено В. И. Арнольдом и А. Авецом (A. Avez) в 1967 (см. [5]).

Найденный А. Н. Колмогоровым метод борьбы с малыми знаменателями широко используется и в задачах, не связанных с доказательствами существования инвариантных торов (см., напр., [9]).

В работах А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда невозмущенная и возмущенная системы предполагались аналитическими. На возмущения конечной гладкости теорию распространил Ю. Мозер, к-рый предложил на каждом шаге итерации применять процедуру сглаживания, восходящую к Дж. Нэшу (J. Nash). Ю. Мозер [7] доказал теорему об инвариантных кривых, сохраняющих площадь отображений двумерного кольца, в предположении, что возмущенный диффеоморфизм имеет гладкость C^{333}. Впоследствии Х. Рюссман (H. Rüssmann, 1970, см. [6], [9]) в этой же ситуации понизил требуемую гладкость до C^5 (фактически здесь достаточна гладкость C^r, $r>3$, см. [9]). Ю. Пешель (1980, см. [6]) показал, что в теореме Колмогорова для возмущенного гамильтониана достаточно иметь гладкость C^r, $r>2n$. Д. Саламон (1986, препринт) заметил, что невозмущенный гамильтониан также может быть не аналитическим, а лишь C^r-гладким, $r>2n$.

Разработано несколько весьма различных методов доказательства КАМ-теорем. Нек-рые из этих методов, основанные, напр., на достаточно общих теоремах о неявной функции (Э. Цендер, 1976, см. [10]–[12]) или на лагранжевом формализме (Д. Саламон и Э. Цендер, 1989, см. [10]) обходятся без бесконечной последовательности замен координат или существенно упрощают построение последней.

КАМ-теоремы для обратимых систем были впервые получены в 1967 Ю. Мозером (см. [8]), Ю. Н. Бибиковым и В. А. Плиссом (см. [11]). Обратимая КАМ-т. почти параллельна гамильтоновой (см. [9], [11]).

Последние достижения в КАМ-т. связаны, во-первых, с вариационным принципом Персиваля (I. C. Percival, 1979) для колмогоровских торов, обратными КАМ-теоремами (об отсутствии инвариантных торов при нек-рых условиях) и теорией так наз. канторотороров Обри–Мэзера (S. Aubry, J. N. Mather, 1982, 1983, см. [6]), а во-вторых,– с теоремами типа КАМ для бесконечномерных гамильтоновых систем, полученными С. Б. Куксиным (1987, 1988, см. [11]) и Ю. Пешелем (см. [10]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Доклады АН СССР», 1954, т. 98, № 4, с. 527–30; [2] его же, в кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме, 1954, М., 1961, с. 187–208; [3] Арнольд В. И., «Успехи математич. наук», 1963, т. 18, в. 5, с. 13–40; [4] его же, там же, 1963, т. 18, в. 6, с. 91–192; [5] его же, Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989; [6] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, Динамические системы–3, М., 1985, с. 5–304; [7] Мозер Ю., «Математика», 1962, т. 6, № 5, с. 51–67 (пер. с англ., оригинал 1962); [8] его же, «Успехи математич. наук», 1969, т. 24, в. 2, с. 165–211 (англ. оригинал 1967); [9] его же, «Ann. Math. Stud.», v. 77, Princeton, 1973; [10] Poschel J., «Math. Z.», 1989, Bd 202, H. 4, p. 559–608; [11] Севрюк М. Б., в кн.: Труды семинара имени И. Г. Петровского, в. 14, М., 1989, с. 109–24; [12] Трещёв Д. В., «Математич. сб.», 1989, т. 180, № 10, с. 1325–46.

М. Б. Севрюк.

КАНОНИЧЕСКАЯ НАБЛЮДАЕМАЯ – см. *Канонические коммутационные соотношения.*

КАНОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ – см. *Проективное пространство.*

КАНОНИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ – см. *Аномальная размерность.*

КАНОНИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ в квантовой механике – квантово-механический аналог сопряженности обобщенных координат и импульсов в *гамильтоновом формализме* классической механики (см. *Канонические переменные*). Сопряженными считаются наблюдаемые Q_j, P_j; $j=1, ..., n$, подчиняющиеся *каноническим коммутационным соотношениям.* Проблема К. с. в квантовой механике состоит в том, что канонич. коммутационные соотношения Вейля, в силу *Стоуна – Неймана теоремы* единственности, определяют Q_j, P_j однозначно с точностью до унитарной эквивалентности и поэтому не оставляют непосредственной возможности для описания пар канонически сопряженных величин со спектром, отличным от лебегова спектра на $\mathbb{R}$ (таких, как время – энергия, угол – угловой момент, фаза – число квантов и т. п.) (см. [1], [2]).

Канонич. коммутационное соотношение Вейля для пары вещественных наблюдаемых X, Y равносильно соотношению

$$e^{-ixY}\mathcal{M}(B+x)e^{ixY}=\mathcal{M}(B);\ x\in\mathfrak{X},\ B\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}), \qquad (1)$$

где $\mathfrak{X}$ – вещественная прямая, $\mathcal{M}(\cdot)$ – спектральная мера наблюдаемой X. Возможный путь решения проблемы К. с. в квантовой механике состоит в том, что в качестве $\mathcal{M}(\cdot)$ в соотношении (1) допускаются произвольные *разложения единицы.* Напр., если $Y=P^2/2m$ – оператор энергии одномерной свободной частицы, то соотношению (1) удовлетворяет обобщенная спектральная мера максимального симметричного (несамосопряженного) оператора времени

$$X=\frac{m}{2}(P^{-1}Q+QP^{-1}).$$

Более общим образом, пусть в (1) множество значений обобщенной координаты $\mathfrak{X}$ есть однопараметрич. группа Ли, то есть вещественная прямая $\mathbb{R}$ (случай линейной координаты) или окружность $\mathbb{T}$ (случай циклической координаты), а Y – самосопряженный оператор, спектр к-рого лежит в дуальной группе $\hat{\mathfrak{X}}$ (то есть в $\mathbb{R}$ или в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$). Тогда $x\to V_x=\exp(ixY)$ есть унитарное представление группы $\mathfrak{X}$, а соотношение (1) определяет ковариантное разложение единицы $\mathcal{M}(\cdot)$ на $\mathfrak{X}$, описывающее *квантовое измерение* обобщенной координаты. При таком подходе роль канонически сопряженных величин играет пара $(V_{(\cdot)}, \mathcal{M}(\cdot))$, образующая *обобщенную систему импримитивности.* В случае $\mathfrak{X}=\mathbb{T}$ последняя существует всегда, а в случае $\mathfrak{X}=\mathbb{R}$ при условии, что спектр оператора Y абсолютно непрерывен.

Операторы (V_x, U_y), где $U_y=\int_{\mathfrak{X}} e^{ixy}\mathcal{M}(dx)$, удовлетворяют канонич. коммутационному соотношению Вейля, хотя операторы U_y не унитарны. Имеет место обобщение соотношения неопределенностей для пары $(V_{(\cdot)}, \mathcal{M}(\cdot))$:

$$\Delta_y(\mathcal{M})D(Y)\geqslant\tfrac{1}{4};\quad y\in\hat{\mathfrak{X}}\setminus 0, \qquad (2)$$

где $D(Y)$ – дисперсия наблюдаемой Y в квантовом состоянии ρ, а

$$\Delta_y(\mathcal{M})=y^{-2}\left[\left|\int_{\mathfrak{X}}e^{ixy}\mu(dx)\right|^{-2}-1\right],$$

причем $\mu(\cdot)=\mathrm{Tr}_\rho\mathcal{M}(\cdot)$ – распределение вероятностей обобщенной координаты. В случае $\mathfrak{X}=\mathbb{R}$ и $y\to 0$ неравенство (2) переходит в соотношение неопределенностей Гейзенберга – Вейля. С физич. точки зрения основной интерес представляют экстремально точные измерения обобщенной координаты, минимизирующие функционал неопределенности $\Delta_y(\mathcal{M})$, к-рые описаны в [3].

Лит.: [1] Каррузерс П., Ньето М., в сб.: Когерентные состояния в квантовой теории, пер. с англ., М., 1972, с. 71–146; [2] Холево А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980; [3] его же, «Lect. Notes in Math.», 1984, v. 1055, p. 153–72.

А. С. Холево.

КАНОНИЧЕСКИЕ КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ – алгебраические соотношения, выражающие условия квантования классической механической системы. В простейшем случае системы с n степенями свободы канонические коммутационные соотношения Гейзенберга имеют вид

$$[Q_j, Q_k]=0,\ [P_j, P_k]=0,\ [Q_j, P_k]=i\hbar\delta_{jk}I;\ j, k=1, ..., n, \qquad (1)$$

где Q_j – наблюдаемые координат, P_j – наблюдаемые импульсов, называемые в совокупности каноническими наблюдаемыми, I – единичный оператор, $[X, Y]$ – *коммутатор* операторов X, Y в гильбертовом пространстве H. Соотношения (1) являются инфинитезимальной формой «глобальных» канонических коммутационных соотношений Вейля (см. [1]):

$$V_xU_y=\exp i(x, y)U_yV_x;\ x\in\mathfrak{X},\ y\in\hat{\mathfrak{X}}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathfrak{X}=\hat{\mathfrak{X}}=\mathbb{R}^n$, $(x, y)=\sum_{j=1}^n x_jy_j$, а $x\to V_x$, $y\to U_y$ – непрерывные унитарные представления аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ в H. Доказывается, что

$$V_x=\exp i\sum_{j=1}^n x_jP_j,\quad U_y=\exp i\sum_{j=1}^n y_jQ_j,$$

где $x=(x_1, ..., x_n)$, $y=(y_1, ..., y_n)$, а P_j, Q_j – самосопряженные операторы, удовлетворяющие на плотном инвариантном подпространстве соотношениям (1) (при $\hbar=1$). Переход от соотношений типа (1) к (2) нетривиален и возможен лишь при выполнении дополнительных условий (см. [7]).

Для нерелятивистской квантовой частицы ($n=3$) соотношения (2) имеют прямой кинематич. смысл: они выражают перестановочность (в пространстве состояний) пространственных трансляций V_x и бустов U_y, вытекающую из принципа галилеевой относительности (см. [4]). Для более общих систем (2) вводится как формальное условие квантования; напр. $\mathfrak{X}$ может быть произвольной абелевой локально компактной группой, $\hat{\mathfrak{X}}$ – дуальной группой, а множитель $\exp i(x, y)$ заменяется значением характера $y\in\hat{\mathfrak{X}}$ на элементе $x\in\mathfrak{X}$.

В квантовой теории поля и статистич. механике рассматриваются К. к. с. (2), где $\mathfrak{X}=\hat{\mathfrak{X}}$ является нек-рым вещественным предгильбертовым пространством основных функций на пространственном или пространственно-временном континууме.

Представлением канонических коммутационных соотношений называется всякая конкретная пара (V, U), удовлетворяющая соотношениям (2). В случае конечного n, в силу *Стоуна – Неймана теоремы* единственности, все неприводимые представления К. к. с. унитарно эквивалентны. Выбор того или иного представления диктуется удобством вычислений в данной конкретной задаче. Наиболее употребительны: *Шредингера представление*, диагонализующие операторы Q_j, *импульсное представление*, диагонализующее операторы P_j, представление Фока – Кука, диагонализующее операторы чисел заполнения (см. *Фока пространство*) и представление в пространстве аналитич. функций, диагонализующее несамосопряженные операторы рождения Q_j-iP_j (см. [3], [4]).

Если $\mathfrak{X}$ бесконечномерно, как в квантовой теории поля и статистич. механике, то существует континуальное множество неэквивалентных представлений К. к. с. (см. [2]). Подробно изучены продакт-представления, а также представления, отвечающие так наз. квазисвободным состояниям (см. [6], [5]). Для них найдена классификация типов и получены необходимые и достаточные условия эквивалентности.

См. также *Перестановочные соотношения.*

Лит.: [1] Вейль Г., Теория групп и квантовая механика, пер. с англ., М., 1986; [2] Сигал И., Математические проблемы реляти-

вистской физики, пер. с англ., М., 1968; [3] Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А., Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, Л., 1980; [4] Холево А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980; [5] его же, «Теоретич. и математич. физика», 1972, т. 13, с. 184–99; [6] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [7] Jørgensen P. E. T., Moore R. T., Operator commutation relations, Dordrecht, 1984.

А. С. Холево.

КАНОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ в окрестности единицы на группе Ли – 1) К. к. первого рода. Отображение $x \to \exp(x)$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в соответствующую группу Ли G устанавливает взаимно однозначное отображение окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ и окрестности единицы в G. Таким образом, мы получаем локальную систему координат на группе Ли.

2) К. к. второго рода. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – базис в $\mathfrak{g}$. Пусть s_i – достаточно малые числа. Тогда $\exp(s_1 x_1) \ldots \exp(s_n x_n)$ – точка на группе G с координатами $s_1, \ldots, s_n$. *Ю. А. Неретин.*

КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ – независимые между собой переменные, входящие в так называемые канонические уравнения механики (см. *Гамильтона уравнения*) и определяющие состояние механической системы в любой момент времени. Число К. п. равно $2s$, где s – число степеней свободы системы. В качестве К. п. обычно выбирают обобщенные координаты q_i и обобщенные импульсы p_i, $i = 1, 2, \ldots, s$.

С помощью так наз. *канонических преобразований* можно перейти от q_i и p_i к другим К. п. $Q_i(q_i, p_i, t)$, $P_i(q_i, p_i, t)$, к-рые могут иметь другой физич. смысл.

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ – см. *Гамильтона уравнения.*

КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ – система статистической механики, состоящая из фиксированного числа частиц, распределенных с плотностью $1/v$ в конечной области Λ с объемом V. Они возникают, когда системы обмениваются с термостатом только энергией, но не частицами, и все находятся в одинаковых условиях. Состояния систем в рамках К. а. описываются функцией распределения вероятностей на фазовом пространстве или последовательностью частичных функций распределения, к-рые являются решениями *Лиувилля уравнения* или *Боголюбова уравнения* соответственно.

См. также *Термодинамические функции.*

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Петрина Д. Я. и др., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1975.

Д. Я. Петрина.

КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ Гиббса – см. *Статистический ансамбль.*

КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР Маслова – см. *Маслова канонический оператор.*

КАНОНИЧЕСКИЙ *H*-ПРОЦЕСС – см. *Квантовый случайный процесс.*

КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ – см. *Гамильтонов формализм.*

КАНОНИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ аналитической функции – см. *Аналитическое продолжение.*

КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРУППА; проективное представление – отображение, сопоставляющее *каноническому преобразованию* g оператор T_g, задающий в *квазиклассическом приближении* связь между волновыми функциями ψ_1 и ψ_2 для одного и того же состояния в представлениях, связанных преобразованием $g: \psi_2 = T_g \psi_1$. Ядро оператора g задается канонич. оператором Маслова на графике $\Gamma_g \subset M \times M$ преобразования g ((M, ω) – фазовое пространство системы; $M \times M$ снабжается канонич. формой $\Omega = \pi_1^* \omega - \pi_2^* \omega$, π_i – проекция на i-й сомножитель). Основное свойство проективного представления К. п. г.: $T_g^* \hat{H} T_g = \hat{G}$, где $G(q, p) = H(g(q, p))$, для любого гамильтониана $H(q, p)$ (см. [1]). Предложено обобщение проективного представления К. п. г. на случай асимптотик по гладкости (см. [2]).

Мультипликатор χ проективного представления К. п. г., определяемый соотношением

$$T_{g_1} T_{g_2} = \chi(g_1, g_2) T_{g_1 g_2} + O(\hbar),$$

играет важную роль в топологии симплектич. многообразий (см. [3]).

Лит.: [1] Фок В. А., Начала квантовой механики, 2 изд., М., 1976; [2] Егоров Ю. В., «Успехи математич. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 235–36; [3] Карасев М. В., Маслов В. П., там же, 1984, т. 39, в. 6, с. 115–73.

В. Е. Назайкинский.

КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ в квантовой механике – квантование на основе гамильтонова (иначе – канонического) формализма, аналогичного *гамильтонову формализму* классической механики.

В канонич. формализме основными переменными являются обобщенные координаты q_k и сопряженные им (относительно функции Лагранжа L или функции Гамильтона H) обобщенные (канонические) импульсы $p_k = \partial L / \partial \dot{q}$. Выражая функцию Гамильтона консервативной системы с конечным числом степеней свободы N (полную энергию системы) через канонич. переменные q_k, p_l ($k, l = 1, 2, \ldots, N$), уравнения движения в классич. механике можно записать в виде:

$$\dot{F} = \{F, H\}, \tag{1}$$

где

$$\{A, B\} = \sum_l \left(\frac{\partial A}{\partial q_l} \frac{\partial B}{\partial p_l} - \frac{\partial B}{\partial q_l} \frac{\partial A}{\partial p_l} \right) \tag{2}$$

– классич. скобка Пуассона, а $F(q, p)$ – динамич. переменная, не зависящая явно от времени (через q, p обозначена совокупность всех q_k, p_l). Поэтому, в частности,

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}, \ \{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0, \tag{3}$$

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\}, \ \dot{p}_l = \{p_l, H\} \tag{4}$$

(δ_{kl} – символ Кронекера).

Постулат К. к. состоит в замене переменных q, p на соответствующие операторы, действующие на волновую функцию состояния, причем *перестановочные соотношения* для этих операторов и квантовые уравнения движения для них получаются из (3) и (4) по «правилу соответствия»: классич. скобка Пуассона заменяется на квантовую скобку Пуассона

$$\{A, B\} \to \{A, B\}_{\text{квант}} = \frac{1}{i\hbar} [A, B], \tag{5}$$

определенную через коммутатор операторов A, B:

$$[A, B] \equiv AB - BA.$$

Поэтому формулы (3) превращаются в коммутационные соотношения

$$[q_k, p_l] = i\hbar \delta_{kl}, \ [q_k, q_l] = [p_k, p_l] = 0, \tag{6}$$

а квантовые уравнения движения принимают вид

$$i\hbar \dot{F}(q, p) = [F(q, p), H(q, p)], \tag{7}$$

где H – *гамильтониан* квантовомеханич. системы.

В квантовой теории поля формулы К. к. принимают специфич. форму, отражающую бесконечное число степеней свободы и непрерывный характер переменных, к-рыми характеризуется поле. В качестве обобщенных координат оказывается естественным выбрать значения функции поля $\varphi(x, t)$ в какой-либо произвольный, но фиксированный момент времени $t = t_0$:

$$q_k \to q(x) = \varphi(x, t_0).$$

Индекс k, таким образом, становится непрерывным и трехмерным. Канонич. импульс $\pi(x, t_0)$ удобно определить через *лагранжиан* поля (точнее через плотность лагранжиана) L:

$$\pi(x, t_0) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}(x, t_0)}. \tag{8}$$

Тогда перестановочные соотношения для обобщенных координат и импульсов поля примут «непрерывный» вид так

наз. одновременных перестановочных соотношений:

$$[\varphi(x, t_0), \pi(x', t_0)] = i\hbar\delta(x-x'),$$

$$[\varphi(x, t_0), \varphi(x', t_0)] = [\pi(x, t_0), \pi(x', t_0)] = 0 \qquad (9)$$

[$\delta(x-x')$ – трехмерная функция Дирака], а форма уравнений движения по сравнению с (7) не изменится.

В квантовой теории релятивистских полей важную роль играют ковариантные перестановочные соотношения вида:

$$[\varphi(x, t), \varphi(x', t')] = i\hbar\Delta(x-x', t-t') = i\hbar\Delta(x-x'), \quad (10)$$

где Δ – нек-рая перестановочная функция (x, x' – четырехмерные координаты). Переход от одновременных перестановочных соотношений (9) к разновременным (10) требует решения уравнений движения для поля $\varphi(x)$ и на практике оказывается возможным лишь для свободных полей.

Лит.: [1] Гайтлер В., Квантовая теория излучения, пер. с англ., [2 изд.], М., 1956, гл. 2; [2] Вентцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, пер. с нем., М.–Л., 1947, гл. 1; [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 2 изд., 1990, § 6. *Д. В. Ширков.*

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – преобразование

$$q \to Q(p, q),\ p \to P(p, q)$$

(обобщенных) координат и (обобщенных) импульсов, сохраняющие *Пуассона скобки*:

$$\{P_i, Q_j\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \right) = \{p_i, q_j\} = \delta_{ij},$$

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0,$$

$k = 1, \ldots, n$, n – число степеней свободы системы, δ_{ij} – символ Кронекера. К. п. сохраняют канонич. вид *Гамильтона уравнений* и нормировку *Гамильтона функции* $H(p, q, t)$. При К. п. фигурирующее в вариационном *наименьшего действия принципе* выражение

$$\sum_k p_k\, dq_k - H dt$$

может меняться лишь на полный дифференциал:

$$\sum_k p_k\, dq_k - H dt = \sum_k P_k\, dQ_k - H' dt + dF.$$

Здесь F – производящая функция К. п. Если она зависит от старых и новых координат, $F(q, Q)$, то явный вид К. п. находится из соотношений

$$p_i = \partial F/\partial q,\ P_i = \partial F/\partial Q_i,$$

а новая функция Гамильтона

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t) + \partial F/\partial t.$$

Остальные возможности (всего их 2^{2n}), когда F зависит от i старых координат, $n-i$ старых импульсов, j новых координат и $n-j$ новых импульсов, получаются из данной *Лежандра преобразованием*.

К. п. сохраняют интеграл

$$\oint \sum_k p_k\, dq_k$$

по замкнутой кривой в фазовом пространстве и элемент фазового объема

$$\prod_k dp_k\, dq_k.$$

Последнее обстоятельство используется при заменах переменных в функциональном интеграле. Для F, не зависящих явно от времени, сохраняется и функция Гамильтона. Для тождественного К. п.

$$F = \sum_k P_k q_k.$$

Бесконечно малые К. п. с

$$F = \sum_k P_k q_k - \varepsilon f(P_k, q_k; \varepsilon)$$

удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\partial P_i/\partial\varepsilon = -\partial h/\partial q_i,\ \partial Q_i/\partial\varepsilon = \partial h/\partial p_j$$

с функцией Гамильтона $h = f(P, q; 0)$. Поэтому движение системы (параметр ε интерпретируется как время t) само есть К. п. Преобразования симметрии, сохраняющие действие

$$S = \int_{t_2}^{t_1} \left(\sum_k p_k\, dq_k - H\, dt \right),$$

очевидным образом являются К. п.

Благодаря свойствам К. п. равноправны все выборы канонич. переменных классич. системы: в ее фазовом пространстве можно взять любую систему координат, связанную К. п. с декартовой, в к-рой q, p – обычные координаты и импульсы.

В квантовой механике такого равноправия нет. Постулат *канонич. квантования*, заменяющий скобки Пуассона $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$ канонич. *перестановочными соотношениями* $[p_i, q_j] = -i\hbar\delta_{ij}$, формулируется для декартовой системы координат. Конкретный выбор гильбертова пространства $\mathcal{H}$ векторов состояний системы и реализация $\hat{p}$, $\hat{q}$ как самосопряженных (эрмитовых) операторов в этом пространстве (их общая область определения должна быть плотной в $\mathcal{H}$) называется представлением. К. п. в квантовой механике называются преобразования представлений, сохраняющие канонич. перестановочные соотношения.

Для систем с конечным числом степеней свободы все представления канонич. перестановочных соотношений унитарно эквивалентны (теорема Неймана): для любых двух представлений операторов $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}'$ и векторов состояний ψ, ψ' существует унитарный оператор U такой, что $\hat{\alpha}' = U\hat{\alpha}U^+$, $\psi' = U\psi$ (знак + означает эрмитово сопряжение). Таким образом, К. п. конечномерных квантовых систем всегда могут быть реализованы как унитарные преобразования, и поэтому они сохраняют спектры операторов, средние значения и другие динамич. характеристики. Напр., переход от шредингерова к гейзенбергову описанию эволюции системы (см. *Шредингера представление, Гейзенберга представление*) является унитарным преобразованием, зависящим от времени, с $U(t, t_0) = \exp\{-i\hat{H}(t-t_0)\}$, где $\hat{H}$ – оператор Гамильтона (*гамильтониан*).

Для бесконечномерных квантовых систем теорема Неймана неверна: существуют К. п., не сводящиеся к унитарным, и соответственно неэквивалентные представления канонич. перестановочных соотношений. Такие К. п. могут менять спектры операторов и в этом случае дают математич. описание многих важных физич. эффектов. К. п. является стандартным приемом нахождения спектра элементарных возбуждений (квазичастиц) в статистич. физике. Примером такого К. п. служат *Боголюбова канонические преобразования*, с помощью к-рых находятся эти спектры для слабонеидеальных бозе- и ферми-систем.

См. также *Канонических преобразований группа*; проективное представление, *Каноническое преобразование*; нормальная форма.

Лит.: [1] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Дирак П., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [4] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [5] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976. *Б. В. Медведев, В. П. Павлов.*

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ; нормальная форма – простейший вид, к которому можно привести *каноническое преобразование* в окрестности неподвижной точки с помощью канонической замены координат.

Теорема. Пусть в окрестности точки $O \in \mathbb{R}^{2n}$ задано C^∞-гладкое канонич. преобразование G, причем $G(O) = 0$ и все собственные числа $\exp(\pm i\omega_k)$ линеаризации отображения G в O лежат на единичной окружности и нерезонансны, то есть $\exp(i(m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n)) \neq 1$ для любого набора целых чисел $m_1, \ldots, m_n$, не все из к-рых равны 0. Тогда для всякого натурального N в $\mathbb{R}^{2n}$ существует система канонически сопряженных координат p, q с центром в O, в к-рой преобразование G представимо как $F + R$, где F имеет вид:

$$F\colon (\tau, \varphi) \mapsto (\tau, \varphi + \partial S/\partial\tau),$$

а остаточный член

$$R = O(|p|^N + |q|^N).$$

Здесь $S = S(\tau)$, а канонически сопряженные полярные координаты τ, φ определяются из соотношений

$$p_k = \sqrt{2\tau_k}\,\cos\varphi_k, \quad q_k = \sqrt{2\tau_k}\,\sin\varphi_k.$$

Отображение F называется нормальной формой Биркгофа.

Лит.: [1] Birkhoff G. D., «Acta math.», 1922, t. 43, p. 1–119.

М. Б. Севрюк.

КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Гиббса распределения.*

КАНТОРОВИЧА ПРИЗНАК – см. *Интегральное уравнение.*

КАНТОРОТОР – см. *Рекуррентность.*

КАРМАНА ФОРМУЛА – см. *Спектр турбулентности.*

КАРМАНА – ХОВАРТА УРАВНЕНИЕ – уравнение, связывающее продольные корреляционные функции второго и третьего порядка поля скорости изотропной турбулентности:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right)\left(B_{LL,L} + 2\nu\frac{\partial B_{LL}}{\partial r}\right);$$

$$B_{LL}(r,t) = \langle u_L(x,t)\,u_L(x+r,t)\rangle;$$

$$B_{LL,L}(r,t) = \left\langle u_L^2(x,t)\,u_L(x+r,t)\right\rangle.$$

Здесь u_L – продольная (вдоль r) компонента скорости, t – время, ν – кинематич. коэффициент вязкости, а угловые скобки означают осреднение. К.–Х. у. незамкнуто; оно, однако, имеет ряд следствий, допускающих экспериментальную проверку.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967.

М. М. Любимцев.

КАРТА отображения – см. *Многообразие.*

КАРТАНА МАТРИЦА – матрица, составленная из чисел

$$c_{ij} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ – простые корни простой алгебры Ли. Алгебра Ли полностью определяется своей К. м.

Ю. А. Неретин.

КАРТАНА ПОДАЛГЕБРА – обобщение подалгебры диагональных матриц в $sl(n, \mathbb{C})$ или $sl(n, \mathbb{R})$ (см. *Классические группы и алгебры Ли*). К. п. $\mathfrak{h}$ в полупростой комплексной (вещественной) алгебре Ли $\mathfrak{g}$ – это коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая двум условиям: 1) для любого $x \in \mathfrak{h}$ оператор $\mathrm{ad}_x : y \mapsto [x, y]$ в пространстве $\mathfrak{g}$ (соответственно, в его комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$) может быть диагонализирован в нек-ром базисе; 2) $\mathfrak{h}$ максимальна среди коммутативных подалгебр, удовлетворяющих условию 1). Любые две К. п. в полупростой комплексной алгебре Ли сопряжены, то есть переводятся друг в друга внутренним автоморфизмом этой алгебры.

Ю. А. Неретин.

КАРТАНА ПРИНЦИП – см. *Сохранения количества движения и энергии принцип.*

КАРТАНА СВЯЗНОСТЬ – *связность* в главном G-расслоении P над многообразием M^n размерности n, определяемая следующим образом. Пусть G является такой замкнутой подгруппой в группе Ли H, что $\dim H/G = n$; через A^* обозначается фундаментальное векторное поле на P, соответствующее элементу $A \in L(G)$ алгебры Ли $L(G)$ группы Ли G и R_a – правый сдвиг элементом $a \in G$. К. с. в расслоении P – это 1-форма ω на P со значениями в алгебре Ли $L(H)$ группы Ли H, удовлетворяющая условиям:

а) $\omega(A^*) = A$ для $A \in L(G)$;

б) $(R_a)^*\omega = \mathrm{Ad}\,(a^{-1})\omega$, $a \in G$;

в) $\omega(X) \neq 0$ для каждого ненулевого вектора X расслоения P.

Последнее условие означает, что ω определяет линейный изоморфизм $\omega : T_u(P) \to L(H)$.

Лит.: [1] Трофимов В. В., Введение в геометрию многообразий с симметриями, М., 1989; [2] Кобаяси Ш., Группы преобразований в дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1986.

В. В. Трофимов.

КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Касательный вектор.*

КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ – естественная проекция $TM \to M$, где M – гладкое многообразие размерности n, а TM – объединение касательных пространств к M в разных точках $\bigcup_{x \in M} TM_x$, снабженное естественной структурой гладкого $2n$-мерного многообразия.

См. также *Касательный вектор.*

С. В. Чмутов.

КАСАТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ – см. *Ускорение.*

КАСАТЕЛЬНЫЙ ВЕКТОР в точке p многообразия M – линейный функционал (оператор), который каждой дифференцируемой функции f на M ставит в соответствие вектор $v(f)$ и удовлетворяет аксиомам:

$$v(f+h) = v(f) + v(h);$$

$$v(cf) = cv(f),\ c = \mathrm{const};$$

$$v(fh) = fv(h) + hv(f).$$

Это определение не зависит от выбора локальных координат. К. в. представляет собой производную по направлению вдоль кривой $\gamma(t)$, проходящей через точку p. Из разложения любой функции в точке p в ряд Тейлора следует, что любой К. в. v в p можно записать в виде

$$v = v^i \partial/\partial x^i.$$

Действительные коэффициенты v^i являются (контравариантными) компонентами К. в. в точке p по отношению к локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности p. Совокупность К. в. к многообразию в точке p называется касательным пространством T_p к M в этой точке, а многообразие TM, состоящее из всех касательных пространств, называется касательным расслоением многообразия M. Сечения этого расслоения – векторные поля на M, другими словами, можно построить векторное поле $v(p)$ на M, ставя в соответствие каждой точке $p \in M$ К. в. $v \in T_p$ так, чтобы компоненты v^i являлись дифференцируемыми функциями локальных координат.

М. И. Войцеховский.

КАСКАД, динамическая система с дискретным временем, – *динамическая система*, определяемая действием аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$ (или аддитивной полугруппы натуральных чисел $\mathbb{N}$) на некотором фазовом пространстве W. Согласно общему определению действия группы (полугруппы), это означает, что каждому целому (натуральному) числу n сопоставлено нек-рое преобразование $S_n : W \to W$, причем

$$S_{n+m}(w) = S_n(S_m(w)),\ w \in W. \qquad (*)$$

Поэтому все преобразования S_n получаются из одного преобразования $S = S_1$ посредством итерирования и (если $n < 0$) обращения:

$$S_n = (S)^n \text{ при } n > 0,\ S_n = (S^{-1})^n \text{ при } n < 0.$$

Тем самым изучение К. по существу сводится к изучению свойств порождающего его преобразования S, и в этом смысле К. являются простейшими динамич. системами. Поэтому К. исследуются весьма интенсивно, хотя в приложениях чаще всего встречаются динамич. системы с непрерывным временем (*потоки*). Принципиальная сторона дела для потоков и К. обычно одинакова, но случай К. несколько проще технически, и в то же время полученные для них результаты часто без особого труда удается перенести на потоки – иногда путем формальной редукции свойств потоков к свойствам К., но чаще путем нек-рого видоизменения доказательств.

См. также *Символическая динамика.*

Д. В. Аносов.

КАТАСТРОФ ТЕОРИЯ – совокупность приложений теории особенностей дифференцируемых (гладких) отображений Х. Уитни (H. Whitney) и теории *бифуркаций* А. Пуанкаре (H. Poincaré) и А. А. Андронова. Название введено Р. Томом (R. Thom) в 1972. К. т. применяется к геометрич. и физич. оптике, гидродинамике, устойчивости кораблей, а также к исследованию биений сердца, эмбриологии, социологии, лингвистике, экспериментальной психологии, экономике, геологии, теории элементарных частиц и моделированию деятельности мозга и психич. расстройств и т. п. Поскольку гладкие отображения встречаются повсеместно, неудивительно, что повсеместно встречаются и их особенности. Когда явление описывается гладким отображением и нет причин для нетипичности (напр., симметрий), применение теории особенностей оправдано и полезно (в оптике, теории упругости и др.), тогда как в нек-рых из описанных Р. Томом и Э. Зиманом (E. Zeeman) приложений сомнительно уже существование изучаемого отображения (в биологии, лингвистике, социологии).

Теория особенностей обобщает исследование экстремумов функций на случай нескольких функций любого числа переменных. Критической точкой функции y называется точка, в к-рой все первые частные производные равны нулю: $\partial y/\partial x_i = 0$; критич. точка называется невырожденной, если матрица $\|\partial^2 y/\partial x_i \partial x_j\|$ невырождена, то есть ее определитель отличен от нуля. У типичной функции все критич. точки невырождены. Любая гладкая функция в окрестности каждой невырожденной критич. точки приводится к одной из так наз. нормальных форм Морса $y = \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_n^2 + C$, гладкой заменой независимых переменных. Эти невырожденные особенности устойчивы: напр., всякая функция, достаточно близкая к $y = x^2$ (с производными), имеет в подходящей точке вблизи нуля подобную же особенность (невырожденную точку минимума). Все более сложные особенности неустойчивы. Напр., вырожденная критич. точка функции $y = x^3$ в нуле распадается на две при возмущении, превращающем x^3 в $x^3 - \varepsilon x$.

Типичные отображения поверхности на плоскость ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) также имеют лишь устойчивые особенности, а именно, складку ($y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$) либо сборку Уитни ($y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$, $y_2 = x_2$). Сборка есть особенность проектирования поверхности $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$ из пространства (x_1, x_2, y_1) на плоскость (y_1, x_2) (рис. 1). Списки типичных особенностей отображений $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ таковы: 1) $y_1 = x_1^2$, $y_i = x_i$, $i > 1$; 2) $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$, $y_i = x_i$, $i > 1$; 3) $y_1 = x_1^4 + x_1^2 x_2 + x_1 x_3$, $y_i = x_i$, $i > 1$; 4) $y_1 = x_1^2 \pm x_2^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4$, $y_2 = x_1 x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4$. Отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ обычно имеет особенностями лишь зонтики Уитни – Кэли (рис. 2; $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_1 x_2$, $y_3 = x_2$). При переходе к высшим размерностям списки типичных особенностей растут и даже становятся континуальными (напр., не всякое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при $n > 8$ аппроксимируется устойчивым). Число классов топологически различных особенностей остается конечным при любых размерностях.

В теории бифуркаций рассматривается динамич. система, описываемая уравнением $\dot{x} = \theta(x, \varepsilon)$, с заданным векторным полем θ в n-мерном фазовом пространстве $\{x\}$. Поле зависит от k-мерного параметра ε. Множество состояний равновесия определяет в $(n+k)$-мерном пространстве $\{x, \varepsilon\}$ k-мерную поверхность $\theta(x, \varepsilon) = 0$. В типичном случае эта поверхность гладкая, но ее проекция на пространство «управляющих параметров» $\{\varepsilon\}$ может иметь особенности. Если рассматривать значения $\{\varepsilon\}$ как функции на поверхности состояний равновесия, то точки, в к-рых якобиан этих функций равен 0, называются бифуркационными, а значения функций в этих точках – бифуркационными значениями параметров ε. При подходе управляющих параметров к бифуркационным значениям положения равновесия «бифуркацируют» (рождаются или умирают). Знание геометрии типичных особенностей позволяет описывать происходящие при этом явления, напр. скачкообразный переход системы к далекому состоянию равновесия при плавном изменении параметров. Такие скачки способны разрушить систему (механическую, упругую, электрическую, биологическую, химическую и т. п.), откуда и название «К. т.».

Наибольший успех достигнут в приложениях К. т. к оптике, где даже типичные особенности каустик и перестройки волновых фронтов в трехмерном пространстве не были известны. Рассмотрим возмущение (свет, звук, ударную волну, эпидемию и др.), распространяющееся с единичной скоростью из области, ограниченной гладким фронтом. Чтобы построить фронт через время t, нужно отложить отрезок длины t на каждом луче нормали. Через нек-рое время на движущемся фронте появляются особенности в точках каустики (огибающей семейства лучей) исходного фронта. Напр., при распространении возмущения внутрь эллипса на плоскости особенности фронта скользят по каустике, имеющей 4 точки возврата (рис. 3). Эти особенности устойчивы (не исчезают при малой деформации исходного фронта). Типичные особенности фронтов в трехмерном пространстве – это самопересечения, ребра возврата (нормальная форма $x^2 = y^3$) и ласточкины хвосты [рис. 4; эта поверхность образована точками (a, b, c), для к-рых многочлен $x^4 + ax^2 + bx + c$ имеет кратный корень]. Каустики в трехмерном пространстве имеют особенности еще двух видов (пирамида и кошелек; рис. 5).

Почти все особенности волновых фронтов (или *Лежандра преобразований*) можно описать как множества бифуркационных значений параметра μ, при к-рых возникают особенности отображения $(x, \mu) \to \mu$ гиперповерхности $F(x, \mu) = 0$ в пространство μ, где F – типичное семейство гладких функций вектора x и векторного параметра μ. Типичные особенности каустик (или градиентных отображений $x \to \partial S/\partial x$, или отображений Гаусса, сопоставляющих точке поверхности направление нормали) можно описать как множества бифуркационных значений параметра μ, при к-рых функция $F(x, \mu)$ переменной x имеет вырожденную критич. точку. Ласточкин хвост, пирамида и кошелек получаются при

$$F = x^5 + \mu_1 x^2 + \mu_2 x^2 + \mu_3 x;$$

$$F = x_1^2 x_2 \pm x_2^3 + \mu_1 x_2^2 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1.$$

Особенностям каустик и фронтов геометрич. оптики соответствуют в волновой теории особенности асимптотик осциллирующих интегралов в методе стационарной фазы или многомерном методе перевала при слиянии нескольких стационарных точек. По порядку величины интеграл при подходе к точке каустики возрастает в $\lambda^{-\nu}$ раз, где λ – длина волны, а показатель ν равен 1/6 для общей точки каустики (A_2, особенность Эйри); 1/4 для общей точки ребра возврата (A_3, особенность Пирси); 3/10 для ласточкина хвоста (особенность A_4); 1/3 для кошелька и пирамиды (особенности D_4). Эти особенности связаны с простыми группами Ли $A_k \sim SU(k+1)$, $D_k \sim O(2k)$, а также с правильными многогранниками [конечными подгруппами группы $SU(2)$]. Показатель ν определяет интенсивность света вблизи каустики и ее особенностей, разрушение среды интенсивной волной, скопление частиц при движении пылевидной среды с потенциальным полем скоростей (с иным значением ν) и т. п. Универсальность геометрии бифуркационных диаграмм позволяет использовать их для одновременного моделирования многих различных по своему физич. смыслу явлений.

Рис. 1.

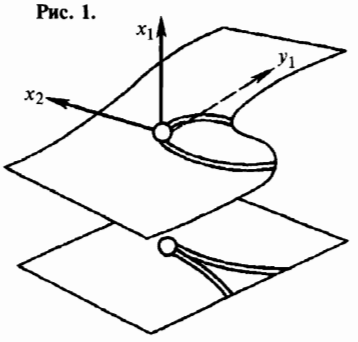


Рис. 2.

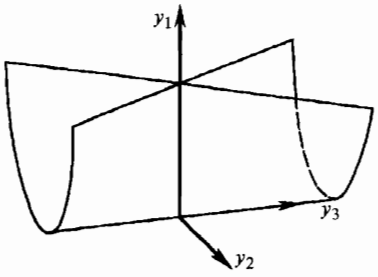


Рис. 3.

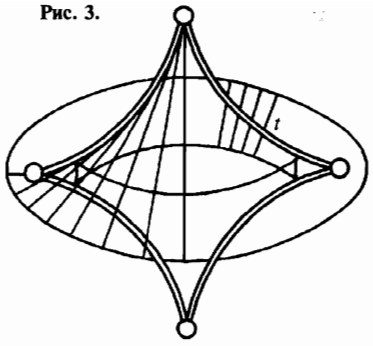


Рис. 4.

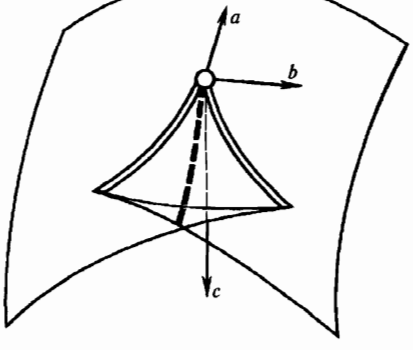
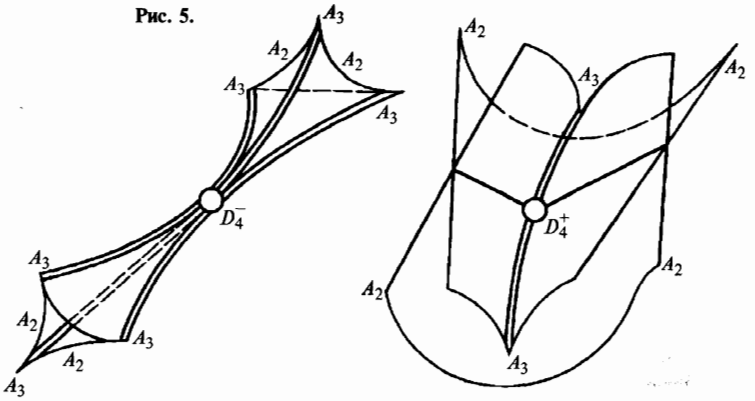


Рис. 5.



Лит.: [1] Постон Т., Стюарт И., Теория катастроф и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; [2] Арнольд В. И., Теория катастроф, 2 изд., М., 1983; [3] его же, Особенности, бифуркации и катастрофы, «Успехи физич. наук», 1983, т. 141, с. 569; [4] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений, [т. 1–2], М., 1982–84; [5] Гилмор Р., Прикладная теория катастроф, пер. с англ., кн. 1–2, М., 1984. *В. И. Арнольд.*

КАТАСТРОФИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ – взаимодействие в классической или квантовой системе, приводящее к нарушению термодинамического поведения. В большинстве случаев под нарушением термодинамич. поведения понимают расходимость *термодинамической функции* рассматриваемого ансамбля Гиббса. В классич. случае для широкого класса парных взаимодействий большая статистич. сумма расходится тогда и только тогда, когда нарушено условие устойчивости потенциала (см. *Неустойчивый потенциал взаимодействия, Устойчивый потенциал взаимодействия*). К. п. приводит к ситуации, когда конфигурациям, при к-рых в ограниченную область пространства собирается много частиц, приписывается большой вес. Напр., для классич. непрерывной системы с парным потенциалом $\Phi(x)$, к-рый абсолютно интегрируем и для к-рого

$$\int dx\,\Phi(x) < 0,$$

можно выбрать ограниченную область Λ в $\mathbb{R}^\nu$ такую, что большая статистич. сумма расходится (Р. Л. Добрушин, 1964).

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1971. *Д. П. Санкович.*

КАТЕГОРИЯ пространства – см. *Вариационное исчисление в целом.*

КАУСТИКА в геометрической оптике – огибающая системы лучей, то есть множество точек, в которых свет концентрируется. В более общем смысле К.– множество критич. значений *лагранжева отображения*. Эквивалентные лагранжевы отображения имеют диффеоморфные К. Обратное, вообще говоря, не верно. Пример К.: множество центров кривизны поверхности в трехмерном пространстве образует К. *нормального отображения*. К. может иметь особенности (см. *Лагранжева особенность*; нормальная форма).

Каустикой называют также множество всех *фокальных точек* семейства кривых. *М. Э. Казарян.*

КАЧАНИЯ ЦЕНТР физического маятника – см. *Маятник.*

КВАДРАТИЧНАЯ ОШИБКА – см. *Квадратичное отклонение.*

КВАДРАТИЧНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ – см. *Квадратичное отклонение.*

КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, представление дискретной серии,– представление T группы Ли G, для любого матричного элемента $t_{\xi,\eta}$ которого конечен интеграл от $|t_{\xi,\eta}(g)|^2$ по *Хаара мере*. Простая группа Ли G имеет К. и. п. тогда и только тогда, когда в G существует компактная картановская подгруппа. Это справедливо, в частности, для групп $SL_2(\mathbb{R})$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$, $SO(2p, 2q)$, $SO(2p, 2q+1)$, $SO^*(2n)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$ (обозначения групп см. в статье *Классические группы и алгебры Ли*). *Ю. А. Неретин.*

КВАДРАТИЧНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ, стандартное отклонение, квадратичное уклонение величин x_1, x_2, ..., x_n от a – квадратный корень из выражения

$$\frac{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2}{n}.$$

Наименьшее значение К. о. имеет при $a=\bar{x}$, где $\bar{x}$ – среднее арифметическое величин x_1, x_2, ..., x_n:

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

В теории вероятностей квадратичное отклонение σ_X случайной величины X (от ее математич. ожидания) опре-

деляют как квадратный корень из *дисперсии* $\mathrm{D}X$:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X}$$

и называют также стандартным отклонением величины X. Для любой случайной величины X с математич. ожиданием m_X и К. о. σ_X вероятность отклонений X от m_X, больших по абсолютной величине $k\sigma_X$, $k>0$, не превосходит $1/k^2$ (неравенство Чебышева). В случае нормального распределения указанная вероятность при $k=3$ равна 0,0027. В практич. задачах, приводящих к нормальному распределению, чаще всего пренебрегают возможностью отклонений от среднего, больших $3\sigma_X$ (правило трех сигм).

В математич. статистике К. о. употребляют как меру качества статистич. оценок и называют в этом случае квадратичной погрешностью (ошибкой).

В. И. Битюцков.

КВАДРАТИЧНОЕ УКЛОНЕНИЕ – см. *Квадратичное отклонение.*

КВАДРАТИЧНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН, квадратичная функция Гамильтона,– функция вида

$$H = \frac{1}{2}(Ax, x),$$

где $x=(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ – вектор, записанный в симплектическом базисе (см. *Симплектическое пространство*), $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение, A – симметрический линейный оператор. Канонич. уравнения, соответствующие К. г., имеют вид

$$\dot{x} = IAx,$$

где $I=\begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix}$, E – единичная матрица. Собственные числа К. г. бывают четырех типов: вещественные пары $(a, -a)$, чисто мнимые пары $(ib, -ib)$, четверки $(\pm a, \pm ib)$ и нулевые. См. также *Квадратичный гамильтониан*; нормальная форма.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1979.

М. И. Войцеховский.

КВАДРАТИЧНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН; нормальная форма – простейший вид, к которому можно привести *квадратичный гамильтониан* линейной канонической заменой координат.

Теорема Вильямсона [1]. В $2N$-мерном вещественном линейном симплектич. пространстве $\mathbb{R}^{2N}$, на к-ром задан К. г. H, можно выбрать линейные канонически сопряженные координаты $p_1, p_2, \ldots, p_N, q_1, q_2, \ldots, q_N$, в к-рых H примет вид:

$$H(p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N) = H(p_1, \ldots, p_{n_1}, q_1, \ldots, q_{n_1}) +$$
$$+H_2(p_{n_1+1}, \ldots, p_{n_2}, q_{n_1+1}, \ldots, q_{n_2}) + \ldots +$$
$$+H_s(p_{n_{s-1}+1}, \ldots, p_{n_s}, q_{n_{s-1}+1}, \ldots, q_{n_s}),$$

где $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_{s-1} < n_s = N$, гамильтонианы $H_1, H_2, \ldots, H_s$ (так наз. элементарные нормальные формы) суть

$$H_k(p,q) = \frac{1}{2}\langle p, A_k L_p\rangle + \frac{1}{2}\langle q, LB_k q\rangle,$$

а пары матриц (A_k, B_k) принадлежат следующему списку:

$$(Q_{a,b}, -Q_{a,b}),\ (J_a, -J_a),\ (\sigma J_b, \sigma J_b),\ (J_0, J_0)$$

с нечетным порядком клетки J_0, $(\sigma J_0, \sigma E)$. Здесь $a>0$, $b>0$, $\sigma = \pm 1$, J_λ – жорданова клетка с собственным числом λ, E – единичная матрица, а L и $Q_{a,b}$ – матрицы

$$L = \begin{Vmatrix} 0\ 0 \ldots 0\ 1 \\ 0\ 0 \ldots 1\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1\ 0 \ldots 0\ 0 \end{Vmatrix}, \quad Q_{a,b} = \begin{Vmatrix} J_a & bE \\ -bE & J_a \end{Vmatrix},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение:

$$\langle x, M_y \rangle = \sum M_{ij} x_i y_j.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для гамильтонианов в комплексном пространстве $\mathbb{C}^{2N}$ со следующим списком пар матриц (A_k, B_k):

$$(J_z, -J_z),\ (J_0, J_0)$$

с нечетным порядком клетки J_0, (J_0, E). Здесь либо $\operatorname{Im} z > 0$, либо $z \in \mathbb{R}$ и $z>0$.

В линейном симплектич. пространстве $\mathbb{C}^{2N}$ два К. г. можно перевести друг в друга линейной канонич. заменой координат тогда и только тогда, когда соответствующие им линейные гамильтоновы операторы подобны, то есть имеют одинаковую жорданову структуру. На гамильтонианы в $\mathbb{R}^{2N}$ это утверждение не переносится, контрпримером могут служить гамильтонианы p^2+q^2 и $-(p^2+q^2)$ на $\mathbb{R}^2$.

Лит.: [1] Williamson J., «Amer. J. Math.», 1936, v. 58, № 1, p. 141–63; [2] Laub A. J., Meyer K., «Celest. Mech.», 1974, v. 9, № 2, p. 213–38; [3] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы, т. 4, М., 1985, с. 5–139 (глава 1); [4] Брюно А. Д., «Успехи математич. наук», 1988, т. 43, в. 1, с. 23–56.

М. Б. Севрюк.

КВАДРУПОЛЬНОГО МОМЕНТА ТЕНЗОР – см. *Мультипольного момента тензор.*

КВАДРУПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Мультиполя потенциал.*

КВАЗИВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО – неравенство, возникающее при решении следующей задачи:

$$\text{найти } u \in Q(u):\ \langle Au, v-u\rangle \geqslant 0 \text{ для всех } v \in Q(u),$$

где V – рефлексивное банахово пространство, V' – его двойственное, оператор $A: V \to V'$, K – выпуклое замкнутое множество в V, $C \subseteq K$, $Q: C \to 2^K$. Для изучения К. н. рассматривается семейство *вариационных неравенств*:

$$\psi \in Q(W):\ \langle A\psi, v-\psi\rangle \geqslant 0 \text{ для всех } v \in Q(W),$$

а затем ищется неподвижная точка отображения $w \to \psi$, к-рая и будет решением К. н.

К. н. имеют приложения в физике, механике, теории управления и др.

Лит.: [1] Байокки К., Капело А., Вариационные и квазивариационные неравенства, пер. с англ., М., 1988; [2] Бенсусан А., Лионс Ж.-Л., Импульсное управление и квазивариационные неравенства, пер. с франц., М., 1987.

Т. Н. Рожковская.

КВАЗИДАЛЬНИЙ ПОРЯДОК – см. *Динамический дальний порядок.*

КВАЗИИМПУЛЬС – векторная величина $\boldsymbol{p}$, характеризующая состояние квазичастицы (электрона, экситона, фонона и т. д.) в кристаллической решетке. Квазичастицами обычно называют элементарные возбуждения, по к-рым могут быть разложены произвольные малые возбуждения системы. К. для квазичастиц играет ту же роль, что и обычный импульс для обычных частиц. Представление о К. возникло в зонной теории кристаллов. Стационарные состояния электрона в периодич. поле описываются волновыми *Блоха функциями*, обладающими следующими трансляционными свойствами

$$\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}) = \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{pa}\right),$$

где $\boldsymbol{a}$ – вектор решетки периодов. К. определен по модулю обратной решетки, то есть решетки векторов $\boldsymbol{b}$ таких, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2\pi n$, n – целое. Приведенное соотношение является определяющим при введении понятия К. и решений Блоха для общих периодич. дифференциальных или разностных уравнений.

Особую роль понятие К. играет в теории конечнозонного интегрирования, где его дифференциал оказывается после аналитич. продолжения абелевым дифференциалом второго рода на компактной римановой поверхности. *И. М. Кричевер.*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРНО-КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ – асимптотические по степеням $h^{1/2}$, $h \to 0$, решения эволюционных уравнений квантовой механики в форме волновых пакетов, локализованных в окрестности классической частицы; обобщают (коррелированные) когерентные состояния нерелятивистских квадратичных квантовых систем на случай произвольного внешнего поля и релятивистских квантовых систем. Такие решения

построены методом комплексного ростка для уравнений Шредингера (см. [1]), Клейна–Гордона, псевдодифференциального уравнения типа Шредингера для релятивистской частицы (см. [2]), уравнения Дирака с аномальным взаимодействием Паули (см. [3]) (см. *Дирака уравнение*; асимптотические решения). В случае уравнения Шредингера со стационарным скалярным потенциалом решения подобного типа впервые построены в [4]. Для произвольной квантовой системы, имеющей классич. аналог, К. т.-к. с. реализуют предельный переход при $h \to 0$ из квантовой теории в классическую (в духе подхода Эренфеста в нерелятивистской квантовой механике (см. [5])): средние квантово-механические для полного набора наблюдаемых, рассчитанные по К. т.-к. с., в пределе при $h \to 0$ являются решениями классич. уравнений движения.

Лит.: [1] Багров В. Г., Белов В. В., Тернов И. М., «Теоретич. и математич. физика», 1982, т. 50, № 3, с. 390–96; [2] Багров В. Г., Белов В. В., «Известия ВУЗов. Физика», 1982, т. 25, № 4, с. 48–50; [3] Белов В. В., Маслов В. П., «Доклады АН СССР», 1989, т. 305, № 3, с. 574–80; [4] Бабич В. М., Данилов Ю. П., «Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР», 1969, т. 15, в. 2, с. 47–65; [5] Ehrenfest P., «Z. Phys.», 1927, Bd 45, S. 455–57. *В. В. Белов.*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР плотности – см. *P-представление.*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ в излучении – приближенные по $h \to 0$ методы расчета в представлении Фарри характеристик спонтанного излучения электромагнитных волн заряженными частицами, движущимися в произвольном внешнем поле. Эти методы основаны на учете двух типов квантовых поправок к классич. излучению, связанных с квантованием самого движения частицы в этом поле и с эффектом отдачи частицы при излучении (см. [1]). Соответствующие характерные параметры разложения в типичной ситуации (для магнитного поля) $\hbar\omega_0/E$ и $\hbar\omega/E$, где ω_0 – частота вращения, E – энергия электрона, ω – частота излученного фотона. В задаче об излучении частицы в области высоких энергий $\gamma = \frac{E}{mc^2} \to \infty$, когда оба типа поправок могут быть разделены, причем квантовые поправки первого типа оказываются малыми по сравнению с эффектом отдачи (см. [2]); основным является операторный квазиклассический с релятивистской точностью метод (см. [3]). В этом методе не требуется знания явного вида решений волновых уравнений, и расчет характеристик процесса излучения проводится в пренебрежении коммутаторами (гейзенберговских) операторов координат и импульсов электрона (величины $\sim \hbar\omega_0/E$) (подробнее см. [4]). Возможна модификация метода, учитывающая усреднение по начальным состояниям частицы. (О случае квантовой бесспиновой частицы в магнитном поле см. [5].)

Общие формулы характеристик процесса излучения в произвольном внешнем поле, не имеющие ограничений снизу на энергию частицы и равномерно пригодные во всей области энергий $\gamma \in [1, \infty)$, дает метод квазиклассич. траекторно-когерентных состояний (см. [6]). Он основан на использовании полного ортонормированного набора динамич. квазиклассич. траекторно-когерентных состояний оператора Дирака с аномальным взаимодействием Паули (см. *Квазиклассические траекторно-когерентные состояния*).

В рамках этого метода спектрально-угловое распределение вероятностей и излученной энергии с точностью до первой квантовой поправки включительно представляется в виде конкретного функционала от классич. траектории частицы; под классич. траекторией понимается не только решение уравнения Лоренца, но и решение классич. релятивистского уравнения движения спина типа *Баргмана–Мишеля–Телегди уравнения.* При этом учитываются квантовые поправки, связанные как с отдачей электрона, так и с «квантовым характером траектории». В предельном случае ультрарелятивистских частиц $\gamma \to \infty$ результаты совпадают (в разложении по $h \to 0$) с формулами операторного квазиклассич. метода. Для нерелятивистских частиц метод дает сравнительно простые общие выражения для характеристик спонтанного излучения заряда с учетом его спиновых свойств. Напр., для вероятности переходов $w^{\uparrow\downarrow}$ с переворотом спина

$$w^{\uparrow\downarrow} = \frac{e^2 h}{6\pi m^2 c^5} \int_0^\infty \omega^3 |\vec{S}(\omega, \xi, -\xi')|^2 d\omega,$$

$$\vec{S}(\omega, \xi, \xi') = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}(t, \xi, \xi') \exp(i\omega t)\, dt,$$

где $\vec{S}(t, \xi, \xi')$ – решение классич. спиновых уравнений, $\xi, \xi' = \pm 1$.

Лит.: [1] Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М., Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах, Новосиб., 1989; [2] Schwinger J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1954, v. 40, p. 132; [3] Байер В. Н., Катков В. М., «Журнал экспериментальной и теоретич. физики», 1968, т. 55, № 4, с. 1542–54; [4] Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С., Излучение релятивистских электронов, М., 1973; [5] Ахиезер А. Н., Ласкин Н. В., Шульга Н. Ф., «Доклады АН СССР», 1988, т. 303, № 1, с. 78–81; [6] Багров В. Г., Белов В. В., Маслов В. П., там же, 1989, т. 308, № 1, с. 88–91. *В. В. Белов.*

КВАЗИКОНФОРМНАЯ КРИВАЯ – образ окружности при квазиконформном автоморфизме расширенной комплексной плоскости. Жорданова кривая $\gamma \subset \bar{\mathbb{C}}$ является К. к. в том и только в том случае, если существует константа $c > 0$ такая, что для любой пары различных точек z_1, z_2 ($\neq \infty$) на γ выполняется неравенство

$$\min_{j=1,2} \operatorname{diam}(\gamma_j) \leqslant c|z_1 - z_2|,$$

где γ_j – компоненты $\gamma \setminus \{z_1, z_2\}$ (геометрич. характеристика К. к., см. [1]). В последнее время этот класс кривых нашел применения в различных областях анализа. Многочисленные приложения понятия К. к. привели к другим эквивалентным определениям и характеристич. свойствам (см. [2]).

Лит.: [1] Альфорс Л., Лекции по квазиконформным отображениям, пер. с англ., М., 1969; [2] Gehring F., Characteristic properties of quasidisks, Montreal, 1982. *В. В. Горяйнов, Ю. Е. Хохлов.*

КВАЗИКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – отображение евклидова пространства в себя, при котором бесконечно малые шары переходят в невырождающиеся эллипсоиды. Точнее, сохраняющее ориентацию отображение f области G в область G' ($G, G' \subset \mathbb{R}^n$) квазиконформно, если конечна величина коэффициента искажения в точке a:

$$Q(f) = \sup_{x \in G} Q(f, x),$$

где

$$Q(f, a) = \lim_{r \to 0} \frac{\sup\limits_{|x-a| < r} |f(x) - f(a)|}{\inf\limits_{|x-a| < r} |f(x) - f(a)|}$$

(вследствие чего К. о. называют также отображениями с ограниченным искажением). Если f дифференцируемо в точке $a \in G$, то линейное отображение $f'(a)$ преобразует шар в эллипсоид, отношение наибольшей полуоси к-рого к наименьшей равно $Q(f, a) < \infty$. *Конформное отображение* характеризуется условием $Q(f) \equiv 1$, так что К. о. является естественным его обобщением.

Лит.: Математическая энциклопедия, т. 2, М., 1979, кол. 810–13.

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ – см. *Дифференциальный оператор.*

КВАЗИЛОКАЛЬНАЯ НАБЛЮДАЕМАЯ – см. *Наблюдаемых алгебра.*

КВАЗИЛОКАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР – см. *Пространственного ослабления корреляций принцип.*

КВАЗИМАРКОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ в теории турбулентности – метод конструирования для изотропного спектра энергии $E(k, t)$ из бесконечной цепочки мо-

ментных гидродинамических *Фридмана — Келлера уравнений* замкнутого интегро-дифференциального уравнения вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2\right)E(k,t)=C_d\int\int_{\Delta_k}\theta_{kpq}(t)\frac{k^{d+4}}{pq}(1-x^2)^{(d-3)/2}\times$$

$$\times\left[a_{kpq}^{(d)}k^{d-1}E(p,t)E(q,t)-b_{kpq}^{(d)}p^{d-1}E(q,t)E(k,t)\right]dp\,dq,$$

(см. [1]). Здесь d — размерность физич. пространства, t — время, ν — коэффициент кинематич. вязкости, Δ_k — область интегрирования, распространенная на такие модули волновых векторов p и q, к-рые вместе с k являются сторонами треугольников,

$$a_{kpq}^{(d)}=1/2[b_{kpq}^{(d)}+b_{kqp}^{(d)}],$$

$$b_{kpq}^{(d)}=(p/2k)[(d-3)z+(d-1)xy+2z^3]$$

(x, y, z — косинусы внутренних углов, противолежащих сторонам k, p, q соответственно),

$$C_\alpha=4S_{d-1}/(d-1)^2S_d,$$

$$S_d\equiv(2\pi)^{d/2}/\Gamma(d/2).$$

При этом время релаксации $\theta_{kpq}(t)$ определяется формулой

$$\theta_{kpq}(t)=\int_0^t G(k,t,s)G(p,t,s)G(q,t,s)\,ds,$$

в к-рой $G(k,t,s)$ — функция Грина оператора

$$[\partial/\partial t+\nu k^2+\eta(k,t)],$$

где $\eta(k,t)$ — линейный коэффициент, связывающий кумулянты 4-го порядка с третьими моментами в иерархии моментных уравнений (см. [3], [4]), либо релаксационный коэффициент трения в модельном *Ланжевена уравнении* для фурье-компоненты поля скорости с дельта-коррелированной случайной силой (см. [2]), что и обусловливает марковский характер данного приближения (см. [5]).

Лит.: [1] Rose H. A., Sulem P. L., «J. de physique», 1978, t. 39, № 5, p. 441–84; [2] Kraichnan R. H., «J. Fluid Mech.», 1971, v. 47, № 3, p. 513–24; [3] Orszag S. A., там же, 1970, v. 41, № 2, p. 363–86; [4] Loith C. E., «J. Atm. Sci.», 1971, v. 28, № 2, p. 145–61; [5] Мирабель А. П., Монин А. С., «Успехи механики», 1979, т. 2, в. 3, с. 47–95.

А. П. Мирабель.

КВАЗИОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАТОРА — существование для данного линейного оператора A в пространстве E такого оператора Q (квазиобратного оператора), что $AQ=1+R$ (правая К. о.) или $QA=1+R$ (левая К. о.), где $R\in R_N$, R_N — множество операторов, имеющих порядок N в некоторой фильтрации пространства E. Таким образом, Qf доставляет первые $(N-1)$ членов асимптотич. разложения решения уравнения $Au=f$.

В различных частных случаях К. о. дает асимптотику по гладкости, асимптотику по малому (большому) параметру или, более общо, асимптотику по степеням нек-рого оператора B (при этом фильтрация задается областями определения степеней оператора B). Во многих случаях К. о. может быть показана методами теории упорядоченных операторов.

Лит.: [1] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [2] Маслов В. П., Назайкинский В. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 13, М., 1979, с. 5–144.

В. Е. Назайкинский.

КВАЗИОДНОРОДНАЯ ФУНКЦИЯ степени d с показателями $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — голоморфная функция $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ такая, что при любом $\lambda>0$:

$$f(\lambda^{\nu_1}x_1,\ldots,\lambda^{\nu_n}x_n)=\lambda^d f(x_1,\ldots,x_n).$$

С. В. Чмутов.

КВАЗИОДНОРОДНОЕ ЭЙЛЕРОВО ПОЛЕ квазиоднородных растяжений в пространстве $\mathbb{R}^n$ с показателями квазиоднородности $\nu_1, \ldots, \nu_n$ и координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ — поле, имеющее вид:

$$v=\sum\nu_i x_i\partial/\partial x_i.$$

Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *квазиоднородная функция* степени N, то имеет место тождество Эйлера $vf=Nf$. *М. Э. Казарян.*

КВАЗИОДНОРОДНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН — старшая часть символа оператора представления, соответствующего заданной функции от упорядоченных операторов

$$\hat f=f\left(\overset{1}{A}_1,\ldots,\overset{n}{A}_n\right).$$

Пусть

$$L_1\left(\overset{2}{x},\ -i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}\right),\ldots,L_n\left(\overset{2}{x},\ -i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}\right)$$

— левое упорядоченное представление набора $(A_1, \ldots, A_n)$, $\rho_1, \ldots, \rho_n\geqslant 0$ — заданные веса операторов $A_1, \ldots, A_n$ и пусть функция $F(x,p)=f(L_1(x,p), \ldots, L_n(x,p))$ обладает свойством

$$F(\lambda^{\rho_1}x_1,\ldots,\lambda^{\rho_n}x_n,\lambda^{1-\rho_1}p_1,\ldots,\lambda^{1-\rho_n}p_n)=$$

$$=\lambda^m H(x,p)+O(\lambda^{m-\varepsilon}),\ \lambda\to+\infty,$$

для нек-рых $\varepsilon>0$, m. Тогда функция $H(x,p)$ называется квазиоднородным гамильтонианом оператора $\hat f$. К. г. играет роль *Гамильтона функции* при построении методом канонич. оператора Маслова квазиобратного к $\hat f$ оператора в шкале с нормой

$$\|u\|_s=\|(1+A_1^{2/\rho_1}+\ldots+A_n^{2/\rho_n})^{s/2}u\|$$

(гильбертов случай).

Лит.: [1] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [2] Маслов В. П., Назайкинский В. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 13, М., 1979, с. 5–144.

В. Е. Назайкинский.

КВАЗИОПТИКА — научная дисциплина, смежная геометрической оптике и теории дифракции и посвященная анализу и расчету устройств для формирования и передачи электромагнитных полей, основанных на геометро-оптических процессах отражения, преломления и фокусировки этих полей в условиях, когда необходимо учитывать волновую природу колебаний. Примеры таких устройств — открытый резонатор, образованный двумя расположенными друг против друга зеркалами; зеркало или диэлектрич. призма в изломе широкого волновода.

Лит.: [1] Каценеленбаум Б. З., «Успехи физич. наук», 1964, т. 83, в. 1, с. 81–105; [2] Квазиоптика, пер. с англ. и нем., М., 1966.

В. А. Боровиков.

КВАЗИПЕРИОД — см. *Тета-функция.*

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ РЕЖИМ — см. *Вынужденное колебание.*

КВАЗИРЕГУЛЯРНАЯ СИСТЕМА — см. *К-система.*

КВАЗИСРЕДНИЕ — статистические средние для систем с вырожденным состоянием статистического равновесия. К. соответствуют обычным статистич. средним, для к-рых вырождение снимается бесконечно малым возмущением, нарушающим симметрию гамильтониана. Введение К. необходимо в том случае, когда состояние статистич. равновесия системы имеет более низкую симметрию, чем ее гамильтониан. Понятие К. введено Н. Н. Боголюбовым в 1960.

Напр., для изотропного ферромагнетика в отсутствие магнитного поля суммарный спин является интегралом движения. Средний (в обычном смысле) вектор намагниченности M равен нулю вследствие инвариантности системы по отношению к группе вращений спина. Это справедливо также для температуры ниже точки Кюри, когда существует спонтанная намагниченность. В действительности величина вектора M отлична от нуля, но его направление может быть произвольным, что означает вырождение состояния статистич. равновесия. Это вырождение можно снять, включив в гамильтониан H внешнее магнитное поле νe, где e — единичный вектор, параметр $\nu>0$:

$$H_\nu=H+\nu(eM)V,$$

V — объем системы. Средний магнитный момент единицы объема, вычисленный с этим гамильтонианом,

$\langle M\rangle_\nu = eM_\nu \neq 0$ при $\nu \neq 0$. Квазисреднее магнитного момента равно

$$\lim_{\nu\to 0} M_\nu$$

и отлично от нуля при температурах ниже точки Кюри. При построении К. существенно, что $\nu \to 0$ после выполнения термодинамич. предельного перехода $V\to\infty$ при фиксированном V/N, где N – число частиц. Если эти предельные переходы перестановочны, то К. равны нулю, это справедливо при температурах выше точки Кюри. В общем случае квазисреднее оператора A равно

$$\lim_{\nu\to 0}\langle A\rangle_\nu,$$

где $\langle A\rangle_\nu$ – обычные статистич. средние при наличии поля νe, снимающего вырождение. Обычные средние равны К., усредненным по всем направлениям поля. Аналогично вводят К. в теории кристаллов, нарушая симметрию, связанную с пространственными трансляциями и вращениями, в теории сверхтекучести и сверхпроводимости, где нарушают симметрию гамильтониана, связанную с сохранением полного числа частиц; в квантовой теории поля и т. д.

Общий способ введения К. таков. Рассматривают макроскопич. систему с гамильтонианом H. Добавляют к H бесконечно малые добавки, нарушающие нек-рые законы сохранения (симметрию гамильтониана), получая гамильтониан H_ν. Если все средние значения $\langle A\rangle_\nu$ получают лишь бесконечно малые приращения, состояние статистич. равновесия называется невырожденным. Если же нек-рые из средних получают конечные приращения, говорят о вырождении состояния статистич. равновесия. В этом случае вводят К., равные

$$\lim_{\nu\to 0}\langle A\rangle_\nu,$$

причем сначала выполняется предельный переход $V\to\infty$.

К. удобны также для вычисления корреляционных функций, функций Грина и т. п.

Обычный метод теории возмущений, строго говоря, не применим к системам с вырожденным состоянием статистич. равновесия. Для того чтобы воспользоваться теорией возмущений в этом случае, нужно предварительно снять вырождение и ввести функции Грина, построенные из К.

Лит.: [1] Ахиезер А. И., Пелетминский С. В., Методы статистической физики, М., 1977; [2] Боголюбов Н. Н., Избранные труды по статистической физике, М., 1979; [3] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984.

Д. Н. Зубарев.

КВАЗИЧАСТИЦЫ – элементарные возбуждения конденсированной среды (твердого тела, жидкого гелия), ведущие себя в некоторых отношениях как квантовые частицы. Теоретич. описание и объяснение свойств конденсированных сред, исходящее из свойств составляющих их молекул, атомов, ионов и электронов, представляет большие трудности, во-первых, потому что число частиц огромно (10^{22}–10^{23} в 1 $см^3$), а, во-вторых, потому что частицы сильно взаимодействуют между собой. Из-за взаимодействия частиц полная энергия конденсированной среды не есть сумма энергий отдельных частиц (как в идеальном газе). Развитие квантовой теории твердого тела привело к концепции К., к-рая оказалась особенно плодотворной для описания свойств кристаллов, квантовых жидкостей (в частности, жидкого гелия), а в дальнейшем при построении ядерных моделей, описании плазмы и т. д.

КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ – отношение в классе представлений группы или C^*-алгебры. А именно, представления T_1 и T_2 (группы или C^*-алгебры) считаются квазиэквивалентными, если для любого ненулевого подпредставления T_1' в T_1 и любого ненулевого подпредставления T_2' в T_2 существует ненулевой *сплетающий оператор* из T_1' в T_2'.

Ю. А. Неретин.

КВАНТОВАНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ТОРОВ – процедура, сопоставляющая k-параметрическому семейству k-мерных торов $\Lambda(I_1, \ldots, I_{k-1}, E)$ в $2n$-мерном фазовом пространстве $M^{2n} = T^*M^n$ с комплексным ростком (см. *Изотропное подмногообразие* с комплексным ростком) (где $(I_1, \ldots, I_{k-1}, E) \in \mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^k$ – параметры) последовательности асимптотических собственных чисел $E_\nu(h)$ и функций $\psi_\nu(x, h)$ (спектральную серию) h-дифференциального или псевдодифференциального оператора $\hat L = L(-ih\nabla_x, x, h)$ в конфигурационном пространстве M^n, то есть таких E_ν и ψ_ν, что

$$\hat L\,\psi_\nu = E_\nu\psi_\nu + O(h^N),\ \operatorname{supp}\psi_\nu \to \pi_x\Lambda$$

при $h\to 0$. Здесь $N>1$, $\pi_x\Lambda$ – естественная проекция Λ в M^n, и предполагается, что (Λ, r^n) инвариантно относительно фазового потока g^+_H, задаваемого гамильтонианом $H = L(p, x, 0)$ (старшей частью символа оператора $\hat L$). Числа E_ν, а также соответствующие E_ν числа $I_{1\nu}(h)$, ..., $I_{k-1\nu}(h)$ из $\mathfrak{M}$ определяются из условий квантования

$$\frac{1}{2\pi h}\oint_{\gamma_j}\omega^2 = Q_j \bmod 1,\quad j = 1, \ldots, k,$$

где γ_j – базисные циклы на Λ, ω^2 – 2-форма, задающая симплектич. структуру на M^{2n}, Q_j – нек-рые характеристики (Λ, r^n). Функции ψ_ν вычисляются с помощью (комплексного) *Маслова канонического оператора* (см. [1], [2]).

Если $k=0$, Λ – устойчивая в линейном приближении точка покоя, формулы для E_ν, ψ_ν совпадают с формулами осцилляторного приближения.

Если $k=1$, Λ – орбитально устойчивая в линейном приближении замкнутая траектория гамильтоновой системы с гамильтонианом H, если $\hat L/h^2 \equiv \Delta$ – оператор Бельтрами – Лапласа на римановом многообразии M^n, то проекция Λ на M^n – устойчивая в линейном приближении замкнутая геодезическая, ψ_ν сосредоточены в ее окрестности (см. [3], [4]).

Если $k=n$ (k принимает максимальное значение), то Λ – (полномерный) лагранжев тор и комплексный росток отсутствует, O_j – индекс цикла Маслова γ_j.

Лит.: [1] Маслов В. П., Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, М., 1977; [2] Белов В. В., Доброхотов С. Ю., «Доклады АН СССР», 1988, т. 298, № 5, с. 1037–42; [3] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [4] Доброхотов С. Ю., Маслов В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 23, М., 1983, с. 137–222.

С. Ю. Доброхотов.

***pq*- и *qp*-КВАНТОВАНИЕ** – квантования алгебры функций на линейном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, в которых функциям (символам) вида $p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}q_1^{\beta_1}\ldots q_n^{\beta_n}$ ставятся в соответствие операторы $\hat p_1^{\alpha_1}\ldots\hat p_n^{\alpha_n}\hat q_1^{\beta_1}\ldots\hat q_n^{\beta_n}$ в случае pq-квантования и $\hat q_1^{\beta_1}\ldots\hat q_n^{\beta_n}\hat p_1^{\alpha_1}\ldots\hat p_n^{\alpha_n}$ в случае qp-квантования, где $\hat q_j$, $\hat p_j$ – операторы координат и импульсов, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям:

$$[\hat q_j, \hat q_k] = [\hat p_j, \hat p_k] = 0,\quad [\hat p_j, \hat q_k] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik},$$

$\hbar$ – постоянная Планка. В q-представлении (в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ с операторами $\hat q_j = x_j, \hat p_j = \frac{\hbar}{t}\frac{\partial}{\partial x_j}$) общие формулы pq-квантования и qp-квантования ставят в соответствие функции $f=f(p, q)$ операторы $\hat f_{pq}$ и $\hat f_{qp}$ вида

$$\hat f_{pq}\,u(x) = (2\pi\hbar)^{-n}\int e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot(x-y)}f(p,y)u(y)\,dy,$$

$$\hat f_{qp}\,u(x) = (2\pi\hbar)^{-n}\int e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot(x-y)}f(p,x)u(y)\,dy.$$

Лит.: [1] Березин Ф. А., Шубин М. А., Уравнение Шредингера, М., 1983. *М. А. Шубин.*

КВАНТОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ – общее название обобщений *квантовой теории поля*, основанных на гипотезе о существовании *фундаментальной длины* как одной из универсальных физических постоянных (наряду с $\hbar$ и c). Ближайшая цель таких обобщений – освобождение от *расходимостей*, появляющихся в традиционной квантовой теории поля. (См. также *Нелокальная квантовая теория поля*.)

При построении теории, описывающей явления микромира, классич. представления о пространстве и времени, в частности представление о принципиальной возможности сколь угодно точного измерения расстояний (длин) и промежутков времени, были без каких-либо изменений перенесены в новую область. Введение фундаментальной (минимальной) длины l соответствует предположению, что измерение малых расстояний возможно лишь с ограниченной точностью порядка l (и времени – с точностью порядка l/c).

Существует несколько способов введения фундаментальной длины. Один из них связан с переходом от непрерывных значений координат к дискретным величинам (наподобие правил квантования Бора в первоначальной теории атома), другие – с заменой координат и времени на некоммутирующие между собой *операторы* (наподобие операторов координаты $\hat{x}$ и импульса $\hat{p}$ в квантовой механике), вследствие чего координаты не могут иметь точных значений в данный момент времени. Вид операторов подбирается так, чтобы средние значения координат могли принимать лишь значения, кратные фундаментальной длине l. Во всех вариантах введение минимальной длины исключает существование волн с длиной $\lambda < l$, то есть как раз тех квантов бесконечно большой энергии $\mathscr{E} = 2\pi\hbar c/\lambda$, с к-рыми связано появление ультрафиолетовых расходимостей. Однако введение фундаментальной длины, по-видимому, не устраняет основного противоречия квантовой теории поля, связанного с возможностью неограниченного роста эффективного заряда с уменьшением расстояния. Все же такой пересмотр может оказаться необходимым.

Лит.: [1] Марков М. А., Гипероны и К-мезоны, М., 1958; [2] Блохинцев Д. И., Пространство и время в микромире, М., 1970.

КВАНТОВАНИЯ УСЛОВИЙ ПОПРАВКИ – числовые топологические характеристики лагранжевых подмногообразий (одномерные классы когомологий), возникающие при построении квазиклассической асимптотики спектральных серий и добавляющиеся, помимо индекса Маслова, в *Бора–Зоммерфельда условия квантования* за счет деформации симплектической структуры или при замене стандартного фазового пространства нетривиальным расслоением (со связностью). Такие поправки появляются в уравнениях с операторными коэффициентами и учитываются по теории (см. [1]), напр., в условии квантования с периодич. магнитным полем (см. [2], [3]). Аналогичную структуру имеют поправки к условиям квантования *изотропных подмногообразий* с комплексным ростком. К. у. п. дают также деформации скобок Пуассона между симметриями или динамич. переменными (см. [4]).

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [2] Berry M. V., «Proc. Roy. Soc. London», 1984, v. A392, p. 45–57; [3] Буслаев В. С., «Успехи математич. наук», 1987, т. 42, в. 6, с. 77–98; [4] Воробьев Ю. М., Карасев М. В., «Доклады АН СССР», 1987, т. 297, № 6, с. 1294–98. *Ю. М. Воробьев.*

КВАНТОВАНИЯ УСЛОВИЯ Маслова – см. *Маслова канонический оператор.*

КВАНТОВАННОЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Маслова канонический оператор.*

КВАНТОВАЯ ГЕОМЕТРОДИНАМИКА – см. *Квантовая теория гравитации.*

КВАНТОВАЯ ГРУППА – по существу, то же, что *Хопфа алгебра.* Группе G соответствует алгебра Хопфа A, состоящая из функций на G, где умножение поточечное, а коумножение $\Delta\colon A \to A \otimes A$ переводит $f \in A$ в функцию φ на $G \times G$:

$$\varphi(g, h) = f(gh)$$

(функции на $G \times G$ принадлежат $A \otimes A$). Так получается биекция между обычными группами и коммутативными алгебрами Хопфа. Произвольную (не обязательно коммутативную) алгебру Хопфа A естественно рассматривать как алгебру функций на К. г. Напр., алгебру A с образующими t_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, соотношениями

$$[t_{12}, t_{21}] = 0,$$

$$[t_{11}, t_{22}] = (e^{h} - e^{-h}) t_{12} t_{21},\ t_{i1},\ t_{i2} = e^{h} t_{i2} t_{i1},$$

$$t_{1j} t_{2j} = e^{h} t_{2j} t_{1j},\ t_{11} t_{22} - e^{h} t_{12} t_{21} = 1,$$

где h – постоянная Планка, и коумножением

$$\Delta(t_{ij}) = t_{i1} \otimes t_{1j} + t_{i2} \otimes t_{2j}$$

можно рассматривать как алгебру функций на квантованной группе $SL(2)$. К. г. (в частности, квантовые аналоги группы функций одного переменного со значениями в простой группе Ли) естественным образом возникают в квантовом методе обратной задачи.

См. также *Кольцевая группа.*

Лит.: [1] Дринфельд В. Г., «Зап. науч. семинаров ЛОМИ», 1986, т. 155, с. 18–49; [2] Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., «Алгебра и анализ», 1989, т. 1, в. 1, с. 178–206. *В. Г. Дринфельд.*

КВАНТОВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА – см. *Динамическая полугруппа.*

КВАНТОВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА в узком смысле – это C^*-алгебра вместе с двухпараметрическим семейством $\{\Theta_t^s\}$ согласованных относительно композиции $\Theta_r^t \circ \Theta_t^s = \Theta_r^s$, $r < t < s$, эндоморфизмов Θ_t^s, $t < s$, имеющих обычно пространственный вид $\Theta_t^s(a) = V_t^{s*} a V_t^s$, где $V_t^s\colon H \to H$, $t < s$, – изометрические (унитарные) пропагаторы, удовлетворяющие условию

$$V_t^s V_r^t = V_r^s,\ r < t < s.$$

Квантовая динамическая система в широком смысле описывается (см. [1], [2]) согласованным семейством $\{\Theta_t^s | t \leqslant s\}$ линейных вполне положительных отображений $\Theta_t^s\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию нормировки $\Theta_t^s(1) = 1$ относительно единицы $1 \in \mathfrak{A}$. Отображения $\{\Theta_t^s\}$ определяют *квантовую регрессию* хронологически-упорядоченных корреляционных форм, с к-рыми теорема реконструкции (см. [1]) связывает однозначно минимальный квантовый марковский процесс $\pi_t\colon \mathfrak{A} \to \mathscr{B}(H)$, удовлетворяющий условию динамичности

$$\pi_t \circ \Theta_t^s(a) = E_t \pi_s(a) E_t,\ a \in \mathfrak{A},$$

относительно ортопроекторов $E_t = \pi_t(1)$.

В стационарном случае $\Theta_t^s = \Theta(s-t)$ динамич. отображения $\Theta(s) = \Theta_0^s$ образуют полугруппу $\Theta(s)\Theta(r) = \Theta(s+r)$, структура генераторов к-рой установлена в равномерном случае (см. [2]).

Лит.: [1] Белавкин В. П., «Теоретич. и математич. физика», 1985, т. 62, № 3, с. 409–31; [2] Lindblad G., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 48, № 1, p. 119–30. *В. П. Белавкин.*

КВАНТОВАЯ КОСМОЛОГИЯ – см. *Квантовая теория гравитации.*

КВАНТОВАЯ ЛОГИКА – множество высказываний о всевозможных событиях в физической системе, составляющих ее микроскопическое описание (см. [1]). В отличие от классич. логики, подчиняющейся законам булевой алгебры, высказывания К. л. образуют (см. [2]) более общую ортомодулярную структуру (решетку) относительно логич. порядка «a влечет b», обозначаемого $a \leqslant b$, и инволютивной операции отрицания $a \mapsto \bar{a}$, $\bar{\bar{a}} = a$, обращающей этот порядок:

$a \leqslant b \Rightarrow \bar{b} \leqslant \bar{a}$. Конъюнкция $\wedge$ и дизъюнкция $\vee$, определяемые как точные грани $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$, с нулем $\mathbb{0} = a \wedge \bar{a}$ — наименьшим элементом и единицей $\mathbb{1} = a \vee \bar{a}$ — наибольшим элементом, обладают свойствами идемпотентности, коммутативности, ассоциативности, совместимости и двойственности, образующими аксиомы булевой алгебры за исключением аксиомы дистрибутивности. Конкретным примером недистрибутивной К. л. является множество подпространств гильбертова пространства H, или множество $P(H)$ соответствующих им ортопроекторов в H с естественным порядком $a \leqslant b \Leftrightarrow ab = a$, ортодополнением $\bar{a} = a^{\perp}$ в качестве операции отрицания и нулевым и единичным ортопроекторами в качестве элементов $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$. Вместо условия дистрибутивности в такой К. л. выполняется более слабое свойство ортомодулярности $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$, если $a \leqslant \bar{b} \leqslant c$. Связь между логич. и алгебраич. подходами к квантовой теории устанавливается в теории $*$-полуколец (см. [3]), $*$-идемпотенты к-рых образуют квантовую полулогику.

Лит.: [1] Макки Д., Лекции по математическим основам квантовой механики, пер. с англ., М., 1965; [2] Piron C., Foundation of quantum physics, L., 1976; [3] Белавкин В. П., «Доклады АН СССР», 1987, т. 293, № 1, с. 18–21.

В. П. Белавкин.

КВАНТОВАЯ МАРКОВСКАЯ СИСТЕМА, квантовый марковский процесс,— квантовая стохастическая система (процесс) $\{\mathfrak{A}_t\}$, $\mathfrak{A}_t = \pi_t(\mathfrak{A})$, на гильбертовом пространстве H, обладающая свойством динамичности $E_t \mathfrak{A}_s E_t \subseteq \mathfrak{A}_t E_t$, $t \leqslant s$, относительно заданного неубывающего семейства $\{E_t\}$ ортопроекторов $E_t \leqslant E_s$, $t \leqslant s$, на $\mathfrak{A}_t$-инвариантные подпространства $\mathscr{E}_t = E_t H = \mathfrak{A}_t \mathscr{E}_t$. Состояние открытой квантовой системы $\{\mathfrak{A}_t\}$, описываемое нормированным вектором $\xi \in H$, называется марковским, если стохастич. система $\{\mathfrak{A}_t, \mathscr{E}_t^{\xi}\}$ является марковской относительно фильтрации $\{E_t^{\xi}\}$, определяемой подпространствами, порождаемыми хронологически упорядоченным действием $\pi_{t_n}(a_n) \dots \pi_{t_1}(a_1)\xi$, $t_1 < \dots < t_n \leqslant t$, на вектор состояния ξ. Всякая марковская относительно $\{E_t\}$ квантовая система (процесс) является марковской относительно любой более сильной фильтрации $\{E_t^2\}$, $E_t^1 \leqslant E_t$, и, в частности, относительно максимальной фильтрации $\{E_t^{\xi}\}$, $\xi \in \cap \mathscr{E}_t$, определяющей одну и ту же квантовую динамич. (в широком смысле) систему

$$\Theta_t^s = \pi_t^{-1} \varkappa^s_t, \ \varkappa_t^s(a) = E_t \pi_s(a) E_t$$

в случае обратимости $\pi_t^{\xi} : a \to \pi_t(a) E_t^{\xi}$.

В узком смысле К. м. с. определяется (см. [2]) с помощью согласованной системы $\{\mathscr{E}_t\}$ условных ожиданий $\mathscr{E}_t = \mathscr{E}_t \mathscr{E}_s$, $t \leqslant s$, условием $\mathscr{E}_t(\mathfrak{A}_s) \leqslant \mathfrak{A}_t$ для всех $t \leqslant s$.

Лит.: [1] Белавкин В. П., «Теоретич. и математич. физика», 1985, т. 62, № 3, с. 409–31; [2] Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T., «Publ. RIMS Kyoto Univ.», 1982, v. 18, № 1, p. 97–133.

В. П. Белавкин.

КВАНТОВАЯ ОТКРЫТАЯ СИСТЕМА — совокупность *наблюдаемых* в картине Гейзенберга, описывающая некоторый квантовый объект, эволюционирующий в большой системе. К. о. с. алгебраически отвечает параметризованное временем t семейство $\{\mathfrak{A}_t\}$ C^*-подалгебр $\mathfrak{A} \subseteq B(H)$ алгебры ограниченных операторов в нек-ром гильбертовом пространстве H. Обычно такие алгебры $\mathfrak{A}_t$ содержат единицу $I \in \mathfrak{A}_t$ и определяются унитарно эквивалентными представлениями

$$\pi_t : \mathfrak{A} \to B(H), \ U_t \pi_t(a) = \pi_0(a) U_t$$

начальной C^*-алгебры $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$, $\pi_0(a) = a$.

Рассматривают и более общие семейства $\{\mathfrak{A}\}$, требуя, напр., вместо унитарности $U_t^* = U_t^{-1}$ изометричность $U_t^* U_t = I$ пропагаторов U_t или предполагая, что $\mathfrak{A}_t = \pi_t(\mathfrak{A})$ определяются представлениями $\{\pi_t\}$ квантового случайного процесса (см. [1], [2]) с единицей $E_t = \pi_t(1) \leqslant E_s$, $t \leqslant s$.

Первоначально К. о. с. отождествлялись с квантовыми динамическими в широком смысле системами, определяющими слабое описание квантовых марковских процессов (см. [3]). К понятию К. о. с. приводит не только рассмотрение «малой» квантовой системы, взаимодействующей с «термостатом», но также и исследование процессов измерения и управления (см. [4]) в квантовых динамич. системах, включающее в рассмотрение наряду с объектом взаимодействующие с ним квантовые каналы.

Лит.: [1] Accardi L., Frigerio A., Lewis J. I., «Publ. RIMS Kyoto Univ.», 1982, v. 18, № 1, p. 97–133; [2] Белавкин В. П., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 2, с. 137–38; [3] Davies E. B., Quantum theory of open systems, L.– [a. o.], 1976; [4] Belavkin V. P., in: Information complexity and control in quantum phisics, CISM, № 294, Wien – N. Y., 1987, p. 311–29.

В. П. Белавкин.

КВАНТОВАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ для состояний φ_1, φ_2 на алгебре матриц $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{C})$ — выражение

$$s(\varphi_1, \varphi_2) = \tau(\rho_1 \log \rho_2 - \rho_2 \log \rho_1) \geqslant 0, \qquad (1)$$

где τ — след на $\mathcal{M}$, а ρ_k, $k = 1, 2$,— матрицы плотности, так что $\varphi_k(a) = \tau(\rho_k a)$, $a \in \mathcal{M}$ и $\tau(\rho_k) = 1$. Формула (1), пригодная для нормальных состояний на $\mathcal{M} = \mathscr{B}(H)$, $\dim H = \infty$, где τ — след оператора в H, и на любой полуконечной алгебре Неймана $\mathcal{M}$ введена для некоммутативного аналога величины в классич. теории информации. При $\mathcal{M} = \mathscr{B}(H)$ начато изучение взаимосвязи К. о. э. и *квантовой энтропии* для приложений в теории квантовых измерений и др. В отличие от квантовой энтропии Неймана, (1) не зависит от наличия следа на $\mathcal{M}$. К. о. э. распространена на нормальные состояния общих алгебр Неймана и на положительные линейные функционалы на C^*-алгебрах. Так, если $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана в стандартной форме, $\Delta_{1,2}$ — относительный модулярный оператор для φ_1, φ_2 и Φ — вектор-представитель φ_2 в естественном положительном конусе, то

$$s(\varphi_1, \varphi_2) = -(\Phi, \log \Delta_{1,2} \Phi), \qquad (2)$$

когда носитель $\operatorname{supp} \varphi_1 \geqslant \operatorname{supp} \varphi_2$; иначе $s(\varphi_1, \varphi_2) = +\infty$. Рассмотрены положительные функционалы на общих $*$-алгебрах с единицей $\mathbb{1}$. Даны разные вариационные выражения К. о. э. для положительных функционалов на W^* или C^*-алгебрах, напр.

$$s(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x(t)} \int_0^{\infty} [\varphi_2(\mathbb{1})(1+t)^{-1} -$$

$$-\varphi_2(y(t)^* y(t)) - t^{-1} \varphi_1(x(t) x(t)^*)] t^{-1} dt, \qquad (3)$$

где $x(t) \in \mathcal{M}$ — ступенчатые функции, $y(t) = \mathbb{1} - x(t)$. Все упомянутые конструкции К. о. э. эквивалентны. Обозначения могут отличаться и порядком аргументов φ_1, φ_2 и знаком; предлагалось называть К. о. э. величину $-s(\varphi_2, \varphi_1)$, в том числе для удачной интерпретации статистич. выводов и вариационных результатов. Изучается К. о. э. $s_N(\varphi_1, \varphi_2)$ и как мера возможности различать состояния по измерениям величин из подалгебры или подпространства $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.

А. В. Булинский.

КВАНТОВАЯ РЕГРЕССИЯ — представление хронологически упорядоченных корреляционных форм $\varkappa^{t_1 \dots t_n}_{a_1 \dots a_n}$, слабо описывающих квантовый случайный процесс относительно заданного вектора марковского состояния $\xi \in H$ в виде композиции

$$\varkappa^{t_1 \dots t_n}_{a_1 \dots a_n} = \sigma_{t_1}(a_1^* \Theta^{t_2}_{t_1}(a_2^* \dots \Theta^{t_n}_{t_{n-1}}(a_n^* a_n) \dots a_2)\, a_1)$$

текущего состояния σ_t на алгебре $\mathfrak{A}$ и переходных отображений

$$\Theta_t^s : \sigma_t \to \sigma_t \circ \Theta_t^s = \sigma_s, \ t \leqslant s.$$

Всякая квантовая марковская система (процесс) обладает свойством регрессии относительно

$$\sigma_t(a^*a) = \|\pi_t(a)\xi\|^2,\ \xi \in \cap \mathscr{E}_t \text{ и } \Theta_t^s \in \pi_t^{-1} \circ \varkappa_t^s,$$

где $\varkappa_t^s(a) = E_t \pi_s(a) E_t$ и π_t^{-1} – (квази-)обращение представлений π_t на инвариантных подпространствах $\mathscr{E}_t = E_t H$. Теорема реконструкции (см. [2]) позволяет с помощью формулы регрессии однозначно восстановить минимальное представление квантовой марковской системы (процесса), описанной в широком смысле согласованным семейством $\{\Theta_t^s | t \leqslant s\}$ нормированных вполне положительных динамич. отображений $\Theta_t^s : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ с заданным начальным состоянием σ_0: $\mathfrak{A} \to \mathbf{C}$.

Лит.: [1] Lindblad G., «Comm. Math. Phys.», 1979, v. 65, № 3, p. 281–97; [2] Белавкин В. П., «Теоретич. и математич. физика», 1985, т. 62, № 3, с. 409–31; [3] Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T., «Publ. RIMS Kyoto Univ.», 1982, v. 18, № 1, p. 97–133.

В. П. Белавкин.

КВАНТОВАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – квантовая открытая система $\{\mathfrak{A}_t\}$ на гильбертовом пространстве H с заданной фильтрацией $\{E_t\}$, $E_t \subseteq E_s$, $t \leqslant s$, $\mathfrak{A}_t$-инвариантных подпространств $E_t \subseteq H$, определяемая обычно (см. [1]) представлениями π_t: $\mathfrak{A} \to \mathscr{B}(H)$ квантового случайного процесса $\{\pi_t\}$ над C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$ с единицей $1 \in \mathfrak{A}$ и вектором состояния $\xi \in E_t$. В силу $\mathfrak{A}_t$-инвариантности $\mathfrak{A}_t E_t = E_t$ относительно $\mathfrak{A}_t = \pi_t(\mathfrak{A})$ векторы

$$\xi^{t_1 \dots t_n}_{a_1 \dots a_n} = \pi_{t_n}(a_n) \dots \pi_{t_1}(a_1)\xi$$

при $t_1 < \dots < t_n \leqslant t_n$ принадлежат E_t для любых $a_i \in \mathfrak{A}$ и порождают минимальные $\mathfrak{A}_t$-инвариантные подпространства $E_t^\xi = V\left\{\xi^{t_1 \dots t_n}_{a_1 \dots a_n}\right\}$ представления квантового случайного процесса $\{\pi_t\}$. Теорема реконструкции (см. [1]) позволяет восстановить с точностью до унитарной эквивалентности минимальное представление К. с. с. над $\mathfrak{A}$, нормированное на ортопроекторы $E_t^\xi = \pi_t$, соответствующие E_t^ξ, по хронологически упорядоченным корреляционным формам

$$\varkappa^{t_1 \dots t_n}_{a_1 \dots a_n} = \left\| \xi^{t_1 \dots t_n}_{a_1 \dots a_n} \right\|,$$

дающим широкое (слабое) описание этой системы в терминах вероятностей последовательных измерений, всевозможных квантовых эффектов в состоянии ξ.

Лит.: [1] Белавкин В. П., «Теоретич. и математич. физика», 1985, т. 62, № 3, с. 409–31; [2] Lindblad G., «Comm. Math. Phys.», 1979, v. 65, № 3, p. 281–94.

В. П. Белавкин.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ – квантовополевая теория гравитационного взаимодействия. Поскольку гравитационное взаимодействие универсально (в нем одинаково участвуют все виды материи, независимо от их конкретных свойств), то считается, что построение полной, законченной К. т. г. неотделимо от построения *единой квантовой теории* всех физич. полей. Такая единая теория еще не создана, и в настоящее время под общим термином «К. т. г.» объединяют несколько более частных и относительно самостоятельных направлений: квантовую теорию собственно гравитации, теорию негравитационных квантовых полей в искривленном пространстве-времени, квантовую космологию и квантовую теорию черных дыр, квантовую супергравитацию и многомерные единые теории поля. Предполагается, что эти направления в будущем сольются и станут частями полной К. т. г. Особенностью развития К. т. г. является то, что она носит пока чисто теоретич. характер и не опирается на лабораторные эксперименты или астрономич. данные. Это обусловлено тем, что в наблюдаемых процессах во Вселенной и в лабораторных условиях квантовые эффекты, связанные с гравитацией, чрезвычайно малы. К. т. г. строится по образу квантовой теории других полей материи, в особенности *Янга – Миллса полей*, и исходя из условия согласованности с ними.

Квантовая теория собственно гравитации (обычно называемая К. т. г.) основана на квантовании классич. теории гравитационного взаимодействия – общей теории относительности Эйнштейна. Наибольшая ясность достигнута в случае, когда гравитационное поле слабое. При этом метрич. тензор искривленного пространства-времени, определяющий все его геометрич. свойства, имеет вид:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad (1)$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ – метрич. тензор *Минковского пространства-времени*, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда в первом приближении общая теория относительности сводится к релятивистской теории свободного безмассового поперечного тензорного поля $h_{\mu\nu}$ – *гравитационных волн* – в плоском пространстве-времени. В квантовой теории величины $g_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu}$ становятся операторами. Стандартная процедура квантования показывает, что гравитационные волны можно рассматривать как поток квантов – гравитонов, представляющих собой нейтральные частицы с нулевой массой покоя и со спином 2 (в единицах $\hbar$). Спиральность гравитона (проекция его спина на направление движения) всегда равна ± 2. Гравитоны подчиняются *Бозе – Эйнштейна статистике* и могут неограниченно накапливаться в одном квантовом состоянии, образуя когерентный конденсат, к-рый представляет собой классич. гравитационную волну.

Аналогично вектор-потенциалу электромагнитного поля $h_{\mu\nu}$ является *калибровочным полем*: уравнения поля не изменяются при замене

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial a_\nu}{\partial x^\mu}, \qquad (2)$$

где a_μ – произвольное векторное поле. *Калибровочная инвариантность* теории классич. слабого гравитационного поля есть следствие общей ковариантности общей теории относительности. Соответственно требование калибровочной инвариантности накладывается на квантовую теорию гравитонов, а также (после надлежащего ковариантного обобщения преобразования (2)) на К. т. г. в целом.

Нелинейность общей теории относительности приводит к нелинейности К. т. г.; в следующем порядке теории возмущений по $h_{\mu\nu}$ гравитоны начинают взаимодействовать друг с другом и со всеми остальными квантовыми частицами. Типичный процесс – рассеяние гравитона на гравитоне:

$$g + g \to g + g;$$

его сечение

$$\sigma \sim l_{Pl}^2 (\mathscr{E}/m_{Pl}c^2)^2, \qquad (3)$$

где $m_{Pl} = (\hbar c/G)^{1/2} \approx 10^{-5}$ г, $m_{Pl}c^2 \approx 10^{19}$ ГэВ, G – гравитационная постоянная, $l_{Pl} = \hbar/m_{Pl}c \approx 10^{-33}$ см, $\mathscr{E}$ – полная энергия гравитонов в системе центра инерции ($\mathscr{E} \ll m_{Pl}c^2$). Величины l_{Pl} и m_{Pl} называются соответственно планковскими длиной и массой, поскольку их впервые ввел М. Планк (M. Planck), исходя из соображений размерности. Ввиду крайней малости l_{Pl} это сечение ничтожно мало в подавляющем большинстве процессов во Вселенной.

Другими процессами такого типа, к-рые интересны с принципиальной точки зрения, являются двухгравитонное рождение пары частица-античастица любого негравитационного квантового поля и обратный процесс двухгравитонной аннигиляции пары:

$$g + g \rightleftarrows N + \tilde{N}.$$

Если $\mathscr{E} \gg m_N c^2$, где m_N – масса покоя частицы N, то сечение обоих процессов также дается формулой (3). Таким образом, на квантовом уровне обнаруживается взаимопревращаемость всех видов материи, включая гравитационное поле.

Из-за наличия *калибровочной симметрии* поле $h_{\mu\nu}$ содержит лишние степени свободы, соответствующие нефизич. значениям спиральности 0, ± 1. Поэтому, как и в случае электромагнитного поля, возможны два способа квантования: каноническое и ковариантное. В первом случае для построения К. т. г. используется нековариантный *гамильтонов формализм*. При этом релятивистская ковариантность теории нарушается путем выбора нек-рой системы отсчета и расщепления единого 4-мерного пространства-времени на отдельные пространство и время [так наз. $(3+1)$-расщепление], после чего все нефизич. степени свободы в принципе могут быть исключены. Доказывается, однако, независимость всех физич. результатов от выбора системы отсчета. Это направление в К. т. г. известно также под названием квантовой геометродинамики, а его основное уравнение, представляющее собой обобщение *Шредингера уравнения* на случай гравитационного поля с бесконечным числом степеней свободы, называется уравнением Уилера–де Витта. При ковариантном квантовании гравитационного поля используется *лагранжев формализм*, к-рый позволяет сохранить релятивистскую ковариантность на всех этапах вычислений. Нефизич. степени свободы не исключаются явно, но их вклад во все физич. процессы компенсируется введением вспомогательных полей (так наз. *Фаддеева–Попова духов*), обладающих неправильной связью спина со статистикой. Доказана формальная эквивалентность канонич. и ковариантного квантования во всех порядках по $h_{\mu\nu}$.

Однако практич. расчет физич. процессов в высших порядках теории возмущений по $h_{\mu\nu}$, для к-рых *Фейнмана диаграммы* содержат более одной замкнутой гравитонной петли (замкнутая петля изображает пару виртуальных гравитонов), оказывается невозможным из-за неперенормируемости К. т. г., основанной на лагранжиане общей теории относительности. Причина этой фундаментальной трудности в том, что в лагранжиан общей теории относительности (после его деления на $\hbar$) входит размерная константа l_{Pl}^2. Поэтому диаграммы, содержащие все большее количество гравитонных петель, формально приводят к появлению бесконечного числа расходящихся *радиационных поправок* к лагранжиану общей теории относительности, к-рые нельзя устранить *перенормировкой*. Если ограничиваться расчетом только тех диаграмм Фейнмана, в к-рых внешние гравитонные линии лежат на массовой поверхности, то есть соответствуют реальным гравитонам (удовлетворяющим классич. уравнениям Эйнштейна в пустоте $R_{\mu\nu}=0$, где $R_{\mu\nu}$ – так наз. тензор Риччи, выражающийся через $g_{\mu\nu}$ и его первые и вторые производные по координатам), то диаграммы, содержащие только одну гравитонную петлю, оказываются конечными ввиду обращения в нуль всех возможных общековариантных *контрчленов* в данном порядке. Поэтому К. т. г. на массовой поверхности конечна в однопетлевом приближении. Начиная с диаграмм Фейнмана, имеющих две гравитонные петли, К. т. г. не является конечной даже на массовой поверхности.

В настоящее время рассматриваются три подхода к проблеме неперенормируемости К. т. г. Первый из них связан с переходом к квантовой супергравитации и с надеждой найти такую теорию, к-рая, несмотря на наличие размерной константы в лагранжиане, окажется конечной на массовой поверхности. Из-за наличия дополнительной симметрии число расходимостей в квантовой супергравитации уменьшается. В частности, уже простейшая ее разновидность – так наз. $N=1$ супергравитация, содержащая в дополнение к гравитону безмассовую фермионную спиральную частицу со спином 3/2 (гравитино), оказывается конечной на массовой поверхности в двухпетлевом приближении (вследствие обращения в нуль всех возможных обще- и суперковариантных контрчленов). Пока не удалось построить ни одного варианта квантовой супергравитации, для к-рого была бы доказана конечность в трехпетлевом приближении. Основные надежды здесь связываются с наиболее симметричным и богатым физич. полями вариантом – $N=8$ супергравитацией. Другой, альтернативный подход основан на видоизменении общей теории относительности путем добавления в ее лагранжиан квадратичных по тензору Риччи общековариантных членов. Коэффициенты при этих членах оказываются безразмерными, так что эта процедура ведет к построению перенормируемой К. т. г. Как и в других перенормируемых квантовых теориях, для констант связи этого варианта К. т. г. можно написать уравнения *ренормализационной группы*. Возникающая в результате этого зависимость констант связи от энергии отвечает (при соответствующем выборе знака констант) случаю *асимптотической свободы* (как и для полей Янга – Миллса), то есть константы логарифмически убывают с ростом энергии $\mathscr{E}$ при $\mathscr{E} \gg m_{Pl}c^2$. В такой К. т. г., помимо обычного гравитона, содержатся еще две массивные универсально взаимодействующие частицы: со спином 0 и со спином 2 (на классич. уровне это соответствует тому, что уравнения теории представляют собой дифференциальные уравнения 4-го порядка для $g_{\mu\nu}$). Учет радиационных поправок приводит к нестабильности массивных частиц: они могут распадаться на пару гравитонов или пару частица-античастица любых квантовых негравитационных полей. Массивная частица со спином 2 представляет собой основную трудность для данного подхода: она является или тахионом (масса покоя мнимая), или, при другом знаке соответствующей константы связи, духом, а именно, ее масса действительна (если пренебречь возможностью распада), но энергия отрицательна. Пока неизвестно, ведет ли существование такой частицы к каким-либо неприемлемым физич. следствиям.

Третий подход связан с идеей построения квантовой теории всех взаимодействий (включая гравитационное) без ультрафиолетовых расходимостей на основе нелокальных фундаментальных объектов – *суперструн*. Доказано, что в низкоэнергетич. ($\mathscr{E} \ll m_{Pl}c^2$) пределе теории суперструн возникает общая теория относительности с гравитонами. Квантовые поправки к общей теории относительности, к-рые должны вытекать из теории суперструн, еще не рассчитаны количественно.

В любом варианте К. т. г. следует ожидать, что на масштабах порядка l_{Pl} относительные квантовые флуктуации метрич. тензора $g_{\mu\nu}$ становятся порядка единицы, в результате чего понятие классич. геометрии пространства-времени теряет смысл. В этих условиях, возможно, испытывает сильные флуктуации также и топология пространства-времени (в классич. общей теории относительности топология задается как начальное условие и не изменяется с течением времени). При усреднении по масштабам $l \gg l_{Pl}$ эти флуктуации сглаживаются.

Теория негравитационных квантовых полей в искривленном пространстве-времени. Это направление в К. т. г. занимается исследованием методов квантования негравитационных полей на фоне классич. гравитационного поля (к-рое описывается метрич. тензором $g_{\mu\nu}$ искривленного пространства-времени), а также связанных с этим квантовых физич. процессов в сильных гравитационных полях. Гравитационное поле приводит к изменению свойств физич. вакуума квантовых полей; возникают эффекты поляризации вакуума и (за исключением нек-рых частных случаев) рождения пар частица-античастица. Эти эффекты не являются специфически гравитационными; аналогичные эффекты имеют место, напр., для электронно-позитронного вакуума во внешнем классич. электромагнитном поле; разница связана лишь с универсальностью взаимодействия гравитационного поля со всеми физич. квантовыми полями. Важнейшей величиной, характеризующей оба этих эффекта, является среднее значение оператора тензора энергии – импульса квантового поля

$$\langle \hat{T}_\mu^\nu \rangle = \langle \Psi | T_\mu^\nu | \Psi \rangle$$

по нек-рому *вектору состояния* $|\Psi\rangle$, к-рый задается началь-

ными условиями. Выбор $|\Psi\rangle$ зависит от конкретной задачи. Если пространство- время было плоским при $t\to-\infty$ или его можно считать таковым, то в качестве $|\Psi\rangle$ обычно берут физич. вакуум в пространстве-времени Минковского (при $t\neq-\infty$ это состояние в общем случае уже не является вакуумом из-за эффекта рождения частиц). Для вычисления $\langle\hat{T}^{\nu}_{\mu}\rangle$ необходимо провести регуляризацию расходящихся интегралов (как и обычно в квантовой теории поля). Доказано, что для произвольного $|\Psi\rangle$ эта регуляризация может быть проведена общековариантным образом и в случае невзаимодействующих квантовых полей сводится к перенормировке четырех констант в (обобщенном) лагранжиане гравитационного поля: так наз. космологич. постоянной Λ (аддитивной константы в лагранжиане), гравитационной постоянной G и двух безразмерных констант, стоящих перед двумя общековариантными выражениями, квадратичными по тензору Риччи $R_{\mu\nu}$. Теории взаимодействующих квантовых полей, перенормируемые в плоском пространстве-времени, остаются перенормируемыми и в искривленном классич. пространстве-времени. Перенормировка приводит к изменению структуры $\langle\hat{T}^{\nu}_{\mu}\rangle$ по сравнению с тензором энергии-импульса классич. теории. В частности, возникает так наз. конформная аномалия: тензор $\langle\hat{T}^{\nu}_{\mu}\rangle$ может иметь ненулевой след, даже если след классич. тензора энергии-импульса был равен нулю.

Поскольку гравитационная постоянная G не входит в уравнения движения физич. полей в искривленном пространстве-времени, то она не входит и в $\langle\hat{T}^{\nu}_{\mu}\rangle$. Поэтому характерной длиной для квантовой теории полей в искривленном пространстве-времени является не l_{Pl}, а связанная с интенсивностью гравитационного поля длина

$$l_g=(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma})^{-1/4},$$

где $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ – тензор кривизны. В большинстве интересных для приложений случаев (сюда относятся, в частности, метрики космологич. моделей и метрики черных дыр в окрестности их *гравитационного радиуса*) масштаб, на к-ром гравитационное поле существенно изменяется, также $\sim l_g$. Тогда условие $l_g\ll l_{Pl}$ есть условие возможности классич. описания гравитационного поля. Вклад в $\langle\hat{T}^{\nu}_{\mu}\rangle$ от эффектов поляризации вакуума и рождения пар частиц в общем случае разделить нельзя; как показывает расчет, типичная величина плотности вакуумной энергии квантовых полей с массой покоя частиц $m\ll\hbar/cl_g$ (в том числе безмассовых) оказывается порядка

$$\varepsilon_{\text{вак}}=\langle\hat{T}^{0}_{0}\rangle\sim\hbar c/l_g^4. \qquad (4)$$

Если рождение частиц не подавлено какой-либо специальной симметрией пространства-времени, то при $m\ll\hbar/cl_g$ энергия рождающихся частиц

$$\mathscr{E}\sim\hbar c/l_g,$$

а локальная скорость изменения плотности числа частиц (n) за счет их рождения (при усреднении по пространственно-временным масштабам, много большим l_g) равна

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{d(\sqrt{-g}n)}{dt}\sim cl_g^{-4},\quad g=\det(g_{\mu\nu}). \qquad (5)$$

В противоположном случае $m\gg\hbar/cl_g$ рождение частиц экспоненциально подавлено, а вакуумный тензор энергии-импульса определяется только поляризацией вакуума:

$$\varepsilon_{\text{вак}}\sim\hbar^3/cm^2l_g^6.$$

Методы теории квантовых полей в искривленном пространстве-времени находят практич. приложение для расчета физич. эффектов в квантовой космологии и квантовой теории черных дыр.

К в а н т о в а я к о с м о л о г и я представляет собой применение К. т. г. (главным образом теории негравитационных квантовых полей в искривленном пространстве-времени) к начальным стадиям расширения Вселенной вблизи сингулярности. Наиболее важным достижением квантовой космологии является построение конкретных моделей (сценариев) так наз. и н ф л я ц и о н н о й (р а з д у в а ю щ е й с я) В с е л е н н о й, в к-рых Вселенная на раннем этапе своей эволюции проходила через стадию э к с п о н е н ц и а л ь н о г о р а с ш и р е н и я (называемой также д е ситтеровской, поскольку метрика пространства-времени при этом приближенно совпадает с метрикой де Ситтера, описывающей пространство-время постоянной кривизны; см. *Де Ситтера пространство-время*). Сценарий раздувающейся Вселенной позволяет объяснить основные крупномасштабные свойства наблюдаемой в настоящее время части Вселенной (в частности, высокую степень ее однородности и изотропии), исходя только из гипотезы о прохождении Вселенной через де ситтеровскую стадию в прошлом. Радиус 4-мерной кривизны l_g на этой стадии либо постоянен, либо медленно изменяется от значения l_{Pl} до величины порядка $10^5\,l_{Pl}$ в конце стадии. Согласно этому сценарию, в настоящее время кривизна 3-мерного пространства практически равна нулю, так что наблюдаемая часть Вселенной с большой точностью ($\sim10^{-4}$) находится как раз на границе между открытой и закрытой моделями Фридмана. Полная плотность энергии материи ε должна равняться критической:

$$\varepsilon_{\text{кр}}=3c^2H^2/8\pi G,$$

где H – постоянная Хаббла.

Эффекты К. т. г. проявляются в сценарии раздувающейся Вселенной двояким образом. Во-первых, само существование де ситтеровской стадии может быть обязано квантовым поправкам к общей теории относительности (другая возможная причина экспоненциального расширения – гравитационное отталкивание, вызванное потенциальной энергией нек-рого скалярного поля, возникающего в супергравитационных теориях). Во-вторых, разновидностью эффекта рождения частиц является эффект усиления вакуумных квантовых флуктуаций того эффективного скалярного поля, к-рое ответственно за существование де ситтеровской стадии.

Этот эффект приводит к стохастич. эволюции эффективного скалярного поля и метрики пространства-времени на де ситтеровской стадии, зависимости продолжительности этой стадии от пространственных координат и к генерации возмущений метрики пространства-времени (отклонений от однородности и изотропии), к-рые обусловливают образование галактик и их скоплений. Общее предсказание простейших вариантов сценария раздувающейся Вселенной – независимость среднеквадратичной амплитуды возмущений метрики от длины волны возмущения λ (с точностью до степеней $\ln\lambda$) на стадии, когда $\lambda\gg l_g$. Эти возмущения приводят также к появлению малой анизотропии температуры реликтового излучения:

$$\Delta T(\vartheta,\varphi)/T\sim10^{-5}$$

в мультиполях, начиная с квадруполя и выше (ϑ, φ – углы на небесной сфере). Эта анизотропия, в отличие от наблюдаемой дипольной анизотропии ($\sim10^{-3}$), не связана с собственным движением Солнца и нашей Галактики. В настоящее время наблюдательный верхний предел на такую анизотропию составляет приблизительно $3\cdot10^{-5}$. Расчет показывает, что зависимость среднеквадратичной амплитуды анизотропии $\Delta T/T$ от номера мультиполя l должна иметь вид (после суммирования по всем сферич. гармоникам с данным l)

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_l\sim\left[\frac{2l+1}{l(l+1)}\right]^{1/2},\quad 2\leqslant l\leqslant30, \qquad (6)$$

что является решающим тестом на правильность сценария раздувающейся Вселенной (с одним эффективным скаляр-

ным полем, ответственным за возникновение де ситтеровской стадии).

Кроме того, эффект рождения гравитонов на де ситтеровской стадии приводит к возникновению изотропного нетеплового фона стохастич. гравитационных волн со спектральной плотностью энергии

$$d\varepsilon_g/d\nu = B\varepsilon_\gamma/\nu$$

в интервале частот

$$10^{-16} \ll \nu\,(\text{Гц}) \ll 10^{10},$$

$B = \text{const} \leqslant 10^{-10}$, где ε_γ – полная плотность энергии реликтового электромагнитного излучения в настоящее время. Эти гравитационные волны генерируют дополнительную анизотропию $\Delta T/T$, мультипольная зависимость к-рой также должна приближенно иметь вид (6) (с погрешностью $\leqslant 20\%$).

Квантовая теория черных дыр занимается главным образом исследованием эффектов рождения частиц и поляризации вакуума в гравитационном поле черных дыр. Основной результат состоит в том, что невращающаяся черная дыра массы M излучает рожденные кванты как термодинамически равновесное (не абсолютно черное) тело с температурой $T_{\text{ЧД}}$ (масса M выражена в г):

$$kT_{\text{ЧД}} = \hbar c^3/8\pi GM \approx k\cdot 10^{26}\, M^{-1}\,\text{K} \approx 10^{16}\, M^{-1}\ \text{МэВ} \quad (7)$$

и в результате «испаряет» в окружающее пространство свою массу – энергию *Хокинга эффекта*. Рождение частиц происходит из-за существования *горизонта событий* черных дыр и нестатичности метрики пространства-времени под горизонтом. Излучение рожденных частиц черной дырой подчиняется закону Кирхгофа. Спектр излучения черных дыр близок к чернотельному; отличие связано с тем, что черная дыра не является абсолютно поглощающей для падающего на нее излучения (или квантовых частиц) с длиной волны $\geqslant$ гравитационного радиуса черной дыры (излучение частично рассеивается внешним гравитационным полем черной дыры). Для черной дыры с массой порядка массы Солнца ($2\cdot 10^{33}$ г) эффект количественно ничтожен, но важен в принципиальном отношении, так как приводит к конечности времени существования черных дыр

$$t_{\text{ЧД}} \approx 10^{-27}\, M^3\ \text{(г) (в секундах)}.$$

Эффект Хокинга мог бы быть наблюдаем непосредственно для черной дыры с малой массой $M \sim 10^{15}$ г, находящихся достаточно близко от Земли. Такие черные дыры не могут возникнуть в результате коллапса звезд, но они могли образоваться на ранних стадиях эволюции Вселенной (так наз. первичные черные дыры). Первичные черные дыры с начальной массой $M \sim 10^{15}$ г должны были испариться к настоящему моменту, более массивные черные дыры остаются практически неизменными. Черные дыры с $M \sim 10^{15}$ г в стационарном режиме испарения являются источниками γ-излучения и ультрарелятивистских электронов и позитронов с характерными энергиями

$$\mathscr{E} \approx 5kT_{\text{ЧД}} \sim 50\ \text{МэВ}.$$

Мощность, излучаемая таким объектом в виде фотонов, должна быть равна

$$P_\gamma \approx 6\cdot 10^8\,(M/10^{15}\ \text{г})^{-2}\ \text{Вт},$$

а в виде $e^\pm$ – в 5 раз больше. С течением времени, вследствие уменьшения массы черной дыры, скорость ее испарения возрастает. Процесс завершается «квантовым взрывом» черной дыры, когда за последнюю секунду ее жизни выделяется энергия 10^{23} Дж.

Для вращающейся черной дыры кроме эффекта Хокинга существует и другой эффект рождения частиц, связанный с наличием у нее *эргосферы*. Как показывает расчет, излучение рожденных частиц вращающейся черной дыры под суммарным действием обоих эффектов сохраняет тепловой характер с эффективной температурой $T_{\text{ЧД}}$, к-рая получается из (7) заменой

$$M \text{ на } 1/2\,M\left(1 + M/\sqrt{M^2 - a^2}\right), \quad a = Jc/GM < M,$$

где J – полный угловой момент черной дыры.

Квантовые гравитационные эффекты приводят также к кардинальной перестройке внутреннего строения вращающихся или электрически заряженных черных дыр под их горизонтом событий (при этом исчезают так наз. горизонты Коши), к запрету на образование *белых дыр* во Вселенной и к существованию нижнего предела массы у черной дыры (в том числе у первичных черных дыр):

$$M > m_{Pl}.$$

Возможно, что при

$$M \sim m_{Pl}$$

возникают объекты, промежуточные по своим свойствам между черными дырами и элементарными частицами.

В настоящее время поиски анизотропии реликтового электромагнитного излучения с мультипольной зависимостью (6) или излучения от первичных черных дыр (если они существуют) являются наиболее перспективными с точки зрения обнаружения первых наблюдаемых следствий эффектов К. т. г.

Многомерные единые теории поля. К К. т. г. непосредственно примыкают многомерные единые теории всех взаимодействий, включая гравитационное. Объединение пространственно-временной симметрии с внутренними (см. *Внутренняя симметрия*) и калибровочными симметриями сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий достигается в этих теориях путем введения искривленного пространства-времени размерности $4 + d$, где d – натуральное число (одна координата является временной, остальные – пространственными). Предполагается, что дополнительные d измерений каким-либо образом компактифицируются в замкнутое d-мерное пространство (в простейшем случае – в d-мерную сферу) с характерными размерами порядка l_{Pl}. Симметрия этого d-мерного пространства определяет симметрию сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий. С точки зрения макроскопич. наблюдателя в 4-мерном мире такие теории содержат бесконечное число квантовых полей. При этом кванты тех полей, к-рые не зависят от координат d-мерного пространства, имеют массу покоя $m \ll m_{Pl}$, а остальные являются очень тяжелыми ($m \geqslant m_{Pl}$) и не проявляются поэтому в лабораторных экспериментах. Первый, простейший вариант такой теории ($d = 1$) рассматривался еще в 20-е гг. Т. Калуцой (Th. Kaluza) и О. Клейном (O. Klein). В настоящее время наибольший интерес представляет 10-мерная теория ($d = 6$), к-рая возникает в низкоэнергетич. ($\mathscr{E} \leqslant m_{Pl}c^2$) пределе более фундаментальной теории двумерных объектов – суперструн. Она является конечной в однопетлевом приближении при определенном выборе группы симметрии *великого объединения взаимодействий*: сильного, электромагнитного и слабого и может быть конечной во всех петлях.

Лит.: [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [2] Общая теория относительности, под ред. С. Хокинга, В. Израэля, пер. с англ., М., 1983; [3] Бирделл Н., Девис П., Квантованные поля в искривленном пространстве-времени, пер. с англ., М., 1984; [4] Линде А. Д., «Успехи физич. наук», 1984, т. 144, с. 177; [5] Новиков И. Д., Фролов В. П., Физика черных дыр, М., 1986. *А. А. Старобинский.*

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ МНОГИХ ЧАСТИЦ – совокупность теоретических методов, применяемых для описания квантовомеханических систем, состоящих более чем из двух частиц. Поскольку *Шредингера уравнение* для таких систем не может быть решено точно, речь идет о приближенных методах.

Уравнение Шредингера при решении квантовомеханич. задач в системах многих частиц обычно используется в представлении *вторичного квантования*. Координатное и импульсное представления в этом случае менее удобны, поскольку число измерений пространства, в к-ром пишется это уравнение, растет с увеличением числа частиц.

Следует различать методы, применяемые для описания систем из конечного числа частиц, и методы описания макроскопич. тел. В первом случае типичной является постановка задачи о нахождении волновых функций и уровней энергии системы. Во втором случае подразумевается переход к термодинамич. пределу, когда объем тела и число частиц в нем формально устремляются к бесконечности с сохранением конечной плотности числа частиц. Типичной постановкой задачи в этом случае является определение энергии основного состояния системы и распределения частиц по импульсам, нахождение спектра элементарных возбуждений (квазичастиц) и кинетич. коэффициентов системы.

Основой ряда методов теории многих частиц является *возмущений теория*, применяемая в случаях, когда потенциальная энергия взаимодействия между частицами достаточно мала. Для двух частиц, взаимодействующих посредством потенциала с конечным радиусом действия, условие этой малости состоит в малости амплитуды рассеяния по сравнению с радиусом действия. Для частиц, взаимодействующих по закону Кулона, оно сводится к требованию малости потенциальной энергии по сравнению с кинетической на расстоянии порядка длины волны. Формальное применение теории возмущений приводит к выражениям для характеризующих систему величин в виде ряда по целым степеням потенциальной энергии. В нек-рых случаях члены этого формального ряда оказываются бесконечными – содержащими расходящиеся интегралы, что обычно свидетельствует об ошибочности предположения о разложимости по целым степеням потенциала, даже при условии применимости теории возмущений для взаимодействия двух частиц. В этом случае для получения конечного результата приходится суммировать бесконечные последовательности наиболее расходящихся членов ряда. Характерным примером является вычисление термодинамич. функций системы заряженных частиц, где для получения конечного результата необходимо учитывать экранировку потенциала каждой из частиц остальными частицами. Другой пример – вычисление энергии основного состояния слабонеидеального бозе-газа, в к-ром отличное от нуля значение энергии возникает только при учете взаимодействия. В обоих случаях разложение термодинамич. функций системы содержит дробные степени потенциала взаимодействия. Своеобразна ситуация в сверхпроводниках, где термодинамич. функции электронного газа содержат экспоненциально малые по потенциалу взаимодействия члены. Эти члены исчезают в любом порядке теории возмущений, однако именно с ними связан сверхпроводящий фазовый переход.

Наиболее совершенной формой теории возмущений является диаграммная техника. Она применяется чаще всего для вычисления функции Грина системы, полюсы к-рой определяют энергии квазичастиц, а интеграл от к-рой по частотам – распределение частиц системы по импульсам. Каждый член ряда теории возмущений изображается в диаграммной технике в виде совокупности нескольких диаграмм Фейнмана, для аналитич. записи к-рых существуют стандартные правила. Диаграммная техника оказывается особенно эффективной для упомянутого выше суммирования наиболее расходящихся членов ряда теории возмущений. Различные диаграммы в одном и том же порядке теории возмущений имеют различный физич. смысл и могут обладать разной степенью расходимости. Суммирование расходимостей в этом случае сводится к имеющему наглядный физич. смысл выделению определенных графич. последовательностей диаграмм. Важное преимущество диаграммной техники – возможность корректной оценки отброшенных членов и тем самым определения условий применимости сделанных приближений.

Существуют нек-рые возможности вычисления функций Грина без применения теории возмущений. В теории имеются точные соотношения, выражающие функции Грина более низкого порядка через функции более высокого порядка (одночастичную через двухчастичную и т. д.). Если на основании тех или иных физич. соображений удается выразить многочастичные функции через одночастичные – произвести «расцепление», то для одночастичной функции получается замкнутое уравнение, допускающее непосредственное решение. При таком подходе метод функций Грина близок к методу цепочек квантовых функций распределения.

Большие возможности открывает запись функций Грина в виде бесконечнократного *функционального интеграла*. Для приближенного вычисления последнего существуют методы, принципиально отличные от теории возмущений, напр. *перевала метод*.

Если условие применимости теории возмущений для взаимодействия пар частиц не выполняется, но система является настолько разреженной, что амплитуда рассеяния двух частиц мала по сравнению с межчастичным расстоянием, применимо приближение *вириального разложения*. Характеризующие систему физич. величины получаются в виде ряда по степеням плотности числа частиц, причем последовательные члены ряда соответствуют взаимодействию пар, троек и т. д. частиц и выражаются через амплитуды парного рассеяния и амплитуды рассеяния более высоких порядков.

В нек-ром смысле обратная ситуация имеет место в тяжелых атомах, где создаваемый электронами электрич. потенциал медленно меняется на расстоянии порядка длины волны электрона. Электроны в таком атоме можно рассматривать как квазиклассич. ферми-газ, находящийся во внешнем поле, определяющемся самим распределением электронов. Для этого потенциала получается замкнутое уравнение Томаса – Ферми (см. *Томаса – Ферми метод*).

В том случае, когда при постановке многочастичной задачи не удается найти малый параметр, используя малость к-рого можно искать приближенное решение, важную роль играют вариационные методы. Эти методы основаны на том обстоятельстве, что средняя энергия системы, вычисленная для нек-рой нормированной волновой функции, будет минимальна при вычислении по истинной волновой функции основного состояния. Аналогично волновая функция первого возбужденного состояния имеет минимальную энергию среди всех функций, ортогональных к функции основного состояния, и т. д. Простейший вариант применения этого метода состоит в подборе нек-рой функции, удовлетворяющей определенным общим требованиям и зависящей от нескольких параметров. Минимизация энергии по этим параметрам может дать достаточно точные результаты, особенно в системе из небольшого числа частиц. Точность зависит при этом от удачного выбора вида «пробной» функции, близкого к виду истинной волновой функции.

В применении к атомным системам хорошую точность дает метод *самосогласованного поля* (метод Хартри–Фока). Этот метод состоит в том, что волновая функция системы электронов записывается в виде линейной комбинации произведений функций, каждая из к-рых зависит от координат только одного электрона. Линейные комбинации подбираются таким образом, чтобы удовлетворить необходимым условиям симметрии, соответствующим, напр., определенным значениям орбитального момента атома. Для самих же одночастичных функций в результате минимизации энергии получается нелинейное уравнение типа уравнения Шредингера с потенциалом, зависящим от самих волновых функций. Можно сказать, что электрон движется в самосогласованном поле, определяемом всеми остальными электронами. В отличие от уравнения Томаса – Ферми, для этого потенциала, однако, не предполагается применимость *квазиклассического приближения*.

Большие успехи достигнуты при исследовании электронных свойств металлов. Наибольший интерес представляет расчет энергетич. спектров электронов в зоне проводимости. Важную роль здесь играет метод псевдопотенциала. В простейшем варианте этого метода волновые функции электронов заполненных зон принимаются равными волновым функциям свободных ионов, а волновые функции электронов в зоне проводимости выбираются в

виде линейной комбинации плоских волн и волновых функций заполненных оболочек так, чтобы эти комбинации были ортогональны к волновым функциям заполненных оболочек. В результате задача сводится к уравнению типа уравнения Шредингера, в к-ром, однако, вместо потенциала стоит линейная комбинация обычного самосогласованного потенциала и нек-рого связанного с упомянутой ортогонализацией выражения, зависящего от энергии состояния и волновых функций электронов в ионах. Эту сумму и называют п с е в д о п о т е н ц и а л о м. Он оказывается относительно малым из-за компенсации указанных двух членов, так что уравнение можно решать по теории возмущений. Это позволяет получить весьма полную информацию о свойствах конкретных металлов. В частности, малость псевдопотенциала позволила объяснить известную эмпирически близость многих наблюдаемых свойств электронов в металлах к свойствам невзаимодействующих электронов.

Лит.: [1] Г о м б а ш П., Проблема многих частиц в квантовой механике, пер. с нем., М., 1952; [2] А б р и к о с о в А. А., Г о р ь к о в Л. П., Д з я л о ш и н с к и й И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962; [3] Х а р р и с о н У., Псевдопотенциалы в теории металлов, пер. с англ., М., 1968; [4] М а р ч Н., Я н г У., С а м п а н т х а р С., Проблема многих тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1969; [5] З а й м а н Дж., Современная квантовая теория, пер. с англ., М., 1971; [6] Л и п к и н Г., Квантовая механика, пер. с англ., М., 1977; [7] Л и ф ш и ц Е. М., П и т а е в с к и й Л. П., Статистическая физика, ч. 2, М., 1978.

Л. П. Питаевский.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – теория релятивистских квантовых явлений. По существу, К. т. п. является наиболее фундаментальной из физич. теорий. Нерелятивистская квантовая механика и релятивистская классич. теория поля являются ее предельными случаями, первая – при скоростях, много меньших скорости света, вторая – при величинах действия, много больших постоянной Планка. В основе К. т. п. лежит представление о том, что все частицы являются квантами соответствующих физич. полей. К. т. п. изучает процессы рождения, взаимодействия и уничтожения элементарных частиц.

Методы К. т. п. лежат в основе *квантовой электродинамики*, *квантовой хромодинамики*, *великого объединения модели*, стандартной модели электрослабого взаимодействия. Все эти теории являются как бы отдельными главами К. т. п.

См. также *Аксиоматическая квантовая теория поля, Конструктивная квантовая теория поля, Нелинейная квантовая теория поля, Нелокальная квантовая теория поля.*

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 2, М., 1979, с. 829–837; [2] Физическая энциклопедия, т. 2, М., 1990, с. 300–09; см. также *лит.* к статьям в [1] и [2].

Л. Б. Окунь.

КВАНТОВАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – см. *Хаос.*

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА – калибровочная теория сильных взаимодействий, описывающая взаимодействие цветных *кварков* и *глюонов*; возникла как результат развития *кварковой модели* адронов. В 1964 М. Гелл-Ман (M. Gell-Mann) и Г. Цвейг (G. Zweig) предположили, что адроны могут быть построены из гипотетич. фундаментальных частиц – кварков, причем *мезоны* (адроны с целым спином) являются системами кварков и антикварков, а *барионы* (адроны с полуцелым спином) – трех кварков или трех антикварков (см. [1]). По современным представлениям, основанным на изучении адронной спектроскопии и анализе экспериментальных данных в рамках объединенной *Глэшоу – Вайнберга – Салама модели*, должны существовать по меньшей мере шесть различных типов кварков: *u*-, *d*-, *s*-, *c*-, *b*-, *t*-кварки. Они обладают спином, равным 1/2, и дробными электрич. зарядами

$$Q_u = Q_c = Q_t = 2/3,\ Q_d = Q_s = Q_b = -1/3.$$

В настоящее время имеются косвенные экспериментальные свидетельства существования первых пяти типов кварков (то есть наблюдались адроны, содержащие эти кварки). Адроны, включающие в себя *t*-кварк, пока не открыты.

Важнейшим ингредиентом кварковой модели и К. х. является понятие *цвета*, при определении к-рого постулировано существование у кварков дополнительного квантового числа, принимающего для каждого типа кварков три значения. Другими словами, существуют три *u*-кварка u_1, u_2, u_3, три *d*-кварка d_1, d_2, d_3 и т. д. Постулируется, что сильные взаимодействия инвариантны относительно группы цветовой симметрии $SU_c(3)$, причем каждый триплет кварков по цвету реализует фундаментальное представление этой группы. Для цветового триплета кварковых полей q_i, $i = 1, 2, 3$, соответствующее преобразование записывается в виде

$$q_i(x) \to q_i(x) + i\left(\frac{\Lambda_a}{2}\right)_{i,j} \omega^a q_j(x), \qquad (1)$$

где $a = 1, \ldots, 8$, Λ_a – матрицы Гелл-Мана (генераторы группы $SU(3)$), а ω^a – групповые параметры (для простоты ограничиваются малыми преобразованиями с параметрами $\omega^a \ll 1$). Введение цвета позволило, во-первых, рассматривать кварки как подчиняющиеся статистике Ферми – Дирака в соответствии с фундаментальной теоремой квантовой теории поля о связи спина и статистики и, во-вторых, привести в соответствие с экспериментальными данными предсказания кварковой модели для процессов распада π-мезона на два фотона и электрон-позитронной аннигиляции в адроны.

К. х. возникает, если предположить, что цветовая симметрия имеет локальный характер, то есть что сильное взаимодействие инвариантно относительно преобразований (1) с параметрами $\omega^a(x)$, зависящими от пространственно-временной точки x. Это требует введения в дополнение к кварковым полям октета калибровочных *Янга – Миллса полей* $A^a_\mu(x)$, $a = 1, 2, \ldots, 8$, число к-рых равно рангу калибровочной группы, в рассматриваемом случае группы $SU_c(3)$. Безмассовые векторные частицы (кванты этих полей) называются г л ю о н а м и. Инвариантность по отношению к локальным преобразованиям цветовой группы вместе с требованиями перенормируемости однозначно фиксирует вид классич. лагранжиана К. х.:

$$\mathscr{L}^c_{\text{К.х.}} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} + i \sum\nolimits_{q=u,d,\ldots} \bar{q}\left(i\gamma_\mu D^{ij}_\mu - m_q\right) q_j, \qquad (2)$$

где

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^q_\nu - \partial_\nu A^q_\mu + i g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu,$$

$$D_\mu = \delta^{ij}\partial_\mu - i g A^a_\mu (\Lambda^a)_{ij}$$

– тензор напряженностей глюонного поля, f^{abc} – структурные константы группы $SU_c(3)$, m_q – масса кварка типа q. Лагранжиан (2) по построению инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований кварковых полей (1) и глюонных полей вида:

$$A^a_\mu(x) \to A^a_\mu(x) + f^{abc}\omega^b(x) A^c_\mu(x) + \partial_\mu \omega^q(x). \qquad (3)$$

Последовательная процедура квантования локально калибровочно инвариантных лагранжианов построена в 1967 Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым, а также, независимо, Б. де Виттом. В классе ковариантных α-калибровок применение этой процедуры к (1) приводит к эффективному лагранжиану вида:

$$\mathscr{L}^{\text{eff}}_{\text{К.х.}} = \mathscr{L}^c_{\text{К.х.}} - \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)^2 + \partial_\mu \bar{\eta}^\alpha \left(\partial_\mu \delta^{ac} - f^{abc} A^b_\mu\right)\eta^c. \qquad (4)$$

По сравнению с квантовой электродинамикой новым элементом здесь являются «ду́хи» – скалярные поля $\bar{\eta}^a$ и η^a, подчиняющиеся статистике Ферми–Дирака. Эти поля необходимы для соблюдения условия унитарности в физич. секторе теории. Исходя из эффективного лагранжиана, стандартным образом могут быть введены правила Фейнмана для вычисления соответствующих функций Грина по теории возмущений. Теория, описываемая лагранжианом (4), является перенормируемой (количество независимых перенормировочных констант конечно). Существенную роль в доказательстве этого утверждения играют так наз.

Славнова – Тейлора тождества, связывающие различные функции Грина и являющиеся следствием калибровочной инвариантности лагранжиана (2). Перенормированные квантовохромодинамич. функции Грина зависят от кварк-глюонной константы связи $\alpha_s = g^2/4\pi$, масс кварков и точки нормировки μ. Зависимость от последней возникает вследствие известной конечной неопределенности в выборе перенормировочных констант (см. [5]).

Примечательной особенностью К. х. является свойство *асимптотической свободы*: эффективная константа связи $\bar{\alpha}_s(\mu)$, подчиняющаяся стандартному уравнению ренормализационной группы

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu} \bar{\alpha}_s(\mu) = \beta(\alpha_s), \qquad (5)$$

убывает в ультрафиолетовой области. Из явных вычислений функции $\beta(\bar{\alpha}_s)$ в двух первых порядках теории возмущений следует, что

$$\bar{\alpha}_s(\mu) = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln(\mu^2/\Lambda^2)}\left(1 - \frac{6(153-19n_f)\ln(\ln(\mu^2/\Lambda^2))}{(33-2n_f)\ln^2(\mu^2/\Lambda^2)}\right), \qquad (6)$$

где n_f – число кварков с массой меньшей μ, Λ – так наз. параметр шкалы К. х. Физич. смысл Λ состоит в том, что числовое значение этого параметра характеризует масштаб области сильной связи в К. х. При выводе формулы (6) полностью игнорировались эффекты масс кварков, то есть рассматривалась идеализированная ситуация, когда влиянием кварков с массой больше μ полностью пренебрегалось. В этом приближении зависящие от n_f члены в формуле (6) меняются дискретным образом, когда пересекаются кварковые пороги. В области больших импульсных передач μ эффективная константа связи $\bar{\alpha}_s(Q) = \bar{\alpha}_3(\mu = 0)$ логарифмически падает, то есть в этом пределе К. х. превращается в теорию слабо взаимодействующих между собой кварков и глюонов. Этот факт позволяет использовать улучшенную с помощью аппарата ренормализационной группы (см. [6]) теорию возмущений для надежного нахождения функций Грина в области больших импульсов Q (то есть когда $\alpha_s(Q) < c$), что соответствует на координатном языке малым расстояниям. В отличие от квантовой электродинамики, сама возможность осмысленного применения теории возмущений в К. х. базируется на предварительном использовании соотношений ренормализационной группы. Свойство асимптотич. свободы позволило физически обосновать справедливость партонной картины сильных взаимодействий, в рамках к-рой адроны при определенных условиях можно рассматривать как совокупности почти не взаимодействующих между собой составляющих – партонов.

Как следует из формулы (6), при уменьшении Q эффективная константа связи $\bar{\alpha}_s(Q)$ растет и $\geqslant 1$ при Q, приближающемся к Λ. Точное поведение $\bar{\alpha}_s(Q)$ при $Q \leqslant \Lambda$ в настоящее время неизвестно; сама теория возмущений и, следовательно, формула (6) неприменимы в этой области вследствие немалости эффективной константы связи. Во всяком случае, это означает, что в К. х. взаимодействие при малых переданных импульсах, то есть на больших расстояниях, в отличие от квантовой электродинамики, становится сильным, что не позволяет непосредственно использовать лагранжиан (4) для определения наблюдаемого спектра одночастичных состояний в этой теории. Согласно гипотезе *конфайнмента*, все физич. состояния в К. х. бесцветны, то есть являются синглетами по отношению к цветовой группе $SU_c(3)$. Кварки и глюоны, реализуя фундаментальное и, соответственно, присоединенное представления группы $SU_c(3)$, не могут существовать в свободном состоянии как физич. частицы. При этом экспериментально наблюдаемые сильно взаимодействующие частицы – адроны – представляют собой бесцветные связанные состояния кварков и глюонов. Одним из следствий гипотезы конфайнмента является естественное объяснение отсутствия дробно заряженных адронов, что подтверждается всей существующей совокупностью экспериментальных данных. В настоящее время строгое доказательство этого явления отсутствует и детальный механизм удержания кварков внутри адронов неясен. Одно из популярных качественных объяснений гипотезы конфайнмента состоит в том, что на больших по сравнению с $\hbar c/\Lambda$ расстояниях сила притяжения кварка и антикварка друг к другу не зависит от расстояния между ними и, следовательно, потенциальная энергия их взаимодействия пропорциональна этому расстоянию. Именно такое поведение потенциальной энергии было найдено в рамках так наз. решеточного приближения в К. х. (см. *Вильсона критерий конфайнмента*).

Опосредованный характер К. х. и трудности с доказательством гипотезы конфайнмента значительно усложняют задачу экспериментальной проверки достоверности этой теории и нахождения значения фундаментального параметра Λ. Несмотря на это, к настоящему времени имеется значительное число количественных предсказаний К. х., подтвержденных экспериментально. Большая часть этих результатов получена с помощью теории возмущений. Из предыдущего следует, что теория возмущений К. х. могла бы быть применима для количественного описания так наз. жестких процессов с большим переданным импульсом Q, для к-рых эффективная константа связи $\bar{\alpha}_s(Q)$ достаточно мала. Естественно ожидать, что в итоге должно быть возможным воспроизведение в случае жестких процессов основных результатов кварк-партонной модели и найти к ним поправки, связанные с высшими членами теории возмущений по $\bar{\alpha}_s$. Главная, до сих пор не решенная окончательно трудность в реализации этой программы заключается в том, что информацию о реальных адронных процессах приходится извлекать из функций Грина кварковых и глюонных полей (возможно, со вставками локальных операторов, составленных из этих полей), рассматриваемых в области больших евклидовых импульсных передач, к-рые лишь и могут надежно вычисляться в рамках теории возмущений. Тем не менее, в нек-рых важных частных случаях, к к-рым относятся, в частности, полное сечение электрон-позитронной аннигиляции в адроны и инклюзивные глубоко-неупругие лептон-адронные реакции, эту проблему можно обойти. В результате оказалось возможным не только обосновать наблюдаемое экспериментально приблизительно автомодельное поведение соответствующих сечений, но и предсказать позднее обнаруженные экспериментально логарифмич. отклонения от этого поведения, возникающие вследствие вкладов высших порядков теории возмущений.

К сожалению, метод операторных разложений непосредственно не применим к рассмотрению более сложных жестких процессов, таких, как рождение $\mu^+\mu^-$ пар, упругих электромагнитных адронных формфакторов или рождения частиц с большим поперечным импульсом в адронных столкновениях, закономерности асимптотич. поведения к-рых хорошо описываются правилами кваркового счета (см. [7]). В этом случае вместо разложений Вильсона используют прямой анализ диаграмм Фейнмана, дающих вклад в изучаемый процесс. Несмотря на то что такой подход существенно более трудоемок и сталкивается с определенными технич. трудностями, с его помощью также удается подтвердить предсказания кварк-партонной модели и формул кваркового счета и вычислить по крайней мере первый неисчезающий поправочный член порядка $\bar{\alpha}_s$ для жестких процессов. Во всех случаях, в к-рых предсказания К. х. для жестких процессов сравнивались с экспериментальными данными, наблюдалось взаимное согласие. При этом определяемое в разных процессах значение масштабного параметра Λ оказывается лежащим в относительно узком интервале: $\Lambda = 100 \div 300$ МэВ (если принять во внима-

ние существование эффектов высших порядков и так наз. эффектов высших твистов, то есть членов $\sim\left(\frac{\Delta}{Q}\right)^n$, подавленных степенным образом по сравнению с ведущими.

Важную роль в теоретич. изучении К. х. и ее экспериментальных следствий играют непертурбативные (то есть выходящие за рамки обычной теории возмущений по константе кварк-глюонной связи α_s) методы, такие как правила сумм *квантовой хромодинамики*, $1/N_c$-разложение, решеточный и квазиклассич. подходы.

Правила сумм К. х. основаны на использовании кварк-адронной дуальности дисперсионных соотношений и операторного разложения на малых расстояниях. В рамках этого подхода статич. параметры низколежащих адронов могут быть приближенно выражены через так наз. вакуумные конденсаты – вакуумные средние калибровочно инвариантных локальных операторов, составленных из кварковых и глюонных полей. Численные значения вакуумных конденсатов рассматриваются как феноменологич. параметры, связанные со сложной структурой физич. вакуума К. х. В обычном подходе, опирающемся на теорию возмущений, эти средние равны нулю. В результате применения правил сумм К. х. оказывается, что массы, электромагнитные и слабые ширины основных мезонных и барионных резонансов могут быть найдены с точностью порядка 20–30%, исходя всего из двух вакуумных конденсатов – кваркового $\langle\bar{q}, q\rangle$ и глюонного $\langle G^a_{\mu\nu}, G^a_{\mu\nu}\rangle$. Более того, метод правил сумм К. х. в последнее время с успехом используется для изучения электромагнитных формфакторов адронов при малых и умеренных импульсных передачах, то есть при Q порядка нескольких ГэВ/с.

Исследование К. х. в рамках квазиклассич. подхода привело к открытию *инстантонов* – решений уравнений Янга–Миллса, рассматриваемых в евклидовом пространстве-времени. Учет инстантонов позволяет найти на качественном уровне решение так наз. $U(1)$-проблемы (существенно большая масса η'-мезона по сравнению с массой π-мезона) и естественно объясняет существование глюонного конденсата. Инстантонные решения непосредственно связаны со сложной структурой физич. вакуума в К. х. Дело в том, что функционал потенциальной энергии полей Янга–Миллса имеет бесконечное количество минимумов, получающихся друг из друга калибровочным преобразованием с параметрами $\omega^a(x)$, неубывающими на пространственной бесконечности, и разделенных потенциальным барьером. Инстантонные решения описывают тунелирование через этот барьер, вероятность к-рого имеет порядок $\sim e^{-4\pi/\alpha_s}$. Вакуум К.х. оказывается инвариантным относительно рассматриваемого калибровочного преобразования с точностью до фазового множителя $e^{i\theta}$. Отличие от нуля параметра θ можно эффективно учесть с помощью добавления к лагранжиану (4) нового члена, имеющего вид полной дивергенции:

$$\mathscr{L}_{\text{К.х.}} = \mathscr{L}^{\text{eff}}_{\text{К.х.}} + i\theta G^a_{\mu\nu} G^a_{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \qquad (7)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга с $\varepsilon_{0123} = -1$. При $\theta \neq 0$ лагранжиан (7) является *CP*-инвариантным. Из ограничения на величину электрич. дипольного момента нейтрона следует, что $|\theta| \leqslant 10^{-9}$. До сих пор нет окончательного ответа на вопрос о причинах такой малости параметра θ (проблема *CP*-сохранения в К. х.).

В рамках решеточного приближения к К. х. основные величины представляются в виде континуальных интегралов, к-рые аппроксимируются повторными интегралами высокой кратности. Последние, в свою очередь, приближенно вычисляются с использованием метода Монте-Карло. Несмотря на нек-рые проблемы, связанные с быстродействием и объемом памяти современных ЭВМ, и ряд технич. трудностей (корректный учет фермионных степеней свободы), к настоящему времени в рамках решеточного подхода получены важные физич. результаты. В частности, с 30%-й точностью рассчитаны значения масс нек-рых адронов, их констант распада, а также величины кварковых и глюонных конденсатов.

Суть метода $1/N_c$-разложения состоит в построении новой теории возмущений, использующей величину $1/N_c$, где N_c – число цветов (в реальном случае $N_c = 3$), в качестве малого параметра. Ведущее приближение соответствует формальному переходу $N_c \to \infty$ в К. х. В этом приближении оказывается возможным при определенных предположениях вывести из К. х. эффективный низкоэнергетичный нелинейный лагранжиан, к-рый совпадает с феноменологич. мезонным лагранжианом, предлагавшимся ранее для описания адронных явлений в области низких энергий. Более того, этот лагранжиан допускает топологически нетривиальные решения – *солитоны*, причем свойства этих решений позволяют отождествить их с барионами.

Суммируя вышесказанное, можно с большой долей уверенности утверждать, что, несмотря на ряд еще не до конца решенных принципиальных вопросов, все адронные процессы могут быть описаны на основе единого лагранжиана (4) и, следовательно, К. х. является адекватной теорией сильных взаимодействий.

В настоящее время К. х. рассматривается как часть единой теории слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий (см. *Великое объединение взаимодействий*).

Лит.: [1] Gell-Mann M., «Phys. Lett.», 1964, v. 8, p. 214–15; [2] Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц, Дубна, 1965; [3] Боголюбов Н. Н. [и др.], Релятивистски-инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы, Дубна, 1965; [4] Han M., Nambu Y., «Phys. Rev.», 1965, v. 139, p. 1006–10; [5] Stueckelberg E., Petermann A., «Helv. phys. acta», 1953, v. 26, p. 499–520; [6] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., «Доклады АН СССР», 1955, т. 103, с. 391–94; [7] Matveev V., Muradyan R., Tavkhelidze A., «Lett. Nuovo Cim.», 1973, v. 7, p. 719–23.

К. Г. Четыркин.

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА; правила сумм – метод изучения сильных взаимодействий, широко применяющийся для определения динамических характеристик адронов, таких как массы, лептонные ширины распадов, формфакторы и т. д. Их вывод опирается на использование дисперсионных соотношений, информацию о структуре спектра низколежащих адронных состояний, а также о поведении амплитуд рассеяния и сечений взаимодействия элементарных и составных частиц при высоких энергиях. Правила сумм имеют вид интегральных соотношений, связывающих между собой теоретич. выражения для спектральных плотностей в дисперсионных соотношениях с поведением в физич. области энергий соответствующих им физич. спектральных плотностей. Теоретич. спектральные плотности правил сумм определяются мнимыми частями вычисляемых в пространственноподобной области энергий функций Грина от составных операторов, интерполирующих рассматриваемые адронные состояния. Физич. спектральные плотности правил сумм параметризуются либо наблюдаемым поведением сечений рассматриваемых процессов, либо суммой резонансных вкладов в данном канале, из к-рых выделяются доминирующие низшие состояния. Правила сумм позволяют установить взаимосвязь между фундаментальными параметрами теории и динамич. характеристиками частиц и их взаимодействий.

Важное значение для создания правил сумм имели правила сумм при конечных энергиях (см. [1]), впервые примененные в теории сильных взаимодействий для установления взаимосвязи процессов рассеяния адронов в прямом и перекрестном каналах. В рамках этого подхода поведение амплитуды рассеяния адронов при высоких энергиях представлялось в виде сумм вкладов от различных полюсов Редже. Развитие идей этого метода позволило сформулиро-

вать гипотезу дуальности сильных взаимодействий (см. [2]), к-рая означает интегральную эквивалентность суммы резонансных вкладов в прямой канал реакции и представления той же амплитуды в виде сумм полюсов Редже в кросс-каналах.

В случае К. х. эта гипотеза эквивалентна утверждению о том, что, несмотря на различие в поведении теоретич. и физич. спектральных плотностей в резонансной области, имеет место приближенное совпадение интегралов от них, причем интегрирование проводится по достаточно большому интервалу энергий с выбранными определенным образом весовыми функциями (так наз. гипотеза глобальной дуальности). Наряду с гипотезой глобальной дуальности существует и более сильная гипотеза локальной дуальности (см. [3]), к-рая предполагает справедливость правила сумм при конечных энергиях при интегрировании по отдельно взятым резонансам.

В К. х. правила сумм при конечных энергиях успешно использовались для исследования процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны (см. [4]), причем асимптотич. поведение соответствующей амплитуды — коррелятора двух электромагнитных токов — определялось с помощью теории возмущений.

Важным свойством правила сумм в К. х. является возможность учета в теоретич. выражении для функций Грина степенных поправок к их ведущему асимптотич. поведению (см. [5]). Учет производится с помощью метода операторного разложения Вильсона на малых расстояниях (см. [6]). Вклады больших расстояний, на к-рых теория возмущений неприменима, параметризуются полуфеноменологич. образом путем введения дополнительных параметров К. х. — отличных от нуля вакуумных матричных элементов от составных операторов, построенных из кварковых и глюонных полей и называемых вакуумными конденсатами (см. [5]). Взаимодействие кварков и глюонов с вакуумными конденсатами характеризуется вычисляемыми по теории возмущений коэффициентными функциями соответствующих операторов. Таким образом, метод правил сумм опирается на идею о разделении (факторизации) вкладов больших и малых расстояний. Значение глюонного конденсата было впервые определено (см. [5]) из анализа экспериментальных данных по электрон-позитронной аннигиляции методом правила сумм после применения преобразования Лапласа.

Значение метода правила сумм для физики элементарных частиц состоит в том, что с его помощью удается обойти трудности количественного описания явления удержания кварков и глюонов внутри адронов (конфайнмента) и оказывается возможным непосредственно связать экспериментальные данные о спектрах и свойствах адронов с фундаментальными параметрами теории, входящими в лагранжиан К. х., и свойствами физич. вакуума.

Лит.: [1] Logunov A.A., Soloviev L.D., Tavkhelidze A.N., «Phys. Lett.», 1967, v. 24 B, p. 181–82; [2] Dolen R., Horn D., Schmid C., «Phys. Rev.», 1968, v. 166, p. 1768–81; [3] Герасимов С. Б., в сб.: Векторные мезоны и электромагнитные взаимодействия, Дубна, 1969, с. 367–85; [4] Chetyrkin K.G., Krasnikov N.V., Tavkhelidze A.N., «Phys. Lett.», 1978, v. 7B, p. 83–84; [5] Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I., «Nucl. Phys.», 1979, v. B147, p. 385–447; [6] Wilson K., «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1499–1512.

А. Л. Катаев.

КВАНТОВАЯ ЭВОЛЮЦИЯ — описание изменения во времени квантового состояния, определяющего временную зависимость функционала σ_t математического ожидания на C^*-алгебре квантовой системы $\mathfrak{A}$, имеющего вид $\sigma_t(a) = \langle\xi|\pi_t(a)\xi\rangle$. Консервативная эволюция замкнутой квантовой системы определяется представлениями Гейзенберга $\pi_t(a) = U_t^* a U_t$ алгебры $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$, описываемыми изометрич. (унитарными) пропагаторами U_t на гильбертовом пространстве H. Стохастич. эволюция *квантовой открытой системы* определяется пропагаторами в пространстве начального представления π_0: $\mathfrak{A} \to \mathcal{B}(H)$ алгебры $\mathfrak{A}$ в C^*-алгебре «большой системы» $\mathcal{B}(H)$. Пропагаторы $U_t = V_0^t$ квантовых динамич. систем удовлетворяют квантовому эволюционному уравнению $V_t^s V_r^t = V_r^s$, $r \leqslant t \leqslant s$, дифференциальная форма к-рого называется уравнением Шредингера. Марковская К. э. описывается двухпараметрич. семейством $\{\Theta_t^s | s \geqslant t\}$ переходных отображений $\sigma_t \mapsto \sigma_t \circ \Theta_t^s$, определяемых как сопряженные к линейным вполне положительным нормированным отображениям Θ_t^s: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, определяющим *квантовую регрессию* квантового марковского процесса. Установлена дифференциальная форма обобщенного эволюционного уравнения Колмогорова–Чепмена $\Theta_r^t \Theta_t^s = \Theta_r^s$ (см. [1]).

Лит.: [1] Lindblad G., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 48, № 1, p. 119–30.

В. П. Белавкин.

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА — раздел *квантовой теории поля*, в котором описывается взаимодействие электромагнитного поля и вещества. В более узком значении — квантовая теория взаимодействия электромагнитного поля Максвелла и электрон-позитронного поля Дирака (называемая также спинорной электродинамикой). Именно в этом, более узком, смысле термин «К. э.» употребляется ниже. К. э. входит составной частью в стандартную электрослабую теорию, объединяющую слабые и электромагнитные взаимодействия элементарных частиц.

Исторически К. э. была первым четко сформулированным разделом квантовой теории поля. Она сложилась в конце 20-х гг. на базе квантовой теории излучения и квантовой теории спинорного поля Дирака.

В основе современной формулировки К. э. лежит модель, содержащая два взаимодействующих между собой релятивистских квантовых поля. Электромагнитное поле характеризуется действительным 4-мерным векторным потенциалом $A_\mu(x)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$; x — пространственно-временная точка. Векторы напряженностей электрич. и магнитного полей выражаются через потенциал $A_\mu(x)$:

$$E_i = F_{0i},\ B_i = \varepsilon_{ijk} F_{jk},\ i, j, k = 1, 2, 3, \qquad (1)$$

где тензор напряженности равен $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, а ε_{ijk} — антисимметричный тензор Леви-Чивита. Поле Дирака описывается комплексным лоренцевым спинором $\psi_\alpha(x)$, $\bar\psi_\beta(x)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$.

Лагранжиан К. э. имеет вид

$$L(x) = -1/4 F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \bar\psi(x)\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu(x))\psi(x) - m\bar\psi(x)\psi(x), \qquad (2)$$

где γ^μ — *Дирака матрицы*, e — заряд электрона, m — его масса. Лагранжиан К. э. инвариантен относительно абелевых калибровочных (градиентных) преобразований

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &\to e^{ie\lambda(x)}\psi(x),\ \bar\psi(x) \to \bar\psi(x) e^{-ie\lambda(x)}, \\ A_\mu(x) &\to A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где $\lambda(x)$ — произвольная действительная функция. Поле A_μ является простейшим (абелевым) калибровочным полем и служит переносчиком взаимодействия между полями материи.

Поля A_μ, ψ и $\bar\psi$ удовлетворяют уравнениям движения, к-рые являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для лагранжиана (2) и представляют собой соответственно уравнения Максвелла и Дирака:

$$\left.\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) &= ej^\nu(x), \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) &= e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $j^\nu(x) = \bar\psi(x)\gamma^\nu\psi(x)$ есть 4-вектор электромагнитного тока.

Квантование системы полей A, ψ, $\bar\psi$, взаимодействующих в соответствии с лагранжианом (2), приводит к К. э.

При этом поле Максвелла A квантуется по Бозе–Эйнштейну, а поле Дирака ψ – по Ферми–Дираку (см. *Перестановочные соотношения*). Согласно общим положениям квантовой теории поля, поля A, ψ, $\bar{\psi}$ после квантования становятся операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям и действующими на вектор состояния системы. Эти операторы удовлетворяют также уравнениям движения, образующим связанную систему дифференциальных уравнений.

Специфика К. э. как калибровочной теории состоит в том, что электромагнитное поле описывается не векторами напряженности (1), средние значения к-рых являются наблюдаемыми величинами, а потенциалом A_μ. Инвариантность лагранжиана относительно локальных преобразований (3) приводит к линейной зависимости уравнений движения для компонент потенциала, в результате чего поле A_μ содержит избыточные – продольные и временные – степени свободы. Для их исключения при классич. рассмотрении обычно накладывают на A_μ те или иные дополнительные условия (напр., условие Лоренца $\partial^\mu A_\mu = 0$). Это приводит к определенным трудностям при квантовании, вызывая необходимость выделять истинно динамич. переменные. Выбор в качестве динамич. переменных четырех компонент потенциала приводит к представлению электромагнитного поля в виде системы со связями. Для квантования таких систем может быть использован разработанный П. Дираком (P. Dirac, 1965) формализм – так наз. обобщенная гамильтонова динамика. В К. э. наряду с ней употребляют также специальную процедуру – так наз. формализм Гупта–Блейлера.

В этом случае условие Лоренца накладывается не на оператор A_μ, а выполняется для средних значений. Релятивистская инвариантность при этом требует введения индефинитной метрики, что приводит в дальнейшем к взаимной компенсации вкладов нефизич. фотонов в наблюдаемые состояния. Альтернативным способом квантования систем со связями является метод, использующий формализм континуального интеграла.

Поскольку система уравнений К. э. не допускает точного решения, ее решают приближенно методом теории возмущений по имеющемуся малому безразмерному параметру $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$, характеризующему интенсивность процессов электромагнитного взаимодействия и называемому постоянной тонкой структуры. Как правило, вычисляют амплитуды вероятностей перехода систем, состоящих из электронов, позитронов, фотонов (и нек-рых других заряженных частиц, напр. мюонов, кварков) из одного (начального) состояния в другое (конечное). Такие амплитуды представляются матричными элементами M матрицы рассеяния и вычисляются в виде разложений по степеням α.

Приложение К. э. к реальным процессам (напр., к комптоновскому рассеянию фотонов на электронах или меллеровскому рассеянию электронов) в наинизшем приближении для матричного элемента $M\alpha\alpha$ приводит к выражениям, находящимся в хорошем количественном согласии с опытом. Относительная погрешность составляет величину порядка α, поэтому возникает необходимость учета высших членов ряда теории возмущений. Эти члены (так наз. *радиационные поправки*) соответствуют вкладам от процессов, содержащих в промежуточных состояниях дополнительные виртуальные частицы – виртуальные фотоны, электроны, позитроны и т. п. Соответствующие матричные элементы, представляемые интегралами по 4-импульсам виртуальных частиц, как правило, расходятся в ультрафиолетовой области (см. *Ультрафиолетовая расходимость*). Проблема ультрафиолетовых расходимостей в течение многих лет препятствовала вычислению радиационных поправок в К. э. и развитию квантовой теории поля в целом.

Проблема была решена во второй половине 40-х гг. в рамках созданной ковариантной формулировки квантовой теории возмущений на основе физич. идеи о перенормировках. В основе метода перенормировок лежит тот факт, что в К. э. все ультрафиолетовые бесконечности могут быть представлены в виде факторов нормировки параметров электрона (его заряда e и массы m) и могут быть устранены перенормировкой этих параметров. Бесконечный характер таких перенормировок не приводит к физич. противоречиям вследствие ненаблюдаемости неперенормированных, «голых» значений e_0 и m_0.

Исторически первой успешной демонстрацией плодотворности идеи об устранении ультрафиолетовых расходимостей с помощью бесконечных перенормировок была работа Х. Бете (H. Bethe, 1947) по нерелятивистскому расчету лэмбовского сдвига уровней в атоме водорода. Ковариантная теория возмущений (1946–49) С. Томонаги (S. Tomonaga), Р. Фейнмана (R. Feynman) и Ю. Швингера (J. Schwinger) позволила создать регулярный метод устранения расходимостей в К. э. и вычислить низшие радиационные поправки к основным эффектам, напр. к магнитному моменту электрона. В 1-й половине 50-х гг. Н. Н. Боголюбовым, Ф. Дайсоном (F. Dyson), А. Саламом (A. Salam) и другими была разработана общая теория перенормировок и для класса перенормируемых взаимодействий построена перенормированная теория возмущений.

Основой практич. вычислений в К. э. являются так наз. правила Фейнмана (см. *Фейнмана диаграммы*). Согласно этим правилам, для вычисления матричного элемента какого-либо процесса в фиксированном порядке теории возмущений следует составить полный набор диаграмм Фейнмана этого порядка и затем каждой из диаграмм по нек-рым правилам соответствия сопоставить определенное математич. выражение. Сумма этих выражений и образует вклад данного порядка в матричный элемент. Общая теория перенормировок позволяет избавиться от всех ультрафиолетовых расходимостей в матричных элементах и получить конечные однозначные результаты в произвольном порядке теории возмущений по степеням α. Конечные вклады высоких порядков можно представить в виде несингулярных кратных интегралов по нек-рым числовым параметрам. Эти параметрич. интегралы в простейших случаях вычисляются аналитически, а в более сложных – численно.

Кроме ультрафиолетовых расходимостей радиационные поправки к процессам с участием заряженных частиц обладают также *инфракрасными расходимостями*, то есть расходимостями при малых значениях импульсов виртуальных частиц, связанными с дальнодействующим характером электромагнитного взаимодействия. Однако эти расходимости отсутствуют в сечении инклюзивных процессов, в к-рых произведено суммирование вероятностей переходов в состояния с произвольным числом «мягких», то есть низкоэнергетич. фотонов (экспериментально такие процессы нельзя отличить от исходного из-за конечной разрешающей способности регистрирующих приборов).

Предсказательная сила К. э. может быть проиллюстрирована на примере вычисления радиационных поправок к аномальному магнитному моменту электрона. Современное теоретич. значение, вычисленное с точностью 10^{-10}, равное

$$\alpha_т = 1{,}15965246(15)\cdot 10^{-3},$$

находится в согласии с экспериментальным значением

$$\alpha_э = 1{,}15965220(4)\cdot 10^{-3},$$

определенным, как видно, с точностью 10^{-11}. При такой точности становится важной погрешность экспериментального измерения значения постоянной тонкой структуры α, проводимого на основе эффекта Джозефсона. Достигнутый уровень соответствия между расчетным и экспериментальным значениями является рекордным в физике.

Для других эффектов К. э.– аннигиляции электрон-позитронной пары, дельбрюковского рассеяния фотонов электромагнитным полем ядра и др.– также характерно отличное согласие теории с экспериментом. Однако по сравнению с аномальным магнитным моментом в них уро-

вень соответствия не столь высок либо из-за меньшей точности эксперимента, либо вследствие существенного влияния эффектов, выходящих за рамки чистой К. э.

Вообще опытные данные по всем без исключения эффектам К. э. находятся в прекрасном согласии с теоретич. значениями в тех случаях, когда влияние других видов взаимодействий оказывается несущественным либо поддается учету. Этот факт имеет принципиальное значение как для К. э., так и для квантовой теории поля в целом. Он свидетельствует о том, что основные положения современной локальной (калибровочной) квантовой теории поля, а также динамич. основа К. э., соответствующая калибровочному лагранжиану взаимодействия, справедливы во всей области, доступной современному эксперименту.

Лит.: [1] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 4 изд., М., 1981; [2] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Релятивистская квантовая электродинамика, 2 изд., М., 1980; [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [4] Фейнман Р., Квантовая электродинамика, пер. с англ., М., 1964.

Д. И. Казаков, Д. В. Ширков.

КВАНТОВАЯ ЭНТРОПИЯ – понятие, обобщающее понятие *энтропии* Больцмана и Гиббса, введенное Дж. Нейманом (J. Neumann, 1927). Формула

$$S(\omega) = -k \operatorname{Tr}(\rho_\omega \log \rho_\omega) \qquad (1)$$

задает энтропию состояния ω с матрицей плотности ρ_ω. В формализме Неймана ограниченным наблюдаемым физич. системы отвечают самосопряженные элементы A алгебры $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H и $\omega(A) = \operatorname{Tr}(\rho_\omega A)$ – среднее значение A в состоянии ω. Если

$$\rho_\omega = \sum_n p_n |p_n\rangle\langle p_n|, \quad p_n \geqslant 0,$$

– разложение по собственным функциям оператора плотности $\rho_\omega \in \mathcal{B}(H)$ со следом $\operatorname{Tr}\rho_\omega = \sum_n p_n = 1$, то (в системе единиц, где постоянная Больцмана $h = 1$)

$$S(\omega) = -\sum_n p_n \log p_n \in [0, +\infty], \qquad (2)$$

где $0 \cdot \log 0 = 0$. К. э. характеризует информацию, заключенную в состоянии ω. К. э. не является *наблюдаемой*, это – функционал на множестве состояний системы. Среди основных свойств К. э. как математич. объекта (неотрицательность, вогнутость, полунепрерывность и др.) важна для приложений сильная субаддитивность, установленная позже других при помощи нек-рого свойства вогнутости и связана с исследованием *квантовой относительной энтропии*. Можно аксиоматически задать К. э. ее свойствами.

В квантовой статистич. физике, изучающей обладающие термодинамич. поведением бесконечные системы, применимость (1) ограничивается тем, что алгебры $\mathcal{B}(H)$ с $\dim H \leqslant \infty$ используются для описания конечных подсистем. Для широкого класса моделей по аналогии с классич. статистич. механикой можно ввести плотность энтропии (среднюю энтропию) трансляционно инвариантного состояния ω как нек-рый предел

$$s(\omega) = \lim_{V \to \infty} S(\rho_V / |V|) < \infty,$$

где матрица плотности ρ_V отвечает сужению ω на подсистему в конечном объеме V.

В математич. теории классич. энтропии, в эргодич. теории классич. динамич. систем (с дискретным временем) важную роль играют инвариант Колмогорова–Синая, метрическая (динамическая) энтропия. Есть разные подходы к построению ее квантового аналога. Так, напр., можно опираться на свойства относительной К. э., тем же методом вводится энтропия для состояний на гиперфинитных C^*- и W^*-алгебрах, применяемых в квантовой статистич. механике.

А. В. Булинский.

КВАНТОВОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Квантовое стохастическое исчисление.*

КВАНТОВОЕ ГОМОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – уравнение для фазы C усредняющего оператора:

$$[H, C] = L - \underline{L}, \qquad (1)$$

где H – невозмущенный гамильтониан, L – возмущающий оператор, $\underline{L}$ – секулярный гамильтониан. Если H является функцией от квантовых операторов действия и отсутствуют резонансы, то уравнение (1) разрешимо (см. [1], [2]) и в классич. пределе ($h \to 0$) уравнение (1) переходит в гомологич. уравнение Пуанкаре (см. [3]).

Лит.: [1] Weinstein A., «Duke Math. J.», 1977, v. 44, p. 883–92; [2] Карасев М. В., Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 6, с. 115–73; [3] Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978.

Ю. М. Воробьев.

КВАНТОВОЕ ЕВКЛИДОВО ПОЛЕ – см. *Евклидово квантовое поле.*

КВАНТОВОЕ ИЗМЕРЕНИЕ – процесс получения данных, несущих информацию о состоянии квантовой системы, в основе которого лежит физическое взаимодействие системы с измерительным прибором. Характерная черта К. и. состоит в принципиальной неустранимости воздействия измерительного прибора на наблюдаемую систему, в результате чего ее состояние изменяется в ходе измерения.

Начала теории К. и. были заложены в монографии [1] Дж. Неймана (1932). В 1960–70-е гг. появление таких дисциплин, как квантовая оптика, оптич. связь, квантовая электроника, а также внутренние потребности квантовой теории вызвали новый интерес к вопросам измерений и привели к созданию последовательной статистич. теории К. и., являющейся логич. развитием вероятностной интерпретации квантовой механики и свободной от нек-рых трудностей и противоречий старого подхода (см. [4], [5], [7]).

Математическое описание квантовых измерений. Пусть H – гильбертово пространство квантовой системы, X – множество возможных исходов данного К. и. («шкала» измерительного прибора). Как правило, можно считать, что X – стандартное измеримое пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств $B(X)$. Описание К. и. существенно зависит от уровня подробности задания процесса измерения. Имеется три основных уровня, каждому из к-рых отвечает определенный математич. объект в гильбертовом пространстве H.

1) Задана только статистика исходов измерения. Это означает, что для любого состояния системы, описываемого *плотности оператором* ρ, задано распределение вероятностей $\mu_\rho(B)$; $B \in \mathcal{B}(X)$, исходов данного измерения над системой, приготовленной в этом состоянии ($\mu_\rho(B)$ есть вероятность того, что исход измерения x попадает в подмножество $B \subset X$). Естественно считать, что отображение $\rho \to \mu_\rho$ обладает свойством аффинности: смесь операторов плотности $\sum_j p_j \rho_j$ переходит в такую же смесь $\sum_j p_j \mu_{\rho_j}$ соответствующих распределений. При этом условии имеет место формула

$$\mu_\rho(B) = \operatorname{Tr} \rho \mathcal{M}(B), \; B \in \mathcal{B}(X), \qquad (1)$$

где $\mathcal{M}(\cdot)$ есть нек-рое разложение единицы в H. Обратно, всякое разложение единицы определяет по формуле (1) аффинное отображение $\rho \to \mu_\rho$ множества операторов плотности в множество распределений вероятностей на X. Разложение единицы дает наиболее общее описание статистики исходов измерения, совместимое с вероятностной интерпретацией квантовой механики.

Примеры. а) Пусть X – *наблюдаемая*, а $E(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, – ее спектральная мера на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Формула (1) при $\mathcal{M}(B) \equiv E(B)$ дает распределение вероятностей исходов точного измерения наблюдаемой X в состоянии ρ.

б) Пусть $|x, v\rangle$ есть вектор состояния наименьшей неопределенности (см. *Волновой пакет*) для нерелятивистской квантовой частицы массы m со средними значениями коор-

динаты x и скорости v. Семейство $\{|x,\ v\rangle;\ (x,\ v)\in\mathbb{R}^2\}$ образует *переполненную систему*, а соотношение

$$\mathcal{M}(B)=\frac{m}{2\pi\hbar}\int\int_B|x,v\rangle\langle x,v|\,dx\,dv; \qquad (2)$$

$$B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

определяет неортогональное разложение единицы. При этом соотношение (1), переходящее в

$$\mu_\rho(dx\,dv)=\frac{m}{2\pi\hbar}\langle x,v|\rho|x,v\rangle,$$

задает статистику неточного совместного измерения координаты и скорости. В классич. пределе при $\hbar\to 0$ это измерение переходит в точное совместное измерение координаты и скорости частицы (см. [4]).

Различают измерения 1-го и 2-го родов, соответственно сохраняющие и разрушающие наблюдаемую квантовую систему. Описание на уровне статистики исходов применимо ко всем измерениям; дальнейшее же относится только к измерениям 1-го рода, для к-рых определено состояние системы после измерения.

2) Помимо статистики задан также закон преобразования состояния системы в зависимости от полученного исхода измерения. В этом случае адекватное описание К. и. дается понятием *инструмента*, то есть операционно-значной меры $\mathcal{M}(B)$, $B\in\mathcal{B}(X)$, на множестве исходов измерения X. Каждому подмножеству $B\in\mathcal{B}(X)$ соответствует операция $\mathcal{M}(B)$, описывающая изменение состояния системы в случае, если исход измерения попадает в подмножество B. Если состояние системы перед измерением задавалось оператором плотности ρ, то после измерения оно будет задаваться оператором плотности

$$\mathcal{M}(B)[\rho]/\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}(B)[\rho].$$

Величина

$$\mu_\rho(B)=\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}(B)[\rho]=\mathrm{Tr}\,\rho\mathcal{M}(B)^*[I],$$

где $\mathcal{M}(B)^*$ — сопряженная операция, есть вероятность того, что исход измерения попадет в B. Таким образом, каждому инструменту отвечает разложение единицы по формуле

$$\mathcal{M}(B)=\mathcal{M}(B)^*[I];\ B\in\mathcal{B}(X). \qquad (3)$$

С другой стороны, всякому разложению единицы $\mathcal{M}(\cdot)$ отвечает множество инструментов, для к-рых выполнено соотношение (3): инструмент дает более подробное описание К. и., нежели разложение единицы.

Примеры. а) Пусть X — наблюдаемая с чисто точечным спектром, $E(x)$ — спектральный проектор, отвечающий собственному значению x. Соотношение

$$\mathcal{M}(B)[\rho]=\sum_{x\in B}E(x)\rho E(x);\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), \qquad (4)$$

выражающее проекционный постулат Неймана, определяет вполне положительный инструмент, удовлетворяющий условию воспроизводимости (см. *Воспроизводимости гипотеза*). Отвечающее ему разложение единицы есть спектральная мера

$$E(B)=\sum_{x\in B}E(x)$$

наблюдаемой X.

б) Соотношение

$$\mathcal{M}(B)[\rho]=\frac{m}{2\pi\hbar}\int\int_B|x,v\rangle\langle x,v|\rho|x,v\rangle\langle x,v|\,dx\,dv;\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

задает один из вполне положительных инструментов, к-рому соответствует разложение единицы (2).

3) Задано динамич. описание взаимодействия системы с «пробной системой», составляющей часть измерительного прибора (схема косвенного измерения). Пусть H_0 — гильбертово пространство пробной системы, ρ_0 — оператор плотности, описывающий начальное состояние этой системы, и U — унитарный оператор в $H\otimes H_0$, задающий взаимодействие. Предполагается, что после взаимодействия над пробной системой проводится К. и., описываемое разложением единицы $\mathcal{M}_0(B)$, $B\in\mathcal{B}(X)$, в H_0. При этом

$$\mu_\rho(B)=\mathrm{Tr}\,(\rho\otimes\rho_0)U^*(I\otimes\mathcal{M}_0(B))U;\ B\in\mathcal{B}(X).$$

В гильбертовом пространстве H указанному процессу отвечает вполне положительный инструмент

$$\mathcal{M}(B)[\rho]=\mathrm{Tr}_0U(\rho\otimes\rho_0)U^*(I\otimes\mathcal{M}_0(B)), \qquad (5)$$

где Tr_0 — частичный след по пространству H_0. Обратно, всякий вполне положительный инструмент допускает, в общем неоднозначное, представление (5) через нек-рый процесс косвенного измерения, где $\mathcal{M}_0(\cdot)$ — нек-рая спектральная мера (см. [9]). Тем самым демонстрируется согласованность теории К. и. со стандартным формализмом квантовой механики.

Физико-философские аспекты. При любом уровне подробности задания процедура К. и. содержит этап, к-рый не поддается исчерпывающему квантоводинамич. описанию. Если исходить из положения, что мир в целом подчиняется законам квантовой физики, то это приводит к проблеме измерения, до сих пор не получившей однозначного разрешения (обзор различных подходов см. в [6]). Ортодоксальная точка зрения, не имеющая в настоящее время конструктивной альтернативы, признает неизбежность дуализма, то есть сочетания квантовомеханич. представлений с элементами «классического» вероятностного описания, отражающими макроскопичность измерительного прибора. Не претендуя на окончательное разрешение гносеологич. вопросов, изложенная концепция К. и. дает ключ для последовательной постановки и решения ряда конкретных проблем квантовой теории.

Применения статистической теории квантового измерения.

1) Проблема соответствия. Одна из трудностей формулировки квантовой механики состоит в невозможности сопоставления нек-рым реально измеримым величинам квантовых наблюдаемых, то есть самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. К таковым относятся время, угол, фаза гармонич. осциллятора, пара координата—скорость, координаты фотона и т. п. (см. *Каноническая сопряженность* в квантовой механике, *Локализуемость*). Во всех этих случаях множеством значений соответствующей классич. величины (набора величин) является однородное G-пространство X, где G — группа геометрич. симметрий. Группа G имеет (проективное) унитарное представление $g\to V_g$ в гильбертовом пространстве системы H, к-рое задает соответствующее преобразование состояний системы

$$\rho\to\rho_g=V_g\rho V_g^*, \qquad (6)$$

где ρ — оператор плотности исходного состояния. Общая схема, позволяющая в этой ситуации решить проблему соответствия, такова. Разложение единицы $\mathcal{M}(B)$, $B\in\mathcal{B}(X)$, описывающее статистику нек-рого измерения с исходами в X, называется ковариантным, если

$$V_g^*\mathcal{M}(gB)V_g=\mathcal{M}(B);\ g\in G,\ B\in\mathcal{B}(X). \qquad (7)$$

Это условие имеет прямой вероятностный смысл — оно эквивалентно тому, что распределение вероятностей исходов измерения преобразуется ковариантно по отношению к преобразованию состояния системы (6), то есть

$$\mu_{\rho_g}(gB)=\mu_\rho(B);\ g\in G,\ B\in\mathcal{B}(X),$$

для всех состояний ρ. Затруднения в стандартной схеме возникают в тех случаях, когда среди решений уравнения (7) нет ортогональных разложений единицы. Пара $(V_{(\cdot)},\mathcal{M}(\cdot))$ образует *обобщенную систему импримитивности*, к-рая исследуется методами теории представлений. Напр., для компактных групп G уравнение (7) всегда разрешимо в классе произвольных разложений единицы и лишь в исключительных случаях — в классе ортогональных. С физич. точки зрения представляют интерес решения уравнения (7), описывающие экстремально точные измерения соответствующих величин. Эти решения, минимизирующие нек-рый функционал неопределенности, находятся среди крайних

точек выпуклого множества всех ковариантных разложений единицы.

Пример. Совместные измерения координаты и скорости в нерелятивистской квантовой механике. В этом случае $G=X=\mathbb{R}^2$, причем преобразование $g=(x, v)$ описывает переход к другой инерциальной системе отсчета, а неприводимое представление

$$(x,v)\to V_{x,v}=\exp\left[\frac{i}{\hbar}(mvQ-xP)\right]$$

– соответствующее преобразование векторов состояний частицы массы m. Ковариантные разложения единицы описываются формулой

$$\mathcal{M}(B)=\frac{m}{2\pi\hbar}\int\int_B V_{x,v}M_0V_{x,v}^*\,dx\,dv;\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

где $\mathcal{M}_0$ – произвольный оператор плотности. Среди них нет ортогональных разложений единицы. Крайние точки получаются, когда $\mathcal{M}_0$ – одномерный проектор. При соответствующем выборе квадратичного функционала неопределенности экстремально точным является разложение единицы (2).

2) Квантовая теория статистических решений и фундаментальные пределы точности измерений. В 40–50-е гг. было выдвинуто положение, что квантово-механич. природа канала связи должна налагать фундаментальные ограничения на скорость передачи и точность воспроизведения информации. Этот вопрос приобрел актуальность в 60-е гг. с появлением квантовых каналов связи – систем передачи информации, основанных на свойствах когерентного лазерного излучения. В 70-е гг. была создана последовательная квантовая теория статистич. решений, к-рая дает принципиальную основу для рассмотрения вопросов, касающихся предельной точности и информативности физич. измерений (см. [3], [4]). В этой теории решающие процедуры – измерения описываются разложениями единицы в гильбертовом пространстве системы и задача состоит в отыскании экстремума нек-рого функционала (неопределенности, шенноновской информации) в классе решающих процедур, обычно подчиненных нек-рым дополнительным ограничениям (ковариантности, несмещенности и т. д.). На этом пути было обнаружено следующее важное свойство квантово-механич. систем: измерение над расширением исходной системы, включающим вспомогательную независимую систему (в частности, косвенное измерение), может дать больше информации о состоянии исходной системы, нежели любое прямое измерение (описываемое спектральной мерой). Геометрич. природа этого факта состоит в том, что крайние точки выпуклого множества разложений единицы, среди к-рых находится оптимальная решающая процедура, не исчерпывается ортогональными разложениями единицы.

Получены квантовые аналоги неравенств Рао–Крамера в математич. статистике, уточняющие соотношения неопределенностей и дающие достижимые пределы точности измерений. Значительное внимание было уделено бозонным гауссовским каналам связи, для к-рых дано явное описание оптимальных решающих процедур. В 80-е гг. фундаментальные пределы точности измерений привлекли новое внимание в связи с проблемой обнаружения гравитационного излучения (см. [10]). Специфичным для этого круга вопросов является рассмотрение процедур измерения, протекающих во времени – последовательно или непрерывно, – что предполагает привлечение методов теории *квантовых случайных процессов*.

3) Повторные и непрерывные измерения. Проекционный постулат (4) приводит к следующим трудностям, не находящим решения в рамках стандартной квантовой механики. Во-первых, он фактически исключает возможность описания повторных измерений величин с непрерывным спектром (см. *Воспроизводимости гипотеза*). Далее, основывающаяся на проекционном постулате попытка рассмотрения измерений, протекающих непрерывно во времени, приводит к парадоксальным выводам, напр., непрерывное слежение за состоянием нестабильной частицы «вынуждает» ее не распадаться (квантовый парадокс Зенона). Понятие инструмента, позволяющее включить в рассмотрение неточные измерения, позволяет снять эти затруднения. Имеет место следующее обобщение *Вигнера формулы* для распределения вероятностных исходов последовательности измерений, задаваемых произвольными инструментами $\mathcal{M}_1(\cdot)$, ..., $\mathcal{M}_n(\cdot)$:

$$\mu_\rho(B_1,\ldots,B_n)=\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}_n(B_n)[\Phi_{n-1}[\ldots\Phi_1[\mathcal{M}_1(B_1)[\rho]]\ldots]],$$
$$B_j\in\mathcal{B}(X_j),$$

где ρ – оператор плотности состояния системы перед измерениями, Φ_j – операция, описывающая изменение состояния в результате эволюции между j-м и $(j+1)$-м измерениями, X_j – множество исходов j-го измерения (см. [5]). Надлежащий предельный переход при $n\to\infty$ позволяет дать описание измерения, длящегося непрерывно во времени (см. [2]). Для получения нетривиального предела точность измерений должна убывать пропорционально числу членов последовательности.

Предельный процесс непрерывного измерения описывается семейством вполне положительных инструментов $\{\mathcal{M}_{a,b}(\cdot);\ a,\ b\in\mathbb{R},\ a<b\}$, где инструмент $\mathcal{M}_{a,b}$ определен на σ-алгебре $\mathcal{B}_{a,b}(Y)$ подмножеств пространства Y всевозможных траекторий на $\mathbb{R}$, порожденной приращениями траекторий на отрезке $[a,\ b]$, причем

$$\mathcal{M}_{b,c}(F)[\mathcal{M}_{a,b}(E)[\rho]]=\mathcal{M}_{a,c}(E\cap F)[\rho];$$
$$E\in\mathcal{B}_{a,b}(Y),\ F\in\mathcal{B}_{b,c}(Y)$$

для всех $a<b<c$, и всевозможных операторов плотности ρ. Имеется параллель между процессами непрерывного измерения и процессами с независимыми приращениями в теории вероятностей, позволяющая дать полную классификацию первых в терминах некоммутативного обобщения формулы Леви–Хинчина (см. [7]). Важными примерами являются аналог винеровского процесса – непрерывное неточное измерение наблюдаемой X и аналог пуассоновского процесса – считающий процесс (см. [2], [5]). Всякий процесс непрерывного измерения может быть представлен как косвенное измерение, при к-ром над «пробной системой» производится непрерывное *неразрушающее измерение* нек-рого семейства совместимых наблюдаемых.

Лит.: [1] Нейман Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [2] Проспери Дж., в сб.: Квантовые случайные процессы и открытые системы, пер. с англ., М., 1988; [3] Хелстром К., Квантовая теория проверки гипотез и оценивания, пер. с англ., М., 1979; [4] Холево А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980; [5] Davies E. B., Quantum theory of open sistems, L.– N. Y., 1976; [6] d'Espagnat B., Conceptual foundation of quantum mechanics, 2 ed., L., 1976; [7] Holevo A. S., «Pros. Int. Congress of Math.», Berkeley, 1986, p. 1011–20; [8] Ludwig G., Foundations of quantum mechanics, v. 1, N. Y., 1983; [9] Ozawa M., «J. Math. Phys.», 1984, v. 25, № 1, p. 79–87; [10] Quantum optics, experimental gravity and measurement theory, N. Y., 1983.

А. С. Холево.

КВАНТОВОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ Шредингера – см. *Нелинейное уравнение Шредингера.*

КВАНТОВОЕ СЛОЖЕНИЕ МОМЕНТОВ – сложение моментов (орбитальных, спиновых, полных) независимых частиц (или систем – атомов, молекул и т. д.) по законам квантовой механики. Применяется также название векторное сложение моментов. В случае двух частиц задача состоит в определении спектра возможных собственных значений оператора квадрата суммарного момента $\hat{j}^2=(\hat{j}_1+\hat{j}_2)^2$ и его проекции $\hat{j}_z$ на фиксированную ось и соответствующих собственных функций ($\hat{j}_1, \hat{j}_2$ – операторы моментов частиц 1, 2). Спектр имеет вид

$$j^2=\hbar^2 j(j+1),\ j_z=\hbar m,\qquad (1)$$

где квантовое число суммарного момента j может принимать значения $j=j_1+j_2, j_1+j_2-1, \ldots, |j_1-j_2|$, а его проекции $m=j, j-1, \ldots, -j$ (j_1, m_1 и j_2, m_2 – квантовые числа моментов частиц 1 и 2 и их проекций). При этом каждое из возможных значений j встречается только один раз, что легко подтверждается подсчетом общего числа квантовых состояний (j, m):

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(2j+1)=(2j_1+1)(2j_2+1). \qquad (2)$$

На математич. языке рассматриваемая задача соответствует разложению прямого (тензорного) произведения двух неприводимых представлений ($D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)}$) группы вращений трехмерного пространства $SO(3)$ на неприводимые компоненты, что символически записывается в виде

$$D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)}=D^{(j_1+j_2)}+D^{(j_1+j_2-1)}+\ldots+D^{(|j_1-j_2|)} \qquad (3)$$

(ряд Клебша–Гордана). Все значения j либо целые (когда j_1 и j_2 одновременно целые или полуцелые), либо полуцелые (когда один из складываемых моментов целый, а другой – полуцелый). В частности, для отдельного электрона в атоме j всегда полуцелое: $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{s}$, где квантовое число орбитального момента $l=0, 1, 2, \ldots$, а спинового: $s=1/2$.

Сложение произвольного числа N моментов

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{j}_1+\boldsymbol{j}_2+\ldots+\boldsymbol{j}_N \qquad (4)$$

может быть выполнено последовательным применением операции (1). В частности, наибольшее значение $J=j_1+j_2+\ldots+j_N$ имеет кратность, равную единице (то есть встречается в разложении прямого произведения $D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)}\otimes\ldots\otimes D^{(j_N)}$ только один раз).

В теории атомов применяются следующие схемы сложения моментов: 1) связь Расселла–Саундерса (*LS*-связь), в к-рой сначала складываются орбитальные и спиновые моменты отдельных электронов:

$$\boldsymbol{L}=\sum_i\boldsymbol{l}_i,\quad \boldsymbol{S}=\sum_i\boldsymbol{s}_i,$$

а затем $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{S}$ складываются в полный момент атома $\boldsymbol{J}$; 2) *jj*-связь, в к-рой орбитальный и спиновый моменты i-го электрона складываются в полный момент электрона $\boldsymbol{j}_i=\boldsymbol{l}_i+\boldsymbol{s}_i$, после чего полный момент атома $\boldsymbol{J}$ определяется по формуле (4). Условием применимости *LS*-связи является малость релятивистских взаимодействий по сравнению с электростатическим (кулоновским), поэтому она хорошо работает в легких атомах. По мере увеличения атомного номера Z роль релятивистских эффектов возрастает и происходит переход от *LS*-связи к *jj*-связи (однако в чистом виде последний тип связи фактически не встречается даже в самых тяжелых атомах).

Следует подчеркнуть, что только J и J_z – строго сохраняющиеся величины (соответствующие операторы коммутируют с гамильтонианом), в то время как l_i, L и S в схеме *LS*-связи, j_i в схеме *jj*-связи сохраняются лишь приближенно.

Для построения волновой функции ψ_{jm}, отвечающей собственным значениям (1), из волновых функций отдельных частиц $\psi_{j_1m_1}$ и $\psi_{j_2m_2}$ используются *Клебша–Гордана коэффициенты*.

Лит.: [1] Кондон Е., Шортли Г., Теория атомных спектров, пер. с англ., М., 1949; [2] Собельман И. И., Введение в теорию атомных спектров, 2 изд., М., 1977.

В. С. Попов.

КВАНТОВОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ – операторное дифференциальное исчисление, в основе которого лежит понятие квантового шума. Последний описывается обобщенной операторнозначной функцией $a(t)$, $t\geqslant 0$, удовлетворяющей канонич. коммутационным (антикоммутационным) соотношениям

$$[a(t),\ a(s)]_{\mp}=0,\ [a^+(t),a^+(s)]_{\mp}=0,$$

$$[a(t),\ a^+(s)]=\delta(t-s)I.$$

Кроме того, на соответствующей ККС-алгебре (КАС-алгебре) задается квазисвободное состояние φ такое, что

$$\varphi(a(t)^+a(s))=\nu\delta(t-s),\ \varphi(a(t)a(s))=\mu\delta(t-s),$$

где $\nu\geqslant 0$, $\nu(\nu+1)\geqslant|\mu|^2$.

С математич. точки зрения предпочтительнее иметь дело с квантовым броуновским движением, формально определяемым как

$$A(t)=\int_0^t a(s)ds.$$

Операторнозначная функция $A(t)$, $t\geqslant 0$, удовлетворяет соотношениям

$$[A(t),A(s)]_{\mp}=0,\quad [A^+(t),\ A^+(s)]_{\mp}=0,$$

$$[A(t),\ A^+(s)]_{\mp}=\min(t,s)\,I.$$

В случае коммутаторов (–) говорят о бозонном, а в случае антикоммутаторов (+) – о фермионном броуновском движении. Разработана теория квантовых стохастич. дифференциальных уравнений вида

$$dX=FdA+GdA^++Hdt, \qquad (1)$$

где $X(t)$, $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ – семейства операторов, согласованные с потоком алгебр Неймана, порождаемых операторами $A(t)$, $A^+(t)$ (то есть операторы $X(t)$, ... являются присоединенными к алгебре $\mathcal{A}_t$, порождаемой операторами $A(s)$, $A^+(s)$; $s\leqslant t$). Имеет место квантовая формула Ито: если $X(t)$, $Y(t)$ определяются уравнениями типа (1), то

$$d(XY)=dXY+XdY+dXdY,$$

где считается, что согласованные процессы коммутируют с базисными дифференциалами dA, dA^+, dt, а произведения базисных дифференциалов находятся согласно таблице умножения

	dA	dA^+	dt
dA	$\mu\,dt$	$(\nu+1)dt$	0
dA^+	νdt	$\bar{\mu}dt$	0
dt	0	0	0

в к-рой столбец слева обозначает первый множитель, а верхняя строка – второй (см. [1]).

К. с. и. позволяет дать описание эволюции *квантовой открытой системы* под действием бозонного или фермионного шума (см. [2], [3]).

Пусть H – гильбертово пространство системы, а квантовый шум для определенности описывается бозонным броуновским движением $A(t)$ в симметричном пространстве Фока $\mathfrak{H}=\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$ с вакуумным состоянием φ, для к-рого $\nu=\mu=0$ (что соответствует нулевой температуре шума). Решение $U(t)$, $t\geqslant 0$, стохастического уравнения Шредингера

$$dU=[LdA^+-L^*dA-(iM+\tfrac{1}{2}L^*L)dt]U;\ U(0)=I,$$

где L, M– операторы в H, причем $M^*=M$, является семейством унитарных операторов, определяющим обратимую эволюцию в пространстве $H\otimes\mathfrak{H}$. Для любой наблюдаемой X в H семейство

$$X(t)\equiv j_t(X)=U(t)^*(X\otimes I)U(t)$$

удовлетворяет квантовому уравнению Ланжевена

$$dX(t)=\{[L^*(t),X(t)]_-dA+[X(t),L(t)]_-dA+i[M(t),X(t)]_-+$$
$$+\left(L^*(t)X(t)L(t)-\tfrac{1}{2}[X(t),L^*(t)L(t)]_+\right)\}dt.$$

Семейство гомоморфизмов j_t, $t\geqslant 0$, с состоянием φ дает *квантовый случайный процесс* в алгебре $\mathfrak{B}(H\otimes\mathfrak{H})$. Осреднение $j_t(X)$ по вакуумному состоянию φ дает квантовую *дина-*

мическую полугруппу $\Phi_t(X)$, $t\geqslant 0$, в $\mathfrak{B}(H)$ с инфинитезимальным оператором

$$\mathcal{L}(X) = i[M,X]_- + L^*XL - \frac{1}{2}[X,L^*L]_+.$$

Обратно, всякая непрерывная по норме квантовая динамич. полугруппа допускает расширение до стохастич. унитарной эволюции, определяемой нек-рым, вообще говоря, бесконечным набором независимых квантовых броуновских движений (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Хадсон Р. Л., Партасари К. Р., в сб.: Квантовые случайные процессы и открытые системы, пер. с англ., М., 1988, с. 92–123; [2] Frigerio A., «Lect. Notes in Math.», 1985, v. 1136, p. 207–22; [3] Gardiner C. W., Collett M. J., «Phys. Rev. A», 1985, v. 31, p. 3761–74; [4] Meyer P. A., «Lect. Notes in Math.», 1986, v. 1204, p. 186–312.

А. С. Холево.

КВАНТОВОЕ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ – уравнение движения взаимодействующих квантовых скалярного x и спинорного ω полей

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z_+ \partial z_-} = \lambda(\exp 2x + \omega^+\omega^- \exp x),$$

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial z_-} = \omega^- \exp x, \quad \frac{\partial \omega^-}{\partial z_+} = \omega^+ \exp x,$$

переходящее в соответствующее *классическое суперсимметричное уравнение Лиувилля* в компонентном виде при $\lambda = 1$. Их общее решение построено в [1] и представимо, как и в классич. пределе, для динамич. переменной $\exp(-x)$ конечным многочленом по λ, если $\lambda = \hbar \operatorname{ctg} \hbar$, где $\hbar$ – постоянная Планка.

Лит.: [1] Лезнов А. Н., Хрущев В. В., «Ядерная физика», 1983, т. 38, в. 2 (8), с. 537–40.

М. В. Савельев.

КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ – см. *Плотности матрица.*

КВАНТОВОЕ УСЛОВИЕ детального равновесия для динамической полугруппы $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ – частный случай марковской динамики (см. *Марковское приближение*) открытой квантовой системы S, образующей вместе с бесконечным резервуаром R замкнутую систему $S+R$. Это свойство характерно для ситуации, когда R находится в состоянии теплового равновесия. В рамках алгебраич. подхода к квантовой статистич. механике К. у. детального равновесия подробно изучено (в терминах генератора L динамич. полугруппы γ_t) в случае конечной системы S (в конечном объеме), к-рая описывается алгеброй $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. Пусть точное нормальное состояние ω на $\mathcal{M}$ стационарно, то есть $\omega\circ\gamma_t = \omega$, или $\omega\circ L = 0$. Пусть для простоты L ограничен с $\operatorname{dom} L = \mathcal{M}$, напр. $\dim H < \infty$. Предельная редуцированная на S динамика γ_t удовлетворяет К. у. детального равновесия относительно ω, когда можно так представить $L = L_h + L_d$, что

$$\omega(L_h(X)Y) = -\omega(XL_h(Y)) \qquad (1)$$

и

$$\omega(L_d(X)Y) = \omega(XL_d(Y)) \qquad (2)$$

для наблюдаемых X, $Y\in\mathcal{M}$. Здесь L_h порождает гамильтонову, а L_d – диссипативную динамику для S, обусловленную взаимодействием с R, $L_h(X) = i[H, X]$, где $H = H^*\in\mathcal{M}$. Свойство (2) имеет аналог для классич. марковского процесса. Для ряда бесконечных систем найден класс диссипативных L_d, удовлетворяющих (2), если ω – любое (τ, β) – *Кубо – Мартина – Швингера состояние* для гамильтоновой динамики τ_t системы S при температуре β^{-1}; аналогичный подход применяется к характеристике равновесных состояний классич. решетчатых систем. К. у. детального равновесия применяется для вывода соотношений Онзагера и принципа минимального производства энтропии при отклонении от равновесия.

А. В. Булинский.

КВАНТОВО-КЛАССИЧЕСКИЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ – гамильтоновы системы, у которых часть степеней свободы – классические, а часть – квантовые (см. [1], [2]). Гамильтониан К.-к. с. с.– определенная функция $H(X,\hat{X})$ числовых аргументов $X = \{x_i \equiv (q_i, p_i)\}_{i=1}^n$ и некоммутирующих операторных аргументов $\hat{X} = \{\hat{x}_i = (\hat{q}_i, \hat{p}_i)\}_{i=1}^n$. Все возможные состояния К.-к. с. с. описываются решениями следующего уравнения (см. [2]):

$$\frac{\partial}{\partial t} D(t,X,\hat{X}) = [H(X,\hat{X}), D(t,X,\hat{X})] +]H(X,\hat{X}), D(t,X,\hat{X})[,$$

где $[H, D] = \frac{1}{i\hbar}(HD - DH)$ – коммутатор, $]\cdot,\cdot[$ – аналог *Пуассона скобки*, явный вид к-рой определяется способом квантования системы. В приближении самосогласованного поля между классич. и квантовыми степенями свободы эволюция чистых состояний К.-к. с. с. описывается согласованной системой *Гамильтона уравнения* и *Шредингера уравнения.*

Лит.: [1] Маслов В. П., Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана, М., 1976; [2] Герасименко В. И., «Теоретич. и математич. физика», 1982, т. 50, № 1, с. 77–87.

В. И. Герасименко.

КВАНТОВЫЕ ПОПРАВКИ действия – функции a_j, b_j, ..., входящие в разложение

$$\hat{S}_j = \hat{S}_j^0 + \hbar\hat{a}_j + \hbar^2\hat{b}_j + \ldots$$

квантовых операторов действия $\hat{S}_j$, где $S_j^0 = \oint p\,dq$ – классические функции действия расслоения фазового пространства изотропными торами. Операторы $\hat{S}_j$ по определению подчинены условиям:

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = O(\hbar^\infty), \quad \exp(i\hat{S}_j) = I + O(\hbar^\infty).$$

Поправки a_j, b_j, ... вычисляются интегрированием нек-рых замкнутых 2-форм на изотропных торах (см. [2]).

Лит.: [1] Boutet de Monvel L., «Lect. Notes in Math.», 1980, № 770, p. 120–31; [2] Карасев М. В., Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 6, с. 115–73.

Ю. М. Воробьев.

КВАНТОВЫЕ ПОПРАВКИ симметрий – коэффициенты $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., деформации

$$A = A^{(0)} + \hbar A^{(1)} + \hbar A^{(2)} + \ldots$$

классического отображения момента $A^{(0)}$ действия некоторой группы Ли на фазовом пространстве. Деформация A подчинена следующему требованию: квантование $A_j^{(0)} \to \hat{A}_j$ является гомоморфизмом алгебры Ли симметрий по $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$ (см. [1], [2]). Возможны препятствия к существованию поправок $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... (см. [3]).

Лит.: [1] Vey J., «Comm. math. helv.», 1975, v. 50, № 4, p. 421–54; [2] Bayen F. [a.o], «Ann. Phys.», 1978, v. 111, № 1, p. 61–151; [3] Воробьев Ю. М., Карасев М. В., «Доклады АН СССР», 1987, т. 297, № 6, с. 1294–98.

Ю. М. Воробьев.

КВАНТОВЫЕ СКОБКИ Пуассона – см. *Пуассона скобки.*

КВАНТОВЫЕ ЧИСЛА – целые или дробные числа, которые определяют возможные значения физических величин, характеризующих квантовые системы (атом, ядро, молекулу и др.), а также отдельные элементарные частицы, кварки, глюоны.

К. ч. были впервые введены в физику для описания найденных эмпирически закономерностей атомных спектров, однако смысл К. ч. и связанной с ними дискретности нек-рых физич. величин, характеризующих поведение микрочастиц, был раскрыт лишь квантовой механикой. Согласно квантовой механике, возможные значения физич. величин определяются собственными значениями соответствующих операторов, действующих в пространстве состояний физич. системы. С математич. точки зрения это линейные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, собственные значения к-рых могут быть непрерывными

или дискретными; в последнем случае и возникают нек-рые К. ч. В несколько более общем смысле К. ч. называют величины, сохраняющиеся в процессе движения, но не обязательно принадлежащие дискретному спектру, напр. импульс или энергию свободно движущейся частицы, массу покоя частицы.

Набор К. ч., исчерпывающе определяющий состояние квантовой системы, называют полным. Совокупность состояний, отвечающая всем возможным значениям К. ч. из полного набора, образует полную систему состояний. Так, состояния электрона в атоме определяются четырьмя К. ч. соответственно четырем степеням свободы, связанным с тремя пространственными координатами и спином. Для атома водорода и водородоподобных атомов это: главное К. ч. ($n=1, 2, ...$), орбитальное К. ч. ($l=0, 1, ..., n-1$), магнитное К. ч. (m_l, $|m_l| \leqslant l$) – проекция орбитального момента на нек-рое направление и К. ч. проекции спина ($m_s = \pm 1/2$). Другой набор К. ч., более пригодный для описания атомных спектров при учете спин-орбитального взаимодействия (определяющего тонкую структуру уровней энергии), получается при использовании вместо m_l и m_s К. ч. полного момента количества движения ($j = l \pm 1/2$) и К. ч. проекции полного момента (m_j, $|m_j| \leqslant j$). Те же К. ч. используются для приближенного описания состояний отдельных электронов в сложных (многоэлектронных) атомах, состояний нуклонов в ядрах и т. д.

Приведенные выше К. ч. связаны с пространственными симметриями квантовых систем относительно нек-рых непрерывных преобразований. Другие К. ч. отвечают дискретным симметриям, напр. четность состояния (P), к-рая принимает значения $+1$ и -1 в зависимости от того, сохраняет волновая функция знак при инверсии координат ($\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$) или меняет его на обратный. Для атома водорода $P=(-1)^l$.

Существование сохраняющихся (неизменных во времени в среднем) физич. величин тесно связано со свойствами симметрии гамильтониана данной системы. Напр., гамильтониан частицы, движущейся в центральносимметричном поле, не меняет своего вида при произвольных поворотах системы координатных осей; этой симметрии отвечает сохранение момента импульса (более точно, в таком поле сохраняющимися величинами, к-рые могут одновременно иметь определенные значения, являются квадрат момента импульса и одна из проекций момента, задаваемые К. ч. l и m_l). Если на систему, имеющую нек-рую симметрию, накладывается дополнительное взаимодействие, к-рое такой симметрией не обладает, то соответствующие К. ч. будут изменяться в процессе эволюции системы. Так, взаимодействие атома с электромагнитной волной приводит к изменению перечисленных выше К. ч., согласно правилам отбора.

Помимо К. ч., ассоциируемых с пространственно-временными симметриями гамильтониана, важную роль играют так наз. внутренние К. ч. элементарных частиц, к-рые не сказываются на поведении изолированной частицы, однако проявляются во взаимодействиях частиц. Различные типы взаимодействий характеризуются разными свойствами симметрии, вследствие чего К. ч., сохраняющиеся в одних взаимодействиях, могут изменяться в других. Так, строго сохраняющимся К. ч. является электрич. заряд Q, в то время как изотопич. спин I сохраняется в процессах сильного взаимодействия и нарушается электромагнитным и слабым взаимодействиями, а странность S не сохраняется в слабом взаимодействии. В современных теориях сильного взаимодействия и электрослабого взаимодействия считается, что внутренние симметрии являются локальными, то есть соответствующие преобразования могут выполняться независимо в каждой точке пространства-времени. Исходя из этого принципа, определяется и сам характер взаимодействия (вид лагранжиана системы взаимодействующих квантованных полей). Так, квантовая электродинамика основана на существовании сохраняющегося К. ч. электрич. заряда и соответствующее локальное преобразование симметрии однозначно определяет взаимодействие электронов с фотонами. *Д. В. Гальцов.*

КВАНТОВЫЙ АНСАМБЛЬ Гиббса – см. *Статистический ансамбль.*

КВАНТОВЫЙ ВЕКТОР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – см. *Распределения вектор* квантовый.

КВАНТОВЫЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ – см. *Гейзенберга представление.*

КВАНТОВЫЙ КАНАЛ – система передачи информации в физических системах, описываемая с учетом квантовой природы материальных носителей этой информации таких, как электромагнитное поле оптического диапазона. В наиболее общем виде К. к. статистически описывается линейным вполне положительным нормированным отображением $\varkappa: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ выхода К. к. в C^*-алгебру $\mathfrak{A}$ ее входа, определяющим зависимость $\rho = \sigma \circ \varkappa$ квантового состояния на выходе $\mathfrak{B}$ от состояния σ на входе $\mathfrak{A}$ (см. [1]). Теорема Стайнспринга (см. [2]) позволяет представить всякий канал $\varkappa$ как композицию $\varepsilon \circ \pi$ гомоморфизма $\pi: \mathfrak{B} \to \mathscr{B}(H)$ и условного ожидания $\varepsilon: \mathscr{B}(H) \to \mathfrak{A}$ относительно нек-рого представления $\imath: \mathfrak{A} \to \mathscr{B}(H)$. К. к. называется управляющим, если $\mathfrak{A}$ – абелева алгебра, и называется измеряющим, если абелевой алгеброй является $\mathfrak{B}$.

Введены динамич. К. к. измерения и управления, удовлетворяющие условиям согласованности $\varkappa(\mathfrak{B}^t) \subseteq \mathfrak{A}^t$ относительно неубывающих семейств $\{\mathfrak{A}^t\}$, $\{\mathfrak{B}^t\}$, C^*-подалгебр $\mathfrak{A}^t \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}^t \subset \mathfrak{B}$, описывающих прошлое и настоящее на входе и выходе К. к. (см. [3]).

Лит.: [1] Холево А. С., «Проблемы передачи информации», 1972, т. 8, № 1, с. 62–71; [2] Stinespring W. F., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 6, № 2, p. 211–16; [3] Белавкин В. П., «Автоматика и телемеханика», 1983, № 2, с. 50–63. *В. П. Белавкин.*

КВАНТОВЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС – см. *Квантовая марковская система.*

КВАНТОВЫЙ ОПЕРАТОР ЛИУВИЛЛЯ – см. *Лиувилля квантовый оператор.*

КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР – см. *Осциллятор.*

КВАНТОВЫЙ ПЕРЕХОД – характерный для квантовой системы (атома, молекулы, кристалла, атомного ядра, элементарной частицы) скачкообразный переход из одного состояния в другое, происходящий под влиянием какого-либо взаимодействия, присущего частицам данной системы. Наиболее важен случай К. п. между стационарными состояниями, соответствующими определенным значениям энергии системы [представление о К. п. для этого случая было введено Н. Бором (N. Bohr, 1913)]. К. п. между нестационарными состояниями могут быть описаны с помощью принципа суперпозиции состояний.

В общем случае К. п. характеризуется амплитудой перехода (см. *Рассеяния матрица*); квадрат ее модуля определяет вероятность перехода. При любых К. п. выполняются точные законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, электрич. заряда и др. В К. п., происходящих за счет электромагнитного и сильного взаимодействий, выполняются законы сохранения пространственной четности, зарядовой четности, странности и др., к-рые могут нарушаться в переходах, происходящих благодаря слабому взаимодействию. К. п. между различными стационарными состояниями, сопровождающиеся испусканием или поглощением какой-либо частицы (напр., фотона в случае излучательных переходов), на схемах уровней энергии принято изображать вертикальными или наклонными линиями, соединяющими соответствующие уровни энергии системы, изображаемые горизонтальными линиями.

Ниже рассматриваются К. п. в атомах и молекулах. Такие К. п. могут быть излучательными и безизлучательными. При излучательном К. п. система испускает (переход

$\mathscr{E}_i \to \mathscr{E}_k$, $\mathscr{E}_i > \mathscr{E}_k$, где $\mathscr{E}_i$ и $\mathscr{E}_k$ – энергии стационарных состояний, между к-рыми происходит К. п.) или поглощает (переход $\mathscr{E}_k \to \mathscr{E}_i$) квант электромагнитного излучения – фотон энергии $h\nu \equiv \hbar\omega = \mathscr{E}_i - \mathscr{E}_k$ (ν или ω – обычная или круговая частота излучения). В зависимости от величины $\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_k$ испускается или поглощается излучение в различных частотных диапазонах шкалы электромагнитных волн. Совокупность излучательных К. п. с верхних уровней энергии на нижние образует спектр испускания данной квантовой системы, а с нижних уровней на верхние – ее спектр поглощения. При безизлучательном К. п. система отдает или получает энергию при взаимодействии с другими системами. Вероятности К. п. в атомах и молекулах принято характеризовать средним числом переходов данного типа за единицу времени (1 с).

Излучательные К. п. могут быть спонтанными («самопроизвольными»), не зависящими от внешних воздействий на квантовую систему и обусловленными ее взаимодействием с физич. вакуумом (спонтанное испускание фотона), и вынужденными (индуцированными), происходящими под действием внешнего электромагнитного излучения резонансной частоты $\nu = (\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_k)/h$ (поглощение и вынужденное испускание фотона). Вероятности излучательных К. п. определяются коэффициентами Эйнштейна и могут быть рассчитаны методами квантовой электродинамики и квантовой механики.

Как отмечалось, изменение энергии квантовой системы при безизлучательных К. п. происходит вследствие ее взаимодействия с другими квантовыми системами, напр. для молекулы газа при ее столкновении с другими молекулами, а для частицы в жидкости или в кристалле – при взаимодействии с ближайшим окружением. Помимо вынужденных безизлучательных К. п., сопровождающихся изменением энергии системы, возможны спонтанные безизлучательные К. п., при к-рых при заданной энергии происходит распад системы на части. Такие процессы возможны, если энергия системы больше энергии, необходимой для ее распада.

М. А. Ельяшевич.

КВАНТОВЫЙ РАВНОВЕСНЫЙ АНСАМБЛЬ – *статистический ансамбль*, в котором состояние конечного числа частиц описывается равновесной *плотности матрицей*:

$$Q(\beta, N, V)^{-1} e^{-\beta H_N^\Lambda},$$

где β – обратная температура, $\beta = \frac{1}{kT}$, H_N^Λ – гамильтониан N-частиц, расположенных в конечной области Λ, $Q(\beta, N, V)$ – статистическая сумма:

$$Q(\beta, N, V)^{-1} = \mathrm{Tr} e^{-\beta H_N^\Lambda}.$$

Состояние конечного числа частиц в рамках равновесного большого квантового ансамбля описывается последовательностью равновесных матриц плотности:

$$\Xi(\beta, z, V)^{-1} e^{-\beta(H_N^\Lambda - \mu N)}, \quad N = 1, 2\ldots,$$

μ – химич. потенциал, $z = e^{\beta\mu}$ – активность, $\Xi(\beta, z, V)$ – большая статистич. сумма:

$$\Xi(\beta, z, V) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \mathrm{Tr} e^{-\beta H_N^\Lambda}.$$

В случае статистики Больцмана гамильтонианы рассматриваются в общем гильбертовом пространстве состояний и статистич. средние берутся по всем собственным состояниям гамильтонианов, в случае статистики Бозе – Эйнштейна или Ферми – Дирака – соответственно по симметричным или антисимметричным состояниям.

Состояния бесконечных систем получаются из конечных в результате термодинамич. предела.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Лекции по квантовой статистике, в кн.: Избранные труды, т. 2, Киев, 1970, с. 287–493; [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

Д. Я. Петрина.

КВАНТОВЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС в узком смысле – это, вообще говоря, некоммутативное семейство $\{X_t\}$ самосопряженных операторов X_t в гильбертовом пространстве H, индексированное временем $t \in \mathbb{R}$, с фиксированным вектором состояния $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$. При этом коммутативным семействам $\{X_t\}$ отвечают классич. случайные процессы, описываемые на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ действительными случайными величинами $x_t : \Omega \to \mathbb{R}$, к-рые могут быть представлены в $H = \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ коммутирующими операторами умножения на x_t. Сопоставив каждому X_t проекторнозначную меру $\pi_t(dx) = dE_t(x)$ спектрального разложения $X_t = \int x dE\,(x)$, можно дать (см. [1]) эквивалентное определение К. с. п. как семейства $\{\pi_t\}$ борелевских гомоморфизмов $\pi_t : \mathfrak{B} \to P(H)$ σ-алгебры $\mathfrak{B}$ действительных чисел в квантовую логику ортопроекторов $\mathscr{P}(H)$ с заданной вероятностной мерой $\mu(E) = \langle \xi | E\xi \rangle$ на $\mathscr{P}(H)$.

Такое определение естественно обобщается (см. [1]) на случай произвольной σ-алгебры $\mathfrak{B}$, причем гомоморфизмы π_t однозначно продолжаются до представлений π_t: $\mathfrak{A} \to \mathscr{B}(H)$ соответствующей абелевой C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, порождаемой коммутативным множеством самосопряженных идемпотентов, отождествляемым с $\mathfrak{B}$.

К. с. п. над нек-рой C^*-алгеброй $\mathfrak{B}$ с единицей $\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$ в сильном смысле называется семейство ее нормированных представлений $\{\pi_t\}$, $\pi_t(1) = I$, на гильбертовом пространстве с нормированным вектором $\xi \in H$ (см. [2]). В слабом (широком) смысле К. с. п. над $\mathfrak{A}$ описывается (см. [3]) семейством $\left\{ \varkappa_{a_1 \ldots a_n}^{t_1 \ldots t_n} \right\}$ хронологически упорядоченных корреляционных форм

$$\varkappa_{a_1 \ldots a_n}^{t_1 \ldots t_n} = \|\pi_{t_n}(a_n) \ldots \pi_{t_1}(a_1)\xi\|^2, \quad t_1 < \ldots < t_n,$$

дающих вероятности последовательного измерения всевозможных эффектов $a_i \in \mathfrak{A}$, $\|a_i\| \leqslant 1$ (событий при $a^* = a = a^2$), в открытой квантовой системе $\mathfrak{A}_t = \pi_t(\mathfrak{A})$, определяемой семейством представлений $\pi_t : \mathfrak{A} \to \mathscr{B}(H)$. Указанная статистич. интерпретация форм $\varkappa$ также сохраняется, если представления $\{\pi_t\}$ не сохраняют единицу, а удовлетворяют ослабленному условию нормировки $\pi_t(1)E_t = E_t$ относительно нек-рого семейства $\{E_t\}$ ортопроекторов $E_t^* = E_t = E_t^2$ на $\mathfrak{A}$-инвариантные подпространства $\mathscr{E}_t \subseteq H$, содержащие $\xi \in \mathscr{E}_t$ и образующие фильтрацию $\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{E}_s$, $t \leqslant s$, в *Н. Реконструкции теорема* позволяет восстановить такие представления по полному набору форм $\varkappa$ однозначно (с точностью до унитарной эквивалентности) на минимальных подпространствах, порождаемых векторами

$$\xi_{a_1 \ldots a_n}^{t_1 \ldots t_n} = \pi_{t_n}(a_n) \ldots \pi_{t_1}(a_1)\xi$$

при $t_1 < \ldots < t_n$ для всех $a_i \in \mathfrak{A}$ и $t_i \leqslant t$.

Двузначный случайный процесс, описываемый на гильбертовом пространстве H неубывающим семейством $\{E_t\}$ ортопроекторов, отвечающих за происхождение какого-либо события до момента t, называется начальным моментом, если $E_t^\xi = \xi$ для всех t, то есть если это событие происходит вначале с вероятностью $\inf_t (\xi | E_t \xi) = 1$.

Семейство представлений $\{\pi_t\}$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ на гильбертовом пространстве H с вектором состояния $\xi \in H$ называется К. с. п. над $\mathfrak{A}$ с начальным моментом $\{E_t\}$ (H-процессом относительно $\{E_t\}$), если $\pi_t(1) = E_t$ для всех t, и называется каноническим H-процессом,

если $\vee E_t = I$, и регулярным H-процессом, если $\wedge E_t = P$, где P – ортопроектор на ξ.

Моделью H-процесса $\{\pi_t\}$ называется (см. [1]) К. с. п. $\{\pi_t^1\}$ на гильбертовом пространстве H^1 с начальным моментом $\{E_t^1\}$ и вектором состояния $\xi \in H^1$, для к-рого существует изометрия $U: H^1 \to H$, $U^*U = I^1$, $U\xi = \xi$, сплетающая представление с подпредставлением $\pi_t^1 : U\pi_t^1(a) = \pi_t(a)UE_t^1$, и $a \in \mathfrak{A}$. Подпроцессом H-процесса $\{\pi_t\}$ называется всякая его модель, определяемая подпредставлениями $\pi_t^1(a) = \pi_t(a)\ E_t^1$ на подпространстве $H^1 \subset H$, $\xi^1 = \xi$ с меньшими ортопроекторами $E_t^1 \leqslant E_t$. H-процесс называется минимальным, если он совпадает со всяким своим подпроцессом.

Физич. эквивалентности К. с. п., согласно к-рой процессы не различаются, если они приводят к одинаковой статистике последовательных измерений, отвечает понятие слабой (широкой) эквивалентности, отождествляющей процессы с совпадающими семействами $\left\{\varkappa_{a_1 \dots a_n}^{t_1 \dots t_n}\right\}$ хронологически упорядоченных форм. Всякая модель H-процесса $\{\pi_t\}$ и, в частности, всякий унитарно эквивалентный процесс или подпроцесс слабо эквивалентны данному процессу. Минимальный подпроцесс является моделью любого другого слабо эквивалентного процесса и унитарно эквивалентен этому процессу, если последний является минимальным (см. [1]).

Лит.: [1] Белавкин В. П., «Теоретич. и математич. физика», 1985, т. 62, № 3, с. 409–31; [2] Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T., «Publ. RTMS Kyoto Univ.», 1982, v. 18, № 1, p. 97–133; [3] Lindblad G., «Comm. Math. Phys.», 1979, v. 65, № 3, p. 281–94.

В. П. Белавкин.

КВАНТОВЫЙ ХАОС – см. *Хаос.*

КВАНТОВЫЙ ШУМ – см. *Квантовое стохастическое исчисление.*

КВАРК – субъядерная частица со спином 1/2, являющаяся фундаментальной составляющей *адронов*. Впервые были введены в теорию элементарных частиц в [1] и [2] для объяснения закономерности в классификации известных к этому времени адронов по представлениям унитарной группы симметрии сильных взаимодействий $SU(3)$. В рамках стандартной *кварковой модели* предполагалось, что существует три типа, или *аромата*, К. u, d, s с дробными электрич. зарядами $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$, $Q_s = -1/3$ в единицах заряда электрона и барионным числом 1/3. Соответствующие им антикварки характеризуются противоположными значениями этих квантовых чисел. Так как мезоны имеют нулевое барионное число, их можно построить из парных комбинаций К. При этом оказывается, что в нерелятивистском приближении нек-рые из барионов (напр., Ω^--гиперон) должны состоять из трех идентичных К., находящихся в одном и том же квантовом состоянии, что запрещено принципом Паули. Путь к решению проблемы статистики К. был сформулирован в [3] на основе гипотезы о существовании у К. дополнительного квантового числа, названного впоследствии *цветом*, принимающего для каждого типа (аромата) К. три значения (см. [4], [5]). Группой цветовой симметрии является группа $SU(3)_{\text{color}}$, а наблюдаемые сильнодействующие частицы – адроны – имеют нулевое значение цвета, то есть являются синглетами по отношению к преобразованиям из этой группы.

Для объяснения отсутствия распадов типа $\overline{K}^\circ \to \mu^+\mu^-$ было показано [6], что необходимо ввести в рассмотрение четвертый c-кварк с электрич. зарядом $Q_c = 2/3$, к-рый характеризуется новым квантовым числом «очарование». Это предсказание было экспериментально подтверждено в 1974 после открытия семейства тяжелых векторных J/ψ-мезонов, к-рые оказались связанными состояниями c-К.

В 1977 было обнаружено другое семейство более тяжелых векторных γ-мезонов, существование к-рых находит свое объяснение после введения пятого b-К. с электрич. зарядом $Q_b = -1/3$ и соответствующим им ароматом, носящим название «красоты». В настоящее время также ведутся поиски шестого t-К. с электрич. зарядом $Q_t = 2/3$, предсказываемого стандартной теорией электрослабых взаимодействий. В этой теории, основанной на калибровочной $SU(2)$-симметрии, К. классифицируются как три «поколения» дублетов и синглетов, составленных соответственно из лево- и право- компонент кварковых полей (см. [7], [8]).

Многочисленные эксперименты по поиску К. в свободном состоянии как частиц, несущих дробные электрич. заряды, пропорциональные 1/3 заряда электрона, до сих пор не привели к положительным результатам. Этот факт находит естественное объяснение в рамках гипотезы *конфайнмента*, согласно к-рой цветные частицы, преобразующиеся по нетривиальному представлению цветовой группы $SU(3)_{\text{color}}$, не существуют в свободном состоянии. Тем не менее, в экспериментах при высоких энергиях К. проявляют себя в качестве струй вторичных адронов, причем характерные особенности этих струй могут быть связаны с породившими их К.

Лит.: [1] Gell-Mann M., «Phys. Lett.», 1964, v. 8, p. 214–15; [2] Zweig G., CERN report 8182/TH, 401, 1964; [3] Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., препринт Д 1968, Дубна, 1965; [4] Релятивистски-инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы, Дубна, 1965; [5] Han M., Nambu Y., «Phys. Rev.», 1965, v. 139, № 4 B, p. 1006–10; [6] Glashow S., Iliopoulos J., Maiani L., «Phys. Rev.», 1970, v. D2, p. 1285–92; [7] Weinberg S., «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1264–66; [8] Salam A., Elementary particle theory, L., 1968, p. 367–77.

А. Л. Катаев.

КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ – модель, описывающая *адроны* как составные объекты. Первоначально К. м. была предложена как схема классификации сильно взаимодействующих частиц на основе *унитарной симметрии* $SU(3)$. Неприводимые представления группы унитарной симметрии, соответствующие адронным мультиплетам, строятся в рамках К. м. как тензорные произведения фундаментальных представлений размерности 3. Сами фундаментальные представления адронами не реализованы. Допуская существование реальных объектов, несущих фундаментальные представления группы унитарной симметрии, – *кварков*, можно заключить, в указанном выше теоретико-групповом смысле, что все адроны построены из кварков (см. [1]). Унитарная симметрия $SU(3)$ предполагает наличие трех кварков u, d, s, имеющих приблизительно равные массы, и трех антикварков ($\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$), реализующих сопряженное представление. Кварки являются фермионами со спином 1/2 и несут дробный барионный заряд, равный 1/3, электрич. заряды кварков также дробные $e_u = 2/3$, $e_d = e_s = -1/3$. Мезоны – адронные состояния с нулевым барионным зарядом – построены из кварка и антикварка (напр., $\pi^+ \sim u\bar{d}$), а барионы – из трех кварков (напр., $p \sim uud$). Странные частицы содержат в своем составе кварк s, обладающий странностью $s = -1$ (напр., $k^+ \sim \bar{u}s$). Квантовые числа кварков с учетом свойств волновых функций двух и трех фермионов с нулевым орбитальным моментом позволяют правильно воспроизвести как внутренние (то есть заряд, странность), так и пространственно-временные квантовые числа (спин, четность и т. д.) низших адронных мультиплетов. Для описания в рамках К. м. новых экспериментально обнаруженных адронов (J/ψ-частица, γ-резонансы и др.) были введены дополнительные кварки, несущие квантовые числа: «очарование» (c-кварк) и «красота» (b-кварк). Классификация адронов по мультиплетам группы *ароматов* $SU(N)$ сохраняется в смысле квантовых чисел, хотя симметрия относительно этой группы для $N > 3$ сильно нарушена, что связано с различием масс кварков.

Ненаблюдаемость кварков в свободном состоянии (*конфайнмент*), а также противоречие с принципом Паули, возникающее при построении ряда адронов из кварков (напр., $\Omega^- \sim sss$) и заключающееся в невозможности антисимметризовать волновую функцию, долгое время препятствовали признанию кварков как реальных объектов. Разрешение этих трудностей было найдено на основе гипотезы о существовании дополнительного квантового числа, принимающего три значения и названного *цветом*. Это утроило число состояний кварков, но число адронов осталось тем же, поскольку явление конфайнмента было сведено к постулату о физич. наблюдаемости только синглетных относительно группы цвета $SU(3)_{\text{color}}$ состояний.

В рамках К. м. с цветными кварками естественным образом были объяснены многие качественные закономерности сильных взаимодействий — такие, напр., как аннигиляционная модель слабых и электромагнитных взаимодействий, правило Окубо—Цвейга—Изуки, партонная картина глубоко-неупругого рассеяния и инклюзивных реакций, правила кваркового счета для асимптотич. поведения упругих формфакторов и др. Был вычислен также ряд количественных параметров, среди к-рых магнитные моменты барионов, ширина распада $\pi^0 \to \gamma\gamma$, сечение e^-e^+ — аннигиляции в адроны, массовые сдвиги внутри унитарных мультиплетов и др. В рамках К. м. на основе использования нерелятивистского подхода, приближения *кваркового мешка* и других были рассчитаны спектр масс низколежащих адронов и множество ширин перехода между ними. В этом подходе необходима такая динамич. характеристика кварков, как масса. Вследствие ненаблюдаемости кварков в свободном состоянии понятие массы кварка вводится в рамках квантовой хромодинамики как «токовая» или лагранжева. Отражением существования существенно различных масштабов масс адронов ($m_p \sim 1$ ГэВ, $m_\gamma \sim 10$ ГэВ) является большое различие в величинах токовых масс кварков $m_u = m_d = 0$, $m_s = 150$ МэВ, $m_c = 1{,}3$ ГэВ, $m_b = 4{,}5$ ГэВ, для массы экспериментально еще не обнаруженного t-кварка существует ограничение $m_t > 60$ ГэВ.

Экспериментальное подтверждение наличия внутри адронов структурных единиц, обладающих именно теми свойствами, к-рые теория приписывает кваркам, позволяет говорить о существовании кварков как реальных объектов, из к-рых адроны действительно состоят, хотя полное теоретич. понимание механизма образования адронов из кварков в настоящее время отсутствует.

Модель цветных кварков, дополненная требованием локальной цветовой симметрии, служит основой *квантовой хромодинамики* — современной количественной теории сильных взаимодействий.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц, Дубна, 1965. *А. А. Пивоваров.*

КВАРКОВЫЙ МЕШОК — феноменологическая модель *адронов*, позволяющая успешно рассчитывать их низкоэнергетические характеристики: спектр масс адронов, магнитные моменты, вершины нуклон-нуклонного и пион-нуклонного взаимодействий и т. д. В простейшем варианте (см. [1]) К. м. — это система эффективно свободных безмассовых фермионных полей с квантовыми числами валентных кварков, локализованных в конечной области пространства (напр., сферы радиуса R) и удовлетворяющих определенным граничным условиям.

Размер К. м. R — внешний параметр, через к-рый выражаются все размерные характеристики адронов. В более сложных моделях К. м. [2], [3] предполагается существование отрицательной плотности энергии вакуума внутри мешка, что делает К. м. энергетически стабильным, по крайней мере для простейших адронных состояний. Удовлетворительно описывающим наблюдаемую $SU(2) \otimes SU(2)$-киральную симметрию ядерных сил является киральный К. м., в к-ром вводятся дополнительно безмассовые (в киральном пределе) пионные поля (см. [3]). Граничные условия на границе кирального К. м. связывают кварковые и пионные поля так, чтобы аксиальный ток, соответствующий киральной симметрии, сохранялся.

Лит.: [1] Bogolioubov N. N., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1968, t. 8, p. 163–90; [2] Chodos A., Thorn G., «Phys. Lett.», 1974, v. B 53, p. 359–61; [3] Brown G., Rho M., там же, 1979, v. B82, p. 177–80. *А. И. Бочкарев.*

КВАТЕРНИОН — элемент множества $\mathbb{H}$, представимый в виде

$$q = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k,$$

где α_0, α_1, α_2, α_3 — действительные числа, а $(1, i, j, k)$ — образующие базиса в $\mathbb{H}$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} 1i = i,\ 1j = j,\ 1k = k,\ 1^2 = 1,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ji = -ji = k,\ ki = -ik = j,\ jk = -kj = i. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Умножение К. q на скаляр α и сложение К. определяются так же, как и для обычных векторов. Можно ввести произведение двух К. $q = \alpha_i e_i$ и $q' = \beta_i e_i$ формулой

$$qq' = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j e_i e_j,$$

иногда выделяют скалярную и векторную части К.:

$$q = \alpha_0 + V,$$

тогда умножение векторных частей определяется формулой

$$V_1 V_2 = -(V_1 V_2) + [V_1 V_2].$$

Тем самым множество $\mathbb{H}$ превращается в *алгебру* (алгебру кватернионов). Из соотношений (1) следует, что $\mathbb{H}$ — некоммутативная, но ассоциативная алгебра. Алгебра $\mathbb{H}$ содержит в виде подалгебры поле действительных чисел $\mathbb{R} = \{\alpha e_0\}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C} = \{\alpha e_0 + \beta e_1\}$.

Алгебра $\mathbb{H}$ допускает изоморфное матричное представление с помощью *Паули матриц*:

$$e_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad e_1 = i \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad e_2 = i \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}, \quad e_3 = i \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Для каждого К. $q = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ определены сопряженный К. $\bar{q} = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3$ и норма $N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = |q|^2$. Обратным кватернионом является $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$. Каждый ненулевой К. имеет обратный.

Наряду с действительными и комплексными числами в различных вопросах теории представлений групп, топологии и физики можно использовать К. Вращение трехмерного пространства можно задать при помощи К. с нормой 1 (аналогично тому, как вращение плоскости задается комплексным числом с модулем 1). *М. И. Монастырский.*

КЕЛЬВИНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование функций, определенных в областях евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, при котором *гармонические функции* переходят в гармонические. Получено У. Томсоном (W. Thomson, 1847) (лордом Кельвином).

Если $u(x)$ — гармонич. функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$, то ее К. п. есть функция

$$v(y) = \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{R^2}{|y|^2}, y\right), \quad v(\infty) = 0,$$

гармоническая в области D^*, получающейся из D инверсией относительно сферы $S_R = \{x : |x| = R\}$, то есть отображением пространства $\mathbb{R}^n$, определяемым формулами

$$x \to y = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad 0 \to \infty,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $|x| = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$.

При К. п. гармонич. функции $u(x)$ в областях D, содержащих ∞, регулярные в ∞, то есть такие, что

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0,$$

переходят в гармонич. функции $v(y)$ в ограниченных областях D^*, содержащих начало координат O, причем $v(0)=0$. Благодаря этому свойству, К. п. позволяет сводить внешние краевые задачи теории потенциала к внутренним, и наоборот.

Кроме К. п., гармоничность функций в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, сохраняется при аналитич. преобразованиях вида $v(y)=\varphi(y)u(\psi(y))$ только в случае, когда $\varphi(y)\equiv 1$ и ψ есть отображение подобия, движение или симметрия относительно плоскости; при $n=2$ этим свойством обладает широкий класс конформных отображений ψ. *Е. Д. Соломенцев.*

КЕЛЬТСКИЙ КАМЕНЬ – тело неправильной формы, которое, будучи закручено на горизонтальной плоскости в одном направлении, сохраняет заданное вращение, а будучи закручено в другом направлении, меняет заданное вращение на противоположное без каких-либо внешних воздействий.

Математич. модель К. к.– тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости при следующих предположениях: одна из главных центральных осей инерции тела в одном из направлений (пусть в отрицательном) «пересекает» (в точке K) поверхность тела по нормали к последней, а две другие центральные оси повернуты на угол δ $(0<\delta<\pi/2)$ по отношению к направлениям главных кривизн поверхности тела в точке K, причем как соответствующие моменты инерции тела (A_1 и A_2), так и соответствующие радиусы кривизны (r_1 и r_2) не равны между собой ($A_1\neq A_2$, $r_1\neq r_2$).

При указанных условиях уравнения движения тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости допускает решение, отвечающее вращению тела вокруг вертикально расположенной главной оси инерции тела, ортогональной его поверхности (при этом тело опирается о горизонтальную плоскость точкой K), с произвольной постоянной угловой скоростью.

Одно из условий устойчивости этого вращения имеет вид:

$$[(A_2-A_1)(r_2-r_1)\sin\delta\cos\delta]\omega>0$$

и, очевидно, накладывает ограничение на направление вращения тела (при строгом нарушении неравенства вращение неустойчиво).

Лит.: [1] Walker G. T., «Quart. J. Appl. Math.», 1896, v. 23; [2] Magnus K., Kreisel. Theorie und Anwendungen, B., 1971.

А. В. Карапетян.

КЕМПБЕЛЛА ФОРМУЛА – см. *Пуассоновский процесс.*

КЕРРА ЧЕРНАЯ ДЫРА – см. *Керра – Ньюмена черная дыра.*

КЕРРА – НЬЮМЕНА ЧЕРНАЯ ДЫРА – стационарное осесимметричное решение уравнений Эйнштейна–Максвелла. Метрика пространства-времени К.–Н. ч. д. в координатах Бойера–Линдквиста имеет вид:

$$ds^2=-\frac{(1-2mr-Q^2)}{\Sigma}dt^2-\frac{(2mr-Q^2)2a\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\varphi+$$
$$+\Sigma/\Delta dr^2+\Sigma d\theta^2+[(r^2+a^2)^2+\Delta a^2\sin^2\theta]d\varphi^2/\Sigma, \qquad (*)$$

где

$$\Delta=r^2-2mr+a^2+Q^2,\ \Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta.$$

К.–Н. ч. д. ($m^2\geqslant a^2+Q^2$) характеризуется тремя параметрами: массой m, моментом импульса a, отнесенным к массе, и зарядом Q и представляет собой наиболее общее стационарное решение уравнений Эйнштейна–Максвелла, описывающее черную дыру (см. *Черная дыра*; теоремы единственности). В предельных случаях значения параметров метрика (*) описывает геометрию следующих черных дыр:

а) $Q=0$ – стационарную геометрию черной дыры Керра;

б) $a=0$ – статич. геометрию черной дыры Рейснера – Нордстрема;

в) $a=Q$, $Q=0$ – статич. геометрию черной дыры Шварцшильда.

В координатах Бойера – Линдквиста метрика (*) становится особенной на горизонте событий

$$r=r_+=m+(m^2-Q^2-a^2)^{1/2}.$$

Устранить особенность можно переходом к координатам Керра:

$$dV=dt+(r^2+a^2)dr/\Delta,\ d\tilde{\varphi}=d\varphi+adr/\Delta.$$

Векторы Киллинга

$$\xi_{(t)}=\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial V},\quad \xi_{(\varphi)}=\frac{\partial}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}},$$

генерирующие стационарность и осевую симметрию порождают абелеву группу изометрий. Координаты Бойера – Линдквиста выделены условием, что скалярные произведения векторов Киллинга равны соответствующим компонентам метрики:

$$\xi_{(t)}\xi_{(t)}=g_{tt},\ \xi_{(t)}\xi_{(\varphi)}=g_{t\varphi},\ \xi_{(\varphi)}\xi_{(\varphi)}=g_{\varphi\varphi}.$$

Времениподобный вектор $\xi_{(t)}$ становится изотропным на гиперповерхности

$$r_0=m+(m^2-Q^2-a^2\cos^2\theta)^{1/2},$$

называемой пределом статичности. Это название оправдано тем, что внутри этой гиперповерхности вектор $\xi_{(t)}$ пространственноподобен, и любой наблюдатель неминуемо вовлекается в орбитальное движение вокруг черной дыры. Область между пределом статичности и горизонтом называется эргосферой. Предел статичности и горизонт касаются в точках $\theta=0$ и $\theta=\pi$. При a, стремящемся к нулю, они сливаются. При пересечении горизонта наблюдатель не может оставаться на орбите с постоянным радиусом, а увлекается внутрь черной дыры. Р. Пенроуз [2] описал механизм, при помощи к-рого возможно извлечение энергии из черной дыры. Незаряженная частица, находящаяся внутри эргосферы, распадается на пару частиц, энергия одной из к-рых отрицательна (что возможно внутри эргосферы). Составляющая с отрицательной энергией поглощается черной дырой, а другая вылетает из эргосферы во внешнюю часть пространства-времени с энергией большей, чем энергия падающей частицы. Горизонт событий представляет собой изотропную гиперповерхность, образованную закручивающимися нулевыми геодезическими, принадлежащими главной нулевой конгруэнции. Важной характеристикой геометрии К.–Н. ч. д. являются орбиты пробных частиц (см. [3]). Максимальное аналитич. продолжение метрики Керра – Ньюмена через горизонты r_+ и $r_-=m-(m^2-Q^2-a^2)^{1/2}$ представляет собой бесконечное число асимптотически плоских областей, содержащих кольцевую сингулярность (см. [4]).

Лит.: [1] Newman E. [a. o.], «J. Math. Phys.», 1965, v. 6, № 6, p. 918–19; [2] Penrose R., «Riv. Nuovo Cim.», 1969, v. 1 (spec.), p. 252–76; [3] Латтман А. [и др.], Сборник задач по теории относительности и гравитации, пер. с англ., М., 1979; [4] Carter B., «Phys. Rev.», 1968, v. 174, № 5, p. 1559–71; [5] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 3, М., 1977.

А. Т. Ильичев.

КИЛЛИНГА ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ – обобщение понятия поля скоростей движения в евклидовом пространстве на римановы пространства. Пусть гладкое относительно нек-рого параметра t (времени) семейство $f_t: M\to M$ локальных изометрий риманова многообразия M с метрич. тензором g_{ij} представлено в локальных координатах x^i в виде:

$$f_t: x\to x+th(x)+o(t),\ t\to 0,$$

тогда оно в момент $t=0$ порождает векторное поле

$$\xi=\frac{d}{dt}(f_t)=h^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

удовлетворяющее равенству

$$g_{ip}\frac{\partial h^p}{\partial x^i}+g_{pi}\frac{\partial h^p}{\partial x^i}+\frac{\partial q_{ij}}{\partial x^p}h^p=0,$$

означающему, что так наз. производная Ли $L_\xi g$ тензора g_{ij} по векторному полю ξ равна нулю. Обратно, если на M задано нек-рое векторное поле ξ с условием $L_\xi g=0$, то оно

называется векторным полем Киллинга и его интегральные траектории порождают локальную (а в случае полного M – глобальную) однопараметрич. группу изометрий $x \to x(t)$ в M, для к-рых скорость $\dot{x}(t) = \xi(x(t))$. Напр., в случае трехмерного евклидова пространства со стандартной метрикой $g_{ij} = \delta_{ij}$ К. в. п. имеет координаты

$$h^i(x) = \{a^i + a^i_j x^j\}$$

с $a^j_i = -a^i_j$, а соответствующая однопараметрич. группа изометрий (движений) определяется переносом на вектор at, $a = \{a^i\}$, и вращением вокруг оси с единичным направлением

$$\frac{1}{\lambda}\left(-a^2_3, a^1_3, -a^1_2\right)$$

на угол $\lambda(t)$.

См. также *Метрика пространства-времени, Риманова геометрия.*

Лит.: [1] Killing W., «J. reine und angew. Math.», 1892, Bd 109, S. 121–86; [2] Кобаяси Ш., Номодзу К., Основы дифференциальной геометрии, т. 1, пер. с англ., М., 1981; [3] Алексеевский Д. В., в кн.: Математическая энциклопедия, т. 2, М., 1979, с. 856.

И. Х. Сабитов.

КИЛЛИНГА ФОРМА – симметричная билинейная форма $\{x, y\}$, строящаяся следующим образом. Пусть $\mathfrak{G}$ – алгебра Ли, а x – элемент $\mathfrak{G}$ и ad_x – оператор в $\mathfrak{G}$, задаваемый формулой $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$. Тогда К. ф. $\{x, y\}$ – форма, равная следу произведения $\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y$. К. ф. инвариантна относительно операторов присоединенного представления группы Ли G, соответствующей алгебре $\mathfrak{G}$. К. ф. невырождена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ полупроста (см. *Ли алгебра*). Если К. ф. отрицательно определена, то группа G компактна. Алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима тогда и только тогда, когда для любых ее элементов x, y, z выполнено

$$\{x, [y, z]\} = 0.$$

Ю. А. Неретин.

КИНЕМАТИКА – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движений тел, без учета их масс и действующих на них сил. В зависимости от свойств изучаемого объекта К. разделяют на К. точки, К. твердого тела и К. непрерывной изменяемой среды (деформируемого твердого тела, жидкости, газа).

Движение любого объекта в К. изучают по отношению к нек-рой системе отсчета. Движение рассматриваемого объекта считается заданным (известным), если известны уравнения (графики, таблицы), позволяющие определить положение этого объекта по отношению к системе отсчета в любой момент времени.

Основная задача К.– установление способов задания движения точек или тел и определение соответствующих кинематич. характеристик этих движений (траектории, скорости и ускорения движущихся точек, угловые скорости и ускорения вращающихся тел и др.).

Способы задания движения твердого тела зависят от вида его движения, а число уравнений движения – от числа степеней свободы тела (см. *Степеней свободы число*). Простейшими являются поступательное и вращательное движения твердого тела. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, и его движение задается и изучается так же, как движение одной точки. При вращательном движении вокруг неподвижной оси тело имеет одну степень свободы; его положение определяется углом поворота φ, а закон движения задается уравнением $\varphi = f(t)$. Основными кинематич. характеристиками являются угловая скорость и угловое ускорение.

Более сложным является движение тела, имеющего одну неподвижную точку и обладающего тремя степенями свободы (напр., гироскоп). В этом случае положение тела относительно системы отсчета может определяться так наз. *Эйлера углами*, а закон движения – уравнениями, выражающими зависимость этих углов от времени.

Самый общий случай – движение свободного твердого тела, имеющего шесть степеней свободы. Положение тела определяется тремя координатами одной из его точек, называемой полюсом (в задачах динамики за полюс обычно принимается центр тяжести тела), и тремя углами, к-рые выбираются так же, как для тела с неподвижной точкой. Закон движения тела задается шестью уравнениями, выражающими зависимости названных координат и углов от времени. Основные кинематич. характеристики – скорость и ускорение поступательной части движения, равные скорости и ускорению полюса, и угловые скорость и ускорение вращения тела вокруг полюса.

В К. изучают также сложное движение точек или тел, то есть движение, рассматриваемое одновременно по отношению к двум (или более) взаимно перемещающимся системам отсчета. При этом одну из систем отсчета рассматривают как основную (ее условно называют неподвижной), а перемещающуюся по отношению к ней систему отсчета – подвижной; в общем случае подвижных систем отсчета может быть несколько. При изучении сложного движения точки ее движение, а также скорость и ускорение по отношению к основной системе отсчета называют абсолютными, а по отношению к подвижной системе – относительными. Основные задачи К. сложного движения заключаются в установлении зависимостей между кинематич. характеристиками абсолютного и относительного движений точки (или тела) и характеристиками движения подвижной системы отсчета.

В К. сплошной среды устанавливаются способы задания движения этой среды, рассматривается общая теория деформаций и определяются так наз. уравнения неразрывности среды.

С. М. Targ.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ системы дифференциальных уравнений – см. *Динамическая система.*

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ, дифференциальная связь, неголономная связь, – связь *неголономной системы.* См. также *Связи механические.*

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ Эйлера – см. *Эйлера уравнения* в механике твердого тела.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ – энергия механической системы, зависящая от скоростей ее точек. К. э. T материальной точки равна:

$$T = mv^2/2,$$

где m – масса этой точки, v – ее скорость. К. э. механической системы равна сумме К. э. всех ее точек:

$$T = \sum m_k v_k^2/2.$$

Выражение К. э. системы можно еще представить в виде:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + T_c,$$

где M – масса всей системы, v_c – скорость центра масс, T_c – К. э. системы в ее движении вокруг центра масс. К. э. твердого тела, движущегося поступательно, вычисляется так же, как К. э. точки, имеющей массу, равную массе всего тела.

Изменение К. э. системы при ее перемещении из положения 1 в положение 2 происходит под действием приложенных к системе внешних и внутренних сил и равно сумме работ A^e_k и A^i_k этих сил на данном перемещении:

$$T_2 - T_1 = \sum_k A^e_k + \sum_k A^i_k.$$

Это равенство выражает теорему об изменении К. э., с помощью к-рой решаются многие задачи динамики.

При скоростях, близких к скорости света, К. э. материальной точки равна:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2,$$

где m_0 – масса покоящейся материальной точки, c – ско-

рость света в вакууме (m_0c^2 – энергия покоя точки). При малых скоростях ($v \ll c$) последнее соотношение переходит в обычную формулу

$$m_0 v^2/2.$$

См. также *Энергия*. *С. М. Таре.*

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ – см. *Момент количества движения.*

КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Лагранжа функция.*

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – эволюционное уравнение для одночастичной функции распределения $F_1(t, x)$ ($x \equiv (q, p) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$ – координата и импульс частицы) типа

$$\frac{d}{dt} F_1(t,x) = A(x; F_1(t,x)),$$

где выражение $A(x; F_1(t, x))$ в любой момент времени t полностью определяется функцией $F_1(t, x)$ для этого же момента. Для квантовых систем К. у. определяется аналогичным образом для одночастичной редуцированной *плотности матрицы* (см. [1]). Основные примеры К. у.: *Больцмана уравнение, Власова уравнение, Фоккера – Планка уравнение, Ландау уравнение, Больцмана – Энского уравнение.* Родственные им уравнения рассмотрены в [2].

Проблема обоснования К. у. связана с выводом К. у. из уравнений эволюции состояния статистич. систем – *Боголюбова уравнений.* Метод Н. Н. Боголюбова вывода К. у. состоит в том, что на основе асимптотич. разложений по малому параметру строится частное решение уравнений Боголюбова, к-рое зависит от времени через одночастичную функцию распределения. Если начальные функции распределения удовлетворяют принципу ослабления корреляций (см. *Кластерное свойство*), то одночастичные функции распределения определяются из К. у. Интерпретируется К. у. как уравнение эволюции состояния системы на определенном (кинетич.) этапе процесса релаксации к равновесному состоянию. Существуют и другие методы вывода К. у. (см. [2], [3]).

Так как состояние системы частиц описывается последовательностью n-частичных функций распределения, то, следовательно, К. у. описывает эволюцию состояния в определенной предельной ситуации. Поэтому в математич. работах последнего времени проблема обоснования К. у. формулируется как построение соответствующего предела для решений уравнений Боголюбова. Предельный переход совершается по параметрам, входящим в гамильтониан системы, таким образом, что выполнение условия факторизации для предельных функций распределения в начальный момент времени влечет за собой выполнение аналогичного условия в любой момент времени (в системе отсутствуют корреляции). Следует подчеркнуть, что в кинетич. пределе описываются системы бесконечного числа частиц.

Предел решений уравнений Боголюбова удовлетворяет цепочке предельных уравнений Боголюбова. (Для стационарных решений уравнений Боголюбова см. *Равновесных состояний кинетический предел.*) Если в начальном состоянии отсутствуют корреляции, то состояние предельной системы в любой момент времени описывается одночастичной функцией распределения, к-рая удовлетворяет К. у. Таким образом, приходят к уравнению Больцмана в *Больцмана – Грэда пределе* (см. [3]), к уравнению Власова в *среднего поля пределе* и т. п. (см. [4]).

В настоящее время строгие результаты, связанные с выводом К. у., получены в пределе среднего поля для гладкого потенциала и интегрируемых начальных данных, в пределе Больцмана – Грэда для системы упругих шаров.

Вопросы существования и единственности решений К. у. весьма нетривиальны, известны случаи точных решений (см. [4]). К. у. находят широкое применение в различных разделах физики.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 2, Киев, 1970; [2] Либов Р., Введение в теорию кинетических уравнений, пер. с англ., М., 1974; [3] Грэд Г., в кн.: Термодинамика газов, пер. с англ. и нем., М., 1970, с. 5–168; [4] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 233–307. *В. И. Герасименко.*

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ Больцмана – см. *Больцмана кинетическое уравнение.*

КИНК – термин, впервые возникший в теории *синус-Гордона уравнения*

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0.$$

Кинк $u_+(x, t)$ и антикинк $u_-(x, t)$ – это односолитонные решения уравнения синус-Гордона:

$$u_\pm(x, t) = 4\operatorname{arctg} \exp[\pm (1 - v^2)^{-1/2}(x - vt - x_0)].$$

Убывающие (по mod 2π) решения уравнения синус-Гордона имеют важную целочисленную характеристику – топологич. заряд

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\, dx.$$

Если $Q = 1$, то $u(x, t)$ – солитон (кинк, флюксон), если $Q = -1$, то $u(x, t)$ – антисолитон (антикинк, антифлюксон) (см. [1], [2]). Позднее, для других нелинейных эволюционных уравнений термин «К.» («антикинк») стал употребляться для одиночных солитонов, имеющих форму «перегиба». Напр., К. (антикинк) уравнения Миуры – Кортевега – де Фриса

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

имеет вид:

$$u(x, t) = \pm a \operatorname{th}[a(x + 2a^2 t - x_0)].$$

См. также *Беклунда преобразование.*

Лит.: [1] Солитоны в действии, пер. с англ., М., 1981; [2] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., Гамильтонов подход в теории солитонов, М., 1986. *В. П. Котляров.*

КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ в квантовой теории поля – симметрия уравнений движения, которая комбинируется из двух различных симметрий: симметрии взаимодействия адронов относительно обычных преобразований в изотопическом пространстве без изменения внутренней четности и той же симметрии, но с изменением внутренней четности. Таким образом, преобразования К. с., кроме перемешивания состояний частиц с различными электрич. зарядами, перемешивают и состояния с разной внутренней четностью. К. с. является глобальной, то есть не зависящей от точек пространства-времени. Такая инвариантность в случае частиц ненулевой массы не может быть связана ни с каким законом сохранения для фиксированной системы частиц, а определяет лишь форму их взаимодействия, напр. форму взаимодействия нуклонов с псевдоскалярными пионами, испускание каждого из к-рых изменяет четность системы. В этом смысле К. с. является *динамической симметрией.* К. с.– один из примеров симметрии, приводящей к существенно нелинейной квантовой теории поля.

Инвариантность относительно вращений в изотопич. пространстве без изменения четности связана с законом сохранения векторных токов (V), а с изменением четности – с законом сохранения аксиальных токов (A) (см. *Ток* в квантовой теории поля). Сохранение векторного тока можно связать с сохранением полного электрич. заряда системы взаимодействующих частиц. В случае безмассовых спинорных (со спином 1/2) частиц, напр. нейтрино, сохранение аксиального тока можно связать с определенным законом сохранения – законом сохранения спиральности. Действительно, в случае безмассового спинорного поля, распространяющегося со скоростью света, спин квантов поля направлен либо против движения, либо в сторону движения. Соответственно различают левую и правую спиральность; первому случаю соответствует комбинация $V-A$ токов частиц, второму – комбинация $V+A$, и эти комбинации должны сохраняться в отсутствие взаимодействия нейтрино с другими частицами. Однако если спинорная частица имеет ненулевую массу покоя, то ее спин не обязательно должен быть ориентирован по оси движения. Но во взаимодействиях с другими частицами это качество спиральности опять проявляется. Так, в слабом взаимодействии участвуют только лептоны с левыми спиральностями, а в

сильном могут участвовать как левые (с левой спиральностью частиц) токи адронов $V-A$, так и правые $V+A$.

Наряду с теорией поля, использующей лагранжев формализм с лагранжианами, удовлетворяющими требованиям К. с., для нахождения связей между вероятностями процессов с различным числом взаимодействующих адронов используется так наз. *алгебра токов* – соотношения, связывающие коммутатор двух токов с самими токами. Она состоит из двух независимых алгебр: алгебры левых токов адронов $V-A$ и алгебры правых токов адронов $V+A$.

Киральная квантовая теория поля описывает многочисленные процессы рассеяния и распада адронов при низких энергиях в хорошем согласии с экспериментальными данными. Она имеет место и при описании процессов при очень высоких энергиях (напр., в модели партонов).

К. с.– приближенная; она была бы точной, если бы масса псевдоскалярных пионов равнялась нулю. Поскольку же их масса отлична от нуля (хотя и существенно меньше массы барионов), аксиальные токи сохраняются лишь частично (степень несохранения пропорциональна массе мезона).

Лит.: [1] Токи в физике адронов, сб., пер. с англ., М., 1976; [2] Волков М. К., Первушин В. Н., Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов, М., 1978; [3] Хуанг К., Кварки, лептоны и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1985; [4] Рамон П., Теория поля, пер. с англ., М., 1984.

М. К. Волков.

КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ сильного взаимодействия – приближенная симметрия сильного взаимодействия относительно преобразований, меняющих четность, киральных преобразований (см. ниже). Сильное взаимодействие описывается квантовой хромодинамикой – калибровочной теорией взаимодействия цветных *кварков* и *глюонов*. Лагранжиан квантовой хромодинамики содержит поля кварков $q=u,\ d,\ s$, массы к-рых малы в масштабе масс, характерных для сильного взаимодействия (~ 1 ГэВ при $\hbar=c=1$). Более точная формулировка этого утверждения затруднена тем, что свободные кварки не существуют из-за явления так наз. *конфайнмента* (удержания цвета). Можно лишь говорить о массах кварков при квадратах переданного импульса, напр. порядка 1 ГэВ^2. Тогда массы примерно равны

$$m_u \approx 3\text{МэВ},\ m_d \approx 5\text{МэВ},\ m_s \approx 125\text{МэВ}. \qquad (1)$$

Если пренебречь массами кварков, то поля u-, d-, s-кварков не различаются и лагранжиан квантовой хромодинамики инвариантен относительно вращений в пространстве типа (*аромата*) кварков (см. *Внутренняя симметрия*), при к-ром u-, d-, s-кварки переходят друг в друга. При этом вследствие векторного характера взаимодействия кварков с глюонами можно независимо вращать левые и правые составляющие кварковых полей q_L, q_R. Преобразования такого рода характеризуются 8 независимыми параметрами ξ_L^a для левых частиц и 8 параметрами ξ_R^a для правых, $a=1,\ \ldots,\ 8$:

$$q_{L(R)} \to \left(1 + i\sum_{a=1}^{8} \xi_{L(R)}^a \lambda^a\right) q_{L(R)}, \qquad (2)$$

где λ^a – *Гелл-Мана матрицы*, действующие в пространстве аромата кварков $u,\ d,\ s$.

Если $\xi_L^a = \xi_R^a$, то преобразования (2) сохраняют четность. Инвариантность относительно таких преобразований имеет место и в том случае, когда массы кварков отличны от нуля, но равны между собой: $m_u = m_d = m_s \neq 0$ (исторически такая возможность обсуждалась первой). Как следует из (1), сейчас нет оснований полагать, что приближение равных масс кварков лучше приближения нулевых масс. В последнем случае лагранжиан инвариантен относительно преобразований и с $\xi_L^a = -\xi_R^a$, к-рые не сохраняют четность (при преобразовании четности, то есть пространственной инверсии $q_L \leftrightarrow q_R$); они называются киральными преобразованиями.

С математич. точки зрения инвариантность относительно преобразований (2) означает киральную $[SU(3)\times SU(3)]$-симметрию лагранжиана сильного взаимодействия. Если считать, что $m_s \neq 0$, но по-прежнему $m_u = m_d = 0$, то инвариантность лагранжиана сводится к группе К. с. $SU(2)\times SU(2)$. Наконец, в приближении $m_u = m_d \neq 0$ остается только $SU(2)$-симметрия.

Приближенная $[SU(3)\times SU(3)]$-симметрия была открыта до того, как была сформулирована квантовая хромодинамика. Феноменологически эта симметрия проявляется в существовании восьми относительно легких псевдоскалярных мезонов $\pi^{\pm}$, π^0, $K^{\pm}$, K^0, $\tilde{K}^0$, η и в определенных соотношениях между амплитудами взаимодействия этих мезонов. Точной $[SU(3)\times SU(3)]$-симметрии соответствует приближение нулевых масс кварков, в спектре адронов ей отвечает приближение $m_\pi^2 = m_K^2 = m_\eta^2 = 0$. Точная $[SU(3)\times SU(3)]$-симметрия требует только $m_\pi^2 = 0$. Безмассовость мезонов отвечает при этом спонтанному нарушению К. с. (см. *Спонтанное нарушение симметрии*) – псевдоскалярные мезоны являются голдстоуновскими бозонами. Соотношения между амплитудами рассеяния этих мезонов можно получить, исходя из *токов алгебры* и используя частичное сохранение соответствующего аксиального тока.

Лит.: [1] Вайнштейн А. И., Захаров В. И., «Успехи физич. наук», 1970, т. 100, с. 225; [2] Вайнштейн А. И., там же, 1977, т. 123, с. 217; [3] Рамон П., Теория поля, пер. с англ., М., 1984.

В. И. Захаров.

КИРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Киральная симметрия.*

КИРАЛЬНОЕ СУПЕРПОЛЕ – см. *Суперсимметрия.*

КИРАЛЬНОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО – см. *Суперпространство.*

КИРКВУДА – ЗАЛЬЦБУРГА УРАВНЕНИЯ – система линейных интегральных уравнений для *корреляционных функций*. Рассмотрим в рамках большого канонич. ансамбля систему классич. тождественных частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала

$$\Phi(x) = \Phi(|x|),\ x \in \mathbb{R}^\nu,$$

и находящихся в состоянии статистич. равновесия при температуре β^{-1} и активности z в сосуде $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$. Потенциал $\Phi(x)$ предполагается устойчивым (см. *Устойчивый потенциал взаимодействия*) и регулярным. Последнее означает, что $\Phi(x)$ ограничен снизу и при всех $\beta > 0$

$$\int dx |e^{-\beta\Phi(x)} - 1| < \infty.$$

Обозначим через χ_Λ характеристич. функцию ограниченного измеримого по Лебегу множества $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ и положим

$$\chi_\Lambda(x)_n = \prod_{i=1}^n \chi_\Lambda(x_i),$$

где $(x)_n = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$, $x_1,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R}^\nu$. Обозначим

$$W^1(x)_m = \sum_{i=2}^m \Phi(x_i - x_1);$$

$$(x)'_{m-1} = \{x_2, \ldots, x_m\};$$

$$K(x_1, (y)_n) = \prod_{j=1}^n (e^{-\beta\Phi(y_i - x_1)} - 1).$$

К.– З. у. для корреляционных функций $\rho_\Lambda(x)_n$ имеют вид:

$$\rho_\Lambda(x_1) = \chi_\Lambda(x_1) z \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dy_1 \ldots dy_n K(x_1, (y)_n) \rho_\Lambda(y)_n\right];$$

$$\rho_\Lambda(x)_m = \chi_\Lambda(x)_m z \exp[-\beta W^1(x)_m] \times$$

$$\times \left[\rho_\Lambda(x)'_{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dy_1 \ldots dy_n K(x_1, (y)_n) \rho_\Lambda((x')_{m-1}, (y)_n)\right].$$

К.– З. у. образуют неоднородную систему линейных уравнений относительно корреляционных функций $\rho_\Lambda(x)_n$ при $n \geqslant 1$. К.– З. у. используют для изучения предела корреля-

ционных функций при $|\Lambda| \to \infty$. Особенно эффективны К.–З. у. при малых значениях активности, когда удается доказать единственность их решений, а также существование и единственность предельных корреляционных функций.

К.–З. у. получены Дж. Кирквудом (J. Kirkwood) и З. Зальцбургом (Z. Salzburg) и восходят к работе Дж. Майера [4].

См. также *Равновесные состояния*; кинетический предел.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1971; [2] Ruelle D., «Ann. Phys.», 1963, v. 25, p. 109; [3] Munster A., Statistical thermodynamics, v. I, B. – N.Y., 1969; [4] Mayer J. E., «J. Chem. Phys.», 1947, v. 15, p. 187.

Д. П. Санкович.

КИРКВУДА – МОНРО УРАВНЕНИЕ – см. *Равновесные состояния*; кинетический предел.

КИРХГОФА ИНТЕГРАЛ – см. *Кирхгофа формула.*

КИРХГОФА СЛУЧАЙ – см. *Твердое тело*; движение в идеальной жидкости.

КИРХГОФА УРАВНЕНИЕ – см. *Твердое тело*; движение в идеальной жидкости.

КИРХГОФА ФОРМУЛА – формула, выражающая регулярное решение $u(x, t)$ неоднородного *волнового уравнения* в трехмерном пространстве

$$\Delta u - c^{-2}u_{tt} = f(x, t) \qquad (1)$$

через начальные данные задачи Коши $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \rho(x)$ и объемный запаздывающий *потенциал* $v(x, t)$ с плотностью $f(y, t)$:

$$u(x,t) = v(x,t) + (4\pi c^2 t)^{-1}\int_S \rho(y)dS_y + \\ + (4\pi c^2)^{-1}(\partial/\partial t)t^{-1}\int_S \varphi(y)dS_y, \qquad (2)$$

где $\rho(x)$, $\varphi(x)$ – соответственно дважды и трижды непрерывно дифференцируемые функции, S – сфера радиуса

$$ct = |x-y| = [(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2]^{1/2}$$

с центром в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$v(x,t) = -\int_{r\leqslant ct}(4\pi r)^{-1} f(y, t - r/c)dy,$$

$r = |x-y|$, а $f(x, t)$ – дважды дифференцируемая функция. При $f(x, t) = 0$ функция $u(x, t)$ определяется значениями $\varphi(x)$, $\partial\varphi/\partial n$, $\rho(x)$, взятыми на сфере S, где n – внешняя нормаль к S. Это свойство решений волнового уравнения (1) называется принципом Гюйгенса – Френеля.

Из К. ф. можно получить *Пуассона формулу* и *Д'Аламбера формулу*, дающие решение задачи Коши в двумерном и одномерном пространстве. К. ф. (2) обобщена на случай произвольных целых размерностей пространства.

К. ф. называют также интеграл Кирхгофа:

$$u(x,t) = -\int_\Omega (4\pi r)^{-1} f(y, t - r/c)d\Omega_y + \\ + \int_\sigma [r^{-1}\partial u/\partial n - u\partial r^{-1}/\partial n + (rc)^{-1}(\partial u/\partial\tau)\partial r/\partial n]d\sigma/4\pi,$$

$$\tau = t - r/c,$$

выражающий решение волнового уравнения (1) через запаздывающий объемный потенциал и через значения функции $u(y, t)$ и ее производных на границе σ области Ω в момент времени $\tau = t - r/c$, где Ω – ограниченная область трехмерного пространства, n – внешняя нормаль к σ; $r = |x-y|$ – расстояние между точками x и y. К. ф. получена впервые Г. Кирхгофом (G. Kirchhoff, 1882).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988; [2] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1982.

С. В. Молодцов.

КЛАПЕЙРОНА УРАВНЕНИЕ – см. *Гидродинамики уравнения.*

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА – см. *Механика.*

КЛАССИЧЕСКАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА – см. *Релятивистская механика.*

КЛАССИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ – ряд групп Ли и соответствующих им алгебр Ли, играющих роль центральных объектов теории. Ниже дано описание этих объектов и их стандартные обозначения.

Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ – множества действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов. И пусть A – матрица, $\mathrm{tr}\,A$ – ее след, A' – транспонированная к A матрица, а $\bar{A}$ – матрица, у к-рой все элементы получаются заменой элементов матрицы A на сопряженные. Полуторалинейной (соответственно, билинейной) формой называется выражение

$$\langle x|A|y\rangle = \sum x_i a_{ij}\bar{y}_j$$

(соответственно $(x|A|y) = \sum x_i a_{ij} y_j$).

Оператор T сохраняет полуторалинейную (билинейную) форму, если

$$\langle Tx|A|Ty\rangle = \langle x|A|y\rangle,$$

(соответственно $(Tx|A|Ty) = (x|A|y)$)

или, что эквивалентно, $TA\bar{T}' = A$ (или $TAT' = A$). Пусть I_n – единичная матрица порядка n и

$$I_{p,q} = \begin{Vmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{Vmatrix}, \quad J_{2n} = \begin{Vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{Vmatrix}.$$

Список классических групп Ли (соответствующие алгебры Ли обозначаются малыми латинскими или малыми готическими буквами).

1) Группы $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$ состоят соответственно из всех действительных или комплексных матриц с определителем 1.

Алгебры Ли $sl(n, \mathbb{R})$ (соответственно $sl(n, \mathbb{C})$) состоят из всех действительных (комплексных) матриц со следом 0.

2) Рассмотрим n-мерное кватернионное пространство $\mathbb{H}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Тогда кватернионную матрицу T можно записать как действительную матрицу T в базисе

$$e_1, ie_1, je_1, ke_1, \ldots, e_2, ie_2, je_2, ke_2, \ldots$$

Группа $SL(n, \mathbb{H})$ состоит из всех кватернионных матриц T таких, что $\det(\tilde{T}) = 1$. Ее алгебра Ли – алгебра Ли всех кватернионных матриц X таких, что $\mathrm{tr}(x + \bar{x}) = 0$.

3) Группы $O(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(p, q)$ состоят из всех действительных, комплексных, кватернионных матриц, сохраняющих полуторалинейную форму $\langle x|I_{p,q}|y\rangle$. Их алгебры Ли состоят из всех матриц X, удовлетворяющих условию $XI_{p,q} + I_{p,q}X' = 0$. Наконец,

$$SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(p+q, \mathbb{R}),$$
$$SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(p+q, \mathbb{C}).$$

4) $O(n, \mathbb{C})$ – группа всех комплексных матриц, сохраняющих билинейную форму $(x|I_n|y)$. Ее алгебра Ли $o(n, \mathbb{C})$ состоит из кососимметрич. матриц. Группа

$$SO(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C}).$$

5) $Sp(2n, \mathbb{R})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$ – группы всех действительных и комплексных матриц, сохраняющих билинейную форму $(x|J_{2n}|y)$.

6) $SO^*(2n)$ – группа всех кватернионных матриц, сохраняющих полуторалинейную форму

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha j\bar{y}_\alpha.$$

Ее алгебра Ли состоит из кватернионных матриц X, удовлетворяющих $X_j + j\bar{X}' = 0$.

Другие обозначения:

$$O(n, 0) = O(n, \mathbb{R}),$$
$$U(n, 0) = U(n),$$
$$Sp(n, 0) = Sp(n) = SpU(n) = U(n, \mathbb{H}),$$
$$SL(n, \mathbb{H}) = SU^*(2n).$$

Ю. А. Неретин.

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ – см. *Ортогональные многочлены.*

КЛАССИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ – совокупность точек в фазовом пространстве Ω (пространстве конфигураций) классической динамической системы, каждой из которых приписывается определенный вес (мера). Макроскопич. наблюдаемая $F(t)$ в момент времени t, соответствующая динамич. функции $\varphi(\omega; t)$, где $\omega \in \Omega$, задается соотношением

$$F(t) = \int_\Omega \varphi(\omega; 0) d\mu(\omega; t).$$

Плотность $\mathcal{D}(\omega; t)$ меры $d\mu$ называется функцией распределения. Функция распределения удовлетворяет *Лиувилля уравнению* и интерпретируется как плотность вероятности нахождения системы в точке ω фазового пространства в момент времени t. В случае классич. непрерывных систем из N точек в ν-мерном конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^\nu$, положение к-рых $x_i \in \mathbb{R}^\nu$, а импульсы p_i, $i = 1, 2, ..., N$,

$$d\omega = \prod_{i=1}^N dx_i\, dp_i.$$

В равновесном случае мера $d\mu$ не зависит от времени. В современной статистич. механике используют меры, соответствующие ансамблям Гиббса: микроканоническому, каноническому и большому каноническому. Принято считать, что в *термодинамическом пределе* все эти ансамбли приводят к эквивалентным описаниям К. а. (см. *Эквивалентность ансамблей*).

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1971.

Д. П. Санкович.

КЛАССИЧЕСКИЙ ВЕКТОР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – см. *Распределения вектор* классический.

КЛАССИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР Лиувилля – см. *Лиувилля классический оператор.*

КЛАССИЧЕСКОЕ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ – уравнение движения

$$D_+ D_- \Phi = \exp \Phi$$

для суперскалярного поля Φ в $2|2$-мерном суперпространстве с операторами супердифференцирования $D_\pm$ в переменных светового конуса. Оно является частным случаем *Тоды суперсимметричной цепочки*, ассоциируемым с супералгеброй $\mathrm{osp}(1|2)$.

Лит.: [1] Chaichian M., Kulish P. P., «Phys. Lett.», 1978, v. 78B, p. 413–16; [2] Leznov A. N., Saveliev M. V., Leites D. A., там же, 1980, v. 96B, p. 97–99.

М. В. Савельев.

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ – разбиение системы n независимых переменных $\{x_1, ..., x_n\}$ на кластеры (непересекающиеся подмножества) $\{X_1, ..., X_m\} \equiv X$ такое, что $\cup X_i = \{x_1, ..., x_n\}$. В статистич. механике и квантовой теории поля функции, описывающие состояния большого числа частиц, кластеризуются, то есть представляются в виде:

$$f(X) = \sum_k {\sum}^* f_1(X_1) \dots f_k(X_k),$$

где суммирование $\sum^*$ проводится по $X_1, ..., X_k$, $X_i \cap X_j = \varnothing$, $\cup X_i = X$. К. возникает в майеровских разложениях, кластерных разложениях, в теории S-матриц и других случаях.

А. Л. Ребенко.

КЛАСТЕРНОЕ РАЗБИЕНИЕ – разбиение системы N частиц на l подсистем $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_l$ такое, что эти подсистемы имеют связанные состояния. Это означает, что операторы энергии подсистем H_{ω_s}:

$$H_{\omega_s} = -\sum_{k \in \omega_s} \frac{1}{2m_k} \Delta r_k + \sum_{i,j \in \omega_s} v_{ij}(r_i - r_j),$$

рассматриваемые в *центра масс системе*, имеют дискретный спектр. К. р. тем самым характеризуется набором подсистем $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_l$ и набором собственных функций

$$\{\psi_{j_1}\}_1^{N_1}, \quad \{\psi_{j_2}\}_1^{N_2}, \dots, \{\psi_{j_l}\}_1^{N_l},$$

где N_i – число собственных функций дискретного спектра операторов H_{ω_i}. В том случае, когда подсистема ω_k состоит лишь из одной частицы, соответствующая собственная функция ψ_{j_k} считается равной 1.

Лит.: [1] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 3. Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1982; [2] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ в квантовой теории поля и статистической механике – разложение, определяемое сходящимся рядом для средних по некоторой вероятностной мере $d\mu$. Определим в пространстве $\mathbb{R}^d$ (для решетчатых систем $\mathbb{Z}^d$) последовательность расширяющихся объемов $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ ($\mathbb{Z}^d$) и связанную с ней последовательность мер μ_Λ на Ω_Λ, где Ω_Λ – измеримое множество значений соответствующего случайного поля ($\Omega_{\mathbb{R}^d} \equiv \Omega$). Пусть, далее, Σ – стандартная σ-алгебра на Ω, а Σ_{X_0} – ее σ-подалгебра, зависящая от точек $x \in X_0 \subset \Lambda$. Обозначим через F_{X_0} – функцию, измеримую относительно Σ_{X_0}, и введем среднее

$$\langle F_{X_0} \rangle_\Lambda = \int F_{X_0} d\mu_\Lambda.$$

Определение. Пусть для нек-рой ограниченной функции F_{X_0} и любого Λ имеет место разложение

$$\langle F_{X_0} \rangle_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} \mathcal{K}(X) b_\Lambda(X), \qquad (1)$$

$\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X; F_{X_0})$ для $X_0 \subset X$, а $b_\Lambda(X)$ сходятся к нек-рым $b(X)$ при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$. Кроме того $|b_\Lambda(X)| \leqslant \tilde{b}(X)$, причем ряд

$$\sum_{X \subset \mathbb{R}^d} |\mathcal{K}(X)| \tilde{b}(X)$$

сходится. Тогда предельный ряд

$$\langle F_{X_0} \rangle = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d} \langle F_{X_0} \rangle_\Lambda = \sum_{X \subset \mathbb{R}^d} \mathcal{K}(X) b(X)$$

является кластерным разложением для предельной меры μ. Сумма по X исчерпывает все Λ (или $\mathbb{R}^d$). Выбор множеств X зависит от рассматриваемой задачи.

Примером К. р. может служить *Майера разложение*. Идеи, лежащие в основе построения майеровских разложений, позволили Дж. Глимму, А. Джаффе и Т. Спенсеру [3] развить технику К. р. для мер вида:

$$Z_\Lambda^{-1} e^{-U_\Lambda(\Phi)} dq_C(\Phi), \quad Z_\Lambda = \int e^{-U_\Lambda(\Phi)} dq_C(\Phi),$$

где $dq_C(\Phi)$ – гауссова мера с ковариацией $C = C_\Lambda(x, y)$, $U_\Lambda(\Phi)$ – функционал от случайного гауссового поля $\Phi(x)$, связанный с энергией взаимодействия. Поясним идею возникновения К. р. на примере среднего

$$\langle F_{X_0} \rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \int F_{X_0}(\Phi) e^{-U_\Lambda(\Phi)} dq_C(\Phi).$$

Разобьем область Λ на непересекающиеся множества $Y_1, ..., Y_N$, $\bigcup_{i=1}^N Y_i = \Lambda$. Пусть, для определенности, $X_0 \subset Y_1$ и

$$U_\Lambda(\Phi) = U_X(\Phi) + U_{\Lambda \setminus X}(\Phi). \qquad (2)$$

Так как ковариация $C_\Lambda(x, y)$ фактически определяет корреляцию (взаимодействие) различных точек области Λ, будем условно считать, что это взаимодействие осуществляется с интенсивностью 1. К. р. определяют как индуктивный процесс следующим образом. На первом шаге определяют ковариацию

$$C_\Lambda(x, y; s_1) = [\chi_X(x)\chi_X(y) + \chi_{\Lambda \setminus X}(x)\chi_{\Lambda \setminus X}(y) + s_1 \chi_X(x)\chi_{\Lambda \setminus X}(y) + s_1 \chi_{\Lambda \setminus X}(x)\chi_X(y)] C_\Lambda(x, y),$$

к-рая определяет взаимодействие внутри $X=Y_1$ и $\Lambda\setminus X$ с интенсивностью $s_1=1$, а взаимодействие точек области X с точками области $\Lambda\setminus X$ с интенсивностью s_1, $0\leqslant s_1\leqslant 1$. Гауссову меру, соответствующую $C_\Lambda(x, y; s_1)$, обозначим dq_{s_1}. Тогда первый шаг К. р. есть применение формулы Ньютона – Лейбница:

$$dq_C = dq_0 + \int_0^1 ds_1 \frac{d}{ds_1} dq_{s_1}.$$

Так как при $s_1=0$ точки, разделенные контуром ∂X, не взаимодействуют, мера dq_0 факторизуется и после первого шага получают первый член в разложении (1) с

$$\mathcal{K}(X) = \int F_{X_0}(\Phi)\exp\{-U_X(\Phi)\}dq_0(\Phi) \quad \text{и} \quad b_\Lambda(X) = Z_{\Lambda\setminus X}/Z_\Lambda.$$

Второй член после несложных преобразований подвергается следующему шагу разложения с $X=Y_1\cup Y_2$ и т. д., пока не исчерпана вся область Λ.

В статистич. механике с сингулярным потенциалом взаимодействия условие (2) для $U_\Lambda(\Phi)$ не выполняется. В этом случае параметр s вводится также в $U_\Lambda(\Phi)$ (см. [2]), то есть на первом шаге определяется

$$U_\Lambda(\Phi; s_1) = U_{Y_1}(\Phi) + U_{\Lambda\setminus Y_1}(\Phi) + s_1 U_{\Lambda, Y_1}(\Phi)$$

и применяется формула Ньютона – Лейбница. В этом случае выражения для $\mathcal{K}(X)$ имеют более сложную структуру. Описанные выше К. р. иногда называют вакуумными, или первичными, К. р. С их помощью можно доказать существование термодинамич. предела, исследовать фазовые переходы и т. д. В работе [3] были также введены N-частичные К. р. С их помощью можно получить подробную информацию о свойствах спектра трансфер-матрицы, другие важные следствия модельных систем квантовой теории поля.

Лит.: [1] Конструктивная квантовая теория поля, пер. с англ., М., 1977; [2] Brydges D., Federbush P., «Comm. Math. Phys.», 1980, v. 73, p. 197; [3] Glimm J., Jaffe A., Spencer T., «Ann. Math.», 1974, v. 100, p. 585; [4] Малышев В. А., «Успехи математич. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 3–53; [5] Ребенко А. Л., в кн.: Сборник физики элементарных частиц и атомного ядра, 1985, т. 16, в. 3, с. 551–83.

А. Л. Ребенко.

КЛАСТЕРНОЕ СВОЙСТВО, принцип ослабления корреляций, групповое свойство,– свойство, которым обладают трансляционно-инвариантные корреляционные функции d-мерной равновесной непрерывной системы, если

$$\lim_{a\to\infty} \rho(X_1 + a, X_2) = \rho(X_1)\rho(X_2),$$

где

$$X_1 = (x_1, \ldots, x_m),\ X_2 = (x_{m+1}, \ldots, x_n),$$
$$X_1 + a = (x_1 + a, \ldots, x_m + a).$$

Корреляционные функции обладают этим свойством тогда и только тогда, когда усеченные корреляционные функции по разностным переменным стремятся к нулю на бесконечности.

В. И. Скрипник.

КЛАСТЕРНЫЕ ОЦЕНКИ – равномерные по объему Λ оценки членов кластерного разложения, обеспечивающие его сходимость в пределе $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^d(\mathbb{Z}^d)$. Как правило, К. о. можно условно разбить на три типа: комбинаторные оценки, то есть оценки сумм по X и сумм, входящих в определение $\mathcal{K}(X)$ (см. *Кластерное разложение*); оценки ковариаций и их производных; оценки континуальных интегралов, входящих в определение $\mathcal{K}(X)$ и $b_\Lambda(X)$. К. о. должны содержать малый параметр, обеспечивающий сходимость кластерного разложения. В квантовой теории поля это обычно отношение константы взаимодействия к массе частицы λ/m_0^2, а в статистич. механике роль малого параметра играет обратная температура $\beta=1/kT$, k – постоянная Больцмана.

А. Л. Ребенко.

КЛАСТЕРЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ – группы $\{\lambda_{k,j},\ 1\leqslant j\leqslant\mu_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, собственных значений, лежащих в интервале, не содержащем других точек спектра, причем $\mu_k\to\infty$ и

$$\max_{i,j}|\lambda_{k,i}-\lambda_{k,j}|/\min_{i,j,l\neq k}|\lambda_{k,i}-\lambda_{l,j}|\to 0$$

при $k\to\infty$. Наиболее изучены К. с. з. у эллиптич. операторов на компактных замкнутых многообразиях с периодич. гамильтоновым потоком главного символа и нек-рым условием на субглавный символ. Изучено асимптотич. распределение собственных значений внутри кластеров.

Лит.: [1] Хёрмандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, пер. с англ., т. 4, М., 1988.

В. Я. Иврий.

КЛАУЗИСА НЕРАВЕНСТВА – см. *Энтропия.*

КЛАУЗИСА РАВЕНСТВО – см. *Энтропия.*

КЛАУЦЕРА ЯВЛЕНИЕ – см. *Гиббсовская полугруппа.*

КЛЕБША СЛУЧАЙ – см. *Твердое тело*; движение в идеальной жидкости.

КЛЕБША – ГОРДАНА КОЭФФИЦИЕНТЫ – числа, возникающие в квантовой механике при решении задачи сложения моментов (орбитальных, спиновых или полных) независимых частиц (или систем), а также при сложении изотопических спинов и вообще любых аналогичных величин, связанных с группами $SU(2)$ и $SO(3)$. Названы по имени А. Клебша (A. Klebsch) и П. Гордана (P. Gordan). В литературе встречаются также названия: коэффициенты векторного сложения, коэффициенты Вигнера. К.–Г. к. используются в атомной и молекулярной физике, теории твердого тела, физике ядра и элементарных частиц и в других приложениях квантовой механики.

Задача сложения двух моментов состоит в нахождении собственных функций ψ_{jm} и собственных значений операторов $\hat{j}^2$ и $\hat{j}_z$ (где $j=j_1+j_2$ – суммарный момент системы), выраженных через собственные функции $\psi_{j_1m_1}$, $\psi_{j_2m_2}$ операторов двух складываемых моментов и их проекций [1], [2]:

$$\psi_{jm} = \sum\nolimits_{m_1+m_2=m} C^{jm}_{j_1m_1;\, j_2m_2}\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}. \qquad (1)$$

Здесь $C^{jm}_{j_1m_1;\, j_2m_2}$ – К.–Г. к., $j^2=\hbar^2 j(j+1)$, $j_z=\hbar m$, причем j и m могут принимать значения:

$$j=j_1+j_2, j_1+j_2-1, \ldots, |j_1-j_2|,\ -j\leqslant m\leqslant j \qquad (2)$$

(j_1, m_1; j_2, m_2 – квантовые числа моментов и их проекций отдельных частиц; см. *Квантовое сложение моментов*).

Используется много различных обозначений для К.–Г. к. [кроме обозначения в формуле (1)] и связанных с ними коэффициентов.

Общие формулы для К.–Г. к. при произвольных j_1, j_2 и j были получены Ю. Вигнером (E. Wigner) и Г. Рака (H. Raka) с помощью методов теории групп, однако они слишком громоздки для большинства физич. приложений. В практич. расчетах пользуются либо алгебраич. формулами в случае, когда один из моментов мал, либо числовыми таблицами К.–Г. к. для конкретных значений j_1, j_2 и j (см., напр., [3]). Различные свойства К.–Г. к. наиболее полно изложены в [3]–[5].

Лит.: [1] Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, пер. с англ., М., 1961; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 3 изд., М., 1974; [3] Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К., Квантовая теория углового момента, Л., 1975; [4] Биденхарн Л., Лаук Дж., Угловой момент в квантовой физике, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [5] Смородинский Я. А., Шелепин Л. А., Коэффициенты Клебша – Гордана с разных сторон, «Успехи физических наук», 1972, т. 106, с. 3.

В. С. Попов.

КЛЕЙНА МОДУЛЯРНАЯ ГРУППА – см. *Римана поверхность.*

КЛЕЙНА – ГОРДОНА УРАВНЕНИЕ, Клейна – Гордона – Фока уравнение,– простейшее релятивистски-

инвариантное уравнение, описывающее свободное скалярное (или псевдоскалярное) физическое поле. Впервые получено в 1926 Э. Шредингером (E. Schrödinger) (как релятивистское обобщение *Шредингера уравнения*) и независимо О. Клейном (O. Klein), В. А. Фоком и В. Гордоном (W. Gordon). В квантовой теории поля применяется для описания частиц со спином 0. В *Минковского пространстве-времени* К.–Г. у.– линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0,$$

где $\Box$ – оператор Д'Аламбера, m – масса частицы, φ – полевая функция или ее компоненты в пространстве *внутренней симметрии* ($x = (x^0, \boldsymbol{x})$ – точка пространства-времени; используется система единиц, в к-рой $\hbar = c = 1$). Решение К.–Г. у. записывают в виде разложения по плоским волнам:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\boldsymbol{p}(2p^0)^{-1/2}\{e^{ipx}a^+(\boldsymbol{p}) + e^{-ipx}a^-(\boldsymbol{p})\},$$

$$p^0 = (\boldsymbol{p}^2 + m^2)^{1/2},$$

где $p = (p^0, \boldsymbol{p})$ – 4-импульс, $px = p^0x^0 - \boldsymbol{px}$, $a^+(\boldsymbol{p})$ и $a^-(\boldsymbol{p})$ – положительно- и отрицательно-частотные компоненты Фурье. При *каноническом квантовании* a^+ и a^- интерпретируются как операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом $\boldsymbol{p}$ и энергией p^0. В их терминах *гамильтониан* свободного поля имеет вид:

$$H = \int d\boldsymbol{p}\, p^0(\boldsymbol{p})a^+(\boldsymbol{p})a^-(\boldsymbol{p}).$$

К.–Г. у. удовлетворяют компоненты любого свободного поля (спинорного, векторного и др.). В римановом пространстве с метрикой $R^{\mu\nu}$ (напр., в присутствии гравитационного поля с такой метрикой) К.–Г. у. имеет вид:

$$(-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\varphi\right] + m^2\varphi = 0,$$

где g – определитель матрицы $\|g^{\mu\nu}\|$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Изучены К.–Г. у. с различными видами нелинейности (напр., *синус-Гордона уравнение*).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980.

В. П. Павлов.

КЛЕЙНОВА ПОВЕРХНОСТЬ – неориентируемая поверхность или поверхность, имеющая край, покрытая подмножествами U_i, параметризованными комплексными числами. К таким поверхностям приводит метод алгебро-геометрич. интегрирования уравнений математич. физики и нек-рые модели конформной теории поля. Параметризация подмножеств U_i задается с помощью непрерывных обратимых отображений z_i множеств U_i на единичный круг $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ или полукруг $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости. При этом отображения выбираются таким образом, чтобы каждая функция $z_{ij} = z_i z_j^{-1}$ была голоморфна $\partial z_{ij}/\partial\bar{z} = 0$ или антиголоморфна $\partial z_{ij}/\partial z = 0$. Пары (U_i, z_i) называются дианалитическими картами, а их совокупность – дианалитическим атласом.

Обратимое отображение φ К. п. A в К. п. $\tilde{A}$ называется изоморфизмом, если описывающие ее в дианалитич. атласах $\{U_i, z_i\}$, $\{\tilde{U}_i, \tilde{z}_i\}$ функции $\varphi_{ij} = \tilde{z}_i \varphi z_j^{-1}$ голоморфны или антиголоморфны. Всякая К. п. изоморфна $A = A_+/\langle\tau\rangle$, где A_+ – риманова поверхность и τ: $A_+ \to A_+$ – антиголоморфная инволюция, то есть $\tau^2 = 1$ и $\frac{\partial}{\partial z}(z_i \tau z_j^{-1}) = 0$ для любой пары карт (U_i, z_j), (U_j, z_j) голоморфного атласа римановой поверхности A_+. Для антиголоморфной инволюции τ римановой поверхности A_+ факторповерхность $A_+/\langle\tau\rangle$ является множеством неупорядоченных пар $(a, \tau a)$, где $a \in A_+$. Проекция $a \mapsto (a, \tau a)$ переводит голоморфный атлас римановой поверхности в дианалитич. атлас на A. Если $A = A_+/\langle\tau\rangle$ – ориентируемая К. п. (с границей), то риманова поверхность A_+ называется комплексным дублем.

Вещественной аналитической функцией называется аналитич. функция, заданная рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$$

с вещественными коэффициентами. Как и любой аналитич. функции, ей отвечает риманова поверхность A_f и пара мероморфных функций φ_f, φ^f на A_f таких, что $f = \varphi^f\varphi_f$. Инволюция $z \to \bar{z}$ индуцирует антиголоморфную инволюцию τ_f: $A_f \to A_f$. В ее неподвижных точках функции φ_f и φ^f вещественны. К. п. $A_f/\langle\tau_f\rangle$ называется К. п. вещественной аналитич. функции. Она компактна, если и только если аналитич. функция определяется уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен с вещественными коэффициентами.

Компактная К. п. $A = A_+/\langle\tau\rangle$ называется вещественной алгебраической кривой. Неподвижные точки инволюции τ называются вещественными точками кривой. Им отвечают вещественные решения уравнения $F(x, y) = 0$, определяющего кривую. Вещественные кривые изоморфны, если и только если отвечающие им уравнения $F(x, y) = 0$ и $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ можно перевести друг в друга бирациональной заменой вида $x \to \tilde{x}(x, y)$, $y \to \tilde{y}(x, y)$ с вещественными коэффициентами.

Риманова поверхность A_+, связанная с вещественной алгебраич. кривой $A = A_+/\langle\tau\rangle$, называется комплексификацией кривой A. Род поверхности A_+ называется родом кривой A. Группа автоморфизмов вещественной кривой рода g бесконечна при $g = 1$ и конечна порядка, не превосходящего $12(g-1)$, если $g > 1$ и кривая имеет вещественные точки. Вещественные точки кривой распадаются на простые замкнутые контуры, называемые овалами. Согласно теореме Гарнака, их число k не превосходит $g+1$. Кривые с $g+1$ (соответственно с g) овалами называются M-кривыми (соответственно $(M-1)$-кривыми). Вещественная кривая считается гиперэллиптической, если ее комплексификация – гиперэллиптич. комплексная кривая. Негиперэллиптич. M- или $(M-1)$-кривые изоморфны, если изоморфны их комплексификации.

Типом вещественной алгебраич. кривой рода g с k овалами называется набор (g, k, ε), где $\varepsilon = 0$, если К. п. неориентируема и $\varepsilon = 1$, если ориентируема. Множество $M(g, k, \varepsilon)$ классов изоморфности вещественных алгебраич. кривых типа (g, k, ε) называется пространством модулей вещественных кривых. Оно не пусто, если и только если $\varepsilon = 0$, $0 \leqslant k \leqslant g$, или $\varepsilon = 1$, $1 \leqslant k \leqslant g+1$, $k \equiv g+1 (\mathrm{mod}\, 2)$. В этих случаях пространство $M(g, k, \varepsilon)$ связно. Кривые рода нуль изоморфны К. п. $\bar{\mathbb{C}}/\langle\tau\rangle$, где $\bar{\mathbb{C}}$ – сфера Римана и $\tau(z) = \bar{z}$ или $\tau(z) = -\frac{1}{z}$. Множество кривых рода g распадается на три компоненты связности $M(1, 0, 0)$, $M(1, 1, 0)$, $M(1, 2, 1)$, каждая из к-рых гомеоморфна $\mathbb{R}$. Все остальные пространства $M(g, k, \varepsilon)$ представляются в виде $\mathbb{R}^{3g-3}/\mathrm{Mod}(g, k, \varepsilon)$, где группа $\mathrm{Mod}(g, k, \varepsilon)$ действует дискретно. Аналогичное описание пространств модулей имеется и для супераналогов К. п. (клейновых суперповерхностей).

Лит.: [1] Alling N., Greenleaf N., Foundations of the theory of Klein surfaces, B.– Hdlb., 1971; [2] Натанзон С. М., «Успехи математич. наук», 1990, т. 45, в. 6, с. 47–90.

С. М. Натанзон.

КЛЕТКА – см. *Эйлерова характеристика.*

КЛИФФОРДА АЛГЕБРА, спинорная алгебра,– ассоциативная алгебра K_n с n образующими $k_1, \ldots, k_n$, то есть совокупность линейных комбинаций из произведений k_i, причем выполняются соотношения:

$$k_ik_j + k_jk_i = \{k_i, k_j\} = 0 \text{ при } i \neq j,\ k_i^2 = 1. \qquad (*)$$

К. а. названа по имени У. Клиффорда (W. Clifford, 1876).

К. а. K_3 содержит в виде подалгебры алгебру *кватернионов*; К. а. K_4 изоморфна алгебре четырехрядных *Дирака матриц*. Алгебра K_n имеет конечную размерность 2^n и связана с представлением спинорной группы $\mathrm{Spin}(n)$ – двулистной накрывающей ортогональной группы $SO(n)$. Представление группы $\mathrm{Spin}(n)$ в алгебре K_n степени 2^ν, где $\nu = n/2$, называется спинорным представлением. При $n=3$ получаем двумерное спинорное представление частицы со спином 1/2.

В физике К. а. появились в работах П. Дирака (P. Dirac) в 1927. При выводе релятивистски инвариантного уравнения для частиц с полуцелым спином (*Дирака уравнения*) возникает проблема извлечения квадратного корня из гамильтониана H. Если представить квадратичную форму

$$H = \sum \varkappa_i^2$$

в виде квадрата линейной функции

$$P(\varkappa) = \sum k_i \varkappa_i,$$

то коэффициенты k_i должны удовлетворять соотношениям (*), то есть образовывать К. а.

К. а. тесно связана с *Грассмана алгеброй*. По каждой алгебре Грассмана можно построить К. а. с удвоенным числом образующих с помощью умножения на образующую Грассмана $\hat{x}_i$ и оператора дифференцирования $\partial/\partial\hat{x}_i$.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Казанова Г., Векторная алгебра, пер. с франц., М., 1979. *М. И. Монастырский.*

КМШ-СОСТОЯНИЕ, Кубо–Мартина–Швингера состояние,– состояние ω на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$, в которой действует сильно непрерывная группа *-автоморфизмов α_t и для него выполняется *КМШ-условие*. КМШ-с. являются формальным обобщением *гиббсовских состояний*, и существует ряд доказательств наличия у них требуемых от равновесных состояний свойств.

Локально устойчивые (по отношению к возмущению динамики малой добавкой к гамильтониану) стационарные состояния квантовых систем с дополнительным предположением о кластеризации корреляционных функций (или $\mathfrak{B}^{(1)}$-асимптотич. абелевостью) являются КМШ-с. (см. [1]). Аналогичный результат справедлив и для классич. систем (см. [2]). Ф. Араки доказал, что любое КМШ-с. одномерных квантовых решетчатых систем есть предел гиббсовских состояний (см. [3]). Эквивалентность КМШ- и термодинамически-пассивных состояний доказана в [4].

Лит.: [1] Haag R., Trych-Pohlmeyer E., «Comm. Math. Phys.», 1977, v. 56, p. 213; [2] Aizenmann M., Galavotti G., Goldstein S., Lebowitz J. L., там же, 1976, v. 48, p. 1; [3] Араки Ф., в сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике, пер. с англ., М., 1978, с. 131; [4] Pusz W., Woronowitz S. L., «Comm. Math. Phys.», 1978, v. 58, p. 273. *В. Н. Нескоромный.*

КМШ-УСЛОВИЕ, Кубо–Мартина–Швингера условие,– условие, которому удовлетворяют предельные *гиббсовские состояния*, определяемые как предел $|\Lambda| \to \infty$ состояний в конечном объеме

$$\omega_\Lambda(A) \equiv \mathrm{Tr}_\Lambda A e^{-\beta H_\Lambda} \Big/ \mathrm{Tr}_\Lambda e^{-\beta H_\Lambda}$$

с динамикой, порождаемой гамильтонианом H_Λ:

$$A_t^\Lambda = U_\Lambda(t) A U_\Lambda^{-1}(t), \quad U_\Lambda(t) = e^{itH_\Lambda}$$

(см. [1], [2]). В алгебраич. форме КМШ-у. сформулировано в [3]:

$$\omega(A_t B) = \omega(B A_{t+i\beta})$$

и служит для выделения класса *КМШ-состояний* бесконечных систем без предварительного рассмотрения конечных систем и предельных процедур. Обобщение КМШ-у. для классич. систем (см. [4]):

$$\omega(\{f, g\}) = \beta\omega(g\{f, g\}),$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона.

Лит.: [1] Kubo R., «J. Phys. Soc. Jap.», 1957, v. 12, p. 570; [2] Martin P. C., Schwinger J., «Phys. Rev.», 1959, v. 115, p. 1342; [3] Haag R., Hugenholtz N., Winnink M., «Comm. Math. Phys.», 1967, v. 5, p. 215; [4] Galavotti G., Verboren E., «Nuovo Cimento B», 1975, B 28, p. 274. *В. Н. Нескоромный.*

КНОИДАЛЬНАЯ ВОЛНА – см. *Кортевега – де Фриса уравнение.*

КОВАЛЕВСКОЙ СЛУЧАЙ – третий (и последний) из трех классических случаев интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки (первые два – *Эйлера–Пуансо случай, Лагранжа–Пуассона случай*). Он характеризуется тем, что эллипсоид инерции – симметричный эллипсоид, вытянутый вдоль оси Oz так, что $A = B = 2C$, а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости $z_0 < 0$, перпендикулярной оси Oz, и $y_0 = 0$ (см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки). Уравнения Эйлера–Пуассона (I–III) в этом случае обладают следующим четвертым (дополнительным) первым интегралом:

$$(p^2 + q^2 + c\gamma)^2 + (2pq + c\gamma')^2 = \mathrm{const}, \; c = \frac{Mgx_0}{C}$$

(открыт С. В. Ковалевской [1]). Интегрирование уравнений движения в этом случае представляет собой задачу, гораздо более сложную, чем первый и второй случаи, поскольку задача приводится к обращению так наз. ультраэллиптич. интегралов, то есть интегралов вида $\int \frac{ds}{\sqrt{P(s)}}$, где $P(s)$ – многочлен 5-й степени.

Здесь, по-видимому впервые, к решению механич. задачи были привлечены идеи теории функций комплексного переменного. Дело в том, что во всех исследованиях до работ С. В. Ковалевской время рассматривалось как переменное, принимающее только действительные значения; она же впервые рассматривала время как переменное, принимающее любые значения в комплексной плоскости, представив тем самым замечательное расширение механич. задачи (с точки зрения математики) (см. об этом в [2]). Но неменьшее значение имеют идеи С. В. Ковалевской с точки зрения современной физики (не только механики), как предвестника использования методов современной теории функций комплексного переменного и комплексной геометрии в квантовой теории поля (евклидов подход в квантовой теории поля, твисторы, суперсимметрия, калибровочные поля и т. п.) (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Ковалевская С. В., «Acta math.», 1889, t. 12; 1890, t. 14; см. также Ковалевская С. В., Научные работы, М.– Л., 1948, с. 153–234; [2] Голубев В. В., Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953; [3] Манин Ю. И., Калибровочные поля и комплексная геометрия, М., 1984; [4] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1985, т. 8, с. 191–266; 1986, т. 9, с. 247–84. *М. И. Войцеховский.*

КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ – производная поля $\Psi(x)$, реализующего некоторое представление калибровочной группы Ω, которая преобразуется по тому же представлению, что и само поле Ψ:

$$\Psi(x) \to \Gamma(\omega(x))\Psi(x),$$
$$\nabla_\mu \Psi(x) \to \Gamma(\omega(x))\nabla_\mu \Psi(x).$$

Здесь представление группы Ω задано матрицами $\Gamma(\omega(x))$. Явное выражение для К. п. имеет вид

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma(A_\mu),$$

где $\Gamma(A_\mu)$ – представление матрицы $A_\mu(x)$, соответствующее данному представлению группы Ω.

К. п. задает параллельный перенос в зарядовом пространстве. Если в каждой точке контура $\gamma(s)$ К. п. в касательном направлении равна нулю, то поле $\Psi(x)$ параллельно переносится вдоль контура $\gamma(s)$. *А. А. Славнов.*

КОВАРИАНТНОСТЬ – свойство физических величин, описывающих данное явление или круг явлений, преобра-

зовываться по представлениям группы инвариантности, установленной или предполагаемой для этого круга. См. также *Инвариантность*. *В. П. Павлов.*

КОВАРИАНТНОСТЬ И КОНТРАВАРИАНТНОСТЬ – понятия линейной алгебры и тензорного анализа, характеризующие способы преобразования компонент тензора при преобразованиях координат

$$x^i \to y^i(x^j).$$

Ковариантные компоненты преобразуются как градиент:

$$\partial f/\partial x^i = \left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right),$$

а контравариантные – как дифференциал:

$$\partial y^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\partial x^j$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Происхождение терминов связано с тем, что при линейных преобразованиях базиса $\{e_i\}$ в евклидовом (и псевдоевклидовом) пространстве:

$$e_i \to \tilde{e}_i = a_i^j e_j,$$

ковариантные компоненты преобразуются одинаково с базисом, а контравариантные – с помощью матрицы b, обратной к транспонированной матрице $a^\top$:

$$b_j^i a_k^j = \delta_k^i.$$

Напр., для ковариантного вектора (нижние индексы) $T_i = a_i^j T_j$, а для контравариантного (верхние индексы) $\tilde{T}^i = b_j^i T^j$. Переход от ковариантных к контравариантным компонентам совершается с помощью метрич. тензора; напр. $T^i = g^{ij} T_j$. Ко- и контравариантные компоненты совпадают лишь для декартова базиса в евклидовом пространстве. *С. В. Молодцов.*

КОВАРИАНТНЫЙ ВЕКТОР – см. *Тензор.*

КОВАРИАНТНЫЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ – см. *Нетер теорема.*

КОВАРИАНТНЫЙ ТЕНЗОР – см. *Тензор.*

КОВАРИАНТНЫЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ВЕКТОР – см. *Четырехмерный вектор.*

КОВАРИАЦИЯ – числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин, равная *математическому ожиданию* произведения отклонений случайных величин от их математических ожиданий. К. определяется для случайных величин X_1 и X_2 с конечными *дисперсиями* и обычно обозначается $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$. Таким образом,

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathsf{E}[(X_1 - \mathsf{E}X_1)(X_2 - \mathsf{E}X_2)],$$

при этом

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathrm{cov}(X_2, X_1);\ \mathrm{cov}(X, X) = \mathsf{D}X.$$

К. естественным образом появляется в выражении для дисперсии суммы случайных величин:

$$\mathsf{D}(X_1 + X_2) = \mathsf{D}X_1 + \mathsf{D}X_2 + 2\,\mathrm{cov}(X_1, X_2).$$

Если величины X_1 и X_2 независимы, то

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 0.$$

К. служит характеристикой взаимозависимости случайных величин, с помощью К. определяется *корреляции коэффициент*:

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathsf{D}X_1 \mathsf{D}X_2}}.$$

В математич. статистике оценкой К. служит выборочная К., вычисляемая по формуле

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_1^{(i)} - \bar{X}_1\right)\left(X_2^{(i)} - \bar{X}_2\right),$$

где $(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})$, $i = 1, \ldots, n$, – независимые величины, а $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ – арифметич. средние. *А. В. Прохоров.*

КОГЕРЕНТНАЯ СТРУКТУРА – см. *Локально-изотропная турбулентность.*

КОГЕРЕНТНОЕ СОСТОЯНИЕ квантового осциллятора – состояние, максимально близкое к состоянию классического *осциллятора* в том смысле, что произведение неопределенностей (дисперсий) координаты и импульса в этом состоянии принимает минимально возможное в рамках *неопределенностей соотношения* значение. Термин введен Р. Глаубером [1]. С аналогичным свойством *волновые пакеты* строились в начале развития квантовой механики Э. Шредингером [2]. В К. с. гармонич. осциллятора волновой пакет не расплывается, а его центр движется по классич. траектории.

Дисперсии координаты и импульса одномерного квантового гармонич. осциллятора в К. с. (с вектором состояния $|\alpha\rangle$) равны соответственно $\Delta x = l/\sqrt{2}$ и $\Delta p = \hbar/l\sqrt{2}$, где l – амплитуда нулевых колебаний, так что $\Delta p \Delta x = \hbar/2$. При этом изменение во времени средних значений координаты и импульса соответствует классич. траекториям, а Δx и Δp остаются постоянными, то есть эволюционируя, К. с. остается когерентным.

К. с. $|\alpha\rangle$ осциллятора массы m и частоты ω описывается нормированной волновой функцией, имеющей в координатном представлении вид гауссова волнового пакета:

$$\psi_\alpha(x) = \pi^{-1/4} l^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2} - \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\alpha x}{l} - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Здесь $l = (\hbar/m\omega)^{1/2}$, α – любое комплексное число, действительная часть к-рого связана со средним значением оператора координаты ($\hat{x}$) в состоянии $|\alpha\rangle$:

$$\mathrm{Re}\,\alpha = \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle/\sqrt{2}l,$$

а мнимая – со средним значением оператора импульса ($\hat{p}$):

$$\mathrm{Im}\,\alpha = l\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle/\sqrt{2}\hbar.$$

Таким образом, положение центра x_c гауссова пакета в К. с. определяется числом α:

$$x_c = \sqrt{2}l\,\mathrm{Re}\,\alpha.$$

В импульсном представлении волновая функция К. с. также имеет вид гауссова пакета:

$$\psi_\alpha(p) = \pi^{-1/4}\left(\frac{l}{\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{p^2/2}{2\hbar^2} - \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\alpha p l}{\hbar} - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Вместо операторов $\hat{x}$ и $\hat{p}$ удобно ввести операторы уничтожения $\hat{a}$ и рождения $\hat{a}^+$:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{l} + \frac{i\hat{p}l}{\hbar}\right), \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{l} - \frac{i\hat{p}l}{\hbar}\right).$$

Название операторов связано с тем, что действие $\hat{a}^+$ на состояние $|n\rangle$ гармонич. осциллятора с заданной энергией $\mathscr{E}_n = \omega(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, переводит осциллятор в возбужденное состояние $|n+1\rangle$, увеличивая его энергию на квант энергии $\hbar\omega$, а действие $\hat{a}$ на $|n\rangle$ уменьшает его энергию на этот же квант.

К. с. $|\alpha\rangle$ является собственным состоянием оператора уничтожения:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Оно получается действием унитарного оператора $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - a^*\hat{a})$ на вектор основного (вакуумного) состояния $|0\rangle$, $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$, $\hat{a}|0\rangle = 0$ (звездочкой помечено комплексное сопряжение). $\hat{D}(\alpha)$ называется оператором сдвига, так как он смещает центр волнового пакета на величину $\sqrt{2}al$.

Скалярное произведение двух векторов К. с. (или матричный элемент единичного оператора в представлении К. с.)

имеет вид:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^*\beta\right)$$

и не равно нулю при $\alpha \neq \beta$, то есть К. с. неортогональны. Однако квадрат модуля скалярного произведения

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\alpha-\beta|^2)$$

очень быстро стремится к нулю при $|\alpha-\beta| \gg 1$, что физически отвечает уменьшению перекрытия двух волновых пакетов, центры к-рых раздвигаются (поскольку α и β определяют центры этих пакетов).

По состояниям $|n\rangle$ с заданной энергией К. с. разлагается в ряд:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

Это означает, что $\exp(|\alpha|^2/2)|a\rangle$ является производящей функцией для состояний $|n\rangle$.

Среднее значение энергии осциллятора в К. с. $|a\rangle$ определяется формулой

$$\mathscr{E}_\alpha = \hbar\omega(|\alpha|^2 + 1/2),$$

а распределение по уровням энергии является распределением Пуассона:

$$\mathscr{P}_\alpha(n) = \exp(-|\alpha|^2)\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}.$$

При этом эволюция К. с. задается формулой

$$|a\rangle \to e^{-i\omega t/2}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle.$$

К. с. $|a\rangle$ образуют полную, точнее переполненную, систему векторов состояний; разложение единичного оператора $\hat{I}$ имеет вид:

$$\hat{I} = \pi^{-1}\iint_{-\infty}^{\infty} d(\mathrm{Re}\,\alpha)d(\mathrm{Im}\,\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|.$$

Произвольный вектор состояния $|\Psi\rangle$ может быть разложен по К. с.:

$$|\Psi\rangle = \pi^{-1}\iint_{-\infty}^{\infty}|\alpha\rangle\langle\alpha|\Psi\rangle\, d(\mathrm{Re}\,\alpha)d(\mathrm{Im}\,\alpha).$$

В квантовой теории поля система частиц с целым спином – бозонов (фотонов, π-мезонов и т. д.) – описывается как бесконечный набор квантовых гармонич. осцилляторов. Возбужденному состоянию осциллятора $|n\rangle$ отвечает при этом совокупность n бозонов с энергией $\hbar\omega$. В этом случае оператор уничтожения $\hat{a}$ уменьшает, а оператор рождения $\hat{a}^+$ увеличивает число частиц в системе на единицу.

К. с. квантованного электромагнитного поля (и других бозе-полей) вводятся на основе представления гамильтониана поля в виде суммы гамильтонианов гармонич. осцилляторов, отвечающих различным модам колебаний поля. Для моды определенной частоты и поляризации электромагнитного поля К. с. описывается приведенными выше формулами, при этом в К. с. число фотонов неопределенно, а распределение по числу фотонов является распределением Пуассона. Если все осцилляторы поля находятся в К. с., то состояние квантового поля наиболее близко к классическому.

Важность К. с. в физике обусловлена тем, что во многих случаях физич. квантованные поля находятся именно в таких состояниях. Напр., классич. ток, создаваемый движущимися электрич. зарядами, излучает фотоны, находящиеся в К. с. Инфракрасная расходимость в квантовой электродинамике объясняется и устраняется учетом того, что квантованное поле в случае малых частот находится в К. с. При точном квантово-механич. описании когерентных источников света с необходимостью возникают К. с. электромагнитного поля. Свойства сверхтекучести и сверхпроводимости также могут быть объяснены тем, что соответственно сверхтекучая компонента в жидком гелии и куперовские пары в сверхпроводниках находятся в К. с. Это же относится и к другим явлениям с упорядочением.

Для произвольных квантовых систем с N степенями свободы К. с. вводятся по следующей схеме. Находятся N неэрмитовых интегралов движения

$$\hat{A}_i = \hat{U}(t)\hat{a}_i U^{-1}(t)$$

с бозонными коммутационными соотношениями $[\hat{A}_i, \hat{A}_k^+] = \delta_{ik}$, где $\hat{U}(t)$ – оператор эволюции системы, переводящий вектор состояния, заданный в начальный момент времени, $|\Psi(0)\rangle$, в вектор состояния

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle;$$

$\hat{a}_i$ – оператор уничтожения, действительная и мнимая части к-рого определяют начальную точку траектории системы в фазовом пространстве средних координат и импульсов (δ_{ik} – символ Кронекера). Затем находится нормированный вакуумный вектор (вектор основного состояния) из решения системы уравнений $\hat{A}_i|0\rangle = 0$. Действием на этот вектор оператора сдвига строится К. с.:

$$|\alpha\rangle = \prod_{i=1}^{N}\exp\left(\alpha_i\hat{A}_i^+ - \alpha_i^*\hat{A}_i\right)|0\rangle,$$

удовлетворяющее временно́му уравнению Шредингера.

Для квантовых систем общего вида среднего изменения координат и импульсов, вообще говоря, не соответствуют классич. траекториям, а волновые функции в К. с. являются гауссовыми пакетами только в начальный момент времени – произведение неопределенностей координаты и импульса не остается со временем равным $\hbar/2$. Однако существенным для расчетов является свойство К. с. быть производящей функцией для состояний – аналогов состояний с заданной энергией стационарного квантового осциллятора. Как пример для квантовых систем, описываемых нестационарным гамильтонианом квадратичной формы по операторам координат и импульсов, это свойство позволяет найти точно (не по теории возмущений) через многомерные многочлены Эрмита вероятности переходов между уровнями энергии N-мерного гармонич. осциллятора при параметрич. возбуждении самого общего типа [3].

Особым видом К. с. являются так наз. сжатые К. с. В этих состояниях волновые пакеты – гауссовы, по

$$\Delta x = l/\sqrt{2}\mu,\ \Delta p = \mu\hbar/\sqrt{2}l,$$

где μ – любое положительное число; при этом по-прежнему $\Delta p\Delta x = \hbar/2$. Такие состояния важны, напр., при попытках (пока не реализованных) построить детекторы гравитационных волн интерференционного типа.

Лит.: [1] Glauber R. J., «Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 10, p. 84; [2] Schrodinger E., «Naturwiss.», 1926, Bd 14, S. 664; [3] Малкин И. А., Манько В. И., Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, М., 1979; [4] Когерентные состояния в квантовой теории. Сб. ст., пер. с англ., М., 1972.

В. И. Манько.

КОГЕРЕНТНОСТИ УСЛОВИЕ – см. *Дирака уравнение*; асимптотические решения.

КОГЕРЕНТНЫЙ СУПЕРОТБОРНЫЙ СЕКТОР – см. *Алгебраический подход* в квантовой теории поля.

КОИЗОТРОПНОЕ МНОГООБРАЗИЕ – подмногообразие X *симплектического многообразия* (M^{2n}, ω), на котором ограничение *симплектической структуры* ω максимально вырождено в следующем смысле: касательное пространство $T_xX \subset T_xM$ многообразия X в каждой точке $x \in X$ содержит свое косоортогональное дополнение. Любая гиперповерхность коизотропна. К. м. минимальной возможной размерности n являются *лагранжевыми многообразиями*. Все коизотропные ростки одной размерности симплектически эквивалентны.

М. Э. Казарян.

КОКАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ – естественная проекция $T^*M \to M$, где M – гладкое n-мерное многообразие, а T^*M – объединение пространств, двойственных касатель-

ным к многообразию M в разных точках $\bigcup_{x \in M} T^*M_x$, снабженное естественной структурой гладкого $2n$-мерного многообразия. *С. В. Чмутов.*

КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН ТЕОРИЯ – область науки, исследующая колебательные и волновые явления в системах различной природы. В таких процессах обнаруживаются одни и те же закономерности, к-рые описываются одними и теми же математич. и физич. моделями и исследуются общими методами. К. и в. т. устанавливает общие свойства колебательных и волновых процессов в реальных системах и определяет связь между параметрами системы и ее колебательными (волновыми) характеристиками, независимо от свойств конкретной системы, связанных с проявлением ее природы (физической, химической и пр.). Поэтому результаты, полученные при исследовании колебаний и волн, напр. в механике, могут быть перенесены в оптику или радиотехнику.

Изучение любого волнового и колебательного процесса начинается с идеализации реальной системы, то есть с построения модели и составления для нее соответствующих уравнений. Идеализации одних и тех же систем могут быть различны в зависимости от того, какое явление исследуется. Справедливость принятых идеализаций оценивается путем сравнения результатов теории, построенной на основании данной модели, с результатами анализа более общей модели или с поведением реальной системы – экспериментом. Напр., когда речь идет только о нахождении условий раскачки качелей при периодич. изменении их длины, модель может быть совсем простой – линейный осциллятор с периодически меняющейся собственной частотой. Когда же необходимо ответить на вопрос об амплитуде установившихся колебаний таких качелей, нужно уже учитывать нелинейность (зависимость частоты колебаний качелей от амплитуды колебаний), в результате чего приходим к модели физич. маятника, то есть нелинейного осциллятора с периодически изменяемым параметром.

Понятия и представления К. и в. т. относятся либо к явлениям (резонанс, автоколебания и т. д.), либо к моделям (линейная и нелинейная система, система с одной или несколькими степенями свободы и пр.). На основе сложившихся представлений К. и в. т. можно связать те или иные явления в конкретной системе с ее характеристиками, не решая задачи всякий раз заново. Напр., преобразование энергии одних колебаний в другие в слаболинейной системе (волны на воде, электромагнитные волны в ионосфере, колебания маятника на пружине) возможно только в случае, когда выполнены определенные резонансные условия между собственными частотами подсистемы.

Методы К. и в. т.– это методы анализа уравнений, описывающих модели реальных систем. Большинство из них совпадают с методами качественной теории дифференциальных уравнений (метод фазового пространства, метод отображений Пуанкаре и др.), с асимптотич. методами решения дифференциальных и иных уравнений (метод ван дер Поля, метод усреднения и т. д.). Специфика методов К. и в. т. состоит в том, что при изучении моделей колебательных или волновых явлений интересуются, как правило, общими свойствами решений соответствующих уравнений.

Основные разделы К. и в. т.– теория устойчивости линеаризованных систем, теория параметрич. систем, теория автоколебательных и автоволновых процессов, теория ударных волн и солитонов, кинетика колебаний и волн в системах с большим числом степеней свободы, теория стохастич. систем – систем со сложной динамикой. Если «классическая» К. и в. т. рассматривала в основном системы с простой динамикой и поэтому изучала, как правило, лишь регулярные (периодические) колебания и волны, то в современной теории усилился интерес к статистич. задачам, связанным с анализом процессов «рождения» статистики в детерминированных системах.

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., **Теория колебаний**, [3 изд.], М., 1981; [2] Стретт Дж. В. (лорд **Рэлей**), Теория звука, пер. с англ., 2 изд., т. 1–2, М., 1955; [3] Горелик Г. С., Колебания и волны, 2 изд., М., 1959; [4] Бишоп Р., Колебания, пер. с англ., 3 изд., М., 1986. *М. И. Рабинович.*

КОЛЕБАНИЙ УРАВНЕНИЕ – см. *Волновое уравнение.*

КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ, импульс, – мера механического движения, равная для материальной точки произведению ее массы m на скорость v. К. д. mv – величина векторная, направленная так же, как скорость точки. Под действием силы К. д. точки изменяется в общем случае и численно, и по направлению; это изменение определяется вторым (основным) законом динамики (см. *Ньютона законы механики*).

К. д. Q механич. системы равно геометрич. сумме К. д. всех ее точек или произведению массы M всей системы на скорость v_c ее центра масс:

$$Q = \sum m_k v_k = M v_c.$$

Изменение К. д. системы происходит под действием только внешних сил, то есть сил, действующих на систему со стороны тел, в эту систему не входящих. Согласно теореме об изменении К. д.,

$$Q_1 - Q_0 = \sum S_k^e,$$

где Q_0 и Q_1 – К. д. системы в начале и в конце нек-рого промежутка времени, S_k^e – импульсы внешних сил F_k^e (см. *Импульс силы*) за этот промежуток времени (в дифференциальной форме теорема выражается уравнением $\frac{dQ}{dt} = \sum F_k^e$). Этой теоремой пользуются при решении многих задач динамики, в частности в теории удара.

Для замкнутой системы, то есть системы, не испытывающей внешних воздействий, или в случае, когда геометрич. сумма действующих на систему внешних сил равна нулю, имеет место закон сохранения К. д. При этом К. д. отдельных частей системы (напр., под действием внутренних сил) могут изменяться, но так, что величина $Q = \sum m_k v_k$ остается постоянной. Этот закон объясняет такие явления, как реактивное движение, отдача (или откат) при выстреле, работа гребного винта или весел. Напр., если рассматривать ружье и пулю как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет для этой системы силой внутренней и не может изменить К. д. системы, равное до выстрела нулю. Поэтому, сообщая пуле К. д. $m_1 v_1$, направленное к дульному срезу, пороховые газы сообщат одновременно ружью численно такое же, но противоположно направленное К. д. $m_2 v_2$, что вызовет отдачу; из равенства $m_1 v_1 = m_2 v_2$ (где v_1, v_2 – численные значения скоростей), зная скорость v_1 пули при вылете из ствола, можно найти наибольшую скорость v_2 отдачи (а для орудия – наибольшую скорость отката).

При скоростях, близких к скорости света c, К. д. свободной частицы определяется формулой: $p = mv/\sqrt{1-\beta^2}$, где $\beta = v/c$; когда $v \ll c$, формула переходит в обычную: $p = mv$.

К. д. обладают и поля: электромагнитные, гравитационные и др. К. д. поля характеризуется его плотностью (отношением К. д. элемента объема к этому объему) и выражается через напряженность поля или его потенциал и т. д.

С. М. Таре.

КОЛИЧЕСТВО ТЕПЛА – величина, количественно характеризующая процесс теплообмена. К. т. равно количеству энергии, переданной системе без изменения ее внешних параметров. К. т. зависит не только от начального и конечного состояний системы, но и от процесса, к-рый система испытывает при переходе между ними. К. т. отлично от нуля только при наличии процесса теплоотдачи. Состоянию системы не соответствует какое-либо значение К. т. Элементарное К. т.:

$$\delta Q = C dT,$$

где C – теплоемкость системы, соответствующая опреде-

ленному процессу теплоотдачи, dT – бесконечно малое изменение температуры системы. *А. В. Солдатов.*

КОЛЛИНЕАРНАЯ РАСХОДИМОСТЬ – см. *Инфракрасная расходимость.*

КОЛМОГОРОВА ГИПОТЕЗА ПОДОБИЯ – см. *Колмогорова закон двух третей, Колмогоровская автомодельность.*

КОЛМОГОРОВА ЗАКОН ДВУХ ТРЕТЕЙ – соотношение, являющееся следствием гипотезы подобия Колмогорова, согласно которой статистическая структура развитой турбулентности в инерционном интервале масштабов r (много меньшем масштаба течения в целом, но много большем внутреннего масштаба $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, где ε – средняя скорость вязкой диссипации турбулентной энергии, ν – кинематический коэффициент вязкости) определяется одним параметром ε. В частности,

$$D(r)=\langle[u(x+r,\,t)-u(x,\,t)]^2\rangle=C(\varepsilon r)^{2/3},$$

где C – числовая константа. Многократные эмпирич. проверки К. з. д. т. показали хорошее согласие теории с экспериментом. Закон установлен А. Н. Колмогоровым [1].

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Доклады АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 299–303; т. 31, № 2, с. 99–101 (Избранные труды. Математика и механика, М., 1985, с. 281–87, Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 264–67). *М. М. Любимцев.*

КОЛМОГОРОВА ОБРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Колмогорова теорема, Статистическая гидромеханика.*

КОЛМОГОРОВА ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА *КАМ*-ТЕОРИИ – см. *КАМ-теория.*

КОЛМОГОРОВА ПРЯМОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Колмогорова теорема, Статистическая гидромеханика.*

КОЛМОГОРОВА ТЕОРЕМА: пусть функция $f(x)$ и ее первые n ($n\geqslant 2$) производные ограничены для всех $x\in\mathbb{R}^1$ (ограниченность n-й производной понимается в смысле ограниченности производных чисел $(n-1)$-й производной) и

$$M_k=\sup_x\left|f^{(k)}(x)\right|,$$

$k=0,\,1,\,\ldots,\,n$; тогда, для того чтобы тройке положительных чисел M_0, M_k, $0<k<n$, и M_n соответствовала функция $f(x)$, для которой $M_l=M_l(f)$, $l=0,\,k,\,n$, необходимо и достаточно соблюдение условия

$$M_k\leqslant C_{nk}M^{(n-k)/n}M_n^{k/n},$$

где

$$C_{nk}=K_{n-k}\Big/K_n^{(n-k)/n},\quad K_m=\frac{4}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l(m+1)}}{(2l+1)^{m+1}}.$$

Частный случай $n=2$, $k=1$ теоремы доказан Ж. Адамаром (J. Hadamard, 1914).

В методе *аппроксимирующего гамильтониана* К. т. можно использовать для нахождения *асимптотических оценок* для разности корреляционных функций, представимых в виде производных от плотности термодинамич. потенциала по действительному параметру, при условии, что n-е производные числа ограничены. Тогда функция $f(x)$ отождествляется с разностью плотностей термодинамич. потенциалов, а $M_0(f)$ – с асимптотич. оценкой сверху для разности плотностей термодинамич. потенциалов.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Учен. зап. МГУ. Математика», 1939, т. 30, с. 3; [2] Бурбаки Н., Функции действительного переменного, пер. с франц., М., 1965, гл. 1, § 3. *Й. Г. Бранков.*

КОЛМОГОРОВА УРАВНЕНИЕ – уравнение вида:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=-A_s f \tag{1}$$

(обратное, или первое, уравнение Колмогорова; $s<t$) или вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=A_t^* f \tag{2}$$

(прямое, или второе, уравнение Колмогорова; $t>s$) для переходной функции

$$f=P(s,\,x;\,t,\,\Gamma),\ 0\leqslant s\leqslant t<\infty,\ x\in E,\ \Gamma\in\mathfrak{B},$$

(E, $\mathfrak{B}$) – измеримое пространство, или ее плотности

$$f=p(s,\,x;\,t,\,\Gamma),$$

если она существует; к уравнению (1) для переходной функции $P(s,\,x;\,t,\,\Gamma)$ присоединяется условие

$$\lim_{s\uparrow t}P(s,x;\,t,\Gamma)=I_\Gamma(x),$$

а к уравнению (2) – условие

$$\lim_{t\downarrow s}P(s,x;\,t,\Gamma)=I_\Gamma(x),$$

где $I_\Gamma(x)$ – индикатор множества Γ; в этом случае оператор A_s – оператор, действующий в пространстве функций, а A_t^* – в пространстве обобщенных мер.

Для марковских процессов со счетным множеством состояний переходная функция полностью определяется вероятностями перехода

$$p_{ij}(s,\,t)=P(s,\,i;\,t,\,\{j\})$$

(из состояния i в момент s в состояние j в момент t), для к-рой обратное и прямое К. у. имеют (при нек-рых дополнительных предположениях) следующий вид:

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s}=\sum_k\alpha_{ik}(s)p_{kj}(s,t),\quad s<t, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t}=\sum_k p_{ik}(s,t)\alpha_{kj}(t),\quad t>s, \tag{4}$$

где

$$\alpha_{ij}(s)=\lim_{s_1\uparrow s,\,s_2\uparrow s}\frac{p_{ij}(s_1,s_2)-\delta_{ij}}{s_2-s_1}. \tag{5}$$

В случае конечного числа состояний уравнения (3), (4) справедливы, если только предположить существование пределов в (5).

Другой важный класс процессов, для к-рых детально изучен вопрос о справедливости уравнений (1) и (2),– это процессы диффузионного типа, определяемые тем, что их переходная функция

$$P(s,\,x;\,t,\,\Gamma),\ x\in\mathbb{R},\ \Gamma\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

удовлетворяет следующим условиям:

а) для всякого $x\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ равномерно по s, $s<t$,

$$\int_{|x-y|>\varepsilon}P(s,x;\,t,dy)=o(t-s),$$

б) существуют функции $a(s,\,x)$ и $b(s,\,x)$ такие, что для всякого x и $\varepsilon>0$ равномерно по s, $s<t$,

$$\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}(y-x)P(s,x;\,t,dy)=a(s,x)(t-s)+o(t-s),$$

$$\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}(y-x)^2P(s,x;\,t,dy)=b(s,x)(t-s)+o(t-s).$$

Тогда, если существует плотность $p=p(s,\,x;\,t,\,y)$, то (при нек-рых дополнительных предположениях) справедливо (по $t>s$ и $y\in\mathbb{R}$) прямое уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}(ap)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(bp)$$

(называемое также уравнением Фоккера–Планка), а обратное уравнение (по $s<t$ и $x\in\mathbb{R}$) имеет следующий вид

$$-\frac{\partial p}{\partial s}=a\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

А. Н. Ширяев.

КОЛМОГОРОВА УРАВНЕНИЕ для вторых моментов – уравнение, связывающее продольные (относительно $\boldsymbol{r}$) структурные функции

$$\langle [u_L(x+r,\,t)-u_L(x,\,t)]^n\rangle$$

поля скорости локально изотропной турбулентности при $n=2$ и 3:

$$D_{LLL}(r)-\sigma\nu\partial D_{LL}(r)/\partial r=-\frac{4}{5}\varepsilon r.$$

Здесь ε – скорость диссипации турбулентной энергии, ν – вязкость (А. Н. Колмогоров, 1941, см. [1]). Без допущения изотропности это утверждение доказано А. С. Мониным [2].

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Доклады АН СССР», 1941, т. 32, № 1, с. 19–21 (Избранные труды. Математика и механика, М., 1985); [2] Монин А. С., «Доклады АН СССР», 1959, т. 125, № 3, с. 515–18. *А. С. Монин.*

КОЛМОГОРОВА УРАВНЕНИЯ – см. *Маркова цепь* с непрерывным временем.

КОЛМОГОРОВА–ОБУХОВА ЗАКОН ПЯТИ ТРЕТЕЙ – зависимости от волнового числа спектральных плотностей кинетической энергии E и концентрации пассивной примеси E_θ в так называемом инерционно-конвективном интервале спектра мелкомасштабных компонент трехмерной *локально изотропной турбулентности*, выражаемые формулами

$$E(k)\sim\varepsilon^{2/3}k^{-5/3};\ E_\theta(k)\sim\varepsilon_\theta\varepsilon^{-1/3}k^{-5/3},$$

где ε и ε_θ – скорости спектрального переноса кинетической энергии и квадратичной меры неоднородностей поля концентрации. *А. С. Монин.*

КОЛМОГОРОВА–ЧЕПМЕНА УРАВНЕНИЕ – см. *Диффузионный процесс, Марковский процесс, Маркова цепь, Маркова цепь* с непрерывным временем.

КОЛМОГОРОВСКАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ турбулентности – независимость статистических характеристик мелкомасштабных компонент развитой (то есть имеющей достаточно большое число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}=\nu^{-1}L\delta U>\mathrm{Re}_{\mathrm{кр}}\sim 3000,$$

где ν – кинематическая вязкость, а L и δU – масштабы длины и перепадов скорости течения в целом) локально изотропной трехмерной турбулентности от особенностей крупномасштабного течения (в том числе от L, δU и Re).

Развитая турбулентность, вообще говоря, должна быть (см. [1]) локально стационарной, локально однородной и локально изотропной, то есть все конечномерные распределения вероятности для разностей

$$\boldsymbol{v}(M_k)=\boldsymbol{u}(M_k)-\boldsymbol{u}(M_0),\ k=1,\,2,\,\ldots,\,N;$$
$$M_k=(\boldsymbol{r}_k,\,\tau_k);\ \tau_k=t_k-t_0;\ \boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{u}_0\tau_k,$$

значений поля скорости $\boldsymbol{u}(M)$, при фиксированных $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}(M_0)$ и не слишком больших $|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0|$ ($\ll L$) и $|t_k-t_0|$ ($\ll L/\delta U$), должны не зависеть от $\boldsymbol{u}_0$ и быть инвариантными относительно любых сдвигов в пространстве-времени $(\boldsymbol{x},\,t)$ и любых вращений и отражений в пространстве $\boldsymbol{r}$. Однако в нек-рых специальных, но важных случаях локальная изотропность не имеет места и эти утверждения усложняются. Так, напр., в стратифицированных жидкостях, типичных для геофизич. течений, вертикальное направление оказывается выделенным во всех сколь угодно малых масштабах, так что изотропность заменяется осесимметричностью относительно вертикали, то есть инвариантностью относительно вращений лишь вокруг вертикальной оси и отражений лишь от плоскостей, содержащих эту ось, а в случае гидромагнитной турбулентности изотропность заменяется псевдоизотропностью, то есть инвариантностью относительно вращений, но не относительно отражений.

Основой для статистич. описания мелкомасштабных компонент развитой трехмерной локально изотропной турбулентности стали гипотезы подобия А. Н. Колмогорова, согласно к-рым, во-первых, при фиксированном значении ε скорости переноса удельной кинетич. энергии по спектру масштабов от больших масштабов к малым (равной удельной скорости вязкой диссипации кинетич. энергии) вышеуказанные конечномерные распределения вероятности полностью определяются двумя размерными параметрами ν и ε (и не зависят от характеристик крупномасштабного течения, в частности, от Re – автомодельность по Re). При этом возникает колмогоровский внутренний масштаб длины $\lambda=(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, и, напр., пространственная структурная функция, то есть средний квадрат разности скоростей δu (u – любая из декартовых компонент скорости) в точках $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}$ (где $r\ll L$) оказывается равной

$$\langle(\delta u)^2\rangle=(\varepsilon r)^{2/3}\varphi(r/\lambda).$$

Здесь $\varphi(\xi)$ – нек-рая универсальная функция (быстро затухающая при $\xi\to\infty$).

Во-вторых, при очень больших Re появляется так наз. инерционный интервал масштабов $L\gg r\gg\lambda$, в к-ром силы вязкости очень малы по сравнению с силами инерции, так что структурные функции (и другие статистич. характеристики компонент турбулентности с масштабами из инерционных интервалов длин и времен) перестают зависеть от ν (автомодельность по вязкости). Так, напр., в этом интервале

$$\langle(\delta u)^2\rangle=C(\varepsilon r)^{2/3},$$

где C – универсальная числовая постоянная. Этот закон двух третей Колмогорова оказался важным законом природы с весьма широкими применениями. К. а. означает, что статистич. режим мелкомасштабных компонент турбулентности может зависеть от особенностей осредненного течения только через среднюю величину $\langle\varepsilon\rangle$ спектрального потока удельной кинетич. энергии, передаваемой от осредненного течения по спектру масштабов и в минимальных масштабах порядка λ диссипируемой в теплоту. При этом $\langle\varepsilon\rangle$ определяется характеристиками осредненного течения следующим образом:

$$\langle\varepsilon\rangle=K(\delta U/L)^2,$$

где $K\sim L\delta U$ – эффективный коэффициент турбулентной вязкости. Отсюда получается закон четырех третей Ричардсона (1926)

$$K\sim\varepsilon^{1/3}L^{4/3},$$

а также соотношения $K/\nu\sim\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{\mathrm{кр}}$ (где учтено, что значения K и ν должны сравниваться при $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_{\mathrm{кр}}$) и $\lambda/L\sim(\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{\mathrm{кр}})^{-3/4}$. Используя число степеней свободы на единицу объема жидкости $n\sim\lambda^{-3}$, для полного числа степеней свободы турбулентности в объеме L^3 получается

$$N=nL^3\sim(\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{\mathrm{кр}})^{9/4}$$

(Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, 1953). Для спектральной плотности кинетич. энергии в единицы массы $E(k)$, где k – волновое число, первая гипотеза подобия Колмогорова записывается в виде

$$E(k)=\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}\varphi_1(\lambda k),$$

где $\varphi_1(\varkappa)$ – новая универсальная функция (быстро затухающая при $\varkappa\to\infty$). По второй гипотезе подобия Колмогорова в инерционном интервале спектра $L^{-1}\ll k\ll\lambda^{-1}$ спектральная плотность энергии перестает зависеть от ν, и получается

$$E(k)=C_1\varepsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

где C_1 – новая универсальная числовая постоянная. Связав в идеализированном случае $L=\infty$, $\lambda=0$, структурные и спектральные функции преобразованием Фурье, получаем

$$C_1=(55/27)\,\Gamma^{-1}(1/3)C.$$

По эмпирич. данным, $C\approx 1{,}9$ и $C_1\approx 1{,}4$. Это – закон пяти третей Колмогорова–Обухова (А. М. Обу-

хов, 1941, получил его из модельного уравнения для спектра турбулентности).

Форму функции $\varphi_1(\lambda k)$ при больших k ($\gg \lambda^{-1}$) можно определить, учитывая, что поле скорости в масштабах $l \ll \lambda$ приблизительно линейно и в системе координат x_β, движущейся и вращающейся вместе с жидкой частицей и связанной с ее главными осями деформации, имеет вид $u_\beta = a_\beta x_\beta$, где $0 < a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 < 0$ – главные скорости деформации. Тогда решение линеаризованного уравнения для вихря получается в виде

$$\omega = A(t) \exp[i\boldsymbol{x}\boldsymbol{k}(t)],$$

причем при больших t вектор $\boldsymbol{k}$ становится параллельным оси x_3 и имеющим длину

$$k_3(0) \exp(|a_3|t),$$

а вектор ω – параллельным оси x_1 и имеющим длину

$$|A_1(0)| \exp\left(a_1 t - \nu \int_0^t k^2 dt\right).$$

Отсюда спектр энергии

$$E(k) = \langle \delta\omega \delta\omega^* / 2k^2 \delta k \rangle$$

получается в виде

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} (\lambda k)^{2\sigma - 4/3} \exp[-(\gamma \lambda k)^2],$$

где $\sigma = \langle a_1 |a_3|^{-1} \rangle$ и $\gamma^2 = \tau^{-1} \langle |a_3|^{-1} \rangle$ (τ – колмогоровский внутренний масштаб времени), причем $1/2 < \sigma < 1$, и можно положить $\sigma = 2/3$.

Турбулентности ускорения мелкомасштабны (определяются в основном движениями масштабов $l \lesssim \lambda$), имеют средний квадрат порядка $\varepsilon^{3/2}\nu^{-1/2}$ и при движении жидкой частицы в инерционном интервале времен практически некоррелированы (А. М. Яглом, 1949). Поле вихря скорости также мелкомасштабно, имеет средний квадрат ε/ν и спектр в инерционном интервале $C_1 \varepsilon^{2/3} k^{1/3}$.

Концентрации θ пассивных примесей (в том числе, если архимедовы силы несущественны, то также и температуры) в поле локально изотропной турбулентности при достаточно больших числах Пекле $\mathrm{Pe} = \chi^{-1} L_\theta \delta_\theta U$, где χ – кинематич. коэффициент диффузии, L_θ – типичный пространственный масштаб существенных изменений значений θ, $\delta_\theta U$ – типичный перепад скоростей на расстояниях L_θ, допустимо считать локально изотропными. Для них первая гипотеза подобия должна быть заменена (А. М. Обухов, 1949) предположением, что конечномерные распределения вероятностей для разностей скоростей и разностей концентраций полностью определяются четырьмя размерными параметрами ν, ε, χ и ε_θ (автомодельность по Re и Pe), где ε_θ – скорость переноса удельной меры $(1/2)\langle \theta'^2 \rangle$ неоднородностей $\theta' = \theta - \langle\theta\rangle$ поля концентрации по спектру масштабов от больших масштабов к малым (равная удельной скорости $\chi \langle |\nabla\theta'|^2 \rangle$ выравнивания этих неоднородностей вследствие молекулярной диффузии). При этом возникает внутренний масштаб поля концентрации

$$\lambda_\theta = (\chi^3/\varepsilon)^{1/4} = \lambda\,(\mathrm{Pr})^{-3/4},$$

где $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ – число Прандтля. Согласно сформулированной гипотезе пространственная структурная функция поля θ при $r \ll L$, L_θ и спектр этого поля при $k \gg L^{-1}$, L_θ^{-1} должны иметь вид

$$\langle (\delta\theta)^2 \rangle = \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} r^{2/3} \varphi_\theta(r/\lambda_\theta, \mathrm{Pr});$$

$$E_\theta(k) = \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \varphi_{1\theta}(\lambda_\theta k, \mathrm{Pr}),$$

где $\varphi_\theta(\varkappa_\theta, \mathrm{Pr})$ и $\varphi_{1\theta}(\varkappa_\theta, \mathrm{Pr})$ – нек-рые универсальные функции. При очень больших Pe появляется конвективный интервал масштабов $L, L_\theta \gg r \gg \lambda_\theta^*$, в к-ром сглаживающее влияние диффузии на поле концентрации мало по сравнению с ростом градиентов этого поля, создаваемым переносом примеси движущейся жидкостью (конвекцией), так что параметром χ в этом интервале можно пренебречь. Оказывается, что при $\mathrm{Pr} \ll 1$ конвективный интервал простирается только до масштабов

$$l \gg \lambda_\theta,$$

а при $\mathrm{Pr} \gg 1$ – до масштабов

$$l \gg (\nu\chi^2/\varepsilon)^{1/4} = (\lambda\lambda_\theta^2)^{1/3}.$$

На инерционно-конвективном интервале

$$\min(L, L_\theta) \gg r \gg \max(\lambda, \lambda_\theta)$$

можно пренебречь обоими параметрами χ и ν, и тогда

$$\langle (\delta\theta)^2 \rangle = C_\theta \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} r^{2/3},$$

$$E_\theta(k) = C_{1\theta} \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}.$$

Первая из этих формул принадлежит А. М. Обухову (1949), вторая – закон пяти третей для температурного поля – С. Корсину (S. Corrsin, 1951). По эмпирич. данным, $C_{1\theta} \approx 1{,}1$.

В случае $\mathrm{Pr} \gg 1$ при больших k ($\gg \lambda^{-1}$) форму спектра $E_\theta(k)$ можно установить при помощи гипотезы Бэтчелора, по к-рой здесь этот спектр может зависеть от ε лишь через типичную величину $\tau^{-1} = (\varepsilon/\nu)^{1/2}$ скоростей деформации. В вязкоконвективном интервале

$$1 \ll \lambda k \ll (\mathrm{Pr})^{1/2}$$

коэффициент диффузии χ влиять на вид спектра еще не должен, и получается промежуточная асимптотика

$$E_\theta(k) \sim \varepsilon_\theta \tau k^{-1}.$$

Лишь затем в вязкодиффузионном интервале

$$\lambda k \gg (\mathrm{Pr})^{1/2}$$

из-за диффузионного сглаживания спектр резко спадает по закону

$$k^{-1} \exp[-(\gamma\lambda k)^2/\mathrm{Pr}].$$

В случае же $\mathrm{Pr} \ll 1$ в интервале масштабов

$$\lambda_\theta \gg l \gg \lambda$$

поле концентрации приблизительно линейно ($\theta \approx b_\alpha x_\alpha$), и уравнение диффузии достаточно брать в виде

$$b_\alpha u_\alpha \approx \chi_\Delta \theta,$$

откуда выводится формула

$$E_\theta(k) \sim \varepsilon_\theta \varepsilon^{2/3} \chi^{-3} k^{-17/3}.$$

В стратифицированных средах К. а. турбулентности усложняется: к определяющим параметрам добавляется параметр плавучести αg, где α – коэффициент расширения жидкости (скажем, термического), а g – ускорение силы тяжести. В мелкомасштабной части инерционно-конвективного интервала спектра турбулентности архимедовы силы малы по сравнению с силами инерции и действует обычная К. а. Но если в этот интервал попадает «масштаб плавучести»

$$L_* = (\alpha g)^{-3/2} \varepsilon^{5/4} \varepsilon_T^{-3/4},$$

то, по гипотезе подобия Обухова–Болджиано (1959), статистич. характеристики компонент развитой турбулентности с масштабами из этого интервала будут полностью определяться параметрами ε, ε_T и αg. Это означает, в частности, что константы C_1 и C_{1T} в формулах законов пяти третей для спектров энергии и температурного поля теперь оказываются нек-рыми универсальными функциями от безразмерного волнового числа $L_* k$ (стремящимися к вышеуказанным константам на мелкомасштабном конце инерционно-конвективного интервала спектра, то есть асимптотически при возрастании $L_* k$).

При устойчивой стратификации энергия турбулентности, передаваемая по спектру от больших масштабов к малым (колмогоровский каскадный процесс), затрачивается в основном на работу против архимедовых сил, и лишь очень

небольшая ее доля доходит до малых масштабов и диссипируется в теплоту. При этом скорость вязкой диссипации энергии ε оказывается очень малой и, по гипотезе Болджиано, перестает быть определяющим параметром, а потому асимптотически при убывании $L*k$ должна выпадать из формул теории подобия. Для этого в инерционно-конвективном интервале спектра при малых $L*k$ должно быть

$$C_1(L*k) \sim (L*k)^{-8/15} \text{ и } C_{1T}(L*k) \sim (L*k)^{4/15},$$

откуда получаются асимптотики для спектров

$$E(k) \sim \varepsilon_T^{2/5}(\alpha g)^{4/5} k^{-11/5};$$

$$E_T(k) \sim \varepsilon_T^{4/5}(\alpha g)^{-2/5} k^{-7/5}$$

(для пассивной примеси θ во второй из этих формул $\varepsilon_T^{4/5}$ заменяется на $\varepsilon_\theta \varepsilon_T^{-1/5}$). Более полный расчет спектров турбулентности в инерционно-конвективном интервале и интервале плавучести при помощи динамич. уравнений с использованием нек-рых полуэмпирич. формул выполнен А. С. Мониным [4]; в частности, оказалось, что при неустойчивой стратификации спектры имеют максимум в области $L*k \sim 1$.

К. а. турбулентности по Re статистич. характеристик мелкомасштабных компонент развитой турбулентности, строго говоря, является неполной (Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, 1944); флуктуации случайного поля $\varepsilon(x, t)$ скорости диссипации турбулентности энергии могут зависеть сами от свойств крупномасштабного движения, в том числе от Re, и создавать соответствующую зависимость и всего статистич. режима мелкомасштабных компонент турбулентности. Гипотезы подобия Колмогорова, строго говоря, относятся к условным распределениям вероятности для статистич. характеристик мелкомасштабных компонент при фиксированном ε, напр. для разностей скоростей $v(M_k)$ при фиксированном среднем значении ε_r поля скорости диссипации в области малого размера r, содержащей все точки M_k (см. [4]). Безусловные же характеристики получаются осреднением условных по распределению вероятностей для ε_r.

А. Н. Колмогоров в 1962 сформулировал уточненные гипотезы подобия следующим образом: условные распределения вероятностей для безразмерных относительных скоростей $(r\varepsilon_r)^{-1/3} v(M_k)$ при фиксированном значении $\mathrm{Re}_r = \nu^{-1}\varepsilon_r^{1/3} r^{4/3}$ полностью определяются этим значением Re_r; если же оно очень велико, то зависимость от него пропадает. В этом последнем случае, напр., безусловный спектр энергии получается в виде

$$E(k) \sim \langle \varepsilon_r^{2/3} \rangle k^{-5/3}.$$

Для ε_r можно в первом приближении принять логарифмически нормальное распределение с дисперсией $\mu \ln(L/r)$, тогда старый закон пяти третей приобретает типичный для неполной автомодельности степенной множитель $(Lk)^{-\mu/9}$. По данным ряда специальных измерений, $\mu \approx 0{,}4$, так что неавтомодельная поправка к показателю степени в законе пяти третей весьма невелика.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Доклады АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 299–303; [2] Обухов А. М., там же, 1941, т. 32, № 1, с. 22–24; [3] его же, «Изв. АН СССР. Сер. геогр., геофиз.», 1949, т. 13, № 1, с. 58–73; [4] Монин А. С., там же, Сер. геофиз., 1962, № 3, с. 397–407; [5] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967.

А. С. Монин.

КОЛМОГОРОВСКИЕ СПЕКТРЫ – степенные спектры случайных процессов или полей в интервалах масштабов, в которых происходит перенос по спектру адиабатически инвариантной квадратичной характеристики процесса или поля (кинетической энергии, меры неоднородностей, волнового действия и т. п.) с постоянной, то есть не зависящей от масштаба, скоростью. Обычно по этой скорости переноса инвариантной величины и по волновому числу или частоте спектральная плотность определяется (с точностью до числового множителя) с помощью соображений размерности. Примером является К. с. энергии турбулентности

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3},$$

где ε – скорость спектрального переноса энергии, а k – волновое число. В гамильтоновых системах, в к-рых для спектра может быть выведено кинетич. уравнение с «интегралом столкновений», К. с. получается из уравнения, являющегося приравненным нулю подинтегральным выражением в «интеграле столкновений».

Лит.: [1] Монин А. С., Теоретические основы геофизической гидродинамики, Л., 1988.

А. С. Монин.

КОЛМОГОРОВСКИЙ ТОР – инвариантный n-мерный тор гамильтоновой системы с n степенями свободы (или обратимой системы с фазовым пространством размерности $2n$), движение на котором условно-периодично с сильно несоизмеримыми частотами. А. Н. Колмогоров впервые доказал существование большого числа таких торов у малых возмущений невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем. Гамильтоновы системы в окрестности невырожденного эллиптич. положения равновесия также имеют много К. т.

См. также *КАМ-теория.*

М. Б. Севрюк.

КОЛМОГОРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Обмотка тора.*

КОЛМОГОРОВСКОЕ МНОЖЕСТВО – объединение *колмогоровских торов.* См. также *КАМ-теория, Малые знаменатели.*

КОЛЬЦЕВАЯ ГРУППА – *квантовая группа* специального вида. Специфика К. г. состоит в том, что соответствующие им алгебры Хопфа являются *Неймана алгебрами.* Если алгебра Хопфа A коммутативна, то ее К. г. является обычной локально компактной группой G и $A = L^\infty(G)$. Теория двойственности для К. г. обобщает двойственность Понтрягина для абелевых групп. К. г., двойственная неабелевой обычной группе, не является обычной группой. Понятие алгебры Каца (см. [3]) эквивалентно понятию К. г. Компактные псевдогруппы (см. [4]) – важный класс квантовых групп – являются К. г., только если имеющиеся в их алгебре Хопфа инволюции $*$ и # коммутируют. Для квантованной группы $SU(2)$ это не так. В связи с этим понятие К. г. нуждается в обобщении.

Лит.: [1] Вайнерман Л. И., Кац Г. И., «Математич. сб.», 1974, т. 94, с. 194–225; [2] Кац Г. И., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 2, с. 275–78; [3] Enock M., Schwartz J.-M., «Bull. Soc. Math. France, mem.», 1975, № 44; [4] Woronowicz S. L., «Comm. Math. Phys.», 1987, v. 111, № 4, p. 613–66.

В. Г. Дринфельд.

КОММУТАНТ группы, производная группа, – подгруппа, порождаемая в группе G всевозможными *коммутаторами* элементов группы G. Обычно К. группы G обозначается $[G, G]$, или G', или $\Gamma_2(G)$. Любая подгруппа, содержащая К., является нормальным делителем этой группы. Факторгруппа по нек-рому нормальному делителю абелева тогда и только тогда, когда этот нормальный делитель содержит К. группы.

К. кольца R – идеал, порожденный всеми произведениями ab, a, $b \in R$; он называется также квадратом кольца R и обозначается $[R, R]$ или R^2.

Н. Н. Вильямс, О. А. Иванова.

КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА – см. *Алгебра.*

КОММУТАТИВНАЯ БАНАХОВА АЛГЕБРА – см. *Банахова алгебра.*

КОММУТАТИВНАЯ ГРУППА, абелева группа, – *группа*, операция в которой коммутативна (перестановочна).

КОММУТАТОР алгебры Ли – см. *Ли алгебра.*

КОММУТАТОР операторов A и B, принадлежащих множеству $\mathcal{B}(X)$ непрерывных линейных операторов в банаховом пространстве X, – оператор

$$[A, B] = AB - BA$$

и $\mathcal{B}(X)$ – алгебра Ли с операцией $[\cdot, \cdot]$. A и B коммутируют (перестановочны), если $[A, B]=0$. Для семейства $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(X)$ его коммутант

$$\mathcal{M}'=\{A\in\mathcal{B}(X):[A, B]=0,\ B\in\mathcal{M}\}.$$

Если компактный оператор $A\neq 0$ и $\dim X=\infty$, то $\{A\}'$ имеет общее нетривиальное инвариантное подпространство. В гильбертовом пространстве H всякий компактный оператор есть К. A, $B\in\mathcal{B}(H)$; всякий $A\in\mathcal{B}(H)$ есть линейная комбинация двух К., но при $0\neq\alpha\in\mathbb{C}$ не существует таких $P, Q\in\mathcal{B}(H)$, что $[P, Q]=\alpha I$. В связи с коммутационными соотношениями в квантовой механике исследовались такие неограниченные самосопряженные P и Q, что $PQ-QP=-i\hbar I$ на плотном линейном многообразии $D\subset H$ (см. также *Неопределенностей соотношения*). При разных предположениях удается свести задачу к изучению свойств К. для ограниченных функций от P и Q таких, как элементы однопараметрич. (полу)групп, порожденных P и Q, или резольвенты; см. также *Стоуна – Неймана теорема*.

В алгебре $\mathcal{A}(D)$ неограниченных линейных операторов с общим инвариантным линейным многообразием D, плотным в H, вводят К. операторов, полагая

$$[A, B]\xi=AB\xi-BA\xi,\ \xi\in D,$$

хотя для произвольной пары замкнутых плотно определенных операторов A и B возможно $\{0\}=D(AB)\cap D(BA)$. Говорят, что оператор A с областью определения $D(A)$ и оператор $B\in\mathcal{B}(H)$ коммутируют, если AB есть расширение BA; их называют слабо коммутирующими (на множестве $D\subset D(A)\cap D(A^*)$), если $(A^*\xi, B\eta)=(B^*\xi, A\eta)$ для $\xi, \eta\in D$, то есть не требуется $BD(A)\subset D(A)$. Есть и другие понятия коммутативности и соответствующие им определения коммутанта $\mathcal{A}(D)'\subset\mathcal{B}(H)$ для $\mathcal{A}(D)$. Самосопряженные A и B сильно коммутируют, если коммутируют в $\mathcal{B}(H)$ их спектральные проекторы. Это свойство не следует из $[A, B]\xi=0$ для всех ξ из общей инвариантной области существенной самосопряженности A и B (контрпример Нельсона).

В терминах К. операторов формулируется ряд условий существенной самосопряженности симметрич. операторов.

Понятие К. операторов используют в квантовой механике (см. *Перестановочные соотношения*).

Лит.: [1] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [2] Putnam C. R., Commutation propertis of Hilbert space operators and related topics, B.– [a. o.], 1967; [3] Jørgensen P. E. T., Moore R., Operator commutation relations, Dordrecht – [a. o.], 1984; [4] Faris W. G., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 433. *А. В. Булинский.*

КОММУТАЦИИ С ЭКСПОНЕНТОЙ ФОРМУЛА – формула

$$L(\varphi(x)\exp\{i\lambda S(x)\})=\exp\{i\lambda S(x)\}\sum_{j=0}^{m}(i\lambda)^{-j}(R_j\varphi)(x),\quad (1)$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $L=\sum_{|\alpha|=0}^{m}a_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\alpha_j\geqslant 0$ – целые, $\mathcal{D}^\alpha=\mathcal{D}_1^{\alpha_1}\ldots\mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, функции φ, S, a_α достаточно гладкие и R_j – линейные дифференциальные операторы, коэффициенты которых зависят от S. Пусть L есть псевдодифференциальный оператор с достаточно гладким символом (см. [1]) порядка m, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $S\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ вещественнозначна и $\nabla S\neq 0$ на $\operatorname{supp}\varphi$. Тогда при $\lambda\to+\infty$ справедливо асимптотич. разложение вида (1): в правой части стоит асимптотич. ряд $\sum_{-\infty}^{m}$. Пусть L есть λ^{-1}-псевдодифференциальный оператор с символом $L(x, \lambda^{-1}\xi)$ (см. [2], [3]) и φ, S такие же, как и выше (условие $\nabla S\neq 0$ излишне). Тогда при $\lambda\to+\infty$ справедливо асимптотич. разложение

$$L(\varphi\exp\{i\lambda S\})=\exp\{i\lambda S\}\sum_{j=0}^{\infty}(i\lambda)^{-j}(R_j\varphi)(x),$$

$$R_0\varphi=L^0\varphi,\quad R_1\varphi=\left(\frac{\partial L^0}{\partial\xi}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial\xi^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\varphi,$$

где $L^0=L(x, \nabla S(x))$ и, аналогично, для производных L^0. К. с э. ф. имеется для канонич. оператора Маслова (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Хёрмандер Л., в сб.: Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1967, с. 63–87, 166–367; [2] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [3] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976. *М. В. Федорюк.*

КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ – см. *Перестановочные соотношения*.

КОМПАКТИФИКАЦИЯ – см. *Поколения фермионов*.

КОМПАКТНАЯ ГРУППА – см. *Топологическая группа*.

КОМПАКТНОГО ТИПА ПРОСТРАНСТВО – см. *Симметрическое пространство*.

КОМПАКТНЫЙ ОПЕРАТОР – см. *Собственное значение*.

КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ кривой – см. *Клейнова поверхность*.

КОМПЛЕКСНАЯ АЛГЕБРА Ли – см. *Ли алгебра*.

КОМПЛЕКСНАЯ ИЗОТРОПНАЯ ТЕТРАДА – см. *Ньюмена – Пенроуза формализм*.

КОМПЛЕКСНАЯ ОКРЕСТНОСТЬ – см. *Гиперфункция*.

КОМПЛЕКСНАЯ СТРУКТУРА – см. *Комплексное многообразие*.

КОМПЛЕКСНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ОПЕРАТОР – см. *Коши – Римана условие*.

КОМПЛЕКСНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ОПЕРАТОРЫ – см. *Операторы*.

КОМПЛЕКСНОЕ МНОГООБРАЗИЕ – вещественное многообразие M четной размерности $2n$, снабженное дополнительной структурой: оно покрыто системой открытых множеств V_i, на каждом из которых задана система комплексных координат (то есть задано отображение $\varphi_i: V_i\to\mathbb{C}^n$), причем все функции $\varphi_i\varphi_j^{-1}$, называемые функциями переклейки, голоморфны. Число n называется размерностью многообразия M (комплексной), набор функций φ_i – комплексной структурой. Для заданного четномерного вещественного многообразия комплексная структура не обязательно существует или единственна с точностью до эквивалентности.

Важные примеры К. м.: $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}P^n$ – n-мерное проективное пространство, $G_{n,k}(\mathbb{C})$ – комплексное многообразие Грассмана, алгебраич. подмногообразия $\mathbb{C}P^n$, римановы поверхности, кэлеровы многообразия, орбиты приведенного действия компактных групп Ли. Последний пример интересен тем, что исходная группа не обладает комплексной структурой.

Лит.: [1] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1986; [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1982. *П. Г. Гриневич.*

КОМПЛЕКСНЫЙ БИЛЛИАРД – комплексная *динамическая система* (векторное поле), получающаяся комплектификацией *биллиарда* в области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Фазовое пространство К. б. есть результат склеивания расслоения единичных комплексных окружностей $p_1^2+p_2^2=1$, $p_k\in\mathbb{C}$, $k=1, 2$, над Ω по отображению отражения. Последнее сопоставляет комплексному вектору (p_1, p_2) в точке границы Ω другой вектор $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ в этой же точке, полученный из (p_1, p_2) по закону упругого отражения от границы Ω, примененному отдельно к действительной и мнимой частям вектора. В терминах К. б. удается сформулировать условие квантования, аналогичное *Бора – Зоммерфельда условию квантования*, позволяющее в ряде случаев найти в *квазиклассическом приближении* расщепление собственных чисел краевой задачи для оператора Лапласа в области с симметрией и мнимые части

резонансов в задаче рассеяния для неограниченной области (см. [1]).

Лит.: [1] Лазуткин В. Ф., в кн.: Проблемы математической физики, в. 2, Л., 1986, с. 138–64. *В. Ф. Лазуткин.*

КОМПЛЕКСНЫЙ ДУБЛЬ – см. *Клейнова поверхность.*

КОМПЛЕКСНЫЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Перевала метод.*

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ – *аналитическая функция* комплексного переменного $z=x+iy$ вида

$$f(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y), \qquad (1)$$

где гармоническая функция φ является *потенциалом*, а сопряженная к ней функция ψ представляет собой функцию тока (или силовую функцию) плоского векторного поля $\boldsymbol{v}=(v^1, v^2)$.

В математич. физике широко используются эмпирически подкрепленные линейные законы движения, выражаемые (с точностью до числового коэффициента пропорциональности) в виде

$$\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\varphi=(\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y), \qquad (2)$$

что указывает на потенциальность векторного поля $\boldsymbol{v}$. Таковы, напр., закон Фурье в теории теплопроводности, закон Ома в электростатике, закон Дарси в теории фильтрации, описывающие связь между тепловым потоком и температурой, плотностью тока и электрич. потенциалом, скоростью фильтрации и давлением.

Наряду с законом движения (2) одним из фундаментальных законов ньютоновской механики является закон сохранения массы

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=q, \qquad (3)$$

к-рый характеризуется в дифференциальной форме посредством оператора div и функции источников q из правой части соотношения (3), называемого также уравнением неразрывности. Поле без источников и стоков ($q=0$), то есть $\operatorname{div}(\boldsymbol{v})=0$, является соленоидальным. Условие соленоидальности поля $\boldsymbol{v}$ в односвязной области гарантирует существование функции тока ψ такой, что

$$d\psi=-v^2dx+v^1dy.$$

Если в области $D\subset\mathbb{C}$ задано потенциальное и соленоидальное векторное поле $\boldsymbol{v}$, то для функций φ и ψ выполнены соотношения $\partial\varphi/\partial x=\partial\psi/\partial y$ и $\partial\varphi/\partial y=-\partial\psi/\partial x$, являющиеся *Коши – Римана условиями* для К. п. (1), представляющего собой (вообще говоря, многозначную) аналитич. функцию в области D. С другой стороны, произвольную аналитич. функцию можно интерпретировать как К. п. нек-рого двумерного потенциального и соленоидального векторного поля. При этом изолированные *особые точки* моделируют причины, порождающие физич. процесс (источник тепла, сток жидкости, точечный диполь и т. д.). Отмеченная взаимосвязь позволяет в полной мере использовать мощный аппарат комплексного анализа для решения плоских задач математич. физики.

По К. п. нетрудно определить все характеристики векторного поля, а именно: поле

$$\boldsymbol{v}=f'(z),$$

линии тока

$$\psi(x, y)=\operatorname{Im}f(z)=\text{const},$$

эквипотенциалы

$$\varphi(x, y)=\operatorname{Re}f(z)=\text{const},$$

поток через кривую

$$N=\operatorname{Im}\int_{\partial D}f'(z)\,dz,$$

циркуляцию вдоль кривой

$$\Gamma=\operatorname{Re}\int_{\partial D}f'(z)\,dz.$$

Поскольку суперпозиция аналитич. функций является аналитич. функцией, построение К. п. для области D_1 можно осуществить, если известны потенциал для области D и однолистная функция $\varphi\colon D_1\to D$, задавая $w=\varphi^*f=f\circ\varphi$.

Примеры. 1) Векторное поле $\boldsymbol{v}=N/2\pi\bar{z}$ с источником мощности N в нуле характеризуется комплексным потенциалом $f(z)=(N/2\pi)\operatorname{Log}z$.

2) Векторное поле $\boldsymbol{v}=\Gamma i/2\pi\bar{z}$ с вихрем интенсивности Γ в начале координат описывается комплексным потенциалом $f(z)=(\Gamma i/2\pi)\operatorname{Log}z$.

3) Векторное поле, порождаемое точечным мультиполем мощности M в начале координат, задается комплексным потенциалом $f(z)=M/2\pi z^p$. *Ю. Е. Хохлов.*

КОМПЛЕКСНЫЙ РОСТОК – см. *Изотропное подмногообразие* с комплексным ростком.

КОМПЛЕКСНЫХ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ МЕТОД – см. *Редже полюсов метод.*

КОНДЕНСАТОР – см. *Емкость* множества.

КОНЕЧНОЗОННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ – совокупность методов построения точных решений нелинейных уравнений, допускающих коммутационные представления (уравнения типа Лакса, их двумеризация, уравнения нулевой кривизны). В основе К. и. лежит использование аппарата классич. алгебраич. геометрии, поэтому К. и. часто называют алгебро-геометрическим интегрированием уравнений математич. физики. Термин «К. и.» связан с работой С. П. Новикова [1], впервые рассмотревшего ограничение уравнения Кортевега – де Фриса на подмногообразие периодич. функций таких, что спектр соответствующего оператора Штурма – Лиувилля состоит из конечного числа зон.

Лит.: [1] Новиков С. П., «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, № 3, с. 54–66. *И. М. Кричевер.*

КОНЕЧНОЗОННОЕ РЕШЕНИЕ – см. *Нелинейное уравнение Шредингера.*

КОНЕЧНОЗОННЫЙ ОПЕРАТОР Шредингера – см. *Блоха закон дисперсии.*

КОНЕЧНОМЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО, n-мерное векторное пространство,– *векторное пространство*, базис которого состоит из конечного (n) числа элементов.

КОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ алгебры Ли – см. *Представление* алгебры Ли.

КОНЕЧНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Марковский процесс, Случайный процесс, Случайное поле, Случайная функция.*

КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ УРАВНЕНИЯ – уравнения, связывающие n-точечные плотности вероятности $f_n=p_{M_1\dots M_n}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ значений $\boldsymbol{u}(M)$, $M=(\boldsymbol{x}, t)$ поля скорости турбулентного течения:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t_k}=-\left(\frac{\partial u_{k\alpha}f_n}{\partial x_{k\alpha}}+\frac{\partial w_{k\alpha}f_n}{\partial u_{k\alpha}}\right),$$

где $\boldsymbol{w}_k$ – перенесенное в $\boldsymbol{x}_k$ условное математическое ожидание гидродинамического ускорения в точке $(\boldsymbol{x}, t_k)$ при условии, что $\boldsymbol{u}(M_1), \dots, \boldsymbol{u}(M_n)$ фиксированы и потому выражающиеся через f_{n+1} (см. [1]).

Лит.: [1] Монин А. С., «Доклады АН СССР», 1967, т. 177, № 5, с. 1036–38. *А. С. Монин.*

КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ – один из вариантов неоднозначного распространения особенностей (например, волновых фронтов) для операторов с характеристиками переменной кратности. Пусть $P(\mathcal{D})$ – гиперболический по Гордингу матричный оператор в $\mathbb{R}^n$, $p(\xi)$ – его главный символ, $h(\xi)=\det p(\xi)$, $\Sigma=\{\xi, \nabla h(\xi)=0\}$ – C^∞-многообразие и $T_\xi\Sigma=\ker\operatorname{Hers}h(\xi)$ для любого $\xi\in\Sigma$; тогда при $\xi\in\Sigma$ $\mathbb{R}^n_x$ расслаивается на бихарактеристич. листы

$$\Gamma_{z,\xi}=\{x:\ \langle x-z, \eta\rangle=0,\ \eta\in T_\xi\Sigma\},$$

и особенности распространяются отдельно вдоль каждого

листа по конусам зависимости оператора

$$\sum_{i,j} h_{\xi_i \xi_j}(\xi)\, \mathcal{D}_{Y_i} \mathcal{D}_{Y_j}.$$

Лит.: [1] Тейлор М., Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1985. *В. Я. Иврий.*

КОНСЕРВАТИВНАЯ СИСТЕМА – механическая система, для которой имеет место закон сохранения механической энергии, то есть сумма кинетической энергии T и потенциальной энергии U системы постоянна: $T+U=\text{const}$. Другие законы сохранения, напр. количества движения, могут при этом не соблюдаться. Пример К. с.– Солнечная система. В земных условиях, где неизбежно наличие сил сопротивления (трения, сопротивления среды и др.), вызывающих убывание механич. энергии и переход ее в другие формы энергии, напр. в тепло, К. с. осуществляется лишь грубо приближенно.

КОНСЕРВАТИВНОЕ УРАВНЕНИЕ Ньютона – см. *Ньютона уравнение.*

КОНСТРУКТИВНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – направление *квантовой теории поля*, основная задача которого состоит в строгом математическом обосновании результатов, получаемых в квантовой теории поля. В отличие от *аксиоматической квантовой теории поля*, К. к. т. п. призвана ответить на вопрос, существуют ли в математич. смысле нетривиальные квантованные поля для обычно рассматриваемых взаимодействий и удовлетворяют ли они основным аксиомам квантовой теории поля и аксиоматич. квантовой теории поля. В задачу К. к. т. п. входит реальное построение таких полей, изучение математич. свойств и различных квантовополевых объектов, связанных с этими полями, и выяснение физич. содержания рассматриваемой конкретной модели квантовой теории поля.

К. к. т. п. как самостоятельный раздел квантовой теории поля возникла в начале 60-х гг. и связана с именем А. Вайтмана (A. Wightman), к-рый сформулировал ее основную задачу. Вторым этапом развития К. к. т. п. можно считать 2-ю половину 60-х – начало 70-х гг. [Дж. Глимм (J. Glimm), А. Джаффе (A. Jaffe) и др.], когда было доказано существование квантованных полей в простейших суперперенормируемых взаимодействиях (см. *Перенормировка*) в пространстве размерности $d=2$. Третий этап начался в 70-х гг. и связан с применением методов евклидовой теории поля (см. *Евклидова квантовая теория поля*). Основные теоремы евклидовой квантовой теории поля были доказаны К. Остервальдером (K. Osterwalder) и Р. Шрадером (R. Schrader). В начале 80-х гг. направление К. к. т. п. испытывает кризис, поскольку методы, развитые в пространстве $d=2$, с большим трудом переносятся в пространство $d=3$ и не ясно, что можно сделать в 4-мерном пространстве-времени ($d=4$).

На первом этапе основным объектом изучения К. к. т. п. являлся бесконечный набор *Вайтмана функций* $\{W_n(x_1, ..., x_n)\}$, где $x_1, ..., x_n$, $n=1, 2, 3, ...$, – точки пространства-времени t_i, $\boldsymbol{x}_i$ (используется система единиц, в к-рой $\hbar=c=1$). Задание этих функций эквивалентно знанию квантованных полей в смысле аксиоматич. квантовой теории поля (так наз. теорема реконструкции Вайтмана). Функции Вайтмана, вообще говоря, можно было бы вычислить как *вакуумные средние* от произведения полей. Напр., в простейшем случае однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$

$$W_n(x_1, ..., x_n) = \langle 0 | \varphi(x_1) ... \varphi(x_n) | 0 \rangle, \qquad (1)$$

где гейзенбергово поле $\varphi(x)$ (см. *Гейзенберга представление*) определяется соотношением

$$\varphi(x) = \varphi(t, \boldsymbol{x}) = \exp\{iHt\}\, \varphi(\boldsymbol{x}) \exp\{-iHt\}. \qquad (2)$$

Здесь $\varphi(\boldsymbol{x})$ – «начальное» поле, то есть значение поля $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ в точке пространства $\boldsymbol{x}$ в момент времени $t=0$, а

$$H = H[\varphi] = H_0[\varphi] + gH_I[\varphi] \qquad (3)$$

– гамильтониан системы, представленный в виде суммы гамильтониана H_0, описывающего невзаимодействующую систему, и гамильтониана взаимодействия gH_I, где g – константа связи (квадратные скобки означают функциональную зависимость от поля $\varphi(x)$).

Однако наличие *расходимостей* – объемных, ультрафиолетовых и, возможно, других – делает прямое вычисление по формуле (1) невозможным. Поэтому доказательство существования функций Вайтмана (1) строится следующим образом. В гамильтониан взаимодействия (3) вводятся объемное (Λ) и ультрафиолетовые (σ) «обрезания», так что регуляризованный гамильтониан $H_{\Lambda\sigma}[\varphi]$ становится хорошо определенным эрмитовым оператором, а для него существует регуляризованный набор функций Вайтмана $\{W_n(\cdot\,|\Lambda, \sigma)\}$, где точка обозначает набор пространственно-временных переменных. Далее к регуляризованному гамильтониану добавляются так наз. контрчлены, структура к-рых предсказывается теорией возмущений и к-рые призваны сократить возникающие расходимости в пределе снятия обрезания. Задачей К. к. т. п. является, во-первых, доказательство существования конечного предела

$$\lim_{\sigma\to\infty} \lim_{\Lambda\to\infty} W_n(\cdot\,|\Lambda, \sigma) = W_n(\cdot) \qquad (4)$$

при определенном выборе контрчленов и, во-вторых, доказательство того, что полученные предельные функции $\{W_n(\cdot)\}$ удовлетворяют всем требованиям аксиоматич. квантовой теории поля.

Математич. трудности при непосредственной реализации этой программы определяются сложностью операторной структуры вводимых контрчленов, что, в свою очередь, диктуется конкретным видом рассматриваемой квантовополевой модели. Наиболее простые контрчлены возникают в так наз. суперперенормируемых теориях, то есть в теориях, где число расходящихся *Фейнмана диаграмм* конечно. Именно по этой причине первые нетривиальные примеры построения релятивистских локальных квантованных полей были получены в суперперенормируемых моделях, характеризуемых плотностями гамильтониана взаимодействия φ^4_2, $P^n(\varphi)_2$, $\bar{\psi}\psi\varphi_2$, где верхний индекс – степень взаимодействия, а нижний – размерность пространства-времени $d=2$, P^n – многочлен степени n, ψ – спинорное *Дирака поле* (черта над ψ означает дираковское сопряжение). Проведение сформулированной выше программы даже в этих простейших случаях потребовало создания математич. техники операторных оценок специально для изучаемых моделей.

Дальнейшее развитие К. к. т. п. связано с переходом к евклидову пространству и применением методов евклидовой теории поля. В аксиоматич. квантовой теории поля было доказано, что функции Вайтмана $W_n(t_1, \boldsymbol{x}_1; ...; t_n, \boldsymbol{x}_n)$ являются граничными значениями аналитич. функций $F_n(z_1^0, \boldsymbol{z}_1; ...; z_n^0, \boldsymbol{z}_n)$, в область аналитичности к-рых попадают также евклидовы 4-точки z_k такие, что $z_k^0 = i\tau_k$, $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{x}_k$, где τ_k – «мнимое время». Значения функций $F_n(z_1, ..., z_n)$ на множестве евклидовых точек называются функциями Швингера [введены Ю. Швингером (J. Schwinger) в 1951]:

$$S_n(\tau_1, \boldsymbol{x}_1; ...; \tau_n, \boldsymbol{x}_n) = F_n(i\tau_1, \boldsymbol{x}_1; ...; i\tau_n, \boldsymbol{x}_n).$$

К. Остервальдер и Р. Шрадер (1975) нашли необходимые и достаточные условия, при выполнении к-рых была доказана эквивалентность теорий, построенных на функциях W_n и S_n.

Изучение функций Швингера более удобно по следующим причинам. Во-первых, к решению проблем теории поля привлекаются хорошо разработанные теоретико-вероятностные методы, поскольку функции Швингера можно отождествить со средними от произведения случайных процессов (евклидовых полей):

$$S_n(\tau_1, \boldsymbol{x}_1; ...; \tau_n, \boldsymbol{x}_n) = E[\Phi(\tau_1, \boldsymbol{x}_1) ... \Phi(\tau_n, \boldsymbol{x}_n)].$$

Здесь $E[\Phi]$ – среднее от нек-рой случайной величины Φ, заданной на нек-ром вероятностном пространстве. Было выяснено, что величина $\Phi(\cdot)$ должна быть евклидово-ковариантным марковским случайным полем (см. *Марковский процесс*), удовлетворяющим определенным дополнительным требованиям, и доказано, что эти требования эквивалентны условиям Остервальдера–Шрадера. Во-вторых, переход к евклидовым вероятностным мерам позволил при исследовании проблем, связанных со снятием обрезаний, использовать корректные интегральные представления для регуляризованных функций Швингера $S_n(\cdot\,|\,\Lambda,\sigma)$ и многочисленные методы статистич. физики. Тем самым оказалось, что многие вопросы евклидовой теории эквивалентны проблемам статистич. физики. На этом пути были упрощены доказательства существования функций Вайтмана в модели $P^n(\varphi)_2$ и доказано их существование в модели φ_3^4.

Математически развитые методы К. к. т. п. привели пока к доказательству существования квантованных гейзенберговых полей только в суперперенормируемых моделях квантовой теории поля. Переход к изучению перенормируемых моделей требует привлечения новых идей и методов.

Лит.: [1] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977; [3] Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход, М., 1978; [4] Глимм Д., Джаффе А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984. *Г. В. Ефимов.*

КОНТАКТИЗАЦИЯ – см. *Контактная геометрия, Симплектическая геометрия.*

КОНТАКТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ – нечетномерный аналог *симплектической геометрии*. Взаимоотношения между ними аналогичны взаимоотношениям между геометрией проективного и векторного пространства.

Основные определения. Контактной структурой в нечетномерном многообразии M^{2n+1} называется невырожденное $2n$-мерное распределение, то есть такое распределение, к-рое локально можно задать как ядро 1-формы λ, удовлетворяющей условию невырожденности: $\lambda\wedge(d\lambda)^n\neq 0$ (ни в одной точке).

Если на многообразии задана контактная структура, то многообразие называется контактным многообразием; 1-форма, задающая контактную структуру, называется контактной формой (такая всюду определенная форма существует не для всякой контактной структуры). Контактные формы, задающие одну и ту же контактную структуру, отличаются умножением на функцию, нигде не обращающуюся в нуль. Если λ – контактная форма, то 2-форма $d\lambda$ определяет на $2n$-мерной контактной гиперплоскости невырожденную 2-форму, то есть задает структуру симплектич. пространства. Это условие в свою очередь эквивалентно тому, что распределение, заданное 1-формой λ, невырожденно, то есть является контактной структурой.

Основные примеры. Первый пример контактной структуры – это двумерное распределение в $\mathbb{R}^3$, заданное контактной формой $\lambda=x\,dy+dz$ (x, y и z – декартовы координаты). Подобная структура существует и в $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$\lambda=\sum x_i\,dy_i+dz,$$

где $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z$ – декартовы координаты. Локально все контактные структуры в $(2n+1)$-мерном многообразии диффеоморфны этой (контактная теорема Дарбу).

Стандартная контактная структура в трехмерной сфере S^3 задается, как распределение комплексных прямых $\mathbb{C}^1$, касательных к сфере S^3, вложенной в $\mathbb{C}^2$ в качестве единичной сферы. Эквивалентное описание: контактное распределение состоит из плоскостей, перпендикулярных слоям расслоения Хопфа (то есть окружностям, являющимся орбитами действия группы $U(1)$ на $S^3\subset\mathbb{C}^2$).

Аналогично строится стандартная контактная структура в любой нечетномерной сфере.

Важным примером контактного многообразия служит многообразие 1-струй функций JM многообразия M^n, состоящее из 1-струй

$$(x,\ f(x),\ df(x)),\ x\in M.$$

Многообразие $J^1M=\mathbb{R}\times T^*M$ имеет контактную форму $\lambda=dz-\alpha$, где z – координата на оси $\mathbb{R}$ значений функций, а $\alpha=\sum p_i\,dq_i$ – форма действия в T^*M.

Само название «контактная структура» обязано существованием другому примеру – многообразию контактных элементов. Контактным элементом на многообразии M^n называется гиперплоскость в касательном пространстве к M в нек-рой точке, называемой точкой контакта. Различают многообразие всех контактных элементов, являющееся проективизацией кокасательного расслоения: $P(T^*M)$, и двулистно накрывающее его многообразие ориентированных контактных элементов, являющееся сферизацией кокасательного расслоения.

Многообразие контактных элементов несет контактную структуру. Именно, касательный вектор к этому многообразию в точке ξ, где ξ – контактный элемент, лежит в контактной гиперплоскости, если его проекция в TM лежит в гиперплоскости ξ. Более наглядно: перемещение контактного элемента касается контактной гиперплоскости, если скорость точки контакта принадлежит этому контактному элементу.

Симплектизация и контактизация. Связь между контактной и симплектич. геометрией устанавливается двумя конструкциями: симплектизацией и контактизацией.

Если M – контактное многообразие, то над M существует одномерное расслоение, слой к-рого над точкой $x\in M$ состоит из ненулевых функционалов на T_xM, равных нулю на контактной гиперплоскости. На пространстве N этого расслоения определена 1-форма α; ее значение на векторе $\nu\in TM$ в точке $\xi\in N$ равно значению функционала ξ на проекции ν в TM. 2-форма $d\alpha$ определяет в N симплектич. структуру; многообразие N называется симплектизацией контактного многообразия M.

Пример симплектизации: если в качестве M взять многообразие контактных элементов PT^*X, то симплектизацией N будет T^*X-X – кокасательное расслоение без нулевого сечения. На многообразии N действует мультипликативная группа $\mathbb{R}^\times$ ненулевых действительных чисел умножением функционалов на скаляры. Симплектич. структура $d\alpha$ в N однородна степени 1 относительно этого действия.

Симплектизация позволяет сводить вопросы, относящиеся к К. г., к аналогичным вопросам симплектич. геометрии. Напр., контактоморфизмы многообразия M (то есть диффеоморфизмы, сохраняющие контактную структуру) взаимно однозначно соответствуют симплектоморфизмам многообразия N, коммутирующим с действием группы $\mathbb{R}^\times$.

Контактизация сопоставляет точному симплектич. многообразию N (то есть многообразию, на к-ром симплектич. форма ω является дифференциалом 1-формы $\omega=d\alpha$) контактное многообразие $K=N\times\mathbb{R}$ с контактной формой $\alpha-dz$, где z – координата в $\mathbb{R}$.

Напр., если N является кокасательным расслоением T^*M, то его контактизация – это многообразие 1-струй J^1M. Контактизация определена не однозначно – она зависит от выбора 1-формы α в равенстве $\omega=d\alpha$.

Контактные векторные поля. Контактное векторное поле – это такое векторное поле на контактном многообразии, локальный поток к-рого сохраняет контактную структуру, то есть является контактоморфизмом. Контактные векторные поля образуют алгебру Ли.

Пример такого поля – геодезич. поток. Это векторное поле определено в многообразии контактных элементов риманова многообразия. Его поток параллельно переносит контактные элементы вдоль геодезических, выходящих из

точек контакта в перпендикулярном контактному элементу направлении.

Подобно тому как сохраняющие симплектич. структуру векторные поля на симплектич. многообразии задаются гамильтонианом, контактные векторные поля на контактном многообразии M с контактной формой λ задаются своими контактными гамильтонианами. Их построение использует конструкцию симплектизации: контактное поле v определяет однородное $\mathbb{R}^X$-инвариантное гамильтоново поле v на симплектизации N; 1-форма λ задает вложение $M \subset N$; ограничение на M однородного гамильтониана поля v и называется контактным гамильтонианом поля v.

Формулы для вычисления: если

$$\lambda = dz - \sum x_i dy_i$$

($x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z$ — координаты), то функции f отвечает контактное поле:

$$v = \Big(f - \sum x_i\, \partial f/\partial x_i\Big)\partial/\partial z + \\ + \sum (\partial f/\partial y_i + x_i\, \partial f/\partial z)\, \partial/\partial x_i - \sum \partial f/\partial x_i\, \partial/\partial y_i .$$

В частности, $\lambda(v) = f$. Это равенство уже не зависит от выбора координат. Соответствие $f \mapsto v$ взаимно однозначное. Поэтому в пространстве гладких функций на контактном многообразии возникает структура алгебры Ли. Она называется скобкой Лагранжа. В прежних координатах она записывается так:

$$[f, g] = f\, \partial g/\partial z - \partial f/\partial z\, g - \\ - \sum x_i (\partial f/\partial x_i\, \partial g/\partial z - \partial f/\partial z\, \partial g/\partial x_i) - \\ - \sum \partial f/\partial x_i\, \partial g/\partial y_i + \sum \partial f/\partial y_i\, \partial g/\partial x_i .$$

Лежандровы многообразия. *Лежандровы многообразия* — это интегральные подмногообразия наибольшей размерности n в контактном $(2n+1)$-мерном многообразии. Касательное пространство лежандрова многообразия в каждой точке лежит в контактной гиперплоскости и является в ней лагранжевым подпространством относительно симплектич. структуры $d\lambda$, где λ — локальная контактная форма.

Примером лежандрова подмногообразия контактных элементов $P(T^*M)$ многообразия M служит множество всех контактных элементов, касающихся нек-рого фиксированного подмногообразия $P \subset M$. В частности, если P — точка, то в качестве лежандрова многообразия выступает проективное пространство — слой расслоения $PT^*M \to M$.

В качестве P можно взять подмногообразие коразмерности 1 риманова многообразия — волновой фронт — и подвергнуть соответствующее лежандрово многообразие действию геодезич. потока. После сдвига за время t новое лежандрово многообразие уже может не быть множеством контактных элементов, касающихся какого-либо гладкого многообразия, так как на волновом фронте могут возникать особенности. Их характер изучает теория лежандровых особенностей.

Другой пример лежандрова многообразия — 1-график фиксированной функции f, то есть подмногообразие многообразия 1-струй J^1M, состоящее из 1-струй функции f во всех точках M.

Характеристики. Характеристиками в контактном многообразии с контактной формой λ называются кривые, касательные прямые к-рых в каждой точке являются ядрами 2-формы $d\lambda$. Характеристики трансверсальны контактному распределению и локально расслаивают контактное многообразие, причем база этого расслоения — симплектич. многообразие, симплектич. структура к-рого задана 2-формой $d\lambda$.

Примером является трехмерная сфера S^3 со стандартной контактной структурой. При надлежащем выборе контактной формы окружности слои расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ будут характеристиками. Тем самым контактное многообразие S^3 расслоено на характеристики S^1, а базой является симплектич. многообразие S^2.

Характеристическим векторным полем (полем Риба) называется такое поле v, что $i_v d\lambda = 0$, $i_v \lambda = 1$. Траектории характеристич. поля — характеристики. Характеристич. поле сохраняет контактную структуру и даже контактную форму λ. Пример характеристич. поля — геодезич. поток в многообразии контактных элементов риманова многообразия.

Важная задача К. г. — задача о замкнутых характеристиках. Она состоит в том, чтобы определить, для каких контактных форм существуют замкнутые характеристич. кривые (и сколько их). К этой задаче сводится задача о замкнутых геодезических на римановых многообразиях и о движении заряженной частицы в магнитном поле. Эта еще полностью не решенная проблема тесно связана с задачей о неподвижных точках симплектоморфизмов.

Гомотопические вопросы. Важное место в К. г. занимают вопросы существования и эквивалентности контактных структур.

Если многообразие M^{2n+1} контактное, то структурная группа его касательного расслоения редуцируется к $U(n)$. Поэтому все характеристич. числа M равны нулю и многообразие бордантно нулю (то есть является границей). Это — необходимое условие существования контактной структуры.

Каждое трехмерное многообразие несет контактную структуру, причем контактная структура существует в каждом гомотопич. классе двумерных распределений.

Если две контактные структуры на компактном многообразии гомотопны в классе контактных структур, то они диффеоморфны. (То есть существует диффеоморфизм, дифференциал к-рого переводит контактные гиперплоскости первой структуры в гиперплоскости второй.) На открытых многообразиях подобное не верно.

Нестандартные контактные структуры. Стандартная контактная структура в трехмерном пространстве в цилиндрич. координатах ρ, φ, z задается 1-формой $\rho^2 d\varphi + dz$. Форма $\rho \sin \rho\, d\varphi + \cos \rho\, dz$ задает в $\mathbb{R}^3$ другую контактную структуру, к-рая не диффеоморфна стандартной. Аналогично явными формулами задаются не диффеоморфные стандартной контактные структуры в трехмерной сфере.

Различать стандартные и нестандартные структуры позволяет *Беннекена инвариант*. Если γ — замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$, трансверсальная контактной структуре, а v — невырожденное векторное поле в $\mathbb{R}^3$, касающееся контактной структуры, то малый сдвиг γ вдоль поля v даст новую кривую γ', не пересекающуюся с γ. Коэффициент зацепления γ и γ' называется инвариантом Беннекена кривой γ. Он не зависит от поля v и не меняется при изотопии кривой γ и гомотопии контактной структуры, сохраняющих их трансверсальность.

Согласно теореме Беннекена, для стандартной контактной структуры в $\mathbb{R}^3$ и вложенной в $\mathbb{R}^3$ связной поверхности M^2, краем к-рой является γ, инвариант Беннекена не больше $-\chi(M)$, где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика. В частности, если γ — незаузленная кривая, трансверсальная стандартной контактной структуре в $\mathbb{R}^3$, то ее инвариант Беннекена отрицателен. Это свойство не выполнено для нек-рых трансверсальных кривых в $\mathbb{R}^3$ с нестандартной контактной структурой.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [2] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы, т. 4, М., 1985; [3] Арнольд В. И., «Успехи математич. наук», 1986, т. 41, в. 6, с. 3–18; [4] Bennequin D., «Astérisque», 1983, v. 107–108, p. 87–161.

С. А. Табачников.

КОНТАКТНАЯ ГИПЕРПЛОСКОСТЬ – гиперплоскость *контактной структуры*.

КОНТАКТНАЯ СТРУКТУРА – невырожденное распределение коразмерности 1, то есть распределение в M^{2n+1}, локально заданное такой 1-формой λ, что нигде $\lambda\wedge(d\lambda)^n\neq 0$. Равносильное условие: ранг 2-формы $d\lambda$ в плоскости распределения равен $2n$.

Пример К.с. в $\mathbb{R}^{2n+1}$ (с координатами $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z$) дается 1-формой $\lambda=\sum x_i dy_i + dz$. Локально все К. с. диффеоморфны этой (теорема Дарбу); однако глобально К. с. могут различаться даже в $\mathbb{R}^3$. См. *Контактная геометрия*. *С. А. Табачников.*

КОНТАКТНАЯ ФОРМА – дифференциальная 1-форма, задающая *контактную структуру*. К. ф. λ в M^{2n+1} удовлетворяет условию: $\lambda\wedge(d\lambda)^n\neq 0$ ни в одной точке. Не всякую контактную структуру можно глобально задать К. ф.; кроме того, К. ф. определена с точностью до умножения на не обращающуюся в нуль функцию.

Пример К. ф. в $\mathbb{R}^{2n+1}$ (с координатами $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z$): $\lambda=\sum x_i dy_i + dz$. Локально все К. ф. эквивалентны этой. См. *Контактная геометрия*. *С. А. Табачников.*

КОНТАКТНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ – см. *Контактная геометрия*.

КОНТАКТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ – нечетномерное многообразие, на котором задана *контактная структура*. Примерами служат многообразия контактных элементов произвольного многообразия и многообразия 1-струй функций на произвольном многообразии. См. *Контактная геометрия*. *С. А. Табачников.*

КОНТАКТНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН – функция f на контактном многообразии с контактной формой λ, отвечающая контактному векторному полю v (то есть полю, сохраняющему *контактную структуру*): $f(x)=\lambda_x(v_x)$. Значение К. г. определяется как значение однородного гамильтониана симплектизации поля v на контактном функционале λ_x. Конструкция К. г. устанавливает взаимную однозначность пространств гладких функций и контактных векторных полей. Если $\lambda=dz-xdy$, то контактное поле, отвечающее К. г., задано формулой:

$$v=\left(f-x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+x\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}.$$

С. А. Табачников.

КОНТАКТНЫЙ ДИФФЕОМОРФИЗМ, контактоморфизм,– диффеоморфизм контактных многообразий, сохраняющий *контактную структуру*. Пример семейства К. д. многообразия контактных элементов риманова многообразия – геодезич. поток. Преобразование за время t определяется как параллельный перенос контактного элемента на расстояние t вдоль геодезической, выходящей из точки контакта в ортогональном направлении. Локально все контактные многообразия одной размерности контактоморфны (теорема Дарбу), а глобально – нет. *С. А. Табачников.*

КОНТАКТНЫЙ КОБОРДИЗМ – отношение эквивалентности между *контактными структурами* на многообразиях. Контактные многообразия M_1^{2n+1} и M_2^{2n+1} связаны К. к., если существует многообразие N с распределением ξ коразмерности 1, край к-рого – объединение M_1 и M_2; ξ трансверсально краю и высекает из M_1 и M_2 заданные на них контактные структуры. При этом распределение ξ должно быть максимально неинтегрируемым, то есть если задать его 1-формой λ, то $\lambda\wedge(d\lambda)^n\neq 0$. *С. А. Табачников.*

КОНТАКТНЫЙ РАЗРЫВ – см. *Ударные волны*.

КОНТАКТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ – гиперплоскость в касательном пространстве к многообразию M^n в некоторой точке (которая называется точкой контакта). Множество всех К. э. имеет структуру $(2n-1)$-мерного многообразия – сферизации кокасательного расслоения T^*M (если К. э. ориентированы) или проективизации T^*M (если К. э. неориентированы).

Многообразие К. э. несет *контактную структуру*. Именно, касательный вектор к многообразию К. э. в нек-рой точке ξ принадлежит контактной гиперплоскости, если его проекция в TM принадлежит гиперплоскости ξ. *С. А. Табачников.*

КОНТАКТОМОРФИЗМ – см. *Контактный диффеоморфизм*.

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ – то же, что *функциональный интеграл*, или интеграл по траекториям.

КОНТРАВАРИАНТНОСТЬ – см. *Ковариантность и контравариантность*.

КОНТРАВАРИАНТНЫЙ ВЕКТОР – см. *Тензор*.

КОНТРАВАРИАНТНЫЙ СПИНОР – см. *Спинор*.

КОНТРАВАРИАНТНЫЙ ТЕНЗОР – см. *Тензор*.

КОНТРАВАРИАНТНЫЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ВЕКТОР – см. *Четырехмерный вектор*.

КОНТРЧЛЕНЫ в квантовой теории поля – операторные выражения, обычно с бесконечными численными коэффициентами, которые по форме зависимости от операторных полевых функций и их производных совпадают с отдельными слагаемыми полного *лагранжиана* рассматриваемой квантовополевой модели и вводятся для устранения ультрафиолетовых расходимостей с помощью процедуры перенормировки. Таким образом, К. компенсируют бесконечные слагаемые, содержащие ультрафиолетовые расходимости. В так наз. перенормируемых моделях квантовой теории поля с помощью небольшого числа К. удается скомпенсировать эти расходимости в *радиационных поправках* любого, сколь угодно высокого порядка. Формально введение в лагранжиан подобных бесконечных К. эквивалентно изменению масс частиц и констант связи. Однако возникающие при этом связи между исходными, затравочными, и конечными, перенормированными, массами и зарядами оказываются сингулярными. *Д. В. Ширков.*

КОНФАЙНМЕНТ, удержание, кварков – гипотеза, согласно которой фундаментальные составляющие материи – *кварки* и *глюоны* – удерживаются внутри *адронов* и не наблюдаются в свободном состоянии. В первоначальных вариантах *кварковой модели* отсутствие свободных кварков в эксперименте объяснялось тем, что они имеют большие массы, лежащие выше порога энергий, доступных имевшимся ускорителям. После открытия нового квантового числа – *цвета* кварков (см. [1]) удержание стало ассоциироваться с бесцветностью (нейтральностью по новому квантовому числу) наблюдаемых адронных состояний. Вместе с новыми экспериментальными результатами это привело к представлению о принципиальной невозможности развести кварки на макроскопич. расстояния (см. [2]). В потенциальной модели абсолютный К. кварков соответствует выбору растущего с расстоянием потенциала притяжения, напр. линейного $V(r)=\alpha r$, где r – расстояние между кварками, из феноменологии $\alpha=0{,}2$ ГэВ$^2/\hbar c$.

Неабелева калибровочная теория цвета – *квантовая хромодинамика* – качественно объясняет усиление взаимодействия между цветными объектами на больших расстояниях (режим сильной связи). Надежды на количественное описание этого режима связаны в основном с решеточной формулировкой квантовой хромодинамики, позволяющей проводить вычисления без использования теории возмущений при помощи ЭВМ (см. *Вильсона критерий конфайнмента*). В целом, гипотеза К. кварков еще не получила полного обоснования. В принципе не исключено, что свободные кварки и глюоны могут рождаться в столкновениях частиц сверхвысоких энергий (неполный К. кварков).

При высоких температурах ($T \approx 100$ МэВ $\approx 10^6$ К) и(или) плотностях ($\sim 10^{39}$ нуклон/см^3) в адронной среде происходит деконфайнмент (см. [3]) – фазовый переход в новое состояние материи – кварк-глюонную плазму, к-рая представляет собой газ относительно слабо взаимодействующих между собой кварков и глюонов. По всей видимости, кварк-глюонная плазма существовала на ранних стадиях эволюции Вселенной. В настоящее время ведутся эксперименты по поиску кварк-глюонной плазмы в столкновениях тяжелых ионов.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., ОИЯИ, Д-1968, Дубна, 1965; [2] Боголюбов Н. Н. [и др.], ОИЯИ, Р-2141, Дубна, 1965; [3] Арбузов Б. А., Логунов А. А., «Успехи физич. наук», 1977, т. 123, с. 505–29; [4] Намбу Й., там же, 1978, т. 124, с. 147–69; [5] Polyakov A. M., «Phys. Lett.», 1978, v. 72 B, p. 477–80; [6] Susskind L., «Phys. rev.», 1979, v. D 20, p. 2610–18.

С. Ю. Хлебников.

КОНФИГУРАЦИЙ ПРОСТРАНСТВО – см. *Классический ансамбль.*

КОНФИГУРАЦИОННАЯ СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ – часть свободной энергии классической системы N частиц с гамильтонианом $H = H_0 + \lambda H_1$, где H_0 – свободный гамильтониан, зависящий только от импульсов частиц системы, H_1 – полная потенциальная энергия взаимодействия, λ – безразмерный параметр. К. с. э. F_c выражается через *конфигурационный интеграл* Q соотношением

$$F_c(T, V, N) = -T \ln Q(T, V, N).$$

К. с. э. характеризует отклонение термодинамич. свойств системы с взаимодействием от идеальных ($\lambda = 0$).

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978.

Д. П. Санкович.

КОНФИГУРАЦИОННОЕ МНОГООБРАЗИЕ механической системы – множество всевозможных положений системы. Фазовым пространством может служить (ко)касательное пространство К. м.

М. Э. Казарян.

КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Динамическая система.*

КОНФИГУРАЦИОННЫЙ ИНТЕГРАЛ – часть полной статистической суммы классической системы N взаимодействующих частиц, отвечающая энергии взаимодействия, зависящей только от координат частиц системы. Для системы из N частиц в объеме V с гамильтонианом $H = H_0 + \lambda H_1$, где

$$H_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m}, \quad H_1 = \sum_{j<n} v(|\vec{q}_j - \vec{q}_n|),$$

λ – безразмерный параметр взаимодействия, $v(r)$ – потенциал парного взаимодействия, выражение для статистич. суммы имеет вид $Z_N = Z_N^{\text{ид}} Q_N$, где $Z_N^{\text{ид}}$ – статистич. сумма идеального газа Больцмана, а К. и.

$$Q_N = V^{-N} \int d\vec{q}_j \ldots d\vec{q}_n e^{-\beta\lambda H_1}.$$

Вычисление К. и. является центральной проблемой равновесной статистич. механики классич. систем. В настоящее время для вычисления К. и. используются те или иные схемы теории возмущений (так наз. λ-разложение).

См. также *Статистический интеграл.*

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978.

Д. П. Санкович.

КОНФОРМНАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ асимптотически плоского пространства-времени – граница $\mathscr{I}$, присоединенная к многообразию M асимптотически плоского пространства-времени. Введение конформной метрики $\tilde{g}_{ab} = \Omega^{-2} g_{ab}$, $\Omega = 0$ на $\mathscr{I}$, на полученном расширенном многообразии $M \cup \mathscr{I}$ позволяет перенести бесконечно удаленные точки в конечную область и рассматривать свойства бесконечности как свойства точек конечной границы. Граница $\mathscr{I}$ состоит из двух частей – границы будущего $\mathscr{I}^+$ и границы прошлого $\mathscr{I}^-$, то есть достигается направленными в будущее и прошлое нулевыми геодезическими. Каждая из границ является изотропной гиперповерхностью (градиент Ω – нулевой вектор в метрике $\tilde{g}_{ab}$) и имеет топологию $S^2 \times \mathbb{R}$, то есть К. б. устроена так же, как и изотропная бесконечность пространства Минковского. В асимптотически плоском пространстве-времени в окрестности $\mathscr{I}$ метрика g_{ab} удовлетворяет *Эйнштейна уравнениям* с нулевым или достаточно быстро убывающим тензором энергии-импульса. В соответствии с одной из версий принципа космич. цензуры наблюдатели, находящиеся вблизи $\mathscr{I}^+$ (в асимптотич. областях), не могут зафиксировать наличие *сингулярности пространства-времени.*

Лит.: [1] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [2] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977.

А. Т. Ильичев.

КОНФОРМНАЯ ГРУППА – см. *Конформное отображение.*

КОНФОРМНАЯ ЕМКОСТЬ – см. *Емкость* множества.

КОНФОРМНАЯ КРИВИЗНА – см. *Вейля кривизна.*

КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Вейля кривизна.*

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – взаимно однозначное отображение областей n-мерного евклидова пространства, сохраняющее углы между кривыми. К. о. в каждой точке обладает свойством постоянства растяжений по различным направлениям. При $n \geqslant 3$ любое (гладкое) К. о. является суперпозицией вращения, растяжения, сдвига и специального К. о. «инверсии»:

$$x_i \to \left(x_i - x_i^0\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right)^2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ – нек-рая фиксированная точка n-мерного пространства. Совокупность этих преобразований образует $(n+1)(n+2)/2$-параметрическую конформную группу.

При $n = 2$ множество К. о. разнообразнее. В этом случае двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ удобно реализовать как пространство $\mathbb{C}$ комплексных чисел $z = x + iy$. Добавляя к $\mathbb{C}$ бесконечно удаленную точку, рассматривают также К. о. областей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Отображение области D на область D^* расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ конформно тогда и только тогда, когда оно либо задается нек-рой *аналитической функцией* $f(z)$, определенной и однолистной в D, и такой, что $D^* = f(D)$, либо является суперпозицией описанного преобразования и комплексного сопряжения. В первом случае К. о. сохраняет не только величины углов, но и их знаки; во втором – знаки углов меняются на противоположные. Любые две односвязные области D и D^* в $\overline{\mathbb{C}}$, границы к-рых состоят из более чем одной точки, конформно эквивалентны. При этом для произвольных точек z_0 из D и z_0^* из D^* и произвольного вещественного числа θ существует одна и только одна аналитическая и однолистная в D функция $f(z)$ такая, что

$$f(D) = D^*, f(z_0) = z_0^*, \arg f'(z_0) = \theta$$

(теорема Римана).

К. о. двумерных областей переводит всякое решение уравнения Лапласа снова в решение уравнения Лапласа. Другими словами, если $\psi(u, v)$ – гармонич. функция в области D^*, а функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

конформно отображает область D на D^*, то функция $\psi[u(x, y), v(x, y)]$ есть гармонич. функция в области D. Этим обусловлено применение К. о. в задачах электростатики, гидро- и аэродинамики и др.

Примеры. 1) Дробно-линейное преобразование

$$f(z)=(az+b)/(cz+d),\ ad-bc\neq 0,$$

конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. При этом всякая окружность переходит снова в окружность (считается, что прямая есть окружность бесконечного радиуса, проходящая через бесконечно удаленную точку). Тем самым дробно-линейное преобразование конформно отображает внутренность любого круга на внутренность или внешность нек-рого другого круга. Точки z и z^* называются сопряженными к окружности Г, не являющейся прямой, если они лежат на одном луче, исходящем из центра окружности, и произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса. Если Г – прямая, то точки z и z^* называются сопряженными, если одна из них переходит в другую при отражении относительно Г. Всякое дробно-линейное преобразование переводит точки z и z^*, сопряженные относительно Г, в точки $f(z)$ и $f(z^*)$, сопряженные относительно $f(\Gamma)$. Последнее свойство весьма полезно при выборе конкретных дробно-линейных преобразований.

2) Степенная функция

$$f(z)=z^{\alpha},$$

где α – положительное число, конформно отображает сектор

$$\varphi_1<\arg z<\varphi_2$$

в сектор

$$\alpha\varphi_1<\arg z<\alpha\varphi_2,$$

если

$$-\pi\leqslant\varphi_1<\varphi_2\leqslant\pi \text{ и } \alpha(\varphi_2-\varphi_1)\leqslant 2\pi.$$

При нарушении последнего неравенства функция $f(z)$ перестает быть однолистной в секторе $\varphi_1<\arg z<\varphi_2$.

3) Показательная функция

$$f(z)=e^z$$

конформно отображает полосу $0<\operatorname{Im} z<2\pi$ в единичный круг с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси. При этом прямая $\operatorname{Im} z=\varphi$ переходит в луч $\arg z=\varphi$.

4) Функция Жуковского

$$f(z)=1/2(z+1/z)$$

конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси. При этом окружность $|z|=r$ переходит в эллипс с полуосями $1/2(r+1/r)$ и $1/2(r-1/r)$ и с фокусами в точках ± 1.

5) Формула Кристоффеля–Шварца дает интегральное представление функции $f(z)$, отображающей верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на внутренность многоугольника с вершинами A_k и углами при вершинах $\pi\alpha_k$, $k=1, 2, ..., n$:

$$f(z)=C\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(t-a_k)^{\alpha_k-1}dt+C_1,$$

где C, C_1 – комплексные постоянные, a_k – действительные числа, $a_k=f^{-1}(A_k)$, $(t-a_k)^{d_k-1}$ – однозначные при $\operatorname{Im} t>0$ ветви функций, положительные при $t>a_k$; $z_0<a_1$, и точка $f(z_0)=C_1$ лежит на отрезке A_nA_1. Тройку чисел из a_k можно задавать произвольно, остальные постоянные определяются однозначно. Эта формула справедлива и для многоугольников, у к-рых одна или несколько вершин лежат в бесконечно удаленной точке.

Лит. см. при ст. *Аналитическая функция.* *Б. И. Завьялов.*

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – взаимно однозначное отображение f риманова или псевдориманова многообразия M^n размерности n на себя такое, что индуцированная этим отображением метрика совпадает с исходной с точностью до умножения на скалярную функцию. Если $x=(x^1, ..., x^n)$ – локальная система координат, $g_{ij}(x)$ – метрика в M^n, то f конформно тогда и только тогда, когда

$$g_{ij}(x)=\lambda(x)\,g_{\alpha\beta}(f(x))\partial f^{\alpha}/\partial x^i\partial f^{\beta}/\partial x^j,$$

где $\lambda(x)$ – нек-рая скалярная функция.

Аналогично определяется локальное конформное преобразование – отображение открытой области $U\subset M^n$ в M^n.

При $n=1$ все отображения конформны. При $n=2$ на любом римановом многообразии существуют изотермич. координаты x, y, в к-рых локальные конформные преобразования отвечают голоморфным и антиголоморфным функциям одного комплексного переменного $z=x+iy$, то есть группа бесконечномерна. В размерностях $n\geqslant 3$ группа локальных конформных преобразований связного риманова многообразия всегда конечномерна и ее размерность не превышает $(n+1)(n+2)/2$.

Теорема Лиувилля: произвольное конформное преобразование области евклидова или псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ при $p+q\geqslant 3$ представимо в виде композиции изометрии, дилатации (растяжения $x\to\lambda x$) и инверсии $x\to x/(\vec{x},\vec{x})$, где (x, x) – скалярное произведение.

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1986; [2] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1981.

П. Г. Гриневич.

КОНФОРМНОЙ КРИВИЗНЫ ТЕНЗОР – см. *Вейля тензор.*

КООРДИНАТНАЯ СКОРОСТЬ СВЕТА – см. *Скорость света.*

КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ Шредингера – см. *Шредингера представление.*

КООРДИНАТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ – см. *Скорость света.*

КООРДИНАТНЫЕ ЛИНИИ – см. *Координаты.*

КООРДИНАТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ – см. *Координаты.*

КООРДИНАТЫ вектора – см. *Векторное пространство.*

КООРДИНАТЫ точки – числа, определяющие ее положение на плоскости, поверхности, в пространстве.

Важнейшими системами К. на плоскости являются декартовы (прямоугольные и косоугольные) координаты.

В декартовой системе К. линиями, для к-рых одна из К. остается постоянной (координатными линиями), являются прямые, параллельные осям К.:

$$x=\text{const и } y=\text{const}.$$

Если на плоскости заданы два семейства линий (не обязательно прямых), зависящих каждое от одного параметра:

$$u=\text{const и } v=\text{const},$$

и таких, что через каждую точку плоскости проходит по одной линии каждого семейства, то приходят к понятию криволинейных К.

Криволинейные координаты точки – значения параметров, соответствующих линиям (координатным), проходящим через эту точку. В случае, когда всякие две координатные линии из различных семейств пересекаются под прямым углом, система криволинейных К. называется ортогональной. Криволинейные К. u и v на плоскости обычно задаются уравнениями

$$u=u(x, y),\ v=v(x, y),$$

связывающими их с декартовыми К. x и y. Через *Ламе коэффициенты*

$$l_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2},\quad l_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}$$

в системе ортогональных криволинейных К. определяются элемент длины

$$dl=\sqrt{l_u^2du^2+l_v^2dv^2}$$

и элемент площади

$$dS=l_ul_vdudv.$$

Важнейшими системами криволинейных К. на плоскости являются следующие.

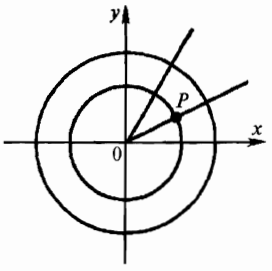


Рис. 1. Координатные линии полярных координат.

Полярные координаты – числа u и v, связанные с прямоугольными К. x и y формулами

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$. Координатные линии (см. рис. 1): концентрич. окружности с центром O ($u = \text{const}$) и лучи, исходящие из O ($v = \text{const}$). Система полярных К.– ортогональная. За исключением точки O, для к-рой $u = 0$, а v не определено (может быть любым числом $0 \leqslant v < 2\pi$), каждой точке плоскости xOy соответствует пара чисел u и v, и обратно. Геометрич. смысл: u – расстояние (полярный радиус) точки P от точки O (полюса), v – угол xOP (полярный угол). Полярный радиус часто обозначается через r, ρ, R, а полярный угол – через φ, ψ, θ.

Коэффициенты Ламе: $l_u = 1$, $l_v = u$.

Элемент длины: $dl = \sqrt{du^2 + u^2 dv^2}$.

Элемент площади: $dS = u\,du\,dv$.

Оператор Лапласа:

$$\Delta\psi = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}.$$

Обобщенные полярные координаты – числа u и v, связанные с прямоугольными К. x и y формулами

$$x = au\cos v,\ y = bu\sin v,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. Координатные линии: эллипсы с центром O и полуосями, пропорциональными a и b ($u = \text{const}$), и лучи, исходящие из O ($v = \text{const}$).

Элемент площади: $dS = ab\,u\,du\,dv$.

Эллиптические координаты – числа u и v, связанные с прямоугольными К. x и y формулами

$$x^2 = \frac{(u+a^2)(v+a^2)}{a^2-b^2},\quad y^2 = \frac{(u+b^2)(v+b^2)}{b^2-a^2},$$

где $-a^2 < v < -b^2 < u < \infty$. Координатные линии (см. рис. 2): софокусные эллипсы ($u = \text{const}$) и гиперболы ($v = \text{const}$) с фокусами $F_1(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ и $F_2(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$. Система эллиптич. К.– ортогональная. Каждой паре чисел u и v соответствуют четыре точки, по одной в каждом квадранте плоскости xOy, симметричные друг другу относительно осей К. При фиксированных К. x и y нек-рой точки уравнение (относительно p):

$$\frac{x^2}{p+a^2} + \frac{y^2}{p+b^2} = 1$$

имеет два действительных корня – эллиптич. К. этой точки. Общепринятые обозначения: λ, μ или ρ, μ.

Коэффициенты Ламе:

$$l_u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u-v}{(u+a^2)(u+b^2)}},\quad l_v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v-u}{(v+a^2)(v+b^2)}}.$$

Вырожденные эллиптические координаты u и v связаны с эллиптич. К. $\bar{u}$ и $\bar{v}$ (при $a = 1$, $b = 0$) формулами

$$\bar{u} = \operatorname{sh}^2 u,\ \bar{v} = -\sin^2 v$$

и с прямоугольными К. x и y – формулами

$$x = \operatorname{ch} u\cos v,\ y = \operatorname{sh} u\sin v,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$. Иногда эти К. также называют эллиптическими.

Коэффициенты Ламе: $l_u = l_v = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v}$.

Элемент длины: $dl = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v}\ \sqrt{du^2 + dv^2}$.

Элемент площади: $dS = (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)\,du\,dv$.

Оператор Лапласа:

$$\Delta\psi = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right).$$

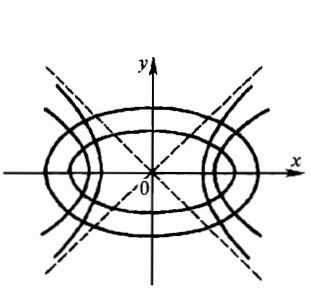


Рис. 2. Координатные линии эллиптических координат.

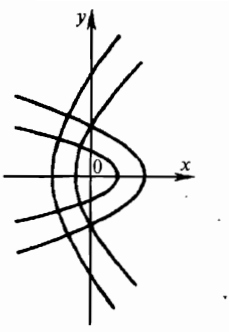


Рис. 3. Координатные линии параболических координат.

Параболические координаты – числа u и v, связанные с прямоугольными К. x и y формулами

$$x = u^2 - v^2,\ y = 2uv,$$

где $-\infty < u < \infty$, $0 \leqslant v < \infty$. Координатные линии (см. рис. 3): две системы взаимно ортогональных парабол с осями, лежащими на оси Ox и противоположно направленными.

Коэффициенты Ламе: $l_u = l_v = 2\sqrt{u^2 + v^2}$.

Элемент длины: $dl = 2\sqrt{u^2 + v^2}\ \sqrt{du^2 + dv^2}$.

Элемент площади: $dS = 4(u^2 + v^2)\,du\,dv$.

Оператор Лапласа:

$$\Delta\psi = \frac{1}{4(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right).$$

Аналогично декартовым К. на плоскости могут быть введены криволинейные координаты на поверхности. Напр., для случая долготы φ и широты θ на сфере координатными линиями $\varphi = \text{const}$ являются меридианы, а линиями $\theta = \text{const}$ – широтные круги. Криволинейные, или, как их иначе называют, гауссовы, К. на поверхности являются основным аппаратом дифференциальной геометрии поверхностей.

Следует иметь в виду, что даже на «гладких» поверхностях криволинейные К., подчиненные требованию непрерывного и взаимно однозначного соответствия между точками P и парами чисел (u, v), могут, вообще говоря, быть введены только «локально» в окрестности произвольно заданной точки P_0. При выходе из области, где определена данная система К. (u, v), приходится переходить к другой системе К. Уже обычные географич. К. на сфере в окрестности полюсов (так как долгота полюса неопределенна) должны быть заменены (при желании сохранить взаимную однозначность и непрерывность соответствия) какой-либо другой системой.

Важнейшими системами К. в пространстве являются декартовы (прямоугольные) координаты. Определение криволинейных К. в пространстве может быть дано аналогично плоскому случаю; надо лишь исходить из трех однопараметрич. семейств координатных поверхностей. Аналогично же определяются ортогональные криволинейные К., коэффициенты Ламе L_u, L_v и L_w и через них элемент длины

$$dl = \sqrt{L_u^2 du^2 + L_v^2 dv^2 + L_w^2 dw^2},$$

элемент площади поверхности

$$d\sigma = \sqrt{(L_u L_v\,du\,dv)^2 + (L_u L_w\,du\,dw)^2 + (L_v L_w\,dv\,dw)^2}$$

и элемент объема

$$dV = L_u L_v L_w\,du\,dv\,dw.$$

Важнейшими системами криволинейных К. в пространстве являются следующие.

Цилиндрические координаты — числа u, v и w, связанные с прямоугольными К. x, y и z формулами

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = w,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $-\infty < w < \infty$. Координатные поверхности (см. рис. 4): соосные с осью Oz круговые цилиндры ($u = \text{const}$); полуплоскости, проходящие через ось Oz ($v = \text{const}$); плоскости, параллельные xOy ($w = \text{const}$). Система цилиндрич. К.— ортогональная. Геометрич. смысл: u и v — полярные К. проекции точки на плоскость xOy, w — ее аппликата. Цилиндрич. К. часто обозначают r, φ, z или ρ, φ, z, или ρ, θ, z.

Коэффициенты Ламе: $L_u = L_w = 1$, $L_v = u$.

Элемент длины: $dl = \sqrt{du^2 + u^2 dv^2 + dw^2}$.

Элемент площади поверхности:

$$d\sigma = \sqrt{u^2 (du\,dv)^2 + (du\,dw)^2 + u^2 (dv\,dw)^2}.$$

Элемент объема: $dV = u\,du\,dv\,dw$.

Оператор Лапласа:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}.$$

Обобщенные цилиндрические координаты — числа u, v и w, связанные с прямоугольными К. x, y и z формулами

$$x = au\cos v,\ y = bu\sin v,\ z = cw,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $-\infty < w < \infty$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq b$. Координатные поверхности: соосные с осью Oz эллиптич. цилиндры; полуплоскости, проходящие через Oz; плоскости, параллельные xOy.

Элемент объема: $dV = abc\,u\,du\,dv\,dw$.

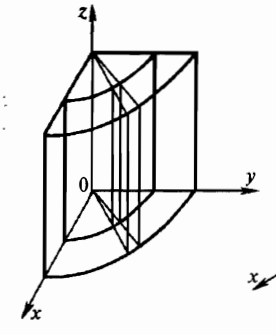


Рис. 4. Координатные поверхности цилиндрических координат.

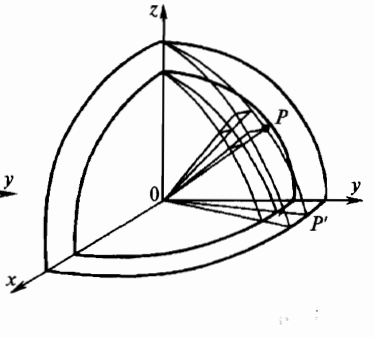


Рис. 5. Координатные поверхности сферических координат.

Сферические координаты (полярные К. в пространстве) — числа u, v и w, связанные с прямоугольными К. x, y и z формулами

$$x = u\cos v\sin w,\quad y = u\sin v\sin w,\quad z = u\cos w,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $0 \leqslant w \leqslant \pi$. Координатные поверхности (см. рис. 5): концентрич. с центром O сферы ($u = \text{const}$); полуплоскости, проходящие через ось Oz ($v = \text{const}$); круговые конусы с вершиной O и осью Oz ($w = \text{const}$). Система сферич. К.— ортогональная. Геометрич. смысл: u — расстояние точки P от O (сферический полярный радиус), v — угол xOP' (долгота), w — угол zOP (угол $\pi/2 - w$ называется широтой). Сферич. К. часто обозначают ρ, φ, θ или r, φ, θ.

Коэффициенты Ламе: $L_u = 1$, $L_v = u\sin w$, $L_w = u$.

Элемент длины: $dl = \sqrt{du^2 + u^2\sin^2 w\,dv^2 + u^2 dw^2}$.

Элемент площади поверхности:

$$d\sigma = \sqrt{u^2\sin^2 w\,(du\,dv)^2 + u^2 (du\,dw)^2 + u^4\sin^2 w\,(dv\,dw)^2}.$$

Элемент объема: $dV = u^2\sin w\,du\,dv\,dw$.

Оператор Лапласа:

$$\Delta\psi = \frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{1}{u^2\sin^2 w}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \frac{1}{u^2\sin w}\frac{\partial}{\partial w}\left(\sin w\frac{\partial\psi}{\partial w}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{2}{u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{u^2\sin^2 w}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2} + \frac{\operatorname{ctg} w}{u^2}\frac{\partial\psi}{\partial w}.$$

Эллипсоидальные координаты (эллиптич. К. в пространстве) — числа u, v и w, связанные с прямоугольными К. x, y и z формулами

$$x^2 = \frac{(u+a^2)(v+a^2)(w+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y^2 = \frac{(u+b^2)(v+b^2)(w+b^2)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(u+c^2)(v+c^2)(w+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$

где $-a^2 < w < -b^2 < v < -c^2 < u < \infty$. Координатные поверхности (см. рис. 6): эллипсоиды ($u = \text{const}$), однополостные гиперболоиды ($v = \text{const}$) и двуполостные гиперболоиды ($w = \text{const}$) с центрами в начале К., для к-рых плоскости К. в системе $Oxyz$ являются плоскостями симметрии, причем их сечения этими плоскостями имеют общие фокусы. Система эллипсоидальных К.— ортогональная. Каждой тройке чисел u, v и w соответствуют 8 точек $P(x, y, z)$, по одной в каждом октанте, симметричных друг другу относительно плоскостей К. При фиксированных прямоугольных К. x, y и z уравнение (относительно p)

$$\frac{x^2}{p+a^2} + \frac{y^2}{p+b^2} + \frac{z^2}{p+c^2} = 1$$

имеет три действительных корня — эллипсоидальные К. этой точки. Общепринятые обозначения: λ, μ, ν или ρ, μ, ν.

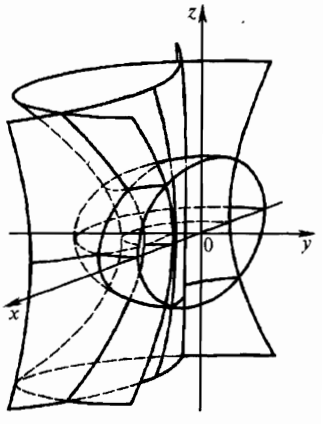


Рис. 6. Координатные поверхности эллипсоидальных координат.

Коэффициенты Ламе:

$$L_u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(u-v)(u-w)}{(u+a^2)(u+b^2)(u+c^2)}},$$

$$L_v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(u-v)(w-v)}{(v+a^2)(v+b^2)(v+c^2)}},$$

$$L_w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(u-w)(v-w)}{(w+a^2)(w+b^2)(w+c^2)}}.$$

Если в условиях $a^2 > b^2 > c^2 \geqslant 0$ при определении эллипсоидальных К. допускать и равенства, то можно получить вырожденные системы таких К.

Вполне аналогично случаям $n = 2$ (плоскость, поверхность) и $n = 3$ (трехмерное пространство) употребление К. для определения положения точки в n-мерном пространстве. Необходимое для определения положения точки в n-мерном пространстве число К. равно числу измерений n, но иногда употребляются «избыточные» К. в числе $m > n$. Напр., в качестве К. прямых в четырехмерном многообразии прямых обычного четырехмерного пространства можно употреблять шестерки (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) коэффициентов параметрич. представления прямой: $x = a_1 t + b_1$, $y = a_2 t + b_2$, $z = a_3 t + b_3$.

В. И. Битюцков.

КООРДИНАЦИОННОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ – см. *Дальний и ближний порядок.*

КОПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – *представление* группы Ли G, контрагредиентное к присоединенному представлению ad этой группы.

Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{G} = T_e G$ – ее алгебра Ли. Группа Ли G действует на себя сопряжением. Дифференциал этого действия в единице $e \in G$ определяет присоединенное действие ad: $G \to GL(\mathfrak{G})$ группы G на ее алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Сопряженное действие ad^*: $G \to GL(\mathfrak{G}^*)$ и называется коприсоединенным представлением. Соответствующее К. п. алгебры Ли ad^*: $\mathfrak{G} \to \mathrm{End}(\mathfrak{G}^*)$ в явном виде задается формулой

$$\mathrm{ad}^*_x \xi = \xi([\cdot, x]), \; x \in \mathfrak{G}, \; \xi \in \mathfrak{G}^*.$$

Коалгебра Ли $\mathfrak{G}^*$ имеет естественную пуассонову структуру, инвариантную относительно действия группы G: скобка Ли на элементах $\mathfrak{G}$ – линейных функциях на $\mathfrak{G}^*$ по правилу Лейбница продолжается до скобки Пуассона на всех функциях на $\mathfrak{G}^*$. Симплектич. слои этой пуассоновой структуры суть орбиты коприсоединенного действия. Соответствующая симплектич. структура на орбитах задается *Ли–Березина–Костанта–Кириллова формой.* *М. Э. Казарян.*

КОРАБЕЛЬНЫЕ УГЛЫ – см. *Ориентации углы.*

КОРАЗМЕРНОСТЬ векторного пространства – см. *Векторное пространство.*

КОРАЗМЕРНОСТЬ m-мерного подмногообразия Y^m в n-мерном многообразии X^n – разность $n - m$.

КОРАЗМЕРНОСТЬ слоения – см. *Слоение.*

КОРИОЛИСА СИЛА – одна из сил инерции; вводится для учета влияния вращения подвижной системы отсчета на относительное движение материальной точки; названа по имени Г. Кориолиса (G. Coriolis). К. с. равна произведению массы точки на ее *Кориолиса ускорение* и направлена противоположно этому ускорению. Эффект, учитываемый К. с., состоит в том, что во вращающейся системе отсчета материальная точка, движущаяся непараллельно оси этого вращения, отклоняется по направлению, перпендикулярному к ее относительной скорости, или оказывает давление на тело, препятствующее такому отклонению. На Земле этот эффект, обусловленный ее суточным вращением, заключается в том, что свободно падающие тела отклоняются от вертикали к востоку (в первом приближении), а тела, движущиеся вдоль земной поверхности, отклоняются в Северном полушарии вправо, а в Южном – влево от направления их движения. Вследствие медленного вращения Земли эти отклонения весьма малы и заметно сказываются или при очень больших скоростях движения (напр., у ракет и у артиллерийских снарядов с большими дальностями полета), или когда движение длится очень долго, напр. подмыв соответствующих берегов рек (так наз. закон Бэра), возникновение нек-рых воздушных и морских течений и др. В технике К. с. учитывается в теории гироскопов, турбин и многих других вращающихся систем. *С. М. Тарг.*

КОРИОЛИСА УСКОРЕНИЕ, поворотное ускорение, – составляющая полного ускорения точки, которая появляется при так наз. сложном движении, когда переносное движение, то есть движение подвижной системы отсчета, не является поступательным. К. у. возникает вследствие изменения относительной скорости точки $\boldsymbol{v}_{\text{от}}$ при переносном движении и переносной скорости при относительном движении точки. Численно К. у. равно:

$$w_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} v_{\text{от}} \sin\alpha;$$

как вектор К. у. определяется формулой

$$\boldsymbol{w}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} \boldsymbol{v}_{\text{от}}],$$

где $\omega_{\text{пер}}$ – угловая скорость поворота подвижной системы отсчета относительно неподвижной, α – угол между $\boldsymbol{v}_{\text{от}}$ и $\omega_{\text{пер}}$. Направление К. у. можно получить, спроектировав вектор $\boldsymbol{v}_{\text{от}}$ на плоскость, перпендикулярную к $\omega_{\text{пер}}$, и повернув эту проекцию на 90° в сторону переносного вращения. Таким образом, К. у. – это часть ускорения точки по отношению к основной, а не к подвижной системе отсчета. Напр., при движении вдоль поверхности Земли вследствие ее вращения точка будет иметь К. у. по отношению к звездам, а не к Земле. К. у. равно нулю при поступательном переносном движении ($\omega_{\text{пер}} = 0$) или когда $\alpha = 0$. *С. М. Тарг.*

КОРНЕВОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО – см. *Вес.*

КОРОТКИЕ ВОЛНЫ в анизотропных средах – волны с длиной волны $\lambda \ll L$, где L – масштаб неоднородности анизотропной среды. В физике наиболее часто встречаются упругие, диэлектрические и магнитоактивные плазменные анизотропные среды. Если $c_{ikjl}(M)$ – тензор упругих постоянных, $\varepsilon_{ik}(M)$ – тензор диэлектрич. проницаемости, $M(x_1, x_2, x_3)$ – точка пространства, то обычно полагают

$$L = \min_{i,k,j,l} \left(c_{ikjl} |\mathrm{grad}\, c_{ikjl}|^{-1} \right); \quad L = \min_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} |\mathrm{grad}\, \varepsilon_{ik}|^{-1} \right).$$

К. в. в анизотропных средах локально в окрестности каждой фиксированной точки M представляют собою плоские волны и могут быть представлены разложениями по обратным степеням частоты ω:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}(M, \omega) \exp[i\omega(\tau(M) - t)], \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{A}(M, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(n)}(M)(-i\omega)^{-n}, \quad \boldsymbol{A}^{(0)} \neq 0.$$

Здесь $\boldsymbol{U}$ – вектор смещений частиц анизотропной среды или шестимерный вектор $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ напряженности электромагнитного поля, t – время, $\tau(M)$ – эйконал и $\boldsymbol{A}^{(n)}(M)$ – коэффициент разложения амплитуды $\boldsymbol{A}(M, \omega)$. В должным образом введенных безразмерных переменных разложение (1) – разложение по малому безразмерному параметру $\varkappa = (\lambda/L)_0$, где $(\lambda/L)_0$ – значение отношения λ/L в нек-рой фиксированной точке M_0.

Подстановка $\boldsymbol{U}$ в однородные уравнения движения анизотропной среды и приравнивание нулю коэффициентов при различных степенях $1/(-i\omega)$ дает для составляющих $\boldsymbol{A}^{(0)}$ однородную и для $\boldsymbol{A}^{(n)}$, $n \geqslant 1$, неоднородную рекуррентную систему уравнений. Однородная система для $\boldsymbol{A}^{(0)}$ имеет отличные от нуля решения, если ее определитель равен нулю. Напр., в случае упругой анизотропной среды $\det(C_{ij} - \delta_{ij}) = 0$, где $C_{ij} = \rho^{-1} c_{ikjl} \tau_l \tau_k$, $\tau_l = \partial\tau/\partial x_l$, ρ – плотность. Матрица C_{ij} является положительно определенной, ее собственные числа $\lambda_r(\tau_l) > 0$, $r = 1, 2, 3$, – однородные второй степени функции τ_l – при любых τ_l удовлетворяют неравенствам $\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3$. Определитель будет равен нулю, только если $\lambda_r(\tau_l) = 1$ при каком-либо r. Уравнение $\lambda_r(\tau_l) = 1$ – уравнение эйконала для функции $\tau(M)$. В неоднородной анизотропной среде могут распространяться три типа коротких волн: квазипродольная волна ($r = 1$) и две квазипоперечные ($r = 2, 3$). Фронт волны типа r распространяется с фазовой скоростью

$$\boldsymbol{v}_r^{\Phi} = \omega \sqrt{\lambda_r(n_l)}\, \boldsymbol{n}$$

в направлении нормали к фронту

$$\boldsymbol{n} = \mathrm{grad}\,\tau / |\mathrm{grad}\,\tau|.$$

Лучами в анизотропных средах называются векторные линии поля векторов групповой скорости

$$\boldsymbol{v}_r^{\text{гр}} = \partial v_r^{\Phi} / \partial \boldsymbol{n}.$$

Энергия волны в нулевом (геометро-оптическом) приближении распространяется по лучевым трубкам с групповой скоростью. В анизотропных средах в отличие от изотропных лучи неортогональны волновым фронтам.

Коэффициент $A^{(0)} = A_r^{(0)}$ в разложении (1) – вектор поляризации волны типа r – скалярным множителем $a_r^{(0)}$ отличается от нормированного собственного вектора $\boldsymbol{b}_r$ матрицы C_{ij}. Множитель $a_r^{(0)}$ находится из условия разрешимости неоднородной системы для $A_r^{(1)}$ и в лучевых координатах τ, α, β (α, β задают луч, проходящий через точку M, τ определяет ее положение на луче) равен $a_r^{(0)} = f(\alpha, \beta)/\sqrt{\rho J}$, где

$$J = \left| \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(\tau, \alpha, \beta)} \right|$$

– якобиан перехода от декартовых координат к лучевым, $f(\alpha, \beta)$ – функция, постоянная на луче и определяемая видом источника. Векторы $A_r^{(n)}$, $n \geqslant 1$, имеют примесные компоненты – отличные от нуля составляющие на собственные векторы $\boldsymbol{b}_q$, $q \neq r$.

Аналогично находятся коэффициенты разложений (1) в анизотропных, электромагнитных и других средах.

Лит.: [1] Петрашень Г. И., Распространение волн в анизотропных упругих средах, Л., 1980; [2] Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И., Геометрическая оптика неоднородных сред, М., 1980.

В. С. Булдырев.

КОРОТКИЕ ВОЛНЫ в быстроменяющихся средах – волны, описывающиеся уравнениями с коэффициентами, меняющимися значительно на расстояниях, сравнимых с длинами волн. В линейной теории для моделирования такой ситуации часто используются уравнения вида (в безразмерных координатах $x \in \mathbb{R}^n$):

$$L\left(\frac{\Phi(x)}{h^\alpha}, x, -ih\nabla_x, x\right)u = 0. \qquad (1)$$

Здесь h – малый параметр, $\Phi(x)$ может быть как скалярной, так и векторной функцией (напр., $\Phi = x$), $L(y, p, x, h)$ – гладкая функция всех своих аргументов (L – многочлен от p, если (1) – дифференциальное уравнение); по переменным $y = (y_1, \ldots, y_l)$, как правило, предполагается: а) 2π-периодичность по каждому y_j, или б) быстрое убывание; $\alpha > 0$ – параметр. Если $\alpha < 1$, то строятся асимптотические при $h \to 0$ решения и в главном члене по существу определяются из «осредненного» уравнения

$$\tilde{L}(x, -ih\nabla_x, h)u = 0,$$

$$\tilde{L}(x, p, h) = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} L(y, x, p, h)\, dy^l.$$

При $1 \leqslant \alpha < 0$ уравнение (1) подстановкой

$$u = v\left(\frac{\Phi}{h}, x, h\right),$$

$v(y, x, h)$ – 2π-периодичными по $y_1, \ldots, y_l$, редуцируется (см. [3], [5]) к уравнению с операторнозначным символом

$$L(y, x, -ih\nabla_x - ih^{1-\alpha}\nabla_x\Phi\cdot\nabla_y, h)v = 0, \qquad (2)$$

для решения к-рого применяется адиабатич. приближение. При этом если $1 < \alpha < 0$, то термы в адиабатич. приближении можно находить также с помощью асимптотич. методов (см. [6]). В спектральных задачах наличие быстрых осцилляций в коэффициентах вносит вклад в условия квантования в виде поправки, определяемой нек-рой дифференциальной формой (см. [4]). Имеющиеся результаты (см. [2]–[4], [6]) в основном относятся к однофазовому ($l = 1$) случаю, поскольку при $l \geqslant 2$ становится нетривиальной задача исследования спектра соответствующего операторнозначного символа и он может быть устроен весьма сложным образом. Напр., каждый терм может быть точкой накопления (см. [5]).

В случае б) у соответствующего уравнению (2) операторнозначного символа может появиться существенно непрерывная компонента и в усреднении на непрерывном спектре роль термов играют границы непрерывной компоненты.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., Осреднение процессов в периодических средах, М., 1984; [2] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G., Asymptotic analysis for periodic, Amst., 1978; [3] Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1983, т. 38, в. 6, с. 3–36; [4] Буслаев В. С., там же, 1987, т. 42, в. 6, с. 77–98; [5] Пятницкий А. Л., «Математич. сб.», 1981, т. 115, № 3, с. 478–92; [6] Доброхотов С. Ю., «Математич. заметки», 1988, т. 44, № 3, с. 319–40; [7] Берлянд Л. В., Доброхотов С. Ю., «Доклады АН СССР», 1987, т. 296, № 1, с. 80–84.

С. Ю. Доброхотов.

КОРОТКИЕ ВОЛНЫ в плавноменяющихся средах – волны в средах, параметры которых мало меняются на расстояниях порядка длины волны. В таких средах волновое поле локально устроено так же, как и для плоской среды, и в наиболее часто встречающемся случае имеет вид локально плоской волны

$$u = A \exp i(-\omega t + \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}),$$

где амплитуда A, частота ω и волновой вектор $\boldsymbol{k}$ – медленно меняющиеся функции. Обозначение через p большого параметра задачи – отношения характерного масштаба неоднородности среды к характерной длине волны, приводит к формализму лучевого метода, то есть к выражению для поля в форме:

$$u = \left(A_0 + \frac{i}{p}A_1 + \left(\frac{i}{p}\right)^2 A_2 + \ldots\right) \exp ip\,\Sigma(t, \boldsymbol{r}).$$

В случае стационарных сред и гармонич. зависимости поля от t, коэффициенты A_n не зависят от t, а $\Sigma = -\omega t + S(\boldsymbol{r})$, где $\omega = \text{const}$. Для этого случая подстановка выражения для u в волновой оператор и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых степенях p дает для S уравнение с частными производными первого порядка (уравнение эйконала), а для A_n – систему рекуррентных линейных уравнений первого порядка вдоль лучей – характеристик уравнения эйконала. В частности, A_0 изменяется в соответствии с обычными законами геометрич. оптики, то есть обратно пропорционально корню квадратному из ширины лучевой трубки.

Лучевой метод непригоден вблизи огибающей лучей (каустики), а также вблизи линий и точек их фокусировки, где коэффициенты A_0, A_1, ... обращаются в бесконечность. В окрестности простой каустики поле выражается через функцию Эйри и ее производную (см. [1]):

$$u = e^{ipq}[Mp^{1/6}v(-p^{2/3}\sigma) + Np^{-1/6}v'(-p^{2/3}\sigma)], \qquad (*)$$

где функции $q(\boldsymbol{r})$, $\sigma(\boldsymbol{r})$ и коэффициенты асимптотич. рядов

$$M = \sum\left(\frac{i}{p}\right)^n M_n, \quad N = \sum\left(\frac{i}{p}\right)^n N_n$$

регулярны вблизи C. Эти функции определяются из условия, что при замене функций v, v' на их асимптотич. разложения при $|p| \to \infty$ выражение (*) переходит в сумму

$$u = u_+ + u_- = \sum A_n^+\left(\frac{i}{p}\right)^n e^{ikS_+} + \sum A_n^-\left(\frac{i}{p}\right)^n e^{ikS_-},$$

где u_+ соответствует прошедшему через точку наблюдения лучу, коснувшемуся каустики, а u_- – лучу, еще не прошедшему через каустику.

При помощи метода канонич. оператора Маслова для полей в областях сложных фокусировок выписываются интегральные представления.

Особый случай составляет распространение волн в широких плавно нерегулярных волноводах, для к-рых $kH \gg 1$, $\varepsilon = H/L \ll 1$ (k – волновое число, H, L – характерные ширина и масштаб продольной неоднородности волновода). Поле в регулярных волноводах – суперпозиция нормальных волн (мод), каждая из к-рых строится разделением переменных. В плавно нерегулярном волноводе при $kH\varepsilon \ll 1$ поле является суммой «адиабатических мод» с профилем в каждом поперечном сечении в виде собствен-

ной функции волновода сравнения (регулярного волновода с тем же поперечным сечением) и медленно меняющимися амплитудой и фазовой скоростью. При $kH\varepsilon^N \gg 1$, но $kH\varepsilon^{N+1} \ll 1$ ($N>1$ – целое число), каждая из адиабатич. мод приобретает дополнительные зависящие как от продольной, так и от поперечной координаты быстро осциллирующие множители (см. [2], [3]). Этот формализм переносится на трехмерные волноведущие слои (см.[4]). Для описания мод в плавно нерегулярных волноводах развивается лучевой подход (см. [3], [5]).

В случае плавного перехода между двумя регулярными волноводами падающая на переход мода возбуждает целый спектр уходящих мод. Для падающей моды с большим номером n число эффективно возбуждаемых уходящих мод имеет порядок $kHf\left(\varepsilon, \frac{n}{kH}\right)$, где f зависит от формы перехода и быстро (для аналитич. переходов – экспоненциально) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Оценки для функции f и амплитуд возбуждаемых мод найдены, хотя и не доказаны строго (см. [6]). Аналогичные результаты получены для падающих мод с малыми номерами (см. [7]).

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Попов А. В., «Радиотехника и электроника», 1977, т. 22, № 8, с. 1577–82; [3] его же, «Доклады АН СССР», 1976, т. 230, № 6, с. 1322–25; [4] Borovikov V. A., Popov A. V., «Wave Motion», 1984, v. 6, p. 525–46; [5] Кинбер Б. Е., Мальцев Н. Е., Токатлы В. И., «Радиотехника и электроника», 1970, т. 15, № 12, с. 2512–21; [6] Боровиков В. А., там же, 1978, т. 23, № 7, с. 1365–76; [7] Мейерова Р. С., Попов А. В., Хозиоский С. А., там же, 1985, т. 30, № 11, с. 2106–13. *В. А. Боровиков.*

КОРОТКИЕ ВОЛНЫ в резонаторах и волноводах. Коротковолновые колебания в резонаторах нетрудно изучать в том случае, когда соответствующую задачу о собственных функциях можно решить явно разделением переменных. Если это не имеет место, то только для немногих типов колебаний удается аналитически описать волновое поле. По-видимому, колебания, сосредоточенные в окрестности оси резонатора,– наиболее важный случай, когда такое описание возможно. Под осью резонатора понимается луч AB, перпендикулярный как в начале A, так и в конце B поверхности резонатора. Колебание, сосредоточенное вблизи AB, удается построить, используя методику дифракционного пограничного слоя. Соответствующее уравнение пограничного слоя является уравнением Шредингера с квадратичным потенциалом. Оно допускает явное решение. Волновой процесс может описываться уравнениями Максвелла, волновыми уравнениями. Для того чтобы построения были осуществимы, ось резонатора должна быть устойчива: луч, близкий к AB, после ряда последовательных отражений от внутренней поверхности резонатора достаточно долго не покидает окрестности AB. Построения обобщаются на тот случай, когда луч AB заменен на луч, к-рый, отразившись конечное число раз от внутренней поверхности резонатора, переходит в себя.

Построение высокочастотных волновых полей в резонаторах оказалось связанным с так наз. биллиардной задачей и соответствующими инвариантными торами.

Расчет регулярных волноводов сводится к нахождению собственных чисел и функций для его поперечного сечения. Эта задача по существу совпадает с задачей нахождения волновых полей в плоском резонаторе.

Качественно новые проблемы возникают в том случае, когда параметры волновода плавно меняются вдоль его оси. Здесь, в частности, удается построить своеобразный аналог геометро-оптич. разложения для колебания слабо осциллирующего в поперечном сечении волнового поля, если на расстояниях порядка длины волны свойства волновода вдоль его оси мало меняются.

Если волновод плоский и регулярный, то колебания в нем суть наложение двух волн Бриллюэна. В случае слабо нерегулярного волновода их и можно заменить асимптотич. разложениями, аналогичными *геометро-оптическим приближениям.*

На участках нерегулярности волновода один тип колебаний может переходить в другой. Расчет такой трансформации удается провести численно, а иногда с помощью не обоснованного строго метода поперечных сечений.

Для того чтобы возбудить все типы колебаний в волноводе, достаточно поместить там точечный источник колебаний. Здесь возникает ряд проблем. Напр., нахождение соответствующих коэффициентов возбуждения; вывод формул, описывающих наложение большой серии колебаний с близкими свойствами. Эти проблемы в высокочастотном приближении иногда удается разрешить.

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Вайнштейн Л. А., Открытые резонаторы и открытые волноводы, М., 1966; [3] Лазуткин В. Ф., Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа, Л., 1981; [4] Прямые и обратные задачи теории дифракции, М., 1979; [5] Покровский В. Л., Уланич Ф. Р., Саввиных С. К., «Радиотехника и электроника», 1959, т. 4, в. 2, с. 161–71. *В. М. Бабич.*

КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – см. *Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна метод.*

КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИКИ – асимптотические формулы для осциллирующих интегралов при $\tau \to +\infty$. Напр., для интеграла Френеля $I(\tau)$ с фазой f, имеющей критич. точку в 0:

$$I(\tau) = \varphi(0)(2\pi/\tau)^{n/2} \exp\left(i\tau f(0) + (i\pi/4)(\operatorname{sign} f''_{xx}(0))\right) \times$$
$$\times \left|\det f''_{xx}(0)\right|^{-1/2} + O(\tau^{-n/2-1})$$

при $\tau \to +\infty$. Здесь $\operatorname{sign} f''_{xx}(0)$ – сигнатура матрицы вторых частных производных f в 0; $\det f''_{xx}(0)$ – ее определитель; носитель φ компактен и не содержит других критич. точек f. *С. В. Чмутов.*

КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ – функция $v(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющая при $|x| > R$ (R – некоторое число) оценке

$$|v(x)| \leqslant \text{const}\,(1+|x|)^{-1-\varepsilon},\ \varepsilon > 0.$$

Для оператора Шредингера с К. п.

$$H = -\Delta_x + v(x)$$

существуют волновые операторы

$$W_{\pm} = \operatorname{s.lim}_{t \to \mp\infty} \exp\{itH\}\exp\{-itH_0\}, \quad H_0 = -\Delta_x,$$

определяющие решения задачи рассеяния. Ядра этих операторов после преобразования Фурье выражаются через *Т-матрицу* формулой

$$W_{\pm}(k,k') = \delta(k-k') - \frac{T(k,k',k'^2 \pm i\cdot 0)}{k^2 - k'^2 \mp i\cdot 0}. \qquad (1)$$

Скорость убывания К. п. определяет свойства гладкости ядра $T(k, k', z)$ в представлении (1). При $\varepsilon > 2$ ядро $T(k, k', z)$ является гладкой функцией переменных k и k', при $0 < \varepsilon < 2$ функция $T(k, k', z)$ приобретает ряд сингулярностей по переменным k и k' в областях, где $k/|k| = k'/|k'|$.

Лит.: [1] Повзнер А. Я., «Математич. сб.», 1953, т. 32, с. 109–56; [2] Буслаев В. С., Скриганов М., «Теоретич. и математич. физика», 1974, т. 19, с. 217–32; [3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 3, Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1982. *С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.*

КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ – важнейшее универсальное свойство природы, заключающееся в том, что всем микрообъектам присущи одновременно и корпускулярные и волновые характеристики. Так, напр., электрон, нейтрон, фотон в одних условиях проявляются как частицы, движущиеся по классич. траекториям и обладающие определенными энергией и импульсом, а в других – обнаруживают свою волновую природу, характерную для явлений интерференции и дифракции частиц. В каче-

ство первичного принципа К.-в. д. лежит в основе квантовой механики и квантовой теории поля.

Впервые К.-в. д. был установлен для света. Выполненные к концу 19 в. опыты по интерференции, дифракции и поляризации света, казалось, однозначно свидетельствовали о его волновой природе и подтверждали теорию Максвелла, установившую, что свет представляет собой электромагнитные волны. Вместе с тем М. Планк (M. Planck) в 1900 показал, что для объяснения закона равновесного теплового излучения необходимо принять гипотезу о дискретном характере излучения, полагая, что энергия излучения кратна нек-рой величине ε, названной им квантом энергии: $\varepsilon = h\nu$, где ν – частота волны, а h – постоянная, имеющая размерность *действия* и названная позже *Планка постоянной*. Впоследствии выяснилось, что более удобной является величина $\hbar = h/2\pi \approx 1{,}05\cdot 10^{-27}$ эрг·с, тогда $\varepsilon = \hbar\omega$, где $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота волны. Поскольку предположение о дискретном характере излучения противоречило волновой теории света, согласно к-рой энергия световой волны может принимать любые (непрерывные) значения, пропорциональные квадрату амплитуды электромагнитных колебаний, М. Планк сначала связывал дискретность энергии излучения со свойствами излучателей (атомов). Однако в 1905 А. Эйнштейн (A. Einstein), исходя из экспериментально установленного закона излучения Вина (к-рый является предельным случаем *Планка закона излучения*, справедливым при больших частотах: $\hbar\omega \gg kT$, где T – абсолютная температура), показал, что энтропия излучения в области справедливости закона Вина совпадает с энтропией газа, состоящего из частиц с энергией $\varepsilon = \hbar\omega$. Так возникло представление о частицах света – фотонах, несущих квант энергии $\varepsilon = \hbar\omega$ и движущихся со скоростью света. В дальнейшем, исходя из релятивистской кинематики, фотонам был приписан импульс $\boldsymbol{p} = (\hbar\omega/c)\boldsymbol{n} = \hbar\boldsymbol{k}$ [где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор вдоль направления движения фотона, $\boldsymbol{k} = (\omega/c)\boldsymbol{n} = (2\pi/\lambda)\boldsymbol{n}$ – волновой вектор]. Представление о фотонах было успешно использовано для объяснения законов фотоэффекта и спектров тормозного рентгеновского излучения; оно получило окончательное подтверждение после открытия эффекта Комптона (1922). Таким образом, было установлено, что электромагнитное излучение, наряду с волновыми, обладает корпускулярными свойствами. В наиболее отчетливой форме значение существования К.-в. д. для излучения было выявлено в 1909 А. Эйнштейном, показавшим, что закон излучения Планка приводит к формуле для флуктуации энергии излучения, содержащей два члена, один из к-рых отвечает флуктуации энергии для совокупности классич. световых волн, а второй – флуктуации энергии газа, состоящего из независимых частиц.

Для установления всеобщего характера К.-в. д. решающее значение имело изучение законов движения электронов в атоме. В 1913 Н. Бор (N. Bohr) использовал постоянную Планка для определения стационарных состояний в атоме водорода. При этом ему удалось объяснить наблюдаемые на опыте спектральные закономерности и выразить через заряд электрона, его массу и постоянную Планка радиус атома и постоянную Ридберга, оказавшиеся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Способ нахождения стационарных состояний электронов в атомах был усовершенствован А. Зоммерфельдом (A. Sommerfeld), показавшим, что для стационарных орбит классич. действие является целым кратным $2\pi\hbar$. Успех теории Бора, привлекшего для объяснения атомных явлений квантовые представления и постоянную Планка, к-рая до этого, казалось, связывала лишь корпускулярные и волновые характеристики электромагнитного излучения, навел на мысль о существовании К.-в. д. и для электронов. В связи с этим Л. де Бройль (L. de Broglie) в 1924 высказал гипотезу о всеобщем характере К.-в. д. Согласно гипотезе де Бройля, любой движущейся частице с энергией ε и импульсом $\boldsymbol{p}$ соответствует волна с $\omega = \varepsilon/\hbar$ и волновым вектором $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}/\hbar$, так же как с любой волной связаны частицы, обладающие энергией $\varepsilon = \hbar\omega$ и импульсом $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$. Л. де Бройль отметил релятивистскую инвариантность приведенного соотношения, связывающего четырехмерный вектор энергии – импульса частицы $(\varepsilon/c, \boldsymbol{p})$ с четырехмерным волновым вектором $(\omega/c, \boldsymbol{k})$, и высказал предположение о том, что волновая механика частиц должна находиться в таком же соотношении с классич. механикой, как волновая оптика с геометрич. оптикой. Это предположение послужило исходным пунктом построения квантовой механики в форме Шредингера (см. *Шредингера представление*). Прямое доказательство существования волновых свойств электронов было получено впервые в 1927 К. Дэвиссоном (C. Davisson) и Л. Джермером (L. Germer), наблюдавшими интерференционные максимумы при отражении электронов от монокристаллов никеля. Позднее были обнаружены интерференционные эффекты для атомных пучков гелия, молекул водорода, нейтронов и других частиц, то есть получено экспериментальное подтверждение универсальности К.-в. д.

В терминах наглядных представлений о классич. частицах (как материальных точках, движущихся по определенным траекториям) и классич. волнах (как распространяющихся в пространстве колебаний каких-либо физич. величин) К.-в. д. кажется логически внутренне противоречивым, так как для объяснения различных явлений, происходящих с одним и тем же микрообъектом (напр., электроном), приходится использовать гипотезы как об его корпускулярной, так и волновой природе. Разрешение этого логич. противоречия, послужившее созданию физич. основ квантовой механики и квантовой теории поля, было найдено с помощью отказа от наглядных (классических) представлений о частицах и волнах. Для объяснения волновых явлений на основе корпускулярных представлений было введено описание микрочастиц (и систем микрочастиц) с помощью векторов состояния, подчиняющихся принципу суперпозиции состояний, и принята их статистич. (вероятностная) интерпретация, позволившая избежать формального логич. противоречия с корпускулярными представлениями (нахождение частицы одновременно в нескольких различных состояниях). С другой стороны, рассматривая классич. (волновые) поля как механич. систему с бесконечным числом степеней свободы и требуя, чтобы эти степени свободы подчинялись определенным условиям квантования, в квантовой теории поля переходят от классич. полей к квантовым. В таком подходе частицы выступают как возбужденные состояния системы (по́ля). При этом взаимодействию частиц отвечает взаимодействие их полей. Для нерелятивистского движения в системе с фиксированным числом частиц квантово-полевое описание полностью эквивалентно описанию системы частиц с помощью *Шредингера уравнения*. Эта эквивалентность отражает симметрию корпускулярного и волнового описания вещества (материи), отвечающую К.-в. д. Вместе с тем в релятивистской квантовой механике, к-рая может быть сформулирована лишь на основе квантово-полевого подхода, важнейшим проявлением К.-в. д. является возможность испускания и поглощения частиц в результате взаимодействия квантовых полей (что имеет фундаментальное значение в теории элементарных частиц). *С. С. Герштейн.*

КОРРЕЛЯЦИИ ДЛИНА – действительное число ξ, характеризующее асимптотическое по $r \to \infty$ поведение *парной корреляционной функции* $\nu_2(r)$. К. д. определяется соотношением

$$\xi^{-2} = R^{-2}[1 - n\tilde{C}_0(\theta)],$$

где феноменологич. параметр R – дебаевская длина затухания (зависит от температуры θ), n – плотность числа частиц в системе, $\tilde{C}_0(\theta)$ – фурье-образ *прямой корреляционной функции* с нулевым волновым вектором. В критич. точке ($\theta = \theta_c$) $\xi^{-1} = 0$ и интеграл $\int d\boldsymbol{r}\, \nu_2(r)$ расходится. В этом случае говорят, что система характеризуется корреляциями с бесконечным радиусом. Физически это означает, что в системе возникает дальний порядок, когда каждая молекула

испытывает влияние большого числа других молекул. Поведение К. д. вблизи критич. точки характеризуется критич. показателями ν, ν', η:

$$\xi \sim \theta_0^{-\nu},\ \theta_0 \to 0^+;$$

$$\xi \sim (-\theta_0)^{-\nu'},\ \theta_0 \to 0^-;$$

$$\nu_2(r, \theta_c) \sim r^{-(d-2+\eta)},\ r \to \infty,$$

где $\theta_0 = \dfrac{\theta - \theta_c}{\theta_c}$, d — пространственная размерность системы.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978. *Д. П. Санкович.*

КОРРЕЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТ — числовая характеристика зависимости двух случайных величин. Для случайных величин X_1 и X_2 с *математическими ожиданиями*

$$a_i = \mathsf{E}X_i$$

и ненулевыми *дисперсиями*

$$\mathsf{D}X_i = \sigma_i^2 = \mathsf{E}(x_i - a_i)^2$$

К. к. определяется равенством

$$\rho = \rho(X_1, X_2) = \mathsf{E}\frac{X_1 - a_1}{\sigma_1}\frac{X_2 - a_2}{\sigma_2}.$$

Если X_1 и X_2 независимы, то $\rho = 0$ (если X_1 и X_2 имеют совместное *Гаусса распределение*, то верно и обратное; в общем случае это неверно); при $\rho = 0$ случайные величины X_i называются некоррелированными, при $\rho > 0$ ($\rho < 0$) положительно (отрицательно) коррелированными; $|\rho| < 1$, причем $|\rho| = 1$, если и только если X_i связаны линейной зависимостью

$$X_2 = \hat{X}_2 \equiv a_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(X_1 - a_1).$$

В общем случае $\hat{X}_2$ есть наилучшее представление X_2 линейной функцией от X_1, так как

$$\mathsf{E}(X_2 - \hat{X}_2)^2 = \min_{a,b}\mathsf{E}(X_2 - aX_1 - b)^2.$$

К. к. не дает полного описания функциональной зависимости случайных величин; по существу он является лишь мерой их линейной связи. *К. А. Боровков.*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ — см. *Корреляция.*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА — см. *Корреляционная функция.*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ — плотность вероятности (по мере Лебега) нахождения m различных классических частиц в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ сосуда Λ. Рассмотрим большой канонич. ансамбль классич. системы тождественных частиц, находящихся в состоянии статистич. равновесия с температурой β^{-1} и активностью z в сосуде $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Пусть потенциальная энергия n частиц равна $U(x)_n$. При $n = 0$ полагают $U = 0$. Тогда К. ф.

$$\rho_\Lambda(x)_m = \rho_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

есть

$$\rho_\Lambda(x)_m = \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{n!}\int_{\Lambda^n} dx_{m+1}\ldots dx_{m+n}\, e^{-\beta U(x)_{m+n}},$$

где большая статистич. сумма

$$\Xi(\Lambda, z, \beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int dx_1\ldots dx_n\, e^{-\beta U(x)_n}.$$

К. ф. является удобным объектом исследования предельных ($\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$) свойств статистич. равновесных систем. К. ф. удовлетворяют системе линейных интегральных уравнений (см. *Киркwуда—Зальцбурга уравнения*).

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971. *Д. П. Санкович.*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ; алгебраический метод — метод построения ряда для *корреляционных функций* d-мерной непрерывной равновесной системы по степеням активности z и доказательства сходимости этого ряда. Пусть $\rho_\Lambda(X_n)$, $X_n = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{dn}$, — корреляционные функции большого канонич. ансамбля системы частиц, заключенной в компактной области $\Lambda \in \mathbb{R}^d$, со свободными граничными условиями

$$\rho_\Lambda(X_m) = \Xi_\Lambda^{-1}\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{n+m}}{n!}\int_{\Lambda^n} e^{-\beta U(X_m, X_n')}\, dX_n',$$

где β — обратная температура, $U(X_n)$ — потенциальная энергия системы n частиц, Ξ_Λ — большая статистич. сумма.

При помощи алгебраич. метода устанавливается равенство

$$\rho_\Lambda(X_m) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{n+m}}{n!}\int_{\Lambda^n}\varphi_{X_m}(X_n')\, dX_n',$$

где

$$\varphi_{X_m}(X_n') = (\psi^{-1} * D_{X_m}\psi)(X_n'),$$

$$\psi(X_n) = e^{-\beta U(X_n)},$$

$*$ есть операция умножения, заданная на пространстве последовательностей симметрич. функций $\{\tilde{\psi}(X_n)\}_{n\geqslant 0}$ с условием $\psi_0 = \psi(\varnothing) = 1$:

$$(\tilde{\psi}_1 * \tilde{\psi}_2)(X_n) = \sum_{\{s\}\in(1,\ldots,n)}\tilde{\psi}_1(X_{\{s\}})\,\tilde{\psi}_2(X_{\{n\setminus s\}}),$$

$$X_{\{s\}} = (x_{s_1}, \ldots, x_{s_k}), \quad \{s\} = (s_1, \ldots, s_k),$$

$$\{n\setminus s\} = (1, \ldots, n)\setminus\{s\}, \quad (D_{X_m}\tilde{\psi})(X_n') = \tilde{\psi}(X_m, X_n'),$$

ψ^{-1} — обратный к ψ элемент в алгебре, порождаемой умножением $*$:

$$\psi^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(\psi - \mathbb{1})\underbrace{*\ldots*}_{n}(\psi - \mathbb{1}),$$

$$(\mathbb{1})(X_n) = 0, \quad \mathbb{1}_0 = 1.$$

Обозначим

$$\langle\tilde{\psi}\rangle(z, \chi) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}^{dn}}\tilde{\psi}(X_n)\prod_{j=1}^{n}\chi(x_j)\, dX_n.$$

Тогда новое представление для К. ф. следует из равенств ($\chi \in L^1(\mathbb{R}^d)$):

$$\langle\tilde{\psi}_1 * \tilde{\psi}_2\rangle(z, \chi) = \langle\tilde{\psi}_1\rangle(z, \chi)\langle\tilde{\psi}_2\rangle(z, \chi),$$

$$\rho_\Lambda(X_m) = \Xi_\Lambda^{-1}\langle\psi * \psi^{-1} * D_{X_m}\psi\rangle(z, \chi_\Lambda),$$

$$\chi_\Lambda(x) = 0,\ x \notin \Lambda;\ \chi_\Lambda(x) = 1,\ x \in \Lambda.$$

В термодинамич. пределе К. ф. $\rho(X_m)$, $X_m = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{dn}$ большого канонич. ансамбля классич. непрерывной d-мерной системы с парным потенциалом Φ представляются в виде

$$\rho(X_m) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{n+m}}{n!}\int_{\mathbb{R}^{dn}}\varphi_{X_m}(Y_n)\, dY_n.$$

Установлено, что функции $\varphi_{X_m}(Y_n)$ удовлетворяют *Киркwуда — Зальцбурга уравнению* в неинтегральной форме:

$$\varphi_{X_m}(Y_n) = \exp\Big\{-\beta\sum_{i=1,\ i\neq j}^{m}\Phi(x_j - x_i)\Big\}\Big\{\varphi_{X_{m(j)}}(Y_n) +$$

$$+\sum_{\{s\}\in(1,\ldots,n)}\prod_{i\in\{s\}}\big\{\exp[-\beta\Phi(x_j - y_i)] - 1\big\}\,\varphi_{X_{m(j)}, Y_{\{s\}}}(Y_{\{n\setminus s\}})\Big\}.$$

Урселла функции $\varphi(X_n)$ равны

$$\varphi(X_n) = \varphi_{x_1}(X_{n(1)}),\ m(j) = (1, \ldots, m)\setminus j.$$

С помощью вышеуказанного уравнения по индукции получается следующая оценка:

$$\sup_{X_m\in\mathbb{R}^{dm}}\int_{\mathbb{R}^{dm}}|\varphi_{X_m}(Y_n)|\, dY_n \leqslant$$

$$\leqslant n!\,\xi^{m-1}\big\{e^{2\beta B}\xi^{-1}\exp[C(\beta)\xi]\big\}^{m+n-1}$$

$$C(\beta) = \int_{\mathbb{R}^d}|e^{-\beta\Phi(x)} - 1|\, dx$$

при условии, что потенциал взаимодействия Ф удовлетворяет условию устойчивости

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\Phi(x_i-x_j)\geqslant -Bn.$$

Из этой оценки следует, что усеченные К.ф.

$$\rho^T(X_m)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{n+m}}{n!}\int_{\mathbb{R}^{dn}}\varphi(X_m,Y_n)\,dY_n$$

интегрируемы по разностным переменным, то есть имеет место кластерное свойство.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971. *В.И. Скрипник.*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ; групповое свойство. Пусть $\mathcal{A}$ – комплексное векторное пространство последовательностей $\psi=(\psi(x)_n)_{n\geqslant 0}$ таких, что при каждом n комплексная функция $\psi(x)_n$ определена на пространстве $\mathbb{R}^{dn}$, ограничена и измерима по Лебегу, ψ_0 – комплексное число, $(x)_n\equiv\{x_1,\ ...,\ x_n\}$ – последовательность векторов из $\mathbb{R}^d$, к-рую обозначим через X и $\psi(X)=\psi(x)_n$. Пусть $\mathcal{A}_+$ – подпространство в $\mathcal{A}$, образованное элементами ψ, у к-рых $\psi_0=0$. Пусть также $\psi\in 1+\mathcal{A}_+$ и функции $\psi(x)_n$ непрерывны и инвариантны относительно сдвигов $\psi(x_1+a,\ ...,\ x_n+a)=\psi(x_1,\ ...,\ x_n)$, а X_1 – подпоследовательность $(x)_n$, $X_2=(x)_n\setminus X_1$. Если для всех n и всех последовательностей $(x)_n$ и $X_1\subset(x)_n$

$$|\psi(x)_n-\psi(X_1)\psi(X_2)|\to 0$$

при $\inf|x_i-x_j|\to\infty$, где $x_i\in X_1$, $x_j\in X_2$, то говорят, что функции $\psi(x)_n$ обладают групповым свойством. Групповое свойство выполнено для *корреляционных функций* системы классич. тождественных частиц, взаимодействующих посредством устойчивого регулярного парного потенциала (см. *Устойчивый потенциал, Кирквуда – Зальцбурга уравнение*). К. ф. для квантового случая связана с *ослабления корреляций принципом.*

Групповое свойство К.ф. установлено Д. Рюэлем [1].

Лит.: [1] Ruelle D., «Rev. Mod. Phys.», 1964, v. 36, p. 580; [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971. *Д.П. Санкович.*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ в статистической физике – функция, определяющая вероятность относительного расположения комплекса из s любых молекул жидкости или газа; при $s=2$ К.ф. называется парной, или бинарной. Появление корреляций в расположении молекул среды связано с тем, что в ближайшем окружении любой из них вследствие взаимодействия возникает упорядочение в расположении окружающих ее молекул. При этом средняя плотность молекул окружения какой-либо выделенной молекулы отличается от средней плотности среды, приближаясь к ней с увеличением расстояния. Это происходит монотонно или с затухающими осцилляциями (появление ближнего порядка).

В классич. статистич. физике s-частичную К.ф. $F_s(q_1,\ ...,\ q_s)$ определяют так, что

$$V^{-s}F_s(q_1,\ ...,\ q_s)dq_1...dq_s$$

есть вероятность того, что координаты 1-й, ..., s-й молекул попадают в бесконечно малые элементы объемов $dq_1,...,dq_s$, расположенные около точек $q_1,\ ...,\ q_s$, где $q_i=(x_i,\ y_i,\ z_i)$, V – объем. Следовательно, s-частичная К.ф. связана с $(s-1)$-частичной К.ф. соотношением

$$V^{-1}\int F_s(q_1,\ldots,q_s)\,dq_s=F_{s-1}(q_1,\ldots,q_{s-1}).$$

Равновесные К.ф. связаны с канонич. *Гиббса распределением* и могут быть получены из него интегрированием по координатам $N-s$ молекул:

$$F_s(q_1,\ldots,q_s)=V^s\int_V\ldots\int D_N(q_1,\ldots,q_N)\,dq_{s+1}\ldots dq_N,$$

где

$$D_N(q_1,\ldots,q_N)=Q_N^{-1}\exp(-U_N/kT),$$

$$Q_N=\int_V\ldots\int\exp(-U_N/kT)\,dq_1\ldots dq_N,$$

U_N – потенциальная энергия взаимодействия молекул системы, Q_N – конфигурационный интеграл, T – температура, N – полное число частиц. В случае парного взаимодействия молекул с потенциалом $\Phi(r)$, зависящим только от расстояния, энергия взаимодействия равна

$$U_N=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant N}\Phi(|q_i-q_j|),$$

тогда F_2 зависит только от расстояния между молекулами

$$F_2(q_1,\ q_2)=F_2(|q_1-q_2|)$$

(радиальная функция распределения).

Парная функция распределения особенно важна, так как позволяет получить *состояния уравнение* и среднюю энергию системы с парным взаимодействием между частицами:

$$PV=NkT-(6v^2)^{-1}\int\int|q_1-q_2|\Phi(|q_1-q_2|)\times$$
$$\times F_2(q_1,q_2)\,dq_1\,dq_2,$$
$$E=3NkT/2-(2v^2)^{-1}\int\int\Phi(|q_1-q_2|)\times$$
$$\times F_2(q_1,q_2)\,dq_1\,dq_2,$$

где $v=V/N$ – удельный объем.

Зависимость радиальной функции распределения от расстояния можно определить экспериментально по угловой зависимости когерентного рассеяния рентгеновских лучей. Интенсивность $I(s)$ рентгеновских лучей с длиной волны λ, рассеянных под углом θ к первичному пучку интенсивности I_0, определяется выражением

$$\frac{I(s)}{I_0}=1+\frac{4\pi}{v}\int_0^\infty[F_2(r)-1]\frac{\sin(rs)}{s}r\,dr,$$

где $s=(4\pi/\lambda)\sin(\theta/2)$.

Обращая это соотношение, можно найти зависимость F_2 от расстояния r. При достаточно малых r (порядка нескольких газокинетич. радиусов молекул) $F_2(r)$ может иметь ряд максимумов, соответствующих ближнему порядку, а затем она стремится к 1.

Функции распределения $F_1,\ ...,\ F_s$ удовлетворяют цепочке уравнений (см. *Боголюбова уравнения*), к-рые можно решить с граничным условием ослабления корреляции молекул при увеличении расстояния между ними:

$$F_s(q_1,\ldots,q_s)-\prod_{1\leqslant i\leqslant s}F_i(q_i)\to 0$$

при $|q_i-q_j|\to\infty$. Для пространственно однородных систем $F_1(q)=0$. При решении цепочки уравнений для F_s в виде разложения по степеням плотности v^{-1} получим *вириальные разложения* для уравнения состояния и К. ф., а в случае кулоновского взаимодействия между частицами при решении цепочки уравнений в виде разложения по степеням плазменного параметра v/r_d^3, где r_d – дебаевский радиус экранирования, получим результаты теории электролитов Дебая – Хюккеля.

В квантовой статистич. механике К. ф. определяют при помощи статистич. оператора (*плотности матрицы*) всей системы $\rho(q_1,\ ...,\ q_N;\ q_1',\ ...,\ q_N')$ как статистич. операторы комплексов из s молекул:

$$F_s(q_1,\ ...,\ q_s;\ q_1',\ ...,\ q_s')=V^s\mathrm{Sp}\,\rho(q_1,\ ...,\ q_N;\ q_1',\ ...,\ q_N'),$$

где операция Sp взятия следа выполняется по переменным $s+1,\ ...,\ N$ частиц. Функции $F_s(q_1,\ ...,\ q_s;\ q_1',\ ...,\ q_s')$ симметричны или антисимметричны относительно перестановок q или q' в зависимости от того, какой статистике подчиняются частицы (симметричны в случае *Бозе – Эйнштейна статистики* и антисимметричны в случае *Ферми – Дирака статистики*). Диагональные элементы квантовой К. ф.

имеют смысл плотности распределения комплекса из s частиц. Смысл недиагональных элементов становится ясен, если перейти к *Вигнера функции распределения*, к-рая зависит от q и импульсов p всех частиц $\rho(q, p)$ и является фурье-образом статистич. оператора

$$\rho(q-\xi/2,\ q+\xi/2)$$

по переменным ξ, что соответствует преобразованию Вейля. В результате получаются квантовые s-частичные операторы

$$F_s(q_1, ..., q_s; p_1, ..., p_s),$$

к-рые являются квазивероятностями, то есть их интегрирование по импульсам дает распределение по координатам, а интегрирование по координатам — распределение по импульсам, однако они не имеют смысла обычных вероятностей, так как могут быть отрицательными.

Квантовые s-частичные К. ф. можно выразить через волновые функции в представлении вторичного квантования $\psi(q)$, $\psi^+(q')$:

$$F_s(q_1, ..., q_s; q'_1, ..., q'_s) = v^s\langle \psi^+(q_1) \dots \psi^+(q_s)\psi(q'_1)\dots\psi(q'_s)\rangle,$$

где $\langle ... \rangle$ означает усреднение с полным статистич. оператором, а $\psi(q)$, $\psi^+(q')$ удовлетворяют перестановочным соотношениям статистики Ферми — Дирака или статистики Бозе — Эйнштейна. Через квантовые одно- и двухчастичные операторы можно вычислить средние значения давления и энергии. В отличие от классич. случая, для этого нужно знать не только диагональные элементы F_2, но и недиагональные элементы $F_1(q, q')$, так как плотность кинетич. энергии определяется величиной

$$(\hbar^2/2m)\nabla_q^2 F_1(q, q')|_{q=q'}.$$

В статистич. механике квантовых и классич. систем используют также пространственно-временные К. ф., к-рые определяют как статистич. средние от произведения операторов (или динамич. переменных), взятых для различных моментов времени и точек пространства. Напр., в квантовом случае используют К. ф.

$$\langle \psi^+(x, t)\psi(x', t')\rangle$$

и

$$\langle \psi^+(x_1, t_1)\ \psi(x_1, t_1)\psi^+(x_2, t_2)\,\psi(x_2, t_2)\rangle.$$

Пространственно-временные К. ф. применяют в теории неравновесных процессов, так как через них выражается реакция системы на внешние возмущения и, следовательно, восприимчивости. При помощи пространственно-временных К. ф. потоков энергии, импульса или числа частиц можно вычислить кинетич. коэффициенты. Пространственно-временные К. ф. позволяют выразить когерентные и некогерентные составляющие дифференциального эффективного сечения рассеяния нейтронов в среде, что является важным методом экспериментального исследования К. ф.

Лит.: [1] Физика простых жидкостей, пер. с англ., [ч. 2], М., 1973, гл. 2; [2] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., М., 1973; [3] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978, гл. 8; [4] Боголюбов Н. Н., Избранные труды по статистической физике, М., 1979; [5] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Физическая кинетика, М., 1979; [6] Климонтович Ю. Л., Статистическая физика, М., 1982.

Д. Н. Зубарев.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ случайного процесса $\{X(t),\ t\in T\}$ — функция

$$B(s, t) = \mathsf{E}[X(s) - \mathsf{E}X(s)][X(t) - \mathsf{E}X(t)]^*,$$

$s, t\in T$, [здесь $\mathsf{E}X(t)$ — первый момент процесса, * означает комплексное сопряжение; предполагается, что $\mathsf{E}|X(t)|^2 < \infty$]. В случае векторного процесса $\{X_i(t)\}_{i=1}^m$ К. ф. называется корреляционная матрица

$$B(s, t) = \|B_{ij}(s, t)\|_{i, j=1}^m,$$

где

$$B_{ij}(s, t) = \mathsf{E}[X_i(s) - \mathsf{E}X_i(s)][X_j(t) - \mathsf{E}X_j(t)]^*$$

— взаимная корреляционная функция процессов X_i и X_j; B_{ii} называют иногда автокорреляционной функцией. Характеристич. свойство К. ф.— ее положительная определенность: для любых $t_1, ..., t_n\in T$ и комплексных $c_1, ..., c_m$

$$\sum_{i, j=1}^m c_i c_j^* B(t_i, t_j) \geqslant 0.$$

Для процесса с независимыми значениями $B(s, t) = 0$ при $s\neq t$. Для стационарных в широком смысле процессов К. ф. зависит лишь от разности $t-s$:

$$B(s, t) = R(t-s).$$

Если при этом процесс непрерывен в среднем квадратическом, то есть

$$\mathsf{E}|X(t) - X(s)|^2 \to 0$$

при $t\to s$, то К. ф. $R(t)$ непрерывна и допускает представление

$$R(t) = \int \exp(it\lambda)\, dF(\lambda),$$

где F — *спектральная мера* процесса, а λ пробегает интервал $(-\infty, \infty)$, если $T = (-\infty, \infty)$, либо $[-\pi, \pi]$, если $T = \{..., -1, 0, 1, ...\}$.

К. ф.— простая, но полезная характеристика случайного процесса. Распределение *гауссовой случайной функции* $X(t)$ полностью определяется ее К. ф. и средним $\mathsf{E}X(t)$; в общем случае это заведомо не так. В то же время К. ф. вполне описывает процесс как кривую в гильбертовом пространстве интегрируемых в квадрате функций на вероятностном пространстве, на к-ром задан процесс; позволяет судить о таких его свойствах, как непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в среднем квадратическом, и т. п. Условия на скорость убывания К. ф. при $|t-s|\to\infty$ используют в предельных теоремах для случайных процессов.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Введение в статистическую радиофизику, ч. 1 — Рытов С. М., Случайные процессы, М., 1976.

К. А. Боровков.

КОРРЕЛЯЦИЯ в математической статистике — вероятностная (статистическая) зависимость между величинами, не имеющая, вообще говоря, строго функционального характера. В отличие от функциональной, корреляционная зависимость возникает тогда, когда одна из величин зависит не только от данной второй, но и от ряда случайных факторов, или когда среди условий, от к-рых зависят и та и другая величины, имеются общие для них обоих условия.

В основе математич. теории К. лежит предположение о том, что изучаемые явления подчинены определенным вероятностным закономерностям. Зависимость между двумя случайными событиями проявляется в том, что *условная вероятность* одного из них при наступлении другого отличается от безусловной вероятности. Аналогично, влияние одной случайной величины на другую характеризуется условными распределениями первой при фиксированных значениях второй. Пусть для каждого значения x случайной величины X определено условное математическое ожидание

$$y(x) = \mathsf{E}(Y|X=x)$$

случайной величины Y. Функция $y(x)$ называется регрессией величины Y по X. Зависимость Y от X проявляется в изменении средних значений Y при изменении X, хотя при каждом фиксированном значении $X=x$ величина Y остается случайной величиной с определенным рассеянием.

Пусть $m_Y = \mathsf{E}(Y)$ — безусловное математич. ожидание Y. Если величины X и Y независимы, то все условные математич. ожидания Y не зависят от X и совпадают с безусловным математич. ожиданием:

$$y(x) = \mathsf{E}(Y|X=x) = \mathsf{E}(Y) = m_Y.$$

Обратное заключение не всегда справедливо. При измерении степени зависимости величин X и Y наиболее употребителен *корреляции коэффициент* **между** X и Y.

А. В. Прохоров.

КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИСА УРАВНЕНИЕ – нелинейное дифференциальное уравнение

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

представляющее собой универсальную модель для описания одномерных нелинейных волн в средах с дисперсией без диссипации, в которых закон дисперсии для линейных волн описывается двумя членами разложения по степеням волнового числа k:

$$\omega = sk(1 + \varepsilon k^2).$$

Предложено Д. Кортевегом (D. Korteweg) и Г. де Фрисом (G. de Vries) в 1895 в связи с задачей о волнах на поверхности жидкости. К.– де Ф. у. описывает магнитозвуковые и ионнозвуковые волны в плазме, акустич. волны в кристаллах, поверхностные и внутренние волны в океане.

Для К.– де Ф. у. найдены точные решения различного вида, одно из основных – *солитон*, или уединенная волна:

$$u = 2\varkappa^2 \operatorname{ch}^{-2}[\varkappa(x - 4\varkappa^2 t - x_0)],$$

амплитуда солитона $\varkappa^2$ и положение его центра x_0 – произвольные постоянные. Убывающее при $x \to \pm\infty$ начальное возмущение, эволюционируя согласно К.– де Ф. у., распадается на ряд невзаимодействующих солитонов, распространяющихся влево, и на осциллирующий и затухающий фон, распространяющийся вправо. Поведение решения при $t \to \infty$ вычисляется по начальным данным. При помощи *обратной задачи рассеяния метода* можно найти для К.– де Ф. у. бесконечные наборы точных решений; простейшим является N-солитонное:

$$u = 2\partial^2 \ln \Delta \partial x^2,$$

где Δ – определитель матрицы

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} + M_i^2 (\varkappa_i + \varkappa_j)^{-1} \exp[-(\varkappa_i + \varkappa_j)x + 8\varkappa_i^3 t],$$

$\varkappa_i$, M_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, – произвольные постоянные, δ_{ij} – единичная матрица. При $t \to \pm\infty$ N-солитонное решение распадается на N свободных солитонов с параметрами $\varkappa_i$. В процессе взаимодействия солитоны испытывают упругие столкновения, приводящие к сдвигу их центров. Полный сдвиг каждого солитона равен сумме сдвигов при парных столкновениях.

Простейшим периодич. решением является бегущая кноидальная волна, описываемая эллиптич. косинусом $\operatorname{cn}(x - ct)$, с чем и связано ее название:

$$(x - ct - x_0) = \int (2E + cu^2 - 2u^3)^{-1/2}\, du,$$

здесь c, E – параметры волны. При $E \to 0$ кноидальная волна переходит в набор периодически расположенных солитонов.

К.– де Ф. у. имеет бесконечный набор интегралов движения:

$$I_n = \int P_n(u, u_x, \ldots)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где P_n – многочлен от функции u и ее производных; в частности,

$$P_0 = u;\ P_1 = u^2;\ P_2 = u^3 - u_x^2/2;\ P_3 = (u_{xx}^2 + 5uu_x + 5u^2)/2.$$

При помощи функциональной производной $\delta/\delta u$ К.– де Ф. у. можно записать в виде

$$u_t + (\partial/\partial x)\delta I_2/\delta u = 0, \qquad (1)$$

откуда следует, что она является *гамильтоновой системой* с функцией Гамильтона I_2 и скобкой Пуассона

$$\{\alpha, \beta\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta\alpha}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\beta}{\delta u} - \frac{\delta\beta}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\alpha}{\delta u}\right) dx.$$

Поскольку $\{I_n, I_m\} = 0$, можно показать, что К.– де Ф. у.– интегрируемая гамильтонова система, и явно ввести переменные: действие – угол. Гамильтонова структура (1) не является единственной, выбором скобок Пуассона можно сделать функцией Гамильтона любой из интегралов I_n.

Рассматривают также «высшие К.– де Ф. у.»:

$$u_t + (\partial/\partial x)\delta I_n/\delta u = 0,\ n = 3, 4, \ldots,$$

их свойства аналогичны свойствам обычного К.– де Ф. у. В диссипативных средах К.– де Ф. у. переходит в Бюргерса – Кортевега – де Фриса уравнение

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \nu u_{xx}, \qquad (2)$$

к к-рому (в отличие от К.– де Ф. у. и *Бюргерса уравнения*) точные методы не применимы. Стационарные решения уравнения (2) описывают структуру ударных волн в средах с дисперсией, в частности бесстолкновительных ударных волн в плазме. В двумерном случае К.– де Ф. у. переходит в *Кадомцева – Петвиашвили уравнение*.

Лит.: [1] Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980.

В. Е. Захаров.

КОСВЕННОЕ ОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – см. *Гейзенберга модель.*

КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Фурье преобразование.*

КОСМИЧЕСКАЯ ЦЕНЗУРА – см. *Сингулярности пространства-времени.*

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ – постоянная Λ в уравнениях гравитационного взаимодействия (тяготения) А. Эйнштейна (A. Einstein, 1915):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \qquad (1)$$

где $g_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu}$ – соответственно метрический тензор и тензор кривизны пространства-времени Риччи, $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи, G – постоянная тяготения Ньютона, c – фундаментальная скорость. Член с К. п. (космологич. член) описывает гравитационные силы притяжения (если $\Lambda < 0$) или отталкивания (если $\Lambda > 0$), являющиеся дополнительными по отношению к гравитационным силам притяжения, создаваемым обычной материей (тензором $T_{\mu\nu}$). Эти дополнительные силы пропорциональны расстоянию между точками, и их часто называют гравитацией вакуума.

Космологич. член был введен А. Эйнштейном в уравнения тяготения для того, чтобы построить стационарную модель Вселенной (см. *Космологические модели*). В этой модели силы притяжения обычной материи уравновешены силами гравитационного отталкивания вакуума ($\Lambda > 0$).

После открытия расширения Вселенной аргументы А. Эйнштейна о необходимости условия $\Lambda \neq 0$ отпали и А. Эйнштейн отказался от этой гипотезы. Однако многие специалисты считали, что следует писать уравнения Эйнштейна (1) с К. п., а ее знак и конкретное значение должны определить будущая физич. теория и астрономич. наблюдения. Сравнение темпа расширения Вселенной с возрастом небесных тел показывает, что в сегодняшней Вселенной $|\Lambda| < 10^{-55}$ см$^{-2}$.

Формально космологич. член в уравнениях (1) эквивалентен дополнительному члену в тензоре энергии-импульса. Этот член дает следующие значения для плотности энергии ε_Λ и давления p_Λ:

$$\varepsilon_\Lambda = -p_\Lambda = c^4\Lambda/8\pi G. \qquad (2)$$

Согласно современным представлениям, в самом начале космологич. расширения во Вселенной могло существовать такое состояние особого скалярного поля (или полей), при к-ром осуществлялось уравнение состояния (2). Это так наз. состояние «ложного вакуума» (или, в более общем случае, «вакуумоподобное состояние»). При этом плотность «ложного вакуума» могла быть огромной: $p_\Lambda \approx \varepsilon_\Lambda/c^2 \approx \approx 10^{74}$ г/см^3 или больше, и соответствующее значение $\Lambda \geqslant \geqslant 10^{47}$ см$^{-2}$. Именно гравитация «ложного вакуума» определяла тогда динамику расширения Вселенной. В дальнейшем энергия «ложного вакуума» перешла в энергию обычных частиц и космологич. член стал чрезвычайно малым или даже равным нулю (см. *Космология*).

И. Д. Новиков.

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ – физико-математические модели, описывающие строение и эволюцию Вселенной (или отдельные этапы этой эволюции). В современной космологии, развившейся после создания А. Эйнштейном (A. Einstein) релятивистской теории тяготения, первые модели были призваны описать механич. свойства движения вещества и его распределение в больших масштабах, а также геометрич. свойства трехмерного пространства. Эти модели являются решением уравнений теории тяготения Эйнштейна в применении ко Вселенной в целом. В К. м. принимают, что распределение вещества в больших масштабах может характеризоваться плотностью ρ (усредненной по этим масштабам) и давлением p. При этом используют обычно так наз. сопутствующие системы отсчета, аналогичные лагранжевым системам отсчета ньютоновской механики. В сопутствующих системах вещество покоится, а сама система деформируется с течением времени вместе с веществом. Деформация системы и описывает движение вещества. Наибольшее значение в космологии имеют модели однородной изотропной Вселенной, в к-рых все точки трехмерного пространства эквивалентны и все направления равноправны. Эти модели правильно отражают основные свойства распределения и движения вещества в больших масштабах в наблюдаемой части Вселенной.

В однородных изотропных моделях трехмерное пространство сопутствующей системы, вообще говоря, неевклидово. Его искривленность характеризуется кривизной $k/R_{кр}^2$, где $k=0, \pm 1$, $R_{кр}$ – радиус кривизны. Изменение $R_{кр}$ с течением времени описывает деформацию с течением времени системы отсчета, а значит, и вещества. При $k>0$ кривизна положительна, трехмерное пространство замкнуто, его объем конечен (так наз. модель замкнутой Вселенной). При $k<0$ кривизна отрицательна, объем пространства бесконечен (в рамках простейшей топологии); это – модель открытой Вселенной. При $k=0$ пространство евклидово, в этом случае параметр $R_{кр}$ описывает только деформацию системы и определяется с точностью до произвольного постоянного множителя.

Движение вещества в однородных изотропных моделях происходит под действием сил тяготения и так наз. сил гравитации вакуума, описываемых *космологической постоянной* Λ в уравнениях Эйнштейна.

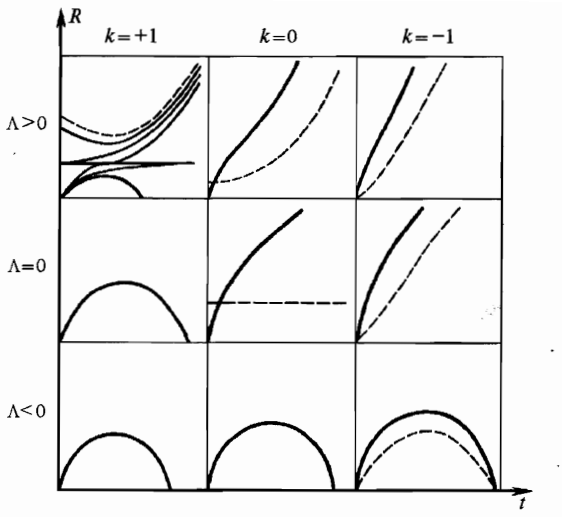
В зависимости от соотношения между этими силами и от значения кинетич. энергии движения вещества возможна качественно разная эволюция модели с течением времени: неограниченное расширение, расширение с последующим сжатием и т. д. (см. рис.).

Какая из моделей лучше всего описывает эволюцию Вселенной (или отдельный ее этап), определяется их сравнением с данными наблюдениями и выводами физич. теорий.

Модели однородной изотропной нестационарной Вселенной носят имя А. А. Фридмана, нашедшего в 1922–24 основные решения соответствующих уравнений Эйнштейна.

Отдельные частные случаи моделей часто называют по именам ученых, внесших большой вклад в их изучение (напр., модель Эйнштейна – де Ситтера, $k=0$, $\Lambda=0$ на рис.). Открытие Э. Хабблом (E. Hubble) в 1929 расширения Вселенной и все последующие исследования показали, что модель Фридмана хорошо описывает эволюцию видимой части Вселенной от самых ранних этапов начала расширения до наших дней, хотя конкретные значения параметров модели подлежат дальнейшему уточнению. В теоретич. космологии рассматривают также и другие модели, напр. модели однородной анизотропной Вселенной, модели сферически-симметричной Вселенной и др.

С середины 20 в. понятие К. м. значительно расширилось. Теперь в К. м. рассматриваются не только механич. свойства движения вещества, но и физич. процессы, обусловливающие эволюцию Вселенной. Примером может служить модель горячей Вселенной, в к-рой предполагается, что в начале расширения вещество было не только очень плотным, но и имело высокую температуру (Г. Гамов, G. Gamov, 40-е гг. 20 в.). Наблюдения подтвердили справедливость этой модели. Другим примером является модель раздувающейся Вселенной, согласно к-рой предполагается, что в первые мгновения расширения Вселенной ($t \leq 10^{-34}$ с) был период, когда в плотность энергии основной вклад давало скалярное поле с уравнением состояния $\varepsilon = -p > 0$ (где ε – плотность энергии, p – давление), и Вселенная в этот короткий период расширялась экспоненциально быстро («раздувалась»). Наблюдения свидетельствуют в пользу справедливости этой модели.



Изменение во времени относительного расстояния между телами (галактиками, их скоплениями) во Вселенной (так наз. масштабного фактора R) в зависимости от разных значений Λ и k. Везде считается, что $0 \leq 3p/c^2 \leq \rho$, $dp/dR \leq 0$. Штриховой линией показаны графики для так наз. «пустых» моделей ($\rho \equiv 0$).

Лит.: [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [2] Физика космоса. Маленькая энциклопедия, 2 изд., М., 1986, с. 407; [3] Линде А. Д., «Успехи физич. наук», 1984, т. 144, с. 177. *И. Д. Новиков.*

КОСМОЛОГИЯ – раздел астрономии, изучающий Вселенную как целое и включающий в себя учение о строении и эволюции всей охваченной астрономическими наблюдениями части Вселенной. Эмпирич. основой космологич. теорий являются данные астрономич. наблюдений и данные экспериментальной физики. Теоретич. базис К. составляют основные физич. теории, описывающие законы движения материи. К. использует также достижения математики и других наук. Космологич. выводы и обобщения имеют большое мировоззренческое значение.

Представления о строении всего окружающего мира были важным элементом человеческой культуры на протяжении всей ее истории. Эти представления отражали уровень знания и опыт изучения природы в соответствующие эпохи развития человеческого общества. По мере того как расширялись пространственные (и временные) масштабы познанной человеком части Вселенной, менялись и космологич. представления. Первой космологич. моделью, имеющей математич. обоснование, можно считать геоцентрич. систему мира Птолемея (Ptolemaios, 2 в.). Она господствовала в науке ок. 1,5 тыс. лет. Затем ее сменила гелиоцентрич. система мира Н. Коперника (N. Copernicus, 16 в.). В дальнейшем необычайное расширение масштабов исследованного мира благодаря изобретению и совершенствованию телескопов привело к представлению о звездной Вселенной (Галактике). Наконец, в начале 20 в. возникло представление о Вселенной как о мире галактик (Метагалактике). Из рассмотрения этой историч. цепочки смен космологич. представлений с непреложностью следует, что каждая «система мира» по существу была моделью наибольшей системы небесных тел, достаточно хорошо изученной

к тому времени. Так, модель Птолемея правильно отражала строение системы Земля – Луна, система Н. Коперника была моделью Солнечной системы, идеи модели звездного мира У. Гершеля (W. Herschel, конец 18 в.) и других отражали нек-рые черты строения Галактики. Но каждая из этих моделей претендовала в свое время на описание строения «всей Вселенной». Эта же тенденция на новом уровне прослеживается и в развитии К. в 20 в.

Еще в 19 в. выяснилось, что попытки применения теории тяготения Ньютона и классич. физики к бесконечному распределению материи в пространстве ведет к ряду серьезных трудностей. Современная К. возникла в начале 20 в. после создания А. Эйнштейном (A. Einstein) релятивистской теории тяготения (общей теории относительности). Первая модель Вселенной, основанная на новой теории тяготения, так наз. релятивистская космологич. модель, была построена А. Эйнштейном в 1917. Однако она описывала статич. Вселенную и, как показали астрофизич. наблюдения, оказалась неверной.

В 1922–24 А. А. Фридманом были получены общие решения уравнений для вещества, в среднем равномерно заполняющего все пространство, в к-ром, к тому же, все направления равноправны. Эти решения в общем случае нестационарны, они описывают расширение или сжатие всего вещества, всей Вселенной. В 1929 Э. Хаббл (E. Hubble) в итоге многолетних астрофизич. наблюдений открыл расширение окружающего нас мира галактик, открыл расширение Вселенной, подтверждающее правильность выводов А. А. Фридмана. Фридмановские модели являются основой всего последующего развития К. Эти модели описывали механич. картину движения тяготеющих масс во Вселенной и ее глобальную структуру. Если прежние космологич. построения призваны были описывать главным образом наблюдаемую структуру Вселенной, кажущуюся стационарной, то модели Фридмана по своей сути были эволюционными, связывали сегодняшнее состояние Вселенной с ее предыдущей историей. С конца 40-х гг. 20 в. все большее внимание К. обращает на физику процессов, протекавших на разных этапах космологич. расширения. В 1946–48 появилась теория горячей Вселенной Г. Гамова (G. Gamow), согласно к-рой в начале расширения вещество характеризовалось огромной температурой. В то же время были разработаны принципиально новые астрономич. методы наблюдений. Возникла радиоастрономия, а затем, после начала космич. эры, развились рентгеновская астрономия, гамма-астрономия, ИК-астрономия. Новые возможности появились и у оптич. астрономии.

В 1965 А. Пензиас (A. Penzias) и Р. Вильсон (R. Wilson) открыли микроволновое фоновое излучение (реликтовое излучение) – проэволюционировавшее (охладившееся) электромагнитное излучение, к-рое имело в начале расширения Вселенной очень высокую температуру. Это открытие доказало справедливость теории Гамова.

Современный этап в развитии К. характеризуется интенсивным исследованием проблемы начала космологич. расширения, когда плотности материи и энергии частиц были огромными. Руководящими идеями здесь являются новые теоретич. открытия в физике взаимодействия элементарных частиц при очень больших энергиях. Другая важная проблема К. – объяснение возникновения крупномасштабной структуры Вселенной – скоплений галактик, самих галактик и т. д. из первоначально почти однородного расширяющегося вещества.

Следует подчеркнуть определяющую роль астрофизич. наблюдений в развитии современной К. Ее выводы и заключения проверяются прямыми или косвенными наблюдениями, и в этом смысле К. имеет такой же астрофизич. статус, как, напр., теория строения и эволюции звезд.

Лит.: [1] Физическая энциклопедия, т. 2, М., 1990, с. 476–80; [2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [3] Вайнберг С., Гравитация и космология, пер. с англ., М., 1975; [4] Пиблс Ф., Структура Вселенной в больших масштабах, пер. с англ., М., 1983. *И. Д. Новиков.*

КОСМОФИЗИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – см. *Геофизическая турбулентность.*

КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАЧА – см. *Краевая задача* теории потенциала.

КОСОЙ УДАР – см. *Удар.*

КОСООРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ – см. *Симплектическая группа.*

КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР – см. *Антисимметрический тензор.*

КОСОСКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ – см. *Симплектическая группа.*

КОУЛМЕНА ТЕОРЕМА – см. *Вырождение вакуума.*

КОШЕЛЕК – см. *Катастроф теория.*

КОШИ ГОРИЗОНТ будущего – граница будущего $D^+(S)$ гиперповерхности S (см. *Пространство-время* теории относительности). К. г. будущего принадлежит области $D^+(S)$ и состоит из точек, ни одна из к-рых не предшествует точкам из $D^+(S)$. В пространстве Минковского, напр., К. г. будущего нижней половины гиперболоида $t=-(x^2+y^2+z^2+1)^{1/2}$ является нижняя половина светового конуса (световой конус прошлого начала координат). К. г. будущего представляет собой изотропную гиперповерхность: его образующими являются нулевые геодезические, и через каждую точку К. г. будущего проходит направленная в прошлое нулевая геодезическая. Наличие К. г. будущего указывает на отсутствие глобальной гиперповерхности Коши, то есть пространственноподобной гиперповерхности, результатом эволюции к-рой является все пространство-время.

Лит.: [1] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [2] Хокинг С., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977. *А. Т. Ильичев.*

КОШИ ГОРИЗОНТ прошлого – граница прошлого $D^-(S)$ гиперповерхности S (см. *Пространство-время* теории относительности). К. г. прошлого принадлежит области $D^-(S)$ и состоит из таких точек, к-рым не предшествует ни одна точка из $D^-(S)$. В пространстве Минковского, напр., К. г. прошлого верхней половины гиперболоида $t=(x^2+y^2+z^2+1)^{1/2}$ является верхняя половина светового конуса (световой конус будущего начала координат). К. г. прошлого представляет собой изотропную гиперповерхность: его образующими являются нулевые геодезические, и через каждую точку К. г. прошлого проходит направленная в будущее нулевая геодезическая, целиком лежащая на К. г. прошлого. Наличие К. г. прошлого указывает на отсутствие глобальной гиперповерхности Коши, то есть пространственноподобной гиперповерхности, результатом эволюции к-рой является все пространство-время.

Лит.: [1] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972. *А. Т. Ильичев.*

КОШИ ЗАДАЧА – задача о нахождении решения дифференциального уравнения (обыкновенного или с частными производными), удовлетворяющего начальным условиям. Рассмотрена О. Коши (A. Cauchy, 1823–24).

Примером К. з. может служить основная задача механики, когда по известным начальным положениям и скоростям частиц требуется при известном законе взаимодействия между ними определить движение частиц во времени.

Поскольку уравнения математич. физики, для к-рых ставится К. з., описывают реальные процессы, то естественно потребовать существования решения в определенном классе функций, его единственности, непрерывной зависимости решения от начальных данных. Даже в случае простейшей К. з.

$$dy/dx=f(x,\,y),\ y(x_0)=y_0,$$

где $f(x,\,y)$ – заданная функция, выполнение этих требований накладывает ограничения на вид функции $f(x,\,y)$.

Аналогично ставится К. з. для систем обыкновенных дифференциальных уравнений; при этом $y(x)$ и $f(x,\,y)$ – вектор-функции в каком-либо векторном пространстве. Поскольку обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n сводится к системе уравнений первого порядка,

К. з. для него фиксирует начальные значения для производных искомой функции вплоть до $n-1$ порядка.

Для дифференциальных уравнений с частными производными в $(n+1)$-мерном пространстве-времени К. з. фиксирует начальные значения функции (и ее $k-1$ производных, если k – порядок уравнения по времени) на n-мерной поверхности. Напр., для *волнового уравнения*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

решение К. з. с начальными данными:

$$u(x,\,0)=\varphi(x),\ \partial u(x,\,t)/\partial t|_{t=0}=\pi(x),$$

где $\varphi(x)$, $\pi(x)$ – достаточно гладкие функции, дается при $n=1,\ 2,\ 3$ *Д'Аламбера формулой, Пуассона формулой* и *Кирхгофа формулой*. При этом решение непрерывно зависит от функций φ и π. Для уравнения с частными производными требуется, чтобы К. з. была корректно поставлена. Напр., для волнового уравнения К. з. корректно поставлена в случае, если начальные данные заданы либо на гиперплоскости $t=0$, либо на любой пространственноподобной поверхности, для к-рой

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-c^2t^2>0.$$

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988; [3] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1984; [4] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1982.

С. В. Молодцов.

КОШИ ЗАДАЧА; высокочастотная асимптотика решения – представление решения эволюционного уравнения

$$\left(-ih\frac{\partial}{\partial t}+H\left(-ih\frac{\partial}{\partial x},x,t,h\right)\right)u=0$$

с быстроосциллирующими начальными данными вида $b(x)\exp(i\varphi(x)/h)$, где $h>0$ – малый параметр, сравнительно простым выражением с точностью до слагаемого, имеющего определенное (обычно степенное) убывание при $h\to 0$.

В случае вещественных собственных значений символа $H_0(p,x,t)=H(p,x,t,0)$ асимптотика решения К. з. для малых t получается методом Люнебурга – Лакса – Людвига (см. [1]), возникшего в квантовой механике под названием ВКБ-метода. Пусть, напр., дана строго гиперболич. система

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+Bu=0,$$

где

$$H(p,x,t,h)=-\sum_{j=1}^{n}A_j(x,t)p_j-ihB(x,t),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R}^m;$$

символ H имеет при $p\neq 0$ различные вещественные собственные значения $\lambda_k(p,\,x,\,t)$. Асимптотика решения К. з. строится как частичная сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}(-ih)^j a_{kj}(x,t)\exp(iS_k(x,t)/h).$$

Подстановка этого ряда в рассматриваемое уравнение и приравнивание нулю коэффициентов при $(-ih)^j\exp(iS_k/h)$ дает для каждого k цепочку соотношений

$$M_k a_{k0}=0,\ La_{kj}=M_k a_{kj-1},\ j>0,$$

где

$$M_k=\partial S_k/\partial t+H_0(\partial S_k/\partial x,\,x,\,t),$$

а L – линейный дифференциальный оператор 1-го порядка. Первое из них означает, что a_{k0} – собственный вектор матрицы $H_0(\partial S_k/\partial x,\,x,\,t)$. Приравнивание $\lambda_k(\partial S_k/\partial x,\,x,\,t)$ соответствующему собственному значению дает характеристич. уравнение

$$\partial S_k/\partial t+\lambda_k(\partial S_k/\partial x,\,x,\,t)=0.$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию $S_k(x,\,0)=\varphi(x)$, является производящей функцией семейства лагранжевых многообразий $\Lambda_k(t)=g_k^t\,\Lambda_k(0)$, где g_k^t – фазовый поток нестационарного гамильтонова векторного поля X_k с гамильтонианом λ_k. Пусть $a_{kj}=\alpha_{kj}v_k$, где $v_k(x,\,t)$ – собственный вектор матрицы $H_0(\partial S_k/\partial x,\,x,\,t)$ с собственным значением $\lambda_k(\partial S_k/\partial x,\,x,\,t)$. Тогда соотношение $La_{kj}=M_k a_{kj-1}$ превращается в дифференциальное уравнение для α_{kj} – так наз. уравнение переноса. Уравнение переноса, поднятое на $\Lambda_k(t)$, является обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль интегральных кривых поля X_k.

Построенная асимптотика представима как результат применения канонич. оператора Маслова к соответствующим функциям на $\Lambda_k(t)$ (см. [2]). Это дает продолжение асимптотики на любой отрезок времени.

Асимптотика решения К. з. строится также для комплексной начальной фазы φ и комплексных собственных значений символа с помощью комплексного ростка (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Гийемин В., Стернберг С., Геометрические асимптотики, пер. с англ., М., 1981; [2] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978; [3] Маслов В. П., Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений, М., 1987; [4] Воропаева Г. А., Дубнов В. Л., Маслов В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 31, М., 1987, с. 93–192.

В. Л. Дубнов.

КОШИ ИНТЕГРАЛ – интегральный оператор вида

$$(Kf)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D,$$

восстанавливающий значения *аналитической функции* f в D по ее граничным значениям.

К. и. впервые встречается в работах О. Коши (A. Cauchy, 1831) и служит основой для интегральной формулы Коши. Обобщением К. и. на случай разомкнутых контуров и плотностей, не представляющих собой граничные значения аналитич. функций, является сингулярный интеграл типа Коши, понимаемый в смысле *главного значения*.

В пространственном случае аналогом К. и. выступает Коши–Лере–Фантаппье интеграл

$$(Kf)(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma}f(\zeta)\frac{\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta)}{\langle\eta,\zeta-z\rangle^n},$$

где n-форма

$$\omega(\zeta)=d\zeta^1\wedge\ldots\wedge d\zeta^n,$$

$(n-1)$-форма

$$\omega'(\eta)=\sum_{k=1}(-1)^{k-1}\eta^k d\eta^1\wedge\ldots\wedge d\eta^k\wedge\ldots\wedge d\eta^n,$$

а γ суть $(2n-1)$-мерный цикл пространства $\mathbb{C}^n_\zeta\wedge\mathbb{C}^n_\eta$, лежащий над границей области $D\subset\mathbb{C}^n_\zeta$ и накрывающий ее один раз. Для конкретной области $D\subset\mathbb{C}^n$ этот интеграл дает возможность построения целого класса интегральных представлений, среди к-рых наиболее важны для приложений представители с голоморфным ядром. В настоящее время имеются явные формулы для шара, полидиска, аналитич. полиэдров, строго псевдовыпуклых областей, трубчатых областей над конусом, областей Дайсона и др.

Лит.: [1] Айзенберг Л. А., Южаков А. П., Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, 1979; [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 3 изд., ч. 1–2, М., 1985; [4] Владимиров В. С., Сергеев А. Г., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 8, М., 1985, с. 191–266; [5] Хенкин Г. М., там же, т. 7, М., 1985, с. 23–124.

Ю. Е. Хохлов.

КОШИ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА – см. *Аналитическая функция.*

КОШИ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА – см. *Аналитическая функция.*

КОШИ ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Пространство-время* теории относительности.

КОШИ ТЕОРЕМА – теорема об обращении в нуль интеграла от *аналитической функции*, взятого вдоль замкнутого контура. Точнее, пусть функция $f(t)$ аналитична в области D, а γ – кусочно гладкий контур, лежащий в D и не содержащий внутри себя особенностей функции $f(z)$. Тогда, согласно К. т., контурный интеграл

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

равен нулю. Доказана О. Коши (A. Cauchy, 1825). Геометрически К. т. означает, что векторное поле, компонентами к-рого являются, соответственно, вещественная и мнимая части аналитич. функции, потенциально и соленоидально, то есть его дивергенция и ротор равны нулю. Справедливо и обратное утверждение (теорема Мореры): если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и такова, что

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

для любого кусочно гладкого замкнутого контура γ, лежащего в D, то $f(z)$ аналитична в D. К. т. играет важную роль в теории аналитич. функций. На ней основано представление аналитич. функции в виде *Коши интеграла*, она используется в теории *вычетов* и т. д.

См. также *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

КОШИ–АДАМАРА ТЕОРЕМА – см. *Степенной ряд.*

КОШИ–АДАМАРА ФОРМУЛА – см. *Степенной ряд.*

КОШИ–ПУАНКАРЕ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА – см. *Аналитическая функция.*

КОШИ–РИМАНА СИСТЕМА – см. *Аналитическая функция.*

КОШИ–РИМАНА УСЛОВИЯ, Д'Аламбера–Эйлера условия,– условия на действительную $u=u(x, y)$ и мнимую $v=v(x, y)$ части функции комплексного переменного

$$w=f(z)=u+iv,\ z=x+iy,$$

обеспечивающие моногенность и аналитичность $f(z)$ как функции комплексного переменного.

Для того чтобы функция $w=f(z)$, определенная в нек-рой области D комплексной плоскости z, была моногенной в точке $z_0=x_0+iy_0$, то есть имела производную в точке z_0 как функция комплексного переменного z, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части u и v были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции действительных переменных x и y и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Если К.–Р. у. выполнены, то производная $f'(z)$ представима в любой из следующих форм:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для того чтобы однозначная в области D функция $f(z)$ была аналитической в D, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части были дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими К.–Р. у. всюду в D. Функции u и v класса $C^2(D)$, удовлетворяющие К.–Р. у. (1), являются, каждая по отдельности, *гармоническими функциями* от x и y; условия (1) суть условия сопряженности этих двух гармонич. функций: зная одну из них, вторую можно найти интегрированием.

Условия (1) справедливы для любых двух ортогональных направлений s и n, ориентированных взаимно так же, как оси Ox и Oy в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Напр., в полярных координатах (r, φ) при $r\neq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Введя операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

К.–Р. у. (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0.$$

Таким образом, дифференцируемая функция $f(z, \bar z)$ переменных z и $\bar z$ является аналитич. функцией от z тогда и только тогда, когда $\partial f/\partial \bar z=0$.

Для аналитич. функций многих комплексных переменных

$$z=(z_1, z_2, \ldots, z_n),\ z_k=x_k+iy_k,\ k=1, 2, \ldots, n,$$

К.–Р. у. записываются в виде переопределенной при $n>1$ системы уравнений с частными производными для функций

$$u=\mathrm{Re}\,f(z)=u(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$v=\mathrm{Im}\,f(z)=v(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n):$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{\partial v}{\partial y_k},\quad \frac{\partial u}{\partial y_k}=-\frac{\partial v}{\partial x_k},\quad k=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

или, при помощи операторов комплексного дифференцирования, в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}=0,\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Функции u и v класса $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющие условиям (2), являются при $n\geqslant 1$, каждая по отдельности, *плюригармоническими функциями* от переменных x_k и y_k. Плюригармонич. функции при $n>1$ составляют собственный подкласс класса гармонич. функций. Условия (2) суть условия сопряженности двух плюригармонич. функций u и v: зная одну из них, другую можно найти интегрированием.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 1; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 1, гл. 1, ч. 2, гл. 1. *Е. Д. Соломенцев.*

КОШИ–ШВАРЦА НЕРАВЕНСТВО – см. *Шварца неравенство.*

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Производящий функционал.*

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА – задача, в которой из некоторого класса функций, определенных в данной области, требуется найти ту, которая удовлетворяет на границе (крае) этой области заданным условиям. Функции, описывающие конкретные явления природы (физич., химич. и др.), как правило, представляют собой решения уравнений математич. физики, выведенных из общих законов, к-рым подчиняются эти явления. Когда рассматриваемые уравнения допускают целые семейства решений, дополнительно задают так наз. краевые (граничные) или начальные условия, позволяющие однозначно выделить интересующее нас решение. В то время как краевые условия задаются исключительно на граничных точках области, где ищется решение, начальные условия могут оказаться заданными на определенном множестве точек внутри области. Напр., уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0 \tag{1}$$

имеет бесконечное множество решений

$$u(x_1, x_2)=f(x_1+x_2)+f_1(x_1-x_2),$$

где f и f_1 – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Однако в прямоугольнике $-a \leqslant x_2 \leqslant a$, $0 \leqslant x_1 \leqslant l$, плоскости с прямоугольными декартовыми координатами x_1, x_2 уравнение (1) имеет единственное решение $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющее краевым

$$u(0, x_2) = 0,\ u(l, x_2) = 0,\ -a \leqslant x_2 \leqslant a, \qquad (2)$$

и начальным

$$\left.\begin{aligned} u(x_1, 0) &= \varphi(x_1), \\ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} &= \psi(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

условиям. При этом соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции φ и ψ считаются наперед заданными. Если переменное x_2 есть время t, то решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3), описывает колебание упругой струны длины l с концами, закрепленными в точках (0, 0) и (0, l). Изложенная задача нахождения решения уравнения (1) при условиях (2) и (3) – простейший пример так наз. смешанной задачи.

Вообще, краевыми называют задачи, в к-рых в заданной области G пространства независимых переменных $(x_1, ..., x_n) = x$ ищется решение $u(x) = u(x_1, ..., x_n)$ уравнения

$$Du(x) = 0,\ x \in G, \qquad (4)$$

при требовании, что искомая функция $u(x)$ на границе S в области G удовлетворяет краевому (граничному) условию

$$Bu(y) = 0,\ y \in S, \qquad (5)$$

где D и B – заданные операторы, причем, как правило, D – дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор. Граница S называется носителем краевых данных (5).

Когда операторы D и B линейны, К. з. (4), (5) называется линейной. В предположениях, что S является $(n-1)$-мерной гиперповерхностью, D – линейным дифференциальным оператором 2-го порядка

$$Du(x) \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u - F(x),$$

а

$$Bu(y) \equiv \dot{u}(y) - f(y),$$

где A_{ij}, B_i, C, F, f – заданные функции, задача (4), (5) называется первой краевой задачей, или *Дирихле задачей*. Если же

$$Bu(y) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(y)\frac{\partial u}{\partial y_i} - f(y),$$

где a_i, $i = 1, ..., n$, f – заданные функции, то задача (4), (5) называется задачей с наклонной (косой) производной. В частности, когда вектор $(a_1, ..., a_n)$ совпадает с конормалью к S, задача с наклонной производной носит название второй краевой задачи, или *Неймана задачи*. Задача Дирихле (Неймана) называется однородной, если

$$F(x) = 0, f(y) = 0.$$

Задачи Дирихле и Неймана хорошо исследованы в ограниченных областях с достаточно гладкой границей в случае равномерной эллиптичности оператора D с действительными коэффициентами.

При требовании достаточной гладкости коэффициентов операторов D и B и равномерной эллиптичности оператора D справедливы следующие утверждения: 1) число k линейно независимых решений однородной задачи Дирихле (Неймана) конечно; 2) для разрешимости задачи Дирихле (Неймана) необходимо и достаточно, чтобы функции $F(x)$ и $f(y)$ были подчинены дополнительным ограничениям типа условий ортогональности, число к-рых равно k; 3) при соблюдении условия $C(x) \leqslant 0$, $x \in G$, задача Дирихле всегда имеет, и притом единственное, решение; 4) в области G достаточно малого диаметра задача Дирихле всегда имеет, и притом единственное, решение и 5) при однозначной разрешимости задачи Дирихле (Неймана) малое изменение краевых данных вызывает малое изменение решения (то есть решение устойчиво).

Когда дифференциальный оператор D не является эллиптическим, К. з. (4), (5) может вовсе не иметь содержательного смысла, если часть границы S области G не освободить от краевых данных и на структуру носителя краевых данных не наложить определенные (порой весьма сильные) ограничения.

Особо ставятся К. з., когда в разных частях рассматриваемой области G дифференциальный оператор D принадлежит различным (эллиптич., гиперболич. и параболич.) типам [то есть когда уравнение (4) является уравнением смешанного типа].

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977. *А. В. Бицадзе.*

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, граничная задача, теории аналитических функций – задача нахождения аналитической в некоторой области функции по заданному соотношению между краевыми (граничными) значениями ее действительной и мнимой частей. Впервые такая задача была поставлена Б. Риманом (B. Riemann, 1857). Д. Гильберт (D. Hilbert, 1912) исследовал краевую задачу в следующей постановке (задача Римана–Гильберта): найти функцию $\Phi(z) = u + iv$, аналитическую в односвязной области S^+ с контуром L, непрерывную в $S^+ \cup L$, по краевому условию

$$\mathrm{Re}\,(a + ib)\Phi = au - bv = c, \qquad (1)$$

где a, b, c – заданные на L действительные непрерывные функции. Первоначально Д. Гильберт привел эту задачу к сингулярному интегральному уравнению с целью дать пример приложения такого уравнения.

Задача (1) может быть сведена к последовательному решению двух задач Дирихле.

Близко к задаче (1) является задача, к к-рой пришел А. Пуанкаре (H. Poincaré) при разработке математич. теории приливов. Задача Пуанкаре состоит в определении гармонической в области S^+ функции $u(x, y)$ по условию на границе L этой области:

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n} + B(s)\frac{\partial u}{\partial s} + C(s)\,u = f(s), \qquad (2)$$

где $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $f(s)$ – заданные на L действительные функции, s – дуговая абсцисса, n – нормаль к L.

Под обобщенной задачей Римана–Гильберта–Пуанкаре (задача Р.–Г.–П.) понимается следующая линейная граничная задача: найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в S^+, по граничному условию

$$\mathrm{Re}\,\{\lambda\Phi\} = f(t_0),\ t_0 \in S^+, \qquad (3)$$

где λ – интегро-дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$\lambda\Phi = \sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\Phi_t^{(j)}(t_0) + \int_L h_j(t_0, t)\Phi^{(j)}(t)ds\right\}, \qquad (4)$$

в к-рой $a_0(t_0)$, ..., $a_m(t)$ – заданные на L, вообще комплексные, функции класса H (то есть удовлетворяющие условию Гельдера), $f(t)$ – заданная действительная функция класса H, $h_j(t_0, t)$ – заданные на L, вообще комплексные, функции вида

$$h_j(t_0, t) = \frac{h_j^0(t_0, t)}{|t - t_0|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

причем $h_j^0(t_0, t)$ – функции класса H по обеим переменным. В правой части (4) под $\Phi^{(j)}(t_0)$ подразумевается граничное значение на L изнутри области S^+ производной j-го порядка функции $\Phi(z)$.

Частным случаем задачи Р.–Г.–П. при $m=0$, $h_j(t_0, t)=0$ является задача Римана–Гильберта; задача Пуанкаре также является частным случаем сформулированной задачи. К задаче Р.–Г.–П. приводятся многие важные граничные задачи, напр. граничные задачи для уравнений с частными производными эллиптич. типа с двумя независимыми переменными.

Задача Римана – Гильберта тесно связана с так наз. задачей линейного сопряжения. Если L – простая гладкая или кусочно гладкая линия, состоящая из замкнутых контуров, ограничивающих нек-рую область S^+ плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, остающуюся слева при обходе L, то дополнение $S^+ \cup L$ до плоскости z обозначается через S^-. Пусть функция $\Phi(z)$ задана и непрерывна в окрестности линии L всюду, кроме, быть может, самой L. Говорят, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на точку $t \in L$ слева (или справа), если $\Phi(z)$ стремится к определенному пределу $\Phi^+(t)$ [или $\Phi^-(t)$], когда z стремится к t по любому пути, оставаясь слева (или справа) от L.

Функцию $\Phi(z)$ называют кусочно аналитической с линией скачка L, если она аналитична в S^+ и S^- и непрерывно продолжима на каждую точку $t \in L$ как слева, так и справа.

В задаче линейного сопряжения требуется определить кусочно аналитич. функцию $\Phi(z)$ с линией скачка L, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L,$$

где $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на L функции класса H.

На базе теории задачи линейного сопряжения построена теория одномерных сингулярных интегральных уравнений.

Лит.: [1] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [2] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963.

А. В. Бицадзе.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА теории потенциала – основная задача теории *потенциала*. Поскольку *ньютонов потенциал* и *логарифмический потенциал* удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям с частными производными эллиптич. типа, а именно *Лапласа уравнению* в областях, свободных от порождающих эти потенциалы масс, и *Пуассона уравнению* в областях, занятых массами, к числу К. з. теории потенциала относят в первую очередь *краевые задачи* для эллиптич. уравнений и систем.

1) *Дирихле задача*, или первая краевая задача, когда требуется найти потенциал $u(x)$ в нек-рой области D по заданным его непрерывным значениям

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma,$$

на границе области $\partial D = \Gamma$, причем распределение масс внутри D предполагается известным. Эта задача в теории потенциала является основной.

2) *Неймана задача*, или вторая краевая задача, когда требуется найти потенциал в D по заданным непрерывным значениям его нормальной производной

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma.$$

3) *Смешанная задача*, или третья краевая задача, когда на Γ задается линейная комбинация

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \alpha(x)u(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma. \qquad (*)$$

4) Задача с косой производной, когда на Γ в условии (*) вместо производной по нормали $\partial u(x)/\partial n$ к Γ фигурирует производная $\partial u(x)/\partial l$ по произвольному, вообще говоря, направлению $l = l(x)$, $x \in \Gamma$.

Е. Д. Соломенцев.

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ – см. *Краевая задача*.

КРАМЕРСА – КРОНИГА СООТНОШЕНИЯ – *дисперсионные соотношения* для комплексного показателя преломления

$$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) - i\varkappa(\omega)$$

среды с частотной дисперсией, связывающие ее показатель преломления $n(\omega)$ и коэффициент поглощения $\varkappa(\omega)$ (ω – частота электромагнитной волны):

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx^2\varkappa(x)}{x^2-\omega^2} = n(0) + \frac{\omega^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx^2\varkappa(x)}{x^2(x^2-\omega^2)}$$

(прямое К.–К. с.);

$$\varkappa(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx\, n(x)}{x^2-\omega^2}$$

(обратное К.–К. с.). Установлены Х. Крамерсом (H. Kramers) и Р. Кронигом (R. Kronig) в 1927. К.–К. с. отражают аналитичность функции $\tilde{n}(\omega)$ в верхней полуплоскости частоты ω, рассматриваемой как комплексная переменная.

Физически К.–К. с. выражают существование жесткой связи дисперсии световой волны (зависимости показателя преломления n от ω) и ее поглощения. Уже для простейшей среды – идеального атомарного газа с

$$\tilde{n}(\omega) = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m}\sum_k \frac{f_{0k}}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\gamma}$$

(N – концентрация атомов, ω_{0k} и f_{0k} – частота перехода и сила осцилляторов для k-го атомного уровня, e и m – заряд и масса электрона, γ – слабое затухание) вблизи каждой линии перехода обнаруживаются связанные друг с другом дисперсия и поглощение света. К.–К. с. показывают, что такая связь существует для любой среды безотносительно к конкретным механизмам дисперсии и поглощения. В частности, у непоглощающей (прозрачной) во всей области частот среды не было бы и дисперсии.

Будучи частным (и исторически первым) примером дисперсионных соотношений, К.–К. с. имеют универсальную форму, не зависящую от структуры и динамики среды. Они выводятся из общего принципа причинности, примененного к электродинамич. функциям отклика. Однако поскольку связь комплексного показателя преломления $\tilde{n}$ с этими функциями в общем случае сложна, вывод об аналитичности функции $\tilde{n}(\omega)$ можно сделать не всегда и соответственно К.–К. с. оказываются справедливыми далеко не для всех типов сред. Так, в случае однородной изотропной среды с пространственной дисперсией $\tilde{n}(\omega)$ определяется (неявно) уравнением

$$\tilde{n}(\omega) = [\varepsilon_t(\omega, q)]^{1/2} = [\varepsilon(\omega, q)\mu(\omega, q)]^{1/2}, \qquad (*)$$
$$q^2 = \tilde{n}^2\omega^2/c^2,$$

где ε – обычная (продольная), $\varepsilon_t = \varepsilon - q^2c^2(1/\mu - 1)/\omega^2$ – поперечная диэлектрич. проницаемости, μ – магнитная проницаемость, q – волновой вектор. Хотя функция $\varepsilon_t(\omega, q)$ аналитична в верхней полуплоскости ω и не имеет в этой области нулей [они превратились бы в точки ветвления функции $\tilde{n}(\omega)$ из-за наличия корня в (*)], зависимость ε_t от q усложняет вид функции $\tilde{n}(\omega)$ и в общем случае лишает нас информации об ее аналитич. свойствах. К.–К. с. во всяком случае справедливы для любого равновесного немагнитного ($\mu = 1$) вещества со слабой пространственной дисперсией ($ql \sim \omega l/c \ll 1$, l – характерный внутренний параметр среды размерности длины). В этом случае $\varepsilon_t(\omega, q) \approx \varepsilon(\omega)$, $\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$, где $\varepsilon(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости ω и не имеет в этой области нулей благодаря условию $\operatorname{Im}\varepsilon \geqslant 0$.

Под К.–К. с. в широком смысле часто понимаются дисперсионные соотношения для электродинамич. функций отклика и связанных с ними величин. Сюда относятся функции

$$1/\varepsilon(\omega, q),\ \varepsilon(\omega, 0) \equiv \varepsilon(\omega),\ 1/[\omega^2\varepsilon_t(\omega, q) - q^2c^2],$$

а также

$$\varepsilon_t(\omega, q) \text{ и } 1/\varepsilon_t(\omega, q).$$

У функций $\varepsilon(\omega, q)$ и $1/\mu(\omega, q)$ при достаточной силе взаимодействия между частицами среды [когда $\varepsilon(0, q) \leqslant 0$] возникает полюс в верхней полуплоскости ω, нарушающий дисперсионные соотношения. Не существует также К.–К. с. и для $\mu(\omega, q)$, а об аналитич. свойствах функций

$$\mu(\omega, 0) \equiv \mu(\omega) \text{ и } 1/\mu(\omega)$$

вообще нет информации. Отсутствие К.–К. с. для перечисленных величин понимается как невозможность их общего и строгого вывода, что не исключает справедливости этих соотношений в отдельных частных случаях.

К.–К. с. используются при теоретич. описании свойств среды и особенностей распространения в ней световой волны. В практич. плане они дают возможность определить показатель преломления $n(\omega)$ по приближенному (эмпирическому) виду коэффициента поглощения $\varkappa(\omega)$.

Лит.: [1] Агранович В. М., Гинзбург В. Л., Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, М., 1979; [2] Киржниц Д. А., «Успехи физич. наук», 1987, т. 152, с. 399. *Д. А. Киржниц.*

КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ – смещение к красному концу спектра спектральных линий наблюдаемого излучения. К. с. обусловлено сильными гравитационными полями (гравитационное К. с.) или эффектом Доплера и описывается величиной z, определяемой по формуле

$$1 + z = \nu_1/\nu_2,$$

где ν_1 – излучаемая частота, а ν_2 – наблюдаемая частота. К. с. можно измерить также исходя из формулы

$$1 + z = \Delta\tau_2/\Delta\tau_1,$$

где $\Delta\tau_1$ – промежуток собственного времени на мировой линии источника между отправлением двух последовательных сигналов, а $\Delta\tau_2$ – промежуток собственного времени наблюдателя между приемом им этих сигналов. Совместное влияние сильных полей и эффекта Доплера на К. с. проявляется при коллапсе массивных тел. При этом энергия излучения, уходящего с поверхности тела (напр., звезды), уменьшается как за счет удаления поверхности от наблюдателя, так и за счет влияния сильного поля. В *космологических моделях*, где вещество всегда находится в состоянии расширения, свет, достигший нек-рого наблюдателя, испытывает К. с. относительно источника. Во многих случаях величина z монотонно зависит от расстояния от источника до наблюдателя (в моделях Фридмана для не слишком больших расстояний линейным образом), так что в этих случаях имеет смысл говорить об объекте, расположенном на К. с. z. Современные астрофизич. наблюдения указывают на «разбегание» галактик в связи с наличием К. с. в их спектрах.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988. *А. Т. Ильичев.*

КРАСОТА кварков ого числа – см. *Аромат.*

КРАТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ, перемешивание кратности r,– свойство *динамической системы*, выражаемое в случае эндоморфизма T вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ равенством

$$\lim_{n\to\infty}\left[\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{r} T^{-k_i(n)}A_i\right) - \prod_{i=0}^{r}\mathsf{P}(A_i)\right] = 0,$$

где $A_0, \ldots, A_r$ – любые множества из $\mathcal{F}$ и $\{k_i(n),\ n = 1, 2, \ldots\}$, $i = 0, 1, \ldots, r$,– любые последовательности натуральных чисел, для к-рых

$$\lim_{n\to\infty}\ \min_{0\leqslant i<j\leqslant r} |k_i(n) - k_j(n)| = 0.$$

Для динамич. системы с непрерывным временем К. п. определяется аналогично. Перемешивание кратности 1 есть просто *перемешивание*; термин «К. п.» обычно употребляется по отношению к перемешиванию кратности $r \geqslant 2$. Вопрос о совпадении или несовпадении классов r-кратно и $(r+1)$-кратно перемешивающих динамич. систем не решен ни при одном r (очевидно, первый из этих классов содержит второй).

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Известия АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 4, с. 329–40; [2] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980. *Б. М. Гуревич.*

КРАТНОСТЬ вырождения – см. *Вырождение.*

КРАТНОСТЬ полюса – см. *Полюс, Римановa поверхность.*

КРАТНЫЙ РЯД ЛОРАНА – см. *Лорана ряд.*

КРАТНЫЙ СТЕПЕННОЙ РЯД – см. *Степенной ряд.*

КРЕЙНА ПРОСТРАНСТВО – см. *Гильбертово пространство, Пространство с индефинитной метрикой.*

КРЕНА УГОЛ – см. *Ориентации углы.*

КРИВИЗНА – собирательное название ряда количественных характеристик (численных, векторных, тензорных), описывающих отклонение свойств того или иного объекта (кривой, поверхности, риманова пространства) от соответствующих объектов (прямая, плоскость, евклидово пространство и др.), которые считаются плоскими. Обычно понятия К. вводятся локально, то есть в каждой точке. Эти понятия К. связаны с рассмотрением отклонений 2-го порядка малости, поэтому предполагается задание изучаемого объекта гладкими функциями. В ряде случаев вводят интегральные понятия, к-рые сохраняются и при отказе от условия гладкости. Как правило, тождественное обращение в нуль К. во всех точках приводит к совпадению (на малых участках, но не в целом) изучаемого объекта с «плоским» объектом.

При рассмотрении поверхности S или кривой L, помещенных в 3-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, можно говорить о внешней К. этих геометрич. образов (то есть о К. по отношению к вмещающему их пространству $\mathbb{R}^3$). С другой стороны, во многих вопросах естественно рассматривать внутреннюю К. S (или L), к-рая может быть обнаружена путем измерений только на S (или на L). Зная метрич. соотношения в пространстве, мы знаем их и на поверхности (и на кривой), и в этом смысле внешняя К. дает более полную информацию, чем внутренняя. Однако в том случае, когда о вмещающем пространстве нам заранее ничего не известно (как это случается при изучении римановых пространств, в частности, в теории относительности), рассмотрение внутренней К. приобретает первостепенный интерес.

Кривизна (внешняя) кривой L есть скорость измерения направления кривой, то есть

$$\boldsymbol{k} = \frac{d\tau}{ds},$$

где τ – касательный единичный вектор, s – длина дуги. Таким образом, кривизна $\boldsymbol{k}$ есть вектор, направленный перпендикулярно к кривой. Для плоской кривой модуль $|\boldsymbol{k}| = k$ равен абсолютной величине производной

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = k,$$

где θ – угол, образованный касательной к кривой с осью абсцисс, и представляет собой, следовательно, скорость вращения касательной. Величина, обратная k, именуется радиусом кривизны. Внутреннюю К. кривой L обычно не определяют: на кривой можно измерять только длины, поэтому внутренние измерения не позволяют отличить L от прямой.

Внешняя кривизна поверхности S в точке есть мера уклонения S от касательной плоскости и дается тензором h_{ik} *второй квадратичной формы* поверхности. Полное свертывание этого тензора с единичным вектором заданного на поверхности направления дает К. соответствующего нормального сечения. Этот тензор геометрически характеризуется также главными взаимно перпендикулярными на-

правлениями t_1, t_2, по к-рым К. таких сечений имеет экстремальные значения:

$$k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2}.$$

К. в направлении, составляющем угол θ с t_1, определяется по формуле:

$$k = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Величина $K = k_1 k_2 = \frac{1}{R_1 R_2}$ именуется гауссовой, или полной, кривизной поверхности.

Внутренняя кривизна поверхности. Пусть метрич. форма поверхности S имеет вид

$$ds^2 = g_{11}(u^1, u^2)(du^1)^2 + 2g_{12}(u^1, u^2)du^1 du^2 + \\ + g_{22}(u^1, u^2)(du^2)^2 = g_{ik}du^i du^k.$$

На поверхности S можно измерять длины, площади, а также углы между гладкими кривыми, исходящими из одной точки. Однако обычное понятие параллельности двух векторов на поверхности нуждается в уточнении. Дело в том, что параллельное в обычном смысле перенесение вектора, принадлежащего поверхности (касательного к поверхности) из заданной точки S в другую, дает вектор, не лежащий на поверхности (не касательный к поверхности), а такой вектор, с точки зрения внутренних измерений, не может быть охарактеризован. Оказывается естественным рассматривать следующий процесс: исходный вектор скользит параллельно самому себе по нек-рой кривой $L\{u^i = u^i(t)\}$, одновременно проектируясь на касательную плоскость, и, таким образом, в каждой точке кривой получается вектор $\boldsymbol{a}$, лежащий на поверхности (длина вектора при этом не меняется). Конечный вектор может быть найден из системы уравнений

$$\frac{da^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} a^j \frac{du^k}{dt} = 0 \qquad (1)$$

(где Γ^i_{jk} – *Кристоффеля символы*), то есть использованием только внутренних характеристик поверхности, и про него говорят, что он получен из исходного в результате внутреннего параллельного переноса вдоль кривой L.

При обходе замкнутого контура и возвращении в исходную точку перенесенный вектор, вообще говоря, не совпадает с исходным, а образует с ним угол φ. Внутренней кривизной поверхности S в точке M называется предел

$$\lim \varphi/\sigma = K$$

(где σ – площадь, ограниченная контуром) при стягивании контура в точке M. Внутренняя К. поверхности совпадает с полной К.

Риманова кривизна. Риманова геометрия развертывается в результате задания в изучаемом пространстве R_n расстояния между бесконечно близкими точками

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k. \qquad (2)$$

Объектом изучения являются внутренние свойства пространства, то есть свойства, к-рые могут быть получены из линейного элемента (2). Естественным образом появляется понятие длины, площади, угла. Как и в случае поверхности, возникает необходимость определить понятие параллельного переноса вектора и делается это, по существу, на основании аналогичных соображений; формально можно пользоваться уравнениями (1), где

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s}\right).$$

Пусть S – двумерная плоскость в R_n, имеющая в точке M направление, определяемое касательными единичными векторами ξ^i и η^i (взаимно перпендикулярными). Совершая внутренний параллельный перенос вектора, принадлежащего S, вокруг точки M, опять приходят к рассмотрению отношения φ/σ (φ – угол между исходным вектором и проекцией конечного вектора на S, σ – величина площадки на S, охваченной контуром, по к-рому производится перенос); предел этого отношения называется кривизной пространства R_n в точке M в заданном двумерном направлении. Подсчеты показывают, что

$$\lim \varphi/\sigma = R_{ijkl}x^{ij}x^{kl},$$

где $x^{ij} = 1/2(\xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i)$ – бивектор, характеризующий двумерное направление (нормаль к поверхности S). Появляющийся при этом тензор R_{ijkl} называется ковариантным тензором кривизны, он имеет выражение

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^j \partial x^k}\right) - \\ - g_{rs}\left(\Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{il} - \Gamma^r_{jl}\Gamma^s_{ik}\right).$$

Из тензора R_{ijkl} свертыванием с метрич. тензором g^{ik} может быть получен тензор Риччи

$$R_{jl} = g^{ik}R_{ijkl},$$

играющий важную роль в теории относительности. Вторичным свертыванием из R_{jl} получается инвариант $R = g^{jl}R_{jl}$, именуемый скалярной кривизной.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

П. И. Лизоркин.

КРИВИЗНЫ ЗАРЯДОВОГО ПРОСТРАНСТВА ТЕНЗОР – *тензор* напряженности *калибровочного поля*. Он задается выражением

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + [A_\mu, A_\nu],$$

где $A_\mu(x)$ – калибровочное поле, являющееся элементом алгебры Ли калибровочной группы Ω. При калибровочных преобразованиях из группы Ω тензор кривизны преобразуется следующим образом:

$$F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu}\omega^{-1}.$$

При параллельном переносе поля $\Psi(x)$, реализующего представление калибровочной группы Ω, вдоль замкнутого контура, имеющего вид параллелограмма со сторонами $\Delta_1 x_\mu$, $\Delta_2 x_\mu$, полное изменение поля $\Psi(x)$ равно

$$\Delta_{12}\Psi(x) = \Gamma(F_{\mu\nu})\Psi\Delta_1 x_\mu \wedge \Delta_1 x_\nu = \\ = \Gamma(F_{\mu\nu})\Psi(\Delta_1 x_\mu \Delta_2 x_\nu - \Delta_1 x_\nu \Delta_2 x_\mu),$$

где $\Gamma(F_{\mu\nu})$ – представление матрицы $F_{\mu\nu}$, отвечающее заданному представлению группы Ω. Тензор $F_{\mu\nu}$ является коммутатором ковариантных производных

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$$

и тождество Якоби:

$$[[\nabla_\mu, \nabla_\nu], \nabla_\sigma] + \text{цикл. пер.} = 0$$

приводит к тождеству Бианки для $F_{\mu\nu}$:

$$\nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \text{цикл. пер.}$$

А. А. Славнов.

КРИВИЗНЫ РАДИУС – см. *Кривизна*.

КРИВИЗНЫ ТЕНЗОР – *тензор* типа (1, 3), получающийся в разложении *кривизны формы* в локальном кобазисе на многообразии M^n. В частности, в голономном кобазисе dx^i, $i = 1, \ldots, n$, компоненты К. т. R^k_{lij} аффинной связности выражаются через объекты связности Γ^k_{ij} и их производные:

$$R^k_{lij} = \partial_i\Gamma^k_{jl} - \partial_j\Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^k_{jp}\Gamma^p_{il}.$$

О кривизне тензора Римана см. *Римана тензор*.

М. И. Войцеховский.

КРИВИЗНЫ ФОРМА – 2-форма Ω на главном расслоенном пространстве P со структурной группой Ли G, принимающая значения в алгебре Ли g группы G и определяемая формой связности θ, заданной на P, по формуле:

$$d\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta,\theta].$$

К. ф. является мерой отклонения данной связности от локально плоской связности, к-рая характеризуется условием $\Omega = 0$. К. ф. удовлетворяет тождеству Бианки

$$d\Omega = [\Omega, \theta]$$

и определяет алгебру голономии *голономии группы*.

Ю. Г. Лумисте.

КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Траектория.*

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ – см. *Координаты.*

КРИСТАЛЛА УРАВНЕНИЕ – см. *Разностное уравнение*; асимптотика решения.

КРИСТОФФЕЛЯ СИМВОЛ – символ для сокращенного обозначения выражения

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kt}\left(\frac{\partial g_{it}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{jt}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{t}}\right),$$

где g_{ij} – коэффициенты невырожденной дифференциальной квадратичной формы.

КРИСТОФФЕЛЯ – ШВАРЦА ФОРМУЛА – формула

$$f(z) = c\int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (t - a_k)^{\alpha_k - 1} dt + c_1, \qquad (*)$$

дающая интегральное представление функции $f(z)$, конформно отображающей верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность ограниченного многоугольника с вершинами A_k и углами $\pi\alpha_k$ при вершинах ($0 < \alpha_k \leqslant 2$, $k = 1, \ldots, n$). При этом z_0, c, c_1 – нек-рые постоянные, $A_k = f(a_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Постоянную z_0 можно фиксировать произвольно в верхней полуплоскости. Тройку точек из $a_1, \ldots, a_n$, напр. a_1, a_2, a_3, можно задавать произвольно; остальные $n-3$ точки a_k, а также постоянные c, c_1 определяются однозначно, если вершины $A_1, \ldots, A_n$ многоугольника заданы. Формула (*) была получена независимо Э. Кристоффелем (E. Christoffel, 1867) и Г. Шварцем (H. Schwarz, 1869). Интеграл в правой части (*) называют интегралом Кристоффеля – Шварца.

Основная трудность при применении формулы (*) состоит в нахождении неизвестных параметров. При $n > 4$ общие методы неизвестны. Разработаны методы приближенного отыскания параметров К.– Ш. ф.

Ю. Д. Максимов.

КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА функции – точка области определения, в которой дифференциал функции равен нулю. К. т. функции $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ общего положения невырождены. В окрестности такой К. т. функция приводится к сумме квадратов гладкой заменой переменных (см. *Морса лемма*). Классификация ростков функций в К. т. (относительно действия группы гладких замен переменных) связана с группами Вейля серий A, D, E. Всякий росток функции в простой (см. ниже) К. т. приводится голоморфной заменой переменных к одной из следующих нормальных форм:

$$x_1^{k+1} + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (\text{тип } A_k);$$

$$x_1^2 x_2 + x_2^{k-1} + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (k \geqslant 4, \text{ тип } D_k);$$

$$x_1^3 + x_2^4 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (\text{тип } E_6);$$

$$x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (\text{тип } E_7);$$

$$x_2^3 + x_2^5 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (\text{тип } E_8)$$

(см. [1]). Невырожденная К. т. имеет тип A_1. К. т. ростка f функции называется простой, если достаточно малая окрестность f (в пространстве ростков) пересекается лишь с конечным числом орбит действия группы голоморфных замен переменных. Простейшие не простые К. т. составляют три однопараметрич. семейства:

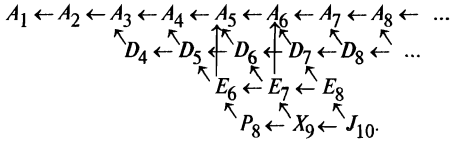
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \alpha x_1 x_2 x_3 + x_4^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (\alpha^3 + 27 \neq 0, \text{ тип } P_8);$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \alpha x_1^2 x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (\alpha^2 \neq 4, \text{ тип } X_9);$$

$$x_1^3 + x_2^6 + \alpha x_1^2 x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (4\alpha^3 + 27 \neq 0, \text{ тип } J_{10}).$$

К. т. с разным значением параметра α не эквивалентны (то есть не переводятся друг в друга заменой переменных).

Пусть $F(\cdot, \lambda)$ – общее семейство функций, зависящих от дополнительных параметров α. Для почти всех λ функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет лишь невырожденные К. т. При исключительных значениях параметров λ функция $F(\cdot, \lambda)$ может иметь невырожденные К. т. В общем семействе функций, зависящих от одного параметра λ, при исключительных значениях λ могут встретиться лишь К. т. типа A_2 (неустранимые малым шевелением семейства). В двупараметрич. общем семействе кроме A_2 могут встречаться еще К. т. типа A_3. В трехпараметрическом – еще типов A_4, D_4. В четырехпараметрическом – A_5, D_5. В пятипараметрическом – A_6, D_6, E_6. При числе параметров 6 и более в семействе общего положения встречаются не простые К. т. Критич. точка типа Ⓑ называется примыкающей к К. т. типа Ⓒ (обозначение Ⓑ ←Ⓒ), если при малом шевелении ростка функции с К. т. типа Ⓒ можно получить росток с К. т. типа Ⓑ. Все примыкания простых К. т. выглядят так:



Ко всякой не простой К. т. примыкает одна из К. т. типов P_8, X_9, J_{10} (см. [1]).

См. также *Вариационное исчисление в целом, Риманова поверхность.*

Лит.: [1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов, М., 1982.

С. В. Чмутов.

КРИТИЧЕСКИЙ ПУТЬ – см. *Вариационное исчисление в целом.*

КРИТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Вариационное исчисление в целом.*

КРИЧЕВЕРА МЕТОД – см. *Алгебро-геометрические методы* в теории поля.

КРОНЕКЕРА – ПУАНКАРЕ ИНДЕКС – см. *Пуанкаре индекс.*

КРОССИНГ-СИММЕТРИЯ – см. *Перекрестная симметрия.*

КРОСС-СПИРАЛЬНОСТЬ – см. *Гидромагнитная турбулентность.*

КРУГ СХОДИМОСТИ – см. *Степенной ряд.*

КРУГОВАЯ ЧАСТОТА – см. *Свободное гармоническое колебание.*

КРУГОВОЙ ЭЛЕМЕНТ аналитической функции – см. *Элемент* аналитической функции, *Полная аналитическая функция.*

КРУПНОСТРУКТУРНАЯ НЕРАВНОВЕСНАЯ ЭНТРОПИЯ – см. *Неравновесная энтропия.*

КРУТАЯ ФУНКЦИЯ – функция, удовлетворяющая условиям общности положения, называемым условиями крутизны и введенным Н. Н. Нехорошевым (см. [2]) в связи с проблемой оценки скорости эволюции в возмущен-

ных гамильтоновых системах (*Нехорошева теорема*). Функция H_0, заданная в окрестности точки $I\in\mathbb{R}^n$, называется крутой в точке I на плоскости α, если найдутся числа $c>0$, $\delta>0$ и $\alpha\geqslant 1$ такие, что

$$\sup_{0\leqslant\eta\leqslant\xi}\ \inf_{\{I'\in\lambda:|I'-I|=\eta\}}\left|\operatorname{grad}\left(H_0|_\lambda\right)\right|_{I'}>C\xi^\alpha$$

при всех $\xi\in(0,\delta)$. Здесь λ – плоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящая через точку I, $\dim\lambda\neq 0$, а $\operatorname{grad}(H_0|_\lambda)$ – градиент сужения H_0 на λ. Постоянные C и δ называются коэффициентами крутизны, а α – показателем крутизны.

Функция H_0 называется крутой в точке I, если: 1) $|\operatorname{grad}H_0|_I|>g$, где $g>0$, и 2) при $n\geqslant 2$ для каждого $r=1,\ldots,n-1$ существуют числа $C_r>0$, $\delta_r>0$, $\alpha_r\geqslant 1$ такие, что функция H_0 будет крутой в точке I на каждой плоскости размерности r, перпендикулярной вектору $\operatorname{grad}H_0|_I$ с коэффициентами C_r, δ_r и показателем α_r.

Функция H_0 называется крутой в области G с коэффициентами g, $C_1,\ldots,C_{n-1}$, $\delta_1,\ldots,\delta_{n-1}$ и показателями $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$, если эта функция крутая в каждой точке $I\in G$ с этими коэффициентами и показателем α_r.

Некрутые функции бесконечно вырождены: если функция $H_0\in C^\infty$ не является крутой ни в какой окрестности точки I, где $\operatorname{grad}H_0\neq 0$, то коэффициенты Тейлора разложения H_0 в этой точке удовлетворяют бесконечному числу независимых алгебраич. соотношений (см. [3]). Аналитич. функция, определенная в окрестности замыкания ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$, не имеющая критич. точек и такая, что ее ограничение на любую плоскость имеет лишь комплексно-изолированные критич. точки,– К. ф. (см. [1]).

Лит.: [1] Ильяшенко Ю. С., «Успехи математич. наук», 1986, т. 41, в. 1, с. 193–94; [2] Нехорошев Н. Н., «Функциональный анализ и его приложения», 1971, т. 5, в. 4, с. 82–83; [3] его же, «Труды семинара им. И. Г. Петровского», 1979, в. 5, с. 5–50.

А. И. Нейштадт.

КРУТИЗНЫ КОЭФФИЦИЕНТ – см. *Крутая функция.*

КРУТИЗНЫ ПОКАЗАТЕЛЬ – см. *Крутая функция.*

КРУЧЕНИЕ аффинной связности Γ^i_{jk} на многообразии M^n – величина S^i_{jk}, определяемая равенством

$$S^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}.$$

Набор S^i_{jk} задает тензорное поле.

Кручение $\varkappa$ кривой $\boldsymbol{r}(s)$ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ определяется из равенства (s – натуральный параметр):

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\varkappa\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

где

$$\boldsymbol{n}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\Big/\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|$$

– орт главной нормали, а

$$\boldsymbol{b}=\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\boldsymbol{n}\right]$$

– орт бинормали. Если кривая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ отнесена к произвольной параметризации t, то К. $\varkappa$ вычисляется по формуле

$$\varkappa=\frac{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2},\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)}{\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]^2}.$$

В. В. Трофимов.

КРЫЛОВА УГЛЫ – см. *Эйлера углы.*

КУБО ФОРМУЛЫ – см. *Грина функция* в статистической механике.

КУБО – МАРТИНА – ШВИНГЕРА СОСТОЯНИЕ – см. *КМШ-состояние.*

КУБО – МАРТИНА – ШВИНГЕРА УСЛОВИЕ – см. *КМШ-условие, Спектральная плотность.*

КУЗЕНА ПРОБЛЕМА – см. *Аналитическая функция.*

КУЛОНОВСКАЯ КАЛИБРОВКА – *калибровочное условие* вида $\partial_i A_i=0$, $i=1,2,3$. В К. к. нефизич. компоненты поля A_μ отсутствуют и динамич. уравнения включают лишь трехмерно поперечные компоненты поля A_i. Калибровки такого рода называются унитарными, так как в этом случае пространство состояний квантовой теории содержит лишь физич. состояния, и теория явно унитарна. *А. А. Славнов.*

КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ – парный *взаимодействия потенциал* покоящихся электрических зарядов. Назван по имени Ш. Кулона (Ch. Coulomb, 1785), установившего характер взаимодействия точечных электрич. зарядов. К. п. в. двух точечных зарядов q_1 и q_2 имеет вид

$$\Phi(r)=k\frac{q_1q_2}{\varepsilon r},\quad k=\begin{cases}1, & \text{СГС},\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}, & \text{СИ},\end{cases}\qquad (*)$$

где ε – диэлектрич. проницаемость среды, $\varepsilon_0=8{,}85418782(7)\cdot10^{-12}$ ф. м.$^{-1}$ – электрич. постоянная, r – расстояние между зарядами. В случае сферических (радиусом r_0) зарядов формула (*) справедлива при $r\geqslant r_0$. В случае пространственного распределения зарядов с плотностью, соответственно, $\rho_1(x)$, $x\in V_1\subset\mathbb{R}^\nu$, и $\rho_2(y)$, $y\in V_2\subset\mathbb{R}^\nu$ ($\nu=1,2,3$), потенциальная энергия взаимодействия, определяемая К. п. в., имеет вид (СГС):

$$U=\int_{V_1}dx\int_{V_2}dy\frac{\rho_1(x)\rho_2(y)}{\varepsilon|x-y|},\quad x,y\in\mathbb{R}^3,$$

где

$$dx=dx_1dx_2dx_3,\quad dy=dy_1dy_2dy_3,$$

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

Потенциал электростатич. поля точечного заряда (напр., q_1 в (*)) определяется как отношение К. п. в. к величине заряда, внесенного в поле (то есть q_2 в формуле (*)):

$$\Phi(r)=\frac{kq_1}{\varepsilon r}.$$

Соответственно, потенциал электростатич. поля пространственно распределенного заряда

$$\Phi(x)=\int_V dy\frac{\rho(y)}{\varepsilon|x-y|},\quad x,y\in\mathbb{R}^3.$$

К. п. в. удовлетворяет уравнению Пуассона. К. п. в. описывает взаимодействие электрич. зарядов в вакууме и диэлектриках. В плазме, электролитах и полупроводниках происходит экранирование К. п. в. за счет коллективных эффектов. Взаимодействие электрич. зарядов носит при этом иной характер. Так, напр., в пространственно однородной среде оно описывается *Юкавы потенциалом взаимодействия.*

К. п. в. точечных зарядов является неустойчивым (см. *Устойчивый потенциал взаимодействия*) и медленно убывающим; он не удовлетворяет условию регулярности. Эти свойства К. п. в.– одна из причин того, что исследование систем заряженных частиц является одним из наиболее сложных разделов статистич. механики. Методы изучения таких систем связаны с переходом (тем или иным способом, см., напр., *Дебаевское экранирование*) к экранированному К. п. в.

Лит. см. при ст. *Потенциал* и *Дебаевское экранирование.*

А. Л. Ребенко, П. В. Малышев.

КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ – рассеяние в системе двух частиц с потенциалом

$$v_c(x)=n/|x|.$$

Для оператора Шредингера

$$H=-\Delta_x+v_c(x)$$

с кулоновским потенциалом $v_c(x)$ решения задачи рассеяния определяются с помощью модифицированных волновых операторов:

$$W_{\pm}^{c} = \operatorname{s.lim}_{t\to\mp\infty} \exp\{itH\}\exp\{-itH_0 - iW_t(H_0)\},$$

где $W_t(H_0) = \operatorname{sign} t\cdot n/[2(H_0)^{1/2}]\ln 4|t|H_0$, $H_0 = -\Delta_x$. Ядра операторов $W_{\pm}^{c}$ после преобразования Фурье по второму аргументу выражаются через решения уравнения Шредингера $\psi_c^{(\pm)}(x, k)$ формулой

$$W_{\pm}^{c}(x, k) = (2\pi)^{-3/2}\psi_c^{(\pm)}(x, k).$$

Функция $\psi_c(x, k)$, удовлетворяющая уравнению Шредингера:

$$\{-\Delta_x + v_c(x) - k^2\}\psi_{c(x,k)} = 0,$$

может быть явно выражена через вырожденную гипергеометрич. функцию $\Phi(a, c, x)$ формулой

$$\psi_c(x, k) = e^{-\pi\eta/2}\Gamma(1 + i\eta)\Phi(-i\eta, 1, i|k|\xi)e^{i(x,k)},$$

где $\eta = n/2|k|$, $\xi = |x| - (k/|k|, x)$.

Лит.: [1] Dollard J., «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 729–38; [2] Ньютон Р., Теория рассеяния волн и частиц, пер. с англ., М., 1969. *С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.*

КУММЕРА РЯД – см. *Вырожденная гипергеометрическая функция.*

КУМУЛЯНТ – см. *Кумулянтное разложение, Характеристическая функция.*

КУМУЛЯНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ – разложение в степенной ряд логарифма характеристической функции $\varphi(t)$ случайной величины ξ:

$$\ln\varphi(t) \equiv \ln \mathsf{E}e^{it\xi} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi_k}{k!}(it)^k,$$

где E – математическое ожидание по распределению вероятностей ξ. В случае, если ξ – случайный вектор из $\mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ и $\varphi_\xi = \mathsf{E}e^{i(t,\xi)}$ – его характеристич. функция,

$$t = (t_1, ..., t_n),\ (t, \xi) = \sum_{k=1}^{n} t_k\xi_k,\ t_k \in \mathbb{R},$$

то под кумулянтным разложением понимают степенной ряд следующего вида:

$$\ln\varphi_\xi(t) = \sum_{s=1}^{\infty} i^s \sum_{l:|l|=s}\chi_s(l_1, ..., l_n)\prod_{m=1}^{n} t_m^{l_m}/l_m!, \quad (1)$$

где суммирование осуществляется по всем целочисленным векторам $l = (l_1, ..., l_n)$, $l_i \geqslant 0$ с $|l| = l_1 + ... + l_n = s$. Коэффициенты $\chi_s(l_1, ..., l_n)$ называются смешанными семиинвариантами (см. *Семиинвариант*), или кумулянтами, порядка s вектора ξ. Для существования семиинвариантов порядка s необходимо и достаточно существование абсолютных моментов порядка s для случайного вектора ξ, $\mathsf{E}|\xi_i|^s < \infty$, $i = 1, ..., n$, и поэтому формула (1) требует существования моментов всех порядков. Последнее условие может не выполняться для случайного вектора ξ. В этом случае, при $\mathsf{E}|\xi_i|^s < \infty$ под К. р. понимают формулу

$$\ln\varphi_\xi(t) = \sum_{k=1}^{s} i^k \sum_{l:|l|=k}\chi_k(l_1, ..., l_n) \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{n} t_m^{l_m}/l_m! + o(|t|^s), \quad t \to 0.$$

Если характеристич. функция $\varphi_\xi(t)$ допускает продолжение на комплексные значения вектора t и является аналитич. функцией в окрестности точки $t = 0$, то под К. р. понимают формулу (1) при $t_i \in \mathbb{C}$, в к-рой бесконечный ряд уже является сходящимся. Если $\{\xi(t)\}$ – случайный процесс, определенный на множестве любой природы, то аналогом К. р. служит представление логарифма характеристич. функционала процесса

$$\varphi_\xi\{u\} \equiv \mathsf{E}\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\xi(\tau)\,d\tau\right\}$$

в функциональный ряд следующего вида

$$\ln\varphi_\xi\{u\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots d\tau_n\, u(\tau_1)\dots u(\tau_n)\, K(\tau_1, \dots, \tau_n),$$

в к-ром роль семиинвариантов выполняют корреляционные функции $K(t_1, ..., t_n)$. В статистич. механике К. р. естественно возникает при разложении свободной энергии по малому взаимодействию.

Лит.: Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980. *Ю. П. Вирченко.*

КУРАНТА НЕЛИНЕЙНОЕ НЕРАВЕНСТВО – см. *Симплектическая геометрия.*

КУСОЧНО АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Краевые задачи* теории аналитических функций.

КЭЛИ АЛГЕБРА – см. *Алгебра.*

КЭЛИ ЗОНТИК – см. *Уитни зонтик.*

КЮРИ – ВЕЙССА МОДЕЛЬ, Хусими – Темперли модель,– модель решеточной системы многих тел, в которой парный потенциал взаимодействия любой частицы с любой другой не зависит от расстояния между ними и обратно пропорционален полному числу частиц в системе.

Предложена К. Хусими [1] в варианте изинговского ферромагнетика в многомерном пространстве, в к-ром каждая частица является ближайшим соседом любой другой – отсюда «модель с бесконечным координационным числом». Одновременно и независимо предложена Г. Темперли [2] в варианте решетчатого газа. Модель является асимптотически точно решаемой методом *аппроксимирующего гамильтониана.* Ее термодинамич. функции воспроизводят классич. результаты теории молекулярного поля в ферромагнетиках – отсюда название «модель Кюри – Вейсса». С. Катсура [3] обнаружил термодинамич. неэквивалентность большого канонич. и канонич. ансамблей Гиббса. Существует математич. аналогия между поведением намагниченности при фазовом переходе первого рода в этой модели и потерей устойчивости решения нелинейного уравнения Бюргерса (см. [4]). Конструктивное описание множества предельных гиббсовских состояний для К.–В. м. с помощью метода квазисредних дано в [5]. Нетривиальные статистич. свойства модели и ее обобщений изучены в [6].

Лит.: [1] Husimi K., in: Proc. Intern. Conf. Theor. Phys., Kyoto and Tokyo, 1953, p. 531; [2] Temperley H. N. V., «Proc. Phys. Soc.», Sect. A, 1954, v. 67, p. 233; [3] Katsura S., «Progr. Theor. Phys.», 1955, v. 13, p. 571–86; [4] Brankov J. G., Zagrebnov V. A., «J. Phys. A», 1983, v. 16, p. 2217–24; [5] Бранков Й. Г., Загребнов В. А., Тончев Н. С., «Теоретич. и математич. физика», 1986, т. 66, с. 109–20; [6] Ellis R. S., Newman C. M., «J. Stat. Phys.», 1978, v. 19, p. 149–61. *Й. Г. Бранков.*

Л

ЛАГЕРРА МНОГОЧЛЕНЫ – многочлены, ортогональные на интервале $(0, \infty)$ с весовой функцией $\varphi(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, где $\alpha > -1$. Стандартизованные Л. м. определяются формулой

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^{x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+ne-x}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

представление с помощью гамма-функции:

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

В применениях наиболее важны формулы:

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) = (\alpha + 2n + 1 - x)L_n^{\alpha}(x) - (\alpha + n)L_{n-1}^{\alpha}(x),$$

$$xL_{n-1}^{\alpha+1}(x) = (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) - nL_n^{\alpha}(x),$$

$$\left(L_n^{\alpha}(x)\right)' = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

Многочлен $L_n^{\alpha}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнению Лагерра)

$$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0, \; n = 1, 2, \ldots$$

Производящая функция Л. м. имеет вид:

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\,t^n.$$

Ортонормированные Л. м. выражаются через стандартизованные многочлены:

$$\hat{L}_n^{\alpha}(x) = (-1)^n L_n^{\alpha}(x)\sqrt{\Gamma(n+1)/\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Множество всех Л. м. плотно в пространстве функций, квадрат к-рых интегрируем с весом $\varphi(x)$ на интервале $(0, \infty)$.

Наиболее часто употребляются Л. м. при условии $\alpha = 0$, исследованные Э. Лагерром [E. Laguerre, 1878]; они обозначаются в этом случае $L_n(x)$ (в отличие от них Л. м. $L_n^{\alpha}(x)$ иногда называют обобщенными). Несколько первых Л. м. $L_n(x)$ имеют вид:

$$L_0(x) = 1,$$
$$L_1(x) = 1 - x,$$
$$L_2(x) = 1 - 2x + x^2/2,$$
$$L_3(x) = 1 - 3x + 3x^2/2 - x^3/6,$$
$$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - 2x^3/3 + x^4/24.$$

Л. м. $L_n^{\alpha}(x)$ иногда обозначается $L_n(x; \alpha)$.

Лит.: [1] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979; [2] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

П. К. Суетин.

ЛАГРАНЖА ПЛОСКОСТЬ в линейном симплектическом пространстве $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ – n-мерная плоскость, совпадающая со своим косоортогональным дополнением. Множество всех Л. п. является гладким многообразием и называется *Грассмана лагранжевым многообразием.*

М. Э. Казарян.

ЛАГРАНЖА ПРИНЦИП стационарного действия – один из *вариационных принципов классической механики*: если заданы начальный момент времени t_0 и начальное и конечное положения голономной системы, для которой существует интеграл энергии, то для действительного движения

$$\delta\int_{t_0}^{t} 2T\,dt = 0 \qquad (*)$$

по сравнению с варьированными движениями между теми же начальным и конечным положениями и с той же энергией h, что и в действительном движении. Символ δ – вариация при условии $T - U = h$, где T – кинетическая и U – потенциальная энергии системы.

Выполнение соотношения $T - U = h$ при фиксированном h для всех сравниваемых в принципе Лагранжа движений налагает определенные ограничения на скорости этих движений и время движения из положения P_0 в положение P_1 зависит от кривой, по которой совершается движение. Таким образом, принцип Лагранжа (*) с учетом $T - U = h$ представляет собой условную вариационную задачу с верхним свободным концом.

Принцип предложен Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1760).

В. В. Румянцев.

ЛАГРАНЖА СКОБКА – структура алгебры Ли в пространстве гладких функций на контактном многообразии с контактной формой λ. Она переносится из обычной структуры алгебры Ли контактных векторных полей, заданной коммутатором, при ее отождествлении с пространством функций посредством конструкции *контактного гамильтониана.*

Если $\lambda = dz - xdy$, то Л. с. задана формулой:

$$[f, g] = f\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}g - x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

С. А. Табачников.

ЛАГРАНЖА УРАВНЕНИЯ – 1) Лагранжа уравнения 1-го рода – дифференциальные уравнения движения механической системы, которые даны в проекциях на прямоугольные координатные оси и содержат так наз. множители Лагранжа. Получены Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1788). Для *голономной системы*, состоящей из n материальных точек, на к-рую наложено k связей вида:

$$f_i(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (1)$$

Л. у. 1-го рода имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} m_\nu\ddot{x}_\nu &= F_{\nu x} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu},\\ m_\nu\ddot{y}_\nu &= F_{\nu y} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial y_\nu},\\ m_\nu\ddot{z}_\nu &= F_{\nu z} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial z_\nu}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n,$$

где m_ν – массы точек системы; x_ν, y_ν, z_ν – координаты этих точек; $F_{\nu x}$, $F_{\nu y}$, $F_{\nu z}$ – проекции приложенных к каждой точке активных сил; λ_i – неопределенные множители, пропорциональные реакциям соответствующих связей; t – время. Аналогичные уравнения могут составляться и для *неголономных систем.* Уравнения (2) совместно с (1) дают сис-

тему $3n+k$ дифференциальных уравнений, из к-рых находятся $3n$ неизвестных функций $x_v(t)$, $y_v(t)$, $z_v(t)$, дающих закон движения точек системы, и k множителей $\lambda_i(t)$, позволяющих определить проекции реакций связей по формулам

$$N_{vx} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v}, \quad N_{vy} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_v},$$

$$N_{vz} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_v}.$$

Для отыскания закона движения уравнениями (2) пользуются редко, так как интегрирование системы $3n+k$ уравнений, когда n велико, связано с большими трудностями. Однако если закон движения будет найден другим путем (напр., с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода), то по уравнениям (2), в к-рых левые части известны, можно определять реакции связей.

2) Лагранжа уравнения 2-го рода – дифференциальные уравнения движения механич. системы, в к-рых параметрами, определяющими положение системы, являются независимые между собой *обобщенные координаты*. Для голономных систем Л. у. 2-го рода имеют в общем случае вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \qquad (3)$$

где q_i – обобщенные координаты, число к-рых равно числу s степеней свободы системы, $\dot{q}_i$ – обобщенные скорости, Q_i – обобщенные силы.

Для составления уравнений (3) надо, выбрав q_i, определить кинетич. энергию системы в ее движении относительно *инерциальной системы отсчета* и выразить эту величину явно через q_i и $\dot{q}_i$, то есть найти $T(q_i, \dot{q}_i, t)$; время войдет сюда при нестационарных связях. Значения Q_i находятся по заданным (активным) силам, в число к-рых при неидеальных связях включают и силы трения. С математич. точки зрения уравнения (3) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно координат q_i; интегрируя эти уравнения и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям, находят $q_i(t)$, то есть закон движения системы в обобщенных координатах.

По сравнению с уравнениями в декартовых координатах (см., напр., уравнения Лагранжа 1-го рода) уравнения (3) обладают тем важным преимуществом, что число их равно числу степеней свободы системы и не зависит от количества входящих в систему материальных частиц или тел; кроме того, при идеальных связях из уравнений (3) автоматически исключаются все наперед неизвестные реакции связей. Л. у. 2-го рода, дающими весьма общий и притом достаточно простой метод решения задач, широко пользуются для изучения движения различных механич. систем, в частности в динамике механизмов и машин, в теории гироскопа, в теории колебаний и др.

Для неголономной системы, на к-рую, кроме геометрич. связей, учитываемых выбором координат q_i, наложено еще k дифференциальных связей, выражаемых равенствами

$$A_{\varkappa 0} + \sum_{i=1}^{k} A_{\varkappa i}\dot{q}_i = 0, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k, \qquad (4)$$

Л. у. 2-го рода принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\varkappa=1}^{k} \mu_\varkappa A_{\varkappa i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \qquad (5)$$

Уравнения (5) совместно с (4) дают возможность определить s неизвестных координат q_i и k наперед неизвестных множителей $\mu_\varkappa$ как функций времени.

В физике особое значение имеет та форма Л. у., к-рую они принимают в случае голономной системы, находящейся под действием одних только потенциальных сил (см. *Консервативная система*). Если ввести *Лагранжа функцию* (лагранжиан) L, равную в этом случае разности между кинетической T и потенциальной П энергиями системы:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - \Pi(q_i),$$

то, так как для потенциальных сил $Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i$, равенства (3) примут вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \qquad (6)$$

Уравнения в форме (6) обычно называют в физике уравнениями Лагранжа. Преимущество этих уравнений состоит в том, что они позволяют изучить движение механич. системы, зная для нее одну только функцию L, полностью характеризующую систему. Такая форма уравнений имеет место не только для консервативных систем. Если обобщенные силы можно представить через нек-рый «обобщенный потенциал» $P(q_i, \dot{q}_i)$ в виде

$$Q_i = \frac{\partial P}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i}\right),$$

то уравнения (3) представляются тоже в виде (6), где $L = T + P$. Напр., для заряженной частицы массы m с зарядом q, движущейся в электромагнитное поле, к-рое характеризуется векторным $\boldsymbol{A}$ и скалярным φ потенциалами, существует «обобщенный потенциал»

$$P = \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - q\varphi \quad \text{и} \quad L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{v}$ – скорость частицы, c – скорость света.

Область приложения уравнений (6) оказывается еще более широкой благодаря их связи с *наименьшего действия принципом*. Согласно этому принципу, для истинного движения системы величина

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt,$$

называемая *действием*, имеет экстремум, условие существования к-рого состоит в том, что функция L должна удовлетворять уравнениям Эйлера, совпадающим с уравнениями (6). Отсюда следует, что уравнения вида (6) справедливы для любой физич. системы (непрерывная среда, гравитационное или электромагнитное поле и др.), к-рая характеризуется соответствующей функцией Лагранжа и подчиняется вариационному принципу, аналогичному принципу наименьшего действия.

Для среды или поля, представляющих собой систему с бесконечным числом степеней свободы, роль обобщенных координат q_i играют такие величины, как смещение частицы, плотность, потенциал и т. п., зависящие в общем случае от координат x, y, z точек среды (поля) и от времени; поэтому для такой среды (поля) $q_i = q_i(x, y, z, t)$. Характеристикой системы в этих случаях служит удельная (отнесенная к единице объема) функция Лагранжа (лагранжиан):

$$L_0\left(q_i, \frac{\partial q_i}{\partial t}, \frac{\partial q_i}{\partial x}, \frac{\partial q_i}{\partial y}, \frac{\partial q_i}{\partial z}, x, y, z, t\right),$$

и Л. у. для среды (поля) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial t}\right)}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial L_0}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\right)}\right] - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} = 0. \qquad (7)$$

Уравнения (7), в отличие от (3) или (6), представляют собой систему уравнений с частными производными; число их равно числу величин q_i.

Примером приложения уравнений (7) к упруго деформируемой среде может служить задача о продольных вдоль оси x колебаниях призматич. стержня. В этом случае имеется

одна обобщенная координата $q_1 = u(x, t)$, где u – продольное смещение частиц стержня, и функция L_0, составляемая как разность удельных кинетической и потенциальной энергий, имеет вид:

$$L_0 = \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right],$$

где ρ – плотность среды, E – модуль упругости при растяжении. Подстановка этого значения L_0 в (7) дает уравнение продольных упругих колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Другим примером может служить электромагнитное поле в вакууме, для к-рого в качестве четырех обобщенных координат можно принять компоненты A_x, A_y, A_z векторного потенциала A и скалярный потенциал φ. В этом случае

$$L_0 = \frac{E^2 - B^2}{8\pi} - \rho\varphi + \frac{1}{c}jA,$$

где E – напряженность электрич. поля, B – магнитная индукция, j – плотность тока, ρ – удельный заряд. При этом значении L_0 равенства (7) дают уравнения Максвелла.

Л. у. в виде (6) сохраняют смысл и при движениях со скоростями, сравнимыми со скоростью света, но при этом в выражение функции L вместо кинетич. энергии частицы входит величина $-mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

См. также *Лагранжев формализм*.

Лит.: [1] Лагранж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц., 2 изд., т. 1–2, М.– Л., 1950; [2] Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.– Л., 1952; [3] Суслов Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.– Л., 1946; [4] Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, 6 изд., т. 2, М., 1983; [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 4 изд., М., 1988, гл. 1; [6] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975, гл. 1, 2, 11. *С. М. Тарг.*

ЛАГРАНЖА ФУНКЦИЯ, кинетический потенциал, – характеристическая функция $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ механической системы, выраженная через обобщенные координаты q_i, обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и время t. В простейшем случае консервативной системы Л. ф. равна разности между кинетической T и потенциальной U энергиями системы, выраженными через q_i и $\dot{q}_i$, то есть $L = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i)$. Зная Л. ф., можно с помощью *наименьшего действия принципа* составить дифференциальные уравнения движения механич. системы. Понятие о Л. ф. распространяется и на другие физич. системы (см. *Лагранжиан, Лагранжа уравнения, Лагранжев формализм*).

ЛАГРАНЖА ФУНКЦИЯ, задающая лагранжеву систему на *конфигурационном многообразии* M, – функция L: $TM \times \Delta \to \mathbb{R}$ на расширенном фазовом пространстве, где $\Delta = \{t\}$ – интервал оси времени. Траектории лагранжевой системы являются экстремалями вариационной задачи

$$\delta \int L(q, \dot{q})\, dt = 0$$

и удовлетворяют уравнениям Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

где $q \in M$ – положение системы, а $\dot{q} \in T_q M$ – скорость в положении q.

Напр., для натуральной системы $L = T + U$, где T – риманова метрика на M (кинетич. энергия системы), U – гладкая функция на M (потенциал силового поля). *М. Э. Казарян.*

ЛАГРАНЖА – ДИРИХЛЕ ТЕОРЕМА – теорема, устанавливающая достаточное условие устойчивости равновесия консервативной механической системы. Согласно Л.–Д. т., консервативная механич. система находится в положении устойчивого равновесия, если потенциальная энергия системы в этом положении имеет строгий минимум. В частности, из Л.–Д. т. следует, что положение равновесия механич. системы в однородном поле тяжести будет устойчивым, когда центр тяжести системы занимает наинизшее положение.

ЛАГРАНЖА – ЛАПЛАСА ТЕОРЕМА – см. *Усреднения метод.*

ЛАГРАНЖА – ПУАССОНА СЛУЧАЙ – второй из трех классических случаев интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки (первый – *Эйлера – Пуансо случай*, третий – *Ковалевской случай*). Он характеризуется тем, что эллипсоид инерции – эллипсоид вращения (обычно вокруг оси Oz так, что $A = B$) и центр тяжести тела расположен на той же оси $x_0 = y_0 = 0$ (она называется осью динамической симметрии) на расстоянии z_0 от неподвижной точки O (см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки). Уравнения Эйлера – Пуассона (I–III) обладают в этом случае дополнительным четвертым первым интегралом

$$r = r_0 = \text{const},$$

выражающим постоянство спина – составляющей угловой скорости вдоль оси тела; открыт Ж. Лагранжем [1]. Интегрирование уравнений движения в рассматриваемом случае, полнее проведенное С. Пуассоном [2], приводит к обращению нек-рого эллиптич. интеграла 1-го рода вида $\int \frac{ds}{\sqrt{P(s)}}$, где $P(s)$ – многочлен 3-й степени, и нескольким квадратурам (см. [3]). В случае, когда среди корней $P(s)$ есть равные, решение может быть получено в элементарных функциях.

Примеры.

1) Симметричный волчок – тяжелое твердое тело, центр тяжести D к-рого находится выше неподвижной точки (называемой точкой опоры). Тогда из выражений для первых интегралов для $u = \cos\vartheta$, где ϑ – угол наклона оси волчка, получается уравнение

$$\dot{u}^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0 u) = P(u),$$

где

$$\alpha = \frac{h - Cr_0}{A}, \quad \beta = \frac{k}{A}, \quad a = -\frac{2Mg\cos\theta}{A}, \quad b = \frac{C}{A}.$$

В механич. задаче многочлен $P(u)$ имеет три действительных корня, из к-рых лишь два – на отрезке $[-1, +1]$. Следовательно, наклон оси волчка меняется периодически между двумя предельными значениями θ_1 и θ_2. Это периодич. движение называется нутацией.

Движение волчка по азимуту, то есть изменение азимута оси, определяется уравнением

$$\dot{\psi} = \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2}.$$

В зависимости от расположения корня $u = \beta/br_0$ уравнения относительно интервала (u_1, u_2) ось волчка чертит на единичной сфере либо кривую типа синусоиды, либо кривую с петлями или остриями (в последнем случае волчок сперва падает, но потом вновь поднимается). Азимутальное движение оси волчка называется прецессией.

Наконец, вращение вокруг собственной оси φ (собственное вращение волчка) определяется квадратурой уравнения:

$$\dot{\varphi} = r_0 - u\frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2}.$$

Таким образом, окончательное движение волчка состоит из вращения вокруг собственной оси, нутации и прецессии. Каждое из трех движений имеет свою частоту; если частоты несоизмеримы, то волчок никогда не возвращается в начальное состояние, хотя и подходит к нему сколь угодно близко.

Если $u_1 = u_2$, то $\theta = \text{const}$, $u = u_0$, а φ и ψ – линейные функции времени. В этом случае тело равномерно враща-

ется вокруг оси, равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси Oz (регулярная прецессия).

Если все три корня уравнения $P(u)=0$ равны, то ось волчка вертикальна $\vartheta=0$, а угловая скорость постоянна (спящий волчок); если же лишь $u_2=u_3$ и при этом $b^2r_0^2>ra$, то движение будет асимптотически (при $t\to\infty$) стремиться к рассмотренному равномерному вращению, то есть имеем устойчивость спящего волчка.

2) Вращающийся маятник – тяжелое твердое тело, центр тяжести к-рого находится ниже неподвижной точки (называющейся точкой подвеса). Решение в этом случае аналогично примеру 1).

Ниже приводится решение для сферического маятника, к-рый характеризуется тем, что момент инерции $C=0$, то есть по существу сферич. маятник – это тяжелая материальная точка, движущаяся по поверхности сферы радиуса l, при этом $A=B=Ml^2$.

Область движения по углу ϑ определяется условием $E>U_{\text{эфф}}$, а ее граница – уравнением $E=U_{\text{эфф}}$, где

$$U_{\text{эфф}}=\frac{M_3^2}{2Ml^2\sin^2\nu}+Mgl\cos\vartheta.$$

Последнее представляет собой кубич. уравнение для $\cos\vartheta$, имеющее на отрезке $[-1, 1]$ два корня, определяющих положение двух параллельных окружностей на сфере, между к-рыми заключена вся траектория (см. [4]). Замечательный частный случай – простой маятник – получается, если (постоянный) момент количества движения около вертикальной оси равен нулю. Здесь ось тела Ox лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось Oz, и, следовательно, ось Oy неподвижна, и маятник качается в этой плоскости.

Наконец, маятник может быть вообще неподвижен, то есть здесь имеется устойчивость без ограничения снизу собственного вращения угловой скорости.

Лит.: [1] Lagrange J. L., Mécanique analytique, P., 1788; рус. пер.: Аналитическая механика, т. 1–2, М., 1950; [2] Poisson S. D., Traite de mécanique, 2 éd., t. 2, P., 1833, 1 éd., 1813; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [4] Голубев В. В., Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953; [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 3 изд., М., 1973.

М. И. Войцеховский.

ЛАГРАНЖЕВ АНАЛИЗ – теория, интерпретирующая конструкции *Маслова канонического оператора* вне связи с асимптотиками. Основное понятие Л. а.– лагранжева функция на лагранжевом многообразии Λ, локально задаваемая выражением

$$\sum_{j=0}^{\infty}h^j a_j\exp(i\varphi/h),$$

где φ – лагранжева фаза на Λ, $h>0$ – фиксированное число, преобразующимся аналогично *волновой функции* в ВКБ-приближении, поднятой на Λ.

Лит.: [1] Лере Ж., Лагранжев анализ и квантовая механика, пер. с франц., М., 1981.

В. Л. Дубнов.

ЛАГРАНЖЕВ ВОЛЧОК – см. *Гироскопа математическая теория.*

ЛАГРАНЖЕВ ГРАССМАНИАН – см. *Грассмана лагранжево многообразие.*

М. Э. Казарян.

ЛАГРАНЖЕВ КОБОРДИЗМ – отношение эквивалентности между лагранжевыми подмногообразиями симплектических лагранжево расслоенных многообразий; лагранжево многообразие, соответствующее волновому состоянию на краю области, кобордантно нулю, если оно индуцируется некоторым состоянием во всей области.

Л. к. введены В. И. Арнольдом в 1980 (см. [1]).

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Успехи математич. наук», 1983, т. 38, в. 2, с. 77–147.

В. А. Васильев.

ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ – основанная на вариационном принципе формулировка механики и теории поля, в которой состояние системы задается обобщенными координатами q_i и их производными по времени – обобщенными скоростями $\dot q_i$ (см. *Вариационные принципы классической механики*). Исходным для Л. ф. являются фундаментальные понятия *действия* S и его полной производной по времени, взятой вдоль траектории системы,– *Лагранжа функции* $L(t)$; при этом

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(t)\,dt.$$

Для механич. системы с конечным числом степеней свободы (напр., для системы материальных точек) обычно принимают, что функция Лагранжа зависит от q_i и $\dot q_i$:

$$L(t)=L[q(t),\,\dot q(t),\,t]$$

(где q, $\dot q$ – совокупность q_i, $\dot q_i$). Существуют и обобщения Л. ф. на случаи, когда L зависит от высших производных q_i. Для систем с бесконечным числом степеней свободы – физич. полей – роль обобщенных координат играют значения компонент поля $\varphi^a(x)$ во всех пространственных точках x. Зависимость L от всех $\varphi^a(x)$ означает, что L является функционалом. Для физики наиболее интересны локальные функционалы, для к-рых вторая вариационная производная $\delta^2L/\delta\varphi^a(x)\,\delta\varphi^b(x')$ отлична от нуля лишь при $x=x'$. Тогда функция Лагранжа может быть представлена в виде:

$$L(t)=\int\mathscr{L}(x,t)\,dx,$$

а действие – в виде

$$S=\int\mathscr{L}(x,t)\,dx\,dt,$$

где плотность функции Лагранжа $\mathscr{L}$, называемая *лагранжианом*, зависит от полей (и, как правило, от их первых производных), взятых в одной и той же точке пространства-времени x, t. [Иногда термин «лагранжиан» используют и для самой функции Лагранжа $L(t)$, а $\mathscr{L}$ называют плотностью лагранжиана.]

В релятивистской теории и действие S, и лагранжиан $\mathscr{L}$ являются скалярами относительно преобразований *Пуанкаре группы*. В четырехмерных обозначениях переменные $(t, x)=\{x_\mu\}=x$, $\mu=0, 1, 2, 3$, входят равноправно, и действие записывается как локальный функционал полей и их первых производных, заданных на нек-рой 4-области Ω:

$$S=\int_\Omega\mathscr{L}(x)dx,\qquad\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}\big(\varphi^a(x),\partial_\mu\varphi^a(x),x\big)$$

(принято сокращение $\partial_\mu=\partial/\partial x_\mu$).

В механике и теории поля постулируется фундаментальный *наименьшего действия принцип*, утверждающий, что для реальных движений системы функционал S принимает экстремальное значение, то есть его вариации $\delta S=0$. Уравнения движения получаются из него по правилам вариационного исчисления как условия экстремума; они называются уравнениями Эйлера–Лагранжа и имеют вид:

$$\partial\mathscr{L}/\partial\varphi^a-d_\mu[\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_\mu\varphi^a)]=0,$$

где $d_\mu\equiv d/dx_\mu$ – «полная частная производная», учитывающая зависимость $\mathscr{L}$ от x как явную, так и через поля $\varphi^a(x)$, по повторяющемуся индексу μ предполагается суммирование. Таким образом, задание формы лагранжиана полностью определяет уравнения движения. [Для систем со связями $\chi_j(\varphi^a,\partial_\mu\varphi^a,x)=0$ вариационный принцип применяется к модифицированному лагранжиану

$$\mathscr{L}'(x)=\mathscr{L}(x)+\sum_j\chi_j\lambda_j(x),$$

причем множители Лагранжа $\lambda_j(x)$ находятся интегрированием соответственно модифицированных уравнений Эйлера – Лагранжа.]

При наличии в теории симметрии Л. ф. позволяет, помимо уравнений движения, найти соответствующие *сохранения законы* с помощью *Нетер теоремы*. В силу этой теоремы из

инвариантности действия относительно каждой однопараметрич. группы преобразований симметрии следует сохранение одной явно строящейся функции координат и скоростей $F(q, \dot{q}, t)$. В релятивистской теории аналогом момента времени t служит пространственноподобная поверхность σ, а аналогом сохранения во времени, $dF/dt = 0$, является независимость от σ соответствующего функционала σ, полей и их производных

$$F[\sigma;\varphi^a,\partial_\mu\varphi^a] = \int_\sigma d\sigma_\nu F_\nu\left(\varphi^a(x),\partial_\nu\varphi^a(x),x\right):$$
$$\delta F/\delta\sigma = 0.$$

Иными словами, каждой сохраняющейся величине F отвечает локальный четырехмерный «ток» $F_\nu(x)$, удовлетворяющий дифференциальному закону сохранения $\partial_\nu F_\nu(x) = 0$.

В частности, всякое релятивистское описание должно быть инвариантно относительно трансляций и вращений в 4-пространстве (образующих 10-параметрич. группу Пуанкаре). Инвариантность S относительно преобразований группы Пуанкаре приводит к сохранению четырех компонент энергии-импульса P_μ и шести компонент момента $M_{\mu\varkappa} = -M_{\varkappa\mu}$. Если взять поверхность σ в виде $x_0 = t$, то они выражаются формулами

$$P_\mu = \int dx\, T_{\mu 0}(x), \quad M_{\mu\varkappa} = \int dx\, M_{\mu\varkappa,0}$$

через свои «токи» – тензоры энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ и момента $M_{\mu\varkappa,\nu}$, удовлетворяющие дифференциальным законам сохранения $\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$ и $\partial_\nu M_{\mu\varkappa,\nu} = 0$. Эти тензоры находятся по заданному $\mathcal{L}$ по формулам:

$$T_{\mu\nu} = (\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi^a))\partial_\nu\varphi^a - g_{\mu_\nu}\mathcal{L},$$

$$M_{\mu\varkappa,\nu} = x_\mu T_{\nu\varkappa} - x_\varkappa T_{\nu\mu} + (\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\nu\varphi^a))\, s^{ab}_{\mu\varkappa}\varphi^b,$$

где матрица s^{ab} описывает изменение многокомпонентного поля φ^a при бесконечно малом преобразовании Лоренца с параметром $\omega_{\mu\varkappa}$, $\delta\varphi^a = 1/2 s^{ab}_{\mu\varkappa}\varphi^b\omega_{\mu\varkappa}$. Если в теории имеются и другие группы симметрии, то есть действие инвариантно относительно преобразований из этих групп, теорема Нетер дает дополнительные сохраняющиеся величины (напр., заряды). В *гамильтоновом формализме* выясняется, что сохраняющиеся величины являются генераторами соответствующих преобразований симметрии. (Отметим, что в теориях, содержащих *динамические симметрии*, возникают дополнительные законы сохранения, к-рые не могут быть получены из теоремы Нетер.)

Таким образом, лагранжиан полностью определяет теорию: Л. ф. дает уравнения движения и сохраняющиеся динамич. величины. Напротив, по заданной теории лагранжиан восстанавливается неоднозначно, напр. к нему всегда можно добавить 4-дивергенцию любой функции, что не сказывается ни на уравнениях движения, ни на сохраняющихся величинах.

Л. ф. играет важную эвристич. роль при построении математич. описания новой области явлений. Действительно, в соответствии с требованиями инвариантности относительно преобразований из группы Пуанкаре и других групп симметрии $\mathcal{L}$ может зависеть только от инвариантных комбинаций полей, к-рые нетрудно перечислить. Если по соображениям простоты оставить в $\mathcal{L}$ инварианты минимальной степени по полям, получающиеся из Л. ф. уравнения движения часто оказываются линейными. В этом случае они называются уравнениями свободного поля. Так, для векторного поля с абелевой калибровочной группой (напр., электромагнитного поля) все возможные лагранжианы эквивалентны выражению $-1/4F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, где тензор поля $F_{\nu\mu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ – 4-потенциал, а уравнения свободного поля имеют вид $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$. В случае более сложной симметрии, напр. с неабелевой калибровочной группой, тензор поля

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - t^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

(где t^{abc} – структурные константы группы), а простейший лагранжиан

$$\mathcal{L} = -1/4F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}.$$

Уже простейшие нетривиальные уравнения оказываются нелинейными по полю:

$$\nabla^{ab}_\mu F^b_{\mu\nu} = 0,$$

где

$$\nabla^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - t^{abc}A^c_\mu$$

– *ковариантная производная* для данной калибровочной группы.

Квантовая теория поля заимствует у классической весь Л. ф. с той лишь разницей, что полевые функции являются теперь не c-числами, а, вообще говоря, некоммутирующими операторами. Поэтому операция варьирования, применяемая для вывода уравнений движения и получения динамич. величин, требует доопределения [5], [6]; в ряде случаев (напр., в квантовой электродинамике) оно сводится к той или иной симметризации операторов.

Фундаментальная роль Л. ф. была вскрыта в лагранжевой форме квантовой динамики [Р. Фейнман (R. Feynman), 1948] – третьем, наряду с традиционными шредингеровым и гейзенберговым, способе ее построения. На этом пути отщепление квантовой теории от классической связано с разными законами композиции вероятностей перехода между последовательными состояниями a, b, c, ... динамич. системы. В то время как в классич. теории для вероятностей P имеет место интуитивно очевидный мультипликативный закон композиции $P_{ac} = \sum_b P_{ab}P_{bc}$ (здесь «суммирование» производится по всем промежуточным конфигурациям b), в квантовой теории ему подчиняются не сами вероятности, а амплитуды A (такие, что $P_{ab} = |A_{ab}|^2$):

$$A_{ac} = \sum_b A_{ab}A_{bc}.$$

Математич. оформление этого утверждения эквивалентно введению *функционального интеграла* по значениям обобщенных координат в момент времени t на всех возможных траекториях системы. Все результаты обычной квантовой динамики получаются тогда из постулата, что фаза амплитуды есть классич. действие, измеренное в единицах $\hbar$:

$$A_{ab} = \exp(iS_{ab}/\hbar).$$

Фейнмановский функциональный (континуальный) интеграл широко используется также в квантовой теории поля.

В квазиклассич. приближении, когда фазы $S/\hbar$ велики, основной вклад в континуальный интеграл дает область, где фаза стационарна, то есть $\delta S = 0$ при вариации траекторий. Таким образом, принцип наименьшего действия для классич. траекторий оказывается следствием квантовой динамики.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 4 изд., М., 1988; их же, Теория поля, 7 изд., М., 1988; [2] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [3] Медведев Б. В., Начала теоретической физики, М., 1977; [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [5] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [6] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988.

Б. В. Медведев, В. П. Павлов.

ЛАГРАНЖЕВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ КЛАСС – класс в когомологиях лагранжевых многообразий, определяющий инвариант *лагранжева кобордизма*. Известные Л. х. к. строятся аналогично *лежандровым характеристическим классам*, а также задаются периодами формы pdq по контурам в лагранжевых многообразиях.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы, т. 4, М., 1985, с. 7–149; [2] Audin M., Cobordismes d'immersions lagrangiennes et legendriennes, P., 1987.

В. А. Васильев.

ЛАГРАНЖЕВА ОСОБЕННОСТЬ; нормальная форма – наиболее простой вид, к которому можно привести росток *лагранжевого отображения* лагранжевой эквивалентностью. Пусть $A_\mu^\pm$, $D_\mu^\pm$, $E_6^\pm$, E_7, E_8 – ростки лагранжевых отображений, заданных следующими *производящими семействами*:

$$A_\mu^\pm,\ \mu \geqslant 1\colon\ \pm x^{\mu+1} + q_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + q_1 x,$$

$$D_\mu^\pm,\ \mu \geqslant 4\colon\ x^2 y \pm y^{\mu-1} + q_{\mu-1}x + q_{\mu-2}y^{\mu-2} + \ldots + q_1 y,$$

$$E_6^\pm\colon\ x^3 \pm y^4 + q_5 xy^2 + q_4 xy + q_3 y^2 + q_2 x + q_1 y,$$

$$E_7\colon\ x^3 + xy^3 + q_6 x^2 y + q_5 x^2 + q_4 xy + q_3 y^2 + q_2 x + q_1 y,$$

$$E_8\colon\ x^3 + y^5 + q_7 xy^3 + q_6 xy^2 + q_5 y^3 + q_4 xy + q_3 y^2 + q_2 x + q_1 y.$$

Лагранжево отображение общего положения l-мерных многообразий при $l \leqslant 5$ устойчиво в окрестности любой точки и эквивалентно лагранжевому отображению $A_\mu^\pm$, $D_\mu^\pm$, $E_\mu^\pm$, $\mu - 1 \leqslant l$ (ростки A_{2k}^+ и A_{2k}^- лагранжево эквивалентны).

При $l \geqslant 6$ лагранжевы отображения могут быть неустойчивы и иметь функциональные модули. *М. Э. Казарян.*

ЛАГРАНЖЕВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ – см. *Лагранжево отображение.*

ЛАГРАНЖЕВО МНОГООБРАЗИЕ – n-мерное дифференцируемое подмногообразие L^n $2n$-мерного *симплектического многообразия* M^{2n} такое, что внешняя форма ω, задающая симплектическую структуру на M^{2n}, обращается в нуль тождественно на L^n (то есть для любой точки $x \in L^n$ и любых векторов X, Y, касающихся L^n в этой точке, $\omega(X, Y) = 0$). В наиболее важном случае, когда $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n)$, а

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i,$$

условие лагранжевости подмногообразия L^n, заданного параметрич. уравнениями

$$p_i = p_i(u_1, \ldots, u_n),\ q^i = q^i(u_1, \ldots, u_n),$$

имеет вид

$$[u_i, u_j] = 0,\ i, j = 1, \ldots, n,$$

где $[u_i, u_j]$ – *Лагранжа скобки.*

См. также *Маслова канонический оператор, Грассмана лагранжево многообразие, Точное лагранжево многообразие.*

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [2] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978. *Д. В. Аносов.*

ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ – описание турбулентного течения, при котором поток жидкости характеризуется не полем скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ (то есть значениями скорости в фиксированных точках $\boldsymbol{x}$ пространства в данный момент времени t), а векторной функцией

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) = \{X_1(\boldsymbol{x}, t), X_2(\boldsymbol{x}, t), X_3(\boldsymbol{x}, t)\},$$

задающей значения трех координат X_1, X_2, X_3 «жидкой частицы» (то есть очень малого выделенного объема жидкости), находившейся в некоторый заранее определенный начальный момент времени t_0 в заданной точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Л. о. т. является естественным при изучении перемещения частиц в турбулентном потоке; поэтому оно широко используется в теории турбулентной диффузии, имеющей дело с рассеянием всевозможных примесей к жидкости турбулентными течениями (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. ч. 1, гл. 5, М., 1965; [2] Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей, пер. с англ., Л., 1985. *А. М. Яглом.*

ЛАГРАНЖЕВО ОТОБРАЖЕНИЕ – ограничение на вложенное лагранжево многообразие проекции на базу *лагранжевого расслоения.* Лагранжевой эквивалентностью Л. о. называется симплектоморфизм пространств лагранжевых расслоений, переводящий лагранжево многообразие первого Л. о. в лагранжево многообразие второго и слои первого расслоения в слои второго. Примеры Л. о.: градиентное отображение: $q \mapsto \frac{\partial s}{\partial q}$, *Гаусса отображение, нормальное отображение.* Л. о. образуют специальный класс отображений многообразий одинаковой размерности и могут иметь особенности, нетипичные в классе всех отображений. *М. Э. Казарян.*

ЛАГРАНЖЕВО ПОДМНОГООБРАЗИЕ – см. *Симплектическая геометрия.*

ЛАГРАНЖЕВО РАССЛОЕНИЕ – гладкое локально тривиальное *расслоение* симплектического пространства, все слои которого лагранжевы. Локально все Л. р. симплектически эквивалентны и в подходящих координатах Дарбу (p, q) задаются проекцией на q-пространство вдоль p-пространства. Слои Л. р. имеют канонич. аффинную структуру, к-рая отождествляет окрестность любого сечения X Л. р. с окрестностью нулевого сечения кокасательного расслоения T^*X. *М. Э. Казарян.*

ЛАГРАНЖИАН ($\mathscr{L}$) – плотность *Лагранжа функции* $L(t)$:

$$L(t) = \int d\boldsymbol{x}\, \mathscr{L}(t, \boldsymbol{x});$$

играет фундаментальную роль в *лагранжевом формализме* для полевой системы. Задание Л. полностью определяет уравнения движения и сохраняющиеся динамич. величины. Л. является функционалом полей, и вид этого функционала в значительной мере фиксируется физич. требованиями локальности, *релятивистской инвариантности*, инвариантности относительно групп *внутренних симметрий.* Благодаря локальности функционал сводится к функции полей $\varphi^a(x)$ и (обычно) их первых производных, взятых в одной и той же пространственно-временной точке $x = (t, \boldsymbol{x})$. Строго говоря, требования инвариантности налагаются не на сам Л., а на *действие*

$$S = \int_\Omega \mathscr{L}(x)dx.$$

В зависимости же S от $\mathscr{L}$ имеется произвол: добавление к $\mathscr{L}$ полной производной любой функции $f(x)$, обращающейся в 0 на границе области интегрирования Ω, не меняет S, а также уравнений движения и выражений для сохраняющихся динамич. величин. В релятивистской теории S и (с точностью до этого произвола) $\mathscr{L}$ являются скалярами относительно преобразований *Пуанкаре группы.* В теории тяготения Л. есть скалярная плотность. В случае внутренних симметрий требования инвариантности не так универсальны: выбор группы симметрии по существу фиксирует модель, описывающую определенный круг физич. явлений. Напр., группой внутренней симметрии, скаляром относительно к-рой должны быть действие и Л., для электродинамики является $U(1)$, для теории электрослабого взаимодействия – $SU(2) \otimes U(1)$, для квантовой хромодинамики – $SU(3)$. На языке теории групп в качестве Л. можно взять любую функцию *Казимира операторов* соответствующей группы. Далее выбор Л. определяется соображениями простоты: чтобы уравнения движения были дифференциальными не выше 2-го порядка, суммарная степень производных в отдельных слагаемых в Л. не должна превышать 2. В реальных ситуациях этих принципов отбора все же не хватает для однозначного выбора Л. В общем случае Л. оказывается полиномом по полям и их производным. Билинейная по ним часть в Л. (кинетические плюс массовые члены) называется свободным Л., а остальные члены образуют Л. взаимодействия.

В квантовой теории поля Л. становится оператором, и его выражение через операторы полей требует доопределения. Л. взаимодействия участвует в построении матрицы рассеяния; перенормировка добавляет к нему контрчлены. Вза-

имодействие с внешним классич. током $j_a(x)$ описывается добавлением к Л. члена

$$\sum_a j_a(x)\varphi^a(x).$$

Принципиальное для квантовой теории поля требование перенормируемости налагает новые жесткие ограничения на вид Л.; в большинстве реальных моделей остающаяся свобода сводится к выбору небольшого числа констант (масс и констант взаимодействия). *В. П. Павлов.*

ЛАКСА ПАРА – см. *Обратной задачи рассеяния метод.*

ЛАКСА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – представление *динамической системы*

$$\dot{u}_i = f_i(u_1, \ldots, u_n),\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

для которой существуют такие матрицы L, A (элементы которых являются функциями от $u_1, \ldots, u_n$), что система (1) эквивалентна уравнению Лакса

$$\dot{L} = [L, A] = LA - AL. \qquad (2)$$

В этом случае собственные числа матрицы L являются первыми интегралами системы (1).

Л. п. содержит спектральный параметр E, если матрицы $L(E)$ и $A(E)$ разлагаются в ряд по степеням E и уравнение (2) справедливо в силу системы (1) при всех значениях параметра E. В этом случае все коэффициенты разложения функции $\mathrm{Tr}(L(E)^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, по степеням E являются первыми интегралами системы (1). Во многих случаях из Л. п. со спектральным параметром следует возможность явного интегрирования системы (1) в тета-функциях римановых поверхностей, заданных уравнением

$$R(E, w) = \det(L(t, E) - w \cdot 1) = 0.$$

Первое Л. п. со спектральным параметром было указано Ф. Кеттером (F. Kötter, 1900) для интегрируемых случаев В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова движения твердого тела в жидкости. В 1974 С. В. Манаков и Г. Флашка (H. Flaschka) нашли Л. п. для системы взаимодействующих частиц на прямой (экспоненциальная модель кристаллич. решетки – цепочка Тода).

Л. п. со спектральным параметром построено для всех классич. интегрируемых случаев динамики твердого тела, имеющего неподвижную точку, и для ряда новых интегрируемых задач механики и математич. физики.

См. также *Синус-Гордона уравнение.*

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Динамические системы, т. 7, М., 1987; [2] Лакс П. Д., «Математика», 1969, т. 13, № 5, с. 128–150; [3] Богоявленский О. И., Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения, М., 1990. *О. И. Богоявленский.*

ЛАКСА – ФИЛЛИПСА ПОДХОД в теории рассеяния – подход, применяемый к анализу задач рассеяния для унитарных групп эволюции U_t в гильбертовом пространстве H с одномерным непрерывным либо дискретным временем t в случае, когда эти группы обладают ортогональными приходящими и уходящими подпространствами $D_\mp \subset H$, $D_- \perp D_+$:

$$U_t D_+ \subset D_+,\ t > 0;\ U_t D_+ \to 0,\ t \to +\infty,$$
$$U_t D_- \subset D_-,\ t < 0;\ U_t D_- \to 0,\ t \to -\infty.$$

Если две группы эволюции U_t, U_t^0, действующие в различных гильбертовых пространствах H, H^0, совпадают на общих приходящих и уходящих подпространствах $D_\mp \subset H \cap H^0$, то, используя в качестве оператора отождествления операторы ортогонального проектирования $P_\pm$ на $D_\pm$, легко установить существование волновых операторов:

$$W_-(U^0, U) = \lim_{t \to -\infty} U^0_{-t} P_- U_t,$$

$$W_+(U^0, U) = \lim_{t \to \infty} U^0_{-t} P_+ U_t.$$

Если невозмущенная группа U_t^0 является тривиальным сцеплением изометрич. полугрупп $U_t^0 | D_+$, $t > 0$, $U_t^0 | D_-$, $t < 0$, то есть

$$H^0 = D_- \otimes D_+,$$

то оператор рассеяния

$$S = W_-(U^0, U) W_+^*(U_0, U),$$

коммутирующий с невозмущенной группой, переводит D_+ в себя. В спектральном представлении невозмущенной группы он реализуется в виде оператора умножения на матричную сжимающую функцию $S(k): E \to E$ – матрицу рассеяния. Если использовать приходящее спектральное представление, где H реализуется как пространство квадратично-суммируемых вектор-функций на вещественной оси $L_2(\mathbb{R}, E)$, а D_- – в виде класса Харди всех функций из $L_2(\mathbb{R}, E)$, допускающих аналитич. продолжение в нижнюю полуплоскость, то матрица рассеяния в этом представлении оказывается аналитической в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, k > 0$. Она унитарна на вещественной оси в том и только в том случае, когда

$$\bigvee_{t>0} U_t D_- = \bigvee_{t<0} U_t D_+ = H.$$

В рамках Л.–Ф. п. легко устанавливается связь между асимптотич. поведением оператора эволюции U_t при $t \to \pm\infty$ в зоне рассеяния и поведением его срезок Z_t на трансляционно-инвариантное подпространство $K = H \ominus (D_- \oplus D_+)$:

$$Z_t = P_K U_t | K,\ t \geqslant 0.$$

Из условия ортогональности $D_- \perp D_+$ сразу следует, что семейство срезок Z_t образует полугруппу сжатий. В случае непрерывного времени ее генератор

$$B = \lim_{t \to +0} (Z_t - I)(it)^{-1}$$

является диссипативным оператором, чья характеристич. функция совпадает с матрицей рассеяния. В терминах характеристич. функции спектральный анализ оператора B может быть проведен в явном виде. В частности, спектр оператора B совпадает с множеством сингулярностей S-матрицы на комплексной плоскости переменного k: полюсы $S^{-1}(k)$ суть собственные числа оператора B, а разрезы совпадают с непрерывным спектром (см. *Неспектральные особенности*). Аналогичные факты имеют место и в случае дискретного времени.

Если нек-рая полоса в верхней полуплоскости $0 \leqslant \mathrm{Im}\, k \leqslant \gamma$ свободна от спектра генератора B, отвечающего рассматриваемой задаче рассеяния, то имеет место экспоненциальное убывание энергии в трансляционно-инвариантном подпространстве K:

$$\| P_K U_t f \| = \| Z_t f \| \leqslant e^{-\gamma t} \| f \|,\ f \in K,\ t \geqslant 0.$$

Это заведомо выполнено, если S-матрица унитарна и полугруппа Z_t компактна при нек-ром t.

Пользуясь описанным подходом, П. Лакс и Р. Филлипс [1] установили экспоненциальное убывание энергии акустич. волн вблизи компактного звездного препятствия Ω в $\mathbb{R}^3$. В этом случае роль группы U_t играет разрешающая группа волнового уравнения $u_{tt} = \Delta u$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, преобразующая данные Коши $u = (u_0, u_1)$ от момента времени $t = 0$ к моменту времени t. Эта группа унитарна в энергетич. норме $\| u \|_\varepsilon$:

$$\| u \|_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2)\, dx.$$

Роль приходящих и уходящих подпространств играют данные Коши приходящих и уходящих волн, сосредоточенные внутри шара $K_a = \{x : |x| < a\}$, содержащего препятствие:

$$D_- = \{(u_0, u_1) : u(x, t) = 0,\ |x| + t < a\},$$
$$D_+ = \{(u_0, u_1) : u(x, t) = 0,\ |x| - t < a\},$$

а роль трансляционно-инвариантного подпространства K – семейство данных Коши с ограниченной энергией:

$\|u\|_\varepsilon < \infty$, первая компонента к-рых гармонична, а вторая исчезает вне шара K_a. Роль невозмущенной задачи играет задача без препятствия.

Установлено экспоненциальное убывание энергии для акустич. уравнения с гладкими переменными коэффициентами, постоянными на бесконечности и для гиперболич. систем. При исследовании задачи рассеяния для автоморфного волнового уравнения в фундаментальной области модулярной группы на плоскости Лобачевского установлена связь между экспоненциальным убыванием энергии и расположением корней ζ-функции Римана в критич. полосе: экспоненциальное убывание с показателем 1/4 в точности соответствует наличию корней лишь на критич. прямой.

В случае, когда S-матрица не унитарна, спектр генератора B содержит абсолютно непрерывную компоненту

$$\sigma_a = \operatorname{supp}\{I - S^+S(k)\}.$$

Это имеет место в задачах рассеяния на некомпактных препятствиях, в частности в задачах рассеяния плоских волн на полукристалле.

Лит.: [1] Лакс П., Филлипс Р., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1971; [2] Адамян В. М., Аров Д. З., «Математич. исследования», 1966, т. 1, с. 3–64; [3] Павлов Б. С., Фаддеев Л. Д., «Зап. научн. сем. ЛОМИ», 1972, т. 27, в. 6, с. 161–93; [4] Лакс П., Филлипс Р., Теория рассеяния для автоморфных функций, пер. с англ., М., 1979; [5] Павлов Б. С., Математическое программирование и смежные вопросы. Труды 7-й зимней школы, Дорогобыч, 1974, М., 1976, с. 3–69. *Б. С. Павлов.*

ЛАМЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ортогональной криволинейной системы координат u, v, w в пространстве – величины

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2},$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2},$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2},$$

где x, y, z – декартовы прямоугольные координаты; аналогично определяются Л. к. на плоскости. Через Л. к. в координатах u, v, w выражаются элемент длины:

$$dl = \sqrt{L_u^2\,du^2 + L_v^2\,dv^2 + L_w^2\,dw^2};$$

элемент площади поверхности:

$$ds = \sqrt{(L_uL_v\,dudv)^2 + (L_uL_w\,dudw)^2 + (L_vL_w\,dvdw)^2};$$

элемент объема:

$$dV = L_uL_vL_w\,dudvdw.$$

Л. к. входят в выражения векторных дифференциальных операций в координатах u, v, w:

$$\operatorname{grad}_u\psi = \frac{1}{L_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v\psi = \frac{1}{L_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \operatorname{grad}_w\psi = \frac{1}{L_w}\frac{\partial\psi}{\partial w};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uL_vL_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_vL_uL_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_wL_uL_v)\right];$$

$$\operatorname{rot}_u\boldsymbol{a} = \frac{1}{L_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(a_wL_w) - \frac{\partial}{\partial w}(a_vL_v)\right],$$

$$\operatorname{rot}_v\boldsymbol{a} = \frac{1}{L_wL_u}\left[\frac{\partial}{\partial w}(a_uL_u) - \frac{\partial}{\partial u}(a_wL_w)\right],$$

$$\operatorname{rot}_w\boldsymbol{a} = \frac{1}{L_uL_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_vL_v) - \frac{\partial}{\partial v}(a_uL_u)\right];$$

$$\Delta\psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) = \frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_vL_w}{L_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_wL_u}{L_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_uL_v}{L_w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)\right].$$

Л. к. введены Г. Ламе (G. Lamé, 1859). *В. И. Битюцков.*

ЛАМЕ ПОСТОЯННЫЕ – см. *Упругости теории уравнения.*

ЛАМИНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ЛАНДАУ АМПЛИТУДА – см. *Ферми-жидкость.*

ЛАНДАУ ЗАТУХАНИЕ – процесс затухания электромагнитного поля в бесстолкновительной плазме, описываемой *Власова уравнением* (предсказано Л. Д. Ландау, см. [1]). В случае, когда электроны имеют равновесное максвелловское распределение по скоростям, декремент затухания γ_k электромагнитного поля определяется формулой

$$\gamma_k = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\frac{\omega_0}{(kr_D)^3}\exp\left\{-\frac{1}{2k^2r_D^2} - \frac{3}{2}\right\},$$

где k – волновой вектор, r_D – радиус Дебая, ω_0 – плазменная частота. При распространении электромагнитной волны электроны, движущиеся со скоростью меньшей фазовой скорости волны, отбирают у нее энергию, а электроны, опережающие волну, отдают ей энергию. Поэтому, если функция распределения электронов является убывающей функцией энергии, то волна будет затухать. Этот механизм и обуславливает Л. з.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1946, т. 16, с. 574. *В. В. Красильников.*

ЛАНДАУ ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ – столкновительный член $\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{st}$ кинетического уравнения для газа слабовзаимодействующих частиц:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{st} = \frac{8\pi^5 n}{m^2}\int_0^\infty dk\,k^3V_k^2\int d^3v_1\left(\frac{\partial}{\partial v^i} - \frac{\partial}{\partial v_1^i}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{g^2\delta^{ij} - g^ig^j}{g^3}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^j} - \frac{\partial}{\partial v_1^j}\right)f(\boldsymbol{v},t)f(\boldsymbol{v}_1,t),$$

где $f(\boldsymbol{v}, t)$ – функция распределения частиц по скоростям, V_k – фурье-компонента потенциала взаимодействия частиц газа, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$ – скорости частиц газа до столкновения, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1$ (n, m – плотность числа частиц и их масса). Л. и. с. был получен Л. Д. Ландау (см. [1]) для разреженной плазмы. Чтобы не появлялись расходящиеся интегралы при применении Л. и. с. к плазме, нужно вводить соответствующее обрезание. Как показал Н. Н. Боголюбов (см. [2]), Л. и. с. получается из уравнения для парной корреляционной функции в наинизшем приближении теории возмущений, когда межчастичное взаимодействие мало́ по сравнению со средней кинетич. энергией частиц.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1936, т. 7, с. 203; [2] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М., 1946. *В. В. Красильников.*

ЛАНДАУ УРАВНЕНИЕ – интегро-дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию кулоновской плазмы с интегралом столкновений в форме Ландау:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i,j=1}^3\frac{\partial}{\partial v_i}\int Q_{ij}(v - v')\left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial}{\partial v_j'}\right)F(x,v,t)F(x,v',t);$$

здесь $f(x, v, t)$ – функция распределения, Q_{ij} – заданные ядра интеграла столкновений.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1937, т. 7, № 2, с. 203–209. *И. А. Кузин, В. П. Политюков.*

ЛАНДАУ УРАВНЕНИЕ для амплитуд – сглаженное по высокочастотным колебаниям и справедливое с точностью до $o(|A|^4)$ уравнение для амплитуды $A(t)$ периодического течения, получающегося из неустойчивого малого возмущения $A(t)\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})$ поля скорости стационарного течения жидкости, имеющее вид:

$$\partial|A|^2/\partial t = 2\gamma|A|^2 - \delta|A|^4,$$

где Re – число Рейнольдса, $\gamma \sim (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{кр})$, а δ имеет такой же знак. *А. С. Монин.*

ЛАНДАУ УРОВНИ – квантованные значения энергии заряженных частиц (электронов и др.), движущихся в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Согласно клас-

сич. механике, движение частиц с массой m и зарядом e в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $\boldsymbol{H}$, представляет собой периодич. движение по окружности под действием силы Лоренца с круговой частотой $\omega_c = |e|H/mc$. В квантовой механике такому финитному движению по окружности соответствуют движения с квантованными значениями энергии: $\mathscr{E}_n = (n+1/2)\hbar\omega_c$ (n — неотрицательное целое число). Это явление называется орбитальным квантованием. Величина $|e|\hbar/mc$, характеризующая Л. у., равна $1{,}16\cdot10^{-8}$ эВ/Гс (если e — заряд электрона) и $\mathscr{E}_n = 1{,}16\cdot10^{-8}\cdot(n+1/2)H$(эВ). *Волновая функция* n-го Л. у. свободной частицы (электрона) имеет вид:

$$\psi_n = \pi^{-1/4}(2^n n! r_c)^{1/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z) - \frac{(y-y_0)^2}{2r_c^2}\right\}H_n\left(\frac{y-y_0}{r_c}\right),$$

где p_x, p_z — x- и z-компоненты импульса частицы (ось z выбрана вдоль направления поля $\boldsymbol{H}$), H_n — многочлены Эрмита, $r_c^2 = \hbar m\omega_c$, а y_0 соответствует координате y центра орбиты (окружности), по к-рой вращается частица в плоскости xy при классич. описании движения в магнитном поле (одновременно координаты x и y центра орбиты в квантовой механике задать нельзя). Каждый Л. у. с фиксированным p_z имеет бесконечную кратность вырождения, что является следствием независимости энергии от положения центра орбиты; кратность вырождения конечна для системы, конечной в плоскости xy. Возможность наблюдения Л. у. определяется безразмерным параметром $\omega_c\tau$, где τ — время релаксации, задающее ширину (размытие) Л. у. (при $\omega_c\tau \geqslant 1$ столкновения электронов редки и преобладающее влияние на их движение оказывает магнитное поле).

Существованием Л. у. объясняется диамагнетизм электронов проводимости в металлах и полупроводниках. Учет Л. у. важен при рассмотрении систем заряженных частиц в магнитном поле в различных задачах физики плазмы, физики твердого тела, астрофизики.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [2] Ашкрофт Н., Мермин Н., Физика твердого тела, пер. с англ., т. 1, М., 1979. *А. Э. Мейерович.*

ЛАНДАУ — ГИНЗБУРГА УРАВНЕНИЯ для амплитуд — уравнения с кубической нелинейностью для «медленной» огибающей узких волновых пакетов. Пусть комплексная амплитуда огибающей εA зависит от «медленных» пространственных координат $\boldsymbol{X} = \varepsilon\boldsymbol{x}$ и времени $T = \varepsilon t$, где ε — параметр надкритичности. В гидродинамике

$$\varepsilon = [(\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{\mathrm{кр}}) - 1]^{1/2},$$

где Re — число Рейнольдса. И пусть, напр., изменение скорости течения по одной из координат (z) задано ($\sim\zeta(z)$), $X = \varepsilon x$, $Y = \varepsilon^{1/2}y$, $T = \varepsilon t$. Рассматривается основной волновой пакет с центром $\boldsymbol{k}_c$ (скажем, $\boldsymbol{k}_c = (k_c, 0)$), где $\boldsymbol{k}_c$ — первая возбуждающаяся мода, определяемая минимальным значением $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_c$ на кривой нейтральной устойчивости $\gamma(\boldsymbol{k}, \mathrm{Re}) = 0$. Пусть в линейном приближении имеет место вращательная симметрия хотя бы при малых углах поворота относительно $\boldsymbol{k}_c$. Аппроксимируя пакет рядом

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots; \quad u_1 = A\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) - \omega_c t]$$

(для одной из компонент поля скорости), подставляют такие ряды в уравнения динамики и, собрав в них слагаемые одинакового порядка по ε, получают систему уравнений, условием разрешимости к-рой будет следующее уравнение Ландау — Гинзбурга:

$$\frac{\partial A}{\partial T} + \omega_c'\left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i}{2k_c}\Delta\right)A + \frac{1}{2}\left[\gamma'' - i\left(\omega_c'' - \frac{\omega_c'}{k_c}\right)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i}{2k_c}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)^2 A = \gamma A - \frac{1}{2}\delta A^2 A^*,$$

где $\omega_c' = \partial\omega_c/\partial k_c$ — групповая скорость пакета, ω_c'' и ω_c'/k_c характеризуют его расплывание, γ'' характеризует уменьшение инкрементов мод в пакете при отклонении их волновых чисел от k_c, а δ — комплексная постоянная Ландау, характеризующая насыщение и нелинейную модуляцию волны. Отсюда при нек-рых упрощениях легко выводится известное уравнение Ландау для квадрата амплитуды $|A|^2 = AA^*$. *А. С. Монин.*

ЛАНДАУ — ЛИФШИЦА УРАВНЕНИЕ — уравнение движения магнитного момента $\boldsymbol{M}(x, t)$ в ферромагнетиках. Сформулировано Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем (1935). Л.—Л. у. имеет вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -\frac{g|e|}{mc}[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{эф}}] + \boldsymbol{R}. \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{H}^{\mathrm{эф}}$ — эффективное магнитное поле, $\boldsymbol{R}$ — релаксационный член, g — множитель Ланде (A. Landé), $1 \leqslant g \leqslant 2$, $|e|$ — заряд электрона, m — масса электрона, c — скорость света.

Эффективное поле представляет собой вариационную производную

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{эф}} = -\frac{\delta W}{\delta \boldsymbol{M}} \qquad (2)$$

от энергии ферромагнетика

$$W = \int w\{\boldsymbol{M}, \partial M_i/\partial x_k\}\, d\boldsymbol{x},$$

к-рую, исходя из физич. соображений, можно представить в виде суммы четырех слагаемых: энергии обменного взаимодействия W_E, энергии анизотропии W_A, энергии размагничивающих полей W_M и энергии магнетика во внешнем магнитном поле W_H.

Плотность энергии обменного взаимодействия имеет вид:

$$w_E = \frac{1}{2}f(M^2) + \alpha_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \qquad (3)$$

где α_{ij} — тензор обменных постоянных $\alpha_{ij} > 0$.

Обменное взаимодействие ответственно за упорядочение магнитных моментов в ферромагнетике, имеет квантовомеханич. природу и связано с кулоновским взаимодействием электронов и ядер с учетом принципа Паули. Обменное взаимодействие инвариантно по отношению к вращению магнитных моментов.

Энергия магнитной анизотропии W_A связана с взаимодействием магнитных моментов атомов ферромагнетика с электрич. полем кристаллич. решетки, а также с дипольным взаимодействием магнитных моментов друг с другом. Плотность энергии магнитной анизотропии в простейшем случае так наз. одноосной анизотропии имеет вид:

$$w_A = \frac{1}{2}\beta(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_z)^2, \qquad (4)$$

где β — константа магнитной анизотропии, $\boldsymbol{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси анизотропии.

Конкретный вид обменной энергии и энергии магнитной анизотропии определяется симметрией кристалла.

Плотность энергии размагничивающих полей w_M может быть записана в виде:

$$w_M = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}_M), \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{H}_M$ — размагничивающее поле, к-рое создается магнитными моментами ферромагнетика благодаря дипольному взаимодействию и удовлетворяет уравнениям магнитостатики. Для большинства ферромагнетиков выполняется соотношение $w_E \gg w_A, w_M$.

Плотность энергии магнетика w_H во внешнем магнитном поле $\boldsymbol{H}$ имеет вид:

$$w_H = -(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}). \qquad (6)$$

Релаксационный член $\boldsymbol{R}$ описывает диссипативные процессы в ферромагнетике. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц предложили следующий вид релаксационного члена:

$$\boldsymbol{R} = \lambda[\boldsymbol{M}, [\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{эф}}]], \qquad (7)$$

где $\lambda = \text{const}$, $\lambda > 0$. Более удобную для расчетов форму релаксационному члену придал Т. Гильберт (T. Gilbert, 1955):

$$\boldsymbol{R} = \lambda' \left[\boldsymbol{M}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} \right], \qquad (8)$$

где $\lambda' = \text{const}$, $\lambda' > 0$. Важным свойством Л.–Л. у. с релаксационными членами (7), (8) является наличие локального интеграла движения $\boldsymbol{M}^2(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{M}_0^2(\boldsymbol{x})$. Таким образом, формулы (7), (8) описывают релаксацию направления магнитного момента к равновесному значению. Релаксационный член можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{R} = \hat{\gamma} \boldsymbol{H}^{\text{эф}} - \gamma_{ij}^{e} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \boldsymbol{H}^{\text{эф}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \qquad (9)$$

Здесь $\hat{\gamma}$, γ_{ij}^{e} – тензоры релаксационных постоянных, определяемых симметрией кристалла. Релаксационный член (9) позволяет исследовать релаксацию сильно неоднородных состояний как величины, так и направления магнитного момента.

Л.–Л. у. позволяет исследовать существенно нелинейные процессы в ферромагнетиках. Важным свойством Л.–Л. у. в случае одномерного магнетика в приближении $\boldsymbol{R} = 0$, $w_M = w_H = 0$ и плотности энергии магнитной анизотропии вида:

$$w_A = \frac{1}{2} \left(\beta_1 M_z^2 + \beta_2 M_x^2 \right)$$

является существование точных решений типа уединенных волн. Л.–Л. у. в этом же приближении было представлено как условие совместимости двух линейных уравнений [предъявлена $(L-A)$-пара], что позволило применить для Л.–Л. у. *обратной задачи рассеяния метод*.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., в кн.: Ландау Л. Д., Собрание трудов, т. 1, М., 1969, с. 128–43; [2] Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В., Спиновые волны, М., 1967; [3] Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С., Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны, Киев, 1983; [4] Маслов В. П., Четвериков В. М., Теория доменных структур в магнитных пленках с большой перпендикулярной анизотропией, М., 1986.

И. Б. Барьяхтар.

ЛАНДАУ – РУМЕРА УРАВНЕНИЯ – уравнения для плотностей $\pi(\varepsilon, t)$ и $\gamma(\varepsilon, t)$ распределения по энергии ε среднего числа электронов и среднего числа фотонов на глубине t в электронно-фотонном каскаде, возникающем при поглощении излучения веществом. Каскад описывается случайным *ветвящимся процессом* $\{\xi_\pi(t, \varepsilon_\pi), \xi_\gamma(t, \varepsilon_\gamma)\}$, где $\xi_\pi(t, \varepsilon_\pi)$ – случайное число электронов с энергией меньшей ε_π (электроны и позитроны не отличаются друг от друга) и $\xi_\gamma(t, \varepsilon_\gamma)$ – случайное число фотонов с энергией меньшей ε_γ на глубине t в веществе-поглотителе. Тогда для плотностей

$$\pi(\varepsilon, t) = \frac{d}{d\varepsilon} \mathsf{E}[\xi_\pi(t, \varepsilon)],$$

$$\gamma(\varepsilon, t) = \frac{d}{d\varepsilon} \mathsf{E}[\xi_\gamma(t, \varepsilon)]$$

Л.–Р. у. имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(\varepsilon, t) = 2 \int_0^1 \gamma\left(\frac{\varepsilon}{u}, t\right) \psi_0(u) \frac{du}{u} -$$

$$- \int_0^1 \left[\pi(\varepsilon, t) - \frac{1}{1-v} \pi\left(\frac{\varepsilon}{1-v}, t\right) \right] \varphi_0(v)\, dv + \beta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \pi(\varepsilon, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(\varepsilon, t) = \int_0^1 \pi\left(\frac{\varepsilon}{v}, t\right) \varphi_0(v) \frac{dv}{v} - \sigma_0 \gamma(\varepsilon, t);$$

здесь функции

$$\psi_0(u) = u^2 + (1-u)^2 + u(1-u)\left(\frac{2}{3} - 2b\right),$$

$$\varphi_0(v) = \frac{1}{v} \left[1 + (1-v)^2 - (1-v)\left(\frac{2}{3} - 2b\right) \right]$$

связаны с дифференциальными сечениями рождения фотоном пары и излучением электроном фотона соответственно (см. *Баба – Рамакришнана уравнения*) и σ_0 – полное сечение образования пары фотоном на единицу каскадной длины, b – постоянная, характеризующая вещество-поглотитель, коэффициент β равен энергии, теряемой электроном на ионизацию на единицу каскадной длины.

Лит.: [1] Landau L., Rumer G., «Proc. Roy. Soc.» (London), ser. A, 1938, v. 166, № 1, p. 213–228; [2] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

Ю. П. Вирченко.

ЛАНДАУ – ФОККЕРА – ПЛАНКА УРАВНЕНИЕ – кинетическое *Ландау уравнение*, записанное в форме уравнения Фоккера – Планка с переменными коэффициентами:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial v_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left(f_\alpha \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_i \partial v_j} \right);$$

здесь $f_\alpha(x, v, t)$ – функция распределения, α – сорт частиц, $h_\alpha(v, t)$, $g_\alpha(v, t)$ являются заданными функционалами от f_α.

И. А. Кузин, В. П. Политюков.

ЛАНДАУ – ХОПФА СЦЕНАРИЙ стохастизации – последовательность нормальных бифуркаций Андронова – Хопфа, порождающая квазипериодическое течение жидкости

$$\boldsymbol{u}[\boldsymbol{x}, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_N(t)]$$

с периодом 2π по каждому из аргументов $\varphi_n(t) = \omega_n(t) + \alpha_n$, вообще говоря, несоизмеримыми частотами ω_n, занимающее в фазовом пространстве область, соответствующую всевозможным наборам начальных фаз $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ так, что фазовая траектория с течением времени проходит сколь угодно близко от любой точки этой области. Результирующее движение не обладает структурной устойчивостью, но приобретает ее, если перейти к бифуркациям n-мерных торов $T^n \to T^{n+1}$ без требования квазипериодичности течений на них.

А. С. Монин.

ЛАНЖЕВЕНА КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Квантовое стохастическое исчисление.*

ЛАНЖЕВЕНА УРАВНЕНИЕ – см. *Орнштейна – Уленбека процесс.*

ЛАНЖЕВЕНА УРАВНЕНИЯ в теории турбулентности – уравнения для фурье-компонент поля скорости:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{k}, t) = -\mu(k, t) \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{k}, t) + f_i(\boldsymbol{k}, t), \quad i = 1, 2, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор с модулем k, $\mu(k, t)$ – релаксационный коэффициент трения, $f_i(\boldsymbol{k}, t)$ – дельта-коррелированные по времени случайные силы, определяемые спектральным тензором $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, t)$. Осреднение их произведения дает

$$\langle f_i(\boldsymbol{k}, t) f_j(-\boldsymbol{k}, t') \rangle = \delta(t - t') \Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, t). \qquad (2)$$

Условие (2) обеспечивает марковость случайного процесса (см. [1]).

Подстановка выражения (1) в тождество

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{k}, t) \boldsymbol{u}_j(-\boldsymbol{k}, t) = \boldsymbol{u}_j(-\boldsymbol{k}, t) \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{k}, t) + \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{k}, t) \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}_j(-\boldsymbol{k}, t)$$

и осреднение полученного при этом выражения с использованием формулы для корреляции случайной силы со скоростью

$$\left\langle f_i(\boldsymbol{k}, t) \boldsymbol{u}_j(-\boldsymbol{k}, t) \right\rangle = \int_0^t dt' \left\langle f_i(\boldsymbol{k}, t) f_l(-\boldsymbol{k}, t') \right\rangle \left\langle \delta \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{k}, t) / \delta f_l(-\boldsymbol{k}, t') \right\rangle$$

позволяют получить уравнение для изотропной спектральной функции поля скорости в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k, t) = -2\mu(k, t) F(k, t) + 2\Phi(\boldsymbol{k}, t). \qquad (3)$$

Уравнение (3) обнаруживает тесную связь с квазимарковскими схемами замыкания в теории турбулентности (см. [3]–[5]).

Лит.: [1] Кляцкин В. И., Татарский В. И., «Успехи физич. наук», 1973, т. 110, № 4, с. 499–536; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967; [3] Edwards S. F., «J. Fluid Mech.», 1964, v. 18, № 2, p. 239–73; [4] Herring J. H., «Phys. Fluids», 1965, v. 8, № 12, p. 2219–25; [5] Kraichnan R. H., «J. Fluid Mech.», 1971, v. 47, № 3, p. 513–24.

А. П. Мирабель.

ЛАПЛАСА ДВУСТОРОННЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Фурье интеграл.*

ЛАПЛАСА ИНТЕГРАЛ – см. *Лапласа преобразование.*

ЛАПЛАСА ОПЕРАТОР, лапласиан,– простейший эллиптический дифференциальный оператор 2-го порядка:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2},$$

действующий на гладкие функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенные в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $x_1, \ldots, x_n$ (или в некоторой его части G). Л. о. инвариантен относительно ортогональных преобразований координат в $\mathbb{R}^n$, то есть преобразований

$$x_i' = \sum_k s_{ik} x_k$$

с ортогональной матрицей s_{ik}.

ЛАПЛАСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – преобразование, переводящее функцию $f(x)$ действительного переменного t, $0 < t < \infty$, называемую оригиналом, в функцию

$$F(p) = L[f] = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \qquad (1)$$

комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$. Под Л. п. понимают также не только само преобразование, но и его результат – функцию $F(p)$. Интеграл в правой части формулы (1) называется интегралом Лапласа. Он был рассмотрен П. Лапласом (P. Laplace) в ряде работ, к-рые объединены в его книге «Аналитическая теория вероятностей», вышедшей в 1812. Значительно раньше (1737) такие интегралы применял к решению дифференциальных уравнений Л. Эйлер (L. Euler).

При нек-рых условиях Л. п. определяют функцию $f(t)$ однозначно, в простейших случаях – по формуле обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt} dt. \qquad (2)$$

Л. п. является линейным функциональным преобразованием. Из числа основных формул Л. п. можно отметить следующие:

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(0),$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(p)}{p}, \quad t > 0.$$

Л. п. в сочетании с формулой (2) его обращения применяется к интегрированию дифференциальных уравнений. В частности, в силу свойства (1) и линейности Л. п. решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяет алгебраич. уравнению 1-й степени и может быть, следовательно, легко найдено. Так, если, напр., $y'' + y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ и $Y(p) = L[y]$, $F(p) = L[f]$, то $L[y''] = p^2 Y(p)$ и $p^2 Y(p) + Y(p) = F(p)$, откуда $Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 1}$.

Многочисленные задачи электротехники, гидродинамики, механики, теплопроводности эффективно решаются методами, использующими Л. п.

Лит.: [1] Деч Г., Руководство к практическому применению преобразований Лапласа, пер. с нем., М., 1965.

ЛАПЛАСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ обобщенной функции – преобразование Лапласа, определенное для *обобщенных функций*, основное пространство которых содержит линейные экспоненты – функции вида

$$e^{iz}(\zeta) = e^{i z \zeta},$$

ζ – вещественный или комплексный аргумент, z – параметр, лежащий в трубчатой области $T^O = \mathbb{R}^n + iO \subset \mathbb{C}^n$, O – область в $\mathbb{R}^n$, $z\zeta = z_1\zeta_1 + \ldots + z_n\zeta_n$. В этом случае Л. п. $L[g]$ обобщенной функции g определяется формулой

$$L[g](z) = (g, e^{iz}), \quad z \in T^O.$$

В нормальных условиях топология основного пространства обеспечивает аналитичность функции $f(z) = L[g](z)$ в T^O.

Л. п. обобщенных функций было введено Л. Шварцем (L. Schwartz) и Ж. Лионсом (J. Lions) в начале 50-х гг. 20 в. Оно широко применяется в аксиоматич. квантовой теории поля, в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в тауберовой теории для обобщенных функций, при изучении граничных значений аналитич. функций и в других областях математики и математич. физики.

Л. п. аналитических функционалов. Основное пространство $\mathcal{H}(O)$, O – область в $\mathbb{C}^n$, содержит все линейные экспоненты, так что для всякого аналитич. функционала $g \in \mathcal{H}'(O)$ определено Л. п. $L[g](z)$, $z \in \mathbb{C}^n$,– целая функция экспоненциального типа. Подробнее, пусть

$$E(O) = \liminf_{K \subset O} E(K),$$

где K – комплексный компакт, $E(K)$ – банахово пространство всех целых функций $f(z)$ с конечной нормой

$$|f| = \sup\left\{|f(z)| e^{-H_K(z)};\ z \in \mathbb{C}^n\right\},$$

где $H_K(z) = \sup\{\operatorname{Re} iz\zeta;\ \zeta \in K\}$ – опорная функция K. Очевидно, $E(O) = E(\operatorname{ch} O)$, где $\operatorname{ch} O$ – выпуклая оболочка O. Л. п. L есть линейное непрерывное отображение $\mathcal{H}'(O)$ в $E(O)$. Если область O выпуклая, то

$$L: \mathcal{H}'(O) \cong E(O)$$

– топологич. изоморфизм.

Л. п. вещественных аналитических функционалов. Основное пространство $\mathcal{A}(\omega)$, ω – область в $\mathbb{R}^n$, содержит все линейные экспоненты, то есть и здесь для всякого $g \in \mathcal{A}'(\omega)$ определено Л. п. $L[g]$ – целая функция экспоненциального типа. Подробнее, пусть

$$E(\omega) = \liminf_{K \subset \omega} \operatorname{limproj}_{\varepsilon > 0} E_\varepsilon(K),$$

где K – вещественный компакт, $E_\varepsilon(K)$ – банахово пространство всех целых функций $f(z)$ с конечной нормой

$$|f| = \sup\left\{|f(z)| e^{-H_K(z) - \varepsilon|z|};\ z \in \mathbb{C}^n\right\},$$

где

$$H_K(z) = \sup\{-y\zeta;\ \zeta \in K\},\ z = x + iy,$$

поскольку компакт K вещественный. Тогда L – линейное непрерывное инъективное отображение $\mathcal{A}'(\omega)$ в $E(\omega)$, а в случае выпуклой области ω, L – топологич. изоморфизм.

Л. п. обобщенных функций с компактным носителем. Основное пространство $\mathcal{E}(\omega)$, ω – область в $\mathbb{R}^n$, также содержит все линейные экспоненты, так что для всякой $g \in \mathcal{E}'(\omega)$ определено Л. п. $L[g]$ – целая функция экспоненциального типа. Подробнее, пусть

$$E_\infty(\omega) = \liminf E_p(K),$$

где $E_p(K)$ – банахово пространство всех целых функций $f(z)$ с конечной нормой

$$|f| = \sup\left\{|f(z)| e^{-H_K(z)} (1 + |z|)^{-p};\ z \in \mathbb{C}^n\right\},$$

индуктивный предел берется по всем $p = 0, 1, 2, \ldots$, и компактам $K \subset \omega$. Тогда L – линейное непрерывное инъек-

тивное отображение $\mathscr{E}'(\omega)$ в $E_\infty(\omega)$, а в случае выпуклой области ω, L – топологич. изоморфизм.

Часто основное пространство, на к-ром определена данная обобщенная функция g, не содержит линейных экспонент, но g допускает однозначное продолжение до линейного непрерывного функционала h на более широком основном пространстве, уже содержащем линейные экспоненты. В этом случае полагают, по определению, $L[g] = L[h]$ (да и вообще, отождествляют g и h).

Л. п. умеренных распределений с носителем, ограниченным со стороны острого замкнутого конуса $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле, то есть элементов из $\mathscr{S}'_{\Gamma_+}$. Здесь основное пространство $\mathscr{S}$ не содержит линейных экспонент, однако каждый функционал $g \in \mathscr{S}'_{\Gamma_+}$ однозначно продолжается до линейного непрерывного функционала на основном пространстве $\mathscr{S}(\Gamma_+)$. Пространство $\mathscr{S}(\Gamma_+)$ содержит линейные экспоненты e^{iz} при всех $z \in T^C$, где

$$C = \operatorname{int}\{y \in \mathbb{R}^n;\ y\zeta \geqslant 0 \text{ для всех } \zeta \in \Gamma\}$$

– внутренность сопряженного к Γ конуса, так что каждое $g \in \mathscr{S}'_{\Gamma_+}$ имеет Л. п. $L[g]$ – аналитическую в трубчатой области T^C функцию. Точнее, Л. п. L – линейное инъективное непрерывное отображение сверточной алгебры $\mathscr{S}'_{\Gamma_+}$ (см. *Свертка*) во *Владимирова алгебру* $H_+(C)$, причем

$$L[f*g](z) = L[f](z)L[g](z),\ z \in T^C,$$

для всех f, $g \in \mathscr{S}'_{\Gamma_+}$. Если конус Γ выпуклый, то L – топологич. изоморфизм алгебр. В частности, подалгебру $\mathscr{S}'_\Gamma$ умеренных распределений с носителем в конусе Γ Л. п. L отображает в алгебру Владимирова $H(C)$ и является изоморфизмом алгебр для выпуклого Γ.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Хермандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [3] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974. *В. В. Жаринов.*

ЛАПЛАСА УРАВНЕНИЕ – дифференциальное уравнение

$$\Delta f = 0,$$

где Δ – *Лапласа оператор*, а функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ отыскивается во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ или в его части G. Решения Л. у. называются *гармоническими функциями*. К Л. у. приводит ряд задач физики и техники. Л. у. удовлетворяют температура при стационарных процессах, потенциал электростатич. поля в точках пространства, свободных от зарядов, потенциал поля тяготения в области, не содержащей притягивающих масс, и т. п. Л. у. встречается у Л. Эйлера (L. Euler, 1761) и Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert, 1761) в связи с задачами гидромеханики. Однако широкую известность это уравнение получило после появления работ П. Лапласа (P. Laplace, 1782, 1799) по теории гравитационного потенциала и небесной механике.

Каждое решение Л. у. в ограниченной области G однозначно выделяется краевыми условиями, накладываемыми на поведение решения (или его производных) на границе ∂G области G. Если решение отыскивается во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, краевые условия сводятся к предписанию нек-рой асимптотики для f при $x_1, \ldots, x_n \to \infty$. Задача о нахождении таких решений называется *краевой задачей*. Чаще всего встречаются *Дирихле задача*, когда на границе задано значение самой функции f, и *Неймана задача*, когда задано значение производной f по нормали к границе. В случае $n = 2$, когда $\mathbb{R}$ можно отождествить с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, всякая гармонич. функция $f(x_1, x_2)$ в области $G \subset \mathbb{C}$ является вещественной частью нек-рой аналитич. функции $w(z)$ в этой области ($z = x_1 + ix_2$). Это обстоятельство позволяет использовать при изучении Л. у. методы теории аналитич. функций. Соответствующее Л. у. неоднородное уравнение называется *Пуассона уравнением*. Л. у. описывает стационарное распределение потенциала (электрического, гравитационного и других полей) в однородной среде без источников внутри области G.

ЛАПЛАСА – БЕЛЬТРАМИ ОПЕРАТОР – дифференциальный оператор на гладком многообразии M^n с метрическим тензором (g_{ij}) вида

$$\Delta f = \nabla_i \nabla^i f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right),$$

где $g = \det(g_{ij})$, ∇_i, $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$ – ковариантное дифференцирование в связности, согласованное с метрикой g_{ij}. Л.–Б. о. на пространстве дифференциальных форм степени k определяется по формуле $\Delta = d\delta + \delta d$, где d – внешнее дифференцирование, $\delta = \pm(*)d(*)$ – дивергенция формы, $(*)$ – оператор отождествления форм степени k и $n-k$. *А. В. Болсинов.*

ЛАПЛАСА – БЕЛЬТРАМИ ОПЕРАТОР; асимптотика спектра – построение асимптотических разложений собственных значений. Построение асимптотики может производиться методом эталонных задач (см. [1]). В более общем случае, если геодезич. поток на римановом многообразии M^n имеет инвариантные лагранжевы многообразия, асимптотич. разложения могут строиться с помощью *Маслова канонического оператора* (см. [2]). Напр., главный член асимптотич. разложения серии собственных чисел, соответствующих n-мерному инвариантному условно-периодич. тору с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$, имеет вид (см. [3]):

$$\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (m_i + l_i/4)\right)^2,$$

где l_i – индексы Маслова базисных циклов γ_i, $i = 1, \ldots, n$, тора и $(m_1, \ldots, m_n)$ – целочисленный вектор, находящийся на расстоянии $O(1)$ от луча, задаваемого вектором $(a_1, \ldots, a_n)$, здесь

$$a_i = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_i} p\,dq, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Маслов В. П., Асимптотические методы и теория возмущений, М., 1987; [3] Крахнов А. Д., «Успехи математич. наук», 1976, т. 31, в. 3, с. 217–18. *А. Д. Крахнов.*

ЛАПЛАСА – БЕЛЬТРАМИ УРАВНЕНИЕ, Бельтрами уравнение,– обобщение *Лапласа уравнения* для функций на плоскости на случай функций u на произвольном двумерном римановом многообразии R класса C^2. Для поверхности R с локальными координатами ξ, η и первой квадратичной формой

$$ds^2 = Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2$$

Л.–Б. у. имеет вид:

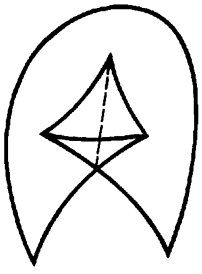
$$\Delta u \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{F\frac{\partial u}{\partial \eta} - G\frac{\partial u}{\partial \xi}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{F\frac{\partial u}{\partial \xi} - E\frac{\partial u}{\partial \eta}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = 0. \qquad (*)$$

При $E = G$ и $F = 0$ уравнение $(*)$ переходит в уравнение Лапласа. Л.–Б. у. было введено Э. Бельтрами (E. Beltrami, 1864–65).

Регулярные решения u Л.–Б. у. являются обобщениями гармонич. функций и называются обычно гармоническими функциями на поверхности R. Физически эти решения интерпретируются подобно обычным гармонич. функциям, напр. как потенциал скоростей потока несжимаемой жидкости, текущего по поверхности R, или как потенциал электростатич. поля на R, и т. п. Гармонич. функции на поверхности сохраняют свойства обычных гармонич. функций. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛАПЛАСИАН – см. *Векторный анализ, Лапласа оператор.*

ЛАСТОЧКИН ХВОСТ – поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами a, b, c, состоящая из таких точек $\{a, b, c\}$, что многочлен x^4+ax^2+bx+c имеет кратный корень. Является наряду с ребром возврата одной из простейших модельных особенностей *волновых фронтов*: напр., особенности (см. рис.) типичного волнового фронта в $\mathbb{R}^3$ исчерпываются (помимо самопересечений) полукубич. ребрами возврата и отдельными точками, вблизи к-рых фронт диффеоморфен Л. х.



Ласточкин хвост.

Обобщенный Л. х., соответствующий конечной группе, порожденной отражениями в $\mathbb{C}^n$,– пространство нерегулярных орбит этой группы.

См. также *Катастроф теория*.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В., Особенности. I, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 6, М., 1988.

В. А. Васильев.

ЛЕВАЯ МЕРА ХААРА – см. *Хаара мера, Инвариантное интегрирование*.

ЛЕВИ ФОРМА – см. *Аналитическая функция*.

ЛЕВИ – МАЛЬЦЕВА ТЕОРЕМА – см. *Ли алгебра*.

ЛЕВИНА – ЭЙЗЕНБУДА – ХИМШИАШВИЛИ ФОРМУЛА: индекс особой точки векторного поля с компонентами $f_1, \ldots, f_n$ равен сигнатуре билинейной формы B_α на Q_f, где $f=(f_1, \ldots, f_n)$: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^n, 0)$ – вещественно аналитич. отображение;

$$Q_f=\mathbb{R}\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle/(f_1, \ldots, f_n);$$

$\dim_{\mathbb{C}} Q_f<\infty$; J – класс в Q_f гессиана $\det(\partial f/\partial x)$; α: $Q_f\to\mathbb{R}$ – линейная форма такая, что $\alpha(J)>0$ и $B_\alpha(g, h)=\alpha(g, h)$.

Лит.: [1] Химшиашвили Г. Н., «Сообщения АН Грузинской ССР», 1977, т. 85, № 2, с. 309–12; [2] Eisenbud D., Levine H., «Ann. Math.», 1977, v. 106, № 1, p. 19–38.

С. В. Чмутов.

ЛЕВИ-ЧИВИТА СВЯЗНОСТЬ – *связность* на (псевдо)римановом многообразии (M^n, g_{ij}), определяемая из следующих условий:

а) в процессе параллельного переноса скалярное произведение векторов не меняется;

б) аффинная связность симметрична, то есть ее тензор кручения равен нулю.

Условие а) эквивалентно обращению в нуль всех ковариантных производных $\nabla_k g_{ij}=0$ от метрич. тензора g_{ij}. Условие б) эквивалентно соотношениям

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}.$$

Для любого (псевдо)риманова многообразия (M^n, g_{ij}) существует единственная Л.-Ч. с., к-рая в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ вычисляется по формуле

$$\Gamma^i_{pq}=\frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qs}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^s}\right),$$

$$g^{ij}g_{js}=\delta^i_s.$$

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, М., 1986.

В. В. Трофимов.

ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА УРАВНЕНИЕ – см. *Однолистности условия*.

ЛЕВЫЙ ИДЕАЛ – см. *Идеал*.

ЛЕЖАНДРА МНОГОЧЛЕНЫ, сферические многочлены,– многочлены, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с единичным весом $\varphi(x)=1$. Стандартизованные Л. м. определяются формулой

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

и имеют представление

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

Наиболее употребительны формулы

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),$$

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x),\ P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n,$$

$$(1-x^2)P'_n(x)=nP_{n-1}(x)-xnP_n(x),$$

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x).$$

Л. м. можно определить как коэффициенты разложения производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,$$

где ряд в правой части сходится, если $x\in[-1, 1]$.

Несколько первых стандартизованных Л. м. имеют вид:

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=(3x^2-1)/2,$$

$$P_3(x)=(5x^3-3x)/2,\ P_4(x)=(35x^4-30x^2+3)/8,$$

$$P_5(x)=(63x^5-70x^3+15x)/8,$$

$$P_6(x)=(231x^6-315x^4+105x^2-5)/16.$$

Л. м. порядка n удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнению Лежандра)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0,$$

к-рое появляется при решении уравнения Лапласа в сферич. координатах методом разделения переменных. Ортонормированные Л. м. имеют вид:

$$\hat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x), \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

и допускают равномерную и весовую оценки

$$|\hat{P}_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \quad x\in[-1, 1],$$

$$(1-x^2)^{1/4}|\hat{P}_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2n+1}{\pi n}}, \quad x\in[-1, 1].$$

Ряды Фурье по Л. м. внутри интервала $(-1, 1)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье; есть теорема о равносходимости этих двух рядов, к-рая означает, что ряд Фурье–Лежандра функции $f(x)$ в точке $x\in(-1, 1)$ сходится тогда и только тогда, когда в точке $\theta=\arccos x$ сходится тригонометрич. ряд Фурье функции

$$F(\theta)=(\sin\theta)^{1/2}f(\cos\theta).$$

В окрестности концов положение иное, ибо последовательность $\{\hat{P}_n(\pm1)\}$ возрастает со скоростью $\sqrt{n}$. Если функция $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha>1/2$, то ряд Фурье–Лежандра сходится к функции $f(x)$ равномерно на всем сегменте $[-1, 1]$. При условии $\alpha=1/2$ этот ряд, вообще говоря, расходится в точках $x=\pm1$.

Эти многочлены введены А. Лежандром (A. Legendre, 1785).

Лит.: [1] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979; [2] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952.

П. К. Суетин.

ЛЕЖАНДРА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА эллиптического интеграла – см. *Эллиптический интеграл*.

ЛЕЖАНДРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – отображение, которое сопоставляет функции $S(q)$ на векторном пространстве V функцию $S^*(p)$ на двойственном пространстве V^*. Фун-

кция S задает *лежандрово многообразие* в контактном пространстве $V\times V^*\times\mathbb{R}$ 1-струй функций на V^* по формуле

$$p=\partial s/\partial q,\ u=\langle p,\ q\rangle - S(q),\ p\in V^*,\ q\in V,\ u\in\mathbb{R}.$$

В случае, когда функция S выпукла, фронт этого лежандрового многообразия в $V^*\times\mathbb{R}$ снова является графиком выпуклой функции $u=S^*(p)$ – Л. п. функции S.

Механич. система классич. механики может быть эквивалентным образом описана либо функцией Лагранжа на пространстве касательного расслоения конфигурационного многообразия системы, либо функцией Гамильтона на пространстве кокасательного расслоения. Переход от функции Лагранжа к функции Гамильтона и обратно осуществляется при помощи послойного Л. п. *М. Э. Казарян.*

ЛЕЖАНДРА ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ – см. *Сферические функции.*

ЛЕЖАНДРА УРАВНЕНИЕ – см. *Лежандра многочлены.*

ЛЕЖАНДРА ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ – составная часть функциональной техники, общей для квантовой теории поля (евклидовой и псевдоевклидовой), квантовой статистики и теории классического случайного поля. Л. ф. п. являются непосредственным обобщением обычных *Лежандра преобразований* функций, широко применяемых в механике и термодинамике: функции заменяются функционалами, обычные производные – вариационными.

Хорошо изучены преобразования Лежандра производящего функционала связных функций Грина

$$W(a)=\ln\int D\varphi\exp S(\varphi,a),$$

где $\int D\varphi\ ...$ – символ функционального интегрирования, S – функционал действия общего вида

$$S(\varphi,a)=\sum_n\int\dots\int dx_1\dots dx_n\,a_n(x_1,\dots,x_n)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)$$

(терминология евклидовой теории, в псевдоевклидовой S заменяется на iS). Функционал S задается набором симметричных по перестановкам x потенциалов $a_n(x_1,\ ...,\ x_n)$, $n=1,\ 2,\ ...$, величина W – функционал от всех потенциалов a, его кратные вариационные производные по первому потенциалу $a_1(x)$ имеют смысл связных функций Грина в теории с действием S. Преобразование Лежандра W по первому потенциалу a_1 называется первым (оно же – эффективное действие), по совокупности a_1 и a_2 – вторым, по совокупности $a'\equiv(a_1,\ ...,\ a_m)$ – преобразованием порядка m. При этом $a=(a',\ a'')$, где a'' – набор всех старших потенциалов a_n с $n>m$, считающихся фиксированными параметрами. Преобразование порядка m есть функционал

$$\Gamma_m(\alpha,a'')=W(a)-\sum_{n=1}^m\alpha_n a_n$$

с

$$\alpha_n a_n\equiv\int\dots\int dx_1\dots dx_n\,\alpha_n(x_1,\dots,x_n)a_n(x_1,\dots,x_n),$$

в к-ром вместо a' новыми и независимыми переменными считаются сопряженные с a_n, $n\leqslant m$, полные функции Грина

$$\alpha_n(x_1,\ ...,\ x_n)=\delta W(a)/\delta a_n(x_1,\ ...,\ x_n)=\langle\varphi(x_1),\ ...,\ \varphi(x_n)\rangle,$$

где $\langle ...\rangle$ обозначает функциональное усреднение с весом $\exp S$. Из определения Γ_m вытекают равенства:

$$\delta\Gamma_m(\alpha,\ a'')/\delta\alpha_n(x_1,\ ...,\ x_n)=-a_n(x_1,\ ...,\ x_n),$$

эквивалентные условию стационарности по α функционала

$$\Phi_m(\alpha,a)=\Gamma_m(\alpha,a'')+\sum_{n=1}^m\alpha_n a_n$$

при фиксированных a. В физич. задачах функции Грина α ищутся по заданному действию, то есть по a. На языке Φ_m задача определения первых m функций α по a становится вариационной, так что это – естественный язык для описания аномальных решений со спонтанным нарушением симметрии (теория фазовых переходов и т. п.): Φ_m всегда сохраняет симметрию действия, но может при этом иметь неинвариантные точки стационарности, инвариантна лишь их совокупность в целом. Важно, что сохранение симметрии у Φ_m позволяет вычислять этот функционал, в отличие от самих функций Грина α, по обычной теории возмущений. Функционалы W и Γ_m имеют известные диаграммные представления, причем основная масса диаграмм Γ_m (для Γ_1 и Γ_2 – все) обладает свойством реберной m-неприводимости, то есть сохраняет связность при разрыве любых m линий.

Более сложными и менее изученными объектами являются преобразования Лежандра функционала S-матрицы, диаграммы к-рых обладают свойствами вершинной неприводимости.

Лит.: [1] Dominicis C. de, Martin P. C., «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 14–59; [2] Васильев А. Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Л., 1976. *А. Н. Васильев.*

ЛЕЖАНДРОВ КОБОРДИЗМ – отношение эквивалентности между лежандровыми подмногообразиями лежандрово расслоенных контактных многообразий или, эквивалентно, между волновыми фронтами; фронт на краю многообразия лежандрово кобордантен нулю, если он высекается фронтом, лежащим во всем многообразии, и трансверсальным краю. Вычисления групп Л. к. параллельно (и несколько проще) вычислений для *лагранжева кобордизма.*

Лит.: [1] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 4, М., 1985, с. 8–139. *В. А. Васильев.*

ЛЕЖАНДРОВ МОДУЛЬ эллиптического интеграла – см. *Эллиптический интеграл.*

ЛЕЖАНДРОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ КЛАСС – класс в когомологиях лежандровых многообразий, определяющий инвариант *лежандрова кобордизма.* Известные Л. х. к.– *Маслова класс* и другие классы, индуцированные из когомологий грассманианов лагранжевых плоскостей (классы Маслова–Арнольда и Бореля–Фукса), а также классы, соответствующие когомологиям универсальных комплексов лежандровых особенностей.

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Успехи математич. наук», 1983, т. 38, в. 2, с. 77–147; [2] Vassilyev V. A., Lagrange and Legendre characteristic classes, N. Y., 1988. *В. А. Васильев.*

ЛЕЖАНДРОВА ОСОБЕННОСТЬ; нормальная форма – наиболее простой вид, к которому можно привести росток лежандрового отображения лежандровой эквивалентностью. Пусть A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8 – ростки лежандровых отображений, заданных следующими *производящими семействами*:

$$A_\mu,\ \mu\geqslant 1: x^{\mu+1}+q_\mu x^{\mu-1}+\dots+q_2x+q_1=0,$$

$$D_\mu,\ \mu\geqslant 4: x^2y+y^{\mu-1}+q_\mu x+q_{\mu-1}y^{\mu-2}+\dots+q_2y+q_1=0,$$

$$E_6: x^3+y^4+q_6xy^2+q_5xy+q_4y^2+q_3x+q_2y+q_1=0,$$

$$E_7: x^3+xy^3+q_7x^2y+q_6x^2+q_5xy+q_4y^2+q_3x+q_2y+q_1=0,$$

$$E_8: x^3+y^5+q_8xy^3+q_7xy^2+q_6y^3+q_5xy+q_4y^2+q_3x+q_2y+q_1=0.$$

Лежандрово отображение общего положения $(l-1)$-мерного многообразия в l-мерное при $l\leqslant 6$ устойчиво в окрестности любой точки и эквивалентно отображению A_μ, D_μ, E_μ, $\mu\leqslant l$. При $l\geqslant 7$ лежандровы отображения могут быть неустойчивы и иметь (при $l\geqslant 10$ – функциональные) модули. *М. Э. Казарян.*

ЛЕЖАНДРОВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ – см. *Лежандрово отображение.*

ЛЕЖАНДРОВО МНОГООБРАЗИЕ – интегральное многообразие максимальной размерности n контактного многообразия M^{2n+1}. Примером Л. м. в многообразии контактных элементов многообразия N служит множество контак-

тных элементов, касающихся фиксированного подмногообразия $P \subset N$, и точка контакта к-рых принадлежит P. Если P – точка, то соответствующие Л. м.– это слой сферизации (или проективизации) касательного расслоения T^*N.

Другой пример Л. м.– это 1-график функции в контактном многообразии 1-струй функций J^1N.

См. также *Контактная геометрия*. *С. А. Табачников.*

ЛЕЖАНДРОВО ОТОБРАЖЕНИЕ – ограничение на вложенное лежандрово многообразие проекции на базу *лежандрового расслоения*. Лежандровой эквивалентностью Л. о. называется контактоморфизм пространств лежандровых расслоений, переводящий лежандрово многообразие первого Л. о. в лежандрово многообразие второго и слои первого расслоения в слои второго. Примеры Л. о.: *нормальное отображение, Лежандра преобразование*, тангенциальное отображение (см. *Проективная двойственность*). Л. о. образуют специальный класс отображений многообразий в многообразия на единицу большей размерности и могут иметь особенности, нетипичные в классе всех отображений. *М. Э. Казарян.*

ЛЕЖАНДРОВО РАССЛОЕНИЕ – гладкое *расслоение* контактного многообразия, все слои которого являются лежандровыми подмногообразиями. Проекция в M многообразия контактных элементов многообразия M является Л. р. Все Л. р. одной размерности локально изоморфны. В $\mathbb{R}^{2n+1}$ (с координатами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z$) с контактной формой $\lambda = dz + \sum x_i\, dy_i$ Л. р. задается формулой $(x, y, z) \mapsto (y, z)$. Композиция вложения многообразия в качестве лежандрова и проекции Л. р. на базу называются *лежандровым отображением*, а его образ – фронтом. *С. А. Табачников.*

ЛЕМАНА – КЕЛЛЕНА СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – см. *Спектральное представление.*

ЛЕННАРД-ДЖОНСА ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ – *взаимодействия потенциал* вида

$$\Phi = 4\varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right].$$

Другое название – потенциал 6–12. Слагаемое (r^{-6}), описывающее притяжение частиц, обосновано квантовомеханически (дисперсные силы притяжения). Слагаемое (r^{-12}), описывающее отталкивание на малых расстояниях, не имеет надежного обоснования, но является хорошим приближением (отражает непроницаемость частиц друг для друга). Л.-Д. п. в. имеет минимум, равный $-\varepsilon$ в точке $r = r_0\sqrt[6]{2}$.

Потенциал взаимодействия принадлежит классу Л.-Д. п. в., если он ограничен снизу и существуют такие $0 < a_1 < a_2 < \infty$, $A_1, A_2 > 0$ и $\lambda_1, \lambda_2 > \nu$ (ν – размерность пространства), что

$$\Phi(x) > A_1|x|^{-\lambda_1}, \quad |x| < a_1,$$

$$\Phi(x) > A_2|x|^{-\lambda_2}, \quad |x| > a_2, \quad x \in \mathbb{R}^{\nu}.$$

Потенциалы из этого класса сверхустойчивы и регулярны снизу. Если $\Phi(q) < 0$ при $|q| > a_2$, то Л.-Д. п. в. являются быстро убывающими и регулярными. Использование Л.-Д. п. в. в различных задачах классич. статистич. механики и кинетич. теории газов и жидкостей определяется тем, что он реалистично описывает межмолекулярные взаимодействия (взаимодействия Ван-дер-Ваальса).

Лит.: [1] Lennard-Jones J. E., «Proc. Roy. Soc.», 1924, A 106, p. 463; [2] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., М., 1978, т. 1, § 6.1; [3] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971, § 3.2.10. *П. В. Малышев.*

ЛЕПТОКВАРК – сверхтяжелый ($\sim 10^{15}$ ГэВ) калибровочный или скалярный *бозон*, возникающий в *великого объединения моделях* и имеющий вершины взаимодействия одновременно с *кварками* и *лептонами*. Л. являются триплетами по *цвету* и обладают дробным электрич. зарядом. Отличают также дикварки (секстеты по цвету), взаимодействующие с двумя кварками. Квантовые числа векторных Л. относительно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ таковы: (3, 2, $-5/3$), (3, 2, 7/3), (3, 1, $-2/3$). Напр., лагранжиан взаимодействия Л. X с зарядом 4/3 с фермионами имеет вид:

$$\mathcal{L} = X_1^{\mu}(A\bar{d}_R^i \gamma_{\mu} e_R^+ + B\varepsilon_{ijk}\bar{u}_{L_j}^c \gamma_{\mu} u_{L_k} + C\bar{d}_L^i \gamma_{\mu} l_L^+),$$

где A, B, C – нек-рые константы, индекс c означает зарядовое сопряжение, индексы L, R – левую и правую спиральность, i – цвет. Л. переносят взаимодействие с несохранением фермионного числа и приводят к *распаду протона*. *М. Е. Шапошников.*

ЛЕПТОН – элементарная частица, принимающая участие лишь в слабых и электромагнитных взаимодействиях, но не участвующая в сильных взаимодействиях. К настоящему времени обнаружено три семейства Л., в каждое из к-рых входят электрически заряженный Л. (электрон, мюон и τ-лептон) и соответствующее *нейтрино*, не несущее электрич. заряда (ν_e, ν_μ, ν_τ). Массы заряженных Л. разных семейств существенно отличаются друг от друга:

$$m_\tau : m_\mu : m_e \approx 4000 : 200 : 1,$$

тогда как нейтрино либо безмассовы, либо имеют очень маленькую массу. Во всех известных процессах с участием Л. сохраняются по отдельности три квантовых числа: лептонные заряды L_e, L_μ, L_τ (напр., электрон и электронное нейтрино несут единичный электронный лептонный заряд $L_e = 1$, мюон и мюонное нейтрино обладают единичным мюонным зарядом, а τ-лептон и τ-нейтрино имеют единичный таонный заряд). Все свойства Л. находятся в отличном согласии с предсказаниями стандартной модели *электрослабых взаимодействий*. Однако проблема существования трех семейств Л., во многом похожих друг на друга, но сильно отличающихся по массе, остается в настоящее время нерешенной.

Лит.: [1] Окунь Л. Б., Лептоны и кварки, М., 1981; [2] Коминс Ю., Буксбаум Ф., Слабое взаимодействие лептонов и кварков, пер. с англ., М., 1987. *А. Ю. Игнатьев.*

ЛЕПТОННЫЙ ТОК – см. *Ток.*

ЛЕС – см. *Боголюбова – Парасюка R-операция.*

ЛЕСНАЯ ФОРМУЛА – см. *Боголюбова – Парасюка R-операция.*

ЛЕСТНИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – см. *Бете–Солпитера уравнение.*

ЛИ АЛГЕБРА – *векторное пространство*, на котором введена операция коммутирования; а именно, любым двум элементам x, y ставится в соответствие третий элемент $[x, y]$, называемый коммутатором, и при этом выполнены аксиомы:

1) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$, где α, β – скаляры;

2) $[x, y] = -[y, x]$ (антикоммутативность);

3) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (тождество Якоби).

Если векторное пространство комплексное, то и Л. а. называется комплексной, а если вещественное, то – вещественной.

Простейший пример Л. а.– алгебра векторов в трехмерном пространстве с операцией векторного произведения. Другой пример – Л. а., строящаяся по любой ассоциативной алгебре, заменой операции умножения на операцию $[x, y] = xy - yx$.

Главная причина, по к-рой важны Л. а., состоит в том, что по каждой группе Ли однозначно может быть построена алгебра Ли (см. *Ли группа, Классические группы и алгебры Ли*).

Пусть $\mathfrak{G}$ – Л. а., $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – две подалгебры в $\mathfrak{G}$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ – множество, состоящее из всевозможных линейных комбина-

ций коммутаторов вида $[a, b]$, где $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$. И пусть $\mathfrak{G}^{(0)} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^{(1)} = [\mathfrak{G}^{(0)}, \mathfrak{G}^{(0)}]$, ..., $\mathfrak{G}^{(i+1)} = [\mathfrak{G}^{(i)}, \mathfrak{G}^{(i)}]$, ... Л. а. называется разрешимой, если при достаточно большом j выполнено $\mathfrak{G}^{(j)} = 0$. Всякое $\mathfrak{G}^{(i)}$ является идеалом в $\mathfrak{G}$, а факторалгебра $\mathfrak{G}^{(i+1)}/\mathfrak{G}^{(i)}$ – абелева (то есть коммутатор любых ее двух элементов равен нулю). Верно и обратное: если в алгебре есть цепочка идеалов

$$\mathfrak{G} = n_0 \supset n_1 \supset \ldots \supset n_k = 0$$

такая, что n_j/n_{j+1} – абелева алгебра, то $\mathfrak{G}$ разрешима. Простейший пример разрешимой Л. а. – алгебра B_n всех верхнетреугольных матриц размера $n \times n$. Любая разрешимая Л. а. может быть реализована как подалгебра нек-рой алгебры B_n. Любое неприводимое конечномерное представление разрешимой Л. а. одномерно. Любое конечномерное представление разрешимой Л. а. в нек-ром базисе задается верхнетреугольными матрицами.

Пусть $\mathfrak{G}$ – Л. а. и пусть $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1 = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0]$, ..., $\mathfrak{G}_{i+1} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i]$, ... Л. а. называется нильпотентной, если $\mathfrak{G}_j = 0$ при нек-ром j. Эквивалентное определение: существует n такое, что любой коммутатор $[x_1[x_2, \ldots [x_{n-1}, x_n]]]$ длины n равен 0. Л. а. нильпотентна тогда и только тогда, когда любой линейный оператор вида $\mathrm{ad}_x : y \to [x, y]$ в пространстве $\mathfrak{G}$ нильпотентен. Нильпотентная Л. а. разрешима. Если $\mathfrak{G}$ разрешима, то $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ нильпотентна.

Л. а. называется полупростой, если она не содержит абелевых идеалов. Полупростые алгебры – это самый важный класс Л. а., как в математике, так и в математич. физике. Л. а. полупроста тогда и только тогда, когда она является прямой суммой простых Л. а. (см. *Простая алгебра*). Любое конечномерное представление полупростой Л. а. вполне приводимо, все неприводимые конечномерные представления полупростых Л. а. допускают простую параметризацию.

Любая конечномерная Л. а. может быть реализована как подалгебра алгебры всех матриц (теорема Адо). Все разрешимые (соответственно, нильпотентные) идеалы Л. а. $\mathfrak{G}$ содержатся в одном большом разрешимом идеале, к-рый называется радикалом (соответственно, нильрадикалом). Пусть R – радикал в $\mathfrak{G}$. Тогда существует полупростая подалгебра $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}$ такая, что $\mathfrak{G}$ разлагается в прямую сумму R и $\mathfrak{P}$ (теорема Леви – Мальцева).

Лит. см. при статье *Ли группа*. *Ю. А. Неретин.*

ЛИ АЛГЕБРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – см. *Перестановочные соотношения.*

ЛИ ГРУППА – название наиболее естественных и часто встречающихся бесконечных *групп*. Теория групп и алгебр Ли была в основных чертах построена в 1870–1910; наиболее значительным был вклад С. Ли (S. Lie), В. Киллинга (W. Killing) и Э. Картана (E. Cartan).

1. Определение. Группа Ли G – это множество, к-рое одновременно является дифференцируемым многообразием и группой, причем операция умножения дифференцируема (то есть дифференцируема функция $(x, y) \to xy$ двух переменных $x, y \in G$, принимающая значения в G). Размерностью группы называется размерность соответствующего многообразия. Если G – комплексное многообразие, а операция умножения является комплексно аналитической, то G называется комплексной группой Ли.

2. Матричные группы. Простейший пример Л. г. – группа $GL(n, \mathbb{R})$ всех действительных обратимых матриц размера $n \times n$. Большинство интересных Л. г. может быть реализовано как матричные группы (называемые также линейными группами), то есть как подгруппы в $GL(n)$.

Следующие два примера являются своего рода образцами для более сложных конструкций. Первый пример – *вращений группа*. Каждое вращение задается матрицей X размера 3×3, удовлетворяющей условию $XX' = E$, где E – единичная матрица, а X' – транспонированная матрица к матрице X. Матричное равенство $XX' = E$ эквивалентно системе из 9 уравнений на 9 матричных элементах матрицы X. Эти уравнения, однако, зависимы и задают в 9-мерном пространстве трехмерную гладкую поверхность. Таким образом, группа вращений является трехмерной группой Ли. Другой пример – группа B (соответственно, N) верхнетреугольных матриц с единицами (соответственно, с ненулевыми элементами) на главной диагонали.

Не любая Л. г. может быть реализована как матричная группа, однако любая Л. г. локально изоморфна нек-рой матричной группе (группы G_1 и G называются локально изоморфными, если существует сохраняющее умножение взаимно однозначное отображение окрестности единицы в G_1 на окрестность единицы в G_2; напр., локально изоморфны группа $\mathbb{R}$ действительных чисел по сложению и группа поворотов плоскости).

3. Теория Ли. По любой Л. г. может быть однозначно построена *Ли алгебра*. Такая конструкция для матричной группы выглядит следующим образом. Группа $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ представляет собой поверхность в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех матриц размера $n \times n$. Рассматривается касательное пространство T к этой поверхности в точке E. Через $\mathfrak{G}$ обозначается множество всех касательных векторов, то есть матриц вида $A - E$, где $A \in T$. Ясно, что $\mathfrak{G}$ – подпространство в $\mathbb{R}^{n^2}$, более того, для любых $P, Q \in \mathfrak{G}$ их коммутатор $[P, Q] = P, Q - QP$ тоже принадлежит $\mathfrak{G}$. Таким образом, на $\mathfrak{G}$ имеется структура алгебры Ли. Если $P \in \mathfrak{G}$, то

$$\exp(P) = e^P$$

содержится в G, а если $X \in G$ и X достаточно близок к E, то

$$\ln X = \sum (-1)^{n+1} (X - E)^n$$

содержится в $\mathfrak{G}$. Отображение $P \to e^P$ называется экспоненциальным. Если G – группа вращений, то $\mathfrak{G}$ будет алгеброй кососимметрич. матриц.

Пусть теперь G – произвольная (не обязательно матричная) группа Ли размерности n, e – единица группы G. В окрестности точки e вводятся локальные координаты $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ так, что e имеет координаты $(0, \ldots, 0)$. Пусть $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ – точки с координатами εa_j и εb_j, где ε мало. Разложим выражение

$$K(\varepsilon) = A(\varepsilon) B(\varepsilon) A(\varepsilon)^{-1} B(\varepsilon)^{-1}$$

в ряд по ε:

$$K(\varepsilon) = \varepsilon^2 c(a, b) + \varepsilon^3 d(a, b) + \ldots$$

Далее вводится коммутатор в $\mathbb{R}^k$ по формуле $[a, b] = c(a, b)$. Эта операция задает в $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^k$ структуру алгебры Ли.

Любая конечномерная алгебра Ли является алгеброй Ли нек-рой Л. г. По алгебре Ли Л. г. восстанавливается неоднозначно, но эта неоднозначность, однако, не велика. Все Л. г. с данной алгеброй Ли $\mathfrak{G}$ локально изоморфны. Среди них существует единственная односвязная группа $\tilde{G}$, и любая другая из них является факторгруппой группы $\tilde{G}$ по дискретной (см. *Топологическая группа*) подгруппе, лежащей в центре группы $\tilde{G}$. Простейший пример Л. г., имеющих одну алгебру Ли, – это односвязная группа $SU(2)$ унитарных матриц размера 2×2 с определителем 1 и группа вращений, изоморфная факторгруппе группы $SU(2)$ по подгруппе, состоящей из матриц $\pm E$.

Изучение Л. г. в значительной степени сводится к изучению их алгебр Ли. Пусть, напр., G и G' – Л. г., а $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ – их алгебры Ли. Тогда по любому гомоморфизму $G \to G'$ строится канонич. гомоморфизм $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$, любому представлению группы G соответствует представление алгебры $\mathfrak{G}$ (см. *Представление* алгебры Ли); любой замкнутой подгруппе в G соответствует подалгебра в $\mathfrak{G}$, а замкнутому нормальному делителю в G – идеал в $\mathfrak{G}$; если G действует на многообразии M, то и $\mathfrak{G}$ действует на M, и т. д.

Напр., пусть группа G действует на многообразии M. Введем на M локальные координаты. Пусть $P \in \mathfrak{G}$ и разложение преобразования $\exp(\varepsilon P): M \to M$ в ряд по ε:

$$\exp(\varepsilon P)m = m + \varepsilon v_P(m) + \dots$$

Таким образом, для каждой точки m получается вектор $v_P(m)$, то есть по каждому элементу P алгебры $\mathfrak{G}$ построено векторное поле v_P на M. Оказывается, что

$$v[P, Q] = [v_P, v_Q]$$

(в правой части стоит коммутатор, или скобка Ли, векторных полей v_P и v_Q). Тем самым получено так наз. действие алгебры Ли на многообразии $\mathfrak{G}$ (отсюда ясно происхождение старого названия алгебры Ли – инфинитезимальная группа Ли).

4. Бесконечномерные группы Ли. Строго математич. определения бесконечномерных Л. г. нет; существуют, однако, содержательные объекты, к-рые называются бесконечномерными группами Ли. Это бесконечномерные аналоги классич. групп, группа диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M^n)$ многообразия M^n и группы токов $C(M^n, G)$, то есть группы функций на M^n со значениями в группе Ли G и т. п. Особенно важен случай, когда многообразие M^n является окружностью.

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [2] Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; [3] Адамс Дж., Лекции по группам Ли, пер. с англ., М., 1979.

Ю. А. Неретин.

ЛИ ПОЛУГРУППА – см. *Полугруппа.*

ЛИ СУПЕРАЛГЕБРА – см. *Суперсимметрия.*

ЛИ УРАВНЕНИЯ – см. *Дифференциальное уравнение*; группа преобразований.

ЛИ ФОРМУЛА для произведения матриц – см. *Троттера формула.*

ЛИ ШАР – см. *Труба будущего.*

ЛИ – БЕРЕЗИНА – КОСТАНТА – КИРИЛЛОВА ФОРМА на орбитах коприсоединенного представления группы G на ее коалгебре $\mathfrak{G}$ – дифференциальная 2-форма ω, определяемая следующим образом. Пусть $x, y \in \mathfrak{G}$. Инфинитезимальное действие алгебра Ли $\mathfrak{G}$ в точке $\xi \in \mathfrak{G}^*$ задает векторы $k(x)$, $k(y) \in T_\xi \mathfrak{G}^*$. Значение Л.–Б.–К.–К. ф. на этой паре векторов равно

$$\omega(k(x), k(y)) = \xi([x, y]).$$

Л.–Б.–К.–К. ф. является корректно определенной замкнутой невырожденной G-инвариантной 2-формой, задающей симплектич. структуру на орбитах коприсоединенного действия. *М. Э. Казарян.*

ЛИ – ЯНГА ТЕОРИЯ – теория, предложенная Янгом (Yang C. N.) и Ли (Lee T. D.) в 1952 для математического описания фазовых переходов в статистических системах. В Л.– Я. т. фазовые переходы связываются с распределением нулей (корней) большой статистич. суммы, рассматриваемой как многочлен по активности z с действительными и положительными коэффициентами, то есть

$$\Xi = \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q_n, \qquad (*)$$

где $Q_0 = 1$, а

$$Q_n = \frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n} dx_1 \dots dx_n \exp(-\beta V(x_1, \dots, x_n)), \quad n \geqslant 1,$$

– конфигурационный интеграл, Λ – область, в к-рой находится система, $V(\Lambda)$ – ее объем.

В точках фазовых переходов термодинамич. функции системы (или их производные) имеют особенности 1-го или 2-го рода. В большом канонич. ансамбле термодинамич. функции выражаются через логарифм большой статистич. суммы, напр. для давления p_Λ и плотности ρ_Λ имеют ($\langle N \rangle$ – среднее число частиц в системе):

$$p_\Lambda(z, \beta) = \frac{1}{\beta V(\Lambda)} \ln \Xi_\Lambda(z, \beta),$$

$$\rho_\Lambda(z, \beta) = \frac{\langle N \rangle}{V(\Lambda)} = \frac{z}{V(\Lambda)} \frac{d}{dz} \ln \Xi_\Lambda(z, \beta).$$

Следовательно, особенности термодинамич. функций могут быть связаны только с нулями большой статистич. суммы. При $N < \infty$ ($V(\Lambda) < \infty$) большая статистич. сумма не имеет нулей на положительной действительной полуоси z, а комплексные нули являются попарно сопряженными. Янг и Ли доказали, что корни большой статистич. суммы лежат в комплексной плоскости на кривой, симметричной относительно действительной оси. При нечетном N один из корней лежит на отрицательной полуоси действительной оси. Среднее расстояние между корнями большой статистич. суммы на кривой пропорционально $(V(\Lambda))^{-1}$ и стремится к нулю при $\langle N \rangle \to \infty$, $V(\Lambda) \to \infty$, $\rho = \langle N \rangle / V(\Lambda) = \mathrm{const}$, то есть в термодинамич. пределе. В термодинамич. пределе нули большой статистич. суммы могут выходить на положительную полуось действительной оси, становясь причиной появления особенностей термодинамич. функций и, следовательно, фазовых переходов. Янг и Ли доказали несколько теорем, позволивших описать поведение статистич. систем частиц с твердой сердцевиной в термодинамич. пределе. Был выделен также класс решетчатых систем, для к-рых все нули большой статистич. суммы лежат на окружности $|z| = 1$. Установлено, что:

1) при любых положительных z существует конечный предел

$$p(z, \beta) = \lim_{V(\Lambda) \to \infty} p_\Lambda(z, \beta),$$

к-рый достигается асимптотически при больших $V(\Lambda)$ и является непрерывной неубывающей функцией z;

2) для всех z, принадлежащих области в комплексной плоскости, содержащей отрезок положительной действительной полуоси и свободной от нулей большой статистич. суммы, термодинамич. предел для давления достигается равномерно по z, а предельное давление p является аналитич. функцией z;

3) для плотности $\rho(z, \beta)$:

$$\rho(z, \beta) = \lim_{V(\Lambda) \to \infty} \rho_\Lambda(z, \beta) = \frac{\partial(\beta p(z, \beta))}{\partial(\ln z)} = \beta z \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что давление не имеет разрывов при $z > 0$, а его производная по z и плотность $\rho(z, \beta)$ имеют в точках нулей большой статистич. суммы конечные скачки. Это означает, что имеет место фазовый переход 1-го рода. Если на положительную полуось попадает изолированный нуль большой статистич. суммы, то 1-я производная давления (плотности) непрерывна, а разрыв имеет 2-я производная (фазовый переход 2-го рода).

Обобщение утверждений 1)–3) на случай сверхустойчивого регулярного и регулярного снизу потенциала взаимодействия принадлежит Д. Рюэлю [3].

Рассмотрим решетчатые спиновые системы с гамильтонианом H. Считаем, что распределение отдельного спина имеет вид:

$$d\mu_i(\xi) = e^{-P_i(\xi)} d\xi,$$

где $P_i(\xi)$ – четный многочлен 4-й степени (модели Изинга соответствует $\xi = \pm 1$). Пусть

$$H(\xi) = -\sum_{i,j} J_{ij} \xi_i \xi_j - \sum_i h_i \xi_i,$$

где $J_{ij} \geqslant 0$ (ферромагнитное взаимодействие), и пусть $h_i \equiv h$, а $z = e^{\beta h}$ – активность. Тогда при $|z| \neq 1$ ($\mathrm{Re}\, h \neq 0$) статистич. сумма

$$Z_\Lambda(\{h_i\}) = \int e^{-H(\xi)} \prod_{i \in \Lambda} e^{-P_i(\xi_i)} d\xi_i \neq 0, \quad \Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu.$$

При этом свободная энергия

$$f_\Lambda = (V(\Lambda))^{-1} \ln Z_\Lambda$$

является аналитич. функцией в области, не содержащей нулей статистич. суммы, то есть при $|z| \neq 1$. Теоремы Ли – Янга справедливы и в случае двух-, трехкомпонентных векторнозначных спинов (см. [5]).

Лит.: [1] Yang C. N., Lee T. D., «Phys. Rev.», 1952, v. 87, p. 404; там же, p. 410; [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [3] Ruelle D., «Comm. Math. Phys.», 1970, v. 18, p. 127; [4] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1980; [5] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984. *П. В. Малышев.*

ЛИДСКОГО ТЕОРЕМА – см. *След оператора.*

ЛИНДБЛАДА ФОРМУЛА – см. *Динамическая полугруппа.*

ЛИНДЕЛЁФА ПРИНЦИП – основной качественный вариационный принцип в теории конформного отображения, найденный Э. Линделёфом (E. Lindelöf, 1915). Пусть односвязные области D и $\tilde{D}$ на плоскости комплексного переменного z таковы, что их границы Γ и $\tilde{\Gamma}$ соответственно состоят из конечного числа жордановых дуг, причем $\tilde{D}$ содержится в D, и пусть точка $z_0 \in \tilde{D} \subset D$. Пусть, кроме того, $w=f(z)$ и $w=\tilde{f}(z)$ – функции, реализующие конформное отображение соответственно D и $\tilde{D}$ на единичный круг $\Delta=\{w: |w|<1\}$, причем $f(z_0)=0$, $\tilde{f}(z_0)=0$. Принцип Линделёфа состоит в том, что при этих условиях: 1) прообраз $\tilde{D}_\rho$ области $|w|<\rho$, $0<\rho<1$, при отображении $w=\tilde{f}(z)$ лежит внутри прообраза D_ρ этой же области $|w|<\rho$ при отображении $w=f(z)$, причем соприкосновение их границ $\tilde{\Gamma}_\rho$ и Γ_ρ возможно лишь, если $\tilde{D}=D$; 2) $|\tilde{f}'(z_0)| \geqslant |f'(z_0)|$, причем знак равенства возможен лишь, если $\tilde{D}=D$; 3) если существует общая точка z_1 контуров $\tilde{\Gamma}$ и Γ, то

$$|\tilde{f}'(z_1)| \leqslant |f'(z_1)|,$$

причем знак равенства возможен лишь, если $\tilde{D}=D$. Иными словами, при вдавливании внутрь границы Γ области D: 1) все линии уровня Γ_ρ, то есть прообразы окружностей $|w|=\rho$, сжимаются; 2) растяжение в точке z_0 увеличивается; 3) растяжение в неподвижных точках z_1 границы уменьшается.

Из приведенной формулировки Л. п. вытекает также, что длина образа дуги γ границы Γ, подвергшейся вдавливанию до дуги $\tilde{\gamma}$, всегда не превосходит длины образа $\tilde{\gamma}$ (длина $f(\gamma) \leqslant$ длины $\tilde{f}(\tilde{\gamma})$), причем равенство имеет место только в случае $\tilde{\Gamma}=\Gamma$. Это следствие Л. п. известно также как принцип Монтеля.

Л. п. позволяет получить многие количественные оценки изменения конформного отображения при вариации области. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛИНДШТЕЙНА МЕТОД – см. *Усреднения метод.*

ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА – линейное интегро-дифференциальное уравнение, приближенно описывающее временную эволюцию одночастичной функции распределения разреженного газа вблизи равновесия. Л. у. Б.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{p} \circ \nabla_{\vec{q}} \varphi) = J_0(\varphi)\frac{1}{\varepsilon}$$

получается из *Больцмана уравнения*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{p} \circ \nabla_{\vec{q}} f) = \frac{1}{\varepsilon} J(f,f)$$

путем замены

$$f = \pi^{-3/2} \exp\{-\vec{p}^2\} + \mu \exp\left\{-\frac{\vec{p}^2}{2}\right\}\varphi$$

и приравнивания членов, содержащих первую степень параметра μ. Оператор J_0 называется линеаризованным оператором столкновений.

Для Л. у. Б. существует строгое доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши (см. [2]).

Лит.: [1] Карлеман Т., Математические задачи кинетической теории газов, пер. с франц., М., 1960; [2] Арсеньев А. А., «Журнал вычислит. математики и математич. физики», 1965, т. 5, № 5, с. 864–82. *М. А. Сташенко.*

ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА – см. *Ли группа.*

ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ векторов – см. *Векторное пространство.*

ЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА – см. *Краевая задача.*

ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА подмножества *линейного пространства* – совокупность всех линейных комбинаций элементов этого подмножества.

ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ – см. *Связность.*

ЛИНЕЙНАЯ ЭКСПОНЕНТА – функция вида

$$e^{iz}(\xi) = e^{iz\xi},$$

где ξ – вещественный или комплексный аргумент. См. *Лапласа преобразование* обобщенной функции.

ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ ВЕКТОРЫ – см. *Векторное пространство.*

ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Связное пространство.*

ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ЗАДАЧА – см. *Краевые задачи* теории аналитических функций.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ – см. *Дифференциальный оператор.*

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – см. *Представление* группы.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Векторное пространство.*

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ – см. *Малые колебания.*

ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР – см. *Осциллятор.*

ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР A в *векторном пространстве* L – отображение, сопоставляющее каждому вектору e некоторого множества D (содержащегося в L и называемого областью определения Л. о.) другой вектор, обозначаемый Ae (и называемый значением Л. о. на векторе e). Выполнены следующие условия: 1) D – линейное множество, то есть для любых его элементов e_1 и e_2 и любых комплексных чисел λ_1 и λ_2 вектор $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ также принадлежит D; 2) Л. о. переводит линейную комбинацию векторов в ту же линейную комбинацию соответствующих значений: $A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = \lambda_1 A e_1 + \lambda_2 A e_2$.

Примеры Л. о.: матрица

$$A = \|a_{ij}\|,$$

действующая в n-мерном евклидовом пространстве по правилу

$$(Ae)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j,$$

где векторы e_j – столбцы комплексных чисел;

дифференциальный оператор

$$A = a_0 + a_1 d/dx + \ldots + a_n d^n/dx^n,$$

определенный равенством

$$(Af)(x) = a_0 f(x) + a_1 df(x)/dx + \ldots + a_n d^n f(x)/dx^n;$$

интегральный оператор A, определенный соотношением

$$(Af)(x) = \int dy\, A(x,y) f(y).$$

Конечномерные пространства. В конечномерном пространстве Л.о. можно определить на всех векторах и задать нек-рой матрицей $\|a_{ij}\|$. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $a_{ij}=(e_i, Ae_j)$, где (e, f) – скалярное произведение векторов e и f. Если для нек-рого вектора e и

комплексного числа λ выполнено равенство $Ae=\lambda e$, то e называется собственным вектором (собственной функцией), а λ – собственным значением оператора A. Совокупность всех собственных значений называется дискретным спектром, а множество собственных векторов, отвечающих нек-рому собственному значению λ, – собственным подпространством Л. о.

Конечномерный Л. о. U называется унитарным, если унитарна его матрица $\|u_{ij}\|$, то есть если

$$\sum_k u_{ik}u^*_{ik}=\delta_{ij},$$

где $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$ и $\delta_{ii}=1$. Унитарным является, напр., оператор поворота плоскости на угол φ. Собственные значения унитарного Л. о. лежат на единичной окружности в комплексной плоскости, то есть $\lambda=\exp(i\alpha)$, где α – вещественное число. Унитарные Л. о. оставляют неизменными длины векторов и углы между ними, то есть сохраняют скалярное произведение: $(e, f)=(Ue, Uf)$. Унитарные конечномерные Л. о. используют для описания различных симметрий физич. систем. Совокупность соответствующих Л. о. образует *представление* группы симметрии.

Конечномерный оператор A^+ называется сопряженным к A, если матрицы этих операторов связаны соотношениями $a^+_{ij}=a^*_{ji}$, то есть матрица A^+ получается из матрицы A в результате транспонирования и комплексного сопряжения. Если $A^+=A$, то оператор A называется самосопряженным, или эрмитовым. Пример самосопряженных конечномерных Л. о. – *Паули матрицы*, то есть операторы спина в квантовой механике. Самосопряженный Л. о. обладает важным свойством вещественности: $(e, Ae)=(e, Ae)^*$. Все собственные значения самосопряженного оператора также вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны. Ортонормированный базис в конечномерном пространстве можно составить из собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ самосопряженного Л. о. A. В этом базисе матрица Л. о. A диагональна: $a_{ij}=\lambda_j\delta_{ij}$.

Произведение (AB) Л. о. A и B определяется результатом последовательного применения к вектору e операторов B и A, то есть $(AB)e=A(Be)$. Произведение операторов, вообще говоря, не перестановочно: $AB\neq BA$. Величина $AB-BA=[A, B]$ называется коммутатором Л. о. A и B. Если Л. о. коммутируют, то есть $[A, B]=0$, то Л. о. A и B можно одновременно привести к диагональному виду, то есть в пространстве существует такой ортонормированный базис, что каждый его элемент является собственным для A и для B.

Самосопряженный Л. о. P называется проекционным оператором, или проектором, если $P^2=P$. Для каждого проектора найдется такое подпространство L_P пространства L, что $Pe=e$, если e принадлежит L_P, и $Pe=0$, если e принадлежит ортогональному дополнению L_P. Всякий конечномерный самосопряженный оператор A можно представить в виде:

$$A=\sum_i \lambda_i P_i,$$

где суммирование проводится по всем собственным значениям λ_i, а P_i – проектор на собственное подпространство, отвечающее λ_i. Это равенство называется спектральным разложением конечномерного самосопряженного оператора, оно позволяет строить различные функции $f(A)$ от самосопряженного Л. о. A:

$$f(A)=\sum f(\lambda_i)P_i.$$

Всякий унитарный Л. о. U в конечномерном пространстве допускает представление $U=\exp(iA)$, где A – эрмитов Л. о. Если семейство U реализует представление группы симметрии, то соответствующее семейство самосопряженных Л. о. A задает представление алгебры Ли этой группы.

Бесконечномерные пространства. В бесконечномерном *гильбертовом пространстве* Л. о., вообще говоря, нельзя определить на всех векторах. Обычно область определения D, не исчерпывая всего L, является всюду плотной (то есть любой вектор из L можно с заданной точностью приблизить вектором из D). На всем пространстве можно задать только так наз. ограниченные (непрерывные) операторы. Л. о. A называется ограниченным, если существует такая константа C, что для всех векторов e из D выполнено неравенство $(Ae, Ae)\leqslant C(e, e)$. Для неограниченного Л. о. усложняется понятие сопряженности. В бесконечномерном случае Л. о. помимо дискретного могут иметь и непрерывный спектр. Число λ называется точкой непрерывного спектра, если найдется такая последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots$ нормированных векторов, что все они ортогональны каждому собственному вектору оператора A, а при $i\to\infty$ норма векторов $Ae_i-\lambda e_i$ стремится к нулю. Непрерывный и дискретный спектры оператора могут пересекаться. Объединение дискретного и непрерывного спектров называется просто спектром. Спектр самосопряженного Л. о. всегда вещественен. Видоизменяется спектральное разложение самосопряженного Л. о.: каждому интервалу вещественной оси от λ до $\lambda+d\lambda$ сопоставляется нек-рый проектор $dP(\lambda)$. Подпространство, на к-рое проектирует этот проектор, содержит все собственные подпространства оператора A, отвечающие собственным числам λ_0 таким, что $\lambda<\lambda_0<\lambda+d\lambda$, а также подпространство, ответственное за появление непрерывного спектра в интервале от λ до $\lambda+d\lambda$. Оказывается, что

$$A=\int\lambda\,dP(\lambda),$$

где интеграл является пределом соответствующих сумм Дарбу, а интегрирование ведется по всей вещественной оси. Функция $f(A)$ от самосопряженного Л. о. A определяется интегралом

$$f(A)=\int f(\lambda)\,dP(\lambda).$$

В квантовой теории самосопряженные Л. о. отвечают наблюдаемым физич. величинам. Процедура квантования сводится к замене евклидовых канонич. координат и импульсов такими самосопряженными Л. о., что их коммутаторы совпадают с соответствующими скобками Пуассона. Операторы других наблюдаемых величин выражают при помощи классич. формул через операторы координат и импульсов.

Лит.: [1] Нейман И., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [2] Дирак П., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, 2 изд., М., 1986; [4] Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1982.

О. И. Завьялов.

ЛИНЕЙЧАТО-ПОЛОСАТЫЙ СПЕКТР – см. *Борна–Оппенгеймера метод.*

ЛИНИЯ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ – см. *Сила.*

ЛИНИЯ УДАРА – см. *Удар.*

ЛИППМАНА–ШВИНГЕРА УРАВНЕНИЕ – интегральное уравнение

$$\Psi^{(\pm)}(x,k)=\exp\{i(x,k)\}-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\exp\{\pm i|k||x-y|\}}{|x-y|}v(y)\Psi^{(\pm)}(y,k),\qquad(1)$$

$x, y, k\in\mathbb{R}^3$. Л.–Ш. у. используется в квантовой теории рассеяния для обоснования задачи рассеяния в так наз. «стационарном подходе». Функции $\Psi^{(\pm)}(x, k)$ называются волновыми функциями непрерывного спектра для оператора $-\Delta+v(x)$ и с точностью до множителя совпадают с преобразованиями Фурье по второму аргументу ядер волновых операторов:

$$W_\pm=\operatorname*{s.lim}_{t\to\mp\infty}\exp\{i(-\Delta+v(x))t\}\exp\{-i(-\Delta)t\}:W_\pm=(2\pi)^{-3/2}\Psi^{(\pm)}.$$

В физич. литературе Л.–Ш. у. называют также уравнения теории возмущений для резольвенты оператора $H = H_0 + V$:

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)VR(z),$$

где

$$R(z) = (H - z)^{-1},\ R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}.$$

Уравнение (1) может быть получено из Л.–Ш. у. для резольвенты с помощью предельного перехода

$$\Psi^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \to +0} \mp i\varepsilon R(k^2 \pm i\varepsilon)\Psi_0,$$

$$\Psi_0 = \exp\{i(x,k)\}.$$

Лит.: [1] Lippman B., Schwinger J., «Phys. Rev.», 1950, v. 79, p. 469–86; [2] Шмид Э., Цигельман Х., Проблема трех тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1979; [3] Повзнер А. Я., «Математич. сб.», 1953, т. 32, с. 109–56.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

ЛИССАЖУ ФИГУРЫ – см. *Малые колебания.*

ЛИУВИЛЛЯ КВАНТОВОЕ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Квантовое суперсимметричное уравнение Лиувилля.*

ЛИУВИЛЛЯ КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Лиувилля квантовый оператор, Плотности матрица.*

ЛИУВИЛЛЯ КВАНТОВЫЙ ОПЕРАТОР – статистический оператор, определяемый соотношением

$$L\rho = \frac{i}{\hbar}(\rho H - H\rho).$$

Уравнение эволюции для статистич. оператора квантовой системы можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho. \qquad (*)$$

Это уравнение называется квантовым уравнением Лиувилля (иногда – уравнением Неймана). Если гамильтониан системы H не содержит явной зависимости от времени и известен статистич. оператор в начальный момент времени $\rho(0)$, то решение уравнения (*) может быть формально представлено в виде:

$$\rho(t) = \exp(Lt)\rho(0).$$

Л. к. о. является эрмитовым оператором; он линеен.

А. В. Солдатов.

ЛИУВИЛЛЯ КЛАССИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР – линейный оператор L в уравнении Лиувилля для функции распределения классической N-частичной системы

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -Lf, \qquad (1)$$

определяемый соотношением

$$\left.\begin{aligned} iLf &= \{H, f\}, \\ \{H, f\} &= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_k}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}_k} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_k}\frac{\partial f}{\partial \vec{q}_k}\right)\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где H – функция Гамильтона системы, зависящая от $6N$ переменных $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N; \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N$, а также, возможно, явно зависящая от времени. Л. к. о., заданный в форме (2), эрмитов. С его помощью можно формально записать решение уравнения (1) в виде

$$f(p,q,t) = \exp(iLt)f(p,q,0),$$

$$(p,q) = (\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N; \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N),$$

если известна начальная функция распределения $f(p, q, 0)$ и L не зависит явно от времени.

А. В. Солдатов.

ЛИУВИЛЛЯ КЛАССИЧЕСКОЕ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Классическое суперсимметричное уравнение Лиувилля.*

ЛИУВИЛЛЯ МЕРА – см. *Симплектическая геометрия.*

ЛИУВИЛЛЯ ОПЕРАТОР – см. *Лиувилля квантовый оператор, Лиувилля классический оператор.*

ЛИУВИЛЛЯ ТЕОРЕМА – 1) Л. т. об ограниченных целых аналитических функциях: если целая функция $f(z)$ комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$ ограничена, то есть

$$|f(z)| \leqslant M < +\infty,\ z \in \mathbb{C}^n,$$

то $f(z)$ есть константа. Это предложение, одно из основных в теории аналитич. функций, впервые, по-видимому, опубликовано в 1844 О. Коши (A. Cauchy) для случая $n = 1$; Ж. Лиувилль (J. Liouville) излагал его на лекциях в 1847, откуда и произошло название.

Л. т. допускает обобщения в различных направлениях. Напр., если $f(z)$ – целая функция в $\mathbb{C}^n$ и

$$|f(z)| \leqslant M(1 + |z|^m),\ z \in \mathbb{C}^n,$$

для нек-рого целого $m \geqslant 0$, то $f(z)$ есть многочлен по переменным $(z_1, \ldots, z_n)$ степени не выше m. Далее, если $u(x)$ – действительная гармонич. функция во всем числовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, причем

$$u(x) \leqslant M(1 + |x|^m) \text{ (или } -u(x) \leqslant M(1 + |x|^m)),$$

$x \in \mathbb{R}^n$, то $u(x)$ есть гармонич. многочлен по переменным $(x_1, \ldots, x_n)$ степени не выше m.

2) Л. т. о конформных отображениях: всякое *конформное отображение* области евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ можно представить в виде конечного числа суперпозиций простейших отображений четырех видов – переноса, подобия, ортогонального преобразования и инверсии. Доказана Ж. Лиувиллем в 1850.

Эта Л. т. выявляет бедность класса конформных отображений в пространстве, и с этой точки зрения она весьма важна в теории аналитич. функций многих комплексных переменных и в теории *квазиконформных отображений.*

Е. Д. Соломенцев.

3) Л. т. о фазовом объеме: фазовый поток гамильтоновой системы сохраняет объем в фазовом пространстве. Л. т. является следствием существования интегральных инвариантов Пуанкаре–Картана (см. [3]). Л. т. позволяет применить к гамильтоновым системам результаты эргодич. теории (см. [4]).

В. И. Герасименко.

4) Л. т. об интегрируемости: пусть на симплектич. многообразии (M^{2n}, ω) заданы n гладких функций в инволюции, $F_1, \ldots, F_n$, $\{F_i, F_j\} = 0$, независимые на множестве уровня $M_c = \{x \in M | F_i(x) = c_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Тогда M_c – инвариантное относительно фазового потока гамильтониана $H = H(F_1, \ldots, F_n)$ (напр., $H = F_1$) гладкое многообразие, имеющее канонич. аффинную структуру, в к-рой фазовый поток выпрямляется.

Если M_c компактно, то M расслаивается на инвариантные торы, поток гамильтониана H на к-рых – условно-периодический.

М. Э. Казарян.

5) Л. т. для эллиптических функций – см. *Эллиптическая функция.*

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [4] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

ЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЕ – уравнение эволюции системы. В классич. статистич. механике эволюция системы во времени описывается посредством зависящей от времени функции распределения. При этом функция распределения должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению с частными производными с соответствующим начальным условием

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \{H, f\}, \quad f(q,p,t=0) = f(q,p,0), \\ (q,p) &= (\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N; \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N),\end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где H – гамильтониан системы, к-рый может явно зависеть от времени, а $\{H, f\}$ – скобка Пуассона:

$$\{H, f\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_k}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}_k} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_k}\frac{\partial f}{\partial \vec{q}_k}\right).$$

Уравнение (1) называется уравнением Лиувилля. Это уравнение можно интерпретировать как уравнение непрерывности для движения фазовых точек в фазовом пространстве системы. Оно дает возможность определить функцию распределения в любой момент времени, если она известна в начальный момент времени. Если гамильтониан системы не зависит от времени явно, то формальное решение Л. у. может быть представлено в виде:

$$f(q, p, t) = \exp(iLt) f(q, p, 0),$$

где эрмитов оператор L – так наз. оператор Лиувилля, определяемый соотношением

$$iLf = \{H, f\}.$$

Л. у. описывает обратимую эволюцию системы. В случае статистич. равновесия Л. у. имеет вид:

$$\{H, f\} = 0,$$

и функция распределения является интегралом движения. В формализме статистич. механики допускается альтернативное эквивалентное изложенному выше описание эволюции системы, к-рое предполагает, что функция распределения системы не зависит от времени, а временная зависимость макроскопич. наблюдаемых обусловлена временной зависимостью соответствующих динамич. микроскопич. переменных. Эта зависимость определяется уравнением, подобным Л. у.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\} \qquad (2)$$

в случае, когда динамич. переменная A не зависит явно от времени. Если гамильтониан системы не зависит явно от времени, то уравнение (2) допускает формальное решение

$$A(t) = \exp(-iLt) A(0).$$

Оператор $\exp(-iLt)$ называется оператором эволюции. При действии на произвольную функцию, заданную в фазовом пространстве системы, он переводит ее в функцию $A_1(q(t), p(t))$, то есть

$$\exp(-iLt) A_1(q(0), p(0)) = A_1(q(t), p(t)),$$

где $q(t)$, $p(t)$ – решения уравнений Гамильтона с гамильтонианом H, не зависящим явно от времени и с начальными условиями

$$q(t)|_{t=0} = q(0),\ p(t)|_{t=0} = p(0).$$

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.– Л., 1946; [2] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985. *А. В. Солдатов.*

ЛИУВИЛЛЯ ФОРМА – дифференциальная 1-форма в стандартном симплектическом пространстве $(\mathbb{R}^{2n}, dp \wedge dq)$, имеющая в координатах Дарбу вид $\lambda = \sum p_i dq_i$. Часто Л. ф. называют любую форму, дифференциал к-рой является *симплектической структурой.* *М. Э. Казарян.*

ЛИУВИЛЛЯ–ГРИНА ПРИБЛИЖЕНИЕ – см. *Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна метод.*

ЛОВУШЕЧНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Сингулярности пространства-времени.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ – см. *Емкость* множества.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ – см. *Особая точка* аналитической функции.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИ СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Субгармоническая функция.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПЕРИОД – см. *Эллиптический интеграл.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ – *потенциал* с логарифмическим ядром

$$\ln \frac{1}{|x-y|},$$

где $|x-y|$ – расстояние между точками x и y евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, то есть потенциал вида

$$u(x) = \int_S \ln \frac{1}{|x-y|}\, d\mu(y), \qquad (1)$$

где интегрирование производится, вообще говоря, по произвольной борелевской мере μ на $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем $S = S(\mu)$. Физически можно представить, что Л. п. возникает из *ньютонова потенциала* сил тяготения, когда распределение притягивающих масс в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ точек $y = (y_1, y_2, y_3)$ не зависит, напр., от координаты y_3. Общая масса при этом, разумеется, бесконечна, но если произвести регуляризацию получающейся силы притяжения F, к-рую можно считать действующей в плоскости $(x_1, x_2, 0)$, состоящую в отбрасывании бесконечного слагаемого, то потенциал конечной части силы F будет иметь как раз вид (1). В отличие от ньютонова, логарифмич. ядро имеет особенность не только при $|x-y| \to 0$, но и при $|x-y| \to \infty$, что обусловливает нек-рые отличия в поведении Л. п. по сравнению с ньютоновым. Они проявляются главным образом при решении внешних краевых задач (см. *Внешняя и внутренняя краевые задачи*). Основные применения Л. п. находит при решении плоских *краевых задач* теории потенциала.

Основные свойства Л. п.: 1) вне носителя S меры μ Л. п. является регулярным решением *Лапласа уравнения* $\Delta u = 0$, то есть $u(x)$ – гармонич. функция на открытом множестве $\mathbb{R}^2 \setminus S$, не регулярная, однако, на бесконечности; 2) если мера μ абсолютно непрерывна, то есть интеграл (1) принимает вид:

$$u(x) = \int_D \ln \frac{1}{|x-y|} f(y)\, d\sigma(y), \qquad (2)$$

где D – конечная область, $d\sigma(y)$ – элемент площади D и плотность $f(y)$ принадлежит классу $C^1(D \cup \partial D)$, то вторые производные $u(x)$ непрерывны в D и удовлетворяют *Пуассона уравнению* $\Delta u = -2\pi f(y)$.

Лит.: [1] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ЯДРО – см. *Логарифмический потенциал.*

ЛОЗИ АТТРАКТОР – *странный аттрактор*, порожденный отображением плоскости в себя

$$(x, y) \to (1 + y - a|x|,\ bx).$$

Р. Лози (R. Lozi, 1978) обнаружил его численно при $a = 1{,}7$ и $b = 0{,}5$. Для определенной области параметров a и b доказаны существование и гиперболичность Л. а. Построена инвариантная мера и доказана эргодичность системы на Л. а. *Н. И. Чернов.*

ЛОЙЦЯНСКОГО ИНТЕГРАЛ – вводимый в теории изотропной турбулентности интеграл

$$\Lambda = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(r)\, dr, \qquad (*)$$

где $B_{LL}(r)$ – продольная корреляционная функция поля скорости; предложен Л. Г. Лойцянским (1939). Если интеграл (*) сходится, а $B_{LL,L}(r)$ убывает при $r \to \infty$ быстрее, чем r^{-4}, то Λ не меняется со временем, выражая в нек-ром смысле закон сохранения момента импульса. Однако не исключены и такие решения для изотропной турбулентности при конечном (но изменяющемся со временем) Л. и., у к-рых $B_{LL,L} \sim r^{-4}$. *В. П. Красицкий.*

ЛОКАЛИЗУЕМАЯ СИСТЕМА – см. *Локализуемость.*

ЛОКАЛИЗУЕМОСТЬ – свойство квантовой системы, состоящее в возможности определения для нее *наблюдаемых* положения (координат).

Пусть W – унитарное представление кинематич. группы (универсальной накрывающей группы Галилея в нерелятивистском случае или группы Пуанкаре в релятивистском случае) в гильбертовом пространстве H, описывающее ки-

нематику данной квантовой системы, и пусть U – ограничение W на универсальную накрывающую евклидовой группы. Система называется локализуемой по Вайтману, если в H существует спектральная мера $E(\cdot)$ на σ-алгебре борелевских подмножеств $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ координатного пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условию евклидовой ковариантности

$$U_g^* E(gB) U_g = E(B);\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3), \qquad (1)$$

где gB – образ подмножества B при евклидовом преобразовании g. При этом для любого подмножества $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ найдется вектор состояния ψ такой, что $(\psi | E(B)\psi) = 1$, то есть вероятность обнаружения системы в области B равна единице. Для локализуемой системы определен набор совместимых наблюдаемых координат

$$Q_j = \iiint x_j E(dx_1 dx_2 dx_3), \quad j = 1, 2, 3, \qquad (2)$$

обладающих необходимыми условиями ковариантности.

Используя тот факт, что (U, E) является системой импримитивности, можно показать, что локализуемыми являются все массивные частицы и релятивистские безмассовые частицы с нулевой спиральностью. Безмассовые частицы с ненулевой спиральностью (напр., фотон) оказываются нелокализуемыми по Вайтману (см. [1]). Последний вывод не согласуется с физич. Л. фотона (см. [2], [3]). Л. безмассовых частиц может быть описана, если в определении (1) отказаться от требования, что $E(\cdot)$ – спектральная мера, и допустить произвольные *разложения единицы*. Пара (U, E) является тогда *обобщенной системой импримитивности*, к-рая существует для любого представления кинематич. группы. При дополнительном условии ковариантности относительно преобразований подобия пары (U, E) допускают полную классификацию (см. [3]). Соответствующая квантовая система приближенно локализуема в том смысле, что

$$\sup_{\|\psi\| = 1} (\psi | E(B) \psi) = 1$$

для любой области $B \subset \mathbb{R}^3$. Наблюдаемые координат, определенные соотношением (2), являются самосопряженными, но не коммутирующими между собой операторами

$$Q_j = \tfrac{1}{2}(M^{-1} N_j + N_j M^{-1}), \quad j = 1, 2, 3,$$

где M – оператор энергии, а N_j – генераторы лоренцевых бустов. Для наблюдаемых координат имеет место соотношение неопределенностей, учитывающее их несовместимость (см. [4]).

Лит.: [1] Wightman A. S., «Rev. Mod. Phys.», 1962, v. 34, p. 845–72; [2] Jauch J. M., Piron C., «Helv. Phys. Acta», 1967, v. 40, p. 559–70; [3] Castrigiano D. P. L., «Lett. Math. Phys.», 1981, v. 5, p. 303–09; [4] Holevo A. S., «Repts Math. Phys.», 1978, v. 13, p. 379–99.

А. С. Холево.

ЛОКАЛЬНАЯ АКСИОМА – см. *Аксиоматическая квантовая теория поля.*

ЛОКАЛЬНАЯ КАРТА – см. *Многообразие.*

ЛОКАЛЬНАЯ НАБЛЮДАЕМАЯ – см. *Наблюдаемых алгебра, Аксиоматическая квантовая теория поля.*

ЛОКАЛЬНО ВОЗМУЩЕННЫЕ РАВНОВЕСНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – последовательность распределения вероятностей частичных (приведенных) функций вида (для большого канонического ансамбля классических статистических систем):

$$F_{\Lambda,s}(x_1, p_1; \ldots; x_s, p_s) = \Xi_{\text{в}}^{-1}(\Lambda)\Big\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} dx_{s+1} \ldots dx_{s+n} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{\nu n}} dp_{s+1} \ldots dp_{s+n} \Psi_{\Lambda, s+n}(x_1, p_1; \ldots; x_{s+n}, p_{s+n}) \times$$
$$\times \delta\Psi_{\Lambda, s+n}(x_1, p_1; \ldots; x_{s+n}, p_{s+n})\Big\}, \qquad (1)$$

где $x_i \in \Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ и $p_i \in \mathbb{R}^\nu$ – соответственно, координата и импульс i-й частицы;

$$\Psi_{\Lambda, m}(x_1, p_1; \ldots; x_m, p_m) =$$
$$= \exp\Big\{-\beta \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^2}{2m} - \beta U(x_1, \ldots, x_m) + \beta\mu n\Big\},\ m \geqslant 1,$$

– последовательность *Больцмана функций* (U – потенциальная энергия, m – масса частиц, μ – химический потенциал, $\beta = (kT)^{-1}$ – обратная температура);

$$\delta\Psi_{\Lambda, m}(x_1, p_1; \ldots; x_m, p_m),\ m \geqslant 1,$$

– последовательность неотрицательных функций, определяющих возмущения функций Больцмана таких, что

$$\sup_m \sup_{x_1, \ldots, x_m} |\delta\Psi_{\Lambda, m}(x_1, p_1; \ldots; x_m, p_m)| \leqslant C;$$

$\Xi_{\text{в}}(\Lambda)$ – большая статистическая сумма, определяемая через возмущенные функции Больцмана, то есть

$$\Xi_{\text{в}}(\Lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} dx_1 \ldots dx_n \int_{\mathbb{R}^{\nu n}} dp_1 \ldots dp_n \times$$
$$\times \Psi_{\Lambda, n}(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n) \delta\Psi_{\Lambda, n}(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n). \qquad (2)$$

Выражение (1) определяет последовательность Л. в. р. ф. р., если

$$\lim_{V(\Lambda) \to \infty} \Xi(\Lambda) \Xi_{\text{в}}^{-1}(\Lambda) = \lim_{V(\Lambda) \to \infty} C_1(V(\Lambda)) = C_1 < \infty,$$

$\Xi(\Lambda)$ – равновесная большая статистич. сумма [определяется формулой (2), если положить $\delta\Psi_m \equiv 1$, $m \geqslant 1$; при этом (1) определяет равновесные функции распределения большого канонич. ансамбля]. В случае канонич. ансамбля Л. в. р. ф. р. определяются аналогично. Термин «Л. в. р. ф. р.» связан с тем, что термодинамич. функции, определенные по Л. в. р. ф. р. и по *равновесным функциям распределения*, совпадают в термодинамич. пределе.

Примером Л. в. р. ф. р. служат функции, определяемые, напр., через бесконечно малое возмущение $h(x)$ так:

$$\delta\Psi_m(x_1, p_1; \ldots; x_m, p_m) = \exp\Big(-\beta \sum_{i=1}^{m} h(x_i)\Big).$$

Условие локальности возмущения означает абсолютную непрерывность состояния, определяемого Л. в. р. ф. р., относительно соответствующего равновесного *Гиббса распределения.*

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985.

П. В. Малышев.

ЛОКАЛЬНО ИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – *турбулентность*, при которой все условные конечномерные распределения вероятности для разностей

$$\boldsymbol{v}(M_k) = \boldsymbol{u}(M_k) - \boldsymbol{u}(M_0)$$

[где $k = 1, 2, \ldots, N$; $M_k = (\boldsymbol{r}_k, \tau_k)$; $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{u}_0 \tau_k$; $\tau_k = t_k - t_0$] значений поля скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ при фиксированном $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ и при не слишком больших $|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0|$ ($\ll L$) и $|t_k - t_0|$ ($\ll L/U$, где L и U – масштабы длины и скорости турбулентного течения в целом) не зависят от $\boldsymbol{u}_0$ и инвариантны относительно любых сдвигов в пространстве-времени $(\boldsymbol{x}, t)$ и любых вращений и отражений в пространстве $\boldsymbol{r}$.

Это понятие ввел А. Н. Колмогоров в 1941, разъяснив, что (в отличие от *изотропной турбулентности*, строго говоря, практически не реализуемой, а абстрактно могущей быть определенной лишь как вырождающаяся со временем) локально изотропной должна быть, вообще говоря, всякая развитая турбулентность (имеющая большое число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \nu^{-1} LU$, где ν – кинематич. вязкость), причем в трехмерной Л. и. т., вследствие гидродинамич. неустойчивости крупных турбулентных вихрей (те крупнейшие из них, к-рые обладают наименьшей неустойчивостью, называются когерентными структурами) и их дробления на более мелкие вихри происходит каскадный процесс спектрального переноса кинетич. энергии от боль-

ших масштабов к малым, вследствие чего статистич. режим мелкомасштабных компонент такой турбулентности оказывается универсальным (в частности, не зависящим от Re, а при очень больших Re в нек-ром промежуточном интервале масштабов не зависящим также и от ν, см. *Колмогоровская автомодельность*).

В стратифицированных жидкостях развитая турбулентность является не локально изотропной, а только локально осесимметричной относительно вертикали (с инвариантностью относительно вращений лишь вокруг вертикальной оси и отражений лишь от плоскостей, содержащих эту ось). Развитая гидромагнитная турбулентность является локально псевдоизотропной (с инвариантностью относительно вращений, но не относительно отражений). Развитая двумерная турбулентность локально изотропна, но не обладает колмогоровской автомодельностью (так как в ней кроме кинетич. энергии адиабатически инвариантен также осредненный квадрат вихря – энстрофия и направления их спектрального переноса противоположны).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Доклады АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 299–303; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967.

А. С. Монин.

ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНАЯ ГРУППА – см. *Топологическая группа.*

ЛОКАЛЬНО МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО – см. *Марковское случайное поле.*

ЛОКАЛЬНО РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – наиболее общая функция, обращающая в нуль столкновительный член в кинетическом уравнении Ландау – Власова

$$\bar{f}(\vec{x},\vec{v},t)=\left(\frac{m\beta(\vec{x},t)}{2\pi}\right)^{3/2} n(\vec{x},t)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}m\beta(\vec{x},t)[\vec{v}-\vec{u}(\vec{x},t)]^2\right\},$$

где $n(\vec{x},\ t)$, $\vec{u}(\vec{x},\ t)$, $\beta(\vec{x},\ t)$ – локальная плотность числа частиц, скорость и температура, соответственно. Для классич. системы из N частиц Л. р. р. определяется функцией распределения

$$\bar{F}=Z^{-1}\exp\left\{-\beta\int d\vec{x}\left[\frac{T}{T(\vec{x})}\right]E(q,p;\vec{x})\right\},$$

где $Z=\mathrm{Tr}\exp(-\beta H)$, $\beta=(kT)^{-1}$, $T(x)$ – локальная температура, $E(q,\ p;\ \vec{x})$ – локальная плотность энергии. Л. р. р. пригодно для состояний, не слишком далеких от равновесия, когда применимо гидродинамич. описание. Понятие Л. р. р. обобщается введением квазиравновесного распределения.

См. также *Энтропия.*

Лит.: [1] Зубарев Д. Н., Неравновесная статистическая термодинамика, М., 1971, гл. 4; [2] Ферцигер Дж., Капер Г., Математическая теория процессов переноса в газах, пер. с англ., М., 1976; [3] Mori H., «Phys. Rev.», 1958, v. 112, № 4, p. 1829. *Д. П. Санкович.*

ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ – см. *Расслоение.*

ЛОКАЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ полей – точечное взаимодействие, при котором изменение поля в точке x пространства в момент времени t определяется значением остальных полей (и его самого) в бесконечно близких точках. В лагранжиан локального взаимодействия полей входят с совпадающими аргументами. В квантовой теории локальность и связанное с ней идеализированное (микроскопическое) представление о причинности выражаются перестановочностью или антиперестановочностью полевых операторов при разделении их аргументов пространственноподобным интервалом. При доступных современному эксперименту энергиях не обнаружено отклонений от локальности ни для одного из известных взаимодействий элементарных частиц.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н. [и др.], **Общие принципы квантовой теории поля**, М., 1987. *М. А. Соловьев.*

ЛОКАЛЬНОЕ КАЛИБРОВОЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Глэшоу – Вайнберга – Салама модель, Динамическая система.*

ЛОКАЛЬНЫЙ КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР Маслова – см. *Маслова канонический оператор.*

ЛОКАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР – функция от квантовых полей в точке x пространства-времени и от их производных по x любого конечного порядка (в той же точке). Примерами Л. о. [помимо исходных квантовых полей $\varphi(x)$] служат лагранжиан полей $L(\varphi(x),\ \partial_\mu\varphi(x))$ ($\partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu$, $\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3$), тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}(x)$, фермионный ток $j^\mu(x)=\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ [где $\psi(x)$ – квантованное поле фермиона, γ^μ – *Дирака матрицы*, черта над ψ означает дираковское сопряжение] (см. *Ток* в квантовой теории поля). Таким выражениям для квантовых Л. о., заимствованным из класич. теории поля, присущи неопределенности (*расходимости*), устранение к-рых требует привлечения аппарата *перенормировок*. В *аксиоматической квантовой теории поля* понятие Л. о. используется в более широком смысле для обозначения операторных функционалов, зависящих от релятивистских квантовых полей в нек-рой ограниченной области пространства-времени [напр., $\int\varphi(x)f(x)\,d^4x$ – результат сглаживания квантового поля $\varphi(x)$ с пробной функцией $f(x)$, сосредоточенной в ограниченной области].

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Стритер Р., Вайтман А., PCT, спин и статистика и все такое, пер. с англ., М., 1966.

ЛОРАНА РЯД – обобщение *степенного ряда* по целым неотрицательным степеням разности $z-a$ или по целым неположительным степеням $z-a$ в виде:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(z-a)^k. \qquad (1)$$

Ряд (1) понимается как сумма двух рядов:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z-a)^k$$

– правильная часть Л. р. и

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(z-a)^k$$

– главная часть Л. р. Ряд (1) считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся его правильная и главная части. Свойства Л. р.: 1) если область сходимости Л. р. содержит внутренние точки, то она представляет собой круговое кольцо $D=\{z\in\mathbb{C}:0\leqslant r<|z-a|<R\leqslant+\infty\}$ с центром в точке $a\neq\infty$; 2) во всех внутренних точках кольца сходимости D ряд (1) сходится абсолютно; 3) как и для степенных рядов, поведение Л. р. в точках граничных окружностей $|z-a|=r$ и $|z-a|=R$ может быть самым разнообразным; 4) на любом компактном множестве $K\subset D$ ряд (1) сходится равномерно; 5) сумма ряда (1) в D есть аналитич. функция $f(z)$; 6) ряд (1) можно дифференцировать и интегрировать в D почленно; 7) коэффициенты c_k Л. р. определяются через его сумму $f(z)$ формулами

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+1}},\quad k=0,\pm1,\ldots, \qquad (2)$$

где $\gamma=\{z:\ |z-a|=\rho,\ r<\rho<R\}$ – любая окружность с центром a, расположенная в D; 8) разложение в Л. р. единственно, то есть если $f(z)\equiv\varphi(z)$ в D, то все коэффициенты их Л. р. по степеням $z-a$ совпадают.

Для случая центра в бесконечно удаленной точке $a=\infty$ Л. р. принимает вид:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_kz^k, \qquad (3)$$

причем теперь правильной частью является

$$\sum_{k=-\infty}^{0}c_kz^k,$$

а главной –

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k.$$

Область сходимости ряда (3) имеет вид:

$$D' = \{z:\ 0 \leqslant r < |z| < R \leqslant +\infty\},$$

а формулы (2) переходят в формулы:

$$c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{k+1} f(z)dz, \quad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

где $\gamma = \{z:\ |z| = \rho,\ r < \rho < R\}$. В остальном все свойства те же, что и в случае конечного центра a.

Применение Л. р. основано главным образом на теореме Лорана (P. Laurent, 1843): любая однозначная аналитич. функция $f(z)$ в кольце $D = \{z:\ 0 \leqslant r < |z-a| < R \leqslant +\infty\}$ представима в D сходящимся Л. р. (1). В частности, в проколотой окрестности $D = \{z: 0 < |z-a| < R\}$ изолированной особой точки a однозначного характера аналитич. функция $f(z)$ представима Л. р., к-рый и служит основным инструментом исследования ее поведения в окрестности изолированной особой точки.

Для голоморфных функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ аналогом теоремы Лорана можно считать следующее предложение: всякую функцию $f(z)$, голоморфную в произведении D колец $D_\nu = \{z_\nu \subset \mathbb{C}:\ 0 \leqslant r_\nu < |z_\nu - a_\nu| < R_\nu \leqslant +\infty\}$, можно представить в D в виде сходящегося кратного ряда Лорана.

$$f(z) = \sum_{|k|=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \qquad (4)$$

в к-ром суммирование распространяется на все целочисленные мультииндексы

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_n), \quad |k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n,$$

$$(z-a)^k = (z_1 - a_1)^{k_1} (z_2 - a_2)^{k_2} \ldots (z_n - a_n)^{k_n},$$

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+n}},$$

где γ – произведение окружностей $\gamma_\nu = \{z_\nu \in \mathbb{C}:\ z_\nu = a_\nu + \rho_\nu e^{it};\ r_\nu < \rho_\nu < R_\nu,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Область сходимости ряда (4) логарифмически выпуклая. Применение кратных Л. р. (4) ограничено, поскольку при $n \geqslant 2$ голоморфные функции $f(z)$ не могут иметь изолированных особенностей.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 4; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 1, гл. 2, ч. 2, гл. 1. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛОРЕНЦА ГАЗ – *динамическая система*, порожденная движением точечной частицы в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, из которого удалено бесконечное число попарно непересекающихся шаров. Частица движется прямолинейно и равномерно до столкновения с шарами и отражается от них по закону упругого удара. Шары (рассеиватели) неподвижны и могут быть расположены как периодически, так и случайно.

Эта модель введена Г. Лоренцом (H. Lorentz, 1905) для описания динамики электронного газа в металлах. Естественная гипотеза состоит в том, что корреляционная функция скоростей для Л. г. убывает как $\mathrm{const} \cdot t^{-(d/2+1)}$ (t – время). Л. г. является эргодич. биллиардной системой.

Н. И. Чернов.

ЛОРЕНЦА ГРУППА – группа вещественных линейных однородных преобразований 4-векторов

$$x = x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$$

пространства Минковского M_4, сохраняющих (индефинитное) скалярное произведение

$$xy = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu,$$

где $g = g_{\mu\nu}$ – метрический тензор в M_4 (подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Названа по имени Г. Лоренца (H. Lorentz). Являясь подгруппой *Пуанкаре группы* (группы симметрии пространства-времени в отсутствие гравитации), Л. г. играет фундаментальную роль в релятивистской теории. Инвариантность действия относительно преобразований Л. г. отражает изотропность пространства-времени и влечет за собой сохранение 4-тензора момента (см. *Нетер теорема*).

Преобразование Λ из Л. г. задается вещественной четырехрядной матрицей $\Lambda = \Lambda^\mu_\nu$, так что $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x_\nu = \Lambda x$. Равенство $\Lambda x \Lambda y = xy$ эквивалентно $\Lambda^\top g \Lambda = g$ ($\Lambda^\top$ транспонирована к Λ) и дает $\det \Lambda = \pm 1$, $|\Lambda^0_0| \geqslant 1$. Л. г. L разбивается на 4 компоненты, связанные между собой в соответствии со знаками $\det \Lambda$ и Λ^0_0:

$$L = L^\uparrow_+ + L^\downarrow_+ + L^\uparrow_- + L^\downarrow_- = L^\uparrow_+ + PTL^\uparrow_+ + PL^\uparrow_+ + TL^\uparrow_+.$$

Здесь нижний индекс – знак $\det \Lambda$, стрелка $\uparrow$ ($\downarrow$) отвечает знаку $+(-)\Lambda^0_0$; P – инверсия (отражение) пространства: $(Px)^0 = x^0$, $(Px)^j = -x^j$; T – инверсия времени: $(Tx)^0 = -x^0$, $(Tx)^j = x^j$, $j = 1, 2, 3$. Преобразования с $\det \Delta = 1$ называются собственными, с $\Delta^0_0 > 0$ – ортохронными. Собственная ортохронная группа $L^\uparrow_+$ является подгруппой Л. г.

Л. г. – шестипараметрич. группа Ли; в $L^\uparrow_+$ имеются 3 независимых пространственных вращения $R_{ij}(\alpha)$ на угол α в плоскости (x^i, x^j):

$$x^\mu \to x'^\mu,\ x'^0 = x^0,$$
$$x'^i = x^i \cos\alpha + x^j \sin\alpha,$$
$$x'^j = x^j \cos\alpha - x^i \sin\alpha$$

и 3 независимых (частных) *Лоренца преобразования* – гиперболич. повороты (бусты) $B_{0k}(\beta)$ на угол β в плоскости (x^0, x^k):

$$x^\mu \to x'^\mu,\ x'^0 = x^0 \mathrm{ch}\,\beta + x^k \mathrm{sh}\,\beta,$$
$$x'^i = x^i,\ x'^j = x^j,\ x'^k = x^k \mathrm{ch}\,\beta + x^0 \mathrm{sh}\,\beta$$

(здесь $i, j, k = 1, 2, 3$ и их циклич. перестановки). Любой элемент Λ из $L^\uparrow_+$ можно однозначно представить в виде $\Lambda = RB$, где R – пространственное вращение вокруг нек-рой оси, а B – гиперболич. поворот в плоскости $(x^0, \boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{n}$ – нек-рое направление.

В приложениях важно соответствие между $L^\uparrow_+$ и группой $SL(2, \mathbb{C})$ комплексных (2×2)-матриц с единичным определителем. Каждому x^μ из M_4 ставится в соответствие эрмитова матрица

$$X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{Vmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{Vmatrix},$$

где σ_0 – единичная (2×2)-матрица, σ_j – *Паули матрицы*; при этом $x^\mu x_\mu = \det X$ и $x^\mu = (1/2)\mathrm{Tr}(\sigma_\mu X)$. Тогда каждому преобразованию $X \to X' = SXS^+$, где $S \in SL(2, \mathbb{C})$, отвечает преобразование $\Lambda(S) \in L^\uparrow_+$, причем

$$\Lambda^\mu_\nu = (1/2)\mathrm{Tr}(\sigma_\mu S \sigma_\nu S^+).$$

Это соответствие двузначно: $\Lambda(-S) = \Lambda(S)$; вращениям R отвечают унитарные матрицы $V = S(SS^+)^{-1/2}$, бустам B – положительно (либо отрицательно) определенные эрмитовы матрицы $H = (SS^+)^{-1/2}$, а разложению $\Lambda = RB$ – разложение $S = VH$. Группа $SL(2, \mathbb{C})$ является универсальной накрывающей Л. г., являясь минимальной односвязной группой, гомоморфной Л. г.

Параметризации Л. г. с помощью углов поворотов отвечает матричное представление ее генераторов $M_{ij} = iR'_{ij}(0)$, $M_{0k} = iB'_{0k}(0)$ (штрих означает здесь производную по углу).

Их алгебра Ли характеризуется перестановочными соотношениями:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}). \quad (1)$$

В трехмерных обозначениях удобно перейти к комбинациям

$$N_i = (I_i + iK_i)/2,\ N_i^+ = (I_i - iK_i)/2,$$
$$I_i = \varepsilon_{ijk}M^{jk}/2,\ K_i = M_{0i},$$

где ε_{ijk} – символ Леви-Чивиты. Тогда алгебра (1) расщепляется в прямую сумму двух алгебр Ли группы вращений $O(3)$:

$$[N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}N_k,$$
$$\left[N_i^+, N_j^+\right] = i\varepsilon_{ijk}N_k^+, \quad \left[N_i, N_j^+\right] = 0. \quad (2)$$

Операторы Казимира, коммутирующие со всеми генераторами, имеют вид $C_1 = N_iN_i$, $C_2 = N_i^+N_i^+$.

Неприводимые представления Л. г. (точнее, ее подгруппы $L_+^{\uparrow}$) полностью характеризуются собственными значениями j_1, j_2 операторов C_1, C_2. Для конечномерных представлений удобнее трехмерная реализация (2) алгебры Ли. Вследствие ее расщепления представление $D^{(j_1, j_2)}$ Л. г. строится как прямое произведение представлений $D^{(j)}$ группы вращений и имеет размерность $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Величины, преобразующиеся по представлениям $D^{(1/2,\ 0)}$ и $D^{(0,\ 1/2)}$, являются спинором и сопряженным спинором, по $D^{(1/2,\ 1/2)}$ – 4-вектором и т. д. Полная классификация неприводимых представлений Л. г. описывается в терминах параметров j_0, ν, связанных с собственными значениями операторов Казимира формулами $j_1 = 2(j_0^2 + \nu^2 - 1)$, $j_2 = 4ij_0\nu$; параметр j_0 – положительное целое или полуцелое число, ν – любое комплексное число. Представление конечномерно, когда j_0 целое или полуцелое и $\nu^2 = (j_0 + n)^2$, где n целое. Представление унитарно, когда: 1) ν мнимое; 2) $j_0 = 0$, ν вещественно и $|\nu| \leqslant 1$. Представление Л. г. однозначно при целом и двузначно при полуцелом j_0.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958; [2] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958; [3] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [4] Румер Ю. Б., Фет А. И., Теория групп и квантованные поля, М., 1977; [5] Эллиот Дж., Добер П., Симметрия в физике, пер. с англ., т. 1–2, М., 1983; [6] Рамон П., Теория поля. Современный вводный курс, пер. с англ., М., 1984.

С. И. Азаков, В. П. Павлов.

ЛОРЕНЦА НЕОДНОРОДНАЯ ГРУППА – см. *Пуанкаре группа.*

ЛОРЕНЦА ОБЩАЯ ГРУППА – см. *Лоренца преобразование.*

ЛОРЕНЦА ОПЕРАТОР – см. *Волновое уравнение.*

ЛОРЕНЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – преобразование, связывающее между собой физические, геометрические и другие величины (например, волновые функции в квантовой теории) в двух различных *инерциальных системах отсчета* в псевдоевклидовом пространстве-времени. Термин часто употребляется в первоначальном узком смысле слова только для обозначения пространственных координат x, y, z и моментов времени t одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета и декартовых координатах. Так, если скорость движущейся системы относительно неподвижной равна v и направлена по оси z, то Л. п. имеет вид:

$$z \to \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y \to y, \quad x \to x, \quad t \to \frac{t - \frac{v}{c^2}z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (*)$$

где c – скорость света в пустоте (это – пример так наз. *буста*; вообще же любое Л. п. представляется композицией нек-рого буста и вращения в пространстве с координатами x, y, z). Важнейшим свойством Л. п. (*) является инвариантность так наз. интервала событий – величины, к-рая в галилеевых координатах (то есть в декартовых координатах арифметич. пространства t, x, y, z) имеет вид:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

При этом как преобразование (*), так и вообще Л. п. имеет смысл только при $|v| < c$, то есть скорость одного тела относительно другого не может превышать скорости света.

Л. п. являются линейными преобразованиями, аналогичными ортогональным преобразованиям евклидова пространства. Отличия связаны с некомпактностью группы, ими образуемой, так как единичная сфера в псевдоевклидовом пространстве, то есть множество точек, для к-рого модуль интервала до начала координат $\sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2} = 1$, некомпактна (см. ниже), а также с тем, что имеется два типа отражений – времени $t \to -t$ и пространства $x, y, z \to -x, -y, -z$.

Л. п. образуют группу, называемую общей группой Лоренца. Более узкие классы Л. п.: ортохронные Л. п., сохраняющие знак координаты t; собственные Л. п., матрица к-рых имеет положительный определитель; специальные Л. п., принадлежащие пересечению первых двух классов. Общая группа Лоренца (то есть совокупность всех Л. п.) состоит из четырех компонент, каждая из к-рых связна в том смысле, что любая ее точка может быть соединена с любой другой ее точкой, но ни одно Л. п. из одной компоненты не может быть непрерывным образом соединено с Л. п. из другой компоненты.

Приложения Л. п. связаны с *Эйнштейна принципом относительности*, согласно к-рому все физич. законы, кроме законов гравитации, инвариантны относительно Л. п. В ряде случаев, напр. в аксиоматич. квантовой теории поля, использование этого и других столь же общих постулатов позволяет делать далеко идущие выводы о видах функциональных зависимостей между различными физич. величинами. Инфинитезимальные Л. п., то есть повороты на бесконечно малый угол и бусты с бесконечно малой скоростью, часто используют для получения различных законов сохранения.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [2] Федоров Ф. И., Группа Лоренца, М., 1979; [3] Боголюбов Н. Н. и др., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987.

М. И. Войцеховский.

ЛОРЕНЦЕВА КАЛИБРОВКА – *калибровочное условие* вида $\partial_\mu A_\mu = 0$. Оно наиболее удобно для практич. вычислений ввиду явной релятивистской инвариантности. Эффективное действие в этой калибровке содержит дополнительные элементы (см. *Фаддеева – Попова духи*). Используются также обобщенные Л. к., в к-рых эффективное действие включает снимающий вырождение член вида $\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2$. Л. к. с этой точки зрения соответствует формальному пределу $\alpha \to 0$.

А. А. Славнов.

ЛОРЕНЦЕВА МЕТРИКА – см. *Псевдориманова метрика.*

ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ – см. *Псевдориманова метрика.*

ЛЬЕНАРА УРАВНЕНИЕ – нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$x'' + f(x)x' + x = 0. \quad (*)$$

Это уравнение описывает динамику системы с одной степенью свободы при наличии линейной восстанавливающей силы и нелинейного затухания. Если функция $f(x)$ обладает следующим свойством:

$$f(x) < 0 \text{ при малых } |x|,$$
$$f(x) > 0 \text{ при больших } |x|,$$

то есть если при малых амплитудах система поглощает энергию, а при больших происходит диссипация, то в системе можно ожидать самовозбуждение колебаний (возник-

новение *автоколебаний*). Впервые достаточные условия возникновения автоколебаний в системе (*) доказал А. Льенар (A. Liénard, 1928).

Л. у. тесно связано с *Рэлея уравнением*. Важным частным случаем Л. у. является *Ван дер Поля уравнение*. Вместо уравнения (*) часто удобно рассматривать систему

$$x' = v,\ v' = -x - f(x)\,v$$

(автоколебательному процессу в системе (*) адекватен устойчивый предельный цикл на фазовой плоскости x, v) или эквивалентное ей уравнение

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x - f(x)v}{v}.$$

Если ввести новую переменную

$$y = x' + F(x),$$

где

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi,$$

то уравнение (*) переходит в систему

$$x' = y - F(x),\ y' = -x.$$

Более общими, чем Л. у., являются уравнения

$$x'' + f(x)\,x' + g(x) = 0,$$
$$x'' + \varphi(x,\,x')\,x' + g(x) = 0.$$

Основной интерес представляет выяснение возможно более широких достаточных условий, при к-рых эти уравнения имеют единственное устойчивое периодич. решение. Подробно изучалось также неоднородное Л. у.

$$x'' + f(x)\,x' + x = e(t)$$

и его обобщения.

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [2] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [4] Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1974.

Н. Х. Розов.

ЛЮДЕРСА – ПАУЛИ ТЕОРЕМА – см. *CPT-теорема.*

ЛЮКСОН – см. *Тахион.*

ЛЮСТЕРНИКА – ШНИРЕЛЬМАНА КАТЕГОРИЯ – см. *Вариационное исчисление в целом.*

ЛЯПУНОВА ЛЕММА – см. *Ляпунова функция.*

ЛЯПУНОВА ПОКАЗАТЕЛЬ – см. *Хаос.*

ЛЯПУНОВА ТЕОРЕМА об устойчивости – см. *Устойчивость по Ляпунову.*

ЛЯПУНОВА ФУНКЦИЯ – функция, определяемая следующим образом. Пусть x_0 – неподвижная точка системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,\,t)$$

(то есть $f(x_0,\,t) \equiv 0$), где отображение $f(x,\,t): U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ непрерывно и непрерывно дифференцируемо по x (здесь U – нек-рая окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^n$); в координатах эта система записывается в виде

$$\dot{x}^i = f^i(x^1,\,\ldots,\,x^n,\,t),\ i = 1,\,\ldots,\,n.$$

Функцией Ляпунова называется дифференцируемая функция $V(x): U \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1) $V(x) > 0$ при $x \neq x_0$;

2) $V(x_0) = 0$;

3) $0 \geqslant \dfrac{dV(x)}{dx} f(x,t) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial V(x^1,\,\ldots,\,x^n)}{\partial x^i} f^i(x^1,\,\ldots,\,x^n,t).$

Функция $V(x)$ введена А. М. Ляпуновым (см. [1]).

Имеет место лемма Ляпунова: если Л. ф. существует, то неподвижная точка устойчива по Ляпунову. На этой лемме основан один из методов исследования *устойчивости.*

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.–Л., 1956, с. 7–263; [2] Барбашин Е. А., Функции Ляпунова, М., 1970.

В. М. Миллионщиков.

ЛЯПУНОВА – ПЕРРОНА ТЕОРЕМА – см. *Центральное многообразие.*

М

МАГНИТНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ – см. *Дальний и ближний порядок.*

МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ – уравнения движения электропроводной жидкости или ионизованного газа (плазмы) в магнитном поле. При этом индуцируется электрич. поле и возникает электрич. ток. В свою очередь, взаимодействие тока с магнитным полем вызывает изменение движения жидкости и изменение магнитного поля. Магнитная гидродинамика в широком смысле – это раздел механики сплошных сред, изучающий движение электропроводных газов и жидкостей при наличии магнитного поля. При этом состояние среды характеризуется функциями распределения по скоростям $f_\alpha(\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{r},\,t)$ для каждого сорта частиц α, а также значениями электрич. и магнитного полей во всех точках пространства и в каждый момент времени. Если характерная для рассматриваемых процессов частота ω значительно меньше частоты столкновений отдельных частиц ν, $\omega \ll \nu$, то каждый сорт частиц описывают гидродинамически. При этом состояние частиц сорта α описывается плотностью

$$n_\alpha(\boldsymbol{r},t) = \int f_\alpha(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t)\,d\boldsymbol{v}$$

и средней скоростью

$$\boldsymbol{v}_\alpha(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{n_\alpha}\int \boldsymbol{v} f_\alpha(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t)\,d\boldsymbol{v}.$$

Это – многожидкостная магнитная гидродинамика. В частности, полностью ионизованной плазме, состоящей из электронов и одного сорта ионов, соответствует двухжидкостная магнитная гидродинамика.

Если характерная частота ω значительно меньше частоты обмена энергией между электроном и ионом ν_{ei}, то давления электронов p_e и ионов p_i успевают выровняться и плазма характеризуется единым давлением p. Из-за того, что электрон значительно легче иона, плотность массы ρ и скорость среды $\boldsymbol{v}$ определяются ионами, а плотность тока $\boldsymbol{j}$ – электронами. Такую плазму, рассматриваемую как единое целое, называют простой. Однако уравнения движения простой плазмы, дополненные уравнениями Максвелла, все еще слишком сложны. Решающий шаг в их упрощении был сделан Г. Альфвеном (H. Alfven, 1942). Он показал,

что при медленных движениях имеет место закон вмороженности магнитного поля в плазму – магнитные силовые линии перемещаются вместе с элементами объема плазмы. Это позволило создать сравнительно простую модель – магнитную гидродинамику в узком смысле, и аналитически решить целый ряд астрофизич. задач.

Система М. г. у. в узком смысле имеет вид (среда полагается идеальной, то есть бездиссипативной):

закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0; \tag{1}$$

закон сохранения импульса

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}[\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}]; \tag{2}$$

закон вмороженности магнитного поля

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]; \tag{3}$$

закон отсутствия магнитных зарядов

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

и закон сохранения энтропии

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

где s – удельная энтропия. Из электродинамич. величин – электрич. и магнитного полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, плотностей заряда ρ_e и тока $\boldsymbol{j}$ в М. г. у. входит только $\boldsymbol{B}$. Поэтому в магнитной гидродинамике в узком смысле состояние среды характеризуется восемью функциями координат и времени: $p(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$, $s(\boldsymbol{r}, t)$. Входящая в уравнения массовая плотность среды $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ выражается через p и s с помощью термодинамич. уравнения состояния. Остальные электродинамич. величины выражаются через $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}, \tag{7}$$

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \boldsymbol{E}. \tag{8}$$

Соотношение (6) означает, что в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой, электрич. поле равно нулю. Это объясняется тем, что электроны, обладая очень малой массой, экранируют электрич. поле. Равенства (7), (8) являются уравнениями Максвелла [при этом в (7) опущен ток смещения].

Таким образом, в магнитной гидродинамике изменяются привычные связи между различными электрич. величинами. Так, в электротехнике ток определяется в основном электрич. полем (закон Ома), а магнитное поле приводит лишь к малым поправкам. Напротив, в магнитной гидродинамике ток определяется магнитным полем.

В магнитной гидродинамике возникают специфич. поперечные волны, называемые альфвеновскими, фазовая скорость к-рых равна $\boldsymbol{V}_{An}$, где

$$\boldsymbol{V}_A = \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

а $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны. Кроме того, звуковые волны модифицируются благодаря наличию магнитного давления $B^2/8\pi$ (магнитозвуковые волны). Соотношение (7) справедливо, если скорость среды, альфвеновская скорость и скорость звука являются нерелятивистскими.

Из приведенных уравнений вытекает целый ряд физич. выводов и инженерных приложений. Прежде всего, из уравнения (6) следует, что энергия электрич. поля в нерелятивистском случае значительно меньше энергии магнитного поля. Из этого уравнения видно также, что движение проводящей среды поперек магнитного поля создает разность электрич. потенциалов. Этот эффект используется для создания магнитогидродинамич. генераторов электроэнергии, в к-рых осуществляется прямой переход тепловой энергии в электрическую. Такие генераторы обладают более высоким коэффициентом полезного действия. Другим приложением соотношения (6) являются магнитогидродинамич. измерители скорости и расходомеры. Из (6) следует также, что плазма, помещенная в скрещенные электрич. и магнитное поля, приходит в движение. Такое движение, перпендикулярное электрич. и магнитному полям, называют дрейфовым, а его скорость – дрейфовой скоростью. Этот эффект используют для создания магнитогидродинамич. двигателей для ракет. При этом могут быть достигнуты скорости истечения реактивной струи, значительно превышающие ее скорости в тепловых ракетных двигателях. Движение электропроводной жидкости в скрещенных электрич. и магнитных полях используют также для создания магнитогидродинамич. насосов кондукционного типа. Закон вмороженности используется для магнитного удержания горячей плазмы без соприкосновения с твердыми стенками. Благодаря закону вмороженности движущееся магнитное поле увлекает за собой электропроводящую жидкость (магнитогидродинамич. насосы индукционного типа).

М. г. у. с диссипацией. Вследствие столкновений отдельных частиц возникают диссипативные эффекты. При этом в М. г. у. идеальной среды (1)–(5) возникают, вообще говоря, дополнительные члены. В законе сохранения массы (1) диссипативные члены описывают химич. реакции, к-рые приводят к изменению массы данного вещества. Если такие реакции отсутствуют, то закон сохранения массы (1) остается неизменным. В законе сохранения импульса (2) возникают члены, описывающие эффект вязкости:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}[\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}] + \eta \Delta \boldsymbol{v}.$$

Здесь η – коэффициент сдвиговой вязкости (мы полагаем $\eta = \text{const}$ и объемной вязкостью пренебрегаем). Дополнительный член в законе вмороженности (3) описывает диффузию магнитного поля:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] + \nu_m \Delta \boldsymbol{B}.$$

Здесь ν_m – «магнитная вязкость», равная

$$\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma},$$

σ – коэффициент электропроводности, к-рый полагается постоянным. Закон отсутствия магнитных зарядов (4) не изменяется при учете диссипации. Что же касается уравнения (5), то оно принимает вид:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho T} \left\{ 2\eta \left[v_{ij}^{(d)} \right]^2 + \operatorname{div}(\varkappa \nabla T) + \nu_m \frac{(\operatorname{rot} \boldsymbol{B})^2}{4\pi} \right\}.$$

Здесь $v_{ij}^{(d)}$ – девиатор тензора скоростей деформации, T – температура,

$$v_{ij}^{(d)} = v_{ij} - \frac{1}{3} v_{ll} \delta_{ij},$$

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$\varkappa$ – коэффициент теплопроводности. Производство энтропии в единичном объеме равно:

$$\frac{\partial i}{\partial t}(\rho s) = \frac{j_k^2}{\sigma T} + \frac{\varkappa}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{2\eta}{T} \left[v_{lk}^{(d)} \right]^2;$$

эта величина всегда неотрицательна.

Вязкостью можно пренебречь при больших числах Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{Lv}{\nu}.$$

Здесь L – характерный размер, v – характерная скорость, $\nu = (\eta/\rho)$ – кинематич. вязкость. Диффузией магнитного поля можно пренебречь, если велико магнитное число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_m = \frac{Lv}{\nu_m}.$$

Наконец, теплопроводностью можно пренебречь, если велико число Пекле:

$$\mathrm{Pe} = \frac{Lv}{\chi},$$

где $\chi = \frac{\varkappa}{\rho c_p}$ – коэффициент температуропроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Равновесные конфигурации. Такие конфигурации (магнитные ловушки) представляют интерес для осуществления управляемых термоядерных реакций. При этом магнитные силовые линии целиком лежат на поверхностях

$$p(x, y, z) = \mathrm{const},$$

называемых поэтому магнитными поверхностями. Простейшая равновесная конфигурация аксиально симметрична. В этом случае величины в М. г. у. зависят только от двух цилиндрич. координат r и z и не зависят от азимута ϑ. Аксиально симметричное магнитное поле называется тороидальным, если отлична от нуля только его азимутальная компонента B_ϑ. Если же отличны от нуля только компоненты B_r и B_z, то поле называется полоидальным. Аксиально-симметричные равновесные конфигурации описываются уравнением Грэда–Шафранова

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 16\pi^3 r^2 \frac{dp}{d\psi} + \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{d(I^2)}{d\psi} = 0, \qquad (9)$$

где ψ – магнитный поток через круг радиусом r, находящийся на высоте z:

$$\psi(r,z) = \int_0^r B(z,\rho)2\pi\rho d\rho,$$

и I – ток, протекающий через тот же круг

$$I(r,z) = \int_0^r j_z(\rho,z)2\pi\rho d\rho,$$

c – скорость света.

Функции $\psi(r, z)$ и $I(r, z)$ определяют магнитное поле:

$$B_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial r}; \quad B_r = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad B_\vartheta = \frac{2I}{cr}$$

и плотность тока $\boldsymbol{j}$ согласно уравнению (7). Величины ψ и I постоянны на магнитных поверхностях. Задавая I как функцию от ψ, можно получить много простых аналитич. решений уравнения (9), что позволяет исследовать широкий класс равновесных плазменных конфигураций. Особую роль для управляемых термоядерных реакций играют замкнутые магнитные ловушки, то есть конфигурации, топологически эквивалентные тору. Если плазма удерживается внешним магнитным полем, то тороидальную ловушку называют стелларатором. Если же удержание плазмы осуществляется магнитным полем азимутального тока, текущего внутри плазмы, то ловушка называется токамаком.

Стационарные течения. Простейшим магнитогидродинамич. течением в канале, служащим моделью многих инженерных приложений, является течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом конечной электропроводности между двумя параллельными плоскостями $x = \pm l$ (течение Гартмана). При этом

$$v_z(x) = -\frac{l^2}{\eta Ha \operatorname{sh} Ha}\frac{\partial p}{\partial z}\left(\operatorname{ch} Ha - \operatorname{ch}\frac{Ha\cdot x}{l}\right), \quad v_x = v_y = 0,$$

где $Ha = lV_A/\sqrt{\nu\nu_m}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ – градиент давления.

Турбулентность. В случае неустойчивости равновесного состояния в плазме возбуждается большое число волн, имеющих случайный характер. Такое состояние плазмы называется турбулентным. Напротив, упорядоченное движение спокойной плазмы, при к-ром она движется как бы отдельными слоями, обладающими различными, но определенными скоростями, называется ламинарным.

Слабая турбулентность. При малом уровне турбулентности, когда нелинейные члены в М. г. у. уже следует учитывать, но они все еще невелики, турбулентное состояние можно рассматривать как газ слабо взаимодействующих волн – плазмонов, имеющих случайные фазы. Такую турбулентность называют слабой. В случае $\beta \equiv \frac{8\pi p}{B^2} \ll 1$ наиболее существенны следующие процессы взаимодействия волн:

$$A \rightleftarrows A + S; \quad A \rightleftarrows F + S; \quad F \rightleftarrows F + S; \quad F \rightleftarrows A + S.$$

Здесь буквами A, F, S обозначены соответственно альфвеновская, быстрая и медленная магнитозвуковые волны.

Аномальные процессы переноса. В турбулентной среде коэффициенты переноса становятся аномально большими. В частности, аномальная электропроводность

$$\sigma^{(T)} = 3c^2/(4\pi\tau_c\langle\tilde{v}^2\rangle),$$

где c – скорость света, $\langle\tilde{v}^2\rangle$ – средний квадрат флуктуации скорости, τ_c – время корреляции флуктуаций.

Гидромагнитное динамо. Под гидромагнитным динамо понимают механизм, способный генерировать магнитное поле в движущейся проводящей среде. Основой гидромагнитного динамо является растяжение силовых линий «затравочного» магнитного поля. При вращении звезды различные ее точки движутся с различной скоростью. Благодаря закону вмороженности это приводит к растяжению магнитных силовых линий. Что же касается затравочного поля, то оно образуется током, возникающим вследствие различия вязкости электронов и ионов. Однако теория ламинарного динамо не объясняет возникновения полоидального магнитного поля. Последнее связано с турбулентностью. При турбулентном движении рост магнитного поля пропорционален его ротору (α-эффект)

$$\frac{\partial\langle\boldsymbol{B}\rangle}{\partial t} = \alpha\,\mathrm{rot}\langle\boldsymbol{B}\rangle.$$

Здесь

$$\alpha = -\frac{1}{3}\langle\tilde{\boldsymbol{v}}(t)\,\mathrm{rot}\,\tilde{\boldsymbol{v}}(t)\rangle\tau_c.$$

Лит.: [1] Альфвен Г., Фельтхаммар К. Г., Космическая электродинамика, пер. с англ., 2 изд., М., 1967; [2] Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, М., 1962; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1982; [4] Половин Р. В., Демуцкий В. П., Основы магнитной гидродинамики, М., 1987. *В. П. Демуцкий, Р. В. Половин.*

МАГНИТНЫЙ ТОК – см. *Ток.*

МАГНИТНЫЙ ФОРМФАКТОР – см. *Формфактор.*

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – см. *Гидромагнитная турбулентность.*

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ – волны, описываемые *магнитной гидродинамики уравнениями.* Существуют четыре типа волн.

1) Альфвеновская волна, движущаяся со скоростью

$$V_{An} = \frac{B_n}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

2) Два типа магнитозвуковых волн, движущихся со скоростями

$$V = \sqrt{\frac{1}{2}\left[V_A^2 + a^2 \pm \sqrt{(V_A^2 + a^2)^2 - 4V_{An}^2 a^2}\right]}.$$

Здесь a – скорость звука, $V_A = |\boldsymbol{B}|/\sqrt{4\pi\rho}$, знак + соответствует скорости быстрой магнитозвуковой волны V_F, знак – соответствует скорости медленной магнитозвуковой волны V_S.

3) Энтропийная волна, покоящаяся относительно среды. Скорости этих волн удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant V_S \leqslant V_{An} \leqslant V_F.$$

Во всех этих волнах продольное магнитное поле B_n не изменяется. В альфвеновской волне остаются постоянными плотность, давление, энтропия и абсолютная величина магнитного поля $|\boldsymbol{B}|$ (при этом вектор $\boldsymbol{B}$ вращается вокруг направления распространения волны $\boldsymbol{n}$). Магнитозвуковые волны являются плоскополяризованными: в них все векторы $\boldsymbol{B}(t)$ лежат в одной плоскости, содержащей $\boldsymbol{n}$. В магнитозвуковых волнах плотность и давление уменьшаются, тогда как энтропия остается неизменной. Что же касается абсолютной величины магнитного поля $|\boldsymbol{B}_t|$, то она возрастает в медленных и убывает в быстрых магнитозвуковых волнах. Наконец, энтропийная волна – это возмущение энтропии при постоянных значениях остальных магнитогидродинамич. величин. Это возмущение переносится вместе со средой.

Лит.: [1] Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, М., 1962; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1982; [3] Половин Р. В., Демуцкий В. П., Основы магнитной гидродинамики, М., 1987.

В. П. Демуцкий, Р. В. Половин.

МАГНИТОЗВУКОВАЯ ВОЛНА – см. *Магнитной гидродинамики уравнения, Магнитогидродинамические волны.*

МАГНИТОМЕХАНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ – см. *Спин.*

МАГНУСА ЭФФЕКТ – см. *Гироскопа математическая теория.*

МАЗУРА ТЕОРЕМА – см. *Черная дыра*; теорема единственности.

МАИЕВСКОГО УСЛОВИЕ – см. *Гироскопа математическая теория.*

МАЙЕРА МЕТОД – см. *Статистической физики математические задачи.*

МАЙЕРА РАЗЛОЖЕНИЕ – представление давления p и плотности ρ в системе бесконечного числа частиц в виде рядов по степеням активности z:

$$p = kT\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad \rho = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^n.$$

Коэффициенты b_n выражаются через *Майера функции* f и представляют собой сумму вкладов связных диаграмм. Введены Дж. Майером [1]. Впервые доказательство сходимости М. р. было получено Н. Н. Боголюбовым и Б. И. Хацетом [2] (см. также [3]) для канонич. ансамбля и Дж. Лебовицем и О. Пенроузом [4] для большого канонич. ансамбля. В работе Д. Бриджеса и Р. Федербуша [5] была получена новая форма М. р., где коэффициенты b_n представляются в виде суммы вкладов графов-«деревьев», что значительно облегчает доказательство сходимости разложений.

Лит.: [1] Mayer J. E., «J. Chem. Phys.», 1937, v. 5, p. 67; [2] Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И., «Доклады АН СССР», 1949, т. 66, № 3, с. 321–24; [3] Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И., «Теоретич. и математич. физика», 1969, т. 5, № 2, с. 251; [4] Lebowitz J. L., Penrose O., «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 841; [5] Brydges D., Federbush P., там же, 1978, v. 19, p. 2064.

А. Л. Ребенко.

МАЙЕРА УРАВНЕНИЕ – неоднородная система линейных интегральных уравнений относительно последовательности равновесных *распределения вероятностей частичных функций.*

Пусть $X=(x_1, \ldots, x_m)$, $Y=(y_1, \ldots, y_n)$, $V=(v_1, \ldots, v_k)$, где $x_1, \ldots, x_m$; $y_1, \ldots, y_n$; $v_1, \ldots, v_k$ – векторы пространства $\mathbb{R}^d$, $d=1, 2, 3$, задающие координаты соответствующих частиц; $U(X)$, $U(Y)$, $U(X; Y)$ – потенциальные энергии соответствующих групп частиц, определяемые парным потенциалом взаимодействия Φ;

$$W(X;\ Y) = U(X;\ Y) - U(X) - U(Y)$$

– потенциальная энергия взаимодействия групп частиц X с группой частиц Y;

$$K(X,Y) = \prod_{i=1}^{k}(e^{-\beta W(X;v_i)} - 1) = \prod_{i=1}^{k}(e^{-\beta\sum_{j=1}^{m}\Phi(x_j - v_i)} - 1).$$

В этих обозначениях М. у. в ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ с объемом $V(\Lambda) < \infty$ имеют вид:

$$F_{\Lambda,\, n+m}(X;Y) = \chi_\Lambda(x) z^m e^{-\beta U(X) - \beta W(X;Y)} \times$$
$$\times\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{\Lambda^k} dv_1 \ldots dv_k\, K(X;V) F_{\Lambda,\, m+k}(Y;V)\right],$$

где $\chi_\Lambda(X)$ – характеристич. функция множества Λ^m, $\beta = 1/kT$ – обратная температура, а z – активность. М. у. во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ имеют вид:

$$F_{n+m}(X;Y) = z^m e^{-\beta U(X) - \beta W(X;Y)} \times$$
$$\times\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{(\mathbb{R}^d)^k} dv_1 \ldots dv_k\, K(X;V) F_{n+k}(Y;V)\right].$$

М. у. получены (путем тождественных преобразований) из определения последовательности распределения вероятностей частичных функций конфигурацией *большого канонического ансамбля*:

$$F_{\Lambda,m}(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Xi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{n+m}}{n!} \times \right. & \\ \left. \times \int_{\Lambda^n} dx_{m+1} \ldots dx_{m+n} e^{-\beta U(x_1, \ldots, x_{n+m})}\right], & X \in \Lambda^m, \\ 0, & X \notin \Lambda^m, \end{cases}$$

где Ξ – большая статистич. сумма. То есть М. у.– это тождества, однако их удобно рассматривать как уравнения относительно функций распределения, что дает возможность исследовать свойства этих функций при различных значениях активности z и обратной температуры β.

Частным случаем М. у. является *Майера – Монтролла уравнения* ($Y=\varnothing$ – пустое множество) и *Кирквуда – Зальцбурга уравнения* ($m=1$), к-рые используются чаще. М. у. могут быть получены m-кратной итерацией уравнения Кирквуда – Зальцбурга и, следовательно, решения его являются одновременно решениями М. у.

При малых z решение М. у. единственно. О случае произвольных z см. в ст. *Равновесные функции распределения* при произвольных значениях термодинамич. параметров.

Лит.: [1] Mayer J. E., «J. Chem. Phys.», 1947, v. 15, p. 187; [2] Ruelle D., «Comm. Math. Phys.», 1970, v. 18, p. 127; [3] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985.

П. В. Малышев.

МАЙЕРА ФУНКЦИЯ – функция вида

$$f(r_{ij}) = \exp(-\beta V_{ij}) - 1,$$

где $V_{ij} = V(r_{ij})$, $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ – потенциал парного взаимодействия i-й и j-й частиц, β – обратная температура. М. ф. возникает при разложении свободной энергии классич. системы из N частиц в ряд по плотности (групповое разложение).

Лит.: [1] Mayer J., «J. Chem. Phys.», 1937, v. 5, № 1, p. 67; [2] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966.

Д. П. Санкович.

МАЙЕРА – МОНТРОЛЛА УРАВНЕНИЯ – неоднородная система линейных интегральных уравнений относительно корреляционных функций $\rho_\Lambda(x)_n$ при $n \geqslant 1$:

$$\rho_\Lambda(x)_m = \chi_\Lambda(x)_m z^m \exp[-\beta U(x)_m] \times$$
$$\times\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\Lambda^k} d(y)_n K((x)_m, (y)_m)\rho_\Lambda(y)_n\right],$$

где

$$K((x)_m, (y)_n) = \prod_{j=1}^{n}\left[\left(\prod_{i=1}^{m}\exp(-\beta\Phi(y_j - x_i))\right) - 1\right],$$

$\Phi(x)=\Phi(|x|)$, $x\in\mathbb{R}^d$ – устойчивый и регулярный парный потенциал взаимодействия классич. тождественных частиц, находящихся в состоянии статистич. равновесия при температуре β^{-1}, активности z в сосуде $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$,

$$U(x)_n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\Phi(x_j-x_i),\quad (x)_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbb{R}^d$, $\chi_\Lambda(x)_n=\prod_{i=1}^n\chi_\Lambda(x_i)$, $\chi_\Lambda(x_i)$ – характеристич. функция ограниченного измеримого по Лебегу множества $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$. М.–М. у., наряду с *Кирквуда – Зальцбурга уравнениями*, используют для изучения предела корреляционных функций при $|\Lambda|\to\infty$. М.–М. у. особенно полезны при изучении положительных потенциалов или потенциалов с твердой сердцевиной.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1971; [2] Penrose O., «J. Math. Phys.», 1963, № 4, p. 1312–20; [3] Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И., «Доклады АН СССР», 1949, т. 66, № 3, с. 321–24.

Д. П. Санкович.

МАЙОРАНОВСКИЙ СПИНОР – см. *Спинор.*

МАКДОНАЛЬДА ФУНКЦИИ – см. *Цилиндрические функции.*

МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРИНЦИП – феноменологическое утверждение, выражающее экспериментальный факт, что интенсивные величины статистической механики остаются неизменными для всех макроскопически эквивалентных систем. Пусть реальная макроскопич. система находится в объеме V. С этой системой связывается последовательность систем, нумеруемых индексом k, отличающихся от исходной системы своими объемами V_k. При этом предполагается, что граничные условия выбраны в надлежащем масштабе, обеспечивающем такую же симметрию, как и у исходной системы. Пусть a_k – значение нек-рой интенсивной величины в k-й системе. Согласно М. э. п.

$$a_k=a+a'_k(V_k),\qquad (*)$$

где a не зависит от размера системы, а остаточный член $a'_k(V_k)\to 0$ при $V_k\to\infty$. В реальных системах сходимость в (*) является весьма быстрой. В настоящее время наиболее строгой математич. формулировкой М. э. п. является понятие *термодинамического предела*, лежащее в основе современной статистич. механики.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978; [2] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984; [3] Рюэль Д., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1971.

Д. П. Санкович.

МАКРОТУРБУЛЕНТНОСТЬ – см. *Геофизическая турбулентность.*

МАКСВЕЛЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – распределение по скоростям частиц (молекул) макроскопической физической системы, находящейся в статистическом равновесии, в отсутствие внешнего поля при условии, что движение частиц подчиняется законам классической механики. Установлено Дж. Максвеллом (J. Maxwell) в 1859. Согласно М. р., вероятное число частиц в единице объема, компоненты скоростей к-рых лежат в интервалах от v_x до v_x+dv_x, от v_y до v_y+dv_y и от v_z до v_z+dv_z, равно

$$dw_v=f(v)dv_xdv_ydv_z,$$

где

$$f(v)=n(m/2\pi kT)^{3/2}\exp\left[-m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/2kT\right]$$

– функция распределения Максвелла по скоростям, n – число частиц в единице объема, m – масса частицы, T – абсолютная температура. Отсюда следует, что число частиц, абсолютные значения скоростей к-рых лежат в интервале от v до $v+dv$, равно

$$dw_v=F(v)dv=n(m/2\pi kT)^{3/2}\exp[-mv^2/2kT]4\pi v^2dv.$$

Это распределение называется распределением Максвелла по абсолютным значениям скоростей. Функция $F(v)$ достигает максимума при скорости

$$v_в=(2kT/m)^{1/2},$$

называемой наиболее вероятной скоростью. Для молекул H_2 при $T=273$ К $v_в\sim 1500$ м/с. При помощи М. р. можно вычислить среднее значение любой функции от скорости молекул: средний квадрат скорости

$$\langle v^2\rangle=3\,kT/m,$$

среднюю квадратичную скорость

$$v_{кв}\equiv\langle v^2\rangle^{1/2}=(3kT/m)^{1/2},$$

среднюю арифметическую скорость

$$\langle v\rangle=(8kT/\pi m)^{1/2},$$

к-рая в $(4/\pi)^{1/2}$ раза больше $v_в$.

М. р. по относительным скоростям молекул u имеет вид:

$$dw_u=n(m/4\pi kT)^{3/2}\exp(-mu^2/4kT)4\pi u^2du,$$

откуда следует, что средняя относительная скорость молекул равна

$$\langle u\rangle=\sqrt{2}\,\langle v\rangle.$$

М. р. не зависит от взаимодействия между молекулами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классич. описание. В случае многоатомных молекул М. р. имеет место для поступательного движения молекул (для скорости их центра тяжести) и не зависит от внутримолекулярного движения и вращения даже в том случае, когда для них необходимо квантовое описание. М. р. справедливо для броуновского движения частиц, взвешенных в жидкости или газе.

Дж. Максвелл использовал для обоснования М. р. принцип детального равновесия. М. р. можно получить из канонич. *Гиббса распределения* для классич. системы, интегрируя по всем пространственным координатам и по всем скоростям, кроме одной, так как в классич. случае распределение по скоростям не зависит от распределения по пространственным координатам. М. р. является частным решением *Больцмана кинетического уравнения* для случая статистич. равновесия в отсутствие внешних полей. М. р. обращает в нуль интеграл столкновения этого уравнения, выражающего баланс между прямыми и обратными столкновениями. Во внешнем потенциальном поле имеет место распределение Максвелла–Больцмана (см. *Больцмана распределение*). М. р. – предельный случай *Бозе – Эйнштейна распределения* и *Ферми – Дирака распределения* в случае, когда можно пренебречь явлением квантового вырождения газа. М. р. подтверждено экспериментально О. Штерном (O. Stern, 1920) в опытах с молекулярными пучками от источника, помещенного внутри вращающейся цилиндрич. поверхности, и позднее (1947) в опытах И. Эстермана (I. Estermann), О. Симпсона (O. Simpson) и О. Штерна по свободному падению молекул пучка под действием силы тяжести.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976, § 22; [2] Рамзей Н., Молекулярные пучки, пер. с англ., М., 1960; [3] Сивухин Д. В., Общий курс физики, 2 изд., т. 2 – Термодинамика и молекулярная физика, М., 1979, § 72–74; [4] Хир К., Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы, пер. с англ., М., 1976, гл. 1.

Д. Н. Зубарев.

МАКСВЕЛЛА ТЕНЗОР – см. *Ньюмена – Пенроуза формализм.*

МАКСВЕЛЛА УРАВНЕНИЕ – см. *Вариационное исчисление в целом.*

МАКСВЕЛЛА УРАВНЕНИЯ – система уравнений для вычисления напряженностей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и индукций $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ электрического и магнитного полей при известных плотностях заряда ρ и стороннего тока $\boldsymbol{j}$. Эта система включает уравнения

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{c\partial t},\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi\boldsymbol{j}}{c}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{c\partial t},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$$

и связи $\boldsymbol{D}$ с $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ с $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{J}$ с $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$, называемые материальными уравнениями. Установлены Дж. Максвеллом

(J. Maxwell, 1864). В зависимости от свойств среды материальные уравнения могут быть линейными или нелинейными, локальными или интегральными. М. у. для циркуляций E, H и потоков B, D установлены экспериментально и считаются справедливыми для кусочно непрерывных полей. Различные формы М. у., допускаемые ими группы и соответствующие законы сохранения см. в [2].

Лит.: [1] Максвелл Дж. К., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, пер. с англ., М., 1952, с. 251–345; [2] Туров Е. А., Материальные уравнения электродинамики, М., 1983; [3] Фушич В. И., Никитин А. Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, 1983. *А. И. Кириллов.*

МАКСВЕЛЛА УРАВНЕНИЯ; асимптотические решения – решения *Максвелла уравнений*, имеющие форму асимптотических разложений по последовательности функций $f_n(\theta)$, обладающих свойствами $f_n'(\theta)=f_{n-1}(\theta)$ и $f_n(\theta)\ll f_{n-1}(\theta)$. В случае высокочастотных гармонич. полей

$$f_n(\theta)=\exp(-i\omega\theta)(-i\omega)^{-n},$$

где $\omega\gg 1$ – безразмерная частота, $\theta=t-\tau(M)$, $M=(x_1, x_2, x_3)$; t, x_1, x_2, x_3 – безразмерное время и пространственные переменные. Для описания поведения нестационарной электромагнитной волны в окрестности ее фронта $\theta=t-\tau(M)=0$ применяются разложения по функциям $f_n(\theta)$ со сглаживающимися сингулярностями при $\theta=0$. Напр., $f_0(\theta)=\chi(\theta)$ – функция Хевисайда, $f_1(\theta)=\int\chi(\theta)d\theta=\theta\chi(\theta)$ и т. д.

Высокочастотное асимптотич. решение М. у.

$$\operatorname{rot} H=\varepsilon\partial E/\partial t,\ \operatorname{rot} H=-\mu\partial H/\partial t,$$

где $\varepsilon=\varepsilon(M)$ – диэлектрическая, а $\mu=\mu(M)$ – магнитная проницаемости, ищется в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} H&=\sum_{s=0}^{\infty}H_s(M)(-i\omega)^{-s}\exp[-i\omega(t-\tau(M))],\\ E&=\sum_{s=0}^{\infty}E_s(M)(-i\omega)^{-s}\exp[-i\omega(t-\tau(M))].\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Коэффициенты E_s, H_s определяются из рекуррентной системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon E_s+[\operatorname{grad}\tau, H_s]=\operatorname{rot} H_{s-1},\\ &-\mu H_s+[\operatorname{grad}\tau, E_s]=\operatorname{rot} E_{s-1}, s\geqslant 0,\quad E_{-1}=H_{-1}\equiv 0,\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

к-рая получается при подстановке (1) в М. у. и приравнивания нулю коэффициентов при $1/(-i\omega)$. Однородная система (2) при $s=0$ имеет отличное от нуля решение $E_0\perp H_0$, $E_0\perp\operatorname{grad}\tau$, $H_0\perp\operatorname{grad}\tau$, только если функция $\tau(M)$ удовлетворяет уравнению эйконала $(\operatorname{grad}\tau)^2=h^2(M)$, где $h=\sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель преломления среды. Благодаря отсутствию дисперсии фазовая и групповая скорости совпадают и равны $v(M)=c/h(M)$, где c – скорость света.

Решение уравнения эйконала может быть записано в виде интеграла

$$\tau(M)=\int_{M_0}^{M}h(M)\,ds,$$

вычисляемого вдоль экстремали. Так как экстремали (лучи) ортогональны фазовым фронтам $\tau(M)-t=\text{const}$, электромагнитная волна в нулевом приближении имеет поперечный характер и, следовательно, векторы E_0 и H_0 могут быть разложены по главной нормали n и бинормали b к лучу:

$$E_0=\sqrt{\mu}\,\Psi_0(\cos\nu n+\sin\nu b),$$

$$H_0=\sqrt{\varepsilon}\,\Psi_0(-\sin\nu n+\cos\nu b).$$

Условия разрешимости неоднородной системы (2) для E_1 и H_1 порождают систему уравнений, из к-рой находятся Ψ_0 и угол ν. В лучевых координатах τ, α, β (α и β задают луч, проходящий через точку M, τ определяет ее положение на луче)

$$\Psi_0=\psi_0(\alpha,\beta)/\sqrt{h(M)J(M)},\quad d\nu/ds=T,$$

где

$$J(M)=h(M)\left|\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(\tau,\alpha,\beta)}\right|$$

– геометрич. расходимость поля лучей, $\psi_0(\alpha,\beta)$ – произвольная функция, постоянная на луче, T – кручение луча, $ds=d\tau/h(M)$ – элемент дуги луча. Формула для Ψ_0 допускает простую энергетич. интерпретацию: энергия электромагнитной волны в нулевом (геометро-оптическом) приближении остается постоянной в бесконечно малом отрезке лучевой трубки при его перемещении со скоростью $v(M)$ вдоль трубки. Соотношение $d\nu/ds=T$, называемое законом Рытова, дает скорость вращения плоскости поляризации электромагнитной волны относительно главной нормали при распространении волны вдоль луча. Если пространство x_1, x_2, x_3 рассматривать как риманово многообразие с метрич. тензором $g_{ik}=h^2(M)\delta_{ik}$, то лучи – геодезич. линии на этом многообразии, а соотношение $d\nu/ds=T$ означает параллельный перенос E_0 и H_0 вдоль геодезической.

Последующие коэффициенты E_s, H_s, $s\geqslant 1$, находятся как решения системы (2), удовлетворяющие условиям разрешимости неоднородной системы (2) для векторов E_{s+1} и H_{s+1}. Векторы E_s, H_s, $s\geqslant 1$, и $\operatorname{grad}\tau$ уже не являются взаимно ортогональными, так что высокочастотная электромагнитная волна в неоднородной среде имеет поперечный характер только в геометро-оптич. приближении.

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972. *В. С. Булдырев.*

МАКСВЕЛЛА – БОЛЬЦМАНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – статистически равновесная функция распределения $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ по импульсам $\boldsymbol{p}$ и координатам $\boldsymbol{r}$ частиц (атомов, молекул) идеального газа, которые подчиняются классической механике и находятся во внешнем потенциальном поле:

$$f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})=A\exp\{-(\boldsymbol{p}^2/2m+U(\boldsymbol{r}))/kT\}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{p}^2/2m$ – кинетическая энергия частицы с массой m, $U(\boldsymbol{r})$ – ее потенциальная энергия во внешнем поле, T – абсолютная температура газа. Постоянная A определяется из условия, что суммарное число частиц по всем возможным состояниям равно полному числу частиц N в системе (условие нормировки).

М.–Б. р. есть следствие статистики Больцмана идеального газа, находящегося во внешнем потенциальном поле [Л. Больцман (L. Boltzman), 1868–71]. Частным случаем М.– Б. р. при $U(\boldsymbol{r})=0$ в формуле (1) является распределение Максвелла по скоростям [Дж. Максвелл (J. Maxwell), 1859]:

$$f(v)=n\left(m/2\pi kT\right)^{3/2}\exp\left\{-m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/2kT\right\}, \quad (2)$$

где n – число частиц в единице объема.

Распределением Максвелла называется распределение $F(v)$ частиц по абсолютным значениям скоростей v:

$$dn=F(v)\,dv=4\pi n(m/2\pi kT)^{3/2}\exp(-mv^2/2kT)v^2dv. \quad (3)$$

Оно достигает максимума при скорости $v_m=\sqrt{2kT/m}$, называемой наиболее вероятной скоростью. Для молекулярного водорода при $T=273$ К $v_m=1506$ м/с. При помощи (3) можно вычислить среднее значение любой функции от скорости, напр. среднюю скорость $\bar{v}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}v_m$, среднюю квадратичную скорость $\bar{v}^2=3kT/m$.

М.– Б. р. можно получить из *Гиббса распределения* для газа, подчиняющегося классич. статистич. механике, в к-ром взаимодействием частиц можно пренебречь.

М.– Б. р. не зависит от взаимодействия между частицами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классич. описание. Оно справедливо

также для броуновских частиц, взвешенных в жидкости. М.– Б. р. есть решение *Больцмана кинетического уравнения* для частного случая статистич. равновесия.

М.– Б. р., проинтегрированное по всем скоростям частиц, называется функцией распределения Больцмана:

$$n(\boldsymbol{r}) = n_0 \exp(-U(\boldsymbol{r})/kT),$$

где n_0 – плотность числа частиц системы в отсутствие внешнего поля. Отношение плотностей числа частиц в различных точках пространства зависит от разности потенциальной энергии для этих точек:

$$n_1/n_2 = \exp(-\Delta U(\boldsymbol{r})/kT), \qquad (4)$$

где $\Delta U(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r}_1) - U(\boldsymbol{r}_2)$. В частности, из (4) следует барометрич. формула, определяющая отношение плотностей молекул газа для двух точек в поле тяготения над земной поверхностью. В этом случае $\Delta U = mgh$, где g – ускорение свободного падения, h – высота над земной поверхностью.

М.– Б. р. справедливо, когда среднее расстояние между частицами значительно больше длины волны де Бройля, соответствующей тепловой скорости.

Лит.: [1] Руммер Ю. Б., Рывкин М. Н., Термодинамика, статистическая физика и кинетика, М., 1977, гл. 3, 4; [2] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966, гл. 4.

Д. Н. Зубарев.

МАКСВЕЛЛА – БОЛЬЦМАНА СТАТИСТИКА – статистический метод описания физических свойств систем большого числа невзаимодействующих частиц (подчиняющихся классической механике) во внешнем потенциальном поле.

М.– Б. с. представляет собой предельный случай квантовых *Ферми – Дирака статистики* и *Бозе – Эйнштейна статистики* при высоких температурах, когда квантовыми эффектами можно пренебречь.

М.– Б. с. описывается равновесной функцией распределения $f(\vec{p}, \vec{q})$ (распределением Максвелла – Больцмана) по импульсам $\vec{p}$ и координатам $\vec{q}$ частиц:

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = A \exp\left\{\frac{-\frac{p^2}{2m} + U(\vec{q})}{kT}\right\},$$

где k – постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град), T – абсолютная температура, m – масса частицы, $U(\vec{q})$ – потенциальная энергия частицы во внешнем поле, A – константа нормировки, определяемая из условия

$$\iint f(\vec{p}, \vec{q})\, d^3\vec{q}\, d^3\vec{v} = N,$$

где $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$, $d^3\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$, N – число частиц.

Предельный случай М.– Б. с. при $V = 0$ называется распределением Максвелла, а проинтегрированная по импульсам М.– Б. с., представляющая плотность числа частиц в точке $\vec{q}$, – распределением Больцмана.

Лит.: [1] Майер Д. Э., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1980.

М. А. Сташенко.

МАКСИМУМА МОДУЛЯ ПРИНЦИП – теорема, выражающая одно из основных свойств модуля *аналитической функции*. Пусть $f(z)$ – регулярная аналитическая, или голоморфная, функция n комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $n \geqslant 1$, в области D комплексного числового пространства $\mathbb{C}^n$, отличная от константы, $f(z) \neq \text{const}$. М. м. п. в локальной форме утверждает, что ни в какой точке $z^0 \in D$ не может достигаться локальный максимум модуля $f(z)$, то есть не существует окрестности $V(z^0)$ точки z^0, в к-рой выполняется неравенство

$$|f(z)| \leqslant |f(z^0)|, \; z \in V(z^0).$$

Если, кроме того, $f(z^0) \neq 0$, то z^0 не может быть и точкой локального минимума модуля $f(z)$. Равносильная формулировка М. м. п. в глобальной форме состоит в том, что при тех же условиях модуль аналитич. функции $f(z)$ не может достигать своей верхней грани

$$M = \sup\{|f(z)| : z \in D\}$$

ни в какой точке $z^0 \in D$. Следовательно, если $f(z)$ непрерывна в конечной замкнутой области D, то наибольшее значение M достигается только в граничных точках области D. Приведенные формулировки М. м. п. сохраняют силу и в том случае, если $f(z)$ – голоморфная функция на связном комплексном (аналитическом) многообразии, в частности на римановой поверхности или на римановой области D.

М. м. п. допускает обобщения в различных направлениях. Во-первых, вместо голоморфности $f(z)$ достаточно предположить только, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ – (комплексная) *гармоническая функция*. Другое обобщение связано с тем, что для голоморфной функции $f(z)$ модуль $|f(z)|$ есть логарифмически *субгармоническая функция*. Если $f(z)$ – ограниченная голоморфная функция в конечной области $D \subset \mathbb{C}^n$ и условие

$$\limsup\{|f(z)| : z \to \zeta, \; z \in D\} \leqslant M$$

выполняется для всех точек $\zeta \in \partial D$, кроме точек нек-рого множества $E \subset \partial D$ внешней *емкости* нуль (в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$), то $|f(z)| \leqslant M$ всюду в D. См. также *Фрагмена – Линделефа теорема*.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1–2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

МАКСИМУМА РАБОТЫ ПРИНЦИП Четаева – один из *вариационных принципов классической механики*. См. *Четаева принцип* максимума работы.

МАЛАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА – см. *Статистический ансамбль*.

МАЛОЙ ПЛОТНОСТИ ПРЕДЕЛ – см. *Больцмана – Грэда предел*.

МАЛОМЕРНЫЙ ТОР – см. *КАМ-теория*.

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ – выражения, стоящие в знаменателях дробей, в виде которых получаются коэффициенты рядов, используемых для отыскания решений разного рода уравнений. Чаще всего это либо дифференциальные уравнения, либо уравнения, к-рым удовлетворяют замены, нормализующие дифференциальные уравнения. М. з. образуют многоиндексную, вообще говоря, последовательность с теми же индексами, что и у членов соответствующих рядов. М. з. действительно часто малы, что приводит к расходимости получаемых рядов (проблема малых знаменателей), к-рые называются формальными решениями задачи. Несмотря на расходимость, и формальные решения позволяют получать определенную информацию о настоящих решениях. Равенство нулю М. з. (указывающее на *резонанс*) является препятствием к построению даже формального решения в данном виде.

В основном используются либо степенные ряды (ряды Тейлора), либо ряды Фурье, либо ряды Пуассона – «смеси» рядов Тейлора и Фурье. Одна из основных ситуаций – отыскание замены, приводящей к нормальной форме систему дифференциальных уравнений в окрестности индивидуального «приведенного» инвариантного тора с условно периодич. движением, точнее, систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \Lambda x + R_2(x, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \omega + S_1(x, \varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, Λ – постоянная диагональная матрица с набором собственных значений

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0, \; \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) = \text{const} \neq 0.$$

Возмущение R_2 имеет второй порядок малости по x, а S_1 – первый: $R_2 \sim |x|^2$, $S_1 \sim |x|$. Разлагая j-ю компоненту

$R_2=(R_2^1, ..., R_2^n)$ в ряд Пуассона, удобно записывать ее в виде произведения

$$R^j = x_j \sum r_{jkl} x^k \exp i(l,\varphi),$$

а с S_1 этого делать не нужно. Частным случаем такой ситуации является окрестность особой точки ($m=0$) и замкнутой траектории ($m=1$). Нерезонансной нормальной формой называется система вида (1) с $R_2\equiv 0$ и $S_1\equiv 0$. М. з. для такой формы имеют вид:

$$d_{kl}=i(l,\omega)+(k,\lambda)=il_1\omega_1+...+il_m\omega_m+k_1\lambda_1+...+k_n\lambda_n,$$

где $l\in\mathbb{Z}^m$, а $|k|=k_1+...+k_n\geqslant 1$ и $k+e_j\in\mathbb{Z}_+^n$, $j=1, ..., n$, то есть компоненты векторов $k+e_j$ целые и неотрицательные ($e_j=(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ – единичный вектор с 1 на j-м месте).

Резонанс (то есть равенство нулю хотя бы одного d_{kl}) является препятствием к формальному приведению системы к такой нормальной форме. В резонансном случае эти препятствия снимаются рассмотрением более сложных резонансных нормальных форм. Эти формы имеют вид (1), в к-ром разложения R_2 и S_1 Пуассона содержат лишь резонансные мономы, то есть слагаемые рядов с индексами k, l, для к-рых $i(l,\omega)+(k,\lambda)=0$. В замене, приводящей к резонансной нормальной форме, слагаемые с такими индексами k, l перестают быть нужными.

Для сходимости опасным является случай, когда многоиндексная последовательность М. з. имеет нуль предельной точкой. Он называется случаем Зигеля, а противоположный – случаем Пуанкаре. В зигелевом случае для обеспечения сходимости нужно дополнительно накладывать условия сильной несоизмеримости Зигеля. Вопросы, связанные со сходимостью, подробно исследованы в [2], [1].

Проблема М. з. появилась в небесной механике при изучении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, то есть систем с функциями Гамильтона вида

$$H=H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\varphi),$$

где $\varepsilon\ll 1$, $I=(I_1, ..., I_m)$, а функция H_1 периодична по $(\varphi_1, ..., \varphi_m)=\varphi$ с периодом 2π (I, φ – переменные действие – угол). Расслоенная на инвариантные торы $I=\text{const}$ невозмущенная система ($\varepsilon=0$) служит нерезонансной нормальной формой. В этой ситуации М. з. имеют вид $(l, \omega(I))$, где $l\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}$, $\omega(I)=\partial H_0(I)/\partial I$. Таким образом, в отличие от более простого случая систем (1), М. з. здесь не константы, а функции, зависящие от переменных I. В общем случае они обращаются в нуль на всюду плотном множестве. Выход, предложенный А. Н. Колмогоровым, В. И. Арнольдом и Ю. Мозером (см. *КАМ-теория* и [3]), грубо говоря, состоит в наложении условия Зигеля сильной несоизмеримости: $|(l,\omega(I))|>c|l|^{-\nu}$ для всех $l\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}$, где $\nu\geqslant m+1$. Это условие выделяет в фазовом пространстве системы при малых ε множество инвариантных торов с нерезонансными условно периодич. движениями (см. *Обмотка тора*), называемое колмогоровским, мера дополнения к к-рому мала вместе с ε.

Другой подход к исследованию таких систем предложен в [4]. Все фазовое пространство разбивается на зависящие от ε блоки, в каждом из к-рых функция Гамильтона приводится к почти нормальной резонансной, вообще говоря, форме. В такой форме отсутствуют нерезонансные гармоники лишь не очень больших порядков

$$|l|=|l_1|+...+|l_m|\leqslant N,$$

где $N(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to\infty$. Это снимает проблему М. з., так как обычная нормализующая замена как бы не доводится до конца. Такое разбиение позволяет проводить оценки устойчивости по переменным действиям I в течение экспоненциально больших по сравнению с $1/\varepsilon$ промежутков времени для всех начальных условий, и, в целом, получать информацию о поведении решений и их устойчивости.

Существует много ситуаций, весьма похожих на приведенные выше, напр. исследование окрестности неподвижной точки отображения, окрестности индивидуального тора гамильтоновой либо общей системы, не зависящей либо зависящей от параметров, отыскание интегральных многообразий и т. д. Имеются и параллельные теории (см. [1] – [4]). Эти уравнения и отображения можно охарактеризовать как близкие к интегрируемым.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С., в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 1, М., 1985; [2] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979; [3] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, М., 1985; [4] Нехорошев Н. Н., «Успехи математич. наук», 1977, т. 32, в. 6, с. 5–66.

Н. Н. Нехорошев.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ (в узком смысле) – то же, что линейные колебания, то есть движения, описываемые системой

$$\ddot{x}=-Ax,$$

где $x=(x_1, ..., x_n)\in\mathbb{E}^n$, A – положительно определенная симметричная матрица порядка n.

В широком смысле М. к. – движения в возмущенной системе

$$\ddot{x}=-Ax+R_2(x,\dot{x}),$$

где возмущение R_2 мало в том или ином смысле. Значение системы $\ddot{x}=-Ax$ определяется, в частности, тем, что она является линеаризацией консервативной системы с n степенями свободы вблизи положения равновесия, отвечающего «дну ямы» – точке невырожденного минимума потенциальной энергии. Уравнению $\ddot{x}=-Ax$ можно придать вид консервативного уравнения Ньютона $\ddot{x}=-\partial U/\partial x$, взяв $U=(Ax, x)/2$, и лагранжева уравнения с функцией Лагранжа $L=T-U$, взяв $T=(\dot{x},\dot{x})/2$.

Основой теории линейных колебаний является представимость n-мерных колебаний в виде прямого произведения n одномерных. Точнее, любая система $\ddot{x}=-Ax$ линейной ортогональной заменой переменных $x=Sy$ приводится к виду $\ddot{y}_i=-\lambda y_i$, $i=1, ..., n$, где $\lambda_i>0$ – собственные значения матрицы A, а S – матрица перехода к собственному базису оператора, задаваемого A, $SS^\top=E$, где E – единичная матрица, а $S^\top$ – транспонированная S. Иначе говоря, S – матрица перехода к главным осям квадратичной формы $U=(Ax, x)/2$. (С математич. точки зрения для такой расщепляемости достаточно существования собственного базиса у матрицы A, но тогда λ_i не обязательно положительны, а S ортогональна.)

Колебания, для к-рых все переменные $y_j(t)\equiv 0$ кроме одной при $j=i$ называются собственными (а также нормальными, главными). Эти колебания $\varphi_i(t)$, $i=1, ..., n$, являются периодическими с периодами $T_i=2\pi\sqrt{\lambda_i}$, не зависящими от амплитуд. В исходных координатах x они имеют вид:

$$\varphi_i(t)=D_i\xi^i\sin\left(\sqrt{\lambda_i}t+c_i\right),$$

где ξ^i – собственный вектор матрицы A, а D_i и c_i – константы. Любое колебание $x=\varphi(t)$ является линейной комбинацией собственных:

$$\varphi(t)=\sum\varphi_i(t,D_i,c_i)$$

(принцип суперпозиции). Движение $x=\varphi(t)$, $p=\dot{\varphi}(t)$ в фазовом пространстве $\mathbb{E}^{2n}_{x,p}$ потока эквивалентной системы $\dot{x}=p$, $\dot{p}=-Ax$ будет условно периодическим по r-мерному тору с частотами $\omega_i=\sqrt{\lambda_i}$; здесь и далее r – ранг колебаний, то есть число ненулевых амплитуд D_i ($r=0, 1, ..., n$, а для собственных колебаний $r=1$). Этот факт становится оче-

видным после перехода к нормализующим координатам y. Тор имеет вид прямого произведения r эллипсов, лежащих на 2-мерных попарно ортогональных плоскостях $\mathbb{E}^2_{y_i,\dot{y}_i}$. Эти эллипсы – уровни энергий

$$E_i = \left(\dot{y}_i^2 + \omega_i^2 y_i^2\right)/2 = \omega_i^2 |\xi^i|^2 D_i^2/2$$

составляющих собственных колебаний.

Траектории точек $x=\varphi(t)$ в конфигурационном пространстве $\mathbb{E}^n_x$ называются фигурами Лиссажу. Они являются проекциями на $\mathbb{E}^n_x$ обмоток r-мерных торов из $\mathbb{E}^{2n}_{x,p}$. Траектория собственного колебания является проекцией эллипса и имеет вид отрезка. При несоизмеримых частотах $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ на торе (то есть если $(k, \omega) = \sum k_i\omega_i = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$) траектория $x=\varphi(t)$ заметает множество, замыкание к-рого есть r-мерный параллелепипед. Его стороны параллельны натянутым на векторы ξ^i главным осям квадратичной формы $U=(Ax, x)/2$. Полное его заполнение связано с тем, что в нерезонансном случае каждая обмотка тора всюду плотна на нем.

Прямое обобщение уравнения $\ddot{x} = -Ax$ линейных колебаний – гамильтоново линейное уравнение, задаваемое диагонализуемым оператором, спектр к-рого лежит на мнимой оси (так наз. эллиптич. случай, см. [6], [1]). (О нелинейных малых собственных колебаниях см., напр., [5].) Для исследования нелинейных М. к. с произвольными начальными условиями используют приведение их в окрестности особой точки при негамильтоновом возмущении к нормальным формам Пуанкаре – Дюлака, а при гамильтоновом – к нормальным формам Биркгофа (см. [3], [1], [6], [4]). При этом приведение, как правило, формальное, то есть на уровне, вообще говоря, расходящихся рядов. Однако и это позволяет получать определенную информацию об устойчивости колебаний.

Чрезвычайно полезным оказался подход ко многим линейным задачам математич. физики, как к линейным колебаниям с бесконечным числом степеней свободы. Простейший пример – смешанная задача Коши для волнового уравнения. Линейные колебания лежат в основе и квантовой теории поля.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1989; [2] его же, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1984; [3] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, М., 1985; [4] Карапетян А. В., Румянцев В. В., в кн.: Итоги науки и техники, Общая механика, т. 6, М., 1983; [5] Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н., Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем, М., 1989; [6] Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, пер. с англ., М., 1973.

Н. Н. Нехорошев.

МАЛЫЙ КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ – см. *Статистический ансамбль, Статистической механики математические задачи.*

МАНДЕЛСТАМА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, двойное спектральное представление,– простейшее интегральное представление для амплитуды рассеяния элементарных частиц (см. *Дисперсионных соотношений метод*) как функции инвариантных квадрата полной энергии s в системе центра масс и квадрата передачи 4-импульса t.

В простейшем случае бинарного процесса $a+b \to c+d$ (рис. 1) упругого рассеяния частиц с равными массами m (напр., двух пионов) М. п. имеет вид:

$$A(s,t) = \frac{1}{\pi^2}\iint ds'dt' \frac{\rho_{st}(s',t')}{(s'-s)(t'-t)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2}\iint du'dt' \frac{\rho_{ut}(u',t')}{(u'-u)(t'-t)} + \frac{1}{\pi^2}\iint du'ds' \frac{\rho_{su}(s',u')}{(u'-u)(s'-s)},$$

где релятивистски-инвариантные переменные

$$s=(p_a+p_b)^2,\ t=(p_a-p_c)^2,\ u=(p_a-p_d)^2$$

связаны друг с другом соотношением

$$s+u+t=4m^2$$

($p_{a,b,c,d}$ – 4-импульсы частиц a, b, c, d; используется система единиц, в к-рой $c=1$), а спектральные плотности ρ отличны от нуля только в областях I, II, III (рис. 2), так что амплитуда A аналитична при всех комплексных s и t за исключением этих вещественных областей. М. п. задает и аналитич. свойства амплитуды как функции одной комплексной переменной (s или t) – это разрезы, определяемые асимптотами границы спектральных функций; $s>4m^2$, $t>4m^2$, $u>4m^2$.

Важным свойством М. п. является его явная *перекрестная симметрия*: оно определяет единую аналитич. функцию, к-рая в разных областях переменных s, u описывает различные перекрестные процессы (рис. 2).

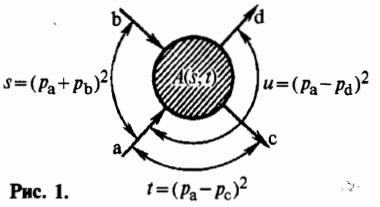


Рис. 1.

Представление предложено С. Мандельстамом (S. Mandelstam) в 1959 и строго доказано в квантовой механике с потенциалом взаимодействия определенного класса. Характерной особенностью М. п. в этом случае является нулевое значение спектральной плотности ρ_{su}. Однако в квантовой теории поля его удалось доказать лишь в рамках перенормированной теории возмущений.

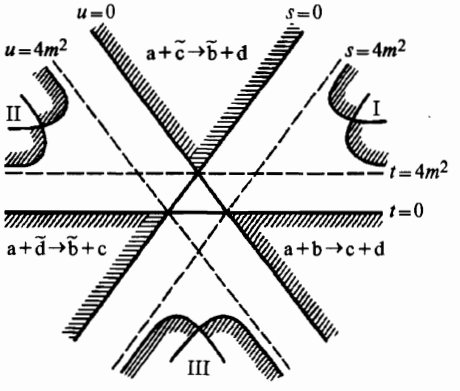


Рис. 2. Области аналитичности амплитуды процесса $a+b\to c+d$ (в случае одинаковых масс частиц). I, II, III – области, где отличны от нуля спектральные плотности ρ. Заштрихованы области перекрестных процессов.

М. п., наряду с *унитарности условием*, составляет основу дисперсионного подхода в теории элементарных частиц. Связывая амплитуды различных процессов, оно приводит к системе нелинейных интегральных уравнений. Однако возникающая система оказывается настолько широкой, что включает в себя амплитуды практически всех процессов, происходящих с элементарными частицами, и не поддается математич. разрешению. В ряде случаев с помощью различных приближений удается сузить систему и получить интересные физич. результаты. М. п. прочно вошло в арсенал аналитич. методов теории элементарных частиц и лежит в основе многих моделей.

Лит.: [1] Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А., Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях, М., 1967; [2] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [3] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 1, М., 1984. *А. В. Ефремов.*

МАНДЕЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – распределение вероятностей целочисленной случайной величины N:

$$P(n) = \mathsf{P}\{N = n\} = \int_0^\infty \frac{E^n}{n!} e^{-E} p(E)\, dE, \qquad (1)$$

где $p(E)$ – плотность распределения вероятностей для случайной величины

$$U = \int_0^T |\alpha(t)|^2\, dt,$$

$\{\alpha(t)\}$ – стационарный комплекснозначный случайный процесс, $T = \text{const}$. М. р. используется в квантовой оптике при статистич. анализе отсчетов N случайных полей излучения. Плотность $p(E)$ определяется по заданной мере, соответствующей процессу $\{\alpha(t)\}$. Если $p(E) = \delta(E - \varepsilon)$, где $\varepsilon = \text{const}$, то М. р. сводится к *Пуассона распределению*

$$P(n) = \frac{\varepsilon^n}{n!} e^{-\varepsilon}. \qquad (2)$$

В общем случае для произвольной плотности $p(E)$ распределение вероятностей $P(n)$ является составным распределением Пуассона с дисперсией $\mathsf{D} = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle E\rangle + \langle E^2\rangle - -\langle E\rangle^2$, содержащей добавочное слагаемое по сравнению с распределением (2).

По известному набору вероятностей $P(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, обращение (1) позволяет решить задачу восстановления распределения $p(E)$:

$$p(E) = 2e^{-E} \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^m C_m^n P(n)(-2)^n L_m(E),$$

где $L_m(E)$ – многочлены Лагерра.

Лит.: [1] Клаудер Дж., Сударшан Э., Основы квантовой оптики, пер. с англ., М., 1970. *А. С. Мазманишвили.*

МАРКОВА АВТОМОРФИЗМ – см. *Маркова сдвиг.*

МАРКОВА СДВИГ – сдвиг T на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ двусторонних последовательностей $\omega = \{\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\}$, где $y_i \in Y, (Y, \mathfrak{A})$ – измеримое пространство, а мера на пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ определяется стохастическим оператором $\mathsf{P}(y, C)$, $y \in Y$, $C \in \mathfrak{A}$, и инвариантной мерой σ этого оператора, задаваемой на цилиндрических множествах

$$A = \{\omega \in \Omega : y_i \in C_0,\ y_{i+1} \in C_1,\ \ldots,\ y_{i+r} \in C_r\},$$

где $C_i \in \mathfrak{A}$, $r \geqslant 0$, $-\infty < i < \infty$, равенством

$$\mu(A) = \int_{C_0} d\sigma(y_i) \int_{C_1} \mathsf{P}(y_i, dy_{i+1}) \ldots \int_{C_r} \mathsf{P}(y_{i+r-1}, dy_{i+r}).$$

Эта мера по теореме Колмогорова может быть продолжена на всю σ-алгебру $\mathscr{F}$. Часто T называют автоморфизмом Маркова. В случае конечных пространств М. с. допускает полное исследование эргодич. свойств. Так, если М. с. имеет один класс и один подкласс, то он является K-автоморфизмом и изоморфен *Бернулли сдвигу.*

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Успехи математич. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–56; [2] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980. *Е. И. Динабург.*

МАРКОВА ЦЕПЬ – *марковский процесс* со значениями из конечного или счетного множества X, которое без ограничения общности можно считать множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$. Теория М. ц. возникла на основе исследований А. А. Маркова, к-рый в 1907 положил начало изучению последовательностей зависимых испытаний и связанных с ними сумм случайных величин. Случайные величины ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, составляющие М. ц., должны обладать при любом n и любом $j < n$ так наз. марковским свойством:

$$\mathsf{P}\{\xi_n = k_n | \xi_{n-1} = k_{n-1},\ \ldots,\ \xi_{n-j} = k_{n-j}\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\xi_n = k_n | \xi_{n-1} = k_{n-1}\}.$$

В зависимости от того, является множество значений X случайных величин ξ_n конечным или бесконечным, различают М. ц. с конечным или бесконечным множеством состояний. Распределение вероятностей случайных величин, составляющих М. ц., полностью определяется распределением вероятностей

$$q_k = \mathsf{P}\{\xi_0 = k\}$$

и условными переходными вероятностями

$$\mathsf{P}\{\xi_n = k | \xi_{n-1} = j\}.$$

Если переходные вероятности не зависят от n, то М. ц. называется однородной, в противном случае – неоднородной. Однородная М. ц. характеризуется матрицей $p(n) = \|p_{jk}(n)\|$ переходных вероятностей из состояния j в состояние k за n шагов:

$$p_{jk}(n) = \mathsf{P}\{\xi_{m+n} = k | \xi_m = j\},$$

к-рая удовлетворяет уравнению Колмогорова–Чепмена:

$$p_{jk}(n_1 + n_2) = (p(n_1)p(n_2))_{jk}. \qquad (1)$$

В этом случае $p_{jk}(n) = (p^n)_{jk}$, где $\sum_{k \in X} p_{jk} = 1$, $p_{jk} = p_{jk}$ (1). В нек-рых случаях, при моделировании физич. процесса на основе М. ц., естественно рассматривать последовательность ξ_n при всех целых n, $n \in \mathbb{Z}$. Это возможно, напр., если М. ц. является эргодической, то есть существует предел

$$\lim_{n \to \infty} p_{jk}(n) = p_k.$$

В этом случае можно ввести понятие стационарной М. ц. $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, у к-рой $\mathsf{P}\{\xi_n = k\} = p_k$.

М. ц., являясь простейшими моделями случайных зависимых величин, находят применение в статистич. задачах математич. физики таких, как случайное блуждание частицы по целочисленной решетке в $\mathbb{R}^d$ или в статистич. механике решеточных систем с конечным набором фазовых состояний в узле решетки и конечным радиусом взаимодействия.

Наряду с М. ц. $\{\xi_n\}$ со счетным набором состояний X изучают также М. ц. более общего вида, когда X не является счетным. Пусть $(X, \mathfrak{B})$ – измеримое пространство. Последовательность $\{\xi_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ случайных элементов $\xi_n \in X$ называется в общем случае М. ц., если для любых $\Gamma \subset \mathfrak{B}$ и $n = 1, 2, \ldots$ распределение вероятностей на $(X, \mathfrak{B})^n$ таково, что с вероятностью 1 выполняется равенство

$$\mathsf{P}\{\xi_n \in \Gamma | \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\} = \mathsf{P}\{\xi_n \in \Gamma | \xi_{n-1}\}. \qquad (2)$$

Пространство $(X, \mathfrak{B})$ называется фазовым пространством М. ц. Из (2) следует, что для любых k, m, $0 \leqslant k \leqslant m$, имеет место с вероятностью 1 уравнение Колмогорова–Чепмена:

$$\mathsf{P}\{\xi_n \in \Gamma | \xi_k\} = \mathsf{E}\{\mathsf{P}\{\xi_n \in \Gamma | \xi_m\} | \xi_k\},$$

к-рое в случае счетности X и однородности М. ц. переходит в уравнение (1).

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2 изд., М., 1984; [2] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1973; [3] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964. *Ю. П. Вирченко.*

МАРКОВА ЦЕПЬ с непрерывным временем – *марковский процесс* $\{\xi(t),\ t \in T\}$ (T – отрезок, интервал, полуинтервал в $\mathbb{R}$), выборочные функции которого $\xi(t)$ принимают значения в конечном или счетном фазовом пространстве X. Без ограничения общности, введя нумерацию элементов множества X, можно считать, что фазовое пространство совпадает с множеством целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}$ или является его подмножеством. Пусть $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра всех подмножеств из $\mathbb{N}$, тогда стохастическое (полустохастическое) ядро $P(s, j; t, A)$; $s, t \in T, j \in \mathbb{N}, A \in \mathfrak{B}$, к-рое описывает М. ц. $\{\xi(t)\}$, удовлетворяет уравнению Колмогорова–Чепмена. Так как A не

более чем счетно, то процесс $\{\xi(t)\}$ полностью определяется значениями ядра при $A=\{k\}$, $k\in X$,

$$P(s,j;t,\{k\}) = p_{jk}(s,t),$$

$$p_{jk}(s,t)\geqslant 0, \quad \sum_{k\in X} p_{jk}(s,t)\leqslant 1,$$

$$p_{jk}(s,s)=\delta_{jk}.$$

Уравнение Колмогорова–Чепмена для матричной функции $P(s,t)=\|p_{jk}(s,t)\|$ имеет вид матричного уравнения

$$P(s,t)=P(s,u)P(u,t),$$

к-рое показывает, что она является мультипликативной функцией интервала. Матричные элементы $p_{jk}(s,t)$ суть условные переходные вероятности из состояния j в момент s в состояние k в момент t. В сочетании с распределением вероятностей $q_j(\alpha)=\mathrm{P}\{\xi(\alpha)=j\}$, где $\alpha=\min T$, они полностью определяют распределение вероятностей М. ц. с непрерывным временем на минимальной σ-алгебре множеств, порожденной всеми событиями $\{\omega\colon \xi(s)=i\}$, $i\in X$, $s\in T$. Обычно те М. ц., к-рые находят применение в статистич. задачах математич. физики, обладают свойством регулярности, а именно, для любого $t\in T$ и если X бесконечно, то равномерно по j, k справедливо равенство

$$p_{jk}(t,t+h)=(1-\nu_j(t)h)\delta_{jk}+\nu_j(t)Q_{jk}(t)h+o(h), \qquad (1)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера, причем $\nu_j(t)$ и $Q_{jk}(t)$ непрерывны справа как функции t. В этом случае выборочные функции $\xi(t)$ с вероятностью 1 кусочно постоянны с разрывами 1-го рода (скачками) и $Q_{jk}(t)$ – условная вероятность того, что случайная величина $\xi(t+0)$ равна k при условии, что в момент t произошел скачок и до скачка $\xi(t-0)=j$, $Q_{jj}(t)=0$, $\Sigma_{k\in X} Q_{jk}(t)\leqslant 1$. Функции

$$\nu_j(t)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(1-p_{jj}(t,t+h))\geqslant 0$$

являются интенсивностями вероятности перехода из состояния j. При выполнимости условия (1) справедливы дифференциальные уравнения Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{jk}(s,t)=\sum_{l\in X}p_{jl}(s,t)a_{lk}(t), \qquad (2)$$

к-рые определяют инфинитизимальное преобразование $p_{jk}(s,t)$. Здесь производные по t понимаются как правые производные и матрица коэффициентов $a_{ij}(t)$ определяется как

$$a_{ii}(t)=-\nu_i(t)\leqslant 0,$$

$$a_{ij}(t)=\nu_i(t)Q_{ij}(t)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(p_{ij}(t,t+h))\geqslant 0, \quad i\neq j.$$

Если $\nu_i(t)=0$, то состояние i называется финальным и для него $Q_{ij}(t)$ не определено. Если состояние i не является финальным, то считается, что

$$\sum_{j\in X}Q_{ij}(t)=1$$

и поэтому

$$\sum_{j\in X}a_{ij}(t)=0. \qquad (3)$$

В противном случае фазовое пространство процесса выбрано некорректно. Условие (3), в случае если X конечно, является достаточным, чтобы ядро процесса было стохастическим:

$$g_i(s,t)=\sum_{j\in X}p_{ij}(s,t)=1$$

и процесс $\{\xi(t)\}$ не обрывающимся. Если же X бесконечно, то условие (3) не гарантирует стохастичности ядра процесса и возможны случаи, когда $g_i(s,t)<1$ и процесс $\{\xi(t)\}$ – обрывающийся. Тогда $g_i(s,t)$ является невозрастающей функцией t. Этому явлению соответствует существование с ненулевой вероятностью таких траекторий $\xi(t)$, к-рые за конечное время «уходят на бесконечность». Обычно в задачах математич. физики такое положение является неестественным. Напр., в процессах «рождения и гибели» (см. *Рождения и гибели процессы*) это соответствует рождению за конечное время бесконечного числа особей. В *ветвящихся процессах* в аналогичной ситуации первоначальная частица за конечное время распадается на бесконечное число частиц.

При указанных выше свойствах функций $\nu_j(t)$, $Q_{jk}(t)$ существует так наз. минимальное решение уравнений (2) на классе неотрицательных матричных функций $p_{jk}(s,t)$. Оно является единственным при фиксированных начальных условиях, если соответствующий ему процесс – необрывающийся, $g_i(s,t)=1$. В этом случае уравнения (2) вместе с начальным условием $p_{jk}(s,s)=\delta_{jk}$ определяют матрицу переходных вероятностей. Наоборот, если это минимальное решение является полустохастич. ядром, то оно не является единственным решением уравнений (2).

При выполнении условия регулярности (1) и непрерывности слева функций $\nu_j(t)$, $Q_{jk}(t)$ вероятности $p_{jk}(s,t)$ удовлетворяют так наз. обратным дифференциальным уравнениям Колмогорова:

$$-\frac{\partial}{\partial s}p_{jk}(s,t)=\sum_{l\in X}a_{jl}(s)p_{lk}(s,t),$$

в к-рых производная по s понимается как левая производная и

$$a_{ij}(s)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(p_{ij}(s-h,s)-\delta_{ij})\geqslant 0.$$

Важным случаем М. ц. с непрерывным временем, находящим широкое применение в приложениях, являются однородные М. ц., у к-рых ν_j, Q_{jk}, $a_{jk}=\mathrm{const}$ и

$$p_{jk}(s,t)=p_{jk}(t-s).$$

Если М. ц. с непрерывным временем однородна и имеет стационарное распределение

$$q_k=\mathrm{P}\{\xi(t)=k\},$$

то есть распределение вероятностей значений $\xi(t)$ не зависит от t, то это распределение удовлетворяет следующей системе линейных уравнений:

$$\sum_{k\in X}q_k=1, \quad \sum_{l\in X}q_l a_{lk}=0, \quad k\in X.$$

В этом случае можно положить $T=(-\infty,\infty)$ и определить стационарные М. ц. с непрерывным временем, для к-рых $\alpha=-\infty$ и распределение вероятностей событий $\{\xi(t)=k\}$ в любой момент t совпадает со стационарным.

Иногда в задачах математич. физики, напр. при описании случайного блуждания частиц по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, удобнее считать, что фазовое пространство представимо в виде декартова произведения конечных или счетных множеств $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$. Тогда случайные значения, к-рые принимают выборочные функции М. ц. с непрерывным временем, нумеруются мультииндексом $k=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, $k_i\in\mathbb{N}$. Соответственно этому условные переходные вероятности являются матричной функцией с мультииндексами. В этом случае М. ц. с непрерывным временем называют многомерными.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, 2 изд., М., 1984; [2] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

Ю. П. Вирченко.

МАРКОВСКАЯ СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Марковский процесс.*

МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС – *случайный процесс* $\{\xi(t), t\in T\}$, $T\subset\mathbb{R}$, «прошлое» и «будущее» эволюции которого относительно каждого момента t не зависят друг от друга при известном значении процесса $\xi(t)$, то есть состояние системы, описываемой процессом в каждый момент времени t, определяет будущее ее эволюции в статистическом смысле независимо от того, что происходило с системой в прошлом. Это свойство взаимной независимости случайных событий, к-рые определяются значениями процесса $\xi(u)$ при $u<t$, и событий, определяющихся значениями $\xi(v)$ при $v>t$, называется марковским свойством, или

свойством отсутствия последействия. Оно является математич. выражением интуитивного представления об отсутствии «памяти» о прошлом в развитии процесса. Таким образом, М. п.— это процесс, обладающий марковским свойством.

Имеются отличающиеся друг от друга точные математич. определения марковского свойства и тем самым М. п. Наиболее употребительным в математич. физике является следующее. Пусть $(X, \mathfrak{B})$ — измеримое фазовое пространство процесса и пусть $\mathfrak{F}_t$ (либо $\mathfrak{F}^t$) — σ-алгебра событий, порожденная всеми событиями вида $\{\xi(s)\in\Gamma\}$, $s\in T$, $\Gamma\in\mathfrak{B}$, $s\leqslant t$ (либо $s\geqslant t$). Тогда марковское свойство состоит в том, что для всех t, $A_1\in\mathfrak{F}_t$, $A_2\in\mathfrak{F}^t$ и почти наверное для всех значений $\xi(t)$ выполняется равенство

$$\mathsf{P}\{A_1A_2|\xi(t)\}=\mathsf{P}\{A_1|\xi(t)\}\mathsf{P}\{A_2|\xi(t)\} \qquad (1)$$

или, что то же самое, для любого t и $A\in\mathfrak{F}^t$ с вероятностью 1 справедлива формула

$$\mathsf{P}\{A|\mathfrak{F}_t\}=\mathsf{P}\{A|\xi(t)\}. \qquad (2)$$

Это определение является непосредственным обобщением марковского свойства, отвечающего *Маркова цепи* — М. п. с дискретным временем. Чтобы отличить его от других не эквивалентных ему определений, иногда процесс $\{\xi(t)\}$, обладающий свойством (1) либо (2), называют марковской случайной функцией (точнее необрывающейся марковской случайной функцией).

Будем полагать, что М. п. задан на $[t_0, \infty)$. Следствием марковского свойства (2) и формулы полной вероятности является соотношение

$$\mathsf{P}\{\xi(t)\in\Gamma|\xi(t')\}=\mathsf{E}\{\mathsf{P}\{\xi(t)\in\Gamma|\xi(s)\}|\xi(t')\},\ t\geqslant s\geqslant t',$$

справедливое при всех $\Gamma\in\mathfrak{B}$ и почти наверное для $\xi(t')$ относительно меры, связанной с процессом. Это соотношение называется уравнением Колмогорова—Чепмена. При моделировании случайной эволюции системы в задачах математич. физики на основе марковского процесса фазовое пространство системы $(X, \mathfrak{B})$, как правило, изоморфно борелевскому подмножеству полного сепарабельного метрич. пространства с σ-алгеброй его борелевских подмножеств (в большинстве случаев $X\subset\mathbb{R}^m$). В этом случае для М. п. существует условная переходная вероятность, или стохастическое ядро, то есть такая функция $P(s, x; t, \Gamma)$, $x\in X$, $\Gamma\in\mathfrak{B}$, $s<t$, к-рая:

1) при фиксированных s, x, t является вероятностной мерой на $(X, \mathfrak{B})$;

2) $\mathfrak{B}$ — измерима при фиксированных s, t, Γ;

3) с вероятностью 1 при всех s, t, Γ

$$P(s, \xi(s); t, \Gamma)=\mathsf{P}\{\xi(t)\in\Gamma|\xi(s)\}.$$

Кроме того, в указанной ситуации уравнение Колмогорова—Чепмена, справедливое при всех $x\in X$, $\Gamma\in\mathfrak{B}$ и $t>t'$, для переходных вероятностей записывается в виде

$$P(t', x; t, \Gamma)=\int_X P(s, y; t, \Gamma)\,P(t', x; s, dy). \qquad (3)$$

Стохастич. ядро вместе с мерой

$$\mu(\Delta)=\mathsf{P}\{\xi(t_0)\in\Delta\},\ \Delta\in\mathfrak{B},$$

определяют все конечномерные распределения М. п. и, следовательно, определяют М. п. с точностью до стохастической эквивалентности, то есть М. п. в широком смысле:

$$P\{\xi(t_i)\in\Delta_i;\ i=1, \dots, n\}=$$

$$=\int_X\mu(dx_0)\int_{\Delta_1}P(t_0, x_0; t_1, dx_1)\dots\int_{\Delta_n}P(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, dx_n),$$

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\in\mathfrak{B};\ t_0<t_1<\dots<t_n.$$

Иногда приходится рассматривать системы, для к-рых определение М. п. с помощью стохастич. ядра недостаточно. Такая ситуация имеет место, напр., для *рождения и гибели процессов*, когда с ненулевой вероятностью выборочные функции процесса покидают фазовое пространство системы — происходит исчезновение процесса. Такие случайные процессы называются обрывающимися, и с их помощью моделируется случайная эволюция, приводящая к таким физич. явлениям, как обрыв, взрыв, гибель и т. д. Вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$ обрывающегося процесса строится по следующей схеме. Фазовое пространство процесса расширяется за счет добавления к X элемента $\mathfrak{i}$ и расширения σ-алгебры $\mathfrak{B}$ до σ-алгебры $\mathfrak{B}_\mathfrak{i}$; путем присоединения к ней множеств вида $A\cup\{\mathfrak{i}\}$, $A\in\mathfrak{B}$. Тогда пространство Ω реализаций процесса состоит из функций $\xi(t)$ со значениями в $X\cup\{\mathfrak{i}\}$, а σ-алгебра $\mathfrak{F}_t(\lim\limits_{t\to\infty}\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F})$ порождается всеми событиями $\{\xi(s)\in\Gamma\}$, $\Gamma\in\mathfrak{B}_\mathfrak{i}$, $s\leqslant t$. Случайное время обрыва процесса $\tau(\xi)$ в этом случае равно

$$\tau(\xi)=\inf\{t:\ \xi(t)=\mathfrak{i}\}.$$

Обрывающийся процесс $\{\xi(t)\}$, удовлетворяющий марковскому свойству (2), называется обрывающимся М. п. (обрывающейся марковской случайной функцией). При тех же предположениях относительно фазового пространства $(X, \mathfrak{B})$, что и в случае необрывающегося М. п., существует условная переходная вероятность $P(s, x; t, \Gamma)$, $x\in X\cup\{\mathfrak{i}\}$, к-рая обладает свойствами 1)—3) и удовлетворяет уравнению (3). При $x=\mathfrak{i}$ переходная вероятность равна 1, если $\mathfrak{i}\in\Gamma$, и 0, если $\mathfrak{i}\notin\Gamma$. При $x\neq\mathfrak{i}$ и $\Gamma\subset X$ функция $P(s, x; t, \Gamma)$ называется полустохастическим ядром М. п. $\{\xi(t)\}$, так как $P(s, x; t, X)<1$. При этом $[1-P(s, x; t, X)]$ есть вероятность обрыва процесса к моменту t при условии, что $\xi(s)=x$.

Примерами М. п. могут служить *винеровский процесс, пуассоновский процесс* и т. д., к-рые находят широкое применение при моделировании случайной эволюции физич. систем.

М. п. являются также решения *стохастических дифференциальных уравнений* по винеровскому процессу.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [3] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975.

Ю. П. Вирченко.

МАРКОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — см. *Марковское случайное поле.*

МАРКОВСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, динамическое отображение, — отображение, описывающее конечное изменение *наблюдаемых* или *состояний* системы в результате, вообще говоря, необратимой эволюции в алгебраической формулировке статистической механики, а также в некоммутативной теории вероятностей. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — нек-рые C^*-алгебры с единицами. Переходным отображением называется вполне положительное отображение Φ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, переводящее единицу из алгебры $\mathfrak{A}$ в единицу из алгебры $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$, то переходное отображение называется марковским отображением.

Для всякого переходного отображения существует сопряженное Φ^*, к-рое аффинно и слабо *-непрерывно отображает множество состояний $\mathfrak{S}_\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{S}_\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются W^*-алгебрами, а отображение нормально в том смысле, что

$$\sup_\alpha\Phi(X_\alpha)=\Phi(\sup_\alpha X_\alpha)$$

для любого ограниченного направленного множества самосопряженных элементов $\{X_\alpha\}\subset\mathfrak{A}$, то Φ^* переводит нормальные состояния в нормальные же.

Примеры. 1) Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ — коммутативная алгебра ограниченных измеримых функций на измеримом пространстве Ω и $\mathsf{P}(d\omega|\omega')$ — переходная вероятность в Ω. Соотношение

$$\Phi(X)(\omega')=\int_\Omega\mathsf{P}(d\omega|\omega')X(\omega),\quad X\in\mathfrak{A},$$

определяет М. о. При этом Φ^* порождает аффинное отображение в выпуклом множестве всех вероятностных мер на Ω.

2) Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(H)$ — алгебра всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H. Всякое нормальное

М. о. имеет вид

$$\Phi(X) = \sum_i V_i^* X V_i,$$

где $V_i \in \mathfrak{A}(H)$, $\sum_i V_i^* V_i = I$ – единичный оператор.

В теории квантового измерения важную роль играет понятие операции субмарковского отображения – вполне положительного отображения Φ в C^*-алгебру $\mathfrak{A}$ такого, что $\Phi(I) \leqslant I$.

Лит.: [1] Kadison R., «Topology», 1965, v. 3, suppl. 2, p. 177–98; [2] Størmer E., «Lect. Notes in Phys.», 1974, v. 29, p. 85–106; [3] Морозова Е. А., Ченцов Н. Н., Матрицы вероятностей и стохастические суперматрицы, М., 1973 (ИПМ АН СССР, препринт № 84). *А. С. Холево.*

МАРКОВСКОЕ ПОКРЫТИЕ – см. *Символическая динамика.*

МАРКОВСКОЕ ПОЛЕ – см. *Марковское случайное поле.*

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО – см. *Маркова цепь, Марковский процесс.*

МАРКОВСКОЕ СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ – *случайная функция* $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$, определенная на некотором множестве T такая, что для всякой «области» $V \subset T$ значения поля внутри V и вне V при условии, что фиксированы его значения на «границе» ∂V, условно независимы. При более подробном описании этого понятия следует различать два случая: случай дискретного множества T (графа) и случай непрерывного множества T (напр., $T = \mathbb{R}^n$).

1) М. с. п. на графе T со значениями в измеримом пространстве S – это набор $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ случайных величин ξ_t со значениями в S, определенных на нек-ром вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) и помеченных точками из T; здесь Σ – нек-рая выделенная σ-алгебра подмножеств Ω, а μ – вероятностная мера, заданная на множествах из Σ. Пусть Σ_A для любого $A \subset T$ – σ-подалгебра Σ, порожденная величинами $\{\xi_t,\ t \in A\}$, то есть минимальная σ-подалгебра Σ, относительно к-рой все эти величины измеримы. Для каждого множества $V \subset T$ его границей ∂V называется совокупность точек $t \in T$, не принадлежащих V, но соединенных хотя бы одним ребром графа T с точками из V.

Случайная функция $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ называется марковским полем на T, если для любого $V \subset T$ значения поля внутри $V - \xi_V = \{\xi_t,\ t \in V\}$ и вне $V - \xi_{V'} = \{\xi_t,\ t \in V' \equiv T \setminus V\}$ статистически независимы относительно условного распределения $\mu(\cdot\,|\Sigma_{\partial V})$, порожденного σ-алгеброй $\Sigma_{\partial V}$. Это означает, что для любых двух ограниченных функций f_V и $g_{V'}$, определенных на пространстве Ω и измеримых относительно σ-алгебр Σ_V и $\Sigma_{V'}$, соответственно, выполнено равенство

$$\langle f_V \cdot g_{V'} \rangle_{\partial V} = \langle f_V \rangle_{\partial V} \cdot \langle g_{V'} \rangle_{\partial V} \qquad (1)$$

(марковское свойство), где

$$\langle \cdot \rangle_{\partial V} \equiv \int_\Omega \cdot\, d\mu(\omega|\Sigma_{\partial V})$$

– условное среднее. Условное распределение $\mu(\cdot\,|\Sigma_{\partial V})$, то есть отображение $\omega \to \mu(\cdot\,|\omega)$ пространства Ω в совокупность вероятностных мер на Ω, измеримое относительно σ-алгебры $\Sigma_{\partial V}$ и однозначно определяемое условием

$$\int_\Omega f h d\mu = \int_\Omega h(\omega) \left[\int_\Omega f(\omega') d\mu(\omega'|\omega) \right] d\mu(\omega) \qquad (2)$$

(где f – произвольная измеримая ограниченная функция на Ω, а h – ограниченная функция, измеримая (см. [1]) относительно σ-алгебры $\Sigma_{\partial V}$), может быть представлена как набор условных распределений вероятностей

$$\mu(\cdot\,|\xi_{\partial V} = \bar{\xi}_{\partial V}) \qquad (3)$$

для значения поля ξ_V при условии, что фиксированы его значения $\xi|_{\partial V} = \xi_{\partial V}$ на границе ∂V. В случае, когда марковское свойство (1) имеет место лишь для конечных множеств $V \subset T$, случайное поле $\{\xi_t,\ t \in T\}$ называется локально марковским. Наконец, если $T = \mathbb{Z}$ и марковское свойство выполняется для любой полурешетки $V_k = \{t \in \mathbb{Z},\ t \geqslant k\}$, случайное поле называется цепью Маркова.

2) М. с. п. классическое $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется аналогично, если в качестве V рассматриваются произвольные области $V \subset \mathbb{R}^n$ (или только ограниченные области в случае локального поля), а под ∂V понимается обычная граница области V. В этом случае условное распределение $\mu(\cdot\,|\Sigma_{\partial V})$ относительно σ-алгебры $\Sigma_{\partial V}$ по-прежнему имеет наглядное представление, аналогичное (3). Если $n = 1$, а марковское свойство (1) выполняется для любой полупрямой $V_s = \{t \in \mathbb{R},\ t > s\}$, то соответствующее случайное поле в $\mathbb{R}$ называется марковским случайным процессом.

3) М. с. п. в $\mathbb{R}^n$ обобщенное – линейная случайная функция $\xi = \{\xi_\varphi,\ \varphi \in K\}$, определенная в нек-ром пространстве K основных функций (чаще всего это пространство $S(\mathbb{R}^n)$ бесконечно гладких быстро убывающих функций $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$). Если для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ через Σ_V обозначить σ-подалгебру σ-алгебры Σ, порожденную случайными величинами $\{\xi_\varphi,\ \operatorname{supp}\varphi \subset V\}$, а для любого замкнутого множества F определить Σ_F как $\cap \Sigma_V$, где пересечение берется по всем открытым множествам V, содержащим F, то определение марковского свойства обобщенного случайного поля относительно открытого множества V вводится по-прежнему формулой (1). При этом, как и раньше, это поле называется марковским, если оно обладает марковским свойством относительно любой области V. Следует отметить, что в случае обобщенных полей условное распределение $\mu(\cdot\,|\Sigma_{\partial V})$ не имеет наглядного истолкования, аналогичного предыдущим случаям, поскольку, вообще говоря, нельзя определить сужение обобщенной функции на границу ∂V. Изучение обобщенных М. с. п. в $\mathbb{R}^n$ стимулируется задачами квантовой теории поля, в к-рой существенную роль играют нек-рые специальные классы таких полей – так наз. $P(\varphi)$-модели.

Лит.: [1] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., в сб.: Задачи механики и математической физики, М., 1976, с. 117–65; [2] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976. *Р. А. Минлос.*

МАРКОВСКОЕ УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Динамическая полугруппа.*

МАРШРУТ графа – см. *Граф.*

МАСЛОВА ИНДЕКС ориентированной кривой на лагранжевом многообразии $L \subset T^*X$ – индекс пересечения кривой с циклом Γ особых точек проекции L на X. Это определение корректно, так как для общего L поверхность Γ гладкая вне множества коразмерности 3 и обладает канонич. кориентацией. М. и. не меняется при замене кривой на гомологичную и поэтому определяет *Маслова класс* в группе когомологий $H^1(L, \mathbb{Z})$.

См. также *Маслова канонический оператор.* *М. Э. Казарян.*

МАСЛОВА ИНДЕКСНЫЙ КЛАСС – см. *Маслова канонический оператор.*

МАСЛОВА КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР – оператор, сопоставляющий функции на лагранжевом многообразии $L \subset T^*M$ с невырожденной мерой $\mu \in \Lambda^n(L)$ (обобщенную) функцию на «физическом» пространстве – многообразии M; применяется для построения асимптотических разложений решений (псевдо) дифференциальных уравнений.

Ниже приводится конструкция М. к. о. для случая асимптотич. разложений по малому параметру $h > 0$.

1. Локальная теория. Пусть $M=\mathbb{R}^n$. Лагранжевым многообразием в гамильтоновом (симплектическом) пространстве $T^*\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n$ с координатами

$$(x, p)=(x^1, \ldots, x^n; p_1, \ldots, p_n)$$

и формой

$$dx\wedge dp=dx^1\wedge dp_1+\ldots+dx^n\wedge dp_n$$

называется такое подмногообразие L, $\dim L=n$, для к-рого $dx\wedge dp|_L=0$. На лагранжевом многообразии всегда существует канонич. атлас, состоящий из карт U_I с координатами

$$(x^I, p_{\bar I})=(x^{i_1}, \ldots, x^{i_m}, p_{i_{m+1}}, \ldots, p_{i_n});$$

здесь

$$I=\{i_1, \ldots, i_m\},\ \bar I=\{i_{m+1}, \ldots, i_n\},\ I\cup\bar I=\{1, 2, \ldots, n\}.$$

Пусть $\varphi\in C_0^\infty(U_I)$. Локальный М. к. о. есть отображение

$$k_I: C_0^\infty(U_1)\to C^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^1_{+,h}),$$

определяемое формулой

$$k_I\varphi=F^{1/h}_{p_{\bar I}\to x^{\bar I}}\left\{e^{\frac{i}{h}S_I(x^I, p_{\bar I})}\sqrt{\mu_I(x^I, p_{\bar I})}\,\varphi(x^I, p_{\bar I})\right\}. \qquad (1)$$

Здесь $F^{1/h}_{p_{\bar I}\to x^{\bar I}}$ есть $1/h$-преобразование Фурье по переменным $p_{\bar I}$:

$$F^{1/h}_{p_{\bar I}\to x^{\bar I}}(f)=\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{|\bar I|/2}\int_{\mathbb{R}_{\bar I}}e^{\frac{i}{h}x^{\bar I}p_{\bar I}}f(p_{\bar I})\,dp_{\bar I},$$

$|\bar I|=n-m$, S_I — действие в карте U_I, то есть нек-рое решение уравнения $dS_I=p_I dx^I-x^{\bar I}dp_{\bar I}|_L$; $\mu_I(x^I, p_{\bar I})$ — плотность меры $\mu\in\Lambda^n(L)$ в координатах $(x^I, p_{\bar I})$: $\mu=\mu_I dx^I\wedge dp_{\bar I}$ с нек-рым выбором аргумента $\arg\mu_I$.

2. Глобальная теория. Имеет место соотношение

$$k_I\varphi=e^{\frac{i}{h}c^{(1)}_{IJ}+i\pi c^{(2)}_{IJ}}k_J\varphi+O(h),\quad \varphi\in C_0^\infty(U_I\cap U_J), \qquad (2)$$

где

$$c^{(1)}_{IJ}=S_I+x^{\bar I}p_{\bar I}-S_J-x^{\bar J}p_{\bar J}\Big|_L,$$

$$c^{(2)}_{IJ}=\frac{1}{2\pi}\Big[\arg\mu_I-\arg\mu_J-\sum\nolimits_k\arg\lambda^k_{IJ}-|I_2|\pi\Big],$$

причем λ^k_{IJ} — собственные значения матрицы

$$\mathrm{Hess}_{x^{I_2}, p_{I_3}}(-S_I),\quad I_2=I\setminus J,\quad I_3=J\setminus I$$

и

$$-\frac{3\pi}{2}<\arg\lambda^k_{IJ}\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$c^{(1)}_{IJ}$, $c^{(2)}_{IJ}$ — константы. Набор этих констант определяет одномерные классы когомологий $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$, к-рые являются препятствиями к существованию глобального канонич. оператора k, совпадающего с операторами (1) в картах U_I. Лагранжево многообразие с мерой, на к-ром $c^{(1)}=0$, $c^{(2)}=0(\mathrm{mod}\,2)$, называется квантованным. На квантованном лагранжевом многообразии определен (с точностью до мультипликативной константы) оператор

$$k: C_0^\infty(L)\to C^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^1_{+,h}), \qquad (3)$$

к-рый и называется каноническим оператором Маслова.

3. Формула коммутации с $1/h$-псевдодифференциальным оператором. Пусть $\hat H=\hat H\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}, h\right)$ — $1/h$-псевдодифференциальный оператор с главным символом (гамильтонианом) $H_0(x, p)$. Тогда имеет место формула

$$\hat H\circ k(\varphi)=k(H_0(x, p)|_L\varphi)+O(h). \qquad (4)$$

Если же потребовать дополнительно, чтобы гамильтониан H обращался в нуль на лагранжевом многообразии L, то формула (4) может быть уточнена:

$$\hat H\circ k(\varphi)=-ihk(\mathscr{P}\varphi)+O(h^2), \qquad (5)$$

где $\mathscr{P}$ — оператор переноса:

$$\mathscr{P}=\frac{d}{dt}+\frac{1}{2}\frac{L_{d/dt}\mu}{\mu}+H^{\mathrm{sub}},$$

где $\frac{d}{dt}$ — дифференцирование вдоль гамильтонова векторного поля, отвечающего гамильтониану H_0, а H^{sub} — субглавный символ оператора $\hat H$:

$$H^{\mathrm{sub}}(x, p)=iH_1(x, p)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial x\partial p}(x, p), \qquad (6)$$

причем $H_1(x, p)$ — коэффициент при h в разложении полного символа (см. *1/h-псевдодифференциальный оператор*).

Операторы k_I могут быть модифицированы так, чтобы равенство (2) выполнялось с точностью до $O(h^N)$ при любом N. В этом случае может быть получена формула коммутации до любой степени h.

4. Условия квантования Маслова — условия существования М. к. о. на лагранжевом многообразии L с мерой μ. Они были введены как условия обращения в нуль двух классов $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ когомологий Чеха канонич. покрытия многообразия L (первое и второе условия квантования). Имеется эквивалентная форма условий квантования в терминах когомологий де Рама. Классы $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ могут быть заданы следующими замкнутыми дифференциальными формами на L (см. [3]):

$$c^{(1)}:\omega^{(1)}=p dx,$$

$$c^{(2)}:\omega^{(2)}=\frac{1}{2\pi i}d\ln\frac{\mu}{\sigma},$$

где мера σ — канонич. мера на лагранжевом многообразии, равная $\sigma=d(x^1-ip_1)\wedge\ldots\wedge d(x^n-ip_n)$; в частности, пара (L, σ) всегда удовлетворяет второму условию квантования. Класс $c^{(2)}$ называется индексным классом Маслова. Значение класса $c^{(2)}$ на замкнутой кривой называется индексом Маслова этой кривой. Индекс Маслова кривой γ может быть представлен различными способами, как, напр.:

1) индекс эллиптич. оператора на кривой

$$S_\gamma\varphi(t)=(\sigma+\mu)\varphi(t)+\frac{\sigma-\mu}{\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t},$$

действующего из пространства $L_2(\gamma, \mathbb{C})$ в пространство $L_2(\gamma, \Lambda^n(L))$;

2) вариация аргумента функции μ/σ вдоль кривой l.

Для других типов асимптотических разложений имеются следующие конструкции М. к. о.

I. A-канонический оператор Маслова (см. [1]). Пусть A: $H\to H$ — неограниченный самосопряженный оператор в (гильбертовом) пространстве H; $C^\infty(\mathbb{R}^n, H)$ — пространство функций; фильтрация в этом пространстве определяется оператором A, то есть

$$E_k=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n, H)\,|\,f\in\mathscr{D}(A^k)\}.$$

Локальный М. к. о., отвечающий этой фильтрации:

$$k_I\varphi=F^A_{p_{\bar I}\to x^{\bar I}}\left\{e^{iS_I(x^I, p_{\bar I})A}\sqrt{\mu_I(x^I, p_{\bar I})}\,\varphi(x^I, p_{\bar I})\right\},$$

где $F^A_{p_{\bar I}\to x^{\bar I}}$ есть A-преобразование Фурье по переменным $p_{\bar I}$:

$$F^A_{p_{\bar I}\to x^{\bar I}}(f)=\left(\frac{i|A|}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}_{\bar I}}e^{ix^{\bar I}p_{\bar I}A}f(p_{\bar I})\,dp_{\bar I},$$

где последний интеграл есть интеграл в смысле Бохнера.

В случае, когда пространство $H=L_2(\mathbb{R})$, а оператор $A=i\frac{\partial}{\partial\tau}$, A-канонич. оператор Маслова доставляет асимптотич. разложения по гладкости и, в частности, решает задачу о метаморфозе разрыва при прохождении через каустику (см. [1]).

Теория A-канонич. оператора Маслова также распространяется на неограниченные операторы в банаховом пространстве.

II. Комплексная теория М. к. о. Для построения М. к. о. на лагранжевом многообразии с комплексным ростком вводятся: лагранжево многообразие $L\subset\mathbb{R}^n_q\oplus\mathbb{R}_{n,p}$ с гладкой функцией $\mathscr{D}\geqslant 0$ (диссипацией) на нем, $2n$-мерная комплексная функция $r^{2n}=(w,z)$ (комплексный росток), $r^{2n}=O(\sqrt{\mathscr{D}})$, $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}}\{d(p+w),\ d(q+z)\}=n$ на $\Gamma=\{\alpha\in L\mid\mathscr{D}(\alpha)=0\}$; энтальпия W, для к-рой $dW=(p+w)d(q+z)+O(\sqrt{\mathscr{D}})$. Множество Γ покрывается канонич. картами $\{U_I\}$, на к-рых $\mathscr{D}(q^I+z^I,\ p_{\bar I}+w_{\bar I})/\mathscr{D}\alpha\neq 0$ и существует отображение $\gamma\colon U_I\to\mathbb{R}^I_x\times\mathbb{R}_{\bar I\xi}$, для к-рого $\mathscr{D}\gamma/\mathscr{D}\alpha\neq 0$ (α – локальные координаты в U_I) и $\gamma=(q^I+z^I,\ p_{\bar I}+w_{\bar I})+\sigma$, $\sigma=O(\sqrt{\mathscr{D}})$. Действие в U_I определяется формулой

$$S_I(x^I,\xi_{\bar I})=R_\gamma(W-(p_{\bar I}+w_{\bar I})(q^{\bar I}+z^{\bar I}))\big|_{\alpha=\alpha(x^I,\xi_{\bar I})},$$

где

$$R_\gamma f(\alpha)=f(\alpha)+\left\langle\sigma(\alpha),\frac{\partial f}{\partial(q^I+z^I,p_{\bar I}+w_{\bar I})}\right\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle\sigma(\alpha),\frac{\partial^2 f}{\partial(q^I+z^I,p_{\bar I}+w_{\bar I})^2}\sigma(\alpha)\right\rangle.$$

Лагранжево многообразие с комплексным ростком называется диссипативным, если

$$\operatorname{Im}S(x^I,\xi_{\bar I})\geqslant c\mathscr{D}(\alpha(x^I,\xi_{\bar I})),\ c>0$$

(неравенство диссипативности).

Локальный М. к. о. на диссипативном лагранжевом многообразии с комплексным ростком определяется теперь формулой (1).

Альтернативным вариантом теории М. к. о. на лагранжевом многообразии с комплексным ростком является М. к. о. на s-аналитическом (почти аналитическом) лагранжевом многообразии (см. [4]–[6]). Ниже приведены соответствующие конструкции.

Гладкое многообразие M, $\dim\limits_{\mathbb{R}}M=2n$, вместе с таким атласом $\{U_j,\ \alpha_j\}$, $\alpha_j\colon U_j\to\mathbb{C}^n$, что в $U_i\cap U_j$

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial\bar\alpha_j}\equiv 0(\operatorname{mod}^s I(M,\rho_M))$$

называется s-аналитическим. Здесь ρ_M (весовая функция) – неотрицательная функция на M, $\rho^2_M\in C^\infty(M)$, ${}^sI(M,\rho_M)$ – множество функций, для к-рых $|\mathscr{D}^\gamma f|\leqslant c\rho^{s-|\gamma|}$, и все рассмотрения проводятся в нек-рой окрестности множества $\Omega=\{\alpha\in M\mid\rho(\alpha)=0\}$. Вводятся понятия s-аналитич. функций, вложений, форм и векторных полей на M.

Пусть $\Phi=\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}_n$ – $2n$-мерное s-аналитич. гамильтоново (симплектическое) пространство с координатами $(z^1,\dots,z^n;\ \zeta_1,\dots,\zeta_n)=(z,\zeta)$, весовой функцией $\rho_\Phi=\{|\operatorname{Im}z|^2+|\operatorname{Im}\zeta|^2\}^{1/2}$ и структурной формой $dz\wedge d\zeta=dz^1\wedge d\zeta_1+\dots+dz^n\wedge d\zeta_n$. $(s+1)$-аналитич. вложение $i\colon(M,\rho_M)\to(\Phi,\rho_\Phi)$ считается лагранжевым, если $i^*(dz\wedge d\zeta)\equiv 0(\operatorname{mod}^s I(M,\rho_M))$.

На $(s+1)$-аналитич. лагранжевом многообразии существует атлас $\{U_I\}$-канонич. карт. $(s+1)$-аналитич. лагранжево многообразие с $(s+1)$-аналитич. невырожденной мерой называется правильно квантованным, если:

А. Существует такая $(s+1)$-аналитич. коцепь $\{S_I\}$ и вещественная коцепь $\{\arg\mu_I\}$ канонич. покрытия $\{U_I\}$, что

1) $dS_I\equiv i^*\left(\zeta_I dz^I-z^{\bar I}d\zeta_{\bar I}\right)\left(\operatorname{mod}^s I(M,\rho_M)\right)$ в U_1,

$S_J-S_I\equiv i^*\left(z^{I_3}\zeta_{I_3}-z^{I_2}\zeta_{I_2}\right)\left(\operatorname{mod}^s I(M,\rho_M)\right)$ в $U_I\cap U_J$;

2) $\arg\mu_I$ – одно из значений аргумента функции

$$\mu_I=\frac{\partial\mu}{\partial\left(z^I,\zeta_{\bar I}\right)}$$

и

$$\arg\mu_I-\arg\mu_J=\sum\arg\lambda_k+|I_2|\pi. \qquad (7)$$

Здесь $I_2=I\setminus J$, $I_3=J\setminus I$, λ_k – собственные значения матрицы

$$\operatorname{Hess}_{z^{I_2},\zeta_{I_3}}(-S_I(\alpha)),\quad \alpha\in\Omega,\quad -\frac{3\pi}{2}<\arg\lambda_k\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Б. В каждой канонич. карте U_I имеют место неравенства:

$$c_1\rho^2_M\left(x^I,p_{\bar I}\right)\leqslant\operatorname{Im}S_I\left(x^I,p_{\bar I}\right)\leqslant c_2\rho^2_M\left(x^I,p_{\bar I}\right);\quad c_1,c_2>0.$$

Локальный М. к. о. может быть теперь задан формулой (1). Комплексный М. к. о. применяется для построения асимптотик псевдодифференциальных уравнений с комплексным главным символом.

III. $\mathbb{R}_+$-эквивариантная теория М. к. о. (см. [7]) связана с фильтрацией пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ с помощью шкалы Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}$. Здесь рассматривается лагранжево многообразие $L\subset T^*_0\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_n\setminus\{O\})$, однородное относительно действия группы $\mathbb{R}_+$ положительных чисел $\lambda(x,p)=(x,\lambda p)$, а также однородная степени m мера μ и пространства $O^l(L)$ однородных функций степени l на L. Локальный канонический оператор Маслова

$$k_I:O^l_0(U_1)\to H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\quad s<-l-\frac{m}{2},$$

имеет вид

$$k_I\varphi=\zeta_\varphi(x)F_{p_{\bar I}\to x^{\bar I}}\left\{e^{iS_I(x^I,p_{\bar I})}\sqrt{\mu_I(x^I,p_{\bar I})}\,\varphi(x^I,p_{\bar I})\right\},$$

где U_I – однородная канонич. карта, $O^l_0(U_I)$ – пространство однородных степени l функций в U_I с конически компактным носителем (то есть $\operatorname{supp}\varphi/\mathbb{R}_+\Subset U_I/\mathbb{R}_+$), $S_I(x^I,p_{\bar I})$ однородна степени 1, ζ_φ – финитная функция, равная тождественно 1 на проекции носителя φ в $\mathbb{R}^n$.

Согласование операторов k_I и k_J в пересечении карт $U_I\cap U_J$ происходит с точностью до элементов пространства $H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ (ср. (2)); при этом в силу однородности первое из условий квантования выполнено автоматически. Более того, имеет место формула

$$S_I=-x^{\bar I}p_{\bar I}\,|_L.$$

IV. М. к. о. на гладком многообразии (см., напр., [7]). Теория М. к. о. распространяется на случай, когда в качестве «физического» пространства выступает гладкое многообразие M с фиксированной формой объема $v\in\Lambda^n(M)$. Ниже приведена необходимая модификация формул (1), (6):

$$k_I\varphi=F^{1/h}_{p_{\bar I}\to x^{\bar I}}\left\{e^{\frac{i}{\hbar}S_I(x^I,p_{\bar I})}\sqrt{\frac{\mu_I(x^I,p_{\bar I})}{v_x\left(x^I,x^{\bar I}\left(x^I,p_{\bar I}\right)\right)}}\,\varphi(x^I,p_{\bar I})\right\},$$

где v_x – плотность меры v относительно координат x, а $\{x^{\bar I}(x^I,p_{\bar I}),\ p_I(x^I,p_{\bar I})\}$ – уравнения L в карте U_I;

$$H^{\mathrm{sub}}(x,p)=iH_1(x,p)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2H_0}{\partial x\partial p}(x,p)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln v_x(x).$$

V. М. к. о. в случае произвольного симплектич. многообразия (см. [8]). Пусть (M, ω) – симплектич. многообразие, $\{U_\alpha\}$ – атлас, в картах к-рого форма ω имеет вид $dp \wedge dq$, $g_{\alpha\beta}$ – (канонические) диффеоморфизмы перехода, $T_{\alpha\beta} = T(g_{\alpha\beta})$ – соответствующие операторы канонич. преобразований группы проективного представления. Соотношение

$$T_{\alpha\beta} \circ T_{\beta\gamma} = T_{\alpha\gamma} \exp\left[\frac{i}{h} c^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} + i\pi c^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}\right]$$

определяет двумерные классы когомологий $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$ на M, при этом $c^{(1)} = [\omega]$, а значение $c^{(2)}$ на цикле Σ равно индексу Σ (см. *Двумерных пленок индекс*). Многообразие M называется квантованным, если $c^{(1)} = 0$ и $c^{(2)} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. В этом случае операторы $T_{\alpha\beta}$ (после умножения на подходящие константы) задают алгебраич. пучок J на M. М. к. о. на квантованном лагранжевом многообразии $L \subset M$ определяется как отображение

$$k: C_0^\infty(L) \to \Gamma(M, J).$$

Развита также теория М. к. о. для случая многозначных аналитич. функций на комплексно-аналитич. многообразиях (см. [9]). Эта теория позволила найти асимптотику «в большом» характеристич. задачи Коши.

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [2] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978; [3] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [4] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Метод канонического оператора Маслова. Комплексная теория, М., 1974; [5] Стернин Б. Ю., в сб.: «Труды семинара С. Л. Соболева», Новосибирск, 1976, с. 141–56; [6] Кучеренко В. В., «Математич. сб.», 1974, т. 95, № 2, с. 163–213; [7] Назайкинский В. Е. [и др.], «Успехи математич. наук», 1981, т. 36, в. 2, с. 81–140; [8] Карасев М. В., Маслов В. П., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1983, т. 47, № 5, с. 999–1029; [9] Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., «Успехи математич. наук», 1988, т. 43, в. 3, с. 99–124.

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.

МАСЛОВА КЛАСС лагранжевого подмногообразия $L \subset T^*X$ – класс когомологий в группе $H^1(L, \mathbb{Z})$, значение которого на цикле γ равно *Маслова индексу* кривой γ.

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $T^*X = \mathbb{R}^{2n}$, и $G: L \to \Lambda_n$ – *Гаусса отображение*, где Λ_n – *Грассмана лагранжево многообразие*. Тогда М. к. является образом при гомоморфизме $G: H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z}) \to H^1(L, \mathbb{Z})$ образующей группы $H^1(\Lambda_n \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, называемым универсальным классом Маслова. В качестве цикла, двойственного к универсальному М. к., можно взять множество $\Sigma \subset \Lambda_n$ лагранжевых плоскостей, не трансверсальных нек-рой фиксированной плоскости.

М. Э. Казарян.

МАССА – физическая величина, одна из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные и гравитационные свойства. Понятие «М.» было введено в механику И. Ньютоном (I. Newton) в определении импульса (количества движения) тела – импульс $\boldsymbol{p}$ пропорционален скорости свободного движения тела $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \tag{1}$$

где коэффициент пропорциональности m – постоянная для данного тела величина, его масса. Эквивалентное определение М. получается из уравнения движения классической механики Ньютона:

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}. \tag{2}$$

Здесь М.– коэффициент m пропорциональности между действующей на тело силой $\boldsymbol{f}$ и вызываемым ею ускорением $\boldsymbol{a}$. Определенная таким образом М. характеризует свойства тела, является мерой его инерции (чем больше М. тела, тем меньшее ускорение оно приобретает под действием постоянной силы) и называется инерциальной, или инертной, массой.

В теории гравитации Ньютона М. выступает как источник поля тяготения. Каждое тело создает поле тяготения, пропорциональное М. тела, и испытывает воздействие поля тяготения, создаваемого другими телами, сила к-рого также пропорциональна М. Это поле вызывает притяжение тел с силой, определяемой законом тяготения Ньютона:

$$f = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3}$$

где r – расстояние между центрами масс тел, G – универсальная гравитационная постоянная, а m_1 и m_2 – М. притягивающихся тел. Из формулы (3) можно получить зависимость между М. тела m и его весом P в поле тяготения Земли:

$$P = mg, \tag{4}$$

где $g = GM/r^2$ – ускорение свободного падения (M – М. Земли, $r \approx R$, где R – радиус Земли). М., определяемая соотношениями (3) и (4), называется гравитационной.

В принципе ниоткуда не следует, что М., создающая поле тяготения, определяет и инерцию того же тела. Однако опыт показал, что инертная и гравитационная М. пропорциональны друг другу (а при обычном выборе единицы измерения численно равны). Этот фундаментальный закон природы называется принципом эквивалентности. Экспериментально принцип эквивалентности установлен с очень большой точностью – до 10^{-12}. Первоначально М. рассматривалась (напр., И. Ньютоном) как мера количества вещества. Такое определение имеет вполне определенный смысл только для однородных тел, подчеркивает аддитивность М. и позволяет ввести понятие плотности – массы единичного объема тела. В классич. физике считалось, что М. тела не изменяется ни в каких процессах [закон сохранения М. (вещества)].

Понятие «М.» приобрело более глубокий смысл в специальной теории относительности А. Эйнштейна (A. Einstein) (см. *Относительности теория*), рассматривающей движение тел (или частиц) с очень большими скоростями – сравнимыми со скоростью света $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с. В новой механике, называемой релятивистской, связь между импульсом и скоростью частицы дается соотношением:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5}$$

[при малых скоростях ($v \ll c$) это соотношение переходит в соотношение (1)]. Величину m_0 называют массой покоя, а массу m движущейся частицы определяют как зависящий от скорости коэффициент пропорциональности между $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{v}$:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6}$$

то есть масса частицы (тела) растет с увеличением ее скорости. В релятивистской механике определения М. из уравнений (1) и (2) неэквивалентны, так как ускорение перестает быть параллельным вызвавшей его силе и М. получается зависящей от направления скорости частицы. Согласно теории относительности, М. частицы связана с ее энергией $\mathscr{E}$ соотношением:

$$\mathscr{E} = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{7}$$

М. покоя m_0 определяет внутреннюю энергию частицы – так наз. энергию покоя

$$\mathscr{E} = m_0 c^2.$$

Таким образом, с М. всегда связана энергия (и наоборот), поэтому в релятивистской механике не существуют по отдельности законы сохранения М. и энергии – они слиты в единый закон сохранения полной (то есть включающей энергию покоя частиц) энергии. Приближенное их разделение возможно лишь в классич. физике, когда $v \ll c$ и не происходит превращения частиц. При соединении частиц друг с другом с образованием устойчивого связанного состояния выделяется избыток энергии (равный энергии связи) $\Delta\mathscr{E}$, к-рому соответствует М.

$$\Delta m = \Delta\mathscr{E}/c^2.$$

Поэтому М. составной частицы меньше суммы М. образующих ее частиц на величину $\Delta\mathscr{E}/c^2$ (так наз. дефект масс). Это явление особенно заметно в ядерных реакциях.

Природа М.– одна из важнейших еще не решенных задач физики. Принято считать, что М. элементарной частицы определяется полями, к-рые с ней связаны (электромагнитным, ядерным и др.). Однако количественная теория М. еще не создана. Не существует также теории, объясняющей, почему М. элементарных частиц образуют дискретный спектр значений, и тем более позволяющей определить этот спектр.

Лит.: [1] Джеммер М., Понятие массы в классической и современной физике, пер. с англ., М., 1967; [2] Хайкин С. Э., Физические основы механики, 2 изд., М., 1971. *Я. А. Смородинский.*

МАССА ДВИЖЕНИЯ – см. *Релятивистская механика.*

МАССА ПОКОЯ – см. *Масса, Релятивистская механика.*

МАССА РЕЛЯТИВИСТСКАЯ – см. *Релятивистская механика.*

МАССОВЫЕ РАСХОДИМОСТИ – см. *Инфракрасные расходимости.*

МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР в квантовой теории поля – функция, которую можно считать обобщением массы частицы, включающим эффекты взаимодействия квантовых полей. Напр., в квантовой электродинамике М. о. электрона слагается из собственно массы m и радиационных поправок, простейшая из к-рых отвечает однопетлевой *Фейнмана диаграмме* собственной энергии электрона. В импульсном представлении вклад этой диаграммы представляется расходящимся интегралом

$$\sum(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4 i}\int d^4k D^c_{\mu\nu}(k)\gamma^\mu S^c(p-k)\gamma_\nu,$$

где $D^c_{\mu\nu}$ – *пропагатор* фотона, S^c – пропагатор электрона, γ^μ – матрицы Дирака (μ, $\nu = 0, 1, 2, 3$), по индексам μ, ν подразумевается суммирование (p, k – 4-импульсы электрона и виртуального фотона, e – электрич. заряд). После надлежащего устранения расходимостей (*перенормировки*) этот интеграл явно вычисляется и соответствующее конечное выражение $\tilde{\sum}$ в сумме с массой m образует М. о. электрона:

$$M(p,\alpha) = m + \tilde{\sum}(p;\alpha); \quad \dot{\alpha} = e^2/4\pi$$

(используется система единиц, в к-рой $\hbar = c = 1$). С помощью М. о. полный пропагатор электрона $G(p;\alpha)$, учитывающий радиационные поправки, записывается в виде, близком к свободному пропагатору:

$$G(p;\alpha) = [\hat{p} - M(p;\alpha)]^{-1},$$

где $\hat{p}$ – свертка компонент 4-вектора p с матрицами Дирака: $\hat{p} = p_\nu\gamma^\nu$.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, 2 изд., М., 1990. *Д. В. Ширков.*

МАССЫ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ – см. *Комплексный потенциал.*

МАСШТАБ явления – см. *Ричардсона закон четырех третей.*

МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ, скейлинг,– свойство неизменности уравнений, описывающих некоторую физическую теорию или какой-либо физический процесс, при изменении всех расстояний и промежутков времени в одинаковое число раз. Такие изменения образуют группу масштабных преобразований (называемых также преобразованиями подобия), определяемую следующим законом изменения координат пространства и времени:

$$x \to \rho x,\ y \to \rho y,\ z \to \rho z,\ t \to \rho t,$$

где $\rho > 0$ – числовой параметр преобразования, к-рый при $\rho > 1$ соответствует однородному растяжению, а при $\rho < 1$ – однородному сжатию пространства-времени в ρ раз. В релятивистской теории масштабное преобразование вместе с десятью преобразованиями группы Пуанкаре образует так наз. группу Вейля. Физич. величины изменяются при масштабном преобразовании в соответствии со своими размерностями, напр. вектор-потенциал электромагнитного поля и ток преобразуются по законам $A \to \rho^{-1}A$, $j \to \rho^{-3}j$. Безразмерные величины, а также такие величины, как массы частиц, при масштабном преобразовании не меняются.

М. и. (иногда называемая также подобием, или автомодельностью, по аналогии с теорией фазовых переходов 2-го рода и гидродинамикой) обладает ряд уравнений физич. теорий. Это происходит в тех случаях, когда в решение уравнений не входят массы или другие размерные параметры, не меняющиеся при масштабном преобразовании. В классич. физике важным примером являются *Максвелла уравнения*, к-рые обладают М. и. для любых расстояний и промежутков времени. *Клейна – Гордона уравнение* и *Дирака уравнение* масштабно инвариантны для расстояний, малых по сравнению с комптоновской длиной волны соответствующих частиц, и промежутков времени, малых по сравнению с этой длиной, деленной на скорость света. Для расстояний, сравнимых с комптоновской длиной волны (и соответствующих промежутков времени), М. и. нарушается из-за наличия масс частиц. О такой ситуации говорят как о нарушенной М. и.

В физике элементарных частиц нарушенная М. и. обнаружена в поведении *структурных функций*, описывающих эксперименты по *глубоконеупругим процессам* рассеяния лептонов на адронах при высокой энергии. Для глубоконеупругого электрон-протонного рассеяния $e + p \to e + X$ (где X обозначает совокупность адронов в конечном состоянии) при произвольных значениях энергии налетающего электрона следует ожидать зависимости структурных функций по отдельности от двух имеющихся в задаче кинематич. переменных: q^2 – квадрата 4-импульса q, переданного от электрона к протону, и $M_x^2c^2 = (q+p)^2$ – квадрата энергии образующейся адронной системы X в системе ее центра инерции; здесь p – 4-импульс начального протона. Однако на ускорителе СЛАК в 1968 было впервые обнаружено, что при больших отрицательных значениях $q^2[-q^2 > 1\ (\text{ГэВ/с})^2]$ структурные функции зависят только от одного безразмерного отношения $-q^2/M_x^2c^2$, а не от q^2 и M_x^2 по отдельности. Такое поведение структурных функций было теоретически предсказано также в 1968 Дж. Бьеркеном (J. Bjorken) (скейлинг Бьеркена). Скейлинг Бьеркена нашел естественное объяснение в рамках партонной модели адронов.

Аналогично глубоконеупругим процессам М. и. наблюдается и в адрон-адронных столкновениях при высоких энергиях. Так, для адронных инклюзивных процессов распределения по продольному импульсу оказываются функциями только от безразмерного отношения $x = p_L/P$ (здесь $p_L > 1$ ГэВ/с – проекция импульса вторичной частицы в системе центра инерции на ось соударения, а P – импульс налетающей частицы в той же системе) и не зависят явным образом от энергии [так наз. скейлинг Фейнмана (R. Feynman, 1969)]. Ранее экспериментальное указание на такое поведение инклюзивных процессов было получено в космич. лучах и впервые надежно установлено на ускорителе ИФВЭ (Серпухов, 1968). Скейлинг Фейнмана объясняется на основе партонной модели.

От энергии сталкивающихся частиц оказывается практически не зависящим также распределение по числу частиц, образующихся в множественном процессе. В этом случае вероятность рождения n частиц пропорциональна функции лишь от отношения $n/\langle n\rangle$, где $\langle n\rangle$ – средняя множественность при данной энергии. Такое свойство подобия получило название скейлинга КНО [Кобы – Нильсена – Олесена (Z. Koba, H. Nielsen, P. Olesen), 1972]. В отличие от скейлингов Бьеркена и Фейнмана, наблюдающийся в опы-

те КНО-скейлинг не имеет общепризнанного теоретич. объяснения.

М. и. может быть использована для предсказания поведения формфакторов адронов при больших переданных импульсах и определения структурных функций.

В связи с попытками объяснить в рамках квантовой теории поля скейлинг Бьеркена с начала 1970-х гг. обсуждалась возможность того, что уравнения Дайсона в квантовой теории поля допускают масштабно-инвариантное решение. Для перенормируемой квантовой теории поля этот вопрос оказывается связанным с поведением *эффективной константы связности* (эффективного заряда) при $-q^2 \to \infty$, к-рое определяется видом так наз. функции Гелл-Мана – Лоу (см. *Ренормализационная группа*; дифференциальные уравнения). Для М. и. необходимо, чтобы эта функция обращалась в нуль при нек-ром значении эффективного заряда. В этом случае при достаточно больших значениях $-q^2$ эффективный заряд совпадает с положением нуля и уравнения ренормализационной группы для вершинных частей обладают масштабно-инвариантными решениями, вообще говоря, с нек-рой *аномальной размерностью*.

Примеры М. и. с нетривиальными аномальными размерностями имеются в двумерном пространстве-времени (см. *Двумерные модели* квантовой теории поля). Для перенормируемой квантовой теории поля оказывается, что масштабно-инвариантные решения с необходимостью обладают инвариантностью относительно более общего конформного преобразования, что дает возможность использовать для их нахождения методы конформной квантовой теории поля.

В квантовой хромодинамике *асимптотическая свобода* приводит к тому, что функция Гелл-Мана – Лоу обращается в нуль при нулевом значении эффективного заряда. В этом случае уравнения ренормализационной группы дают для структурных функций решение, к-рое является функцией не только от отношения $-q_x^2/M_x^2c^2$, но также слабо (логарифмически) зависит непосредственно от $-q^2$. Скейлинг Бьеркена справедлив в квантовой хромодинамике с той точностью, с какой этой дополнительной зависимостью от $-q^2$ можно пренебречь. Такое нарушение скейлинга Бьеркена должно наблюдаться в экспериментах по изучению неупругих процессов в достаточно широком диапазоне изменения $-q^2$.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984, гл. 9; [2] Carruthers P., «Phys. Repts», 1971, v. 1C, p. 1; [3] Никитин Ю. П., Розенталь Й. Л., Теория множественных процессов, М., 1976; [4] Джекив Р., Приближенная масштабная инвариантность, в кн.: Трейман С., Джекив Р., Гросс Д., Лекции по алгебре токов, пер. с англ., М., 1977, гл. 7.

Ю. М. Макеенко.

МАСШТАБНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Масштабная инвариантность.*

МАТВЕЕВА – ИТСА ФОРМУЛА – формула для почти периодического по x и по t решения $u(x, t)$ *Кортевега – де Фриса уравнения*

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Такие решения, зависящие от $3l+1$ параметров

$$E = (E_1, \ldots, E_{2l+1}),\ E_1 < E_2 < \ldots < E_{2l+1},\ z = (z_1, \ldots, z_l),$$

определяются формулой

$$u(x, t) = C(E) - \partial^2/\partial x^2 \ln \theta(Ux + Vt + z, E).$$

Здесь $\theta(p, E) = \sum \exp(inp + inB(E)n/2)$ – l-мерная θ-функция Римана, $p = (p_1, \ldots, p_l)$, суммирование проводится по l-мерным целочисленным векторам $n = (n_1, \ldots, n_l)$. Элементы l-мерных векторов $U = U(E)$ и $V = V(E)$, константа $C(E)$ и элементы $(l \times l)$-симметрич. матрицы $B(E)$ с положительно определенной мнимой частью выражаются через E с помощью гиперэллиптич. интегралов. Аналогичные формулы получены для ряда других нелинейных уравнений.

Лит.: [1] Итс А. Р., Матвеев В. Б., «Теоретич. и математич. физика», 1975, т. 23, в. 1, с. 51–64; [2] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов, М., 1980.

С. Ю. Доброхотов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВАКУУМ – см. *Вакуум.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК – см. *Маятник.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, среднее значение,– одна из числовых характеристик распределения вероятностей *случайной величины.* Для случайной величины X, принимающей последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ с вероятностями, равными соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, математическое ожидание определяется формулой

$$\mathsf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

при условии, что ряд сходится абсолютно; для случайной величины X с непрерывным распределением, имеющим плотность вероятности $p(x)$,

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx,$$

если интеграл сходится абсолютно. М. о. характеризует расположение значений случайной величины. Полностью эта роль М. о. разъясняется законом больших чисел. При сложении случайных величин их М. о. складываются, при умножении независимых случайных величин их М. о. перемножаются.

Многие важные характеристики распределений определяются как М. о. нек-рых функций от случайных величин, см., напр., *Дисперсия, Момент, Характеристическая функция.*

В. И. Битюцков.

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ – уравнения, описывающие математические модели физических явлений. М. ф. к. у. – часть предмета математич. физики. Многие явления физики и механики (гидро- и газодинамики, упругости, электродинамики, оптики, теории переноса, физики плазмы, квантовой физики, теории гравитации и т. п.) описываются *краевыми задачами* для дифференциальных уравнений. Эти задачи составляют весьма широкий класс М. ф. к. у.

Для полного описания эволюции физич. процесса помимо уравнений, необходимо, во-первых, задать картину процесса в нек-рый фиксированный момент времени (начальные условия) и, во-вторых, задать режим на границе той среды, где протекает этот процесс (граничные условия). Начальные и граничные условия образуют краевые условия, а дифференциальные уравнения вместе с соответствующими краевыми условиями – краевые задачи математич. физики.

Ниже приведены нек-рые примеры уравнений и соответствующих краевых задач.

Уравнение колебаний (*волновое уравнение*)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x,t) \qquad (1)$$

описывает малые колебания струн, стержней, мембран, акустические и электромагнитные колебания. В уравнении (1) пространственные переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$ изменяются в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, где развивается рассматриваемый физич. процесс; при этом в соответствии с физич. смыслом входящих величин должно быть $\rho > 0$, $p > 0$, $q > 0$.

При $\rho = 1$, $p = a^2 = \text{const}$ и $q = 0$ уравнение (1) превращается в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,t), \qquad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Диффузии уравнение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x,t) \qquad (3)$$

описывает процессы диффузии частиц и распространения тепла в среде. При $\rho=1$, $p=a^2=\text{const}$ и $q=0$ уравнение (3) превращается в *теплопроводности уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,t).$$

Для стационарных процессов, когда отсутствует зависимость от времени t, уравнения колебаний (1) и диффузии (3) принимают вид:

$$-\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u)+qu=f(x). \qquad (4)$$

При $p=1$ и $q=0$ уравнение (4) называется *Пуассона уравнением*:

$$\Delta u=-f(x), \qquad (5)$$

а при $f=0$ – *Лапласа уравнением*:

$$\Delta u=0.$$

Уравнениям Лапласа и Пуассона удовлетворяют различного рода потенциалы: ньютонов (кулонов) потенциал, потенциал течения несжимаемой жидкости и т. п.

Если при волновом уравнении (2) внешнее возмущение f – периодическое с частотой ω:

$$f(x,\ t)=a^2f(x)e^{i\omega t},$$

то амплитуда $u(x)$ периодич. решений с той же частотой ω:

$$u(x,\ t)=u(x)e^{i\omega t}$$

удовлетворяет *Гельмгольца уравнению*:

$$\Delta u+k^2u=-f(x),\ k^2=\omega^2/a^2. \qquad (6)$$

К уравнению Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию).

Для полного описания процесса колебаний необходимо задать начальное возмущение и начальную скорость

$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+hu|_S=v(x,t),\quad t>0,$$

а для процесса диффузии – только начальное возмущение

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ x\in\overline{G}\ .$$

Кроме того, на границе S области G необходимо удовлетворить заданному режиму. В простейших случаях физически осмысленные граничные условия для уравнений (1), (3), (4) описываются соотношением

$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+hu|_S=v(x,t),\quad t>0,$$

где k и h – заданные неотрицательные функции, не обращающиеся в нуль одновременно, $\boldsymbol{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S, v – заданная функция.

Напр., для струны условие

$$u|_{x=x_0}=0$$

означает, что конец струны x_0 закреплен, а условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}=0$$

означает, что конец x_0 свободен. Для теплопроводности условие

$$u|_S=v_0(x,\ t)$$

означает, что на границе S области G поддерживается заданный температурный режим, а условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S=v_1(x,t)$$

задает поток тепла через S. В случае неограниченных областей, напр. внешности ограниченной области, кроме условия на границе задается также условие на бесконечности. Так, для уравнения Пуассона (5) в пространстве ($n=3$) таким условием является условие

$$\boldsymbol{u(x)}=o(1),\ |x|\to\infty, \qquad (7)$$

а на плоскости ($\boldsymbol{n=2}$) – условие

$$\boldsymbol{u(x)}=O(1),\ |x|\to\infty. \qquad (8)$$

Для уравнения Гельмгольца (6) на бесконечности задаются условия излучения:

$$\left.\begin{aligned}&u(x)=O(|x|^{-1}),\\&\frac{\partial u(x)}{\partial|x|}\mp iku(x)=o(|x|^{-1}),\quad |x|\to\infty,\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

причем знак – соответствует расходящимся, а знак + сходящимся волнам.

Краевая задача, к-рая содержит только начальные условия (и, стало быть, не содержит граничных условий, так что область G – все пространство $\mathbb{R}^n$), называется *Коши задачей*. Если в краевой задаче присутствуют и начальные и граничные условия, то такая задача называется *смешанной задачей*. Для уравнения (4) краевая задача с граничным условием

$$u|_S=v_0(x)$$

называется *Дирихле задачей*, а с граничным условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S=v_1(x)$$

– *Неймана задачей*. Различают внешние и внутренние задачи Дирихле и Неймана. Для внешних задач кроме граничных условий необходимо задавать условия на бесконечности типа (7), (8), (9).

Перечисленные краевые задачи далеко не исчерпывают все многообразие краевых задач математич. физики – это есть простейшие классич. примеры краевых задач. Краевые задачи, описывающие реальные физич. процессы, могут быть весьма сложными: это могут быть системы уравнений высших порядков, нелинейные уравнения. Сюда в первую очередь относятся: *Шредингера уравнение, гидродинамики уравнения, Максвелла уравнения, Кортевега – де Фриса уравнение*, уравнения теории упругости и пластичности и др.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1987; [3] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, 2 изд., М., 1983; [4] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. С. Владимиров.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ – уравнения, не обладающие свойством линейности; применяются в физике как математические модели нелинейных явлений в различных сплошных средах. М. ф. н. у.– важная часть математич. аппарата, используемого в фундаментальных физич. теориях: теории тяготения и квантовой теории поля.

Строго говоря, все сплошные среды описываются нелинейными уравнениями. Выбор для описания среды линейных или нелинейных уравнений зависит от роли, к-рую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физич. ситуацией. Напр., при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля. Возникающие при этом М. ф. н. у. являются основой математич. аппарата нелинейной оптики.

Линейные уравнения, используемые в физике, являются результатом линеаризации более точных М. ф. н. у. на фоне их простейших (фоновых) решений. Исторически первым примером М. ф. н. у. были найденные в 18 в. *Эйлера уравнения* для идеальной жидкости:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0,\\&\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(v\nabla)\boldsymbol{v}+\rho^{-1}\nabla P=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь ρ, P, $\boldsymbol{v}$ – плотность, давление и скорость жидкости. Для баротропной жидкости, когда $P=P(\rho)$, уравнения Эйлера можно линеаризовать на фоне тривиального решения $\rho=\rho_0$, $v_0=0$ в предположении потенциальности поля скоростей: $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$. Полагая $\rho=\rho_0+\delta\rho$, $\delta\rho\ll\rho_0$, получаем из (1) *волновое уравнение* для звуковых волн. Однако при рас-

смотрении вихревых движений жидкости, когда ее можно считать несжимаемой, $\rho=\rho_0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$, уравнения Эйлера (1) становятся существенно нелинейными. Их линеаризация на фоне решения $\boldsymbol{v}_0=0$ приводит к тривиальному уравнению $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0$.

Таким образом, линеаризация М. ф. н. у. не всегда ведет к содержательному результату. Может оказаться, что линеаризация имеет смысл, но линейные уравнения сохраняют применимость лишь конечное время. Эта ситуация типична, если фоновое решение неустойчиво, но может иметь место и при устойчивом фоновом решении. Так, одномерные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P(\rho)}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

при произвольном начальном условии $\rho\to\rho_0$, $v\to 0$ при $x\to\pm\infty$ описывают образование ударных волн. При этом за достаточно большое время теряют применимость не только линейное приближение, но и сами уравнения (2), решения к-рых при $t\to\infty$ становятся неоднозначными.

Даже если линеаризация М. ф. н. у. возможна, с точки зрения физики исключительно важны «существенно нелинейные» решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях (см. *Солитон*), или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства. Существенно нелинейными являются и стационарные решения уравнений гидродинамики. Весьма важен вопрос об устойчивости существенно нелинейных решений, в том числе гидродинамич. течений и солитонов, к-рый решается либо при помощи линеаризации нелинейных уравнений на фоне изучаемых решений, либо при помощи вариационных оценок.

Решения М. ф. н. у. во многих случаях обнаруживают тенденцию к стохастизации. В этом случае они требуют статистич. описания, что составляет предмет теории *турбулентности*. Турбулентность часто развивается как результат неустойчивости фонового состояния. Если уровень нелинейности решения остается малым, то говорят о слабой турбулентности, в противном случае – о сильной турбулентности. Сильная турбулентность может сопровождаться волновыми коллапсами, целиком или частично состоять из взаимодействующих солитонов.

Нелинейные уравнения в физике. М. ф. н. у., встречающиеся в физике, отличаются большим разнообразием. Их значительная часть представляет собой обобщения гидродинамич. уравнений Эйлера, напр. *Навье – Стокса уравнения* для описания движений вязкой несжимаемой жидкости. Описываемая ими гидродинамич. турбулентность является предельно сильной.

В метеорологии были выведены уравнения Буссинеска, описывающие движения несжимаемой жидкости в поле тяжести и сил Кориолиса и используемые в океанологии и физике атмосферы. *Магнитной гидродинамики уравнения* описывают движение проводящей жидкости в магнитном поле и применяются в астрофизике и физике плазмы.

Классич. примером М. ф. н. у. являются уравнения теории упругости. Развитие микроскопич. теории кристаллов дополнило их уравнениями равновесия и динамики дислокаций, также существенно нелинейными.

Многие М. ф. н. у. возникли в физике в связи с развитием теории конденсированных сред, они описывают макроскопич. проявления квантовомеханич. эффектов; неизвестной функцией в них является плотность параметра порядка (см. *Фазовый переход*). Если параметр порядка скалярный, это двухжидкостные уравнения гидродинамики сверхтекучего гелия, *Ландау – Гинзбурга уравнения* и их обобщения, описывающие магнитостатику и электродинамику сверхпроводников. Если параметр порядка векторный или тензорный, это уравнения Ландау – Лифшица, описывающие ферромагнетики и антиферромагнетики, уравнения обобщенной гидродинамики сверхтекучего гелия, макроскопич. модели жидких кристаллов. Для всех этих уравнений наибольший интерес представляют их существенно нелинейные решения, часто описывающие локализованные (хотя бы частично) объекты: вихри в жидком гелии и в сверхпроводниках, доменные стенки в ферромагнетиках и антиферромагнетиках, дисклинации в жидких кристаллах и солитоны, к-рые в том или ином виде существуют во всех упомянутых средах.

М. ф. н. у. возникают также как результат применения приближения Хартри – Фока к многочастичным квантовомеханич. системам и имеют в этом качестве применения в атомной и ядерной физике. Еще одним источником М. ф. н. у. является химич. физика. Это – нелинейные уравнения диффузии, описывающие волны горения и детонации, а также колебательные химич. реакции. К ним примыкают возникшие в биофизике уравнения, описывающие распространение импульса по нервному волокну. Уравнения этих типов возникают в задачах о самоорганизации и диссипативных структурах.

М. ф. н. у. играют важную роль и в фундаментальной физике, напр. *Эйнштейна уравнения* для гравитационного поля. Уравнения Эйнштейна в вакууме имеют ясный геометрич. смысл, описывая римановы пространства, тензор Риччи к-рых равен нулю. Геометрич. интерпретацию имеют и многие нелинейные уравнения в квантовой теории поля, в частности *Янга – Миллса поля*.

Локализованные решения М. ф. н. у. в квантовой теории поля можно рассматривать как точки стационарной фазы при квазиклассич. вычислении *функциональных интегралов*, для *Грина функций*, содержащих информацию о спектре масс и сечениях взаимодействия элементарных частиц. Если точкам стационарной фазы соответствуют траектории подбарьерных переходов между топологически неэквивалентными вырожденными состояниями вакуума, классич. М. ф. н. у. следует рассматривать в мнимом времени, то есть не в пространстве Минковского, а в четырехмерном евклидовом пространстве. Локализованные решения таких уравнений – четырехмерные солитоны – получили название *инстантонов*.

Уравнения Янга – Миллса описывают частицы, обладающие *асимптотической свободой*. В двумерном пространстве-времени этим же свойством обладает уравнение $\boldsymbol{n}$-поля:

$$\boldsymbol{n}_{\xi\eta}+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}_\xi,\boldsymbol{n}_\eta)=0 \qquad (3)$$

(здесь $\xi=x+t$, $\eta=x-t$ – «конусные» переменные). Это уравнение является частным случаем более общего уравнения «главного кирального поля»:

$$g_{\xi\eta}+(g_\xi g^{-1}g_\eta+g_\eta g^{-1}g_\xi)/2=0 \qquad (4)$$

(здесь g – элемент нек-рой группы Ли). Инстантонные решения этого уравнения можно использовать для описания солитонных конфигураций в жидком гелии.

Универсальные модели. В этих моделях проявляется одна из характерных черт теории М. ф. н. у.: среди огромного их многообразия можно выделить небольшое число уравнений сравнительно простого вида, к-рые можно использовать как математич. модели различных по своей природе физич. ситуаций. Эти уравнения играют, в известном смысле, ту же роль, что и *математической физики классические уравнения* (уравнение Лапласа, уравнение диффузии, волновое уравнение).

К числу таких универсальных моделей относятся *Кортевега – де Фриса уравнение, нелинейное уравнение Шредингера, синус-Гордона уравнение, Кадомцева – Петвиашвили уравнение, Бюргерса уравнение, Хохлова – Заболотской уравнение* и др. Необходимо отметить еще систему уравнений «трех волн»:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_0,\nabla u_0)&=iu_1u_2,\\ \frac{\partial u_1}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_1,\nabla u_1)&=iu_1u_2^*,\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_2,\nabla u_2)&=iu_1u_1^*,\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

являющуюся универсальной моделью для описания параметрич. взаимодействий волн в нелинейных средах. Система (5) допускает многочисленные обобщения.

Большое разнообразие встречающихся в физике М. ф. н. у. затрудняет развитие общих математич. методов их исследования. Лишь для сравнительно немногих М. ф. н. у. доказаны теоремы существования и единственности, к таким относятся уравнения Янга – Миллса, уравнения Навье – Стокса в двумерном случае, уравнения газовой динамики. Для уравнений Навье – Стокса в трехмерном случае теорема единственности решения задачи Коши до сих пор не доказана. Затруднена даже проблема классификации М. ф. н. у. Часть их попадает под классич. разделение на эллиптич., гиперболич. и параболич. уравнения, но значительное число важных М. ф. н. у. (среди них уравнение Кортевега – де Фриса, уравнение Кадомцева – Петвиашвили) не могут быть отнесены ни к одному из этих типов. Нек-рую классификацию М. ф. н. у. можно осуществить на основе физич. соображений. Прежде всего это разделение на стационарные и эволюционные уравнения. Большинство стационарных уравнений относится к эллиптич. типу. Среди эволюционных уравнений, явно содержащих производные по времени, можно выделить консервативные М. ф. н. у., сохраняющие интеграл энергии, и диссипативные М. ф. н. у., описывающие «открытые системы», обменивающиеся энергией с «внешним миром». Одним из интересных достижений теории М. ф. н. у. было обнаружение того факта, что консервативные М. ф. н. у., как правило, являются гамильтоновыми системами, хотя явное введение канонич. переменных зачастую оказывается трудной задачей. Установлена гамильтонова природа большинства консервативных обобщений уравнений Эйлера и даже системы уравнений Власова, описывающих плазму без столкновений. Для гамильтоновых систем, близких к линейным, развиты методы теории возмущений, позволяющие учитывать нелинейные эффекты и производить статистич. описание решений. Все перечисленные выше универсальные М. ф. н. у., за исключением уравнения Бюргерса и уравнения Хохлова – Заболотской, являются гамильтоновыми.

Точные решения. Для физики важно знать как можно больше точных решений М. ф. н. у., особенно существенно нелинейных. Простейшие из таких решений можно находить, используя очевидные свойства симметрии М. ф. н. у., а также отыскивая всевозможные автомодельные подстановки (см. *Автомодельность*). Более тонкие способы вычисления точных решений используют методы теории групп Ли. Пусть М. ф. н. у. для функции двух переменных $u(x,t)$ имеет вид

$$u_t = F(u, u_1, ..., u_n),\ u_{\mathbf{k}} = \partial^{\mathbf{k}} u/\partial x^{\mathbf{k}}. \qquad (6)$$

Функция $f(u, u_1, ..., u_l, x, \tau)$ называется симметрией уравнения (6), если оно совместно с уравнением

$$u_\tau = f(u, u_1, ..., u_l, x, \tau),$$

где τ – новая переменная. Симметрии образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона

$$\{f,h\} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{l} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{\mathbf{k}}} \frac{\partial^{\mathbf{k}} h}{\partial x^{\mathbf{k}}} - \frac{\partial h}{\partial u_{\mathbf{k}}} \frac{\partial^{\mathbf{k}} f}{\partial x^{\mathbf{k}}} \right).$$

По алгебре симметрий М. ф. н. у. восстанавливают группу Ли – Беклунда непрерывных преобразований, оставляющих М. ф. н. у. инвариантными. Точные решения М. ф. н. у. находят как решения, остающиеся инвариантными при действии какой-либо подгруппы группы Ли – Беклунда. Группа Ли – Беклунда и алгебра симметрий существуют у каждого М. ф. н. у. В большинстве случаев группа Ли – Беклунда является конечномерной. Существуют, однако, случаи, когда эта группа бесконечномерна, как у всех перечисленных выше универсальных М. ф. н. у.

Если преобразование из группы Ли – Беклунда оставляет инвариантным функционал действия гамильтонова М. ф. н. у., то оно имеет интеграл движения – функционал, не зависящий от времени. Интегралы движения образуют алгебру Ли относительно скобок Пуассона, изоморфную нек-рой подалгебре алгебры симметрий.

Перечисленные выше универсальные гамильтоновы М. ф. н. у. обладают бесконечными наборами независимых интегралов движения. Уравнения, обладающие этим свойством, несколько условно называют интегрируемыми, хотя интегрируемость доказана лишь для немногих из них. Интегрируемыми являются, в частности, одномерные уравнения Эйлера (2).

Обширный класс интегрируемых М. ф. н. у. составляют уравнения, к к-рым применим *обратной задачи рассеяния метод*. Для этих уравнений, к к-рым относятся, в частности, перечисленные выше универсальные гамильтоновы системы, возможно явное вычисление большого количества точных решений, в том числе описывающих солитоны и их взаимодействия. При помощи метода обратной задачи удается вычислять инстантонные решения уравнений Янга – Миллса, а также найти многочисленные точные решения уравнений Эйнштейна.

Если М. ф. н. у. не обладает бесконечной группой Ли – Беклунда, возможности его аналитич. исследования сильно ограничены. В ряде случаев можно, используя разложение по набору заданных функций (метод Галеркина), свести его к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, к-рую можно изучать качественными методами, а также интегрировать при помощи ЭВМ. Таким способом удается моделировать не слишком развитую турбулентность, в том числе изучать *странные аттракторы*. Наконец, если число независимых переменных, входящих в М. ф. н. у., не превышает трех, оказывается достаточно эффективным их прямое численное решение на ЭВМ.

Лит.: [1] Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; [2] Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980; [3] Ablowitz M. J., Segur N., Solitons and the inverse scattering transform, Phil., 1981; [4] Ибрагимов Н. Х., Группы преобразований в математической физике, М., 1983. *В. Е. Захаров.*

МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА – понятие, вводимое в механике для обозначения объекта, который рассматривается как точка, имеющая массу. Положение М. т. в пространстве определяется как положение геометрич. точки, что существенно упрощает решение задач механики. Практически тело можно считать М. т. в случаях, когда оно движется поступательно или когда вращательную часть его движения можно в условиях рассматриваемой задачи не учитывать (напр., при изучении движения Земли вокруг Солнца). При движении любой механич. системы (в частности, твердого тела) ее центр масс (центр тяжести) движется так же, как двигалась бы М. т. с массой, равной массе всей системы, под действием всех внешних сил, приложенных к системе.

МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ – см. *Максвелла уравнения.*

МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ – см. *Плотности матрица.*

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ – см. *Рассеяния матрица.*

***S*-МАТРИЦА** – см. *Рассеяния матрица.*

***T*-МАТРИЦА** – ядро интегрального оператора $T(z)$, связанного с резольвентой $R(z) = (H-z)^{-1}$ оператора Шредингера

$$H = -\Delta + V(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

формулой

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z), \qquad (1)$$

где $R_0(z) = (-\Delta - z)^{-1}$, Δ – лапласиан в $\mathbb{R}^n$. Представление (1) после преобразования Фурье явно описывает все полюсные сингулярности ядра резольвенты $R(z)$ в случае, когда возмущение $V(x)$ является *короткодействующим потенциалом*. При этом ядро оператора $T(z)$ является гладкой функцией и может быть найдено из интегрального уравнения:

$$T(k,k',z) = \hat{v}(k-k') - \int \hat{v}(k-q)(q^2-z)^{-1} T(q,k',z)\,dq, \qquad (2)$$

в к-ром $\hat{v}(k)$ – преобразование Фурье функции $V(x)$. Уравнение (2) является следствием определения (1) и уравнения

теории возмущений для резольвенты

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)VR(z).$$

Функция $T(k, k', z)$ имеет важный физич. смысл, так как через нее выражаются ядра волновых операторов, определяющих решение задачи рассеяния:

$$W^{\pm}(k,k') = \delta(k-k') - \frac{T(k,k',k'^2 \pm i0)}{k^2 - k'^2 \mp i0}.$$

Лит.: [1] Гольдбергер М., Ватсон К., Теория столкновений, пер. с англ., М., 1967; [2] Шмид Э., Цигельман Х., Проблема трех тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1979.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

МАТРИЧНАЯ ГРУППА – см. *Ли группа.*

МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ унитарного представления T группы G в гильбертовом пространстве H – функция $t^T_{\xi\eta}(g)$ на G, определяемая равенством

$$t^T_{\xi\eta}(g) = \langle T_g\xi|\eta\rangle,$$

где $\langle\cdot|\cdot\rangle$ – скалярное произведение в H.

Пусть G компактна, а представления T_1 и T_2 неприводимы. Тогда

$$\int t^{T_1}_{\xi_1\eta_1}(g)\overline{t^{T_2}_{\xi_2\eta_2}(g)}\,dg = \frac{1}{\dim T_1}\delta_{T_1T_2}\langle\xi_1|\xi_2\rangle\overline{\langle\eta_1|\eta_2\rangle},$$

где в левой части стоит интеграл по мере Хаара dg, через dim обозначена размерность представления, а

$$\delta_{T_1T_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } T_1 \neq T_2, \\ 1, & \text{если } T_1 = T_2. \end{cases}$$

Ю. А. Неретин.

МАЯТНИК – твердое тело, совершающее под действием приложенных сил колебания около неподвижной точки или вокруг оси. Обычно под М. понимают тело, совершающее колебания под действием силы тяжести; при этом ось М. не должна проходить через центр тяжести тела. Простейший М. состоит из небольшого массивного груза C, подвешенного на нити (или легком стержне) длиной l. Если считать нить нерастяжимой и пренебречь размерами груза по сравнению с длиной нити, а массой нити по сравнению с массой груза, то груз на нити можно рассматривать как *материальную точку*, находящуюся на неизменном расстоянии l от точки подвеса O (рис. 1). Такой М. называется математическим. Если же колеблющееся тело нельзя рассматривать как материальную точку, то М. называется физическим.

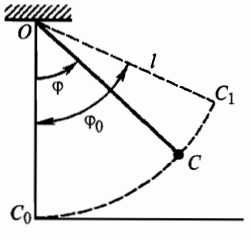


Рис. 1. Математический маятник.

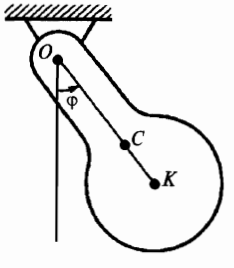


Рис. 2. Физический маятник.

Математический маятник. Если М., отклоненный от равновесного положения C_0, отпустить без начальной скорости или сообщить точке C скорость, направленную перпендикулярно OC и лежащую в плоскости начального отклонения, то М. будет совершать колебания в одной вертикальной плоскости и точка C будет двигаться по дуге окружности (плоский, или круговой, математич. М.). В этом случае положение М. определяется одной координатой, напр. углом отклонения φ от положения равновесия. В общем случае колебания М. не являются гармоническими; их период T зависит от амплитуды. Если же отклонения М. малы, он совершает колебания, близкие к гармоническим, с периодом:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где g – ускорение свободного падения; в этом случае период T не зависит от амплитуды, то есть колебания изохронны.

Физический маятник. М. представляет собой твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса (рис. 2). Движение такого М. вполне аналогично движению кругового математич. М. При малых углах отклонения φ М. также совершает колебания, близкие к гармоническим, с периодом:

$$T = 2\pi\sqrt{I/Mgl},$$

где I – момент инерции М. относительно оси подвеса, l – расстояние от оси подвеса O до центра тяжести C, M – масса М. Следовательно, период колебаний физич. М. совпадает с периодом колебаний такого математич. М., к-рый имеет длину

$$l_0 = I/Ml.$$

Эта длина называется приведенной длиной данного физич. М. Точка K на продолжении прямой OC, находящаяся на расстоянии l_0 от оси подвеса, называется центром качания физич. М.

С. М. Targ.

МГНОВЕННАЯ ВИНТОВАЯ ОСЬ – см. *Винтовое движение.*

МГНОВЕННАЯ ФАЗА – см. *Свободное гармоническое колебание.*

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ – см. *Твердое тело*; плоское движение.

МЕДЛЕННОЕ ПЕРЕМЕННОЕ – см. *Быстрые и медленные переменные, Быстромедленные системы.*

МЕДЛЕННОЕ ПОЛЕ – часть разложения фурье-поля. См. *Интегрирования метод.*

МЕДЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Быстро-медленные системы, Понтрягина–Родыгина теоремы.*

МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ – см. *Фазовая скорость.*

МЕДЛЕННЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ – см. *Ударные волны.*

МЕЗОН – *адрон* с целым *спином.*

МЕЗОННЫЙ ФОРМФАКТОР – см. *Формфактор.*

МЕМБРАНЫ ЗАДАЧА – задача отыскания формы [смещения $u(x)$, $x \in D$], которую примет упругая мембрана, закрепленная на границе ∂D области D, при растяжении телом заданной формы [препятствием $\varphi \in C(\overline{D})$, $\varphi \leqslant 0$ на ∂D], если внешние силы отсутствуют. Решение u должно минимизировать интеграл энергии $I(v) = \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2$ на множестве допустимых смещений, то есть на $K = \{v \in \mathring{W}^1_2(D) \,|\, v \geqslant \varphi \text{ в } D\}$. М. з. является частным случаем *препятствия задачи.* Множество $\partial\{x \in \overline{D}: v > \varphi\}$, на к-ром мембрана «отлипает» от препятствия, априори неизвестно, и оно является свободной (неизвестной) границей.

Лит.: [1] Фридман А., Вариационные принципы и задачи со свободными границами, М., 1990.

Т. Н. Рожковская.

МЕМБРАНЫ УРАВНЕНИЕ – см. *Волновое уравнение.*

МЕРОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ – функция комплексного переменного z, которую можно представить в виде частного двух *целых функций*, то есть частного сумм двух сходящихся на всей комплексной плоскости степенных рядов. М. ф.– аналитич. функция комплексного переменного z, не имеющая других конечных особых точек, кроме полюсов. В любой ограниченной области комплексной плоскости М. ф. имеет лишь конечное число полюсов. К М. ф. относятся многие важные функции и классы функций (рациональные, $\operatorname{tg} z = \sin z/\cos z$, $\operatorname{ctg} z = \cos z/\sin z$, $\sec z = 1/\sin z$, $\operatorname{cosec} z = 1/\cos z$, эллиптич. функции и др.).

МЕРОМОРФНЫЙ АБЕЛЕВ ДИФФЕРЕНЦИАЛ – см. *Абелев дифференциал.*

МЕТРИКА – обобщение понятия расстояния между точками евклидова пространства на множества, в которых можно ввести М. (метрические пространства). Для точек x, y такого пространства М. $\rho(x, y)$ – это действительная неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\rho(x, y) = 0$ лишь при $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Вид М. зависит как от самого пространства, так и от выбора системы координат в нем. Простейший пример М.– расстояние

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2\right]^{1/2}$$

в декартовых координатах евклидова пространства. М. евклидова пространства в криволинейных координатах и М. риманова пространства определяются *метрическим тензором.* М. гильбертова пространства задается его *нормой* (или скалярным произведением). Понятие М. применяется и в тех случаях, когда не все условия 1)–3) выполнены: напр., если $\rho(x, y) = 0$ не только при $x = y$, то ρ называют псевдометрикой. Если М. не является положительно определенной, то ее называют *индефинитной метрикой*; физич. примером такой ситуации служит М. пространства Минковского в теории относительности. *В. П. Павлов.*

МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ – основная геометрическая структура, которой наделяется пространственно-временное многообразие в специальной и общей теории относительности; определяется заданием поля симметричного ковариантного тензора 2-го ранга с отличным от нуля определителем – *метрического тензора.*

Метрич. тензор в специальной теории относительности имеет вид:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$$

(псевдоевклидова метрика сигнатуры –2); пространственно-временное многообразие с такой метрикой называется пространством-временем Минковского. В общей теории относительности вводится метрич. тензор $g_{\mu\nu}(x)$ более общего вида, удовлетворяющий, однако, требованию, чтобы в достаточно малой окрестности любой заданной пространственно-временной точки x специальным выбором координат $g_{\mu\nu}(x)$ можно было свести к $\eta_{\mu\nu}$; такое пространство-время является псевдоримановым пространством сигнатуры –2.

М. п.-в. задает квадрат интервала – «расстояния» между событиями, с к-рыми сопоставляются точки пространства-времени:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

При преобразованиях пространственно-временных координат метрич. тензор, вообще говоря, изменяется (такие преобразования включают и переход к произвольно движущейся в каждой точке системе отсчета) так, чтобы величина ds^2 оставалась инвариантной. Существуют, однако, преобразования, оставляющие метрич. тензор форминвариантным (преобразования изометрии), они выражают собой геометрич. симметрии пространства-времени, обусловленные физич. содержанием теории. Так, метрич. тензор пространства-времени Минковского в специальной теории относительности не изменяется при преобразованиях координат из группы Пуанкаре, включающих переносы начала отсчета пространственных координат и времени, повороты пространственных осей и *Лоренца преобразования.* Поскольку последние интерпретируются как описывающие переход от одной инерционной системы отсчета к другой, инвариантность метрики пространства-времени Минковского означает, что уравнения, записанные в лоренц-ковариантной форме, будут автоматически удовлетворять принципу относительности Эйнштейна.

В общей теории относительности существование преобразований, не изменяющих М. п.-в., возможно лишь при наличии соответствующих симметрий гравитационного поля. Так, метрич. тензор пространства-времени Шварцшильда инвариантен относительно пространственных поворотов и временных сдвигов, что отражает центральный характер гравитационного поля и его статичность; структура метрич. тензора в моделях Фридмана, описывающих крупномасштабную структуру пространства-времени Вселенной в целом, отражает факт однородности и изотропии Вселенной в больших масштабах. Если нек-рое преобразование изометрии порождается векторным полем, то такое векторное поле называется полем Киллинга (W. Killing, 1892) и удовлетворяет уравнению

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0,$$

где точкой с запятой обозначена ковариантная производная, согласованная с метрикой.

Следует иметь в виду, что М. п.-в. отражает не только характер гравитационного поля, но и выбор системы координат в пространстве-времени (системы отсчета). Так, переход к криволинейным координатам в пространстве-времени Минковского (к ускоренной системе отсчета) приводит к метрич. тензору общего вида, однако собственно гравитационного поля в этом случае нет. Истинное гравитационное поле связано с тензором кривизны Римана – Кристоффеля, к-рый равен нулю в плоском пространстве-времени в любой системе отсчета.

М. п.-в. в случае слабого гравитационного поля непосредственно связана с ньютоновским гравитационным потенциалом φ, а именно:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

где $h_{\mu\nu}$ – малые добавки, характеризующие отклонение метрики от плоской, причем

$$h_{00} = 2\varphi/c^2.$$

Помимо задания расстояний в пространстве-времени М. п.-в. служит для определения «длины» 4-векторов A:

$$\sqrt{A^2} = \sqrt{A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}},$$

а также позволяет ввести операции поднятия и опускания индексов у векторов и тензоров. Определитель метрич. тензора задает инвариантный элемент объема в пространстве-времени:

$$d\Omega = \sqrt{-g}\,d^4x,$$

где g – определитель метрич. тензора. *Д. В. Гальцов.*

***G*-МЕТРИКА** – см. *Пространство с индефинитной метрикой.*

МЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ – см. *Связность.*

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ – теория гравитации, основанная на следующих двух принципах:

1) пространственно-временное многообразие наделено метрикой;

2) пространственно-временное многообразие эквивалентно пространству Минковского (метрика удовлетворяет принципу эквивалентности).

Различие известных М. т. г. проявляется в законах образования метрики. Так, в общей теории относительности метрика, отличная от плоской, создается тензором энергии-импульса вещества и негравитационных полей (возможны, однако, случаи ненулевой кривизны и в пустоте), а в теории Бранса – Дикке (см. [1]) – тензором энергии-импульса вещества, негравитационных полей и постоянно присутствующего скалярного поля.

Лит.: [1] Brans G., Dicke R., «Phys. Rev.», 1961, v. 124, № 3, p. 925–35; [2] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, т. 3, пер. с англ., М., 1977. *А. Т. Ильичев.*

МЕТРИЧЕСКАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ – см. *Эргодичность.*

МЕТРИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ – см. *Изоморфизм* динамических систем.

МЕТРИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР – см. *Гильбертово пространство.*

МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР – дважды ковариантный симметричный *тензор* $g_{ij}(x)$, заданный в области *риманова пространства* с координатами $x=(x^1, x^2, ..., x^n)$, причем матрица g_{ij} положительно определена: $g_{ij}T^iT^j>0$, если вектор $T\neq 0$ (принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам). При замене координат $x^i\to y^i(x)$ М.т. g_{ij} переходит в

$$\tilde{g}_{ij}=g_{kl}(\partial x^k/\partial y^i)\,(\partial x^l/\partial y^j).$$

М.т. иногда называют римановой метрикой, поскольку он определяет расстояние в римановом пространстве: если задана кривая $x^i=x^i(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, то ее длина

$$s=\int_a^b dt\left[g_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right]^{1/2},$$

а элемент длины ds определен формулой

$$ds=g_{ij}dx^idx^j,$$

правая часть к-рой называется первой (основной) квадратичной формой. Элемент объема

$$dV=\sqrt{g}\;dx^1...dx^n,$$

а объем $V(U)$ области U равен

$$V(U)=\int_U\sqrt{g}\;dx^1\ldots dx^n,$$

где $g=\det\|g_{ij}\|$. Если существуют координаты z^i, в к-рых М.т. имеет вид $g_{ij}(z)=\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, то метрика называется евклидовой, а сама область риманова пространства является областью евклидова пространства.

Кроме М.т. в римановом пространстве вводится еще одна независимая структура – *связность*, задающая *ковариантную производную* ∇_k. М.т. называется согласованным со связностью, если он ковариантно постоянен:

$$\nabla_k g_{ij}=0.$$

Тогда коэффициенты связности, или *Кристоффеля символы*, однозначно выражаются через М.т.:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

В окрестности любой точки x_0 можно ввести нормальные (римановы) координаты такие, что $\Gamma_{ij}^k|_{x=x_0}=0$ или $\partial g_{ij}/\partial x^k|_{x=x_0}=0$. Тогда в этой окрестности

$$g_{ij}=\delta_{ij}-(1/3)R_{ij,\,kl}x^kx^l+\ldots\,.$$

Коэффициенты $R_{ij,\,kl}$ характеризуют отличие М.т. от евклидова и являются компонентами *кривизны тензора*. Помимо внутренних характеристик многообразия М.т. задает скалярное произведение векторов $\xi=(\xi^1, ..., \xi^n)$ и $\eta=(\eta^1, ..., \eta^n)$, касательных к многообразию в данной точке:

$$(\xi,\eta)=g_{ij}\xi^i\eta^j;$$

скалярное произведение не зависит от выбора системы координат.

Понятие М.т. общеупотребительно при описании сплошной среды, при формулировке теории поля в криволинейных координатах, а особенно – в теории относительности и теории тяготения.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [4] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, 2 изд., М., 1986.

В. П. Павлов.

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Метрика.*

МЕХАНИКА – наука о механическом движении материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между ними. Под механич. движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел или их частиц в пространстве. В природе – это движение небесных тел, колебания земной коры, воздушные и морские течения и т. п., а в технике – движения различных летательных аппаратов и транспортных средств, частей двигателей, машин и механизмов, деформации элементов различных конструкций и сооружений, движения жидкостей и газов и многое другое. Рассматриваемые в М. взаимодействия представляют собой те действия тел друг на друга, результатами к-рых являются изменения скоростей точек этих тел или их деформации, напр. притяжения тел по закону всемирного тяготения, взаимные давления соприкасающихся тел, воздействия частиц жидкости или газа друг на друга и на движущиеся в них тела.

Под М. обычно понимают так наз. классическую механику, в основе к-рой лежат *Ньютона законы механики*, а предметом ее изучения являются движения любых материальных тел (кроме элементарных частиц), совершаемые со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Движение тел со скоростями порядка скорости света рассматриваются в *относительности теории*, а внутриатомные явления и движение элементарных частиц изучаются в квантовой механике.

При изучении движения материальных тел в М. вводят ряд абстрактных понятий, отражающих те или иные свойства реальных тел; ими являются:

1) материальная точка – объект пренебрежимо малых размеров, имеющий массу; это понятие применимо, когда тело движется поступательно или когда в изучаемом движении можно пренебречь вращением тела вокруг его центра масс.

2) Абсолютно твердое тело – тело, расстояние между двумя любыми точками к-рого всегда остается неизменным; это понятие применимо, когда можно пренебречь деформацией тела.

3) Сплошная изменяемая среда; это понятие применимо, когда при изучении движения изменяемой среды (деформируемого твердого тела, жидкости, газа) можно пренебречь молекулярной структурой среды. При изучении сплошных сред прибегают к следующим абстракциям, отражающим при данных условиях наиболее существенные свойства соответствующих реальных тел: идеально упругое тело, пластич. тело, идеальная жидкость, вязкая жидкость, идеальный газ и др.

В соответствии с этим М. разделяют на М. материальной точки, М. системы материальных точек, М. абсолютно твердого тела и М. сплошной среды; последняя в свою очередь подразделяется на теорию упругости, теорию пластичности, гидродинамику, аэродинамику, газовую динамику и др. В каждом из этих подразделов в соответствии с характером решаемых задач выделяют: *статику* – учение о равновесии тел под действием сил, *кинематику* – учение о геометрич. свойствах движения тел и *динамику* – учение о движении тел под действием сил. Изучение основных законов и принципов, к-рым подчиняется механич. движение тел, и вытекающих из этих законов и принципов общих теорем и уравнений составляет содержание так наз. общей, или теоретической, механики. Разделами М., имеющими самостоятельное значение, являются также *колебаний и волн теория*, теория *устойчивости равновесия* и *устойчивости движения*, теория *гироскопа, математическая теория*, механика тел переменной массы, теория автоматич. регулирования, теория *удара* и др. Важное место в М., особенно в М. сплошных сред, занимают экспериментальные исследования, проводимые с помощью разнообразных механич., оптич., электрич. и других физич. методов и приборов.

М. тесно связана со многими другими разделами физики. Ряд понятий и методов М. при соответствующих обобщениях находит приложение в оптике, статистич. физике, квантовой М., электродинамике, теории относительности и др. (см., напр., *Действие, Лагранжа функция, Лагранжа уравнения* в общей механике). Кроме того, при решении

ряда задач газовой динамики, теории взрыва, теплообмена в движущихся жидкостях и газах, динамики разреженных газов, магнитной гидродинамики и др. одновременно используются методы и уравнения как теоретич. М., так и термодинамики, молекулярной физики, теории электричества и др. Важное значение М. имеет для многих разделов астрономии, особенно для небесной М.

Часть М., непосредственно связанную с техникой, составляют многочисленные общетехнич. и специальные дисциплины, такие как гидравлика, сопротивление материалов, строительная М., кинематика механизмов, динамика машин и механизмов, теория гироскопич. устройств, внешняя баллистика, динамика ракет, теория движения наземных, морских и воздушных транспортных средств, теория регулирования и управления движением различных объектов и др. Все эти дисциплины пользуются уравнениями и методами теоретич. М. Таким образом, М. является одной из научных основ многих областей современной техники.

Основные понятия и методы механики. Основными кинематич. мерами движения в М. являются: для точки – ее *скорость* и *ускорение*, а для твердого тела – скорость и ускорение поступательного движения и *угловая скорость* и *угловое ускорение* вращательного движения. Кинематич. состояние деформируемого твердого тела характеризуется относительными удлинениями и сдвигами его частиц; совокупность этих величин определяет так наз. тензор деформаций. Для жидкостей и газов кинематич. состояние характеризуется тензором скоростей деформаций; при изучении поля скоростей движущейся жидкости пользуются также понятием вихря, характеризующего вращение частицы.

Основной мерой механич. взаимодействия материальных тел в М. является *сила*. Одновременно в М. пользуются понятием *момента силы* относительно точки и относительно оси. В М. сплошной среды силы задаются их поверхностным или объемным распределением, то есть отношением величины силы к площади поверхности (для поверхностных сил) или к объему (для массовых сил), на к-рые соответствующая сила действует. Возникающие в сплошной среде внутренние напряжения характеризуются в каждой точке среды касательными и нормальными напряжениями, совокупность к-рых представляет собой величину, называемую тензором напряжений. Среднее арифметическое трех нормальных напряжений, взятое с обратным знаком, определяет величину, называемую давлением в данной точке среды.

На движение тела помимо действующих сил оказывает влияние степень его инертности. Для материальной точки мерой инертности является ее *масса*. Инертность материального тела зависит от его общей массы и от распределения масс в теле, к-рое характеризуется положением центра масс и величинами, называемыми осевыми и центробежными *моментами инерции*; совокупность этих величин определяет так наз. тензор инерции. Инертность жидкости или газа характеризуется их *плотностью*.

В основе М. лежат три закона Ньютона. Первые два справедливы по отношению к так наз. *инерциальной системе отсчета*. Второй закон дает основные уравнения для решения задач динамики точки, а вместе с третьим – для решения задач динамики системы материальных точек. В М. сплошной среды кроме законов Ньютона используются еще законы, отражающие свойства данной среды и устанавливающие для нее связь между тензором напряжений и тензорами деформаций или скоростей деформаций. См. *Пластичности математическая теория, Упругости математическая теория*.

Важное значение для решения задач М. имеют понятия о динамич. мерах движения, к-рыми являются *количество движения, момент количества движения* (или кинетич. момент) и *кинетическая энергия*, и о мерах действия силы, каковыми служат *импульс силы* и *работа*. Соотношение между мерами движения и мерами действия силы дают так наз. общие теоремы динамики. Эти теоремы и вытекающие из них законы сохранения количества движения, момента количества движения и механич. энергии выражают свойства движения любой системы материальных точек и сплошной среды.

Эффективные методы изучения равновесия и движения несвободной механич. системы (см. *Связи механические*) дают *вариационные принципы классической механики*.

При решении задач М. широко используются вытекающие из ее законов или принципов дифференциальные уравнения движения материальной точки, твердого тела и системы материальных точек, в частности уравнения Лагранжа, канонич. уравнения, уравнение Гамильтона – Якоби, а в М. сплошной среды – соответствующие уравнения равновесия или движения этой среды, уравнение неразрывности (сплошности) среды и уравнение энергии.

Современные проблемы механики. К числу этих проблем относятся уже отмечавшиеся задачи теории колебаний (особенно нелинейных), динамики твердого тела, теории устойчивости движения, а также М. тел переменной массы и динамики космич. полетов. Все большее значение приобретают задачи, требующие применения вероятностных методов расчета, то есть задачи, в к-рых, напр., для действующих сил известна лишь вероятность того, какие значения они могут иметь. В М. непрерывной среды весьма актуальны проблемы: изучения поведения макрочастиц при изменении их формы, что связано с разработкой более строгой теории турбулентного течения жидкости; решения задач теории пластичности и ползучести; создания обоснованной теории прочности и разрушения твердых тел.

Большой круг задач М. связан с изучением движения плазмы в магнитном поле, то есть с решением одной из самых актуальных проблем современной физики – осуществлением управляемого термоядерного синтеза. В гидродинамике ряд важнейших задач связан с проблемами больших скоростей в авиации, баллистике, турбиностроении и двигателестроении. Много новых задач возникает на стыке М. с другими областями наук. Сюда относятся проблемы гидротермохимии, то есть исследования механич. процессов в жидкостях и газах, вступающих в химич. реакции, изучение сил, вызывающих деление клеток, механизма образования мускульной силы и др.

При решении многих задач М. используются электронно-вычислительные и аналоговые машины; разработка методов решения новых задач М. с помощью этих машин (особенно М. сплошной среды) – также весьма актуальная проблема.

Лит.: [1] Галилей Г., Соч., т. 1, М.–Л., 1934; [2] Ньютон И., Математические начала натуральной философии, пер. с лат., М., 1989; [3] Эйлер Л., Основы динамики точки, пер. с лат., М.–Л., 1938; [4] Д'Аламбер Ж., Динамика, пер. с франц., М.–Л., 1950; [5] Лагранж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц., 2 изд., т. 1–2, М.–Л., 1950; [6] Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.–Л., 1952; [7] Суслов Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.–Л., 1946; [8] Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, 9 изд., ч. 1, 6 изд., ч. 2, М., 1972; [9] Моисеев Н. Д., Очерки развития механики, М., 1961; [10] Космодемьянский А. А., Очерки по истории механики, 2 изд., М., 1964; [11] История механики с древнейших времен до конца XVIII в., М., 1971; [12] Веселовский И. Н., Очерки по истории теоретической механики, М., 1974.

С. М. Тарг.

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВЯЗИ – см. *Связи механические*.

МИКРОКАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ – классический или квантовый ансамбль Гиббса, отвечающий случаю изолированной системы. В качестве термодинамич. параметра используется энергия E. Для классич. непрерывной системы из N частиц с координатами $x_i \in \Lambda$, импульсами $p_i \in \mathbb{R}^\nu$ и гамильтонианом

$$H(p_1,\dots,p_N;x_1,\dots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2m}+U(x_1,x_2,\dots,x_N),$$

где U – потенциальная энергия, предполагая, что система находится в ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ и частицы упруго отражаются от границ Λ, М. а. определяется одной из сле-

дующих мер на фазовом пространстве $(\mathbb{R}^\nu)^N \times \Lambda^N$:

$$\frac{1}{N!}\delta^\Delta(H(\omega)-E)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{N!}\delta^\Delta(H(p_1,\dots,p_N;x_1,\dots,x_N)-E)\,dp_1\dots dp_N dx_1\dots dx_N;$$

$$\frac{1}{N!}\delta^-(H(\omega)-E)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{N!}\delta^-(H(p_1,\dots,p_N;x_1,\dots,x_N)-E)\,dp_1\dots dp_N dx_1\dots dx_N.$$

Здесь δ^Δ и δ^- – характеристич. функции интервалов $(-\Delta, 0)$ и $(-\infty, 0)$ соответственно.

В квантовом случае М. а. определяется следующими ненормированными матрицами плотности в пространстве $L^2(\Lambda^N)$ квадратично интегрируемых функций N переменных $x_i \in \Lambda$:

$$\delta^\Delta(H_N(\Lambda)-E) = \sum_{E_{N\alpha}\in(E-\Delta,E)} P_{N\alpha},$$

$$\delta^-(H_N(\Lambda)-E) = \sum_{E_{N\alpha}<E} P_{N\alpha},$$

где $E_{N\alpha}$ – собственные значения гамильтониана $H_N(\Lambda)$, а $P_{N\alpha}$ – проектор на соответствующее собственное подпространство. Предполагается, что на границе области Λ зануляются собственные функции $H_N(\Lambda)$. В случае бозонов (фермионов) следует ограничить операторы $H_N(\Lambda)$ и $P_{N\alpha}$ на пространства $L^2_\varepsilon(\Lambda^N)$ симметричных $(\varepsilon=+)$ [антисимметричных $(\varepsilon=-)$] относительно перестановок своих N аргументов функций.

См. также *Статистический ансамбль, Статистической механики математические задачи, Термодинамические функции.*

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1971.

Д. П. Санкович.

МИКРОКАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Гиббса распределения, Статистической механики математические задачи.*

МИКРОЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ – раздел математики, главными элементами которого являются *гиперфункции.*

МИКРООБРАТИМОСТЬ – см. *Квантовое условие* детального равновесия.

МИЛНОРА РАССЛОЕНИЕ – *расслоение*, связанное с деформацией

$$F(x,\lambda):(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^k,\,0\times 0)\to(\mathbb{C},0)$$

ростка голоморфной функции f: $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$.

Пусть Σ – дискриминант деформации, B^n_r – шар радиуса r в $\mathbb{C}^n$, B^k_δ – шар радиуса δ в $\mathbb{C}^k$, π: $B^n_r \times B^k_\delta \to B^k_\delta$ – проекция. При достаточно малых r и δ ограничение проекции π на

$$(B^n_r \times B^k_\delta \cap F^{-1}(0)) \setminus \pi^{-1}(\Sigma)$$

является локально тривиальным расслоением. Оно и называется расслоением Милнора деформации F ростка f.

С. В. Чмутов.

МИЛНОРА ЧИСЛО ростка f: $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ – число μ, определяемое одним из трех эквивалентных способов:

1) $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle\langle x_1, \dots, x_n\rangle\rangle / (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$.

2) Пусть $\tilde{f}$ – малое шевеление f, имеющее только морсовские критич. точки, μ – число критич. точек f.

3) Слой *Милнора расслоения* имеет гомотопич. тип букета μ сфер размерности $n-1$.

С. В. Чмутов.

МИНИВЕРСАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ – см. *Версальная деформация.*

МИНИМАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – см. *Минимальное множество.*

МИНИМАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, локально минимальная поверхность,– поверхность, обладающая следующим свойством: любое малое возмущение поверхности не увеличивает площадь этой поверхности. При этом возмущение считается малым, если мала его амплитуда и оно сосредоточено в малой области пространства. Другими словами, М. п.– это экстремали (критические поверхности) для функционала площади S (см. *Вариационное исчисление в целом*).

Пусть M^2 – гладкая двумерная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная, напр., в виде графика функции $z=f(x, y)$, где x, y, z – декартовы координаты. Площадь поверхности выражается интегралом

$$S(f) = \int \left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^{1/2} dxdy.$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет в данном случае вид:

$$(1+f_x^2)f_{yy} - 2f_{xy}f_xf_y + (1+f_y^2)f_{xx} = 0.$$

Его решения – это функции $z=f(x, y)$, графики к-рых – минимальные поверхности. Это уравнение называется уравнением минимальных поверхностей. Любая поверхность в трехмерном пространстве может быть задана локально (в окрестности каждой своей неособой точки) в виде графика $z=f(x, y)$ при подходящем выборе координат. В то же время, в целом поверхность может не задаваться графиком однозначной функции. В каждой неособой точке гладкой поверхности можно вычислить ее среднюю кривизну H. Минимальные поверхности могут быть охарактеризованы как поверхности нулевой средней кривизны (то есть $H=0$ в каждой неособой точке М. п.).

М. п. возникают во многих важных вопросах современной механики, математич. физики (в частности, в теории струн, теории мембран, гидростатике, биологии).

Пусть двумерная поверхность в трехмерном пространстве является границей раздела (поверхностью) двух физич. сред, находящихся в равновесии (напр., газ–газ, газ–жидкость, жидкость–жидкость и т. п.). Тогда средняя кривизна H поверхности постоянна и равна $H=h(p_1-p_2)$, где постоянная $\lambda=1/h$ называется коэффициентом поверхностного натяжения (на поверхности раздела), а p_1-p_2 – это разность давлений в средах.

Таким образом, поверхности, разделяющие физич. среды с равными давлениями $(p_1=p_2)$, – это М. п. Классич. пример – мыльные пленки, затягивающие граничный контур (напр., изготовленный из проволоки). Многомерные М. п. определяются как экстремальные (критические) поверхности для функционала многомерного объема, то есть они не увеличивают свой объем под влиянием любых достаточно малых возмущений. Практически все свойства двумерных М. п. в трехмерном пространстве имеют свои аналоги в теории многомерных М. п.

Лит.: [1] Фоменко А. Т., Вариационные методы в топологии, М., 1982; [2] его же, Топологические вариационные задачи, М., 1985; [3] Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т., Минимальные поверхности и проблема Плато, М., 1987.

А. Т. Фоменко.

МИНИМАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО топологической динамической системы $\{S_t\}$ – непустое замкнутое инвариантное (то есть целиком состоящее из траекторий) подмножество F фазового пространства W системы, которое не имеет собственных замкнутых инвариантных подмножеств. Последнее эквивалентно тому, что каждая из лежащих в F траекторий всюду плотна в F. Понятие М. м. ввел Дж. Биркгоф (G. Birkhoff, см. [1]) применительно к случаю потока («время» t пробегает действительные числа). Он доказал (см. [1], [2]), что если F – компактное М. м. и $w \in F$, то для любой окрестности U точки w множество тех t, для к-рых $S_t w \in U$, относительно плотно (то есть имеется такое l, что в каждом «отрезке времени» $[s, s+l]$ длины l содержится хоть одно t с $S_t w \in U$); обратно, если W – полное метрич. пространство и точка w обладает указанным выше свойством, то замыкание траектории $\{S_t w\}$ – компактное

М. м. (то же самое справедливо и для *каскадов*; о более общих группах преобразований см., напр., [3] или [4]). Сформулированное свойство точки w (и ее траектории) Дж. Биркгоф назвал рекуррентностью этой точки (и траектории), употребителен также предложенный У. Готшалком и Г. Хедлундом [3] другой вариант терминологии, в к-ром это свойство называется почти периодичностью точки w. Если $F=W$, то саму динамич. систему называют минимальной.

Если нек-рая траектория имеет компактное замыкание, то в нем содержится нек-рое М. м. F (для полугрупп непрерывных преобразований $\{S_t\}$ с неотрицательными действительными или целыми t справедлив аналог этого результата, причем на F преобразования S_t уже обратимы [5]). Однако исследование предельного поведения траекторий динамич. системы не сводится к изучению одних только М. м. последней. Очень просто устроено М. м. гладкого потока класса C^2 на двумерной замкнутой поверхности – это либо точка, либо замкнутая траектория, либо вся поверхность, к-рая в этом случае является тором (теорема Шварца, см. [6]). В общем случае строение М. м. может быть весьма сложным (в связи с этим, дополнительно к сказанному в [2]–[4], надо указать, что минимальность динамич. системы не накладывает никаких ограничений на ее эргодич. свойства по отношению к имеющимся у нее инвариантным мерам [7]). М. м.– основной объект изучения в топологич. динамике.

Лит.: [1] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.– Л., 1941; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.– Л., 1949; [3] Gottschalk W. H., Hedlund G. A., Topological dynamics, Providence, 1955; [4] Бронштейн И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Киш., 1975; [5] Левитан Б. М., Жиков В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978; [6] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [7] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129–262.

Д. В. Аносов.

МИНИМИЗИРУЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ – см. *Дирихле принцип*.

МИНКОВСКОГО ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ – четырехмерное псевдоевклидово пространство сигнатуры (1, 3), предложенное Г. Минковским (H. Minkowski, 1908) в качестве геометрической интерпретации пространства-времени специальной теории относительности. «Воззрения на пространство-время... возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции, и лишь некоторый вид соединения обоих должен сохранить самостоятельность» (см. [1]).

Каждому событию соответствует точка М. п.-в., координаты трехмерного физич. пространства, а четвертая – координата ct, где c – скорость света, t – время события. Обычно используются прямоугольные декартовы координаты x^1, x^2, x^3 события в нек-рой *инерциальной системе отсчета*, $x^0=ct$. Геометрич. свойства М. п.-в. определяются выражением для квадрата так наз. интервала между двумя событиями

$$s^2=(\Delta x^0)^2-\sum_i(\Delta x^i)^2.$$

При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой пространственные координаты и время преобразуются друг в друга посредством *Пуанкаре преобразований*. Геометрия М. п.-в. позволяет наглядно интерпретировать кинематич. релятивистские эффекты (сокращение длины, замедление времени и т. д.).

К открытию фундаментальной важности о том, что пространство и время едины и геометрия его псевдоевклидова, привело изучение электромагнитных явлений (хотя даже тогда, когда были открыты уравнения Максвелла–Лоренца, никто не предполагал, что они изменят сложившееся представление о пространстве и времени. Этим открытием и обязаны мы в высшей степени Г. Минковскому, несмотря на то, что главное в этом направлении уже содержалось в работах А. Пуанкаре (H. Poincaré) (см. [1]). Именно он первый установил, что величина, впоследствии названная интервалом, инвариантна относительно *Лоренца преобразований*.

Лит.: [1] Принцип относительности, сб. статей, М., 1973; [2] Логунов А. А., Лекции по теории относительности и гравитации, М., 1987; [3] его же, К работам Анри Пуанкаре «О динамике электрона», М., 1984.

М. И. Войцеховский.

МИРОВАЯ ЛИНИЯ – линия в *пространстве-времени*, являющаяся траекторией движущейся точки или последовательностью событий. Впрочем, вернее было бы говорить об изображении не «процесса движения», а об «истории существования» данной точки. Дело в том, что движение рассматривалось всегда относительно той или иной системы отсчета, между тем как М. л. является построением абсолютным, не зависящим от выбора системы отсчета и в таком выборе вообще не нуждающимся (см. [1]).

При этом под событием понимается элементарное событие, то есть происходящее в столь малой области пространства и в столь короткий промежуток времени, что, идеализируя положение вещей, их можно считать происходящими в одном месте (с пространственными координатами (x, y, z)) и мгновенно (в момент времени t).

Обычно рассматриваются гладкие (или кусочно гладкие) М. л.; они разделяются на три класса: пространственноподобные, изотропные и времениподобные в зависимости от того, каким является четырехмерный вектор, касательный к М. л. Так, напр., М. л. материальной точки с положительной массой покоя является пространственноподобной кривой; М. л. материальной точки с нулевой массой покоя (такая точка является неквантовой моделью фотона, нейтрино и других элементарных частиц нулевой массы) является изотропной кривой.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1964.

М. И. Войцеховский.

МИРОВАЯ ТОЧКА – точка *пространства-времени*, описывающая событие, происшедшее в данной точке пространства в некоторый момент времени. *М. И. Войцеховский.*

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ТЕОРЕМА о разложении мероморфной функции – одна из основных теорем **теории** *аналитических функций*, дающая для *мероморфных функций* аналог разложения рациональной функции на простейшие дроби. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность различных комплексных чисел

$$|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\infty,$$

и $\{g_n(z)\}$ – последовательность рациональных функций вида:

$$g_n(z)=\sum_{k=1}^{l_n}\frac{c_{nk}}{(z-a_n)^k}, \tag{1}$$

так что точка a_n является единственным полюсом соответствующей функции $g_n(z)$. Тогда существуют мероморфные функции $f(z)$ в плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, имеющие полюсы в точках a_n и только в них с заданными главными частями (1) *Лорана рядов*, соответствующих точкам a_n. Все эти функции $f(z)$ представимы в виде разложения Миттаг-Леффлера:

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(z)+p_n(z)|, \tag{2}$$

где $p_n(z)$ – нек-рые многочлены, подбираемые по a_n и $g_n(z)$ так, чтобы ряд (2) равномерно (после выбрасывания конечного числа членов) сходился на любом компакте $K\subset\mathbb{C}$, $h(z)$ – произвольная целая функция.

Из М.-Л. т. вытекает, что любая наперед заданная мероморфная функция $f(z)$ в $\mathbb{C}$ с полюсами a_n и соответствующими главными частями $g_n(z)$ разложений $f(z)$ в ряды Лорана в окрестности a_n разлагается в ряд (2), где целая

функция $h(z)$ определяется по $f(z)$. Г. Миттаг-Леффлер (G. Mittag-Leffler, 1905) указал общую конструкцию многочленов $p_n(z)$, отыскание же целой функции $h(z)$ по данной $f(z)$ иногда представляет собой более трудную задачу. Для получения разложения (2) можно применить методы теории *вычетов*. *Е. Д. Соломенцев.*

МИУРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – преобразование

$$u(x,t)=v'_x(x,t)+v^2(x,t),$$

которое любое решение уравнения Миуры – Кортевега – де Фриса

$$v_t-6v^2v_x+v_{xxx}=0$$

переводит в решение *Кортевега – де Фриса уравнения*

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0.$$

Обратное, вообще говоря, неверно, но справедливо тождество

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+2v\right)\left(v_t-6v^2v_x+v_{xxx}\right).$$

Если $u(x,t)$ – решение уравнения Кортевега – де Фриса, то $v(x,t)$ удовлетворяет обобщенному уравнению Миуры – Кортевега – де Фриса

$$v_t-6v^2v_x+v_{xxx}=c(t)\exp\left[-2\int_0^x v(\xi,t)\,d\xi\right]$$

с нек-рой функцией $c(t)$.

Обращение М. п. сводится к решению уравнения Риккати, к-рое подстановкой $v=\psi'_x/\psi$ преобразуется в уравнение Штурма – Лиувилля

$$\psi''_{xx}-u\psi=0.$$

Лит.: [1] Солитоны в действии, пер. с англ., М., 1981.

В. П. Котляров.

МНОГОВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ – процессы резонансного взаимодействия коротких волн, при которых генерируются новые короткие волны. М. п. описываются уравнениями со слабой нелинейностью и возникают при решении многочисленных задач физики и механики. Различают трехволновые процессы – для квадратичной нелинейности, четырехволновые – для кубич. нелинейности и т. д. В физич. приложениях наиболее часто встречаются уравнения со слабой квадратичной нелинейностью:

$$L(-ih\partial_t,-ih\partial_x,x,t,h)u=$$
$$=hA_2(x,t,u,-ih\partial_t u,\ldots,(-ih\partial_x)^{m_2}u,h)+$$
$$+h^2A_3(x,t,u,-ih\partial_t u,\ldots,(-ih\partial_x)^{m_3}u,h)+\ldots, \qquad (1)$$

где L – оператор порядка m_1, $x\in\mathbb{R}^n$, $A_j|_{u=\sigma v}=\sigma^j A_j|_{u=v}$, $\sigma>0$, $m_j\geqslant 0$, $j\geqslant 2$, $h\to 0$ – параметр. Характер М. п. определяется свойствами корней дисперсионного уравнения

$$\prod_{j=1}^{m_1}(\omega-\lambda_j(k,x,t))=L(\omega,k,x,t,0)=0,$$

где $\operatorname{Im}\lambda_j=0$.

При сильной дисперсии конечное число коротких волн порождает конечное число новых коротких волн. Так, для уравнения (1) с начальным условием

$$u|_{t=0}=\varphi_1^0(x)\exp\left(iS_1^0(x)/h\right)+\varphi_2^0(x)\exp\left(iS_2^0(x)/h\right)+\text{к.с.}, \qquad (2)$$

где φ_j^0, $S_j^0\in\mathbb{C}^\infty$, $\operatorname{Im}S_j^0=0$, к. с. – комплексно сопряженные слагаемые, трехволновый процесс описывается асимптотич. решением

$$u=\sum_{j=1}^3\varphi_j(x,t)\exp\left(iS_j(x,t)/h\right)+\text{к.с.}+O(h). \qquad (3)$$

Здесь S_j, как и в ВКБ-методе для линейных задач, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial S_j}{\partial t}-\lambda_{p_j}\left(\frac{\partial S_j}{\partial x},x,t\right)=0, \qquad (4)$$

$1\leqslant P_j\leqslant m_1$. Амплитуда φ_3 отлична от нуля при $t>0$, то есть порождается короткой волной $\varphi_3\exp(iS_3/h)$, при выполнении одного из условий синхронизма: $S_3=l_1S_1+l_2S_2$, $l_i=\pm 1$. Пусть

$$S_3=S_1+S_2, \qquad (5)$$

то есть S_j удовлетворяют переопределенной системе (4), (5) с начальными условиями $S_i(x,0)=S_i^0(x)$, $i=1,2$, $S_3(x,0)=S_1^0+S_2^0$. Тогда φ_j находятся из уравнений трехволнового процесса (см. [1]–[3]):

$$\frac{d\varphi_1}{dt_1}=\gamma_1\bar\varphi_2\varphi_3,\quad \frac{d\varphi_2}{dt_2}=\gamma_2\bar\varphi_1\varphi_3,\quad \frac{d\varphi_3}{dt_3}=\gamma_3\varphi_1\varphi_2, \qquad (6)$$
$$\varphi_i|_{t=0}=\varphi_i^0,\quad i=1,2,\quad \varphi_3|_{t=0}=0,$$

где d/dt_j – полная производная вдоль характеристик (4), $\gamma_j=\gamma_j(x,t)$, $\bar\varphi_j$ – комплексно сопряжены к φ_j. Решение (6) удовлетворяет так наз. соотношению Мэнли – Роу (см. [1]–[3]):

$$\frac{d}{dt_1}|\varphi_1|^2+\frac{d}{dt_2}|\varphi_2|^2+\varkappa\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_3}\frac{d}{dt_3}|\varphi_3|^2=0,$$

где $\varkappa=1$ при $\operatorname{Re}\gamma_j=0$ и $\varkappa=-1$ при $\operatorname{Im}\gamma_j=0$. В случае постоянных коэффициентов уравнения (6) интегрируются методом обратной задачи (см. [4]). Если вместо (5) выполнено $S_3=l_1S_1+l_2S_2$ при нек-рых $l_i=\pm 1$, то φ_j находятся из уравнений, получающихся из (6) заменой φ_i на $\bar\varphi_i$ при $l_i=-1$. Если $S_3\neq l_1S_1+l_2S_2$ при всех $l_i=\pm 1$, то М. в. нет: $\gamma_3=0$, $\varphi_3=0$.

При слабой дисперсии конечное число коротких волн порождает бесконечное число новых коротких волн. Напр., каждая из коротких волн (2) порождает при $t>0$ цуг волн:

$$F_j(S_j(x,t)/h,x,t)=\sum_{l\neq 0}\varphi_{j,l}(x,t)\exp(ilS_j/h).$$

Если $\lambda_j(k,x,t)$ не линейны по k и выполнено (5), то цуги F_1, F_2 порождают цуг F_3, то есть

$$u=F_1(S_1/h,x,t)+F_2(S_2/h,x,t)+F_3(S_3/h,x,t)+hu_1. \qquad (7)$$

Здесь S_j удовлетворяют (4), (5), 2π-периодические по τ функции $F_j(\tau,x,t)$ находятся из уравнений Кортевега – де Фриса – Маслова (см. [5]), напр., имеющих вид:

$$\left.\begin{aligned}
&K_1(F_1)=\frac{\gamma_1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}F_2(\eta,x,t)F_3(\tau+\eta,x,t)\,d\eta,\\
&K_2(F_2)=\frac{\gamma_2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}F_1(\eta,x,t)F_3(\tau+\eta,x,t)\,d\eta,\\
&K_3(F_3)=\frac{\gamma_3}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}F_1(\eta,x,t)F_2(\tau-\eta,x,t)\,d\eta,\\
&K_j(F_j)=\frac{dF_j}{dt_j}+\alpha_jF_j\frac{\partial F_j}{\partial\tau}+\beta_j\frac{\partial^3F_j}{\partial\tau^3},\\
&F_m|_{t=0}=\varphi_m^0(x)\exp(i\tau)+\text{к.с.},\quad m=1,2,\quad F_3|_{t=0}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Аналогом соотношения Мэнли–Роу для (8) является равенство:

$$\frac{d}{dt_1}\int_0^{2\pi}F_1^2d\tau+\frac{d}{dt_2}\int_0^{2\pi}F_2^2d\tau+\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_3}\frac{d}{dt_3}\int_0^{2\pi}F_3^2d\tau=0.$$

Поправка u_1 в асимптотич. решении (7) ограничена при выполнении условий, аналогичных условиям на малые знаменатели в КАМ-теории (см. [5]).

М. п. (7) возможен также в случае $S_3=l_1S_1+l_2S_2$ для нек-рых $l_i\in\mathbb{Z}$. Если $S_3\neq l_1S_1+l_2S_2$ для всех $l_i\in\mathbb{Z}$, то $F_3=0$, а F_i находятся из уравнений $K_i(F_i)=0$, $i=1,2$.

Если дисперсия слабая и $\lambda_j(k,x,t)$ линейны по k, то происходит так наз. полный резонанс: короткие волны (2) порождают при $t>0$ короткие волны

$$\varphi_{l_1l_2}(x,t)\exp(i(l_1S_1+l_2S_2)/h)$$

при всех l_1, $l_2 \in \mathbb{Z}$ (см. [5]). Асимптотич. решение (1), (2) в этом случае имеет вид:

$$u = U(S_1/h,\ S_2/h,\ x,\ t) + O(h),$$

где S_1, S_2 удовлетворяют уравнению (4), $U(\tau_1, \tau_2, x, t) - 2\pi$-периодична по τ_1, τ_2. Напр., при $m_1 = 1$, $\partial L(\omega, k, x, t, h)/\partial h = 0$, уравнение для U следующее:

$$\frac{dU}{dt_1} = iA_2\Big(x,t,U,-i\Big(\frac{\partial S_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial S_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau_2}\Big)U, \ldots$$

$$\ldots, \Big(-i\frac{\partial S_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tau_1} - i\frac{\partial S_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tau_2}\Big)^{m_2}U, 0\Big),$$

$$U|_{t=0} = \varphi_1^0 \exp(i\tau_1) + \varphi_2^0(x)\exp(i\tau_2) + \text{к.с.}$$

Аналогичные М. п. строятся в классе почти периодич. функций, а также для гиперболич. и параболич. систем (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Ахманов С. А., Хохлов Р. В., Проблемы нелинейной оптики, М., 1964; [2] Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М., Системы гидродинамического типа и их применение, М., 1981; [3] Бломберген Н., Нелинейная оптика, пер. с англ., М., 1966; [4] Захаров В. Е., в сб.: Солитоны, М., 1983; [5] Маслов В. П., Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений, М., 1987; [6] Hunter J. K., Maida A., Rosales R., «Stud. Appl. Math.», 1986, v. 75, p. 187–226.

Г. А. Омельянов.

МНОГОЖИДКОСТНАЯ МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

МНОГОКАНАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ – рассеяние в системе N частиц, имеющей несколько *рассеяния каналов*. Пусть $\mathcal{H}_A$ – канал рассеяния, a_l – соответствующее ему *кластерное разбиение* системы N частиц на l подсистем. Реализуем $\mathcal{H}_A$ как гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}^{3(l-1)})$ функций $f(y_{a_l})$, где y_{a_l} – набор приведенных *Якоби координат* центров масс подсистем разбиения a_l, рассматриваемых как отдельные частицы. Через x_{a_l} обозначим набор приведенных относительных координат Якоби частиц, входящих в подсистемы разбиения a_l. Набор координат x_{a_l}, y_{a_l} задает базис кластерных координат Якоби в пространстве $\mathbb{R}^{3(N-1)}$ относительного движения системы N частиц. Оператор H энергии этой системы действует в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$ и в координатах x_{a_l}, y_{a_l} имеет вид:

$$H = -\Delta_{x_{a_l}} - \Delta_{y_{a_l}} + \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}).$$

Кластерному разбиению a_l соответствует оператор энергии

$$h_{a_l} = -\Delta_{x_{a_l}} + \sum_{a_{N-1}\subset a_l} V_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}),$$

описывающий взаимодействие частиц, входящих лишь в подсистемы разбиения a_l, и оператор энергии канала

$$H_A = L_A^{-1}(h_{a_l} - \Delta_{y_{a_l}})L_A = -\Delta_{y_{a_l}} - \varepsilon_A,$$

действующий в $\mathcal{H}_A$. Здесь L_A – оператор отождествления, действующий из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}$ по правилу

$$L_A f = \psi_A(x_{a_l})\, f(y_{a_l}),$$

где $\psi_{A(x_{a_l})}$ – собственная функция оператора h_{a_l} с собственным значением $-\varepsilon_A$.

Решения задачи рассеяния для системы N частиц определяются как решения нестационарного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

с асимптотич. поведением

$$\Psi(t) \sim L_A e^{-itH_A} f, \quad f \in \mathcal{H}_A,$$

при $t \to \pm\infty$ и выражаются через волновые операторы каналов $U_A^{(\pm)}$ формулами

$$\Psi(t) = U_A^{(\pm)} e^{-itH_A} f.$$

Волновые операторы $U_A^{(\pm)}$ соответствуют всем каналам рассеяния и определяются как операторы из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}$ с помощью соотношений

$$U_A^{(\pm)} = \operatorname{S.lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH} L_A e^{-itH_A}. \qquad (1)$$

Пределы в формуле (1) существуют, если потенциалы взаимодействия $V_{a_{N-1}}$ являются короткодействующими. Операторы $U_A^{(\pm)}$ обладают следующими свойствами.

1) Сплетающее свойство:

$$HU_A^{(\pm)} = U_A^{(\pm)} H_A.$$

2) Изометричность:

$$U_A^{(\pm)*} U_A^{(\pm)} = I_A,$$

$$U_A^{(\pm)*} U_B^{(\pm)} = 0, \quad A \neq B.$$

3) Свойство асимптотич. полноты:

$$P^+ = P^- = P_c,$$

где

$$P^{\pm} = \sum\nolimits_A U_A^{(\pm)} U_A^{(\pm)*},$$

P_c – проектор на подпространство непрерывного спектра оператора H.

Свойства 1) и 2) являются простым следствием существования пределов (см. [1]). Доказательство же свойства асимптотич. полноты, являющееся центральным местом обоснования задачи рассеяния, в настоящее время со всей полнотой доказано только в случае системы трех частиц. Это свойство обеспечивает унитарность оператора рассеяния $\hat{S}$, действующего в пространстве асимптотич. состояний

$$\mathcal{H}_{as} = \sum\nolimits_A \oplus \mathcal{H}_A$$

и определяемого формулой

$$\hat{S} = \hat{U}^{(-)*}\hat{U}^{(+)},$$

где

$$\hat{U}^{(\pm)} f = \sum\nolimits_A U_A^{(\pm)} f_A, \quad f_A \in \mathcal{H}_A.$$

Волновые операторы $U_A^{(\pm)}$ канала описывают процесс рассеяния в системе N частиц, соответствующий свободному движению в начальном состоянии подсистем отвечающего этому каналу кластерного разбиения. Операторы $U_A^{(\pm)}$ тесно связаны с так наз. собственными функциями непрерывного спектра оператора H, к-рые определяются как решения уравнения Шредингера

$$\Big[-\Delta_{x_{a_l}} - \Delta_{y_{a_l}} + \sum_{a_{N-1}} U_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}})\Big]\Psi_A^{(\pm)}(X, p_A) =$$

$$= (p_A^2 - \varepsilon_A)\Psi_A^{(\pm)}(X, p_A), \qquad (2)$$

где $X = \{x_{a_l}, y_{a_l}\}$, $p_A \in \mathbb{R}^{3(l-1)}$, с определенными асимптотич. граничными условиями. При этом уравнение (2) совпадает со сплетающим свойством для операторов $U_A^{(\pm)}$ в спектральном представлении для оператора H_A, а функции $\Psi_A^{(\pm)}(X, p_A)$ выражаются через ядра операторов $U_A^{(\pm)}$ в этом представлении формулой:

$$\Psi_A^{(\pm)}(X, p_A) = (2\pi)^{3(l-1)}\, U_A^{(\pm)}(X, p_A).$$

Асимптотич. граничные условия для функций $\Psi_A^{(\pm)}$ выделяют различные классы решений уравнения (2) и могут быть получены с помощью изучения свойств ядер $U_A^{(\pm)}$. Для наиболее важного случая двухкластерных начальных состояний системы N частиц эти условия имеют вид ($A=J_{a_2}$, J_{a_l} – мультииндекс собственных функций операторов h_{a_l}):

$$\Psi_{J_{a_2}}^{(\pm)}(X,p_{a_2})=\psi_{J_{a_2}}(x_{a_2})e^{i(p_{a_2},y_{a_2})}+$$

$$+\sum_{k=2}^{N}\sum_{J'_{b_k}}\psi_{J'_{b_k}}(x_{b_k})U^{(\pm)}_{J'_{b_k}J_{a_2}}(y_{b_k},p_{a_2}), \qquad (3)$$

где

$$U^{(\pm)}_{J'_{b_k}J_{a_2}}(y_{b_k},p_{a_2})=$$

$$=\mathcal{A}^{(\pm)}_{J'_{b_k}J_{a_2}}(\hat{y}_{b_k},p_{a_2})\frac{\exp\left\{\pm i\sqrt{E_{J_{a_2}}+\varepsilon_{J'_{b_k}}}|y_{b_k}|\right\}}{|y_{b_k}|^{3(k-4)/2}}(1+o(1)),$$

$$E_{J_{a_2}}=p^2_{J_{a_2}}-\varepsilon_{J_{a_2}},\quad \hat{y}_{b_k}=y_{b_k}|y_{b_k}|^{-1}.$$

Связь с физич. постановкой задачи рассеяния осуществляется следующим образом. Первое слагаемое в формуле (3) сопоставляется начальному состоянию системы, члены второй суммы – процессам упругого рассеяния при $J'_{b_k}=J_{a_2}$ и процессам неупругого рассеяния при $J'_{b_k}\neq J_{a_2}$. При этом слагаемые с J_{b_2} при $b_2\neq a_2$ сопоставляются процессам перестройки начального состояния, а слагаемые с J_{b_k} при $k\geqslant 3$ – процессам развала двухкластерного состояния J_{a_2} на три и более кластера. Коэффициенты $\mathcal{A}^{(\pm)}_{J'_{b_k}J_{a_2}}$ называются амплитудами соответствующих процессов рассеяния.

Лит.: [1] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985; [2] Меркурьев С. П., Яковлев С. Л., «Доклады АН СССР», 1982, т. 262, с. 591–94; [3] их же, «Теоретич. и математич. физика», 1983, т. 56, с. 60–73.
С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

МНОГОЛИСТНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Однолистная функция.*

МНОГОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Распределение.*

МНОГОМЕРНЫЙ ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС – см. *Винеровский процесс.*

МНОГОМЕРНЫЙ ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС – см. *Диффузионный процесс, Марковский процесс, Маркова цепь, Маркова цепь* с непрерывным временем.

МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС – см. *Случайный процесс.*

МНОГООБРАЗИЕ – множество X, в котором выделена совокупность подмножеств $\{U_\alpha\}$, покрывающих X (то есть $X\subset\cup U_\alpha$), называемых атласом М. X, и взаимно однозначных отображений φ_α на область $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ из $\mathbb{R}^n$, где n – целое число или символ ∞, называемое размерностью М. X (в частности, $\varphi(U)$ может быть сферой $|x-a|<r$ или кубом $|x|<b$ в $\mathbb{R}^n$). Отображение φ_α называется локальной картой (или локальной системой координат), а U_α – ее областью определения, или окрестностью, в точке x, если $x\in U_\alpha$. Существование систем координат наделяет множество X топологией, причем так, что оно становится локально евклидовым пространством.

Две карты $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ и (U_β,φ_β) называются согласованными, если комбинированное отображение (функции перехода)

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

является взаимно однозначным и в определенном смысле регулярным отображением $\mathbb{R}^n$. М. X называется топологическим, если функции перехода непрерывны, и дифференцируемым, гладким, класса C^k, если функции перехода дифференцируемы k раз, то есть принадлежат классу C^k, $0<k\leqslant\infty$.

Примеры. 1) Многообразие $S^1\times S^1$, являющееся произведением двух окружностей (тор), является конфигурационным пространством двойного маятника с параллельными или перпендикулярными осями; если оси заменить шаровыми шарнирами, то конфигурационное пространство оказывается произведением двух сфер $S^2\times S^2$.

2) Пятимерное многообразие $SO(3)\times S^2$ (здесь $SO(3)$ – группа вращений трехмерного евклидова пространства) – конфигурационное пространство шарика, катающегося внутри полой сферы, не выходя из постоянного контакта с ней.
М. И. Войцеховский.

МНОГОЧАСТИЧНОЕ РАССЕЯНИЕ – рассеяние в системе N частиц, описываемой самосопряженным оператором энергии, задаваемым в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}=L_2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$ выражением

$$H_N=-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}\Delta_{r_i}+\sum_{i<j=1}^{N}V_{ij}(r_i-r_j)$$

при условии $r_1+r_2+\ldots+r_N=0$. Здесь Δ_{r_i} – трехмерный оператор Лапласа, действующий по координатам r_i частицы с номером i, m_i – масса этой частицы, v_{ij} – потенциалы парного взаимодействия между частицами с номерами i и j. Функции $v_{ij}(r)$ считаются достаточно гладкими и убывающими при $|r|\to\infty$. Степень этого убывания определяется оценкой

$$v_{ij}(r)=O(|r|^{-1-\varepsilon}),\ \varepsilon>0,$$

когда речь идет о рассеянии нейтральных частиц или

$$v_{ij}(r)-z_iz_j|r|^{-1}=O(|r|^{-1-\varepsilon}),$$

когда рассматривается рассеяние заряженных частиц.

Динамика системы N частиц задается уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H_N\Psi$$

с начальным условием $\Psi(0)=\Psi_0$, $\Psi_0\in\mathcal{H}$. Физич. постановка задачи рассеяния связана с заданием начальных условий для уравнения (1) при $t\to-\infty$ или $t\to+\infty$.

Для рассеяния нейтральных частиц задание этих условий осуществляется следующим образом. Рассмотрим *кластерное разбиение* системы N частиц на l подсистем: $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_l$. Сопоставим этому разбиению набор $y_1,y_2,\ldots,y_l$ координат центров инерции подсистем ω_i, набор $M_1,M_2,\ldots,M_l$ суммарных масс частиц подсистем ω_i и набор операторов энергий подсистем $H_1,H_2,\ldots,H_l$ за вычетом энергии движения их центра масс

$$H_k=-\sum_{i\in\omega_k}\frac{1}{2m_i}\Delta_{r_i}+\sum_{i<j\in\omega_k}V_{ij}(r_i-r_k)$$

при условии

$$\sum_{i\in\omega_k}r_i=0.$$

Собственные функции дискретного спектра операторов H_k с собственными значениями ε_{j_k} обозначим ψ_{j_k}; через A обозначим мультииндекс $\{j_1,j_2,\ldots,j_l\}$. Функция вида

$$\Psi_A^{as}(t)=\chi_A(y_1,y_2,\ldots,y_l,t)\prod_{k=1}^{l}\psi_{jk}$$

описывает свободное движение подсистем $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_l$, находящихся в связанных состояниях ψ_{j_k}, если функция

$\chi_A(y_1, y_2, ..., y_l, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\chi_a}{\partial t} = H_A\chi_A, \qquad (2)$$

в к-ром H_A, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{3(l-1)})$, задается дифференциальным оператором

$$H_A = -\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2M_k}\Delta_{y_k} - E_A, \quad E_A = \sum_{k=1}^{l}\varepsilon_{j_k},$$

с условием $y_1 + y_2 + ... + y_l = 0$. Общее асимптотич. движение задается суперпозицией состояний Ψ_A^{as}:

$$\Psi_{as}(t) = \sum_A C_A\Psi_A^{as}(t). \qquad (3)$$

Задача рассеяния для уравнения Шредингера (1) состоит в нахождении решения $\Psi(t)$, совпадающего при $t\to-\infty$ с одним из асимптотич. состояний $\Psi_{as}^{(-)}(t)$:

$$\left\|\Psi(t) - \Psi_{as}^{(-)}(t)\right\| \to 0, \quad t\to-\infty.$$

При $t\to+\infty$ решение $\Psi(t)$ вновь становится асимптотич. состоянием с асимптотикой $\Psi_{as}^{(+)}(t)$:

$$\left\|\Psi(t) - \Psi_{as}^{(+)}(t)\right\| \to 0, \quad t\to+\infty.$$

Результат рассеяния состоит в превращении асимптотич. состояния $\psi_{as}^{(-)}(t)$ в $\psi_{as}^{(+)}(t)$ в соответствии с динамикой, задаваемой уравнением (1). Это превращение осуществляется линейным оператором S таким, что

$$\Psi_{as}^{(+)}(t) = S\Psi_{as}^{(-)}(t). \qquad (4)$$

Оператор S явно не зависит от времени, содержит в себе информацию о всех возможных результатах рассеяния и по этой причине называется оператором рассеяния.

Обоснование приведенной постановки задачи рассеяния включает в себя: 1) доказательство существования решения с начальным условием (3) при $t\to-\infty$; 2) исследование асимптотич. поведения $\Psi(t)$ при $t\to+\infty$ и доказательство представления (4). Решения этих задач определяют подпространства $\mathcal{H}_{as}^{(-)}$ и $\mathcal{H}_{as}^{(+)}$ в $\mathcal{H}$, к-рые пробегают векторы начальных значений Ψ_0 при $t=0$, соответствующие решениям с описанными асимптотиками при $t\to\pm\infty$. Если выполнено условие

$$\mathcal{H}_{as}^{(-)} = \mathcal{H}_{as}^{(+)},$$

то оператор S в формуле (4) становится унитарным. Это условие носит название условия асимптотической полноты.

Если потенциалы взаимодействия $v_{ij}(r)$ содержат кулоновскую часть, то приведенные выше конструкции требуют модификации. Она включает в себя изменение асимптотич. динамики векторов χ_A. Оператор H_A в формуле (2) следует заменить на оператор

$$H_A^{as} = H_A + \frac{1}{|t|}\sum_{i<k=1}^{l}B_{ik},$$

$$B_{ik} = q_{ik}M_iM_k\left[(M_i\nabla_{y_k} - M_k\nabla_{y_i})^2\right]^{1/2},$$

где константы q_{ik} пропорциональны произведению

$$\sum_{m\in\omega_i}z_m\sum_{n\in\omega_k}z_n.$$

Все дальнейшие построения остаются без изменений.

Лит.: [1] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985; [2] Ньютон Р., Теория рассеяния волн и частиц, пер. с англ., М., 1969.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

МОДЕЛИРОВАНИЕ — см. *Изоморфизм.*

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — см. *Цилиндрические функции.*

МОДУЛЬ вектора — см. *Вектор.*

МОДУЛЬ кватерниона — см. *Алгебра, Кватернион.*

МОДУЛЬ периодов — см. *Периодическая функция, Двоякопериодическая функция.*

МОДУЛЬ упругости — см. *Упругости математическая теория.*

МОДУЛЬ эллиптического интеграла — см. *Эллиптический интеграл.*

МОДУЛЯРНАЯ ГРУППА — *группа* Γ всех дробно-линейных преобразований γ вида

$$z\to\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 1, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — целые рациональные числа. М. г. является дискретной группой преобразований верхней комплексной полуплоскости $H=\{z=x+iy|y>0\}$ (плоскости Лобачевского) и допускает представление образующими $T: z\to z+1$ и $S: z\to -1/z$ и соотношениями $S^2=(ST)^3=1$.

Интерес к М. г. связан с изучением *модулярных функций*, римановой поверхностью к-рых является факторпространство H/Γ, отождествляемое с фундаментальной областью G М. г. Исследование подгруппы М. г. представляет интерес в теории *модулярных форм.*

А. А. Панчишкин.

МОДУЛЯРНАЯ ФИГУРА — см. *Риманова поверхность.*

МОДУЛЯРНАЯ ФОРМА, эллиптическая модулярная форма, одного комплексного переменного — функция f на верхней полуплоскости $H=\{z\in\mathbb{C}|\operatorname{Im}z>0\}$, удовлетворяющая при некотором фиксированном k условию автоморфности:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \qquad (1)$$

для любого элемента $\left\|\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right\|$ группы $SL_2(\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем $ad-bc=1$, и такая, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nq^n,$$

где $q=\exp(2\pi iz)$, $z\in H$, $a_n\in\mathbb{C}$. Целое число $k\geqslant 0$ называется весом М. ф. f. Если $a_0=0$, то М. ф. f называется параболической модулярной формой.

А. А. Панчишкин.

МОДУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ, эллиптическая модулярная функция, одного комплексного переменного — *автоморфная функция* комплексного переменного $z=x+iy$, ассоциированная с группой Γ всех дробно-линейных преобразований γ вида

$$z\to\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 1, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — целые действительные числа (эта группа называется модулярной). Преобразования группы Γ переводят действительную ось в себя, и областью определения М. ф. можно считать верхнюю полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$. Группа Γ порождается двумя образующими $z\to z+1$, $z\to -1/z$. Фундаментальная область G модулярной группы изображена на рис. 1; это — криволинейный четырехугольник $ABCDA$ с вершинами $A(\infty)$, $B(-1/2+i\sqrt{3/2})$, $C(i)$, $D(1/2+i\sqrt{3/2})$, две стороны к-рого AB и DA — отрезки прямых соответственно $x=-1/2$ и $x=1/2$, а BD — дуга окружности $|z|=1$. Участки границы AB и BC включаются в G, а CD и DA не включаются. Образы области G при всевозможных отображениях группы Γ покрывают всю полуплоскость $\operatorname{Im}z>0$ без пересечений.

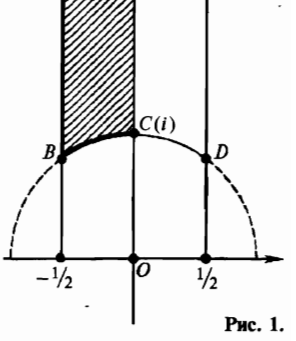


Рис. 1.

Изучение М. ф. началось в 19 в. в связи с изучением эллиптич. функций и предшествовало появлению общей теории автоморфных функций. В теории М. ф. в качестве основных модулярных форм используются следующие *мета-ряды*:

$$g_2(z) = 60\sum\nolimits^{*}_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1+m_2z)^4} = (2\pi)^4\left\{\frac{1}{12} + 20\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3h^{2n}}{1-h^{2n}}\right\},$$

$$g_3(z) = 140\sum\nolimits^{*}_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1+m_2z)^6} = (2\pi)^6\left\{\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5h^{2n}}{1-h^{2n}}\right\},$$

$$\Delta(z) = g_2^3(z) - 27g_3^2(z),$$

где $h = e^{i\pi z}$, а звездочка означает, что нулевая пара $(m_1, m_2) = (0, 0)$ отбрасывается. Согласно терминологии К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), это – относительные инварианты, играющие важную роль в его теории эллиптич. функций (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*), а Δ называется также дискриминантом. С точки зрения теории автоморфных функций, это – автоморфные формы соответственно веса 2, 3 и 6, ассоциированные с модулярной группой. Основная М. ф. имеет вид:

$$J(z) = \frac{g_2^3(z)}{\Delta(z)} = 1 + \frac{27g_3^2(z)}{\Delta(z)}. \qquad (2)$$

Функция $J(z)$ называется также абсолютным инвариантом. Она регулярна в верхней полуплоскости, а внутри фундаментальной области G принимает каждое конечное значение, кроме 0 и 1, в точности один раз; кроме того, $J(-1/2 + i\sqrt{3/2}) = 0$, $J(i) = 1$.

В теории эллиптич. функций М. ф. $J(z)$ играет важную роль, позволяя по заданным вейерштрассовым относительным инвариантам $a = g_2$, $b = g_3$, $a^3 - 27b^2 \neq 0$ определить периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$, а следовательно, и построить все эллиптич. функции Вейерштрасса. Если τ – единственное в фундаментальной области решение уравнения

$$J(\tau) = a^3/(a^3 - 27b^2),$$

то при $a \neq 0$, $b \neq 0$ имеем $\omega_1^2 = a/b$, $\omega_3 = \omega_1\tau$; при $a = 0$ имеем $\tau = -1/2 + i\sqrt{3/2}$, и ω_1 определяется из уравнения

$$\omega_1^6 = \frac{140}{b}\sum\nolimits^{*}_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1+m_2\tau)^6}, \quad \omega_3 = \omega_1\tau;$$

при $b = 0$ имеем $\tau = i$, и ω_1 определяется из уравнения

$$\omega_1^4 = \frac{60}{a}\sum\nolimits^{*}_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1+m_2\tau)^4}, \quad \omega_3 = \omega_1\tau.$$

Для построения *Якоби эллиптических функций* удобнее, вместо $J(z)$, использовать функцию

$$\lambda(z) = k^2(z) = 1 - \prod\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2n-1}}{1+h^{2n+1}}\right)^8, \quad h = e^{\pi i z}, \qquad (3)$$

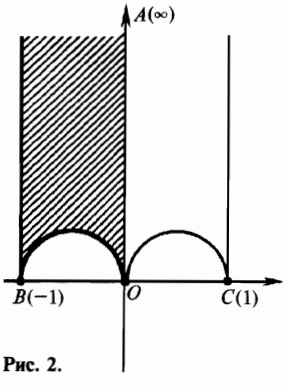


Рис. 2.

также называемую М. ф. На самом деле $\lambda(z)$ является автоморфной функцией только относительно подгруппы Γ_2 модулярной группы Γ, причем к Γ_2 относятся все те преобразования вида (1), у к-рых (в качестве дополнительного условия) a и d – нечетные числа, b и c – четные. Фундаментальная область G_2 группы Γ_2 изображена на рис. 2; это – криволинейный четырехугольник $ABOCA$ с вершинами $A(\infty)$, $B(-1)$, O, $C(1)$, две стороны к-рого AB и CA – отрезки прямых соответственно $x = -1$ и $x = 1$, а BO и OC – дуги окружностей соответственно $|z + 1/2| = 1/2$ и $|z - 1/2| = 1/2$. Участки границы слева от мнимой оси включаются в G_2, а OC и CA не включаются. Функция $\lambda(z)$ также регулярна в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$. Внутри области G_2 она принимает каждое конечное значение, кроме 0 и 1, в точности один раз; кроме того, $\lambda(\infty) = 0$ и $\lambda(0) = 1$.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. [с нем.], М., 1968; [2] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970. *Е. Д. Соломенцев.*

МОМЕНТ случайной величины X – *математическое ожидание* ее степеней; момент порядка $n = 1, 2, 3, \ldots$ для непрерывно распределенной случайной величины с плотностью $p(x)$ равен

$$\mathsf{E}X^n \equiv \langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)\, dx.$$

Для дискретной случайной величины, принимающей значения $\{x_k\}$ с вероятностями $\{p_k\}$, n-й М. равен

$$\mathsf{E}X^n = \sum\nolimits_k x_k^n p_k.$$

М. 1-го порядка $\mathsf{E}X$ – математич. ожидание. Величина

$$\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^n$$

называется центральным моментом порядка n, центральный М. 2-го порядка называется *дисперсией*.

В случае конечного или бесконечного семейства случайных величин $\{X_t,\ t \in T\}$, где T – нек-рое множество, помечающее эти величины, смешанные моменты (мультимоменты) этого семейства определяются формулой

$$M_{n_1, \ldots, n_k}(t_1, \ldots, t_k) = \mathsf{E}X_{t_1}^{n_1} \ldots X_{t_k}^{n_k},$$

где $\{t_1, \ldots, t_k\}$ – произвольный набор попарно различных точек T, а $\{n_1, \ldots, n_k\}$ – целочисленный мультииндекс; математич. ожидание вычисляется по совместному распределению вероятностей значений случайных величин $X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}$. *Р. А. Минлос.*

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ – величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся наряду с массой мерой инертности тела при непоступательном движении. В механике различают М. и. осевые и центробежные. Осевым моментом инерции тела относительно оси z называется величина, определяемая равенством:

$$I_z = \sum m_i h_i^2 \quad \text{или} \quad I_z = \int_V \rho h^2\, dV, \qquad (1)$$

где m_i – массы точек тела, h_i – их расстояния от оси z, а ρ – массовая плотность, V – объем тела. Величина I_z является мерой инертности тела при его вращении вокруг оси. Осевой М. и. можно также выразить через линейную величину r, называемую радиусом инерции, по формуле

$$I_z = Mr^2,$$

где M – масса тела. Размерность М. и. – L^2M.

Центробежными моментами инерции относительно системы прямоугольных осей x, y, z, проведенных в точке O, называются величины, определяемые равенствами:

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \sum m_i x_i y_i, \\ I_{yz} &= \sum m_i y_i z_i, \\ I_{zx} &= \sum m_i z_i x_i, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

или же соответствующими объемными интегралами. Эти величины являются характеристиками динамич. неуравновешенности тел. Напр., при вращении тела вокруг оси z от значений I_{xz} и I_{yz} зависят силы давления на подшипники, в к-рых закреплена ось.

М. и. относительно параллельных осей z и z' связаны соотношением:

$$I_z = I_{z'} - Md^2, \qquad (3)$$

где z' – ось, проходящая через центр масс тела, а d – расстояние между осями.

М. и. относительно любой проходящей через начало координат O оси Ol с направляющими косинусами α, β, γ находится по формуле:

$$I_{Ol} = I_x\alpha^2 - I_y\beta^2 - I_z\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha. \quad (4)$$

Зная шесть величин I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, можно последовательно, используя формулы (4) и (3), вычислить всю совокупность М. и. тела относительно любых осей. Эти шесть величин определяют так наз. тензор инерции тела. Через каждую точку тела можно провести три такие взаимно перпендикулярные оси, называемые главными осями инерции, для к-рых

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

Тогда, зная главные оси инерции и М. и. относительно этих осей, можно определить М. и. тела относительно любой оси.

Лит.: [1] Фаворин М. В., Моменты инерции тел. Справочник, М., 1970; [2] Гернет М. М., Ратобыльский В. Ф., Определение моментов инерции, М., 1969. *С. М. Тарг.*

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ, кинетический момент, угловой момент,– одна из мер механического движения материальной точки или системы. Особенно важную роль М. к. д. играет при изучении вращательного движения. Как и для *момента силы*, различают М. к. д. относительно центра (точки) и относительно оси.

Для вычисления М. к. д. $\boldsymbol{K}$ материальной точки относительно центра O или оси z справедливы все формулы, приведенные для вычисления *момента силы*, если в них заменить вектор $\boldsymbol{F}$ вектором количества движения $m\boldsymbol{v}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{K}_O = |\boldsymbol{r} \cdot m\boldsymbol{v}|,$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра O, а K_z равняется проекции вектора $\boldsymbol{K}_O$ на ось z, проходящую через точку O. Изменение М. к. д. точки происходит под действием момента $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ приложенной силы и определяется теоремой об изменении М. к. д., выражаемой уравнением

$$d\boldsymbol{K}_O/dt = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}).$$

Когда $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = 0$, что, напр., имеет место для центральных сил, движение точки подчиняется *площадей закону*. Этот результат важен для небесной механики, теории движения искусственных спутников Земли, космич. летательных аппаратов и др.

Главный М. к. д. (или кинетический момент) механич. системы относительно центра O или оси z равен соответственно геометрич. или алгебраич. сумме М. к. д. всех точек системы относительно того же центра или оси, то есть

$$K_O = \sum K_{Oi}, \quad K_z = \sum K_{zi}.$$

Вектор $\boldsymbol{K}_O$ может быть определен его проекциями K_x, K_y, K_z на координатные оси. Для тела, к-рое вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω,

$$K_x = -I_{xz}\omega, \; K_y = -I_{yz}\omega, \; K_z = I_z\omega,$$

где I_z – осевой, а I_{xz}, I_{yz} – центробежные моменты инерции. Если ось z является главной осью инерции для начала координат O, то $\boldsymbol{K}_O = I_z\boldsymbol{\omega}$.

Изменение главного М. к. д. системы происходит под действием только внешних сил и зависит от их главного момента M_O^e. Эта зависимость определяется теоремой об изменении главного М. к. д. системы, выражаемой уравнением

$$d\boldsymbol{K}_O/dt = M_O^e.$$

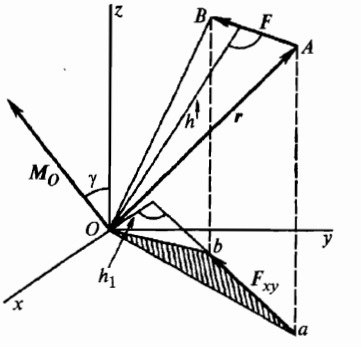
Аналогичным уравнением связаны моменты K_z и M_z^e относительно оси z. Если $M_O^e = 0$ или $M_z^e = 0$, то соответственно $\boldsymbol{K}_O$ или K_z будут величинами постоянными, то есть имеет место закон сохранения М. к. д. (см. *Сохранения законы*). Таким образом, внутренние силы не могут изменить М. к. д. системы, но М. к. д. отдельных частей системы или угловые скорости под действием этих сил могут изменяться. Напр., у вращающегося вокруг вертикальной оси z фигуриста (или балерины) величина $K_z = I_z\omega$ будет постоянной, так как практически $M_z^e = 0$. Но, изменяя движением рук или ног значение момента инерции I_z, фигурист может изменять угловую скорость ω. Понятие о М. к. д. широко используется в динамике твердого тела, особенно в теории *гироскопа*.

Размерность М. к. д.– L^2MT^{-1}. М. к. д. обладают также электромагнитные, гравитационные и другие физич. поля. Большинству элементарных частиц присущ собственный, внутренний М. к. д.– *спин*. Большое значение М. к. д. имеет в квантовой механике.

См. также *Орбитальный момент*. *С. М. Тарг.*

МОМЕНТ СИЛЫ – величина, характеризующая вращательный эффект силы при действии ее на твердое тело; одно из основных понятий механики. Различают М. с. относительно центра (точки) и относительно оси.

М. с. относительно центра O – величина векторная. Его модуль $M_O = Fh$, где F – модуль силы, а h – плечо, то есть длина перпендикуляра, опущенного из O на линию действия силы (см. рис.); направлен вектор $\boldsymbol{M}_O$ перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу $\boldsymbol{F}$ в сторону, откуда поворот, вызываемый силой, виден против хода часовой стрелки (в правой системе координат). С помощью векторного произведения М. с. выражается равенством



Вектор $\boldsymbol{M}_O$ – момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O.

$$\boldsymbol{M}_O = [\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F}],$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из O в точку приложения силы. Размерность М. с. L^2MT^2.

М. с. относительно оси – величина алгебраическая, равная проекции на эту ось М. с. относительно любой точки O оси или же численной величине момента проекции F_{xy} силы $\boldsymbol{F}$ на плоскость xy, перпендикулярную оси z, взятого относительно точки пересечения оси с плоскостью. То есть

$$M_z = M_O\cos\gamma = F_{xy}h_1 \text{ или } M_z = -F_{xy}h_1.$$

Знак минус (последнее выражение) берется, когда поворот силы $\boldsymbol{F}$ с положительного направления оси z виден по ходу часовой стрелки (тоже в правой системе). М. с. относительно осей x, y, z могут также вычисляться по формулам:

$$M_x = yF_z - zF_y,$$
$$M_y = zF_x - xF_z,$$
$$M_z = xF_y - yF_x,$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы $\boldsymbol{F}$ на оси; x, y, z – координаты точки A приложения силы.

Если система сил имеет равнодействующую, то ее момент вычисляется по *Вариньона теореме*. *С. М. Тарг.*

МОМЕНТА ОТОБРАЖЕНИЕ – отображение симплектического многообразия (M, ω) с пуассоновым действием

группы Ли G в сопряженное пространство $\mathfrak{G}^*$ алгебры Ли группы G. Действие связной группы называется пуассоновым, если гамильтоновы векторные поля v_a, $a \in \mathfrak{G}$, инфинитезимального действия алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G обладают однозначными гамильтонианами H_a такими, что $H_{[a,\,b]} = \{H_a, H_b\}$. После небольшой модификации многообразия M (замены его на нек-рую накрывающую $\tilde{M}$, если необходимо) и группы G (замены ее на нек-рое одномерное центральное расширение, если необходимо) любое действие можно превратить в пуассоново. Пуассоново действие задает М. о. многообразия M в сопряженное пространство алгебры Ли группы:

$$P\colon M \to \mathfrak{G}^*,\ P(x)\,a = H_a(x),\ x \in M,\ a \in \mathfrak{G}.$$

Моментом точки $x \in M$ называется ковектор $P(x) \in \mathfrak{G}^*$. Действие группы G при отображении моментов переходит в *коприсоединенное представление*.

Если гамильтониан $H\colon M \to \mathbb{R}$ инвариантен относительно пуассонова действия группы G на M, то момент является первым интегралом системы с функцией Гамильтона H.

Пример. Если группа G действует на конфигурационном многообразии X диффеоморфизмами, то соответствующее действие на фазовом пространстве $M = T^*X$ является пуассоновым. В частности, если G – группа вращений трехмерного пространства вокруг оси, то момент – кинетич. момент относительно оси. Если G – группа всех вращений пространства, то момент – вектор кинетич. момента. Если G – группа параллельных переносов, то момент – вектор импульса. См. *Симплектическая редукция*. *М. Э. Казарян.*

МОНИНА – ОБУХОВА ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ – теоретическая модель плоскопараллельного стационарного течения стратифицированной по температуре (плотности) жидкости (газа) с развитой турбулентностью в полупространстве над однородной поверхностью $z = 0$; предложена А. С. Мониным и А. М. Обуховым (см. [1], [2]).

Движение жидкости описывается условиями постоянства по высоте вертикальных потоков импульса (напряжения трения) τ и тепла q. Все осредненные характеристики такого течения могут зависеть лишь от пяти величин: вертикальной координаты z, плотности среды ρ_0, параметра плавучести g/T_0 (g – ускорение силы тяжести, T_0 – характерная температура среды), динамич. скорости $u_* = \sqrt{\tau/\rho_0}$, нормированного потока тепла $q/c_p\rho_0$ (c_p – теплоемкость среды при постоянном давлении). Из перечисленных величин единственным образом определяется масштаб длины Монина – Обухова:

$$L = u_*^3 \Big/ \left(\varkappa \frac{g}{T_0} \frac{q}{c_p \rho_0}\right)$$

($\varkappa$ – безразмерная постоянная Кармана). При устойчивой стратификации среды масштаб L положителен, при неустойчивой – отрицателен. В модели предполагается, что любая осредненная одноточечная характеристика течения $\bar{f}$ на высоте z может зависеть лишь от безразмерной величины $\zeta = z/L$, то есть

$$\bar{f}\,(z)/f_0 = F(z/L),$$

где f_0 – комбинация размерности $\bar{f}$, составленная из определяющих параметров, $F(\zeta)$ – универсальная функция. При этом масштабом скорости будет величина $u_*/\varkappa$, температуры – величина $T_* = 1/\varkappa u_* - q/c_p\rho_0$, а коэффициента турбулентности – величина $\varkappa u_* |L|$. Асимптотич. поведение универсальных функций $F(\zeta)$ может быть получено из условия их приближения к известным формулам для однородного течения при стремлении к нулю градиента температуры (плотности). Профиль скорости при этом переходит в логарифмический. Масштаб L определяет толщину слоя, в к-ром термические (плотностные) факторы не играют заметной роли (подслой динамич. турбулентности). При небольших значениях аргумента ζ универсальные функции представимы в виде степенных рядов по ζ, причем коэффициенты разложений могут различаться для устойчивой стратификации. Случай сильной неустойчивости ($\zeta \to -\infty$) характеризуется термич. турбулентностью, получающей энергию не от осредненного течения, а от гидростатич. неустойчивости среды, в связи с чем определяющими остаются лишь параметры g/T_0 и $q/c_p\rho_0$. При сильной неустойчивости среды ($\zeta \to +\infty$) остается один определяющий параметр $\varkappa T_*/u_* = -q/c_p\tau$ и профиль скорости оказывается линейным. По данным об асимптотич. поведении универсальных функций с привлечением физич. соображений и эмпирич. данных могут быть предложены различные полуэмпирич. и интерполяционные формулы для функций $F(\zeta)$. Для многоточечных характеристик течения теория М.–О. т. п. приводит к выводу о зависимости совместных распределений вероятностей характеристик потока лишь от разностей координат точек наблюдения, деленных на масштаб L. М.–О. т. п. получила хорошее экспериментальное подтверждение в приземном слое атмосферы, в поверхностном и придонном слоях океана, а также в ряде технич. устройств.

Лит.: [1] Монин А. С., Обухов А. М., «Доклады АН СССР», 1953, т. 93, № 2, с. 223–26; [2] их же, «Труды Геофизич. ин-та АН СССР», 1954, № 24, с. 163–87; [3] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1, М., 1965, гл. 4.

Р. В. Озмидов.

МОНОГЕННАЯ ФУНКЦИЯ – функция комплексного переменного, имеющая конечную производную. Точнее, функция $f(z)$, определенная на множестве E комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется моногенной (относительно множества E) в конечной неизолированной точке $\zeta \in E$, если она имеет в этой точке конечную производную $f'_E(\zeta)$ по переменному $z \in E$:

$$f'_E(\zeta) = \lim_{z \to \zeta,\ z \in E} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Функция, моногенная в каждой неизолированной точке множества E, называется моногенной на множестве E.

Если $E = G$ – область плоскости $\mathbb{C}$, то функция, моногенная на G, называется *аналитической функцией* в области G.

Если E не является областью, то моногенные на E функции, вообще говоря, уже не обладают характерными свойствами аналитич. функций. Однако если множество E, не содержащее в своем составе областей, является достаточно «массивным» вблизи большинства своих точек (точнее, если дополнение к E в плоскости $\mathbb{C}$ является достаточно «разреженным» вблизи большинства точек $\zeta \in E$), то функции, моногенные на E, обладают в ослабленном виде многими свойствами аналитич. функций. В попытках разобраться в глубинных связях между основными свойствами аналитич. функций понятие аналитич. функции обобщалось различными путями: посредством обобщения ее области определения, обобщения самого понятия производной, ослабления условий Коши – Римана, ослабления условий теоремы Мореры и т. п.

Если

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

(при этом $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – действительнозначные функции), то для аналитичности $f(z)$ в области G достаточно (и необходимо) выполнения в каждой точке $x + iy \in G$ одновременно двух условий: 1) $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют полные дифференциалы $du(x, y)$ и $dv(x, y)$ по совокупности действительных переменных (x, y); 2) выполнены условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Условия этой теоремы ослаблялись и обобщались.

Е. П. Долженко.

МОНОДРОМИИ ГРУППА критической точки – образ представления фундаментальной группы базы *Милнора расслоения* в группу автоморфизмов гомологий слоя.

Пусть γ – произвольная петля в базе расслоения Милнора *версальной деформации* критич. точки. Ограничение расслоения на γ определяет расслоение над окружностью. Соответствующее преобразование монодромии зависит только от гомотопич. типа γ. Возникает представление фундаментальной группы базы в группу автоморфизмов гомологий слоя, определяющее М. г. *С. В. Чмутов.*

МОНОДРОМИИ ТЕОРЕМА – достаточный признак однозначности *ветви аналитической функции*. Пусть D – односвязная область комплексного числового пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. Тогда, если нек-рый элемент аналитич. функции $\Sigma(z^0; r)$ с центром $z^0 \in D$ аналитически продолжаем вдоль любого пути, расположенного в D, то возникающая при этом аналитич. продолжении ветвь аналитич. функции $f(z)$, $z=(z_1, ..., z_n)$, однозначна в D. Иначе говоря, ветвь аналитич. функции $f(z)$, определяемая односвязной областью D и элементом $\Sigma(z^0; r)$ с центром $z^0 \in D$, обязательно однозначна. Другая равносильная формулировка: если элемент $\Sigma(z^0; r)$ аналитически продолжается вдоль всех путей, принадлежащих произвольной области $D \subset \mathbb{C}^n$, то результат этого продолжения в любую точку $z^* \in D$ (то есть элемент аналитич. функции $\Sigma(z^*; r^*)$ с центром z^*) один и тот же для всех гомотопных путей в D, соединяющих точки z^0 и z^*.

М. т. справедлива и для аналитич. функций $f(z)$, определенных в областях D на римановых поверхностях или на римановых областях.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

МОНОДРОМИИ ТЕОРИИ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ – задачи восстановления системы обыкновенных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda)\Psi, \\ &\lambda \in \mathbb{C}, \quad A(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_\nu} \frac{A_{\nu,k}}{(\lambda - a_\nu)^{k+1}} + \sum_{k=1}^{r_\infty} A_{\infty,k} \lambda^{k-1}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

по заданной *монодромии группе* (проблема Римана – Гильберта) (см. [1], [2]); здесь $A_{\nu,k}$ – $(m \times m)$-постоянные по λ матрицы ($m > 1$), a_1, ..., a_n, ∞ суть $n+1$ различных фиксированных точек на римановой сфере CP^1.

Группа монодромии задает преобразование фундаментального матричного решения Ψ при обходе вокруг каждой особой точки a_ν:

$$(\lambda - a_\nu) \mapsto (\lambda - a_\nu)\exp(2\pi i) \Rightarrow \Psi \mapsto \Psi M_\nu.$$

Матрицы M_ν называются матрицами монодромии. Последовательному обходу контуров, не проходящих через особые точки a_ν, соответствует произведение матриц монодромии, зависящее только от гомотопич. класса пути обхода. Группа монодромии, составленная из таких произведений, является подгруппой $GL(m, C)$, действующей справа на пространстве фундаментальных решений системы (1). Для систем (1) фуксова типа ($A_{\infty,k} = 0$, $r_\nu = 0$) М. т. о. з. составляет содержание 21-й проблемы Гильберта (см. [3]). Для таких систем эта задача решена для произвольной области $\Omega \subset C$, конформно эквивалентной кругу (см. [4]). В случае CP^1 решение задачи в классе фуксовых систем всегда существует при n, $m \leqslant 3$. При $n > 3$ и любом $m \geqslant 3$ найдется группа монодромии, для к-рой не существует реализующей ее фуксовой системы (см. [5]). Вычисление коэффициентов $A_{\nu,k}$ в виде бесконечных рядов приведено в [6].

Группа монодромии систем с иррегулярной особой точкой ($r_\infty \geqslant 1$) содержит дополнительные образующие, называемые матрицами Стокса и определяемые следующим образом. Пусть A_{∞, r_∞} имеет не совпадающие между собой собственные числа μ_α. Покроем окрестность бесконечности конечным числом секторов Ω_k, $k = 1, 2, ..., 2r_\infty + 1$, так что $\Omega_k \cap \Omega_{k+1} \neq \varnothing$ и каждый сектор содержит только один луч раздела, заданный условием $\mathrm{Re}\,[(\mu_\alpha - \mu_\beta)\lambda^{r_\infty}] = 0$, $\alpha, \beta = 1, 2, ..., m$. В каждом секторе найдется голоморфное невырожденное решение Ψ_k системы (1) с асимптотикой

$$\Psi_k(\lambda) = (I + O(\lambda^{-1}))\exp\left(\sum_{j=1}^{r_\infty} D_j \lambda^j + D_0 \log\lambda\right), \quad \lambda \to \infty,$$

где $D_j = \mathrm{diag}\,(d_{1j}, ..., d_{mj})$, $j = 0, ..., r_\infty$. Матрицы Стокса S_k связывают решения Ψ_k в пересечении соседних секторов:

$$\Psi_{k+1}(\lambda) = \Psi_k(\lambda) S_k, \; k = 1, 2, ..., 2r_\infty.$$

Для систем с единственной особенностью иррегулярного типа на бесконечности М. т. о. з. разрешима в области $CP^1 \setminus \{0\}$. Именно, при $|\lambda| > \lambda_0$ существует система (1) с матрицей A, имеющей вид:

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^{r_\infty} A_{\infty,k} \lambda^{k-1} + \frac{A_0}{\lambda},$$

такая, что соответствующие матрицы Стокса и матрицы D_j совпадают с заданными (см. [2]). Подобно случаю фуксовых систем, решение М. т. о. з. на всем CP^1 сводится к выделению условий на группу монодромии, при к-рых $A_0 = 0$ (см. [7]). Эти условия нетривиальны даже в случае $m = 2$, $r_\infty = 3$ и связаны с распределением полюсов решений нелинейных уравнений типа Пенлеве, описывающих изомонодромные деформации системы (1) (см. *Изомонодромной деформации метод*).

Лит.: [1] Fuchs L., Gesammelte mathematische Werke, Bd 1–3, 1904; [2] Birkhoff G. D., «Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.», 1913, v. 49, n. 9; [3] Проблемы Гильберта, М., 1969; [4] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., 1986; [5] Болибрух А. А., Проблема Римана – Гильберта, «Успехи математич. наук», 1990, т. 45, в. 2, с. 3–47; [6] Еругин Н. П., Проблема Римана, Минск, 1976; [7] Итс А. Р., Новокшенов В. Ю., «Функциональный анализ и его прилож.», 1988, т. 22, в. 3, с. 25–36.

В. Ю. Новокшенов.

МОНОДРОМИЯ – автоморфизм гомологий слоя локально тривиального расслоения $\pi: X \to S^1$ такого, что $\pi|_{\partial X}$ – тривиальное расслоение. Пусть V_t – слой над точкой $t \in S^1$. Обход окружности S^1 с началом и концом в t_0 поднимается до непрерывного семейства гомеоморфизмов $h_t: V_{t_0} \to V_t$ такого, что $\mathrm{id} = h_0: V_{t_0} \to V_{t_0}$; $h_{2\pi}|\partial V_{t_0} = \mathrm{id}$. Линейный оператор $h_*: H_*(V_{t_0}) \to H_*(V_{t_0})$, индуцированный $h_{2\pi}$ и называется монодромией. *С. В. Чмутов.*

МОНОПОЛЬ – гипотетический магнитный заряд. Экспериментально пока не обнаружен. Одни исследователи вообще отвергают существование элементарных магнитных зарядов на том основании, что электродинамика построена в предположении отсутствия источников электромагнитного поля иных, кроме электрич. заряда, и взаимодействие с электромагнитным полем осуществляется только через них (это проявляется в отсутствии дуальной симметрии *Максвелла уравнений*, то есть симметрии между электрической и магнитной компонентами тензора поля). Другие исследователи, наоборот, полагают, что законы классич. электродинамики не содержат никаких запретов, для к-рых М. не может быть, и допускают существование частиц с одним магнитным полюсом, давая для них определенные уравнения поля и уравнения движения.

Так, напрашивается следующее симметричное обобщение уравнений Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = 4\pi \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -4\pi \tilde{\boldsymbol{j}} - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 4\pi\tilde{\rho},$$

где (ρ, j) – электрич. ток, $(\tilde{\rho}, \tilde{j})$ – дуальный ток, то есть ток магнитных зарядов. При этом преобразование

$$E \to B,\ B \to -E,\ j \to \tilde{j},\ p \to \tilde{\rho},\ \tilde{j} \to -j,\ \tilde{\rho} \to -p$$

оставляет инвариантной эту систему. Оказывается, однако, что подобная симметризация уравнений приводит к плохим последствиям: введение магнитных зарядов с необходимостью приводит к сингулярности электромагнитных потенциалов.

Магнитное поле, создаваемое М., похоже на поле, создаваемое вблизи конца тонкого соленоида, второй конец к-рого находится достаточно далеко. Чтобы был наблюдаем только М., а бесконечно длинная нить соленоида (нить сингулярности, или струна Дирака) была полностью ненаблюдаема, необходимо квантование потока магнитного поля в соленоиде и притом такое, чтобы фаза волновой функции облетевшей вокруг нее частицы изменилась на $2\pi n$. Это приводит к тому, что непротиворечивые уравнения движения для заряженной частицы в поле М. и для М., движущегося в поле частицы, можно построить только при условии, что электрич. заряд e частицы и магнитный заряд μ М. связаны соотношением:

$$e\mu = \frac{1}{2} n\hbar c.$$

Таким образом, электрич. заряды должны быть квантованы, и если бы существовали М., этот фундаментальный закон имел естественное объяснение.

Гипотеза о возможности существования магнитного М.–частицы, обладающей положительным или отрицательным зарядом, была высказана П. Дираком (P. Dirac) в 1931, поэтому магнитные М. называют также монополями Дирака. Второе дыхание к теории М. пришло в 1974, когда Г. т'Хоофт (G. t'Hooft) и А. М. Поляков обнаружили, что магнитные М. с конечной массой должны существовать как классич. решения в большом классе неабелевых калибровочных полей со спонтанным нарушением симметрии (напр., в группе $SU(2)$ с триплетом хиггсовских полей). Монополь т'Хоофта – Полякова (Х–П) – топологически нетривиальное решение с конечной энергией. Он имеет конечную сердцевину, тогда как М. Дирака является точечным объектом, и для М. Х–П нет необходимости вводить дираковскую струну. Следовательно, можно считать, что М. Х–П имеет определенный размер, определяемый его массой (энергией), и в нем сингулярная дираковская струна «сгладилась» и превратилась в скалярное поле.

Подобные классич. М. должны существовать в моделях великого объединения: $SU(5)$, $SU(10)$ и др. При этом их массы очень велики и должны составлять примерно $10^{14} - 10^{17}$ ГэВ. По оценкам, скорости таких массивных реликтовых М., попадающих на землю из космич. пространства, должны быть порядка 10^{-3} от скорости света. Из-за малой скорости ожидаемое торможение М. в веществе будет очень слабым, так что в настоящее время не видно, как их можно затормозить и остановить. Если же удалось бы научиться останавливать М., то было бы интересно наблюдать реакцию аннигиляции М. и антимонополя. В качестве продуктов этой аннигиляции должны вылетать очень массивные векторные бозоны, к-рые в моделях великого объединения ответственны за распад протона.

Лит.: [1] Соколов А. А. и др., Калибровочные поля, М., 1986; [2] Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф., Калибровочные теории в физике элементарных частиц, пер. с англ., М., 1987; [3] Кейн Г., Современная физика элементарных частиц, пер. с англ., М., 1990; [4] Хуанг К., Кварки, лептоны и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1985; [5] Геометрические идеи в физике, пер. с англ., М., 1983; [6] Монополи. Топологические и вариационные методы, пер. с англ., М., 1989.

М. И. Войцеховский.

МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ – см. *Звуковые волны.*

МОНТЕЛЯ ПРИНЦИП – см. *Линделефа принцип.*

МОПЕРТЮИ ПРИНЦИП – один из *вариационных принципов классической механики; наименьшего действия принцип*, первая словесная формулировка которого дана П. Мопертюи (P. Maupertuis). Первоначально (1744) П. Мопертюи вывел из М. п. законы отражения и преломления света, согласующиеся, по его словам, «с важным принципом, по к-рому природа при осуществлении своих действий идет всегда наиболее простыми путями» (см. [1]), а затем (1746) объявил его универсальным законом движения и равновесия:«Общий принцип. Когда в природе происходит некоторое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным. Количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на расстояние, которое они пробегают» (см. [2]). Универсальность М. п. обосновывалась П. Мопертюи туманными рассуждениями метафизич. характера с помощью телеологич. и теологич. аргументов, к-рые в последовавшей затем дискуссии о М. п. вызвали резкие возражения со стороны ряда его современников. Кроме законов распространения света П. Мопертюи вывел из М. п. лишь известные законы удара тел и равновесия рычага. По мнению Ж. Лагранжа (J. Lagrange), «указанные применения носят слишком специальный характер, чтобы на них можно было построить доказательство общего принципа; кроме того, они несколько неопределенны и произвольны, что придает некоторую ненадежность и выводам, которые можно было бы сделать на основании их о точности самого принципа» (см. [3]).

Первая математич. идея принципа наименьшего действия для частного случая изолированных тел принадлежит Л. Эйлеру (L. Euler). Он показал (1744), что под действием центральных сил тела описывают траектории, для к-рых интеграл $\int vds$ достигает минимума или максимума (см. [4]); здесь v – скорость, ds – элемент кривой.

Для общего случая движения любой системы тел, действующих одно на другое каким угодно образом так, что полная механич. энергия системы сохраняется, принцип наименьшего действия установил Ж. Лагранж (1760). Исходя из законов механики, он доказал, что сумма произведений масс на интегралы скоростей, умноженных на элементы пройденных путей, является всегда максимумом или минимумом (см. [5]), то есть

$$\delta \sum_i m_i \int v_i\, ds_i = 0.$$

«Этот принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, дает тотчас же все уравнения, необходимые для разрешения каждой проблемы; отсюда возникает столь же простой, как и общий, метод разрешения проблем, касающихся движения тел» (см. [3]).

Лит.: [1] Мопертюи П., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 23–30; [2] его же, там же, с. 41–55; [3] Лагранж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц., т. 1, М.–Л., 1950; [4] Эйлер Л., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 31–40; [5] Lagrange J., Œuvres, t. 1, P., 1867, p. 335–62; [6] Jacobi C., «C. r. Acad. sci.», 1837, t. 5, p. 61–67.

В. В. Румянцев.

МОПЕРТЮИ – ЛАГРАНЖА ПРИНЦИП – см. *Наименьшего действия принцип.*

МОРЕРЫ ТЕОРЕМА для аналитических функций: если (однозначная) функция $f(z)$ комплексного переменного z в области D непрерывна и интеграл от нее по любому замкнутому спрямляемому контуру $\Gamma \subset D$ равен нулю, то есть

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0, \quad \Gamma \subset D, \qquad (*)$$

то $f(z)$ – аналитическая функция в D. Эта теорема была получена Дж. Морерой (G. Morera, 1886).

Условие сформулированной М. т. можно ослабить, ограничившись требованием, чтобы обращались в нуль интегралы (*), взятые по границе $\Gamma = \partial\Delta$ любого треугольника Δ, компактно принадлежащего области D, то есть такого, что $\Delta \subset \bar{\Delta} \subset D$. М. т. представляет собой (неполное) обращение

Коши теоремы и является одной из основных теорем теории аналитич. функций.

М. т. обобщается на случай функций многих комплексных переменных. Пусть функция $f(z)=f(z_1, ..., z_n)$ комплексных переменных $z_1, ..., z_n$, $n\geqslant 1$, непрерывна в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ и такова, что обращается в нуль интеграл от нее, взятый по границе ∂T_ν любой компактно принадлежащей D призматич. области вида:

$$T_\nu=[a_1, z_1]\times ...\times[a_{\nu-1}, z_{\nu-1}]\times\Delta_\nu\times[a_{\nu+1}, z_{\nu+1}]\times ...\times[a_n, z_n],$$
$$\nu=1, 2, ..., n,$$

где $[a_\mu, z_\mu]$, $\mu\neq\nu$, $\mu=1, ..., n$,— прямолинейные отрезки в плоскостях $\mathbb{C}(z_\mu)$ с концами a_μ и z_μ, а Δ_ν — треугольник в плоскости $\mathbb{C}(z_\nu)$. Тогда $f(z)$ — голоморфная функция в D.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1–2, М., 1976; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

МОРСА КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — см. *Вариационное исчисление в целом.*

МОРСА ЛЕММА: пусть дифференцируемая функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ (соответственно голоморфная $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$) имеет невырожденную критическую точку в O, то есть матрица $\|\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j\|$ невырождена в O; тогда существуют локальные координаты $y_1, ..., y_n$ в окрестности O, в которых функция f имеет вид:

$$y_1^2+...+y_k^2-y_{k+1}^2-...-y_n^2+\text{const}$$

(соответственно $y_1^2+...+y_n^2+\text{const}$).

С. В. Чмутов.

МОРСА НЕРАВЕНСТВО — см. *Блоха закон дисперсии.*

МОРСА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — см. *Катастроф теория.*

МОРСА ФУНКЦИЯ — см. *Вариационное исчисление в целом.*

МОСКОВСКИЙ НУЛЬ — см. *Нуль-заряд.*

МОЩНОСТЬ — физическая величина, измеряемая отношением работы к промежутку времени, в течение которого она произведена. Если работа производится равномерно, то М. определяется формулой

$$N=A/t,$$

где A — работа за время t, а в общем случае

$$N=dA/dt,$$

dA — элементарная работа за элементарный промежуток времени dt.

МОЩНОСТЬ статистического критерия — см. *Анализ данных.*

МУЛЬТИМОМЕНТ — см. *Момент* случайной величины.

МУЛЬТИПЛЕТЫ частиц — группы элементарных частиц (дублеты, триплеты, октеты, декуплеты и другие объединения частиц с бо́льшим числом составляющих), обладающих одинаковым спином, а в случае, когда они образованы адронами, также и одинаковой внутренней четностью. Частицы, входящие в М., как правило, имеют близкие по значению величины масс. Существование М. является отражением наличия определенных свойств симметрии у взаимодействий элементарных частиц. Математически симметрия проявляется в инвариантности (обычно приближенной) взаимодействий частиц относительно преобразований, принадлежащих тем или иным группам, напр. группе $SU(2)$ (группе изотопич. инвариантности), группе $SU(3)$ (группе так наз. унитарной симметрии), группе $SU(2)_w$ (группе слабого изоспина) и др. Мультиплеты объединяют частицы, к-рые по своим трансформационным свойствам принадлежат одному из неприводимых представлений группы (отсюда точно фиксированное число частиц, входящих в М., зависящее от типа группы). Соответственно говорят об изотопич. мультиплетах, унитарных мультиплетах и т. п. Приближенный характер симметрии обусловливает различие масс частиц, входящих в М. Чем сильнее нарушена симметрия, тем больше отличаются по массам отдельные компоненты М. В теории элементарных частиц обсуждаются симметрии (сильно нарушенные при небольших энергиях), отвечающие *великому объединению взаимодействий.* М., связанные с соответствующими группами [$SU(5)$, $SO(10)$ и др.], содержат в своем составе частицы, обладающие как сильным, так и электрослабым взаимодействиями. Массы частиц в таких М. могут различаться очень сильно. Обсуждается также существование (при очень высоких энергиях) *суперсимметрий.* Неприводимые представления групп, отвечающих суперсимметриям, описывают частицы разных спинов (целых и полуцелых). В этой связи можно говорить о *супермультиплетах.* Простейший супермультиплет такого типа содержит частицы со спином S (дважды), $S-1/2$, $S+1/2$. Эти частицы могут заметно различаться по массам.

А. А. Комар.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — утверждение об асимптотическом поведении произведений случайных матриц, взятых вдоль реализаций эргодических стационарных случайных процессов. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, точками к-рого являются бесконечные последовательности $\omega=\{\omega_n\}$, $n\in\mathbb{Z}$, где все ω_n — элементы нек-рого множества I, T — сохраняющее меру эргодич. преобразование сдвига в Ω, $F=F(\omega)$ — случайная величина со значениями в пространстве квадратных матриц порядка $m\geqslant 1$, для к-рой математич. ожидание $\mathsf{E}(\ln^+|F|)$ конечно. Тогда почти наверное существует (см. [1], [2]) предел

$$\Lambda(\omega)=\lim_{n\to\infty}([F^{(n)}(\omega)]^*[F^{(n)}(\omega)])^{1/2n},$$

где

$$F^{(n)}(\omega)=F(\omega)\cdot F(T\omega)\cdot ...\cdot F(T^{n-1}\omega),$$

а $[\cdot]^*$ — сопряженная матрица. Многочисленные применения М. э. т. связаны с теорией гладких динамич. систем, спектральной теорией дифференциальных операторов со случайными коэффициентами, теорией случайных блужданий в случайных средах (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Оселедец В. И., «Труды Моск. математич. об-ва», 1968, т. 19, с. 179–210; [2] Миллионщиков В. М., «Математич. сб.», 1969, т. 78, № 2, с. 179–202; [3] Raghunathan M., «Isr. J. Math.», 1979, v. 32, p. 356–62; [4] Захаревич М. И., «Вестник Ленингр. ун-та», 1978, № 7, с. 28–34.

И. П. Корнфельд.

МУЛЬТИПЛИКАТОР — оператор умножения на функцию μ, действующий в пространстве *обобщенных функций* $\mathcal{F}'$ по правилу:

$$\mathcal{F}'\ni f\mapsto\mu f\in\mathcal{F}',$$

где

$$(\mu f, \Phi)=(f, \mu\Phi),\ \Phi\in\mathcal{F}',$$

функция μ такая, что $\mu\Phi\in\mathcal{F}$ для любой $\Phi\in\mathcal{F}$, причем умножение на μ непрерывно в топологии основного пространства $\mathcal{F}$.

В. В. Жаринов.

МУЛЬТИПЛИКАТОР проективного представления T группы G — функция $c(g_1, g_2)$, определяемая из равенства

$$T_{g_1g_2}=c(g_1, g_2)T_{g_1}T_{g_2},$$

где $g_1, g_2\in G$.

Ю. А. Неретин.

МУЛЬТИПОЛЬ состояния — см. *Плотности матрица.*

МУЛЬТИПОЛЬНОГО МОМЕНТА ТЕНЗОР — полностью симметричный обращающийся в нуль при свертывании по любой паре индексов тензор $D_{i_1, i_2, ..., i_l}$, входящий в члены разложения потенциала системы зарядов на больших расстояниях. Потенциал

$$\varphi(R_0)=\sum_j e_j/|R_0-r_j|$$

системы статич. зарядов e_j, расположенных в точках r_j на больших расстояниях $|R_0|$ от начала координат — какой-ли-

бо внутренней точки системы, – может быть представлен рядом Тейлора

$$\varphi=\sum_{l\geqslant 0}\frac{1}{l!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_l=1}\sum_j e_j x_j^{i_1}x_j^{i_2}\ldots x_j^{i_l}\frac{\partial^l}{\partial X^{i_1}\partial X^{i_1}\ldots\partial X^{i_l}}\frac{1}{|R_0|},\quad (*)$$

где x_j^i и X^i, $i=1, 2, 3,$ – координаты векторов r_j и R_0. Поскольку $1/|R_0|$ удовлетворяет уравнению Лапласа и любые производные от $\Delta(1/|R_0|)$ обращаются в нуль, в разложении (*) контравариантные тензоры

$$\sum_j e_j x_j^{i_1}x_j^{i_2}\ldots x_j^{i_l}$$

можно заменить тензорами мультипольных моментов $D_{i_1, i_2, \ldots, i_l}$. Напр.,

$$D_{i_1,i_2}=\sum_j e_j\left(3x_j^{i_1}x_j^{i_2}-|r_j|^2\delta_{i_1,i_2}\right)$$

– тензор квадрупольного момента,

$$D_{i_1,i_2,i_3}=\sum_j e_j\left[5x_j^{i_1}x_j^{i_2}x_j^{i_3}-|r_j|^2\left(\delta_{i_1,i_2}x_j^{i_3}+\delta_{i_1,i_3}x_j^{i_2}+\delta_{i_2,i_3}x_j^{i_1}\right)\right]$$

– тензор октупольного момента. Тензор мультипольного момента ранга l содержит всего $2l-1$ независимых компонент, к-рые выражаются через объемные сферич. функции.

В. С. Булдырев.

МУЛЬТИПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛ – гармоническая функция в области $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, являющаяся частной производной какого-либо порядка $|m|\geqslant 1$ от главного фундаментального решения *Лапласа уравнения*, то есть функция вида

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\frac{1}{r^{n-2}}\quad\text{при } n\geqslant 3,$$

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}}\ln\frac{1}{r}\quad\text{при } n=2,$$

$$r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},\quad |m|=m_1+m_2+\ldots+m_n.$$

Пусть для краткости $n=3$; при $|m|=1$ потенциалы диполей имеют вид:

$$-\frac{x_1}{r^3}=-\frac{\cos\alpha}{r^2},\quad -\frac{x_2}{r^3}=-\frac{\cos\beta}{r^2},\quad -\frac{x_3}{r^3}=-\frac{\cos\gamma}{r^2},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы радиус-вектора точки наблюдения (x_1, x_2, x_3). Функция $-x_1/r^3$, напр., истолковывается как потенциал диполя с моментом 1 и осью Ox_1, то есть как предел при $a\to 0+$ суммы ньютоновых потенциалов массы $-1/2a$, помещенной в точке $(a, 0, 0)$, и массы $1/2a$, помещенной в точке $(-a, 0, 0)$; иначе эту функцию можно представить себе как магнитный потенциал маленького магнита, расположенного вдоль оси Ox_1 в начале координат. Аналогично, функции $-x_2/r^3$ и $-x_3/r^3$ суть потенциалы диполей с осями соответственно Ox_2 и Ox_3. Составляя линейные комбинации этих функций, можно получить потенциал произвольно ориентированного диполя с любым моментом μ. При $|m|=2$ имеют место квадруполей потенциалы, получаемые предельным переходом для определенных систем четырех точечных масс, сумма к-рых всегда равна нулю, и т. д.

Е. Д. Соломенцев.

МЭНЛИ – РОУ СООТНОШЕНИЕ – см. *Многоволновые процессы.*

МЯГКАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ – см. *Устойчивости потеря.*

Н

НАБЕГ ФАЗЫ, фазовый сдвиг,– значение в точке поворота или в особой точке фазы быстроосциллирующего решения уравнения с малым параметром при производной. Этот термин широко используется физиками (см. [1], [2]) и приобретает строгий математич. смысл в теории *квазиклассического приближения* (см. [3]).

Простейшая схема метода ВКБ не позволяет определить значения Н. ф., так как в окрестностях точек поворота асимптотика такого вида не применима. Поэтому для вычисления Н. ф. приходится особыми методами строить асимптотич. решения вблизи точек поворота и сравнивать их с ВКБ-разложениями. Так, в частности, получаются Н. ф., связанные с топологич. свойствами траекторий гамильтоновых систем (индекс Маслова).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 4 изд., М., 1989; [2] их же, Теория поля, 7 изд., М., 1988; [3] Маслов В. П., Асимптотические методы и теория возмущений, М., 1988.

А. В. Пескоков.

НАБЛА – см. *Векторный анализ.*

НАБЛЮДАЕМАЯ – эквивалент понятия переменной величины в физических теориях. В алгебраич. подходе Н. является первичным понятием – ограниченной вещественной наблюдаемой считается всякий самосопряженный элемент C^*-алгебры, описывающий данную систему (см. *Наблюдаемых алгебра*). Для коммутативных алгебр, описывающих классич. системы, Н. задается функцией на спектре алгебры, то есть на фазовом пространстве соответствующей системы.

В квантовой механике вещественная Н. X задается произвольным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве системы H. Точки спектра этого оператора (лежащего на вещественной прямой $\mathbb{R}$) интерпретируются как значения, к-рые могут быть получены при точном измерении Н. X. Исход измерения данной Н. является, вообще говоря, случайным; распределение вероятностей исходов зависит как от измеряемой Н., так и от состояния системы непосредственно перед измерением. Постулируется, что это распределение имеет вид:

$$\mu_\rho(B)=\mathrm{Tr}\,\rho E(B),\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

где ρ – *плотности оператор*, описывающий состояние системы перед измерением, $E(B)$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – *спектральная мера* оператора X, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Среднее значение ограниченной Н. X, таким образом, равно

$$\langle X\rangle_\rho=\int_{\mathbb{R}}x\mu_\rho(dx)=\mathrm{Tr}\rho X.$$

Если φ – борелевская функция на $\mathbb{R}$, то определена Н.

$$\varphi(X) = \int \varphi(x) E(dx);$$

при этом

$$\langle \varphi(X) \rangle_\rho = \int \varphi(x) \mu_\rho(dx).$$

Соответствие $\varphi \to \varphi(X)$ сохраняет алгебраич. операции.

Поскольку соответствие между самосопряженными операторами и их спектральными мерами взаимно однозначно, квантовая Н. альтернативно может быть определена как ортогональное *разложение единицы* в H. Изложенная концепция Н. хотя и является достаточной для большинства вопросов квантовой механики, приводит к трудностям при попытке определения «циклических» переменных типа угла или фазы, а также Н. времени, координат безмассовой релятивистской частицы и т. п. (см. *Каноническая сопряженность* в квантовой механике, *Локализуемость*). Эти трудности могут быть устранены обращением к более широкому понятию *квантового измерения*, допускающему рассмотрение произвольных разложений единицы в гильбертовом пространстве системы.

См. также *Статистический ансамбль*.

Лит.: [1] Макки Дж., Лекции по математическим основам квантовой механики, пер. с англ., М., 1965; [2] Нейман И., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [3] Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А., Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, Л., 1980; [4] Холево А.С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980.

А. С. Холево.

НАБЛЮДАЕМЫХ АЛГЕБРА – множество наблюдаемых физической системы, наделенное структурой *алгебры* над полем комплексных чисел. *Наблюдаемой* называют любую физич. величину, значения к-рой можно найти экспериментально. Так как всякий эксперимент осуществляется в ограниченной области пространства и в течение конечного промежутка времени, то каждая наблюдаемая локализована в нек-рой ограниченной области O пространства-времени M, то есть ее значения можно измерить посредством экспериментов в O. Две наблюдаемые одной системы называются совместимыми (несовместимыми) между собой, если они допускают (не допускают) одновременное и независимое измерение. В классич. системах все наблюдаемые совместимы. Для релятивистских квантовых систем, в силу принципа причинности, любые две наблюдаемые совместимы, если они относятся к областям из M, разделенным пространственноподобным интервалом. Наблюдаемая, локализованная в ограниченной области M и подчиненная принципу причинности, называется локальной наблюдаемой. Таким образом, для релятивистских квантовых систем все наблюдаемые локальны; однако на практике удобно причислять к наблюдаемым также глобальные, суммарные характеристики системы, типа полного заряда, полной энергии-импульса и т. п., получаемые из локальных наблюдаемых при помощи каких-либо предельных операций. В этом смысле говорят о квазилокальных и глобальных наблюдаемых.

Наблюдаемые можно представлять с помощью различных математич. объектов. Для квантовой теории, где состояния системы обычно представляют векторами гильбертова пространства H, стандартным является представление наблюдаемых операторами в гильбертовом пространстве, причем операторы, отвечающие совместимым наблюдаемым, коммутируют между собой. Операторы должны быть эрмитовыми, ибо измеряемые значения наблюдаемых вещественны, операторы могут быть ограниченными и неограниченными (в частности, наблюдаемым координат и импульсов, удовлетворяющим канонич. перестановочным соотношениям, всегда отвечают неограниченные операторы). Однако так как операторы наблюдаемых эрмитовы, неограниченным операторам можно сопоставить ограниченные спектральные проекции неограниченных. В этом случае множеству всех наблюдаемых квантовой системы отвечает множество A эрмитовых (ограниченных) операторов в H. Добавляя к A все произведения его элементов, получаем алгебру R, к-рая называется алгеброй наблюдаемых квантовой системы (хотя не все ее операторы отвечают наблюдаемым). Иногда вместо указанного добавления вводят новую операцию перемножения операторов: $B \cdot A = (AB + BA)/2$; по отношению к этой операции A – коммутативная алгебра, принадлежащая классу *йордановых алгебр*. В квантовой механике алгебра R обычно совпадает с алгеброй $B(H)$ всех ограниченных операторов в H.

Ясно, что с помощью Н. а. можно описывать любые физич. системы, классические и квантовые, релятивистские и нерелятивистские. Наиболее плодотворным такой способ описания оказывается в квантовой теории, где успешно развивается алгебраич. подход в квантовой статистич. механике и алгебраич. подход в квантовой теории поля. В последнем случае, чтобы учесть принцип причинности, нужно рассматривать множества наблюдаемых для каждой ограниченной (ибо наблюдаемые локализованы в ограниченных областях) области O из M. Описание релятивистской квантовой системы с помощью таких множеств существует в двух вариантах: конкретный подход, где $A(O)$ – множество эрмитовых элементов алгебры Неймана $R(O)$; абстрактный подход, где $A(O)$ – множество эрмитовых элементов абстрактной C^*-алгебры $\mathfrak{A}(O)$. Алгебры $R(O)$ и $\mathfrak{A}(O)$ называются алгебрами локальных наблюдаемых области O; их совокупность для всех ограниченных областей O подчиняется нек-рой системе аксиом. Объединению локальных алгебр по всем O можно придать структуру C^*-алгебры; эта алгебра называется квазилокальной, а ее элементы – квазилокальными наблюдаемыми. Объединению алгебр $R(O)$ по всем O можно придать также структуру алгебры Неймана; эта алгебра включает в себя квазилокальную и называется глобальной, а ее элементы – глобальными наблюдаемыми. Состояния системы при этом обычно рассматривают как нормированные положительные функционалы на квазилокальной алгебре; представление состояния вектором в гильбертовом пространстве является частным случаем такой трактовки. Аналогично строится и алгебраич. подход в квантовой статистич. механике. Место множеств $A(O)$ здесь занимают множества $A(V)$ наблюдаемых, отвечающих конечным областям пространства или, в решеточных системах, конечным подмножествам ячеек решетки. Аналогом фундаментального принципа локальности (причинности) в релятивистской теории здесь служит требование взаимной совместимости любых наблюдаемых, отвечающих непересекающимся областям.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [3] Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А., Лекции по квантовой механике, Л., 1980; [4] Хоружий С.С., Введение в алгебраическую квантовую теорию поля, М., 1986.

С. С. Хоружий.

НАБЛЮДАЕМЫХ ПОЛНЫЙ НАБОР в квантовой механике – набор попарно коммутирующих операторов $\mathfrak{U}(A_1, \ldots, A_n)$, характеризующихся следующими двумя свойствами: 1) всякий оператор B, коммутирующий со всеми операторами $A_i \in \mathfrak{U}$, является функцией операторов $A_1, \ldots, A_n$; 2) никакой из операторов $A_i \in \mathfrak{U}$ не является функцией остальных операторов из множества $\mathfrak{U}$.

Из первого условия следует, что система уравнений на собственные значения

$$A_i | a_1, \ldots, a_n \rangle = | a_1, \ldots, a_n \rangle a_i, \; i = 1, \ldots, n, \qquad (*)$$

имеет единственное, с точностью до нормировочного множителя, решение. Это свойство эквивалентно 1) и часто рассматривается как определение понятия «Н. п. н.». Условие 2) эквивалентно независимости всех уравнений (*).

Уравнение (*) также показывает, что набор квантовых чисел $a_1, \ldots, a_n$ однозначно определяет состояние системы. Физически это означает, что каждому Н. п. н. $\mathfrak{U}$ соответствует нек-рая экспериментальная схема, позволяющая приготовить единственное состояние с квантовыми числами,

отвечающими собственным значениям операторов из набора $\mathfrak{A}$.

Каждому Н. п. н. соответствует нек-рое представление квантовой механики. А именно, если ψ – вектор состояния рассматриваемой системы, то вектор

$$\psi(a_1, \ldots, a_n) = \langle a_1, \ldots, a_n | \psi \rangle$$

является *волновой функцией* данной системы в A-представлении.

Примеры. 1) В задаче о трехмерном изотропном осцилляторе Н. п. н.– три компоненты оператора $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$.

2) Н. п. н.– набор $\mathfrak{A} = (\hat{E}, \hat{L}^2, \hat{L}_3)$, где $\hat{E}$ – оператор энергии, $\hat{L}^2$ – оператор квадрата момента, а $\hat{L}_3$ – оператор проекции момента на третью ось. *Ф. А. Лунев.*

НАБЛЮДЕНИЙ ОБРАБОТКА – см. *Анализ данных.*

НАВЬЕ–СТОКСА УРАВНЕНИЯ – дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (см. *Гидродинамики уравнения*). Для несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ρ и кинематич. коэффициентом вязкости ν векторная запись Н.–С. у. в инерциальной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}. \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ (3-мерный вектор скорости) и p (давление) – искомые функции координат x 3-мерного евклидова пространства и времени t. Функция $\boldsymbol{f}$ (внешняя сила, отнесенная к единице массы жидкости) считается известной функцией x и t. Уравнение (1) – дифференциальная форма закона сохранения импульса жидкости. Для замыкания системы к (1) присоединяется уравнение неразрывности, к-рое выражает закон сохранения массы и для несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \qquad (2)$$

Система (1), (2) нелинейна и не относится к какому-либо классич. типу, что затрудняет ее изучение. О постановке и результатах исследования начально-краевых задач для Н.–С. у. см. [1].

Лит.: [1] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., 1970. *В. В. Пухначев.*

НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ПРИНЦИП, принцип стационарного действия,– один из *вариационных принципов классической механики*, согласно которому для данного класса сравниваемых друг с другом движений механической системы действительным является то, для которого физическая величина, называемая *действием*, имеет наименьшее (точнее, стационарное) значение. Обычно Н. д. п. применяется в одной из двух форм.

а) Н. д. п. в форме Гамильтона – Остроградского. В этом случае под действием за промежуток времени $t_1 - t_0$ понимают величину

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L \, dt,$$

где L – *Лагранжа функция*, зависящая от обобщенных координат q_i системы, обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ и времени t. Н. д. п. в этой форме устанавливает, что среди всех кинематически возможных перемещений системы из одной конфигурации в другую (близкую к первой), совершаемых за один и тот же промежуток времени $t_1 - t_0$, действительным является то, для к-рого действие S будет наименьшим. Математич. выражение Н. д. п. имеет в этом случае вид

$$\delta S = 0, \qquad (1)$$

где δ – символ неполной (изохронной) вариации, то есть, в отличие от полной вариации, здесь время не варьируется.

б) Н. д. п. в форме Мопертюи–Лагранжа. В этом случае под действием за промежуток времени $t_1 - t_0$, в течение к-рого система перемещается из конфигурации A в конфигурацию B, понимают величину

$$S_0 = \int_{t_0}^{t_1} 2T \, dt \quad \text{или} \quad S_0 = \int_A^B \sum_i p_i \, dq_i,$$

где T – кинетич. энергия системы, p_i – обобщенные импульсы. Н. д. п. в этой форме устанавливает, что среди всех кинематически возможных перемещений системы из конфигурации A в близкую к ней конфигурацию B, совершаемых при сохранении одной и той же величины полной энергии системы, действительным является то, для к-рого действие S_0 будет наименьшим. Математич. выражение Н. д. п. в этом случае имеет вид:

$$\Delta S_0 = 0, \qquad (2)$$

где Δ – символ полной вариации (в отличие от принципа Гамильтона–Остроградского, здесь варьируются не только координаты и скорости, но и время перемещения системы из одной конфигурации в другую).

Н. д. п. в форме (2) справедлив только для консервативных и притом *голономных систем*. Н. д. п. в форме (1) является более общим и, в частности, может быть распространен на неконсервативные системы.

Н. д. п. пользуются для составления уравнений движения механич. систем и для исследования общих свойств этих движений. При соответствующем обобщении понятий Н. д. п. находит приложения в механике непрерывной среды, в электродинамике, квантовой механике и др. *С. М. Targ.*

НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ПРИНЦИП – один из *вариационных принципов классической механики.* См. *Гаусса принцип* наименьшего принуждения.

НАИМЕНЬШЕЙ КРИВИЗНЫ ПРИНЦИП – один из *вариационных принципов классической механики.* См. *Герца принцип* прямейшего пути.

НАИМЕНЬШИХ РЕАКЦИЙ ПРИНЦИП – один из *вариационных принципов классической механики.* См. *Гаусса принцип* наименьших реакций.

НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА ЛИНИЯ – см. *Перевала метод.*

НАЙМАРКА ТЕОРЕМА: если $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ – обобщенное спектральное семейство в гильбертовом пространстве H, то существуют гильбертово пространство K, содержащее H в качестве подпространства, и ортогональное спектральное семейство $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ в K такие, что $F_\lambda = PE_\lambda|_H$; здесь P – проектор в K на H. Минимально такое K, где плотно $\operatorname{lin}\{E_\lambda f, \lambda \in \mathbb{R}, f \in H\}$, определено с точностью до изоморфизма.

Теорема установлена в связи с изучением самосопряженных продолжений симметрич. оператора с выходом из H. Обобщенное спектральное семейство (обобщенное разложение единицы) образуют положительные операторы $F_\lambda \in \mathcal{B}(H)$, так что:

1) $F_\mu \geqslant F_\lambda$ при $\mu \geqslant \lambda$,

2) $F_{\lambda+0} := s\text{-}\lim\limits_{\mu \to \lambda+0} F_\mu = F_\lambda$ или $F_{\lambda-0} = F_\lambda$ для всех λ,

3) $s\text{-}\lim\limits_{\lambda \to -\infty} F_\lambda = 0$, $s\text{-}\lim\limits_{\lambda \to +\infty} F_\lambda = I$. Ортогональное или просто спектральное семейство состоит из (орто) проекторов $E_\lambda = E_\lambda^2 = E_\lambda^*$, то есть кроме 1)–3) имеет место

4) $E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}}$.

Н. т. допускает формулировку в терминах операторнозначных мер.

Лит.: [1] Наймарк М. А., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1940, т. 4, № 1, с. 53–104; т. 4, № 3, с. 277–318; [2] его же, «Доклады АН СССР», 1943, т. 41, с. 373–75; [3] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., Харьков, 1978; [4] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [5] Холево А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980. *А. В. Булинский.*

НАКЛОН дифракционного конуса – см. *Редже полюсов метод.*

НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЗАДАЧА – см. *Краевая задача* теории потенциала.

НАКРЫТИЕ – *расслоение* с дискретным слоем, или локально топологическое отображение $f\colon X\to Y$ (у каждой точки $y\in Y$ существует такая окрестность, что $f^{-1}(U)$ состоит из открытых множеств, гомеоморфных U). *М. И. Войцеховский.*

НАПРАВЛЕНИЙ КРИВИЗНА – см. *Вейля кривизна.*

НАПРАВЛЕНИЙ ПОЛЕ – область на плоскости, в каждой точке которой задана прямая. Для задания таких прямых достаточно знать тангенс угла между прямой и осью Ox, поэтому понятие Н. п. чаще всего связывается с Н. п. касательных нек-рого семейства кривых, заполняющих данную область. В частности, через каждую точку (t, x) области определения $G\subset\mathbb{R}^2$ правой части уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \qquad (1)$$

можно провести отрезки малой длины с угловым коэффициентом $f(t, x)$, так что (ориентированный) угол между осью Ot и этим отрезком равен $\operatorname{arctg} f(t, x)$. Часто дифференциальное уравнение (1) рассматривается в совокупности с дифференциальным уравнением

$$\frac{dt}{dx}=F(t,x), \qquad (2)$$

где $F(t, x)=1/f(t, x)$ для точек $(t, x)\in G$, в к-рых $f(t, x)\neq 0$, и $F(t, x)=0$ для точек $(t, x)\in\mathbb{R}^2\setminus G$, в к-рых функцию $F(t, x)$ можно доопределить этим значением по непрерывности. Тем самым для пары уравнений (1), (2) область G расширяется до области G_0 за счет пополнения точками, в к-рых направление параллельно оси Ox, а интегральным кривым разрешается иметь и точки с вертикальной касательной. Если в области G для уравнения (1) (или в области G_0 для пары уравнений (1), (2)) изобразить Н. п. достаточно подробно, то по построенным отрезкам можно составить примерное качественное представление о картине поведения *интегральных кривых*. Это соображение лежит в основе приближенного графич. метода решения уравнения (1) – метода изоклин, в к-ром построение Н. п. осуществляется с помощью *изоклин*. *В. И. Битюцков.*

НАПРЯЖЕНИЙ ТЕНЗОР – *тензор*, определяющий распределение внутренних сил деформированного твердого тела. В силу закона сохранения импульса:

$$\frac{\partial\Pi_i}{\partial t}+\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=0,\quad i,k=1,2,3, \qquad (1)$$

где Π – плотность импульса, Н. т. σ_{ik} может быть определен как поток i-й составляющей плотности импульса через единичную площадку, перпендикулярную k-й оси.

Если $\vec{F}$ – суммарная сила, действующая на единицу объема тела, то Н. т. определяется соотношением, являющимся следствием (1):

$$\int F_i\,dv=\int\sigma_{ik}\,df_k, \qquad (2)$$

где dv – элемент объема, df – элемент площади.

Наиболее простой вид Н. т. имеет в случае равномерного всестороннего сжатия тела давлением p, а именно:

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik},$$

где δ_{ik} – символ Кронекера. *И. В. Барьяхтар.*

НАТУРАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР на кривой $x(t)$ в римановом многообразии (M^n, g_{ij}) – длина $s(t)$ кривой $x(t)$, отсчитываемая от фиксированной точки $p_0=x(a)$ до текущей точки $p=x(t)$, то есть в пределах одной карты

$$s(t)=\int_a^t\sqrt{g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial t}}\,dt,$$

где $(x^1, \ldots, x^n)$ – локальная система координат в рассматриваемой карте многообразия M^n. Любые два натуральных параметра s, s' отличаются друг от друга на нек-рое ортогональное преобразование прямой, то есть $s'=\pm s+\text{const}$, так как можно изменить направление вдоль кривой на противоположное и сдвинуть начальную точку отсчета.

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, М., 1986.

В. В. Трофимов.

НАЧАЛЬНАЯ ФАЗА колебания – см. *Гармоника.*

НАЧАЛЬНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ – см. *Устойчивость движения.*

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ – см. *Математической физики классические уравнения, Краевая задача.*

НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ – см. *Квантовый случайный процесс.*

НЕАДИАБАТИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД – см. *Адиабатический инвариант.*

НЕБЛУЖДАЮЩАЯ ТОЧКА – точка для отображения f, для любой окрестности U которой найдется такое n, что

$$f^n(U)\cap U\neq\varnothing.$$

Точка, не обладающая этим свойством, называется блуждающей. Множество Н. т. замкнуто и инвариантно относительно f. Аналогичное понятие можно ввести и для динамич. систем с непрерывным временем, то есть потоков. *Я. Б. Песин.*

НЕВАНЛИННЫ КЛАСС N в единичном круге $|\zeta|<1$ – класс, состоящий из всех функций вида:

$$f(\zeta)=\Phi(\zeta)/\Psi(\zeta),$$

где $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ – ограниченные аналитические в круге $|\zeta|<1$ функции. Теорема Неванлинны: функция $f(\zeta)$, аналитическая в круге $|\zeta|<1$, принадлежит Н. к. тогда и только тогда, когда

$$\sup\left\{\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta;\quad 0\leqslant r<1\right\}<\infty.$$

Н. к. в верхней полуплоскости $z=x+iy$, $y>0$ определяется преобразованием Кэли

$$\zeta\mapsto z=i(1+\zeta)/(1-\zeta).$$

Класс N введен Р. Неванлинной (R. Nevanlinna) в конце 20-х гг. 20 в. *В. В. Жаринов.*

НЕВЛОЖИМОСТИ ТЕОРЕМА – см. *Симплектическая геометрия.*

НЕВОЗВРАТНОЕ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ – см. *Случайное блуждание.*

НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Устойчивость движения.*

НЕВЫРОЖДЕННАЯ ТОЧКА ПЕРЕВАЛА – см. *Перевала метод.*

НЕВЫРОЖДЕННОСТИ УСЛОВИЕ гамильтоновой системы – см. *Интегрируемая гамильтонова система*; невырожденность.

НЕВЫРОЖДЕННЫЙ ЛАГРАНЖИАН – см. *Вариационное исчисление в целом.*

НЕГОЛОНОМНАЯ СВЯЗЬ, дифференциальная связь, кинематическая связь,– связь *неголономной системы*. См. также *Связи механические.*

НЕГОЛОНОМНАЯ СИСТЕМА – механическая система, на которую кроме геометрических наложены еще дифференциальные (кинематические) связи. Связи системы называются дифференциальными (неголономными), если они накладывают ограничения не только на координаты, но и на скорости точек и выражаются математически уравнениями вида:

$$f_k(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i,t)=0,\quad k=1,2,\ldots,r, \qquad (1)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты, $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ – проекции скоростей, t – время, r – число наложенных связей.

Предполагается, что уравнения (1) не могут быть непосредственно проинтегрированы; в противном случае получается *голономная система*. Число координат x_i, y_i, z_i, определяющих положение Н. с., больше числа степеней свободы системы; так как уравнения (1) непосредственно не интегрируются, для Н. с., в отличие от голономной, нельзя заранее выразить зависимые координаты через независимые.

Н. с. называется линейной, если уравнения (1) линейны относительно скоростей, то есть имеют вид:

$$f_k = \sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\dot{x}_i + b_{ki}\dot{y}_i + c_{ki}\dot{z}_i) + d_k = 0, \quad k = 1,2,\ldots,r, \tag{2}$$

где a, b, c и d – функции x_i, y_i, z_i и t; N – число точек системы. Пример линейной Н. с.: шар, катящийся по шероховатой плоскости. Уравнение связи, выражающее тот факт, что точка касания шара имеет скорость, равную нулю, не может быть проинтегрировано. Возможные перемещения точек системы при связях (2) удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\delta x_i + b_{ki}\delta y_i + c_{ki}\delta z_i) = 0. \tag{3}$$

Движение линейных Н. с. можно изучать с помощью *Чаплыгина уравнений, Аппеля уравнений*, уравнений в квазикоординатах Гамеля (см. [5]) и др. С учетом условий (3) эти уравнения могут быть получены из дифференциальных вариационных принципов или же из обобщенного интегрального принципа Гамильтона – Остроградского – принципа Воронца – Суслова [3, 4].

Н. с. называется нелинейной, если уравнения (1) нелинейны относительно скоростей. Пример: система двух точек $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, в к-рой точка M_1 движется по заданному закону, а скорость точки M зависит от взаимного расположения точек, напр. от расстояния MM_1. Уравнение связи будет

$$f \equiv \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \varphi\left[\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}\right] = 0.$$

Уравнения движения нелинейных Н. с. могут быть получены из тех же принципов механики, что и для линейных Н. с., если возможные перемещения точек системы удовлетворяют условию Четаева (см. [6]):

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial \dot{y}_i}\delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial \dot{z}_i}\delta z_i\right) = 0.$$

Механика Н. с. находит приложения при решении ряда задач современной техники.

Лит.: [1] Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, пер. с нем., М., 1959; [2] Чаплыгин С. А., Исследования по динамике неголономных систем, М.– Л., 1949; [3] Суслов Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.– Л., 1944; [4] Воронец П. В., Об уравнениях движения для неголономных систем, «Математич. сб.», 1901, т. 22, вып. 4; [5] Hamel G., Theoretische Mechanik, B., 1949; [6] Четаев Н., О принципе Гаусса, «Изв. Казанского физико-математич. общества при Казанском ун-те», 1932–1933, т. 6, сер. 3; [7] Муштари Х. М., «Математич. сб.», 1932, т. 39, № 1–2 (содержит обзор работ по Н. с. до 1932); [8] Добронравов В. В., «Уч. зап. МГУ», 1948, т. 2, вып. 122; [9] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 16, М., 1987.

Г. С. Погосов.

НЕЖЕСТКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Изгибание поверхности.*

НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ – см. *Случайная величина.*

НЕИЗГИБАЕМАЯ ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Изгибание поверхности.*

НЕИНВАРИАНТНАЯ ГРУППА – см. *Динамическая симметрия.*

НЕЙМАНА АЛГЕБРА – подалгебра A алгебры $\mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, самосопряженная (то есть содержащая вместе с каждым оператором T сопряженный к нему оператор T^*) и совпадающая со своим бикоммутантом (то есть содержащая те и только те операторы $T \subset \mathcal{B}(H)$, которые перестановочны с каждым оператором, перестановочным со всеми операторами из A). Эти алгебры были введены Дж. Нейманом (J. Neumann, 1936). Согласно теореме Неймана, самосопряженная алгебра $A \subset \mathcal{B}(H)$ тогда и только тогда является Н. а., когда алгебра A (или ее единичный шар) замкнута в слабой, сильной, ультраслабой или ультрасильной, но не равномерной операторной топологии.

Н. а. естественно возникают в задачах, связанных с операторами в гильбертовом пространстве, и имеют многочисленные приложения как в самой теории операторов и теории представлений групп и алгебр, так и в теории динамич. систем, статистич. физике и квантовой теории поля.

См. также *Гильбертова алгебра.*

А. И. Штерн.

НЕЙМАНА ЗАДАЧА, вторая краевая задача,– одна из *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть, напр., в ограниченной области Ω, в каждой точке границы Γ к-рой существует нормаль, задано эллиптич. уравнение 2-го порядка

$$Lu = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \tag{*}$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$. Задачей Неймана для уравнения (*) в области Ω называется следующая задача: из множества всех решений уравнения (*) требуется выделить те, к-рые в каждой граничной точке имеют производные по внутренней конормали N и удовлетворяют условию

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial N(x)}\right|_{x\in\Gamma} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция.

В. И. Битюцков.

НЕЙМАНА МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ – см. *Статистический оператор.*

НЕЙМАНА НЕРАВНОВЕСНАЯ ЭНТРОПИЯ – см. *Неравновесная энтропия.*

НЕЙМАНА ПРОЕКЦИОННЫЙ ПОСТУЛАТ – см. *Квантовое измерение.*

НЕЙМАНА РЯД – см. *Интегральное уравнение.*

НЕЙМАНА ТЕОРЕМА – см. *Неймана алгебра.*

НЕЙМАНА УРАВНЕНИЕ – линейное уравнение

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}(\rho(t)H - H\rho(t)),$$

которому удовлетворяет статистический оператор $\rho(t)$, зависящий от времени и описывающий в квантовой и статистической механике эволюцию системы во времени; здесь H – гамильтониан системы, который может явно зависеть от времени. Это уравнение дает возможность определить статистич. оператор в любой момент времени, если он известен в начальный момент. Если гамильтониан системы не зависит явно от времени, то формальное решение Н. у. может быть представлено в виде:

$$\rho(t) = \exp\left(-\frac{iH}{\hbar}t\right)\rho(0)\exp\left(\frac{iH}{\hbar}t\right).$$

В противном случае явно зависящего от времени гамильтониана решение может быть получено при помощи эволюционного оператора $U(t, 0)$:

$$\rho(t) = U(t, 0)\,\rho(0)\,U^{-1}(t, 0).$$

Эволюционный оператор удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial U(t,0)}{\partial t} = H(t)U(t,0)$$

и начальному условию $U(0, 0) = 1$.

Н. у. описывает обратимую эволюцию квантовой системы. В состоянии статистич. равновесия оно сводится к уравнению

$$\rho H - H\rho = 0$$

и статистич. оператор является интегралом движения.

См. также *Лиувилля квантовый оператор, Плотности матрица.*

А. В. Солдатов.

НЕЙМАНА ФУНКЦИИ – *цилиндрические функции* 2-го рода. Н. ф. $N_p(x)$ [иногда их называют также функциями Вебера и применяют обозначение $Y_p(x)$] могут быть определены через *Бесселя функции* $J_p(x)$ следующим образом:

$$N_p(x) = \lim_{k\to p} \frac{J_k(x)\cos k\pi - J_{-k}(x)}{\sin k\pi}.$$

Н. ф. действительны при действительном положительном x и стремятся к нулю при $x\to\infty$. При больших x справедливо асимптотич. представление:

$$N_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{1}{2}p\pi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Н. ф. связаны рекуррентными формулами

$$N_{p-1}(x) + N_{p+1}(x) = (2p/x)N_p(x),$$
$$N_{p-1}(x) - N_{p+1}(x) = 2N_p'(x).$$

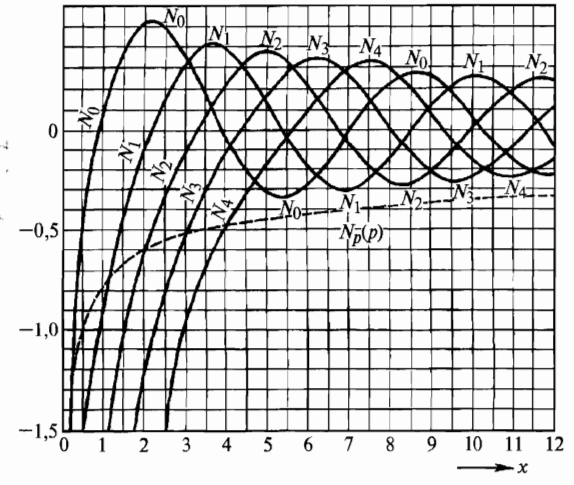
При $p=n$ целых:

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x);$$

для малых x:

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{2}{\gamma x}\right), \quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n,$$

где $\ln\gamma = C = 0{,}5772\ldots$ – постоянная Эйлера.



Графики функций Неймана.

Н. ф. для «полуцелого» порядка $p=n+1/2$ выражаются через тригонометрич. функции, в частности

$$N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \quad N_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Н. ф. предложены К. Нейманом (K. Neumann, 1867).

Лит. см. при ст. *Цилиндрические функции.* *В. И. Битюцков.*

НЕЙМАНА ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА – исторически первая статистическая *эргодическая теорема*; установлена Дж. Нейманом [1]. Пусть X_0, X_1, ... – стационарная в широком смысле случайная последовательность над вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$; H_X – подпространство в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, являющееся замыканием множества случайных величин вида:

$$\sum_{i=1}^m a_i X_{k_i}$$

($1\leqslant m<\infty$, a_i – константы); U – изометрич. линейный оператор в H_X, определенный условиями $UX_i = X_{i+1}$, $i=0, 1, \ldots$; $J_X = \{\gamma: \gamma\in H_X,\ U_\gamma = \gamma\}$; $\hat{\mathsf{E}}(X_0|J_X)$ – ортогональная проекция случайной величины X_0 на подпространство J_X. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}X_i - \hat{\mathsf{E}}(X_0|J_X)\right|^2 = 0.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для стационарных в широком смысле процессов $X(t)$, $t\geqslant 0$, при этом вместо суммы

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k$$

рассматриваются случайные величины

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$$

при $T\to\infty$. В дальнейшем эта теорема была обобщена на однородные случайные поля на группах и полугруппах и на различные полугруппы операторов в банаховых пространствах.

Лит.: [1] Neumann J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1932, v. 18, p. 70–82. *А. А. Темпельман.*

НЕЙТРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Центральное многообразие.*

НЕЙТРАЛЬНЫЙ ТОК – см. *Ток.*

НЕКОМПАКТНОГО ТИПА ПРОСТРАНСТВО – см. *Симметрическое пространство.*

НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ – см. *Корреляции коэффициент.*

НЕЛИНЕЙНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – общее (малоупотребительное) наименование для *квантовых теорий поля*, описывающих взаимодействующие поля. Различные поля могут взаимодействовать как друг с другом, так и сами с собой (самодействие). Уравнения взаимодействующих полей всегда нелинейны; линейные уравнения описывают лишь свободные поля. Среди Н. к. т. п. можно выделить два вида: перенормируемые и неперенормируемые, причем последние могут быть полиномиальными и неполиномиальными. *М. К. Волков.*

НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ – см. *Дифференциальный оператор.*

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА – нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными:

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\varkappa|\psi|^2\psi, \\ \psi(x,t)|_{t=0} &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\psi(x,\ t)$ – комплекснозначная функция (заряженное скалярное поле). Вещественный параметр $\varkappa$, входящий в уравнение, играет роль константы связи. Свое название Н. у. Ш. получило из-за формального сходства с *Шредингера уравнением* для свободной одномерной частицы, в к-рое уравнение (1) переходит в линейном пределе $\varkappa=0$. В физич. приложениях уравнение (1) возникает при исследовании широкого класса нелинейных явлений, в частности в физике плазмы, в нелинейной оптике и др.

Н. у. Ш. может быть проинтегрировано с помощью *обратной задачи рассеяния метода.* В основе данного метода лежит представление уравнения (1) в виде условия совместности переопределенной системы уравнений (вспомогательной линейной задачи):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x,t,\lambda)F,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x,t,\lambda)F.$$

Здесь F – двухкомпонентный вектор-столбец, зависящий от x, t и нек-рого произвольного комплексного числа λ, получившего название спектральный параметр, U и V – матрицы 2×2:

$$U = -\frac{i\lambda}{2}\sigma_3 + \varepsilon\sqrt{|\varkappa|}(\bar{\psi}\sigma_+ + \psi\sigma_-),$$
$$V = -\lambda U + i\varkappa|\psi|^2\sigma_3 - i\varepsilon\sqrt{\varkappa}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\sigma_+ - \frac{\partial\psi}{\partial x}\sigma_-\right).$$

Здесь σ_a – *Паули матрицы* ($a=0,\ 1,\ 2,\ 3$), $\sigma_0=I$, $\sigma_\pm=(1/2)(\sigma_1\pm i\sigma_2)$, $\overline{\psi}$ – функция, комплексно сопряженная функции ψ, $\varepsilon=1$ при $\varkappa>0$, $\varepsilon=i$ при $\varkappa<0$. Выполнение условия совместности для вспомогательной линейной задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial x}+[U,V]=0 \qquad (1')$$

эквивалентно выполнению уравнения (1). Запись уравнения (1) в виде (1') принято называть представлением нулевой кривизны.

Альтернативно метод обратной задачи рассеяния может быть сформулирован на основе *Лакса представления*.

Центральным объектом в методе обратной задачи рассеяния является матрица монодромии $T(\lambda)$. Для определения последней необходимо ввести матрицу перехода $T(x, y, \lambda)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}T(x,y,\lambda)=U(x,\lambda)T(x,y,\lambda)$$

и условию

$$T(x,y,\lambda)|_{x=y}=I.$$

Конкретное выражение матрицы монодромии через матрицу перехода зависит от вида граничных условий, накладываемых на функцию $\psi(x, t)$. Предположим, что решение Н. у. Ш. ищется в классе быстроубывающих функций с начальным условием $\psi(x)\in S(\mathbb{R}^1)$ [$S(\mathbb{R}^1)$ – пространство Шварца]. Тогда

$$T(\lambda)=\begin{Vmatrix} a(\lambda) & \varepsilon^2\overline{b}(\lambda)\\ b(\lambda) & \overline{a}(\lambda)\end{Vmatrix}=\lim e^{i\lambda x\sigma_3/2}T(x,y,\lambda)e^{-i\lambda y\sigma_3/2},$$

$$x\to+\infty,\quad y\to-\infty.$$

Замечательным свойством матрицы монодромии является особенно простая зависимость ее матричных элементов от времени:

$$a(\lambda,t)=a(\lambda,0),$$

$$b(\lambda,t)=e^{-i\lambda^2t}b(\lambda,0).$$

Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ принято называть коэффициентами перехода. В теории рассеяния величины $a^{-1}(\lambda)$ и $b(\lambda)/a(\lambda)$ играют роль коэффициентов прохождения и отражения. Решение $\psi(x, t)$ уравнения (1) однозначно восстанавливается по данным рассеяния и сводится к исследованию аналитич. свойств коэффициентов перехода. В частном случае безотражательного потенциала [$\varkappa<0$, $b(\lambda)=0$] решение находится явно и называется N-солитонным [где N – число нулей коэффициентов $a(\lambda)$].

С помощью метода обратной задачи рассеяния также находится решение задачи Коши для граничных условий вида $\psi(x, t)\to\rho e^{i\varphi(t)}$, $x\to\pm\infty$ (условия конечной плотности). В этом случае обычно в правую часть уравнения (1) добавляют линейное по ψ слагаемое $-2\varkappa\rho^2\psi$ (соответственно в представлении нулевой кривизны матрица V заменяется на $V=-i\varkappa\rho^2\sigma_3$).

В случае периодич. граничных условий $\psi(x+L,\ t)=\psi(x-L,\ t)$, $-L\leqslant x\leqslant L$, решение Н. у. Ш. сводится к исследованию вспомогательной линейной задачи на римановой поверхности функции

$$y^2=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{E_n}\right).$$

Здесь E_n – границы разрешенных и запрещенных зон в спектре оператора

$$\mathscr{L}=i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}+i\sqrt{|\varkappa|}(\psi\sigma_--\overline{\psi}\sigma_+).$$

В случае, когда число зон конечно, решение $\psi(x, t)$ уравнения (1) допускает явное выражение через θ-функции Римана и называется конечнозонным. При $L\to\infty$ конечнозонные решения Н. у. Ш. переходят в N-солитонные.

Н. у. Ш. можно рассматривать как гамильтоново уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\{H,\psi\}$$

с гамильтонианом

$$H=\int dx\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+\varkappa|\overline{\psi}|^4\right)$$

и скобкой Пуассона $\{\psi(x),\ \overline{\psi}(y)\}=i\delta(x-y)$. Координатами в фазовом пространстве являются функции $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ с определенными граничными условиями.

В рамках гамильтонова подхода к Н. у. Ш. широкое распространение получил метод r-матрицы, первоначально возникший в теории квантового метода обратной задачи. В основе данного метода лежит возможность представить скобки Пуассона матричных элементов матрицы $U(x, y)$ в виде:

$$\{U(x,\lambda)\otimes,\ U(y,\mu)\}=$$
$$=[r(\lambda-\mu),\ U(x,\lambda)\otimes I+I\otimes U(x,\mu)]\delta(x-y),$$

где r-матрица равна

$$r(\lambda-\mu)=-\frac{\varkappa}{2(\lambda-\mu)}\sum_{a=0}^{3}\sigma_a\otimes\sigma_a.$$

Можно показать, что такая запись скобок Пуассона заменяет представление нулевой кривизны.

Скобки Пуассона матричных элементов матрицы монодромии также записываются с помощью r-матрицы:

$$\{T(\lambda)\otimes T(\mu)\}=[r(\lambda-\mu),\ T(\lambda)\otimes T(\mu)].$$

С точки зрения гамильтонова подхода переход к данным рассеяния является канонич. преобразованием к переменным действие-угол.

Гамильтонова модель Н. у. Ш. является вполне интегрируемой и обладает бесконечным набором интегралов движения J_n, производящей функцией для к-рых является след матрицы монодромии $\operatorname{tr}T(\lambda)$. Все интегралы движения записываются в виде локальных функционалов от ψ и $\overline{\psi}$ и их производных, напр.:

$$J_1=\int dx\,|\psi|^2\quad\text{(оператор заряда)},$$

$$J_2=\frac{i}{2}\int dx\left(\psi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}-\overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\quad\text{(оператор импульса)},$$

$$J_3=H.$$

Уравнения вида

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\{J_n,\psi\}$$

принято называть высшими Н. у. Ш.

Векторное Н. у. Ш. описывает движение заряженного скалярного поля $\psi_a(x, t)$, $a=1,\ \ldots\ n$, с n *цветами*:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\varkappa\psi(\psi\psi^*),$$

где под ψ^* подразумевается вектор-столбец, эрмитово сопряженный к вектор-строке ψ. Векторное Н. у. Ш., как и скалярное, представимо в виде условия нулевой кривизны. Матрицы U и V в этом случае имеют размерность $(n+1)\times(n+1)$ и в блочной записи являются прямым обобщением матриц U и V скалярного уравнения. Гамильтониан модели и скобки Пуассона даются формулами

$$H=\int dx\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+\varkappa(\psi\psi^*)^2\right],$$

$$\{\psi_a(x),\overline{\psi}_b(y)\}=i\delta_{ab}\delta(x-y).$$

Иногда в литературе под термином «Н. у. Ш.» подразумевают систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial q}{\partial t}&=-\frac{\partial^2q}{\partial x^2}+2\varkappa q^2r,\\ -i\frac{\partial r}{\partial t}&=-\frac{\partial^2r}{\partial x^2}+2\varkappa r^2q,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

причем функции q и r, вообще говоря, не являются комплексно сопряженными. Большинство результатов для уравнения (1) справедливо и для системы (2), однако в последнем случае для разрешимости обратной задачи рассеяния требуется накладывать ряд дополнительных условий на данные рассеяния. Помимо стандартных методов для системы (2) существует метод построения решения с помощью преобразования Беклунда – Шлезингера. А именно, если q_0 и r_0 – решения (2), то

$$q_1 = \varkappa q_0^2 r - q_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln q_0,$$

$$r_1 = 1/\varkappa q_0$$

– также решения системы (2). Указанное преобразование является простым способом построения солитонных решений уравнения (1). А именно, в качестве затравочного решения системы (2) выбирается $r_0 = 0$, q_0 – общее решение свободного уравнения. После N-кратного применения преобразования Беклунда – Шлезингера к q_0 и r_0 и наложения условия $q_n = \bar{r}_n$ получаем N-солитонное решение уравнения (1).

Ряд разностных уравнений, к-рые в непрерывном пределе переходят в Н. у. Ш., обычно называют решеточными Н. у. Ш. К таким уравнениям относится, напр., уравнение Абловитца – Ладика:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = 2\psi_n - \psi_{n+1} - \psi_{n-1} + \varkappa |\psi_n|^2 (\psi_{n-1} + \psi_{n+1}).$$

Это уравнение является гамильтоновым и вполне интегрируемым. Переход от непрерывной функции $\psi(x, t)$ к дискретной переменной ψ_n часто используется при квантовании Н. у. Ш.

Квантовое Н. у. Ш.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\varkappa \psi^+ \psi \psi$$

описывает квантовую одномерную систему многих частиц с парным взаимодействием, к-рое задается потенциалом $2\varkappa\delta(x-y)$. Здесь $\psi^+(x, t)$ и $\psi(x, t)$ являются соответственно операторами рождения и гибели, действующими в *Фока пространстве* $\psi|0\rangle = 0$, $\langle 0|\psi^+ = 0$. Одновременные перестановочные соотношения задаются формулой

$$[\psi(x, t), \psi^+(y, t)] = \delta(x-y).$$

Гамильтониан модели

$$H = \int dx \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \varkappa \psi^+ \psi^+ \psi \psi \right).$$

Квантовое Н. у. Ш. допускает представление нулевой кривизны, аналогичное представлению для классич. Н. у. Ш. Перестановочные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии, к-рая определяется так же, как и в классич. случае, задаются с помощью квантовой R-матрицы:

$$R(\lambda,\mu)(T(\lambda) \otimes I)(I \otimes T(\mu)) = (I \otimes T(\mu))(T(\lambda) \otimes I) R(\lambda,\mu),$$

$$R(\lambda,\mu) = I - \frac{i\varkappa}{2(\lambda-\mu)} \sum_{a=0}^{3} \sigma_a \otimes \sigma_a.$$

Как и классич., квантовое Н. у. Ш. является вполне интегрируемым и обладает бесконечным набором интегралов движения. Многочастичная матрица рассеяния сводится к произведению двучастичных матриц рассеяния.

Квантовое Н. у. Ш. решается с помощью анзаца Бете. Конкретная формулировка анзаца Бете зависит от вида граничных условий, налагаемых на операторы ψ и ψ^+. В случае периодич. задачи на отрезке $-L \leqslant x \leqslant L$ собственные функции гамильтониана H ищутся в виде:

$$|\Phi_N\rangle = \int_{-L}^{L} dx_1 \dots dx_N \chi_N(x_1, \dots, x_N) \psi^+(x_1) \dots \psi^+(x_N) |0\rangle,$$

$$N = 0, 1, \dots$$

Функция χ_N при этом определяется из условия $H|\Phi_N\rangle = E|\Phi_N\rangle$ и параметризуется набором параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_N$:

$$\chi_N = \sum_p (-1)^{[p]} \prod_{j>k}^{N} (\lambda_{p_j} - \lambda_{p_k} - i\varkappa \operatorname{sign}(x_j - x_k)) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} \exp(i x_j \lambda_{p_j}).$$

Здесь сумма берется по перестановкам переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, к-рые в свою очередь должны удовлетворять системе уравнений

$$\exp(2iL\lambda_j) = \prod_{k \neq j}^{N} \frac{\lambda_j - \lambda_k + i\varkappa}{\lambda_j - \lambda_k - i\varkappa}.$$

Собственные значения гамильтониана

$$E = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2.$$

В рамках квантового метода обратной задачи собственные функции гамильтониана H строятся с помощью матричных элементов матрицы монодромии и выглядят особенно просто:

$$|\Phi_N\rangle = \prod_{j=1}^{N} T_{12}(\lambda_j)|0\rangle.$$

В случае притяжения ($\varkappa < 0$) в модели возможны связанные состояния, к-рые иногда называют квантовыми солитонами.

Корреляционные функции квантового Н. у. Ш. могут быть выражены в терминах детерминантов Фредгольма. В пределе $\varkappa \to +\infty$ (непроницаемый бозе-газ) корреляционные функции операторов ψ и ψ^+ выражаются через решения классич. системы (2).

Лит.: [1] Захаров В. Е., Шабат А. Б., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1971, т. 61, в. 1, с. 118; [2] Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980; [3] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., Гамильтонов подход в теории солитонов, М., 1986; [4] Ньюэлл А., Солитоны в математике и физике, пер. с англ., М., 1989; [5] Korepin V. E., Bogoliubov N. N., Izergin A. G., Quantum inverse scattering method and correlation functions, Cambr., 1993.

Н. А. Славнов.

НЕЛИНЕЙНЫЙ *ВКБ*-МЕТОД – см. *Уизема метод.*

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР – см. *Осциллятор.*

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС – совокупность явлений в нелинейных колебательных системах, обусловленная влиянием резонансных соотношений между частотами колебаний. Рассматриваемые колебательные системы – это обычно системы с быстро вращающимися фазами (см. *Быстро-медленные системы*). Для описания Н. р. *усреднения метод* предписывает частично усреднить систему с учетом выбранных *резонансных соотношений*, то есть отбросить резонансные гармоники в фурье-разложении правых частей системы по фазам. Полученная усредненная система используется для описания движения в области фазового пространства, где приближенно выполнены эти резонансные соотношения, – резонансной зоне.

Дальнейшие упрощения возникают в случае единственного резонансного соотношения. Пусть в этом случае имеется система с медленными переменными $I \in \mathbb{R}^n$, частотами $\omega(I)$, фазами $\varphi \bmod 2\pi \in T^m$ и возмущением порядка ε в $O(\sqrt{\varepsilon})$ окрестности резонансной поверхности $\{I: (k, \omega(I)) = 0\}$; $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, $(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. При условии $\partial/\partial I (k\omega(I)) \neq 0$ (нелинейность) уравнения для изменения резонансной фазы $\gamma = (k, \varphi)$ приводятся к виду (см. [1], гл. 5, § 1):

$$\gamma'' = P(\gamma, \sigma) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \sigma' = O(\sqrt{\varepsilon}). \qquad (*)$$

Здесь штрих обозначает производную по $\tau=\sqrt{\varepsilon}t$, $\sigma\in\mathbb{R}^{n-1}$ задает точку на резонансной поверхности, P – производная $\varepsilon^{-1}(k,\omega(I))$ в силу рассматриваемой системы, вычисленная в точке резонансной поверхности, величина γ' характеризует смещение поперек резонансной поверхности. Эта редукция задачи восходит к [4], [5]. При $\varepsilon=0$, $\sigma=\text{const}$ уравнение (*) переходит в уравнение

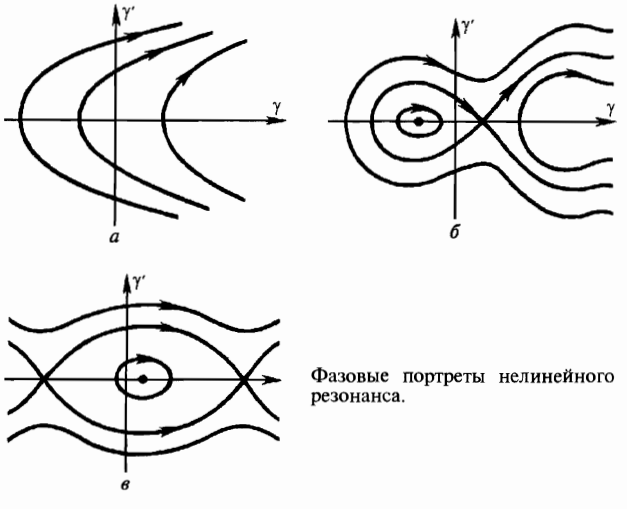
$$\gamma''+P(\gamma,\sigma)=0,$$

описывающее движение маятника в потенциальном силовом поле при наличии дополнительного крутящего момента

$$L(\sigma)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}P(\gamma,\sigma)\,d\gamma.$$

Фазовый портрет этого маятника в типичном случае имеет вид либо рис. *а* (особые точки отсутствуют), либо рис. *б* (конечно, число особых точек и колебательных областей произвольно). В случае рис. *б* движению маятника в колебательной и вращательной областях отвечает движение точек исходной системы, соответственно, проходящих окрестность резонанса и застрявших вблизи резонанса. Замкнутые кривые на рис. *б* называются фазовыми колебаниями, потому что в исходных переменных I, φ колебания вдоль этих кривых испытывает, в основном, фаза $\gamma=(k,\varphi)$. Период фазовых колебаний порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$. Влияние членов $O(\sqrt{\varepsilon})$ в (*) приводит к возможности перехода через сепаратрису на рис. *б* и захвата в колебательную область (*захват в резонанс*) или выхода из колебательной области (выход из резонанса). Влияние членов $O(\sqrt{\varepsilon})$ на движение точек в колебательной области рис. *б* можно описать с помощью усреднения по фазовым колебаниям (см. [1], гл. 5, § 1).

Если исходная система с вращающимися фазами гамильтонова, то $L(\sigma)\equiv 0$. Фазовый портрет системы (*) при $\varepsilon=0$, $\sigma=\text{const}$ имеет вид рис. *в*. Исследование этого случая восходит к А. Пуанкаре (см. [3]).



Фазовые портреты нелинейного резонанса.

Использованная процедура частичного усреднения приводит лишь к приближенному описанию Н. р. В частности, при таком подходе не обнаруживается расщепления сепаратрис на рис. *в*, разрушения части фазовых колебаний и возникновения стохастич. слоев (см. [2], гл. 5).

Лит.: [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, М., 1985, с. 5–303; [2] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Введение в нелинейную физику, М., 1988; [3] Пуанкаре А., Избранные труды, т. 1–3, М., 1971–74; [4] Чириков Б. В., «Доклады АН СССР», 1959, т. 125, № 5, с. 1015–18; [5] Molchanov A. M., «Icarus», 1968, v. 8, № 2, p. 203–15.

А. И. Нейштадт.

НЕЛОКАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ – *бифуркация*, носитель которой содержит бесконечное множество траекторий, в отличие от локальной, для которой носитель бифуркации – положение равновесия, либо периодическая траектория, или полулокальной – с конечным числом траекторий в носителе. Носитель бифуркации – множество траекторий, вне окрестности к-рого бифуркация никак не проявляется. Точнее, носитель бифуркации – наименьшее множество траекторий B в фазовом пространстве M семейства динамич. систем, претерпевающего бифуркацию, для любой окрестности $U(B)$ к-рого существует окрестность V бифуркационного значения параметра (возможно, зависящая от $U(B)$) такая, что динамич. системы, отвечающие любым двум значениям параметра из V, топологически эквивалентны на $M\setminus U(B)$.

Сложные предельные множества, напр. странные аттракторы, рождаются, эволюционируют и гибнут в результате нелокальных и (или) полулокальных бифуркаций.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 5, М., 1986, с. 3–218.

В. С. Афраймович.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – общее наименование обобщений стандартной (локальной) *квантовой теории поля*, для которых характерно несоблюдение условия микропричинности в области малых расстояний и промежутков времени с размерами порядка *фундаментальной длины* l. (В статье используется система единиц, в к-рой $c=\hbar=1$.) В большинстве вариантов Н. к. т. п. это достигается нарушением присущего локальной теории свойства близкодействия (локальности взаимодействия), требующего совпадения пространственно-временных аргументов взаимодействующих полей; именно поэтому говорят о «нелокальной» теории поля. Н. к. т. п. смыкается с другими обобщениями локальной теории (содержащими высшие производные полей, индефинитную метрику и т. п.), а также с процедурой регуляризации ультрафиолетовых расходимостей локальной теории, основанной на рассмотрении локального взаимодействия как предела «размазанного».

Н. к. т. п. зародилась как реакция на расходимости, имея первоначальной целью их устранение [П. Дирак (P. Dirac), 1934; Г. Ватагин (G. Vataghin), 1934]. Позднее интерес к Н. к. т. п. оживлялся в периоды обострения трудностей локальной теории («нулификация заряда», неперенормируемость слабого взаимодействия и др.), а также при появлении свидетельств сложной внутренней структуры адронов. В более общем плане к разработке Н. к. т. п. побуждала неудовлетворенность состоянием физич. фундамента локальной теории поля (в частности, невозможностью придать прямой физич. смысл условию микропричинности из-за неадекватности понятия точечного события в релятивистской квантовой физике); возникала даже убежденность в близости новой революции в физике, означающей коренной пересмотр представлений о пространстве-времени «в малом» и появление новой фундаментальной физич. константы – элементарной (фундаментальной) длины l. Существовал и определенный практич. интерес к Н. к. т. п., связанный с ведущимися и планируемыми экспериментами по проверке квантовой электродинамики и дисперсионных соотношений: эта теория должна ответить на вопрос, означает ли положительный результат проверки дисперсионных соотношений подтверждение свойства микропричинности, и на другие вопросы подобного типа и дать экспериментаторам рабочие формулы, связывающие величину l (или ее верхнюю границу) с данными опыта.

По степени отхода от локальной теории существующие варианты Н. к. т. п. можно разделить на два класса.

К первому, «физическому», классу относятся нелокальные схемы, к-рые основаны на нестандартных пространственно-временных представлениях, лишающих смысла такие понятия, как поле в определенной точке пространства-времени (или сама такая точка), локальность взаимодействия, микропричинность. Это достигается приданием 4-вектору координаты смысла оператора, компоненты к-рого не коммутируют либо с оператором поля [теория

Маркова – Юкавы; М. А. Марков, 1940; Х. Юкава (H. Yukawa), 1956], либо друг с другом (теория квантованного пространства-времени), что приводит к соотношениям неопределенностей между полем и координатами точки пространства-времени и соответственно между самими этими координатами. К рассматриваемому классу относятся и другие схемы, напр. теория стохастич. пространства-времени, в к-рой координата имеет свойства случайной величины (а само пространство-время подобно турбулентной среде).

Второй, «феноменологический», класс составляют нелокальные схемы, базирующиеся на обычных представлениях о пространстве-времени. В них нарушение локальности взаимодействия и условия микропричинности осуществляются введением в аппарат теории нек-рых заданных функций координат или импульсов – формфакторов, к-рые и ведут к «размазыванию» взаимодействия. В динамич. моделях Н. к. т. п. формфактор F вводят в лагранжиан или гамильтониан взаимодействия, «раздвигая» аргументы операторов поля, отнесенных в локальной теории к единой точке пространства-времени. Так, в скалярной теории с 3-частичным взаимодействием, к-рому отвечает функция действия

$$g\int d^4x\,\varphi^3(x),$$

переход к Н. к. т. п. осуществляется заменой этой функции выражением

$$g\int d^4x\,d^4x'\,d^4x''\,F(x,x',x'')\,\varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \qquad (1)$$

(здесь φ – скалярное поле, x, x', x'' – точки пространства-времени, g – константа связи). В аксиоматич. моделях Н. к. т. п., имеющих дело только с *рассеяния матрицей*, формфакторы вводятся в ее разложение по *нормальным произведениям*, причем каждому члену такого разложения может отвечать свой формфактор. Нелокальные схемы 2-го класса не претендуют на описание тех изменений пространственно-временных представлений, к-рые, возможно, произойдут в будущем. Достоинство этих схем помимо простоты состоит в их общности, тем более что многие специфич. трудности Н. к. т. п. как таковой проявляются уже на феноменологич. уровне, где их и нужно научиться преодолевать.

Любой вариант Н. к. т. п. должен удовлетворять ряду общих требований: релятивистской ковариантности (несмотря на существование сверхсветовых сигналов внутри области нелокальности), *калибровочной инвариантности* (для нелокальных теорий *калибровочных полей*), унитарности матрицы рассеяния на пространстве физич. состояний. Специфичны для Н. к. т. п. требования отсутствия расходимостей и макроскопич. причинности. Последнее имеет смысл «ослабленной» микропричинности, допускающей существование быстро затухающих акаузальных (причинно не обусловленных) воздействий при условии, что они не наблюдаемы из-за неточечности событий (актов взаимодействия между полями), то есть неразличимы на фоне флуктуаций, порожденных соотношениями неопределенностей «координата – импульс» и «время – энергия».

Удовлетворить перечисленным требованиям при построении Н. к. т. п. оказалось непросто, с каждым из них были связаны серьезные трудности, возникающие при выходе за рамки локальной теории поля. Эти трудности казались столь непреодолимыми, что порождали мнение о принципиальной невозможности создания последовательной Н. к. т. п. Однако специальный анализ трудностей Н. к. т. п. показал, что они не присущи теории органически, а возникают в результате чересчур прямолинейного обобщения аппарата локальной теории. Оказалось, что эквивалентные формулировки локальной теории не равноценны с точки зрения их нелокального обобщения и преодоление трудностей Н. к. т. п. соответствовало правильному выбору исходной формулировки.

Пока нет полной уверенности лишь в выполнении требования макроскопич. причинности. Степень затухания акаузального воздействия тесно связана с аналитич. свойствами фурье-компоненты формфактора $F(p)$ (где p – 4-импульс) в комплексной плоскости p^2. До конца 60-х гг. обсуждались лишь формфакторы, убывающие на большом круге и имеющие особенности при конечном (но большом) $|p^2|$, $|p^2| \sim 1/l^2$; это отвечает обобщенным функциям, принадлежащим к классу умеренного (полиномиального) роста. Соответствующее акаузальное воздействие затухает медленнее экспоненты

$$\exp\left[-\text{const}\,|(x-x')^2|^{1/2}\right]$$

в области $(\tilde{x}-\tilde{x}')^2<0$ [в частности, на рассматриваемом классе функций Н. к. т. п. совпадает с локальной теорией, если потребовать равенства нулю акаузального воздействия в области $(x-x')^2<-l^2$]. Последующее развитие Н. к. т. п. привело к расширению класса обобщенных функций, что отвечало введению в рассмотрение формфакторов в виде целых функций p^2, имеющих особенности лишь на бесконечности (но убывающих в области $p^2<0$). Одно из преимуществ таких схем состоит в более быстром затухании акаузальных воздействий. Однако до сих пор не сформулирован количественный критерий макроскопич. причинности, к-рый, будучи выражен на языке физически наблюдаемых величин (волновых пакетов), фиксировал бы допустимую форму акаузального воздействия. Это затрудняет окончательную оценку предлагавшихся вариантов Н. к. т. п.

Прогресс теории фундаментальных взаимодействий, начавшийся на рубеже 60–70-х гг. (создание перенормируемой теории электрослабого взаимодействия и квантовой хромодинамики как теории сильного взаимодействия, открытие асимптотич. свободы как противоположности «нулификации заряда», появление первых моделей теории поля без ультрафиолетовых расходимостей и др.), обесценил многие из мотивов, побуждавших ранее к созданию Н. к. т. п. Существует точка зрения, что в относительно недалеком будущем возникнет единая теория всех взаимодействий природы, имеющая локальную основу (хотя и включающая в качестве основного элемента протяженный объект – струну).

Вместе с тем считать, что с Н. к. т. п. связан лишь чисто историч. интерес, преждевременно. Остаются злободневными аспекты этой теории, относящиеся к планированию и обработке результатов опытов по проверке квантовой электродинамики и дисперсионных соотношений. Ждут решения общие проблемы релятивистской теории измерения, связанные с понятиями точечного события, микропричинности и т. п. Определенный интерес к Н. к. т. п. обусловлен также трудностями квантования гравитации. Аппарат Н. к. т. п. может сделать более ясными нек-рые особенности локальной перенормированной теории поля. Наконец, особая область применения Н. к. т. п.– феноменологич. описание сильного взаимодействия на больших расстояниях (в частности, *конфайнмента*): если частица (*кварк*) существует лишь в виртуальном состоянии, то нарушена *перекрестная симметрия* и, как следствие,– микропричинность. На языке феноменологич. Н. к. т. п. оказывается возможным описать единым образом большой круг фактов, относящихся к низкоэнергетич. физике сильного взаимодействия (входящая в теорию величина l играет здесь роль не элементарной длины, а феноменологич. параметра – радиуса конфайнмента).

Получить окончательный ответ на наиболее глубокие вопросы теории строения вещества (правильны ли существующие представления о пространстве-времени, локальны или не локальны фундаментальные взаимодействия природы и т. п.) еще предстоит, и этот ответ придет со стороны будущего прямого эксперимента и астрофизич. или космологич. наблюдений.

Лит.: [1] Марков М. А., Гипероны и К-мезоны, М., 1958; его же, Нейтрино, М., 1964; [2] Киржниц Д. А., «Успехи физич. наук», 1966, т. 90, с. 129; [3] Блохинцев Д. И., Пространство и время в микромире, 2 изд., М., 1982; [4] Ефимов Г. В., Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий, М., 1985.

Д. А. Киржниц.

НЕЛЬСОНОВСКОЕ ПОЛЕ – см. *Гауссово случайное поле.*

НЕОДНОРОДНАЯ ГРУППА ЛОРЕНЦА – см. *Пуанкаре группа.*

НЕОДНОРОДНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА – см. *Маркова цепь.*

НЕОДНОРОДНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ СООТНОШЕНИЕ – фундаментальное неравенство, связывающее дисперсии (неопределенности) двух квантовых наблюдаемых X, Y. Н. с. гласит:

$$D_\rho(X)\cdot D_\rho(Y)\geqslant\frac{1}{4}|\langle[X,Y]\rangle_\rho|^2, \qquad (1)$$

где $D_\rho(X)=\langle(X-\langle X\rangle_\rho)^2\rangle_\rho$ – дисперсия наблюдаемой X в состоянии, описываемом оператором плотности ρ, $\langle X\rangle_\rho=\mathrm{Tr}\rho X$, а $[X, Y]$ – *коммутатор* операторов X, Y. Н. с. показывает, в частности, что не существует квантового состояния, в к-ром все наблюдаемые имели бы точно определенные значения, и тем самым демонстрирует одно из принципиальных отличий квантовой статистики от классической.

Для наблюдаемых координаты Q и импульса P, подчиняющихся *каноническому коммутационному соотношению* $[Q, P]=i\hbar I$, неравенство (1) переходит в соотношение неопределенностей Гейзенберга – Вейля (см. [1]):

$$D_\rho(Q)D_\rho(P)\geqslant\frac{\hbar^2}{4} \qquad (2)$$

(относительно обобщений на другие пары канонич. переменных см. *Каноническая сопряженность* в квантовой механике). Неопределенность наблюдаемой может измеряться не только дисперсией; существуют многочисленные варианты Н. с. для других мер неопределенности (см. [2]). Пусть, напр., $\psi(x)$ – волновая функция нерелятивистской квантовой частицы в n-мерном координатном пространстве, $\tilde{\psi}(p)$ – ее преобразование Фурье. Имеет место энтропийное соотношение неопределенностей:

$$S(\psi)+S(\tilde{\psi})\geqslant n\ln(\pi e),$$

где

$$S(\psi)=-\int\ldots\int|\psi(x)|^2\ln|\psi(x)|^2\,dx_1\ldots dx_n,$$

к-рое усиливает неравенство (2) для чистых состояний.

Лит.: [1] Вейль Г., Теория групп и квантовая механика, пер. с англ., М., 1986; [2] Додонов В. В., Манько В. И., «Труды Физич. ин-та АН СССР», 1987, т. 183, с. 5–70. *А. С. Холево.*

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ СООТНОШЕНИЕ в квантовой механике – положение, согласно которому нельзя приготовить состояние системы, в котором координаты и импульсы частиц имели бы одновременно сколь угодно малые дисперсии. Предложено В. Гейзенбергом [1].

Пусть x_i – координаты частицы, p_i – соответствующие компоненты импульса. Пусть Δx_i и Δp_i – дисперсии координат и импульсов в рассматриваемом состоянии. Тогда, по Гейзенбергу,

$$\Delta x_i\Delta p_i\approx h. \qquad (1)$$

Соотношения (1) показывают, что в состояниях, в к-рых дисперсия координаты мала, дисперсия импульса велика, и наоборот. В предельном случае, когда $\Delta x_i=0$, импульс частицы полностью неопределен. Отсюда следует, что в квантовой механике невозможно ввести понятие «траектория движения».

С современной точки зрения соотношения (1) требуют уточнения и могут быть существенно обобщены. Пусть $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ – два самосопряженных оператора, отвечающих физич. величинам A_1, A_2. Пусть операторы $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ имеют общую инвариантную область определения, и пусть $i\hat{B}=[\hat{A}_1,\hat{A}_2]$. Далее, пусть система находится в состоянии с матрицей плотности $\hat{\rho}$. Тогда дисперсия

$$\Delta A_i\equiv\sqrt{\mathrm{Sp}(\hat{\rho}\,\hat{A}_i^2)-(\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\,\hat{A}_i)^2}, \quad i=1,2,$$

и средние значения $\overline{B}=\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\,\hat{B}$ подчинены неравенству

$$\Delta A_1\Delta A_2\geqslant\frac{1}{2}|\overline{B}|.$$

Это неравенство является наиболее общей версией Н. с. Оно может быть получено из неравенства

$$\mathrm{Sp}\hat{\rho}(\lambda\hat{A}_1+i\hat{A}_2)(\lambda\hat{A}_1-i\hat{A}_2)\geqslant 0,$$

к-рое имеет место для всех $\lambda\in\mathbb{R}$. В частности, при $\hat{A}_1=\hat{x}_i$, $\hat{A}_2=\hat{p}_i$, $\hat{B}=h$ и

$$\Delta x_i\Delta p_i\geqslant\frac{1}{2}\hbar, \qquad (2)$$

что согласуется с (1).

Условие существования общей инвариантной области определения операторов $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ весьма существенно. В качестве примера может быть рассмотрена задача движения частицы в одномерном прямоугольном ящике. Пусть $0\leqslant x\leqslant L$, на волновую функцию наложены периодич. граничные условия $\psi(0)=\psi(L)$. В этом случае оператор импульса имеет чисто дискретный спектр и, следовательно, существуют состояния, в к-рых $\Delta p=0$, что делает невозможным выполнение соотношений (2). Данное обстоятельство связано с тем, что множество периодич. функций не инвариантно относительно действия оператора $\hat{x}$. Таким образом, Н. с. (2) может, вообще говоря, нарушаться.

Часто рассматривают также Н. с. «энергия – время», предложенное Н. Бором в [2]:

$$\Delta E\Delta t\approx h. \qquad (3)$$

Смысл этого соотношения существенно иной, нежели смысл соотношений (1), (2). В (3) ΔE означает неопределенность в определении энергии системы, возникающая в процессе измерения за время Δt. Другая трактовка соотношений (3) возникает при рассмотрении нестационарных систем. В этом случае под ΔE следует понимать дисперсию системы в данном нестационарном состоянии, а Δt – характерное время, за к-рое существенно меняются средние значения физич. величин в данной системе.

Приведенные выше формулировки Н. с. «энергия – время» нельзя рассматривать как математически строгие утверждения. Тем не менее соотношения (3) часто играют важную роль при изучении нестационарных квантовых систем. Напр., из (3) немедленно следует соотношение между шириной уровня и временем жизни возбужденного состояния атома или ядра.

Лит.: [1] Heizenberg W., «Z. für Phys.», 1927, Bd 43, S. 172; [2] Bohr N., «Nature, suppl.», 1928, v. 121, p. 580 (рус. пер.: Бор Н., Избранные научные труды, т. 2, с. 30, М., 1971). *Ф. А. Лунев.*

НЕОРИЕНТИРУЕМЫЙ ГРАФ – см. *Граф.*

НЕПЕРЕНОРМИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ – см. *Перенормировка* в квантовой механике.

НЕПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ – см. *Квантовая теория гравитации.*

НЕПОДВИЖНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА – см. *Кинематика.*

НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА системы дифференциальных уравнений – см. *Ляпунова функция.*

НЕПОДВИЖНАЯ ЦЕНТРОИДА – см. *Твердое тело*; плоское движение.

НЕПОДВИЖНЫЙ АКСОИД – см. *Винтовое движение, Вращательное движение.*

НЕПОЛНОМЕРНЫЙ ТОР – см. *КАМ-теория.*

НЕПОЛНЫЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Эллиптический интеграл.*

НЕПРЕРЫВНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – классическая или квантовая система частиц, которые движутся в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\nu$ или в некоторой области $\Lambda \in \mathbb{R}^\nu$. Система может состоять из частиц нескольких различных типов, а также частиц, обладающих внутренними степенями свободы. Дискретный вариант Н. с. с. представляет собой решетчатую статистическую систему. Н. с. с. и решетчатые системы – два основных класса систем, изучаемых в современной статистич. механике.

В. И. Герасименко.

НЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ топологических пространств X и Y – отображение $f: X \to Y$ такое, что для каждой точки $a \in X$ и каждой окрестности V точки $b = f(a)$ существует окрестность U точки a, для к-рой $f(U) \subset V$. Суперпозиция (последовательное применение) Н. о. является Н. о.

НЕПРЕРЫВНОСТИ УРАВНЕНИЯ – см. *Брагинского уравнения.*

НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР – см. *Спектр оператора, Линейный оператор.*

НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – *представление* T группы G в пространстве V такое, что V не содержит инвариантных подпространств, отличных от 0 и самого V. (Подпространство $W \subset V$ называется инвариантным, если для любых $g \in G$, $w \in W$ выполнено отношение $T_g w \in W$.)

Ю. А. Неретин.

НЕРАВНОВЕСНАЯ ЭНТРОПИЯ – функционал состояния многочастичных систем, обладающий следующими физическими свойствами: а) Н. э. совпадает в состоянии равновесия с термодинамической энтропией; б) для Н. э. в состоянии равновесия реализуется условный максимум, соответствующий фиксированным значениям аддитивных интегралов движения. В квантовой статистич. механике рассматривается Н. э. Неймана:

$$\sigma = -\mathrm{sp}\,\rho \ln \rho, \qquad (1)$$

где ρ – неравновесный статистич. оператор (аналогичное определение имеет место и в классич. случае). В отсутствие корреляций, когда многочастичные функции распределения являются произведением одночастичных, Н. э. Неймана переходит в Н. э. идеальных квантовых газов:

$$\sigma = \pm \mathrm{tr}\{(1 \pm f)\ln(1 \pm f) \mp f \ln f\}, \qquad (2)$$

где f – одночастичная функция распределения. Верхний и нижний знаки соответствуют статистике Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака. В классич. пределе ($f \ll 1$) Н. э. Неймана переходит в Н. э. Больцмана:

$$\sigma = -\mathrm{tr} f \ln f.$$

В силу квантового уравнения Лиувилля, Н. э. (1) сохраняется во времени $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ и не описывает реальную необратимость физич. процессов в многочастичных системах. Н. э. (1) может быть названа мелкоструктурной Н. э. В статистич. механике существует проблема построения неравновесной крупноструктурной энтропии, к-рая, с одной стороны, удовлетворяет свойствам а)–б), а с другой – возрастает во времени и, вместе с требованием инвариантности гамильтониана по отношению к обращению времени, приводит к принципу Онсагера (симметрии кинетич. коэффициентов). Крупноструктурную Н. э. вводят для времен $t \gg \tau_0$ (τ_0 – время хаотизации), когда состояние системы можно описывать сокращенным образом. В этом случае крупноструктурная Н. э. является функционалом параметров сокращенного описания и должна возрастать во времени в силу уравнений движения для этих параметров. В классич. статистич. механике крупноструктурная Н. э. определяется крупноструктурным (сглаженным) фазовым объемом системы взаимодействующих частиц. В случае кинетич. этапа эволюции в главном приближении по взаимодействию роль крупноструктурной Н. э. играет Н. э. (2), в к-рой параметром сокращенного описания является одночастичная функция распределения.

Лит.: [1] Нейман И., Математические основы квантовой механики, М., 1964; [2] Либов Р., Введение в теорию кинетических уравнений, М., 1974; [3] Ахиезер А. И., Пелетминский С. В., Методы статистической физики, М., 1977.

М. Ю. Ковалевский.

НЕРАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ статистических систем – состояния, отождествляющиеся с последовательностью функций распределения, которые являются решениями задачи Коши для *Боголюбова уравнений* бесконечных систем (см. [1]). Другой альтернативный способ описания Н. с. состоит в построении эволюции вероятностной меры на фазовом пространстве системы бесконечного числа частиц. Н. с. построены в настоящее время только для нек-рых классов *взаимодействия потенциалов* и начальных состояний, близких к *равновесным состояниям* (см. [1], [2]).

См. также *Термодинамический предел* для неравновесных состояний классич. статистич. механики.

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985; [2] Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., в сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 233–84.

В. И. Герасименко.

НЕРАЗЛОЖИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – представление группы G в пространстве V такое, что V не может быть разложено в прямую сумму двух ненулевых инвариантных подпространств (см. *Неприводимое представление*). Для конечных компактных групп, а также для унитарных представлений приводимость влечет за собой разложимость.

Ю. А. Неретин.

НЕРАЗРУШАЮЩЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ – невозмущающее воздействие наблюдателя на интересуемый квантовый процесс $\{X_t\}$, которое алгебраически сводится к условию коммутативности $[X_s, Y_t] = 0$, $t \leqslant s$, прошлого наблюдаемого квантового процесса в узком смысле $\{Y_t\}$ с будущим процесса $\{X_t\}$. Первоначально этот принцип формулировался (см. [3]) только для случая самонеразрушающего измерения $X_t = Y_t$, для к-рого он по существу означает возможность классич. описания процесса $\{X_t\}$ в совместном спектральном представлении коммутативного семейства $\{Y_t\}$. В общем случае неразрушающий квантовый процесс $\{Y_t\}$ определяется (см. [4]) условием согласованности $Y_t \in \mathcal{A}_t'$ относительно коммутантов заданного невозрастающего семейства $\{\mathcal{A}_t\}$ C^*-алгебр $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$, определяющих будущее $\mathcal{A} = \bigvee_{s \geqslant t} \mathfrak{A}_s$, неразрушаемой открытой квантовой системы $\{\mathfrak{A}_t\}$. Теорема реконструкции для квантового случайного процесса позволяет представить любой, в том числе косвенный процесс последовательного измерения в квантовой системе $\{\mathfrak{A}_t\}$ как неразрушающий относительно редуцированной квантовой стохастич. системы, описываемой нек-рым квантовым случайным процессом $\{\pi_t\}$ над $\mathfrak{A}$.

Лит.: [1] Белавкин В. П., «Радиотехника и электроника», 1980, т. 25, № 7, с. 1445–53; [2] его же, в кн.: Information complexity and control in quantum physics, «CISM», № 294, W.– N. Y., 1987, p. 311–29; [3] Caves C. M., в кн.: Quantum optics, experimental gravity and measurement theory, N. Y.– L., 1983; [4] Белавкин В. П., «Теоретич. и математич. физика», 1985, т. 62, № 3, с. 409–31.

В. П. Белавкин.

НЕРАЗРЫВНОСТИ УРАВНЕНИЕ – см. *Комплексный потенциал.*

НЕРЕЗОНАНСНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА – см. *Малые знаменатели, Обмотка тора.*

НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ – см. *Гидродинамики уравнения.*

НЕСЕЛЕКТИВНАЯ ОПЕРАЦИЯ – см. *Операция.*

НЕСПЕКТРАЛЬНАЯ ОСОБЕННОСТЬ самосопряженного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H,— сингулярность аналитического продолжения его резольвенты

$$P_1(A-\lambda I)^{-1}P_2,$$

окаймленной ортопроекторами P_i, $i=1, 2$, на некоторые подпространства H_i из H. В то время как естественной особенностью аналитичности самой резольвенты является спектральный лист переменной λ — дополнение спектра $\sigma(A)$ на комплексной плоскости λ,— окаймленная резольвента в нек-рых случаях допускает аналитич. продолжение на «нефизический лист» через разрезы, отвечающие абсолютно непрерывному спектру. Интегрируя билинейную форму резольвенты $\langle R_\lambda e_i, e_k\rangle$, $e_i \in H_i$, с экспонентой по контуру γ вокруг спектра оператора A:

$$\left\langle e^{iAt}, e_i, e_k\right\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{i\lambda t}\langle R_\lambda e_i, e_k\rangle d\lambda,$$

можно, пользуясь продолжимостью окаймленной резольвенты на нефизич. лист при $t>0$, продеформировать контур интегрирования, убирая его из полуплоскости нижней на верхнюю полуплоскость нефизич. листа и обходя встречающиеся на пути неспектральные особенности. Интеграл на нефизич. листе вокруг полюса λ_0 аналитич. продолжения дает экспоненциально убывающий вклад

$$\operatorname{Res} e^{i\lambda t}\langle R_\lambda, e_i, e_k\rangle|_{\lambda=\lambda_0},$$

а участки деформированного контура интегрирования, примыкающие к вещественной оси λ,— вклады, убывающие степенным образом, как $O(t^{-l})$, $l>0$.

В тех спектральных задачах, где существует матрица рассеяния $S(k)$, часто оказывается, что она, будучи окаймлена проекторами на нек-рые подпространства E_i, $i=1, 2$, вспомогательного пространства также допускает аналитич. продолжение с вещественной оси спектральной переменной k в комплексную плоскость. Если исходная S-матрица унитарна, то область аналитичности продолженной S-матрицы всегда можно считать симметричной в силу принципа симметрии. Корни продолженной S-матрицы называются резонансами.

Наиболее интересной и аналитически богатой является ситуация «резонансного рассеяния», когда «неспектральные особенности» совпадают с резонансами. Этот случай подробно проанализирован П. Лаксом и Р. Филлипсом (см. *Лакса—Филлипса подход*). Он имеет место тогда, когда рассматриваемый самосопряженный оператор A является генератором унитарной группы $U_t=\exp(iAt)$, обладающей ортогональными приходящими и уходящими подпространствами $D_\mp$. При этом резольвента оператора A, окаймленная проекторами на трансляционно инвариантное подпространство $K=H\ominus(D_-\oplus D_+)$, совпадает в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} K<0$ с резольвентой генератора B полугруппы сжатий $Z_t=P_K e^{iAt}|_K$:

$$P_K(A-\lambda I)^{-1}|_K=(B-kI)^{-1},\ \operatorname{Im} k<0,$$

и, значит, продолжается в верхнюю полуплоскость на дополнение спектра оператора B. При этом матрица рассеяния $S(k)$ оператора A оказывается характеристич. функцией генератора B и множество особенностей $S^{-1}(k)$ совпадает со спектром оператора B.

В этом случае главные части окаймленной резольвенты в ее полюсах (резонансах) записываются через собственные функции генератора B — резонансные состояния. Анализ резонансных состояний эквивалентен спектральному анализу общего диссипативного оператора. *Б. С. Павлов.*

НЕСТАЦИОНАРНАЯ СВЯЗЬ — *связь механическая*, изменяющаяся со временем.

НЕСТРАННЫЙ ТОК — см. *Ток.*

НЕТЕР ТЕОРЕМА: для всякой физической системы, уравнения движения которой могут быть получены из вариационного принципа, каждому однопараметрическому непрерывному преобразованию, оставляющему вариационный функционал инвариантным, отвечает один дифференциальный *сохранения закон* и, главное, позволяет явно выписать сохраняющуюся величину. Установлена в работах ученых геттингенской школы Д. Гильберта (D. Hilbert), Ф. Клейна (F. Klein) и Э. Нетер (E. Noether). Н. т.— самое универсальное средство, позволяющее находить законы сохранения в лагранжевой классич. механике, теории поля, квантовой теории и т. д.

В классич. механике для системы с *действием*

$$S=\int_T L[q_a(t),\dot q_a(t)]dt$$

(L — *Лагранжа функция*, зависящая от обобщенных координат q_a и скоростей $\dot q_a$) инвариантность S относительно образующих группу преобразований с параметром ε:

$$t\to t'=t+\Lambda(q,t)\varepsilon,\ q_a(t)\to q'_a(t')=q_a(t)+\Lambda_a(q,t)\varepsilon \quad (1)$$

[где задающие преобразование функции $\Lambda(q, t)$, $\Lambda_a(q, t)$ зависят от совокупности координат $\{q_a\}\equiv q$ и времени] влечет за собой, согласно Н. т., сохранение во времени величины

$$Q=\left[L-\sum_a\frac{\partial L}{\partial\dot q_a}\dot q_a\right]\Lambda+\sum_a\frac{\partial L}{\partial q_a}\Lambda_a.$$

В частности, из инвариантности S относительно (1) с $\Lambda_a=0$, $\Lambda=1$, то есть из однородности времени, следует закон сохранения энергии:

$$-\mathscr{E}=L-\sum_a\frac{\partial L}{\partial\dot q_a}\dot q_a=\text{const}.$$

В этом случае L не зависит от времени явно. Подобным же образом из инвариантности S по отношению к пространственным сдвигам ($\Lambda=0$, $\Lambda_a=1$) следует закон сохранения импульса, а из изотропии пространства — закон сохранения трехмерного момента.

В гамильтоновом описании, то есть когда Q выражены через канонич. переменные — обобщенные координаты и импульсы (для простоты считаем, что явные зависимости от времени отсутствуют): 1) *Пуассона скобка* Q с *гамильтонианом* H равна нулю, 2) изменение любой динамич. переменной F при преобразовании (1) определяется ее скобкой Пуассона с Q. В этом контексте утверждение Н. т. становится как бы тривиальным, следующим из одной лишь антисимметрии скобок Пуассона:

$$0=dH/d\varepsilon=(Q,\ H)\to 0=(H,\ Q)=dQ/dt.$$

Если преобразования симметрии образуют не однопараметрич. группу, то между Q_A должны выполняться соотношения в скобках Пуассона, воспроизводящие алгебру Ли генераторов соответствующей группы. Так, напр., три компоненты момента должны удовлетворять соотношению в скобках Пуассона

$$(M_iM_k)=-e_ik_lM_l,\ i, k, l=1, 2, 3$$

(где e_ik_l — символ Леви-Чивиты), воспроизводящему алгебру Ли группы трехмерных вращений $O(3)$.

Особо важное значение Н. т. приобретает в квантовой теории поля, где вытекающие из наличия группы симметрии законы сохранения часто оказываются единственным источником информации о свойствах системы. Для формального вывода Н. т. в (классической или квантовой) теории поля рассматривают интеграл действия:

$$S=\int_R L\left[\varphi^a(x),\varphi^a_{,\nu}(x);x^\mu\right]d^4x;\quad \mu,\nu=0,1,2,3, \qquad (2)$$

где $L[\varphi^a(x),\varphi^a_{,\nu}(x);x^\mu]$ — *лагранжиан*, зависящий от функций поля $\varphi^a(x)$, их первых производных по всем четырем координатам $\varphi^a_{,\nu}\equiv\partial\varphi^a/\partial x^\nu$ и, возможно, от координат x^μ ($x=\{x^\mu\}$ — точка пространства-времени; индекс a нумерует

компоненты поля; принята система отсчета, в к-рой $\hbar = c = 1$). Тогда Н. т. утверждает, что из инвариантности действия (2) относительно преобразований с параметрами ε^A

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Lambda^\mu_A(x)\varepsilon^A,$$

$$\varphi^a(x) \to \varphi'^a(x') = \varphi^a(x) + \mathscr{L}^{ab}_A(x)\varphi_b(x)\varepsilon^A$$

для произвольной области интегрирования R вытекает дифференциальный закон сохранения:

$$dJ^\mu_A/dx^\mu = 0, \tag{3}$$

где так наз. нетеров ток J^μ_A вычисляется из лагранжиана по правилу:

$$J^\mu_A = T^\mu_\nu \Lambda^\nu_A + \frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\varphi^b \mathscr{L}^{ab}_A, \tag{4}$$

где

$$T^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu L(x) - \frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\varphi^a_\nu \tag{5}$$

(δ^μ_ν — символ Кронекера; по повторяющемуся индексу предполагается суммирование). Интегрируя (3) по произвольному 4-объему и используя теорему Гаусса, получаем, что полный 4-поток вектора J^μ_A через ограничивающую этот объем гиперповерхность равен нулю. Выбирая гиперповерхность в виде цилиндра с пространственноподобными основаниями, такого, что потоком через боковые стенки можно пренебречь, приходим к утверждению, что направленные в будущее потоки вектора J^μ_A через нижнее и верхнее основания равны. Отсюда следует, что нетеровы заряды

$$Q_A(t) = \int_{x^0=t} J^0_A(x)\, d^3x, \tag{6}$$

во-первых, сохраняются во времени (интегральная форма Н. т.), во-вторых, преобразуются при *Лоренца преобразованиях* контравариантно соответствующим параметрам ε^A.

Из физич. представлений об однородности и изотропии пространства-времени следует, что для любой замкнутой системы действие должно быть инвариантно относительно преобразований *Пуанкаре группы*, что в силу Н. т. приводит к существованию 10 фундаментальных сохраняющихся величин: энергии, 3 компонент импульса и 6 компонент 4-момента. Сохранение энергии и импульса следует из инвариантности относительно трансляций $\delta x^\mu = a^\mu$. При этом $A = \mu$, $\mathscr{L}^{ab}_A = 0$, нетеровы токи исчерпываются выражением (5) и образуют тензор энергии-импульса. Сохраняющиеся «заряды» суть компоненты 4-импульса:

$$P_\mu = \int_{x^0=t} T^0_\mu\, d^3x.$$

Из инвариантности относительно трех пространственных поворотов и трех преобразований Лоренца

$$A = (\mu, \nu);\ \varepsilon^A = \omega^{\nu\mu} = -\omega^{\mu\nu};\ \Lambda^\rho{}_A = \delta^\rho_\nu g_{\mu\sigma}x^\sigma$$

(где $g_{\mu\sigma}$ — метрич. тензор) вытекает дифференциальный закон сохранения для тензора плотности момента:

$$M^\mu_{\nu\rho} = -\frac{1}{2}T^\mu_\nu x_\rho + \frac{1}{2}T^\mu_\rho x_\nu + \frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\mathscr{L}^{ab}_{\nu\rho}\varphi^b;$$

$\mathscr{L}^{ab}_{\nu\rho}$ определяется спином полей. Соответствующий нетеров заряд есть 4-момент.

В гамильтоновом описании 10 фундаментальных величин являются генераторами соответствующих преобразований группы Пуанкаре и образуют относительно скобок Пуассона замкнутую алгебру Ли

$$(P_\mu, P_\nu) = 0;$$

$$(M_{\mu\rho}, P_\nu) = -(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\mu})P^\sigma; \tag{7}$$

$$(M_{\mu\rho}, M_{\nu\sigma}) = -g_{\mu\nu}M_{\rho\sigma} + g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} - g_{\rho\sigma}M_{\mu\nu},$$

изоморфную алгебре Ли группы Пуанкаре. Требование выполнения соотношений (7) в *гамильтоновом формализме* эквивалентно требованию инвариантности лагранжиана относительно группы Пуанкаре в *лагранжевом формализме*.

При наличии в системе симметрий, не связанных с пространством-временем, Н. т. позволяет построить и другие сохраняющиеся величины. При этом в выражении (4) для нетерова тока остается только второй член. Напр., если в системе с комплексным полем φ^a действие инвариантно относительно глобального (с фазой α, не зависящей от x) калибровочного преобразования 1-го рода

$$\varphi^a \to \varphi^a \exp(i\alpha);\ \varphi^{*a} \to \varphi^{*a}\exp(-i\alpha),$$

то будут сохраняться ток

$$j^\mu(x) = i\left(\frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\varphi^a - \varphi^{*a}\frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^{*a}_{,\mu}}\right)$$

и соответствующий заряд. В построении современных реалистич. квантовополевых моделей токи и заряды, сохраняющиеся в силу инвариантности относительно достаточно сложных калибровочных групп, играют ведущую роль.

Выражение (4) для пространственно-временной локализации нетерова тока (это выражение называется каноническим) не однозначно, если исходить только из требования выполнения дифференциального закона сохранения (3) и получения правильной интегральной величины (6). Выполнение этих требований не нарушается при замене

$$J^\mu_A \to J^\mu_A + \frac{\partial f^{\mu\nu}_A(\varphi^a; \varphi^a_{,\nu})}{\partial x^\nu};\quad f^{\mu\nu}_A + f^{\nu\mu}_A = 0$$

с произвольной функцией f. Этим произволом пользуются, чтобы заменить канонич. тензор (5) T^μ_ν (не симметричный для отличного от нуля спина) на симметричный (тензор Белинфанте), выбирая

$$f^{\nu,\rho\mu} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\mu}}\mathscr{L}^{\nu\rho;ab}\varphi^b + \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\rho}}\mathscr{L}^{\mu\nu;ab}\varphi^b + \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\nu}}\mathscr{L}^{\rho\mu;ab}\varphi^b\right\}.$$

Для нулевого спина то же преобразование позволяет получить для безмассового поля T^μ_ν с нулевым следом.

Однозначные выражения для нетеровых токов получаются варьированием по полям, для к-рых эти токи служат источниками.

Для теорий, обладающих суперсимметрией, независимыми переменными при выводе Н. т. будут наряду с x и антикоммутирующие координаты θ_α (α — спинорный индекс). Это приводит к обобщению фундаментальных сохраняющихся величин, а также к появлению новых сохраняющихся величин: спин-векторных токов и соответствующих им суперзарядов, образующих представление супералгебры Пуанкаре.

Для классич. теорий поля выписанных формальных выражений вполне достаточно. В квантовой теории поля выражения (4), (6), как правило, нуждаются в регуляризации и перенормировке. При этом может оказаться, что формально имеющаяся симметрия не может быть сохранена для регуляризованных выражений и соответствующий закон сохранения перестает выполняться — говорят, что присутствует аномалия. Так, при рассмотрении взаимодействия безмассовых фермионов с электромагнитным полем в классич. теории наряду с векторным сохраняется также и аксиальный ток $j^\mu_5 = \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$ (γ^μ, γ^5 — матрицы Дирака). В кван-

товой теории во втором порядке по заряду e возникает аномалия, и вместо сохранения тока получаем

$$\frac{d^{\lambda}_{j_5}}{\partial^{\lambda}_{x}} \sim e^2 e^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}.$$

Вторая теорема Нетер. Помимо обсуждавшейся выше Н. т., к-рую принято называть первой Н. т., существует вторая Н. т., к-рая касается тождеств, вытекающих из инвариантности действия относительно преобразований, зависящих от непрерывного параметра, то есть от произвольной функции. Наибольшее значение она получает в применении к случаю «полей материи», взаимодействующих с калибровочным полем $A(x)$ — полем, физич. содержание к-рого не меняется при определенных зависящих от произвольной функции $\lambda(x)$ преобразованиях, называемых преобразованиями калибровки. Вычисляя вариацию действия для поля материи во внешнем калибровочном поле, вызванную бесконечно малым калибровочным преобразованием $\delta\lambda(x)$, $\delta\lambda(x)=0$ на границах области интегрирования, следует учитывать только вызываемые изменением калибровки вариации калибровочного поля $\delta_\lambda A = \nabla\delta\lambda$ (здесь ∇ — ковариантная производная), поскольку при вариациях полей материи коэффициентами будут левые части уравнений движения. Поэтому

$$\delta_\lambda S = \int d^4x \frac{\partial L}{\partial A} \nabla\delta\lambda = -\int d^4x \nabla\Big(\frac{\partial L}{\partial A}\Big)\delta\lambda,$$

откуда в силу произвольности $\delta\lambda(x)$ вытекает ковариантный закон сохранения:

$$\nabla j = 0; \quad j = \frac{\partial L}{\partial A}. \tag{8}$$

При обращении в формуле (8) внешнего калибровочного поля в нуль ковариантный закон сохранения превращается в обычный, получаемый по первой Н. т. Подчеркнем, что вторая Н. т. приводит к ограничениям на поля материи, исходя из особенностей калибровочного поля. Таким образом, она устанавливает соответствие между свойствами материальных систем и полей, с к-рыми они могут взаимодействовать. Поскольку в правых частях уравнений движения самих калибровочных полей стоят как раз токи (8), то вторая Н. т. налагает тождественные соотношения на левые части этих уравнений. В современной квантовой теории поля вторая Н. т. используется в электродинамике, теории *Янга—Миллса полей*, гравитации, супергравитации и т. д.

Лит.: [1] Hilbert D., Die Grundlagen der Physik, «Gött. Nachr., Math. Phys. Klasse», 1915, S. 395; [2] Klein F., Die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinsch. Gravitationstheorie, там же, 1918, S. 171; [3] Nother E., Invariante Variationsprobleme, там же, 1918, S. 235; [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [5] Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, пер. с англ., М., 1947; [6] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [7] Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, М., 1961; [8] Медведев Б. В., Начала теоретической физики, М., 1977.

Б. В. Медведев, П. Б. Медведев.

НЕТЕРОВ ОПЕРАТОР — см. *Интегральное уравнение.*

НЕУДЕРЖИВАЮЩАЯ СВЯЗЬ — см. *Связи механические.*

НЕУПОРЯДОЧЕННАЯ ФАЗА — см. *Дальний и ближний порядок.*

НЕУПРУГИЙ ПРОЦЕСС — см. *Рассеяния теория.*

НЕУСТОЙЧИВОЕ ДВИЖЕНИЕ — см. *Устойчивость движения.*

НЕУСТОЙЧИВОЕ МНОГООБРАЗИЕ — см. *Центральное многообразие.*

НЕУСТОЙЧИВОЕ СЛОЕНИЕ — см. *Слоение.*

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ — см. *Устойчивость.*

НЕУСТОЙЧИВЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ, катастрофический потенциал взаимодействия,— *взаимодействия потенциал*, не удовлетворяющий условию устойчивости (см. *Устойчивый потенциал взаимодействия*).

Системы частиц с Н. п. в. не имеют термодинамич. поведения (то есть не допускают описания с помощью термодинамич. методов). В системах с Н. п. в. конфигурациям, в к-рых в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^\nu$ собирается много частиц, приписывается большой вес и, следовательно, возможно сосредоточение всех частиц системы в малых областях пространства (коллапс). В силу этого Н. п. в. не используются в статистич. механике.

Пример 1. Потенциал, принимающий отрицательные значения в нек-рой окрестности начала координат.

Пример 2. Потенциал

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varkappa, & 0 \leqslant |x| < R-\delta, \\ -1, & R-\delta \leqslant |x| \leqslant R+\delta, \\ 0, & |x| > R+\delta \end{cases}$$

является Н. п. в. при $\varkappa < 12$.

Лит. см. при ст. *Устойчивый потенциал взаимодействия.*

П. В. Малышев.

НЕУСТОЙЧИВЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ — см. *Предельный цикл.*

НЕХОРОШЕВА ТЕОРЕМА — теорема, доставляющая экспоненциальную оценку сверху средней скорости эволюции в возмущенных гамильтоновых системах (см. [2]—[4]). Рассматриваемая гамильтонова система с аналитич. гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon),\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

где $I=(I_1, ..., I_n)$ и $\varphi=(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ — сопряженные канонич. переменные, гамильтониан 2π-периодичен по всем φ_i. Предполагается, что H_0 — *крутая функция* в области G. Тогда при достаточно малом ε для решения $I(t)$, $\varphi(t)$ выполнено

$$|I(t) - I(0)| < \varepsilon^b \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \exp\Big(\frac{1}{\varepsilon^a}\Big),$$

если начальное значение $I(0)$ взято внутри G. Постоянные $a>0$, $b>0$ зависят от геометрич. свойств функции H_0 и оцениваются через значения коэффициентов и показателей крутизны, входящих в определение крутой функции (см. [3]).

Аналогичные оценки справедливы для изменения I в системах с гамильтонианом вида:

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, p, q),$$

где (I, φ), (p, q) — пары сопряженных канонич. переменных.

Если функция H_0 — не крутая, то значение I может изменяться на 1 за время $1/\varepsilon$ (см. [2]). Экспоненциально медленный уход переменной I от начального значения при крутой функции H_0 называется *Арнольда диффузией*; в имеющихся примерах скорость этого ухода есть $O(\exp(-\text{const}/\sqrt{\varepsilon}))$ (см. [1]).

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Доклады АН СССР», 1964, т. 156, № 1, с. 9—12; [2] Нехорошев Н. Н., «Функциональный анализ и его прилож.», 1971, т. 5, в. 4, с. 82—83; [3] его же, «Успехи математич. наук», 1977, т. 32, в. 6, с. 5—66; [4] его же, «Труды семинара им. И. Г. Петровского», 1979, в. 5, с. 5—50.

А. И. Нейштадт.

НЕЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР — см. *Удар.*

НЕЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ перестановочных соотношений — см. *Перестановочных соотношений представления неэквивалентные.*

НИДИНГ-ИНВАРИАНТ — см. *Символическая динамика.*

НИДИНГ-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Символическая динамика.*

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — см. *Токов алгебра.*

НИЛЬПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА ЛИ — см. *Ли алгебра.*

НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — *группа* G, обладающая цепочкой подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k = \{e\}$$

такой, что для любого $x \in G$ и любого $y \in G_i$ выполнено

$$xyx^{-1}y^{-1} \in G_{i+1};$$

здесь через e обозначена единица группы G. Подгруппы G_i могут быть выбраны нормальными. Любая Н. г. является разрешимой группой. Связная группа Ли нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентна ее алгебра Ли. Простейший пример нильпотентной группы Ли – группа всех верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали. Описаны унитарные представления нильпотентных групп Ли. *Ю. А. Неретин.*

НИЛЬРАДИКАЛ конечномерной алгебры Ли – см. *Ли алгебра.*

НОВИКОВА ГИПОТЕЗА в алгебраической геометрии – см. *Алгебро-геометрические методы* в теории поля.

НОВИКОВА–ВЕСЕЛОВА УРАВНЕНИЕ – уравнение

$$V_t = \partial^3 V + \bar\partial^3 V + \partial(uV) + \bar\partial(\bar u V),$$
$$\bar\partial u = 3\partial V, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad z = x + iy;$$

было предложено в [1], как уравнение, описывающее деформации потенциала $V(x, y, t)$ оператора Шредингера

$$L = \partial\bar\partial + V,$$

сохраняющие спектральные данные оператора L при одном уровне энергии. Такие деформации эквивалентны операторным уравнениям вида:

$$\partial_t L = [L, A + \bar A] + (B + \bar B)L;$$

для Н.–В. у. операторы A и B равны: $A = \partial^3 + u\partial$, $B = \partial u$. Н.–В. у. является двумерным аналогом *Кортевега–де Фриса уравнения.* Для него построены квазипериодич. конечнозонные решения, построены точные многосолитонные решения (см. [2]) и развита общая схема интегрирования задачи Коши для быстро убывающих начальных данных.

Лит.: [1] Веселов А. П., Новиков С. П., «Доклады АН СССР», 1984, т. 279, № 1, с. 20–24; [2] их же, там же, 1984, т. 279, № 4, с. 784–88. *И. М. Кричевер.*

НОВИКОВА–КРИЧЕВЕРА УРАВНЕНИЕ – уравнение, описывающее конечнозонные решения *Кадомцева–Петвиашвили уравнения*, отвечающие двумерным голоморфным расслоениям над эллиптической кривой. В алгебраич. форме имеет вид:

$$v_t = \frac{1}{4}v_{xxx} + \frac{3}{8v_x}\left(v_{xx}^2 - P_3(v)\right),$$
$$P_3(v) = 4v^3 - g_2 v - g_3.$$

Единственное уравнение вида

$$v_t = \frac{1}{4}v_{xxx} + f(v, v_x, v_{xx}),$$

обладающее скрытой симметрией и не сводящееся к уравнению Кортевега–де Фриса преобразованиями типа Миуры.

Лит.: [1] Кричевер И. М., Новиков С. П., «Функциональный анализ и его прилож.», 1978, т. 42, № 4, с. 41–52. *А. П. Веселов.*

НОРМА вектора – см. *Евклидово пространство, Гильбертово пространство.*

НОРМАЛИЗАТОР подгруппы H в группе G – множество всех $g \in G$ таких, что для любого $h \in H$ выполнено соотношение $ghg^{-1} \in H$. Н. является подгруппой в G. *Ю. А. Неретин.*

НОРМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА – см. *Главная кривизна.*

НОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА – см. *Нормальный делитель.*

НОРМАЛЬНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Гауссова случайная функция.*

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА эллиптического интеграла – см. *Эллиптический интеграл.*

НОРМАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – *лагранжево отображение*, сопоставляющее вектору iv нормали к подмногообразию в евклидовом пространстве, приложенному в точке u, точку v самого пространства. *Каустика* Н. о.– множество центров кривизны подмногообразия. Ограничение Н. о. на множество векторов длины t является лежандровым, фронт к-рого называется эквидистантой. При увеличении t особенности эквидистант заметают каустику. *М. Э. Казарян.*

НОРМАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ операторов в квантовой теории – запись произведения операторов в виде, когда все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения. Н. п. возникает в методе вторичного квантования; при этом предполагается, что любой оператор представим в виде полинома по операторам рождения и уничтожения. Отличительное свойство Н. п.– равенство нулю *вакуумного среднего* от любого оператора, записанного в виде Н. п. и не содержащего слагаемого, кратного единичному оператору. Н. п. было введено Дж. Виком (G. Wick, 1950) для того, чтобы исключить из квантовой теории поля формальные бесконечные величины типа энергии и заряда вакуумного состояния. Понятие Н. п. оказывается основным при решении многих фундаментальных вопросов квантовой теории поля таких, как вывод фейнмановской диаграммной техники (см. *Фейнмана диаграмма*), установление связи между операторным формализмом и формализмом *функционального интеграла*, при построении аксиоматич. квантовой теории поля и т. п.

Н. п. операторов $A_1, \ldots, A_n$ обозначается

$$:A_1, \ldots, A_n:.$$

Все свойства обычного произведения (линейность и т. д.) остаются и для Н. п., к-рое, кроме того, обладает свойством перестановочности операторов под знаком Н. п., при этом операторы, подчиняющиеся статистике Бозе–Эйнштейна, оказываются перестановочными, а подчиняющиеся статистике Ферми–Дирака – антиперестановочными.

Все динамич. величины, зависящие от операторов с одинаковыми аргументами (лагранжиан, тензор энергии-импульса, заряд и т. д.), во вторично-квантованной теории записываются в форме Н. п. Напр., оператор числа частиц для свободного скалярного поля $\varphi(x)$, удовлетворяющего *Клейна–Гордона уравнению*, в терминах операторов рождения $\varphi_{\mathbf{k}}^+$ и уничтожения $\varphi_{\mathbf{k}}^-$ частиц с импульсом $\mathbf{k}$ имеет вид:

$$N = \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}:\left(\varphi_{\mathbf{k}}^+\varphi_{\mathbf{k}}^- + \varphi_{\mathbf{k}}^-\varphi_{\mathbf{k}}^+\right):= \int d\mathbf{k}\,\varphi_{\mathbf{k}}^+\varphi_{\mathbf{k}}^-.$$

Для вакуумного среднего оператора N получают

$$(N)_0 = \langle 0|N|0\rangle = 0,$$

так как $\varphi_{\mathbf{k}}^-|0\rangle = 0$. Если бы N не был представлен в виде Н. п., то выражение в скобках, возникающее из принципа соответствия с классич. теорией, привело бы к $(N)_0$, пропорциональному расходящемуся интегралу. Это типичный пример перестройки произведения в формализме Н. п. для операторов, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна. В случае фермионов выражение в скобках имеет вид:

$$\bar a_{\mathbf{k},s}^+ a_{\mathbf{k},s}^- - \bar a_{\mathbf{k},s}^- a_{\mathbf{k},s}^+$$

(s – спиновая переменная), и для получения правильного оператора N, суммирующего все фермионные состояния, операторы рождения (a^+) и уничтожения (a^-) фермионов должны антикоммутировать под знаком Н. п. (черта над оператором означает дираковское сопряжение). Это – утверждение теоремы о связи спина и статистики (*Паули теорема*), вытекающей из принципа соответствия и формализма Н. п.

Для вычислений в квантовой теории поля необходимо установить связь Н. п. с обычным произведением и *хронологическим произведением.* Эту связь устанавливают *Вика теоремы.* Спаривание двух линейных по операторам рождения и уничтожения операторов (соответственно хронологич. спаривание), обозначаемое $\overbrace{A_1 A_2}$, определяется как вакуумное среднее от обычного произведения (хронологич. произведения). Спаривание дается соответствующей пере-

становочной функцией. Для Н. п. двух линейных операторов получают

$$A_1(x)A_2(y) =: A_1(x)A_2(y) :+ \overbrace{A_1(x)A_2(y)}$$

(x, y – точки пространства-времени). В общем случае справедлива следующая теорема Вика: обычное (хронологическое) произведение n линейных операторов равно сумме Н. п. со всеми возможными спариваниями (хронологич. спариваниями), включая и Н. п. без спариваний. Линейность Н. п. гарантирует то, что спаривание выносится за знак Н. п.

При разложении действия в ряд теории возмущений возникает задача представить в виде Н. п. произведение операторов (напр., лагранжианов взаимодействия), к-рые сами уже приведены к форме Н. п. Соответствующая теорема Вика утверждает, что такое произведение равно сумме всех соответствующих Н. п. со спариваниями, из числа к-рых исключены спаривания между линейными операторами, находившимися в первоначальном произведении под знаком одного Н. п.

Понятие Н. п. позволяет установить связь между операторным формализмом и формализмом функционального интеграла. Для системы с одной степенью свободы каждому вектору Фока пространства $f(a^+)|0\rangle$ ставится в соответствие аналитич. функция $f(a^*)$ числового аргумента a^* (* – знак комплексного сопряжения). Оператор уничтожения в таком голоморфном представлении есть оператор дифференцирования по a^*, а произвольному оператору A соответствует интегральный оператор с ядром $A(a^*, a)$. Действие оператора A на вектор f, скалярное произведение двух векторов, произведение операторов A_1A_2 описываются соответствующими свертками с гауссовой мерой интегрирования:

$$d\mu_\alpha = \exp(-\alpha^*\alpha)(2\pi i)^{-1} d\alpha^* d\alpha.$$

Для ядра произведения двух операторов имеем

$$(A_1A_2)(a^*,a) = \int A_1(a^*,\alpha)\, A_2(\alpha^*,a)\, d\mu_\alpha.$$

Поставим в соответствие оператору A, заданному в виде Н. п.:

$$A = \sum_{n,m} K_{nm}(a^+)^n (a^-)^m,$$

функцию

$$K(a^*,a) = \sum_{n,m} K_{nm}(a^*)^n a^m.$$

Тогда ядро оператора A связано с $K(a^*, a)$ соотношением

$$A(a^*, a) = \exp(a^* a) K(a^*, a).$$

Рассмотрим оператор эволюции

$$U(\Delta t) = \exp(-iH\Delta t),$$

где $H =: h(a^+, a^-):$. Его ядро для малых Δt:

$$U(\Delta t; a^*, a) = \exp\{a^* a - ih(a^*, a)\Delta t\};$$

для конечного интервала $t' - t'' = N\Delta t$ следует взять свертку N таких ядер. При этом из первого члена и меры интегрирования возникнет сумма

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left(a_{i+1}^* - a_i^*\right) a_i + a_1^* a_0,$$

и после симметризации по $a^* = a_N$ и $a = a_0$ в формальном пределе $\Delta t \to 0$, $N \to \infty$ получают

$$U(t'' - t'; a^*, a) = \int \exp\left\{\frac{1}{2}[a^*(t'')a(t'') + a^*(t')a(t')] + \right.$$

$$\left. + i\int_{t'}^{t''} \left[\frac{1}{2i}(\dot{a}^* a - a^* \dot{a}) - h(a^*, a)\right] dt\right\} \prod_t \frac{da^* da}{2\pi i}.$$

Это выражение и есть формула для оператора эволюции, возникающая в методе функционального интеграла.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [3] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988; [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, 2 изд., М., 1990; [5] Глимм Д., Джаффе А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984.

Л. О. Чехов.

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Гаусса распределение.*

НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ – см. *Ускорение.*

НОРМАЛЬНОЕ УСЛОВНОЕ ОЖИДАНИЕ – см. *Условное ожидание.*

НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ – см. *Малые колебания.*

НОРМАЛЬНЫЙ ДЕЛИТЕЛЬ, нормальная подгруппа,– подгруппа H в *группе* G такая, что для любого элемента $h \in H$ и любого $g \in G$ выполнено включение $ghg^{-1} \in H$.

Ю. А. Неретин.

НОРМАЛЬНЫЙ СИМВОЛ оператора – см. *Производящий функционал.*

НОСИТЕЛЬ бифуркации – см. *Нелокальная бифуркация.*

НОСИТЕЛЬ краевых данных – см. *Краевая задача.*

НОСИТЕЛЬ обобщенной функции – аналог классического понятия носителя функции для обобщенной функции. Н. обобщенной функции возможно определить, если основное пространство удовлетворяет условию (б) (см. *Обобщенная функция*). При выполнении этого условия говорят, что обобщенная функция g с исходной областью определения O равна нулю на открытом подмножестве $\omega \subset O$, если $(g, \Phi) = 0$ для всех основных функций Φ, носители к-рых лежат в ω. Далее носителем $\operatorname{supp} g$ обобщенной функции g называется наименьшее замкнутое подмножество области O, вне к-рого g равна нулю.

Н. определен, напр., для *Шварца распределений, умеренных распределений, ультрараспределений* и др.

В. В. Жаринов.

НОСИТЕЛЬ осцилляций – см. *Осцилляций носитель.*

НОСИТЕЛЬ представления – см. *Спектр* представления.

НОСИТЕЛЬ спектральной меры – см. *Спектральная мера.*

НУЛЕВОГО РАДИУСА ПОТЕНЦИАЛ – сингулярное точечное взаимодействие, задаваемое граничными условиями, накладываемыми на волновую функцию в точке $x = x_0$ конфигурационного пространства – носитель Н. р. п. Граничное условие, определяющее Н. р. п. с носителем в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$, имеет вид:

$$\varphi(x,k) = \frac{a_0}{4\pi}|x - x_0|^{-1} + ha_0 + o(1), \quad a_0 = \text{const}, \quad x \to x_0, \qquad (1)$$

где $h \in \mathbb{R}$ – интенсивность Н. р. п. Это условие задает самосопряженное расширение H_h симметричного оператора $H^{(0)} = -\Delta$, заданного на множестве функций из класса Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^3)$, обращающихся в нуль в окрестности точки $x = x_0$. Все такие расширения образуют однопараметрич. семейство с параметром h. Оператор $H^{(0)}$ является в существенном самосопряженным на подпространствах, отвечающих высшим орбитальным моментам $l \geqslant 1$, поэтому парциальные волновые функции $\varphi_l(|x|, k)$ при $l \geqslant 1$ совпадают с соответствующими волновыми функциями свободной частицы, к-рая описывается оператором H_0, $h = 0$. Парциальная волновая функция $\varphi_0(r, k)$, $r = |x|$, $l = 0$, удовлетворяющая граничному условию (1), имеет вид:

$$\varphi_0(r, k) = \text{const} \cdot \sin(kr + \operatorname{arctg}(k/h)).$$

Значения $h > 0$ отвечают отталкивательному, а $h < 0$ – притягивающему Н. р. п. В последнем случае система двух частиц, взаимодействующих с помощью Н. р. п., имеет единственное связанное состояние с энергией $E = -h^2/2\mu$, где μ –

приведенная масса частиц. Парциальные матрицы рассеяния, отвечающие Н. р. п. с интенсивностью h, имеют вид:

$$S_0(k) = e^{ri\delta} = \frac{h+ik}{h-ik},$$

$S_l(k) \equiv 1$ при $l \geqslant 1$. Соответствующие амплитуды рассеяния имеют аномальное поведение в пределе высоких энергий

$$\delta(k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{sign} h \frac{\pi}{2},$$

связанное с перпендикулярностью предельного перехода к нулевому радиусу относительно k.

Впервые Н. р. п. рассматривались Э. Ферми [1], а также Г. Бете и Р. Пайерлсом [2]. Трактовка конструкции Н. р. п. в рамках теории расширений была дана Ф. А. Березиным и Л. Д. Фаддеевым [3]. Н. р. п. широко использовались для исследования многоцентровых, в том числе решеточных моделей (см. [4]).

Метод Н. р. п. допускает обобщение на так наз. энергозависящие Н. р. п., порождаемые самосопряженными расширениями с выходом в дополнительное гильбертово пространство (см. [5]). Интенсивность (граничное условие) Н. р. п. при этом оказывается функцией от энергии и матрица рассеяния имеет вид:

$$S_0(k) = \frac{\Delta(k^2)+ik}{\Delta(k^2)-ik},$$

где, в общей ситуации, $\Delta(k^2)$ – произвольная R-функция. Энергозависящие Н. р. п. применяются для моделирования систем с дополнительными (внутренними) степенями свободы. Использование энергозависящих Н. р. п. позволяет преодолеть ряд трудностей, не устранимых в рамках исходного гильбертова пространства. Так, в задаче трех тел неэнергозависящие Н. р. п. приводят к падению на центр, поскольку никакое самосопряженное расширение исходного симметрич. оператора в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^6)$ не является полуограниченным снизу оператором (см. [3]). С другой стороны, выход в дополнительное гильбертово пространство и анализ соответствующих энергозависящих Н. р. п. позволяет получить полуограниченный снизу оператор. При этом выявляется специфич. характер энергозависимости Н. р. п. в системе трех тел. Задание соответствующего оператора требует постановки однородных граничных условий на многообразиях высокой коразмерности (см. [6]).

Лит.: [1] Fermi E., «Nuovo Cimento», 1934, v. 11, p. 157–66; [2] Bethe H., Peierls R., «Proc. Roy. Soc.», 1935, v. 148A, p. 145–56; [3] Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д., «Доклады АН СССР», 1961, т. 137, с. 1011–14; [4] Демков Ю. Н., Островский В. Н., Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике, Л., 1975; [5] Павлов Б. С., «Успехи математич. наук», 1987, т. 42, в. 6, с. 99–131; [6] его же, «Математич. сб.», 1988, т. 136, № 2, с. 163–77. *Ю. Б. Мельников.*

НУЛЕВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ – см. *Термодинамики законы.*

НУЛЕВОЙ ВЕКТОР – см. *Вектор.*

НУЛЕВОЙ ЗАКОН МЕХАНИКИ ЧЕРНЫХ ДЫР – см. *Черная дыра*; законы механики.

НУЛЕВОЙ ЗВУК – высокочастотные колебания, распространяющиеся в ферми-жидкости и неидеальном ферми-газе при температурах, очень близких к абсолютному нулю. Н. з. представляет собой колебания ферми-сферы, при к-рых меняется ее радиус или она испытывает более сложные деформации, описываемые сферич. гармониками.

Свойства Н. з. следуют из анализа кинетич. уравнения для функции распределения элементарных возбуждений в ферми-жидкости или ферми-газе. Они являются коллективными возбуждениями бозевского типа. Скорость Н. з. не совпадает со скоростью обычного звука, а превышает его в $\sqrt{3}$ раз. Микроскопич. теория Н. з. основана на методах *Грина функций.*

Существование Н. з. в ферми-жидкости было предсказано в 1957 Л. Д. Ландау (см. [1]–[3]), к-рый и предложил термин «нулевой звук». Ранее, в 1952, Ю. Л. Климонтович и В. П. Силин исследовали явление Н. з. в неидеальном ферми-газе. Н. з. был обнаружен экспериментально в 1966 в интервале температур от 2 до 10 мК на частотах ~15 и 45 МГц (см. [4]).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1956, т. 30, с. 1058; 1957, т. 32, с. 59; [2] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Статистическая физика, ч. 2, М., 1978, гл. 1; [3] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962, гл. 1, 4; [4] Абель В., Андерсон А., Уитли Дж., «Успехи физич. наук», пер. с англ., 1967, т. 91, в. 2. *Д. Н. Зубарев.*

НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – одна из наиболее общих схем продуцирования пространственно-одномерных интегрируемых уравнений. Впервые в этом качестве было предложено в [1]. Уравнение нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \leftrightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x} - U, \frac{\partial}{\partial t} - V\right] = 0 \qquad (1)$$

должно выполняться тождественно по «спектральному» параметру λ, от к-рого матричные функции $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ зависят в большинстве примеров рациональным образом. При этом уравнение (1) эквивалентно системе уравнений на вычеты U и V. Описание уравнений, допускающих Н. к. п., – это описание инвариантных подмногообразий общего уравнения (1). Типичным представителем уравнений, допускающих Н. к. п., является, напр., *синус-Гордона уравнение.* Для всех таких уравнений известны многочисленные схемы построения точных решений, и в отдельных случаях полностью решается задача Коши.

Лит.: [1] Захаров В. Е., Шабат А. Б., «Функциональный анализ и его прилож.», 1979, т. 13, № 3, с. 13–22. *И. М. Кричевер.*

НУЛЬ-ЗАРЯД, московский нуль, в квантовой теории поля – краткое название особой трудности ряда моделей квантовой теории поля с локальным взаимодействием, в частности, стандартной (абелевой) квантовой электродинамики. Эта трудность выражается в специфически сингулярном характере соотношения перенормировки для константы связи, то есть соотношения между ее затравочным значением g_0, фигурирующим в лагранжиане, и физич. перенормированным значением g. Характер сингулярности таков, что в пределе переход от нелокального к точечному взаимодействию (напр., при $\Lambda \to \infty$, где Λ – импульс ультрафиолетового обрезания расходящихся интегралов) физич. константа обращается в нуль:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} g(\Lambda, g_0) = 0 \qquad (1)$$

при любом физически разумном выборе $g_0(\Lambda)$. В квантовой электродинамике, где α и α_0 пропорциональны квадрату соответствующего значения заряда электрона (то есть константы связи), получается

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1+\alpha_0 \ln(\Lambda^2/m^2)} \to \left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)^{-1} \to 0. \qquad (2)$$

Здесь m – масса электрона.

Физически феномен Н.-з. – следствие столь сильной поляризации вакуума, что она ведет к полной экранировке любого, помещенного в вакуум физич. электрич. заряда. В макроскопич. физике такая экранировка свойственна проводящей среде (металлам, плазме, электролитам). Между тем вакуум не только не проводит электрич. тока, но более того, относится к числу диэлектриков с большой, равной $2mc^2$, шириной запрещенной зоны. Полнота экранировки заряда в вакууме обязана *ультрафиолетовым расходимостям.*

Аргументы в пользу существования трудности Н.-з., возникшие из анализа ультрафиолетовых асимптотик квантовой электродинамики, были высказаны московскими теоретиками (см. [1], [2]), откуда второе название трудности.

В формализме перенормированной квантовой теории поля, где затравочной константы связи нет вовсе, а α считается равной своему экспериментальному значению, трудность

Н.-з. проявляется в возникновении дополнительного связанного состояния при пространственноподобном значении 4-импульса, то есть при $k^2=\omega^2-\boldsymbol{k}^2<0$. Норма этого состояния оказывается отрицательной («призрачное» или «духовое» состояние), что противоречит общим гипотезам о положительности метрики в пространстве состояний и квадрата 4-импульса собственных состояний поля (теорема Челлена–Лемана). В квантовой электродинамике такое состояние отвечает нулю диэлектрич. проницаемости вакуума при мнимом значении частоты и относительно малых $\boldsymbol{k}^2$:

$$\varepsilon(\omega, \boldsymbol{k})=1-\alpha\ln(-k^2/m^2) \qquad (3)$$

в противоречии с соотношениями Крамерса–Кронига. Физически это отвечает либо нарушению причинности, либо нестабильности вакуума относительно спонтанной генерации электромагнитного поля произвольно большой амплитуды.

В 50–60-е гг. трудность Н.-з., хотя ее существование в реальных физич. моделях (подобных квантовой электродинамике) и не было строго доказано, рассматривалась многими теоретиками как свидетельство краха концепции локальной квантовой теории поля как основы теории микрочастиц. Однако последующее развитие физики элементарных взаимодействий, в особенности выход на сцену неабелевых калибровочных полей, обладающих индефинитной метрикой, сняло остроту проблемы Н.-з. и полностью реабилитировало концепцию локального взаимодействия квантовых полей.

Хотя существование трудности Н.-з. и доказано для нек-рых простых моделей квантовой теории поля, с физич. точки зрения ее сегодня не считают серьезной. Так, если допустить, что призрачный полюс действительно появляется в квантовой электродинамике, рассматриваемой как математически замкнутая модель, то длина, отвечающая призрачному состоянию, оказывается настолько малой (более чем на 200 порядков меньше характерной гравитационной длины 10^{-33} см), что уже при значительно больших пространственных масштабах рассмотрение квантовой электродинамики как физически изолированной от других взаимодействий теории представляется совершенно неправомерным (см. *Великое объединение взаимодействий*).

Лит.: [1] Фрадкин Е. С., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1955, т. 28, с. 750–52; [2] Ландау Л. Д., Померанчук И. Я., «Доклады АН СССР», 1955, т. 102, с. 489–92; [3] Берестецкий В. Б., «Успехи физич. наук», 1976, т. 120, с. 439–54; [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984. *Д. А. Киржниц, Д. В. Ширков.*

НУТАЦИЯ – происходящее одновременно с *прецессией* движение твердого тела, при котором изменяется угол между осью собственного вращения тела и осью, вокруг которой происходит прецессия; этот угол называется углом нутации. У волчка, движущегося под действием силы тяжести, Н. представляет собой колебания оси волчка, амплитуда и период к-рых тем больше, чем больше угловая скорость его собственного вращения. Под Н. системы, содержащей *гироскоп*, понимают то периодич. изменение углов, определяющих положение системы, к-рое происходит с малыми амплитудами и большими частотами. Из-за наличия сопротивлений (трения) нутационные колебания быстро затухают, после чего система совершает чисто прецессионное движение.

См. также *Гироскопа математическая теория, Лагранжа–Пуассона случай, Эйлера углы.*

НЬЮКОМА МЕТОД – см. *Усреднения метод.*

НЬЮМЕНА – ПЕНРОУЗА ФОРМАЛИЗМ, метод спиновых коэффициентов,– видоизменение математического аппарата общей теории относительности, основанное на введении в каждой точке пространства-времени вместо обычных ортонормированных базисов (с одним времениподобным и тремя пространственноподобными векторами) специальных тетрад, состоящих из пары вещественных и пары комплексно сопряженных друг другу изотропных векторов. Уравнения для различных видов материи и полей записываются не в векторном или тензорном виде, а в виде скалярных уравнений для проекций соответствующих векторов и тензоров на комплексную изотропную тетраду. Аналогичным образом, после специального выбора базисов в спинорном пространстве, записываются также в виде скалярных соотношений различные уравнения для спинорных полей в искривленном пространстве-времени.

Этот формализм позволяет естественным образом использовать геометрич. свойства изотропных кривых и изотропных поверхностей и потому оказывается полезным в широких классах задач общей теории относительности. В частности:

при исследовании структуры и общих свойств полей тяготения, связанных с поведением конгруэнций изотропных геодезических и изотропных поверхностей, являющихся характеристическими для уравнений гравитационного поля;

при изучении полей алгебраически специальных типов по классификации Петрова, определение к-рых связано с наличием в пространстве-времени изотропных направлений, выделяемых кривизной пространства-времени;

в различных задачах о распространении гравитационных, электромагнитных и других типов волн, в к-рых возникают и играют важную роль семейства изотропных геодезических – лучей и изотропных поверхностей – фронтов движущихся волн.

Комплексные изотропные тетрады. Комплексная изотропная тетрада может быть построена по векторам обычного ортонормированного базиса $\{e^j_{(0)}, e^j_{(1)}, e^j_{(2)}, e^j_{(3)}\}$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} l^j &= e^j_{(0)}+e^j_{(1)}, & m^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^j_{(2)}+ie^j_{(3)}\right\},\\ n^j &= \frac{1}{2}\left\{e^j_{(0)}-e^j_{(1)}\right\}, & \bar{m}^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^j_{(2)}-ie^j_{(3)}\right\}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где строчные буквы латинского алфавита обозначают 4-мерные тензорные индексы $i, j, k, \ldots$, пробегающие значения 0, 1, 2, 3; черта над буквой означает комплексное сопряжение. Вектор $e^j_{(0)}$ – времениподобен, а векторы $e^j_{(1)}$, $e^j_{(2)}$, $e^j_{(3)}$ – пространственноподобны. Векторы (1) удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$l_jl^j=n_jn^j=m_jm^j=l_jm^j=n_jm^j=0;\ l_jn^j=-m_j\bar{m}^j=1.$$

Компоненты метрич. тензора g_{ij} выражаются через компоненты векторов (1) по формуле

$$g_{ij}=l_in_j+n_il_j-m_i\bar{m}_j-\bar{m}_im_j. \qquad (2)$$

Операторы ковариантного дифференцирования и спиновые коэффициенты. Для ковариантных производных по направлениям векторов изотропной тетрады приняты обозначения:

$$D=l^i\nabla_i,\ \Delta=n^i\nabla_i,\ \delta=m^i\nabla_i,\ \bar{\delta}=\bar{m}^i\nabla_i, \qquad (3)$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования. Аналогично коэффициентам вращения Риччи для комплексной изотропной тетрады вводятся коэффициенты вращения, называемые иначе спиновыми коэффициентами, со следующими обозначениями:

$$\left.\begin{aligned} k &= m^iDl_i, & \pi &= -\bar{m}^iDn_i, & \varepsilon &= \frac{1}{2}\left(n^iDl_i-\bar{m}^iDm_i\right),\\ \rho &= m^i\delta l_i, & \lambda &= -\bar{m}^i\delta n_i, & \alpha &= \frac{1}{2}\left(n^i\delta l_i-\bar{m}^i\delta m_i\right),\\ \sigma &= m^i\delta l_i, & \mu &= -\bar{m}^i\delta n_i, & \beta &= \frac{1}{2}\left(n^i\delta l_i-\bar{m}^i\delta m_i\right),\\ \tau &= m^i\Delta l_i, & \nu &= -\bar{m}^i\Delta n_i, & \gamma &= \frac{1}{2}\left(n^i\Delta l_i-\bar{m}^i\Delta m_i\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Коммутаторы операторов (3), действующих на нек-рую скалярную функцию, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta D - D\Delta = (\gamma+\bar{\gamma})D + (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\Delta - (\tau+\bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau}+\pi)\delta,\\
&\delta D - D\delta = (\bar{\alpha}+\beta-\bar{\pi})D + k\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho}+\varepsilon-\bar{\varepsilon})\delta,\\
&\delta\Delta - \Delta\delta = -\nu D + (\tau-\bar{\alpha}-\beta)\Delta + (\mu-\gamma+\bar{\gamma})\delta,\\
&\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta} = (\bar{\mu}-\mu)D + (\bar{\rho}-\rho)\Delta - (\bar{\alpha}-\beta)\bar{\delta} - (\bar{\beta}-\alpha)\delta.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Скаляры Ньюмена – Пенроуза. При записи в этих обозначениях различных тензорных соотношений входящие в них тензоры должны быть спроектированы на векторы изотропной тетрады. Исходя из алгебраич. свойств данного тензора, из полного набора его проекций на векторы изотропной тетрады следует выделить набор алгебраически независимых величин (называемых скалярами Ньюмена – Пенроуза), для к-рых приняты специальные обозначения. Приведем здесь соответствующие определения для тензоров Максвелла, Вейля и Риччи.

Тензор Максвелла электромагнитного поля представляет собой вещественный бивектор (антисимметричный тензор 2-го ранга). Множество бивекторов в 4-мерном пространстве образуют 6-мерное векторное пространство. Шесть линейно независимых бивекторов:

$$U_{ij} = l_{[i}m_{j]}, \quad V_{ij} = n_{[i}\bar{m}_{j]}, \quad M_{ij} = l_{[i}n_{j]} - m_{[i}\bar{m}_{j]}, \quad (6)$$

$$\bar{U}_{ij} = l_{[i}\bar{m}_{j]}, \quad \bar{V}_{ij} = n_{[i}m_{j]}, \quad \bar{M}_{ij} = l_{[i}n_{j]} - \bar{m}_{[i}m_{j]}, \quad (7)$$

составляют базис в этом пространстве.

Всякий вещественный бивектор F_{ij} в 4-мерном пространстве относительно так наз. дуального преобразования, имеющего вид:

$$F_{ij} \;\alpha\; i\overset{*}{F}_{ij}, \quad \text{где} \quad \overset{*}{F}_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}F^{kl}$$

и ε_{ijkl} – тензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{ijkl} = \varepsilon_{[ijkl]}$, $\varepsilon_{0123} = -\sqrt{-g}$), можно разбить на две части – автодуальную $\overset{+}{F}_{ij}$, то есть инвариантную относительно дуального преобразования, и антиавтодуальную, к-рая при этом преобразовании умножается на -1. При этом сам бивектор F_{ij} однозначно характеризуется своей автодуальной частью $\overset{+}{F}_{ij}$:

$$\overset{+}{F}_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + i\overset{*}{F}_{ij}); \quad F_{ij} = \overset{+}{F}_{ij} + \overset{\mp}{F}_{ij}. \quad (8)$$

В то же время легко видеть, что бивекторы (6) автодуальны, тогда как бивекторы (7) антиавтодуальны. Поэтому разложение всякого автодуального бивектора F_{ij} по базису (6), (7) содержит только бивекторы (6), но не (7) [бивекторы (6) образуют базис в 3-мерном комплексном пространстве автодуальных бивекторов]:

$$\overset{+}{F}_{ij} = -2\varphi_0 V_{ij} - 2\varphi_1 M_{ij} + 2\varphi_2 U_{ij}.$$

Здесь числовые множители в коэффициентах введены для упрощения последующих формул. Таким образом, тензор Максвелла, как и всякий вещественный бивектор, можно полностью охарактеризовать с помощью трех комплексных скаляров Ньюмена – Пенроуза φ_0, φ_1, φ_2, определяемых как проекции этого тензора на изотропную тетраду:

$$\varphi_0 = \overset{+}{F}_{ij}U^{ij} = F_{ij}l^i m^j,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\overset{+}{F}_{ij}M^{ij} = \frac{1}{2}F_{ij}(l^i n^j - m^i\bar{m}^j),$$

$$\varphi_2 = -\overset{+}{F}_{ij}V^{ij} = -F_{ij}n^i\bar{m}^j.$$

Тензор Вейля C_{ijkl} возникает при разбиении тензора кривизны R_{ijkl} на неприводимые части, определяемые бесследовыми тензорами – четырехвалентным C_{ijkl} (тензор Вейля) и двухвалентным Φ_{ij} и скаляром Λ:

$$R_{ijkl} = C_{ijkl} + \Phi_{ik}g_{jl} - \Phi_{il}g_{jk} + \Phi_{jl}g_{ik} - \Phi_{jk}g_{il} + 2\Lambda(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

где $2\Phi_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{4}Rg_{ij}$ – бесследовая часть (девиатор) тензора Риччи R_{ij} ($R_{ij} = R^k{}_{ikj}$); R – скалярная кривизна ($R = R^k{}_k$); $R = -24\Lambda$.

Алгебраич. свойства тензора Вейля выражаются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&C_{ijkl} = -C_{jikl} = -C_{ijlk} = C_{klij},\\
&C_{ijkl} + C_{iljk} + C_{iklj} = 0; \quad C^k_{ikj} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Тензор Вейля C_{ijkl} также однозначно описывается своей автодуальной частью согласно формулам:

$$\overset{+}{C}_{ijkl} = \frac{1}{2}(C_{ijkl} + i\overset{*}{C}_{ijkl}); \quad C_{ijkl} = \overset{+}{C}_{ijkl} + \overset{\mp}{C}_{ijkl},$$

где $\overset{*}{C}_{ijkl} = \frac{1}{2}\varepsilon_{klmn}C_{ij}{}^{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijmn}C^{mn}{}_{kl}$. Так как тензор $\overset{+}{C}_{ijkl}$ является автодуальным как по первой, так и по второй паре своих антисимметричных индексов, то он может быть разложен в сумму попарных произведений автодуальных бивекторов (6), то есть представлен в виде симметричной билинейной формы от этих бивекторов. Кроме того, так как в силу (9) имеет место $\overset{+}{C}{}^k{}_{ijk} = 0$, то среди коэффициентов этой билинейной формы остается лишь пять алгебраически независимых комплексных коэффициентов, обозначаемых Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 и определяющих полностью в заданной изотропной тетраде компоненты тензора Вейля:

$$\begin{aligned}
\overset{+}{C}_{ijkl} = &-4\Psi_0 V_{ij}V_{kl} - 4\Psi_1(V_{ij}M_{kl} + M_{ij}V_{kl}) -\\
&- 4\Psi_2(M_{ij}M_{kl} - U_{ij}V_{kl} - V_{ij}U_{kl}) +\\
&+ 4\Psi_3(U_{ij}M_{kl} + M_{ij}U_{kl}) - 4\Psi_4 U_{ij}U_{kl}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_0 &= -\overset{+}{C}_{ijkl}U^{ij}U^{kl} &&= -C_{ijkl}l^i m^j l^k m^l,\\
\Psi_1 &= -\frac{1}{2}\overset{+}{C}_{ijkl}U^{ij}M^{kl} &&= -C_{ijkl}l^i n^j l^k m^l,\\
\Psi_2 &= -\frac{1}{4}\overset{+}{C}_{ijkl}M^{ij}M^{kl} &&= -\frac{1}{2}C_{ijkl}(l^i n^j l^k n^l - l^i n^j m^k\bar{m}^l),\\
\Psi_3 &= \frac{1}{2}\overset{+}{C}_{ijkl}V^{ij}M^{kl} &&= -C_{ijkl}n^i l^j n^k\bar{m}^l,\\
\Psi_4 &= -\overset{+}{C}_{ijkl}V^{ij}V^{kl} &&= -C_{ijkl}n^i\bar{m}^j n^k\bar{m}^l.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Для проекций тензора Φ_{ij} – бесследовой части тензора Риччи приняты следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{00} = \Phi_{ij}l^i l^j, \quad \Phi_{10} = \Phi_{ij}l^i\bar{m}^j, \quad \Phi_{20} = \Phi_{ij}\bar{m}^i\bar{m}^j,\\
&\Phi_{01} = \Phi_{ij}l^i m^j, \quad \Phi_{11} = \Phi_{ij}l^i n^j, \quad \Phi_{21} = \Phi_{ij}n^i\bar{m}^j,\\
&\Phi_{02} = \Phi_{ij}m^i m^j, \quad \Phi_{12} = \Phi_{ij}n^i m^j, \quad \Phi_{22} = \Phi_{ij}n^i n^j.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

При этом в силу симметрии и бесследовости Φ_{ij} для его проекций (11) имеют место соотношения: $\Phi_{mn} = \bar{\Phi}_{nm}$, где $m, n = 0, 1, 2$. Поэтому только шесть величин из (11) (три вещественных и три комплексных) независимы.

Из сказанного выше вытекает, что пять комплексных величин (10), шесть независимых скаляров (11) и скаляр Λ определяют полный набор проекций на изотропную тетраду тензора Римана – Кристоффеля R_{ijkl}.

Уравнения гравитационного поля в формализме Ньюмена – Пенроуза. В обычной формулировке общей теории относительности гравитационное поле описывается компонента-

ми метрич. тензора g_{ij}, играющими роль потенциалов гравитационного поля и удовлетворяющими уравнениям Эйнштейна – нелинейной гиперболич. системе, имеющей вид:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = kT_{ij}, \qquad (12)$$

где тензор Риччи R_{ij} и скалярная кривизна R выражены через метрич. тензор g_{ij} и его производные; T_{ij} – тензор энергии–импульса материи; $k = \frac{8\pi G}{c^4}$ – гравитационная постоянная Эйнштейна; G – ньютоновская гравитационная постоянная.

В Н.–П. ф. роль переменных гравитационного поля играют следующие три группы величин:

компоненты векторов изотропной тетрады l^i, n^i, m^i, $\overline{m}^i$ (однозначно определяющие собой, согласно (2), компоненты метрики);

спиновые коэффициенты (4);

полный набор независимых проекций тензора Римана–Кристоффеля, состоящий из величин Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4, Ψ_{mn} и Λ.

Полная система уравнений для этих переменных, эквивалентная уравнениям (12) для метрики и играющая роль уравнений гравитационного поля в Н.–П. ф., состоит из трех групп уравнений.

Первую группу составляют проекции на векторы изотропной тетрады тождеств Бианки

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0,$$

к-рые при описанном выше выборе переменных уже не являются тождествами.

Дополнительные уравнения возникают при проектировании на векторы изотропной тетрады выражения для коммутатора ковариантных производных от произвольного вектора через тензор кривизны:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) z^k = R^k{}_{lij} z^l.$$

Выбирая поочередно в качестве z^k векторы изотропной тетрады l^i, n^i, m^i, $\overline{m}^i$, получаем вторую группу уравнений.

Наконец, третью группу уравнений образуют так наз. координатные уравнения, представляющие собой запись в выбранных переменных операторных выражений (5) для коммутаторов ковариантных производных вдоль векторов изотропной тетрады при действии на скалярные функции.

Эти три группы уравнений представляют собой чисто кинематич. связи между величинами, выбранными в качестве переменных поля. Их взаимосвязь с материей появится лишь тогда, когда в соответствии с уравнениями Эйнштейна (12) девиатор тензора Риччи Φ_{ij} и скаляр Λ будут выражены через тензор энергии – импульса материи и его след по формулам

$$2\Phi_{ij} = k\left(T_{ij} - \frac{1}{4} T^k_k g_{ij}\right), \quad \Lambda = \frac{k}{24} T^k_k.$$

В частности, в тех областях пространства, где материя отсутствует, то есть имеет место вакуум, $T_{ij} = 0$ и, следовательно, $\Phi_{ij} = 0$ и $\Lambda = 0$. При наличии в пространстве материи эти величины могут отличаться от нуля и выражаться через дополнительные параметры, характеризующие материю. Для получения полной системы полевых уравнений к перечисленным выше трем группам уравнений потребуется добавить уравнения для характеристик материи. Так будет, напр., в случае присутствия в пространстве электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла и тензор энергии–импульса электромагнитного поля в формализме Ньюмена – Пенроуза. Уравнения Максвелла в тензорной форме имеют вид:

$$\nabla_j F^{ij} = -\frac{4\pi}{c} J^i; \quad \nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij} = 0,$$

где F_{ij} – тензор Максвелла, J^i – вектор 4-тока. Эти же уравнения эквивалентны, как известно, уравнению для самодуального бивектора $\overset{+}{F}{}^{ij}$:

$$\nabla_j \overset{+}{F}{}^{ij} = -\frac{4\pi}{c} J^i.$$

Проектируя это уравнение на векторы изотропной тетрады и используя введенные ранее обозначения, получаем уравнения Максвелла в Н.–П. ф.:

$$(D - 2\rho)\varphi_1 - (\bar{\delta} - 2\alpha + \pi)\varphi_0 + k\varphi_2 = -\frac{2\pi}{c} J_{(l)},$$

$$(\delta - 2\tau)\varphi_1 - (\Delta - 2\gamma + \mu)\varphi_0 + \sigma\varphi_2 = -\frac{2\pi}{c} J_{(m)},$$

$$(D + 2\varepsilon - \rho)\varphi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\varphi_1 + \lambda\varphi_0 = -\frac{2\pi}{c} J_{(\overline{m})},$$

$$(\delta + 2\beta - \tau)\varphi_2 - (\Delta + 2\mu)\varphi_1 + \nu\varphi_0 = -\frac{2\pi}{c} J_{(n)}.$$

Проекции тензора энергии – импульса электромагнитного поля на векторы изотропной тетрады, описываемые величинами Φ_{mn} (определенными в (11)) и Λ, имеют вид:

$$\Phi_{mn} = \frac{k}{4\pi} \varphi_m \overline{\varphi}_n, \quad \Lambda = 0.$$

Выше были приведены основные соотношения Н.–П. ф. в его тензорной формулировке. В нек-рых случаях может возникнуть необходимость рассмотрения в рамках этого формализма спинорных уравнений. При этом удобнее использовать не тензорный, а спинорный вариант этого формализма. Детальное описание спинорной формулировки, а также разнообразных приложений Н.–П. ф. можно найти в [1], [2], а также в обзорах [3], [4].

Лит.: [1] Newman E. T., Penrose R., «J. Math. Phys.», 1962, v. 3, p. 566–78; [2] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, М., 1972; [3] Фролов В. П., «Труды Физич. ин-та АН СССР», 1977, т. 96, с. 72–180; [4] Алексеев Г. А., Хлебников В. И., «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1978, т. 9(5), с. 790–870.

Г. А. Алексеев.

НЬЮТОНА ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ – три закона, лежащие в основе так называемой классической механики, или механики Ньютона. Сформулированы И. Ньютоном (I. Newton, 1687).

Первый закон: всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Второй закон: изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Третий закон: действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.

Н. з. м. появились как результат обобщения многочисленных наблюдений, опытов и теоретич. исследований.

Согласно современным представлениям и терминологии, в первом и втором законах под телом следует понимать *материальную точку*, а под движением – движение относительно *инерциальной системы отсчета*. Математич. выражение второго закона в классич. механике имеет вид:

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \text{или} \quad m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F},$$

где m – масса точки, $\boldsymbol{v}$ – ее скорость, $\boldsymbol{w}$ – ускорение, t – время, $\boldsymbol{F}$ – действующая сила (см. *Динамика*).

Н. з. м. перестают быть справедливыми для движения объектов очень малых размеров, сравнимых с размерами атомов (напр., элементарные частицы), и при движениях со скоростями, близкими к скорости света. См. *Квантовая механика, Относительности теория.*

Лит.: [1] Галилей Г., Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению, Соч., [пер. с лат.], т. 1, М.– Л., 1934; [2] Ньютон И., Математические начала натуральной философии, пер. с лат., М., 1989. См. также *лит.* при ст. *Механика.* *С. М. Тарг.*

НЬЮТОНА МНОГОГРАННИК – обобщение понятия степени многочлена. Имеется два варианта определения.

1) Глобальный вариант: пусть f – многочлен от нескольких переменных. Выпуклая оболочка показателей одночленов, входящих в f, и называется многогранником Ньютона.

2) Локальный вариант: пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ – росток голоморфной функции, m – показатель одночлена, входящего в ряд Тейлора f, $\mathbb{R}^n_+$ – положительный октант. Выпуклая оболочка всех сдвинутых октантов $m+\mathbb{R}^n_+$ и называется многогранником Ньютона. *С. В. Чмутов.*

НЬЮТОНА УРАВНЕНИЕ – любая система дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t),$$

$x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Н. у. описывает движение в любой механич. системе с конечным числом степеней свободы n; функция F в этой ситуации имеет смысл силы. Часто рассматривают автономные, то есть не зависящие от времени уравнения

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}),$$

а также не зависящие и от скорости $\dot{x}$:

$$\ddot{x} = F(x)$$

и другие частные случаи уравнений, инвариантных относительно разных подгрупп или всей группы преобразований Галилея пространства-времени (см. [1], [2]).

Система $\ddot{x} = F(x)$ является обратимой системой, что сближает ее с гамильтоновым уравнением (см. [3]). По настоящему гамильтоновым оно является в случае потенциальности силы $F(x)$, то есть в случае существования функции $U(x)$ такой, что $F(x) = -\partial U/\partial x$. Такое уравнение называется консервативным уравнением Ньютона. Ему можно придать и лагранжеву форму

$$\partial L/\partial \dot{x} - \partial L/\partial x = 0,$$

где $L = \dot{x}^2/2 - U(x)$, и гамильтонову

$$\dot{x} = -\partial H/\partial p,\ \dot{p} = \partial H/\partial x,$$

где $H = p^2/2 + U(x)$. Консервативное уравнение имеет интеграл $H = H(x, p)$, $p = \dot{x}$, имеющий смысл энергии.

В случае $n=1$ любое Н. у. является консервативным:

$$U(x) = -\int F(x)\,dx.$$

Из-за наличия интеграла H такое уравнение интегрируется в квадратурах – решения $x=\varphi(t)$ в неявном виде задаются формулами

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{\partial \xi}{\sqrt{2(E-U(x))}},$$

где E – значение энергии H в начальной точке $(x_0, \dot{x}_0)$. Существование интеграла H также позволяет сравнительно просто по графику потенциальной энергии $U(x)$ построить фазовый портрет, то есть картину траекторий $x(t)$, $p(t)$, $p=\dot{x}$, на плоскости x, p (см. [4]).

Н. у. не только непосредственно описывает многие явления природы, но и лежит в основе многих самостоятельных разделов теоретич. механики и физики.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989; [2] его же, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1984; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, М., 1973. *Н. Н. Нехорошев.*

НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ – *потенциал* с ньютоновым ядром

$$1/|x-y|^{n-2},$$

где $|x-y|$ – расстояние между точками x и y евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, то есть интеграл вида

$$u(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}, \qquad (1)$$

где интегрирование производится по некоторой мере Радона μ на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем S. В случае неотрицательной меры μ Н. п. (1) есть супергармонич. функция во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. *Субгармоническая функция*).

Вне носителя S меры μ Н. п. (1) имеет производные всех порядков по координатам точки x и является регулярным решением *Лапласа уравнения*

$$\Delta u(x) = 0,$$

то есть $u(x)$ – *гармоническая функция* на открытом множестве CS, регулярная и на бесконечности, $u(\infty) = 0$. В случае абсолютно непрерывной меры μ Н. п. $u(x)$ имеет вид:

$$u(x) = \int_D \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\,d\omega(y), \qquad (2)$$

где $d\omega$ – элемент объема в $\mathbb{R}^n$, D – нек-рая конечная область. Если при этом плотность $f(y)$ непрерывна по Гельдеру в замкнутой области D и граница ∂D состоит из конечного числа замкнутых гиперповерхностей Ляпунова, то $u(x)$ имеет непрерывные производные 2-го порядка внутри D и удовлетворяет *Пуассона уравнению*

$$\Delta u(x) = -(n-2)\,2\pi^{n/2} f(x)/\Gamma(n/2).$$

В работах И. Ньютона (I. Newton) понятие «потенциала» еще не встречается. Впервые существование силовой функции ньютоновых сил тяготения доказал Ж. Лагранж (J. Lagrange, 1773). Термины «потенциальная функция» и «потенциал», применительно к интегралам вида (2) при $n=3$, впервые встречаются соответственно у Дж. Грина (G. Green, 1828) и у К. Гаусса (C. Gauss, 1840).

Термин «Н. п.» иногда употребляется в узком смысле применительно только к объемным потенциалам вида (2), а иногда – применительно только к физически реальному случаю (2) потенциала сил тяготения при $n=3$, создаваемого массами, распределенными в области D с плотностью $f(y)$.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.– Л., 1946. *Е. Д. Соломенцев.*

НЬЮТОНОВА ЕМКОСТЬ – см. *Емкость* множества.

НЬЮТОНОВО ЯДРО – см. *Ньютонов потенциал.*

ОБЛАСТИ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ – области (среды), либо состоящие из большого числа мелких непересекающихся компонентов с различными свойствами, либо имеющие границу сложной (мелкозернистой) структуры (состоящую из большого числа мелких компонентов). Характерной особенностью таких сред является то, что размеры неоднородностей (компонентов) весьма малы по сравнению с размерами всей области, но велики по сравнению с межмолекулярными расстояниями, что позволяет описывать вещество внутри таких неоднородностей уравнениями физики сплошных сред. Необходимость решения краевых задач для уравнений математич. физики в областях со сложной структурой возникает в целом ряде задач физики, механики, химии и биологии. Примерами таких областей могут служить гетерогенные и пористые среды, композиционные материалы, мембраны различных типов [напр., применяемые для разделения жидких (газовых) смесей или биологические]. *П. В. Малышев.*

ОБЛАСТИ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ; краевые задачи для математической физики – область математических исследований, имеющая обширные приложения к различным задачам физики, механики, химии и биологии. Физич. процессы в сильно неоднородных средах описываются уравнениями с частными производными с быстро изменяющимися (осциллирующими) коэффициентами либо решениями краевых задач для таких уравнений в нек-рой области с граничными условиями, заданными на границе, к-рая имеет мелкозернистую структуру. Предполагается, что характерные размеры неоднородностей имеют порядок ε такой, что $\varepsilon \ll L$, где L – характерный размер рассматриваемой области Λ, а сами неоднородности размещены в Λ в соответствии с нек-рым законом (правилом) – периодически, квазипериодически, случайно (с нек-рой функцией распределения).

Сложная структура области обычно не вносит дополнительных трудностей в доказательства теорем существования и единственности решений таких краевых задач, но, в то же время, нахождение аналитических (и даже численных) точных или приближенных решений таких задач сопряжено с трудностями. Наиболее распространен следующий метод исследования таких задач.

Изучается поведение решений исходной краевой задачи при $\varepsilon \to 0$ и строится так наз. усредненное уравнение (или краевая задача), к-рым удовлетворяют предельные функции. При этом в одних случаях решения исходной краевой задачи заменяются решениями усредненных (то есть более простых – часто с постоянными коэффициентами) дифференциальных уравнений, рассматриваемых во всем пространстве, в других – исходная сложная граница заменяется средней простой поверхностью, на к-рой задаются так наз. усредненные граничные условия. Таким образом, исходная задача сводится фактически к изучению однородных сред (или сред с однородной границей), описываемых так наз. эффективными характеристиками сред со сложной структурой, для нахождения к-рых существуют хорошо разработанные как математические, так и численные методы. Изложенный метод решения краевых задач в О. со с. с. является универсальным и применим к различным процессам, протекающим в средах со сложной структурой: к упругим колебаниям, теплопроводности, диффузии, фильтрации, к задачам электростатики, к распространению электромагнитных волн (напр., к задаче дифракции), излучению и т. п. При этом могут рассматриваться как линейные, так и нелинейные модели, как дифференциальные, так и операторные уравнения, а также краевые задачи различных типов (Дирихле, Неймана и др.). Данный метод может быть строго обоснован и позволяет в ряде случаев оценивать погрешность полученного решения.

В ряде случаев (напр., в задачах электростатики, диффузии, фильтрации и др.) можно построить и исследовать решения исходной краевой задачи в виде разложения по степеням малого параметра ε/L_0 (L_0 – характерное расстояние между неоднородностями), при этом можно, в принципе, находить такое решение с точностью до $(\varepsilon/L_0)^n$, где n – произвольное целое число, и учитывать эффекты, связанные с микроструктурой исследуемой области.

Исследование краевых задач в средах со сложной структурой восходит к работам О. Моссотти (O. Mossotti), Дж. Максвелла (J. Maxwell), Дж. Рэлея (J. Rayleigh).

Лит.: [1] Maxwell J. C., Treatise on Electricity and Magnetismus, v. 1, Oxford, 1873; [2] Rayleigh J. W., «Philos. Mag.», 1892, v. 34, p. 481; [3] Марченко В. А., Хруслов Е. Я., Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей, Киев, 1974; [4] Санчес-Паленсия Э., Неоднородные среды и теория колебаний, пер. с англ., М., 1984; [5] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., Осреднение процессов в периодических средах, М., 1984. *П. В. Малышев.*

ОБЛАСТИ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ; эффективные характеристики – характеристики, задача расчета которых возникает при исследовании краевых задач для уравнений математической физики в областях со сложной структурой, когда решения исходной краевой задачи в среде со сложной структурой (состоящей из смеси частиц с различными свойствами) заменяются решениями модельной (более простой) задачи в однородной среде, характеризующейся некоторыми эффективными коэффициентами. Причем эффективные характеристики сред со сложной структурой необходимо подбирать так, чтобы решения модельной задачи были близки к решениям исходной. При расчете эффективных характеристик используются как аналитические, так и численные методы.

Ниже приведены формулы для определения эффективной диэлектрич. проницаемости среды, состоящей из смеси однородных частиц во внешнем электрич. поле (аналогичные формулы можно получить для магнитной проницаемости среды, коэффициентов диффузии и фильтрации; используемый метод является универсальным, то есть может быть применен и в ряде других задач). Эта задача восходит к середине и 2-й половине 19 в. к работам О. Моссотти (O. Mossotti), Р. Клаузиуса (R. Clausius), Дж. Максвелла (J. Maxwell), Г. Лоренца (H. Lorentz), Дж. Рэлея (J. Rayleigh).

Для системы сферич. тел с диэлектрич. проницаемостью ε_2, расположенных в среде с диэлектрич. проницаемостью ε_1 периодически или случайным образом, Дж. Рэлеем (1892) была установлена (с помощью разложения решений

уравнений Лапласа по потенциалам мультиполей) следующая формула:

$$\varepsilon_{эф} = \varepsilon_1\left[1 + 3\rho\left(\frac{\nu+2}{\nu-1} - \rho + 1{,}3091\frac{1-\nu}{\nu+4/3}\rho^{10/3}\right)^{-1}\right], \qquad (1)$$

где $\nu = \varepsilon_2/\varepsilon_1$, а ρ – объемная плотность тел. В подлинной формуле Рэлея – коэффициент 1,65; правильный коэффициент 1,31 (численное значение суммы нек-рого сходящегося ряда) указан М. К. Поливановым. Если отбросить последнее слагаемое в знаменателе, то получают формулу, выведенную Г. Лоренцом, если два – то формулу, выведенную Дж. Максвеллом. Формулы, полученные Г. Лоренцом и Дж. Максвеллом, учитывают дипольное взаимодействие тел, а формула Рэлея – октупольное.

Учет мультиполей более высокого порядка (см. [5]) дает формула:

$$\varepsilon_{эф} = \varepsilon_1\left\{1 + 3\rho\left[\frac{\nu+2}{\nu-1} - \rho + 0{,}0723\frac{1-\nu}{\nu+6/5}\rho^{14/3} + 0{,}15256\frac{1-\nu}{\nu+8/7}\rho^6 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1{,}3091\frac{1-\nu}{\nu+4/3}\rho^{10/3}\left(1-0{,}1173\frac{1-\nu}{\nu+6/5}\rho^{11/3}\right)^2}{1+0{,}4054\frac{1-\nu}{\nu+4/3}\rho^{7/3} - 6{,}6568\frac{(1-\nu)^2\rho^6}{(\nu+4/3)(\nu+6/5)}}\right]^{-1}\right\}. \qquad (2)$$

Отбрасывая три слагаемых, пропорциональных $\rho^{11/3}$ и ρ^6 (два), получают формулу, выведенную Р. Мередитом и Ц. Тобиасом [3]. Различие между результатами, полученными по формулам (1) и (2), существенно для больших плотностей ρ и тем больше, чем больше отличие параметра ν от единицы. Формулы (1) и (2) справедливы для тел, размещенных в узлах кубич. решетки, заполняющей все 3-мерное пространство. Если же число «слоев» тел вдоль одной из осей конечно, то $\varepsilon_{эф}^{(N)}$ возрастает с ростом числа слоев ($N \geqslant 1$), стремясь к $\varepsilon_{эф}$ при $N \to \infty$. Формулы (1) и (2) легко обобщаются на случай кристаллич. решеток других типов (см. [5]).

См. также *Области со сложной структурой*; краевые задачи.

Лит.: [1] Поливанов М. К., Ферромагнетики, М., 1957; [2] Толмачев С. Т., Специальные методы решения задач магнитостатики, Киев, 1983; [3] Meredith R. E., Tobias C. W., «J. Appl. Phys.», 1960, v. 7, p. 1270; [4] Петрина Д. Я., «Журнал вычислит. математики и математич. физики», 1984, т. 24, с. 709; [5] Малышев Д. В., Малышев П. В., «Доклады АН УССР», сер. А, 1986, № 2, с. 44; 1987, № 12, с. 48; [6] Математические проблемы теории систем заряженных частиц в неоднородных средах, Киев, 1988, с. 63–76. *П. В. Малышев.*

ОБЛАСТЬ – см. *Топологическое пространство.*

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ аналитической функции – см. *Полная аналитическая функция.*

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ – см. *Степенной ряд.*

ОБМЕННАЯ ЭНЕРГИЯ – см. *Гейзенберга модель.*

ОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – специфическое взаимное влияние одинаковых (тождественных) частиц, эффективно проявляющееся как результат некоторого особого взаимодействия. О. в.– чисто квантовомеханич. эффект, не имеющий аналога в классич. физике.

Вследствие квантовомеханич. принципа неразличимости одинаковых частиц (*тождественности принципа*) волновая функция системы должна обладать определенной симметрией относительно перестановки двух таких частиц, то есть их координат и проекций спинов: для частиц с целым спином – бозонов – волновая функция системы не меняется при такой перестановке (является симметричной), а для частиц с полуцелым спином – фермионов – меняет знак (является антисимметричной). Если силы взаимодействия между частицами не зависят от их спинов, волновую функцию системы можно представить в виде произведения двух функций, одна из к-рых зависит только от координат частиц, а другая – только от их спинов. В этом случае из принципа тождественности следует, что координатная часть волновой функции, описывающая движение частиц в пространстве, должна обладать определенной симметрией относительно перестановки координат одинаковых частиц, зависящей от симметрии спиновой части волновой функции. Наличие такой симметрии означает, что имеет место определенная согласованность, корреляция движения одинаковых частиц, к-рая сказывается на энергии системы (даже в отсутствие силовых взаимодействий между частицами). Поскольку обычно влияние частиц друг на друга является результатом действия между ними каких-либо сил, о взаимном влиянии одинаковых частиц, вытекающем из принципа тождественности, говорят как о проявлении специфич. взаимодействия – О. в.

Возникновение О. в. можно проиллюстрировать на примере атома гелия [впервые это было сделано В. Гейзенбергом (W. Heisenberg) в 1926]. Спиновые взаимодействия в легких атомах малы, поэтому волновая функция двух электронов в атоме гелия может быть представлена в виде:

$$\Psi = \Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\chi(s_1, s_2), \qquad (1)$$

где $\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ – функция координат электронов, $\chi(s_1, s_2)$ – функция проекций их спинов на нек-рое направление. Так как электроны являются фермионами, полная волновая функция должна быть антисимметричной. Если суммарный спин S обоих электронов равен нулю (спины антипараллельны – парагелий), то спиновая функция χ антисимметрична относительно перестановки спиновых переменных и, следовательно, координатная функция Φ должна быть симметрична относительно перестановки координат электронов. Если же $S = 1$ (спины параллельны – ортогелий), то χ симметрична, а Φ антисимметрична. Обозначая через $\psi_n(\boldsymbol{r}_1)$, $\psi_m(\boldsymbol{r}_2)$ волновые функции отдельных электронов в атоме гелия (индексы n, m означают набор квантовых чисел, определяющих состояние электрона в атоме), можно, пренебрегая сначала взаимодействием между электронами, записать координатную часть волновой функции в виде:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_a &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(\boldsymbol{r}_1)\psi_m(\boldsymbol{r}_2) - \psi_m(\boldsymbol{r}_1)\psi_n(\boldsymbol{r}_2)] \quad \text{для} \quad S = 1,\\ \Phi_c &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(\boldsymbol{r}_1)\psi_m(\boldsymbol{r}_2) + \psi_m(\boldsymbol{r}_1)\psi_n(\boldsymbol{r}_2)] \quad \text{для} \quad S = 0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(множитель $1/\sqrt{2}$ введен для нормировки волновой функции). В состоянии с антисимметричной координатной функцией Φ_a среднее расстояние между электронами оказывается большим, чем в состоянии с симметричной функцией Φ_c; это видно из того, что вероятность $|\Psi|^2 = |\Phi_a|^2|\chi_c|^2$ нахождения электронов в одной и той же точке ($\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$) для состояния Φ_a равна нулю. Поэтому средняя энергия кулоновского взаимодействия (отталкивания) двух электронов оказывается в состоянии Φ_a меньшей, чем в состоянии Φ_c. Поправка к энергии системы, связанная с взаимодействием электронов, определяется по теории возмущений:

$$\mathscr{E}_{вз} = K \pm A, \qquad (3)$$

где знаки $\pm$ относятся соответственно к симметричному и антисимметричному координатным состояниям,

$$K = e^2\int\frac{|\psi_n(\boldsymbol{r}_1)|^2|\psi_m(\boldsymbol{r}_2)|^2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}d\tau_1 d\tau_2,$$
$$A = e^2\int\frac{\psi_n^*(\boldsymbol{r}_1)\psi_m(\boldsymbol{r}_1)\psi_m^*(\boldsymbol{r}_2)\psi_n(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}d\tau_1 d\tau_2 \qquad (4)$$

(e – заряд электрона, $d\tau = dxdydz$ – элемент объема). Величина K имеет наглядный классич. смысл и соответствует электростатич. взаимодействию двух заряженных «облаков» с плотностями заряда $e|\psi_n(\boldsymbol{r}_1)|^2$ и $e|\psi_m(\boldsymbol{r}_2)|^2$. Величину A, называемую обменным интегралом, можно интерпретировать как электростатич. взаимодействие заряженных «обла-

ков» с плотностями заряда $e\psi_n^*(r_1)\psi_m(r_1)$ и $e\psi_m^*(r_2)\psi_n(r_2)$ (звездочка означает комплексное сопряжение), то есть когда каждый из электронов находится одновременно в состояниях ψ_n и ψ_m (что бессмысленно с точки зрения классич. физики). Из (3) следует, что полная энергия пара- и ортогелия с электронами в аналогичных состояниях отличается на величину $2A$. Таким образом, хотя непосредственно спиновое взаимодействие мало и не учитывается, тождественность двух электронов в атоме гелия приводит к тому, что энергия системы оказывается зависящей от полного спина системы, как если бы между частицами существовало дополнительное, обменное взаимодействие. Очевидно, что О. в. в данном случае является частью кулоновского взаимодействия электронов и явным образом выступает при приближенном рассмотрении квантовомеханич. системы, когда волновая функция всей системы выражается через волновые функции отдельных частиц (в частности, в приближении Хартри – Фока).

О. в. эффективно проявляется в тех случаях, когда «перекрываются» волновые функции отдельных частиц системы, то есть когда существуют области пространства, в к-рых с заметной вероятностью может находиться частица в различных состояниях движения. Это видно из выражения для обменного интеграла A: если степень перекрытия состояний $\psi_n^*(r)$ и $\psi(r)$ незначительна, то величина A очень мала.

Характер О. в. различен для фермионов и для бозонов. Для фермионов О. в. является следствием *Паули принципа*, препятствующего сближению тождественных частиц с одинаковым направлением спинов, и эффективно проявляется как отталкивание их друг от друга.

В системе тождественных бозонов О. в., напротив, имеет характер взаимного притяжения частиц. Рассмотрение систем из большего числа одинаковых частиц производится на основе *Ферми – Дирака статистики* для фермионов и *Бозе – Эйнштейна статистики* для бозонов.

Если взаимодействующие тождественные частицы находятся во внешнем поле, напр. в кулоновском поле ядра, то существование определенной симметрии волновой функции и соответственно определенной корреляции движения частиц влияет на их энергию в этом поле, что также является обменным эффектом. Обычно (в атоме, молекуле, кристалле) это О. в. вносит вклад обратного знака по сравнению с вкладом О. в. частиц друг с другом. Поэтому суммарный обменный эффект может как понижать, так и повышать полную энергию взаимодействия в системе. Энергетич. выгодность или невыгодность состояния с параллельными спинами фермионов, в частности электронов, зависит от относительных величин этих вкладов. Так, в ферромагнетике (аналогично рассмотренному атому гелия) более низкой энергией обладает состояние, в к-ром спины (и магнитные моменты) электронов в незаполненных оболочках соседних атомов параллельны; в этом случае благодаря О. в. возникает спонтанная намагниченность. Напротив, в молекулах с ковалентной химич. связью, напр. в молекуле H_2, энергетически выгодно состояние, в к-ром спины валентных электронов соединяющихся атомов антипараллельны.

О. в. объясняет, таким образом, закономерности атомной и молекулярной спектроскопии, химич. связь в молекулах, ферромагнетизм (и антиферромагнетизм), а также другие специфич. явления в системах одинаковых частиц.

Д. А. Киржниц, С. С. Герштейн.

ОБМОТКА ТОРА – траектория постоянного уравнения $\dot{\varphi}=\omega$ на n-мерном торе T^n с угловыми координатами $\varphi \bmod 2\pi$, где $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)=\text{const}\neq 0$. Иначе говоря, О. т.– это траектория условно периодич. движения на торе, то есть движения, задаваемого постоянным векторным полем. Свойства всех таких траекторий на торе одинаковы и определяются вектором частот ω. Более точно – максимальным числом r линейно независимых целочисленных соотношений

$$(k,\omega)=\sum k_i\omega_i=0$$

между частотами ω_i, где $k=(k_1, \ldots, k_n)$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^n$ целочисленных векторов. Соотношение $(k, \omega)=0$ называется резонансом, число $|k|=\sum|k_i|$ – порядком резонанса, а r – кратностью резонанса вектора частот ω.

Замыкание О. т. является $(n-r)$-мерным тором, совпадающим с T^n в случае $r=0$. Так что одна О. т. полностью «обматывает» весь тор T^n только в нерезонансном случае, но это общий случай. В случае максимальной кратности резонанса $(r=n-1)$ траектории, напротив, периодичны, а вектор ω коллинеарен целочисленному: $\omega=cK$, где $K\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$.

Инвариантные торы с условно периодич. движениями возникают в самых различных системах дифференциальных уравнений. Особенно часто они встречаются в гамильтоновых системах, причем, почти исключительно, семействами. Если фазовое пространство сплошь расслоено на такие торы, то систему называют (то́рически) интегрируемой. В фазовом пространстве гамильтоновой системы в такой ситуации могут быть введены канонич. переменные $I, \varphi \bmod 2\pi$, в к-рых функция Гамильтона H принимает вид $H=H(I)$ и к-рые называются переменные «действие–угол».

Нерезонансная система $\dot{\varphi}=\omega$ является простейшим примером эргодич. динамич. системы: временное среднее функции в силу системы равно пространственному среднему. Свойства вектора ω определяют свойства не только постоянных систем, но и их возмущений, напр. возмущений интегрируемых систем. В частности, при «включении» возмущения нек-рые нерезонансные торы невозмущенной гамильтоновой системы не исчезают, а лишь слегка деформируются, образуя в фазовом пространстве большое по мере множество (см. *КАМ-теория*). Движение по этим торам, называемым колмогоровскими, будет условно-периодическим, а траектории – нерезонансными О. т.

Грубое объяснение этого факта – вышеупомянутая эргодичность невозмущенной системы на торах $I=\text{const}$ с нерезонансными частотами

$$\omega(I)=\partial H_0(I)/\partial I,$$

где $H=H_0(I)+\varepsilon H_1(I, \varphi)$, $\varepsilon\ll 1$,– функция Гамильтона системы. Эргодичность позволяет оценить скорость изменения функций на решениях через пространственное среднее по тору скорости изменения этих функций; а пространственное среднее вектор-функции $I=-\partial H/\partial\varphi$, отвечающей за движение поперек слоев – торов $I=\text{const}$, по каждому такому тору равно нулю. В действительности здесь, как и при исследовании других аналогичных случаев, важна не просто обусловленная нерезонансностью эргодичность, то есть неравенство нулю выражений (k, ω), но и удаленность модулей $|(k, \omega)|$ при $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ от нуля. Выражения (k, ω) называются *малыми знаменателями*.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1984; [2] его же, Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989; [3] Нехорошев Н. Н., «Труды Моск. математич. об-ва», 1972, т. 26, с. 181–98.

Н. Н. Нехорошев.

ОБОБЩЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Гипергеометрическая функция.*

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ – математическое понятие, расширяющее классическое понятие функции. На О. ф. распространяются основные линейные операции математич. анализа, причем формулировки приобретают простую замкнутую форму. С физич. точки зрения О. ф. отражают невозможность абсолютно точного измерения значения физич. величины в точке, поскольку всякий измерительный прибор имеет свою разрешающую способность и показывает нек-рый усредненный «размазанный» результат.

О. ф. впервые были систематически использованы в 20-х гг. 20 в. П. Дираком (P. Dirac) в его формулировке квантовой механики. В 30-х гг. С. Л. Соболев заложил основы теории О. ф. (см. *Соболева пространство*) и применил их при изучении задачи Коши уравнений гиперболич. типа. Развернутая теория О. ф. была построена в конце 40-х гг. Л. Шварцем (L. Schwartz) (см. *Шварца распределение*), и с тех пор О. ф. активно используются в квантовой теории поля, в уравнениях с частными производными, в теории функций многих комплексных переменных и в других областях математики и физики.

По определению, О. ф. есть линейный непрерывный функционал на нек-ром пространстве основных функций (иначе, тест-функций) $\mathcal{F}$, то есть элемент сопряженного пространства $\mathcal{F}'$. Выбор основного пространства определяется характером решаемой задачи. Обычно используемые основные пространства удовлетворяют следующим условиям: (а) основные функции $\Phi\in\mathcal{F}$ суть комплекснозначные функции класса $C^{(\infty)}$ с общей областью определения $O\subset\mathbb{R}^n$, причем производные $D_j\Phi$ также принадлежат $\mathcal{F}$, $D_j=\partial/\partial x_j$, $j=1, \ldots, n$; (б) среди основных функций $\Phi\in\mathcal{F}$ имеются финитные (то есть с компактным носителем), причем их достаточно много (они плотны в $\mathcal{F}$ и существует *разложение единицы*); (в) на $\mathcal{F}$ определена структура линейного локально выпуклого топологич. пространства с хорошими свойствами (полнота, ядерность, монтелевость и т. п.), влекущая равномерную сходимость основных функций и всех их производных на компактах в O и непрерывность дифференцирований D_j.

Значение О. ф. $f\in\mathcal{F}'$ на основной функции $\Phi\in\mathcal{F}$ обозначается через

$$(f,\Phi)=\int f(x)\Phi(x)\,d^nx,$$

где символич. интеграл справа указывает на стандартный способ представления локально суммируемой функции в виде О. ф. (в последнем случае О. ф. называется регулярной). В общем случае значение О. ф. $f(x)$ в точке x не определено, так что аргумент у О. ф. указывает лишь на обозначение аргумента у основных функций. Свойство (а) позволяет определить производную D_jf О. ф. f правилом

$$(D_jf,\Phi)=-(f,D_j\Phi),\ \Phi\in\mathcal{F},$$

$j=1, 2, \ldots, n$, и обеспечивает принадлежность О. ф. D_jf тому же пространству $\mathcal{F}'$, что и f. Таким образом, каждая О. ф. имеет производные всех порядков. Свойство (б) дает возможность говорить о равенстве нулю О. ф. f на открытом подмножестве исходной области определения O и определить носитель $\operatorname{supp} f$ О. ф. f как наименьшее замкнутое подмножество области O, вне к-рого она равна нулю. Свойство (в) позволяет описывать структуру О. ф., напр. представлять их (возможно локально) в виде производных конечного порядка от непрерывных функций. Часто топология явным образом не вводится, а указывается лишь индуцируемая ею сходимость основных функций. Накладывая на основные функции дополнительные ограничения, можно выделять специальные классы О. ф. Так, ограничивая рост основных функций, выделяют О. ф., имеющие различные интегральные преобразования (см. *Фурье преобразование, Лапласа преобразование* и т. п.), увеличивая гладкость основных функций, получают О. ф. с высокими сингулярностями (см. *Ультрараспределение, Аналитический функционал*).

Основное пространство распределений Шварца плотно и непрерывно вложено в основные пространства многих классов О. ф., часто встречающихся в приложениях, так что пространство распределений Шварца является естественным объемлющим пространством для таких классов О. ф. Поэтому часто под О. ф. имеют в виду распределения Шварца.

Примеры (не конкретизируя класс О. ф., при желании, можно считать, что это, напр., распределения Шварца).

1) Функция Хевисайда $\theta(x)$:

$$(\theta,\Phi)=\int_0^\infty\Phi(x)\,dx$$

– регулярная О. ф.; она задается локально суммируемой функцией $\theta(x)$, равной 0 при $x<0$ и равной 1 при $x>0$ ($n=1$).

2) Дельта-функция Дирака $\delta(x)$:

$$(\delta,\Phi)=\Phi(0)$$

есть единичная мера, сосредоточенная в нуле. Отметим, что при $n=1$ дельта-функция Дирака есть производная функции Хевисайда, то есть $\delta=\theta'$.

3) Функция $\frac{1}{x}$ ($n=1$) не является локально суммируемой, она порождает различные О. ф., называемые ее регуляризациями. Среди них

$$\left(p\frac{1}{x},\Phi\right)=\text{v.p.}\int\frac{\Phi(x)}{x}\,dx$$

(интеграл справа берется в смысле главного значения),

$$\left(\frac{1}{x+i0},\Phi\right)=\lim_{y\to+0}\int\frac{\Phi(x)}{x+iy}\,dx,$$

и аналогичная О. ф. $\frac{1}{x+i0}$.

4) Функция $\frac{1}{|x|}$ локально суммируема в $\mathbb{R}^3$ и определяет О. ф., причем

$$\Delta\frac{1}{|x|}=-4\pi\delta(x),$$

где Δ – оператор Лапласа.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, 2 изд., М., 1959; [3] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1–2, P., 1950–51 (nouv. éd., P., 1978). *В. В. Жаринов.*

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ регулярная – *обобщенная функция* $f\in\mathcal{F}'$ вида:

$$(f,\Phi)=\int f(x)\Phi(x)\,d^nx,\quad \Phi\in\mathcal{F},$$

где $f(x)$ – локально суммируемая функция, $\mathcal{F}$ – основное пространство. *В. В. Жаринов.*

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ медленного роста – см. *Умеренное распределение.*

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ с компактным носителем – см. *Финитное распределение.*

ОБОБЩЕННОЕ ГАУССОВО ПОЛЕ – см. *Гауссово случайное поле.*

ОБОБЩЕННОЕ МАРКОВСКОЕ ПОЛЕ – см. *Случайное поле.*

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ – решение дифференциального уравнения в классе *обобщенных функций.* В нормальной ситуации всякое классич. решение данного уравнения является и его О. р. Однородные уравнения эллиптич. типа имеют лишь классич. решения (это свойство их полностью характеризует), другие имеют широкие спектры истинно О. р. Впервые О. р. были введены в 30-х гг. С. Л. Соболевым при изучении уравнений гиперболич. типа.

Обобщенным решением в пространстве обобщенных функций $\mathcal{F}'$ линейного дифференциального уравнения

$$P(D)u\equiv\sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha D^\alpha u=f$$

называется всякая обобщенная функция $u\in\mathcal{F}'$, обращающая это уравнение в верное равенство, то есть такая, что

$$(P(D)u,\Phi)\equiv\sum_{|\alpha|=0}^m\left(u,(-1)^{|\alpha|}D^\alpha c_\alpha\Phi\right)=(f,\Phi),\quad \Phi\in\mathcal{F}.$$

Здесь мультииндекс $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, c_α – мультипликаторы в $\mathcal{F}'$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j=\partial/\partial x_j$, $f\in\mathcal{F}'$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. В. Жаринов.*

ОБОБЩЕННОЕ СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ, обобщенный случайный процесс, – *случайная функция* на гладком

многообразии G, типичными реализациями которой являются *обобщенные функции*, заданные на этом многообразии G. Точнее, пусть G – бесконечно гладкое многообразие и $D(G)$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, определенных на G, с обычной топологией равномерной сходимости последовательностей равномерно финитных функций и всех их производных. Тогда на G определено О. с. п., если задано непрерывное линейное отображение

$$D(G) \to L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu),\ \varphi \to f_\varphi,\ \varphi \in D(G),$$

пространства $D(G)$ в пространство $L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ случайных величин, определенных на нек-ром вероятностном пространстве Ω с выделенной σ-алгеброй его подмножеств $\mathfrak{B}$ и вероятностной мерой μ, определенной на $\mathfrak{B}$; $L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ снабжено топологией сходимости по мере (см. [7]). В случае, когда вероятностным пространством является пространство $D'(G)$ обобщенных функций на G с σ-алгеброй $\mathfrak{B}_0$, порожденной цилиндрич. множествами в $D'(G)$, а отображение задается формулами:

$$f_\varphi(T) = (T, \varphi),\ T \in D'(G),\ \varphi \in D(G),$$

О. с. п. $\{f_\varphi, \varphi \in D'(G)\}$ называется каноническим. Оказывается, что любое О. с. п. на конечномерном многообразии G вероятностно изоморфно нек-рому (единственному) канонич. случайному полю на G (см. [2]).

Приведенное здесь определение допускает ряд естественных модификаций: напр., можно рассмотреть О. с. п. с векторными значениями или вместо пространства $D(G)$ использовать в определении какое-нибудь более обширное пространство основных функций на G (скажем, в случае $G = \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, пространства $S(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными, быстрее любой отрицательной степени $|x|^k$, $k = -1, -2, -3, \ldots, x \in \mathbb{R}^n$).

Понятие О. с. п. включает в себя классич. *случайные поля* и *случайные процессы*, реализациями к-рых являются обычные функции. Это понятие возникло в середине 50-х гг., когда обнаружилось, что многие естественные стохастич. образования не могут быть достаточно просто выражены в терминах классич. случайных полей, а на языке О. с. п. имеют простое и изящное описание. Так, напр., любая положительно определенная билинейная форма на $D(\mathbb{R}^n)$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} W(x_1, x_2)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\,dx_1 dx_2,$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n)$, $W(x_1, x_2)$ – положительно определенная симметрич. обобщенная функция двух переменных, однозначно определяет гауссовское О. с. п. $\{f_\varphi, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$ на $\mathbb{R}^n$ (с нулевым средним) так, что ковариация этого поля

$$\int f_{\varphi_1} f_{\varphi_2}\,d\mu = (\varphi_1, \varphi_2)$$

(μ – соответствующая этому полю вероятностная мера в $D'(\mathbb{R}^n)$). Это О. с. п. оказывается классическим лишь при достаточно хорошей функции $W(x_1, x_2)$ (напр., непрерывной и ограниченной). Другие примеры: О. с. п. на $\mathbb{R}^n$ с независимыми значениями (см. [2]) или так наз. автомодельные случайные поля на $\mathbb{R}^n$ (см. [6]), среди к-рых вообще нет классич. полей.

Интерес к исследованию О. с. п. (особенно марковских случайных полей) возрос в последнее время из-за обнаруженной в начале 70-х гг. связи между задачей построения квантового физич. поля и построением марковских О. с. п. на $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ (см. [5]).

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Гельфанд И. М., «Доклады АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853–56; [4] Ito Kiyosi, «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1954, v. 28, № 3, p. 209–23; [5] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [6] Добрушин Р. Л., в сб.: Многокомпонентные случайные системы, М.– Л., 1978, с. 179–213; [7] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи математич. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67–122.

Р. А. Минлос.

ОБОБЩЕННЫЕ ИМПУЛЬСЫ – физические величины p_i, определяемые формулами:

$$p_i = \partial T/\partial \dot{q}_i \text{ или } p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i,$$

где T – кинетическая энергия, а L – *Лагранжа функция* данной механической системы, выраженные через обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости $\dot{q}_i$. Размерность О. и. зависит от размерности обобщенной координаты. Если q_i имеет размерность длины, то p_i – размерность обычного импульса, то есть произведения массы на скорость; если же координатой q_i является угол (величина безразмерная), то p_i имеет размерность момента количества движения, и т. д.

ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ – независимые параметры q_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, любой размерности, число которых равно числу s степеней свободы механической системы и которые однозначно определяют положение системы. Закон движения системы в О. к. дается s уравнениями вида

$$q_i = q_i(t),$$

где t – время. О. к. пользуются при решении многих задач, особенно когда система подчинена связям, налагающим ограничения на ее движение. При этом значительно уменьшается число уравнений, описывающих движение системы, по сравнению, напр., с уравнениями в декартовых координатах. В системах с бесконечно большим числом степеней свободы (сплошные среды, физич. поля) О. к. являются особые функции пространственных координат и времени, называемые *потенциалами, волновыми функциями* и т. п.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ – см. *Координаты.*

ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ – величины, играющие роль обычных сил, когда при изучении равновесия или движения механической системы ее положение определяется *обобщенными координатами.* Число О. с. равно числу s степеней свободы системы; при этом каждой обобщенной координате q_i соответствует своя О. с. Q_i. Значение О. с. Q_1, соответствующей координате q_1, можно найти, вычислив элементарную работу δA_1 всех сил на возможном перемещении системы, при к-ром изменяется только координата q_1, получая приращение δq_1. Тогда $\delta A_1 = Q_1 \delta q_1$, то есть коэффициент при δq_1 в выражении δA_1 и будет О. с. Q_1. Аналогично вычисляются $Q_2, Q_3, \ldots, Q_s$.

Размерность О. с. зависит от размерности обобщенной координаты. Если q_i имеет размерность длины, то Q_i – размерность обычной силы; если q_i – угол, то Q_i имеет размерность момента силы, и т. д. При изучении движения механич. системы О. с. входят вместо обычных сил в *Лагранжа уравнения* механики, а при равновесии все О. с. равны нулю.

ОБОБЩЕННЫЙ ВЕКТОР СОСТОЯНИЯ – см. *Вектор состояния.*

ОБОБЩЕННЫЙ ИМПУЛЬС – ковектор на конфигурационном пространстве X механической системы, то есть линейная функция на касательном пространстве к X. Если q – координата на X, то dq называется импульсом, соответствующим координате q.

М. Э. Казарян.

ОБОБЩЕННЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС – см. *Обобщенное случайное поле, Случайный процесс.*

ОБОБЩЕННЫЙ СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР – см. *Спектр оператора.*

ОБОБЩЕННЫЙ ХАРАКТЕР представления – *обобщенная функция* $\chi(g)$ на G, определяемая равенством

$$\int_G \chi(g) f(g)\,dg = \operatorname{tr} \int_G f(g) T_g\,dg.$$

Это определение введено в связи с тем, что для бесконечномерного представления T группы Ли G след $\mathrm{tr}(T_g)$ оператора T_g не существует и поэтому обычное определение *характера* конечномерного представления непригодно. Однако для многих представлений имеют след операторы вида:

$$\int_G f(g)T_g\,dg,$$

где $f(g)$ – гладкая функция, равная 0 вне нек-рого компактного множества, а dg – мера Хаара. Приведенное выше определение О. х. представления пригодно, в частности, для любых неприводимых представлений полупростых (тогда $\chi(g)$ оказывается кусочно непрерывной функцией), а также нильпотентных групп Ли. *Ю. А. Неретин.*

ОБРАЗУЮЩАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА – см. *Эргодическая теорема.*

ОБРАЗУЮЩЕЕ ПОКРЫТИЕ – см. *Символическая динамика.*

ОБРАТИМАЯ СИСТЕМА – *динамическая система*, переходящая в систему с обратным направлением течения времени под действием некоторой инволюции фазового пространства (то есть преобразования G, для которого $G(G(x))\equiv x$). В частности, дифференциальное уравнение $\dot{x}=V(x)$ и векторное поле V (более общо, дифференциальное уравнение $\dot{x}=V(x,\ t)$) обратимы относительно инволюции G, если это уравнение инвариантно относительно замены $t\to -t$, $x\mapsto G(x)$; взаимно однозначное отображение A пространства на себя обратимо относительно инволюции G, если $GA=A^{-1}G$.

Напр., уравнение Ньютона $\ddot{r}=F(r)$, $r\in\mathbb{R}^N$, обратимо относительно инволюции $G\colon (r,\ v)\mapsto (r,\ -v)$, где $v=\dot{r}$; поворот плоскости обратим относительно отражения относительно любой прямой, проходящей через центр поворота.

Изучение О. о. было начато работами А. М. Ляпунова (1892) и Дж. Биркгофа (G. Birkhoff, 1915).

Уравнение $\dot{x}=V(x,\ t)$ обратимо относительно G, если и только если соответствующее семейство F_τ^t фазового потока за любое время от τ до t удовлетворяет тождеству $GF_\tau^t\equiv F_{-\tau}^{-t}G$. В частности, автономное уравнение $\dot{x}=V(x)$ обратимо относительно G, если и только если соответствующее преобразование g^t фазового потока за любое время t обратимо относительно G. Симметричным циклом векторного поля V, обратимого относительно G, называется замкнутая G-инвариантная траектория этого поля. Функция последования симметричного цикла обратима, если соответствующее сечение Пуанкаре выбрано G-инвариантным (см. [2], [4], [6]).

Обратимые дифференциальные уравнения и диффеоморфизмы обнаруживают очень большое сходство с гамильтоновыми уравнениями и точными симплектич. диффеоморфизмами соответственно. Это сходство распространяется на:

1) спектр и нормальные формы линейных О. с., а также параметрич. резонанс в линейных О. с. [2], [3];

2) нормальные формы О. с. типа Пуанкаре – Дюлака – Биркгофа в окрестности положения равновесия [1], [2];

3) поведение симметричных циклов обратимых векторных полей [2], [4], [6];

4) структуру периодич. орбит обратимых диффеоморфизмов [2], [6];

5) свойства условно-периодич. движений в О. с. [1], [2], [5]–[7]; на О. с. переносится большая часть *КАМ-теории*, изучающей инвариантные торы гамильтоновых систем.

К пункту 3) относятся следующие результаты. Симметричные циклы векторных полей общего положения на $(p+q)$-мерном многообразии, обратимых относительно инволюции с подмногообразием неподвижных точек размерности $p\geqslant q-1$, объединяются в гладкие $(p-q+1)$-параметрич. семейства симметричных циклов, структурно устойчивые относительно малых обратимых шевелений поля. Если λ – мультипликатор симметричного цикла, то λ^{-1} – также мультипликатор. На О. с. распространяется теорема Ляпунова о центре [2], [4], [6], причем бифуркации семейств симметричных циклов при прохождении резонанса такие же, что и семейств периодич. решений в гамильтоновых системах.

Обобщением О. с. являются слабо обратимые системы (см. [2], [3], [6]), переходящие в системы с обратным направлением течения времени под действием нек-рого (не обязательно инволютивного) диффеоморфизма фазового пространства.

Лит.: [1] Moser J. K., «Ann. Math. Stud.», v. 77 (Stable and random motions in dynamical systems), Princeton, 1973, ch. 11, V; [2] Sevryuk M. B., «Lect. Notes Math.», v. 1211, B., 1986; [3] Якубович В. А., Старжинский В. М., Параметрический резонанс в линейных системах, М., 1987, гл. 11, § 1; [4] Devaney R. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 218, p. 89–113; [5] Scheurle J., «Arch. Rat. Mech. Anal.», 1987, v. 97, № 2, p. 103–39; [6] Arnol'd V. I., Sevryuk M. B., in: Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics, M., 1986, p. 31–64; [7] Севрюк М. Б., в кн.: Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 14, М., 1989, с. 109–24. *М. Б. Севрюк.*

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА Стефана – см. *Стефана задача.*

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА для аналитических функций – задача об отыскании области и аналитической в ней функции по заданным на границе области значениям функции. Точнее, внутренняя (внешняя) О. к. з. (см. [1], [2]) состоит в определении неизвестной границы $\gamma\subset\mathbb{C}$ заданной длины l, ограничивающей конечную (бесконечную) область D_z^+ (D_z^-), и аналитической в D_z^+ функции $w=w(z)$ таких, что на неизвестной границе удовлетворяются краевые условия:

$$\mathrm{Re}\,w(z)|_\gamma=f_1(s),\ \mathrm{Im}\,w(z)|_\gamma=f_2(s),\ 0\leqslant s\leqslant l, \qquad (1)$$

где s – длина дуги кривой γ. Предполагается, что требования, накладываемые на функции f_1 и f_2, гарантируют жордановость и определенную гладкость замкнутой кривой

$$L=\{w\in\mathbb{C}\,|\,w=f_1(s)+f_2(s),\ 0\leqslant s\leqslant l\}.$$

К таким задачам приводят математич. модели аэродинамики, теории фильтрации, магнитной гидродинамики, теории взрыва и т. д. (см. [3], [4]).

Метод решения О. к. з., основанный на теории конформных отображений, заключается в установлении соответствия между длинами дуг ds неизвестной границы γ и

$$d\sigma=\sqrt{f_1'(s)+f_2'(s)}\,ds=\sqrt{|\nabla f|^2}\,ds$$

известной кривой L с последующим решением *Дирихле задачи* в известной области D_w для действительной части функции

$$\alpha(w)=\ln z'(w)$$

по известным граничным данным

$$\alpha|_L=\ln|ds/d\sigma|=-1/2\ln|\nabla f|^2.$$

Решение внутренней О. к. з. существует и допускает интегральное представление вида:

$$z(w)=e^{i\beta}\int_a^w \exp\varphi(-1/2\ln|\nabla f|^2)(w)\,dw+C, \qquad (2)$$

где φ – оператор Шварца в области D_w^+, константы $\beta\in\mathbb{R}$, $C\in\mathbb{C}$. Построение функции $w(z)$ в уже найденной области $D_z^+=z(D_w^+)$ не составляет труда.

Общий вид представления (2) показывает, что искомая область D_z^+ определяется с точностью до движения. Совокупность подобных областей, отличающихся лишь положением на плоскости, естественно рассматривается как одно решение. Для внутренней О. к. з. такое решение единственно.

Внешняя О. к. з. характеризуется тем, что бесконечно удаленная точка принадлежит искомой области D_z^-. Приме-

няя описанный метод решения, приходится восстанавливать функцию $z'(w)$, аналитическую в D_w^- кроме точки $w_0 = w(\infty)$, где она имеет полюс 2-го порядка. Соотношение $\mathrm{Res}_{w_0} z'(w) = 0$, гарантирующее отсутствие логарифмич. особенности у $z(w)$ в точке w_0, является условием замкнутости неизвестной границы и служит уравнением для отыскания w_0. Оно разрешимо, вообще говоря, не единственным способом, а внешняя О. к. з. в силу этого может иметь несколько существенно различных решений. В то же время внешняя О. к. з. однозначно разрешима в классах областей с выпуклыми границами, звездными границами и в нек-рых более широких классах.

В модельных задачах математич. физики используются способы задания граничных данных функции $w(z)$ через другие параметры (полярный радиус, полярный угол, декартовы координаты и т. д.), вносящие изменения в схему решения О. к. з. Рассматриваются О. к. з. в многосвязных областях, на римановых поверхностях, для функций с особенностями полярного и логарифмич. характера и т. д. (см. [2], [4]). При этом, как правило, сохраняется общий метод решения, тогда как используемый аппарат усложняется. Изучаются так наз. смешанные О. к. з. (см. [3], [4]), когда граница искомой области состоит из известной части границы γ_1, где задана действительная или мнимая часть $w(z)$, и неизвестной части границы γ_2, где заданы краевые условия (1). В настоящее время эти задачи исследованы в отдельных частных случаях. В прикладных задачах требование жордановости неизвестной границы означает физич. реализуемость решения, в связи с чем встает проблема выделения однолистных решений О. к. з. по исходным краевым условиям (1). Имеются определенные достижения в этом направлении (см. [5]), но до окончательного решения проблемы далеко.

Лит.: [1] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [2] Тумашев Г. Г., Нужин М. Т., Обратные краевые задачи, 2 изд., Казань, 1965; [3] Монахов В. Н., Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосибирск, 1977; [4] Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т. и др., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 18, М., 1980, с. 67–124; [5] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 25, М., 1987, с. 3–121. *Ю. Е. Хохлов.*

ОБРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВА – см. *Колмогорова уравнение*, *Диффузионный процесс*, *Маркова цепь*, *Маркова цепь* с непрерывным временем, *Марковский процесс*, *Статистическая гидромеханика*.

ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ МЕТОД – метод интегрирования нелинейных дифференциальных и конечноразностных уравнений, открытый К. Гарднером, Дж. Грином, М. Крускалом и Р. Миурой в работе [1], посвященной решению задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриса:

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx},\ u(x,0) = q(x), \tag{1}$$

в классе быстро убывающих при $|x| \to \infty$ функций.

Основная идея метода состоит в замене искомого решения $u = u(x, t)$ данными рассеяния $\{\varkappa_p(t),\ m_p(t),\ r(k, t)\}$ семейства операторов Шредингера

$$L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t), \quad (-\infty < x < \infty). \tag{2}$$

Эффективность метода обусловлена тем, что данные рассеяния удовлетворяют линейным уравнениям

$$\dot{\varkappa}_p = 0,\ \dot{m}_p = 8\varkappa_p^3 m_p,\ \dot{r} = 8ik^3 r, \tag{3}$$

если потенциалы $u(x, t)$ семейства (2) являются быстро убывающими решениями уравнения Кортевега – де Фриса, и наоборот. Поэтому для решения задачи Коши (1) достаточно проделать следующие операции:

1) найти данные рассеяния $\varkappa_p(0)$, $m_p(0)$, $r(k, 0)$ оператора

$$L(0) = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x);$$

2) используя уравнения (3), перейти к данным рассеяния операторов (2) по формулам

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_p(t) &= \varkappa_p(0), \\ m_p(t) &= m_p(0)e^{8\varkappa_p^3 t}, \\ r(k,t) &= r(k,0)e^{8ik^3 t}; \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

3) решить (при каждом t) соответствующие обратные задачи рассеяния.

Таким образом, решение задачи Коши дается формулой

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K(x,x;t),$$

где $K(x, y; t)$ – решение линейного интегрального уравнения

$$F(x+y;t) + K(x,y;t) + \int_x^\infty F(y+\xi;t) + K(x,\xi;t)\,d\xi = 0,$$

в к-ром

$$F(z;t) = \sum\nolimits_p m_p(0)\,e^{-\varkappa_p z + 8\varkappa_p^3 t} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k,0)\,e^{ikz+8ik^3 t}\,dk.$$

Следующий важный шаг в развитии О. з. р. м. был сделан П. Лаксом [2], введшим понятие $(L-A)$-пары (пары Лакса), и В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [3], распространившими О. з. р. м. на другие физически важные уравнения. Операторы L и A, зависящие от параметра t, образуют пару Лакса, если их коммутатор $[L, A] = LA - AL$ и производная $\dot{L} = \frac{dL}{dt}$ являются операторами умножения на функции.

Напр., оператор Шредингера

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t) \tag{4}$$

вместе с оператором

$$A = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right) \tag{5}$$

образуют пару Лакса, так как $\dot{L}$ есть оператор умножения на функцию $\dot{u} = u_t$, а коммутатор $[L, A]$ равен оператору умножения на функцию $6uu_x - u_{xxx}$. Поэтому оператор $\dot{L} - [L, A]$ является оператором умножения на функцию $u_t - 6uu_x + u_{xxx}$ и обращается в нуль тогда и только тогда, когда функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега – де Фриса, то есть когда оно эквивалентно уравнению

$$\dot{L} = [L, A] \tag{6}$$

для операторов (2), (5). Представление нелинейных уравнений в таком виде называется *Лакса представлением*. Если операторы L, A удовлетворяют уравнению (6), то при каждом $z \in \mathbb{C}$ оператор $\frac{\partial}{\partial t} + A$ переводит решения уравнения

$$L(y) = zy \tag{7}$$

в решения этого же уравнения. Поскольку уравнение Кортевега – де Фриса эквивалентно уравнению (6) для операторов (4), (5), оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + A = \frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - 3u_x(x,t) \tag{8}$$

переводит решения уравнения Шредингера

$$-y_{xx} + u(x,t)\,y = k^2 y \tag{9}$$

в решения этого же уравнения, если функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега – де Фриса.

Если решение $u(x, t)$ быстро убывает при $|x| \to \infty$, то уравнения (9) имеют решения $e^+(k, x)$, $e^-(k, x)$ (см. *Йоста*

решения), однозначно определенные асимптотич. условиями

$$e^+(k,x)=e^{ikx}(1+o(1)),\ \operatorname{Im}k\geqslant 0,\ x\to+\infty,$$
$$e^-(k,x)=e^{ikx}(1+o(1)),\ \operatorname{Im}k\leqslant 0,\ x\to-\infty,$$

и оператор (8) переводит их в решения того же уравнения (9) с асимптотиками

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)e^+(k,x)=-4ik^3e^{ikx}(1+o(1)),\quad \operatorname{Im}k\geqslant 0,\quad x\to+\infty,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)e^-(k,x)=-4ik^3e^{ikx}(1+o(1)),\quad \operatorname{Im}k\leqslant 0,\quad x\to-\infty.$$

В силу единственности решений с такими асимптотиками следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\right)e^{\pm}(k,x)=-4ik^3e^{\pm}(k,x),\quad \pm\operatorname{Im}k\geqslant 0, \tag{10}$$

то есть решения Йоста кроме уравнения (9) удовлетворяют также уравнению

$$y_t=-4y_{xxx}+6u(x,t)\,y_x+(3u_x(x,t)-4ik^3)\,y, \tag{11}$$

если функция $u(x,t)$ является быстро убывающим решением уравнения Кортевега – де Фриса.

При вещественных значениях $k\neq 0$ решения $e^+(-k,x)$, $e^+(k,x)$ линейно независимы и решение $e^-(-k,x)$ является их линейной комбинацией

$$e^-(-k,x)=ae^+(-k,x)+be^+(k,x) \tag{12}$$

с коэффициентами $a=a(k,t)$, $b=b(k,t)$, не зависящими от x. Коэффициент $a(k,t)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}k>0$, где он имеет конечное число корней $i\varkappa_p=i\varkappa_p(t)$, $\varkappa_p>0$. Спектр оператора (4) состоит из простых отрицательных собственных значений $\lambda_p(t)=(i\varkappa_p(t))^2$ и двукратного непрерывного спектра, занимающего положительную полуось. Собственными функциями дискретного спектра являются решения

$$e^-(-i\varkappa_p,x)=b_p(t)\,e^+(i\varkappa_p,x), \tag{13}$$

а собственными функциями непрерывного спектра – решения

$$e^+(k,x),\ e^+(-k,x),\ -\infty<k<\infty.$$

Набор величин

$$\left.\begin{aligned}\varkappa_p(t),\ m_p(t)=b_p(t)\left(i\frac{\partial a(k,t)}{\partial k}\right)^{-1}\Big|_{k=i\varkappa_p(t)},\\ r(k,t)=\frac{b(k,t)}{a(k,t)},\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где

$$a(k,t)=a(k,0),\quad \varkappa_p(t)=\varkappa_p(0), \tag{15}$$

$$b(k,t)=b(k,0)e^{8ik^3t},\quad b_p(t)=b_p(0)e^{8\varkappa_p^3t}, \tag{15'}$$

называется данными рассеяния оператора (4).

Операторы (4) образуют изоспектральное семейство, если их потенциалы $u(x,t)$ являются быстро убывающими решениями уравнения Кортевега – де Фриса. Формулы (3') для данных рассеяния этого семейства являются очевидным следствием равенств (14), (15).

О. з. р. м. применим и к другим нелинейным уравнениям, если они допускают представление Лакса и для соответствующих L-операторов может быть поставлена и решена обратная задача рассеяния.

Вместо представления Лакса часто проще записывать нелинейные уравнения в форме условия совместности переопределенных систем уравнений вида:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=V(x,t,k)\Psi,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial t}=U(x,t,k)\Psi, \tag{16}$$

где U, V – квадратные матрицы-функции n-го порядка и $\Psi=\Psi(x,t,k)$ – n-мерная вектор-функция. Условие совместности переопределенной системы (16) имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial t}+[U,V]=0; \tag{17}$$

оно является системой нелинейных уравнений, к-рым должны удовлетворять элементы матриц U, V. Напр., уравнения (9), (11), к-рым удовлетворяют решения Йоста, эквивалентны системе уравнений вида (16) для вектор-функции $\Psi=\begin{Vmatrix}y\\ y_x\end{Vmatrix}$ с матрицами

$$U=\begin{Vmatrix}-u_x-4ik^3 & 2u+4k^2\\ -u_{xx}+2u^2+2uk^2-4k^4 & u_x-4ik^3\end{Vmatrix},\quad V=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ u-k^2 & 0\end{Vmatrix}.$$

Левая часть уравнения совместности (17) для таких матриц равна

$$\begin{Vmatrix}0 & 0\\ u_t+u_{xxx}-6uu_x & 0\end{Vmatrix},$$

откуда следует, что система (9), (11) совместна тогда и только тогда, когда функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега – де Фриса.

Схема применения О. з. р. м. для решения задач Коши уравнений, являющихся условием совместности систем вида (16), остается прежней. Изменения связаны с постановкой и решением обратных задач для линейных систем, порождаемых первым из уравнений (16). Представление нелинейных уравнений в виде условия совместности (17) (оно часто называется представлением нулевой кривизны) особенно удобно при использовании задачи Римана для решения обратных задач.

Уравнения, решаемые О. з. р. м., имеют бесконечные наборы интегралов движения, то есть функционалов, определенных на функциях пространственной переменной x, значения к-рых на решениях этих уравнений не зависят от t. Напр., в случае уравнения Кортевега – де Фриса значение коэффициента $a(k)$ при каждом $k\in(-\infty,\infty)$ является нек-рым сложным функционалом от решения $u(x,t)$ и, согласно (15), не зависит от t. Этот коэффициент можно также использовать для построения счетного семейства интегралов движения, явно выражаемых через решение $u(x,t)$ и его производные по x. Из равенства (12), свойств вронскианов $W(f,g)=f_xg-fg_x$ и асимптотич. поведения решений Йоста при $x\to\pm\infty$ следует, что

$$\left.\begin{aligned}a(k)=\frac{1}{2ik}W(e^+(k,x),e^-(-k,x)),\\ b(k)=\frac{1}{2ik}W(e^-(-k,x),e^+(-k,x)).\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

При больших значениях $|k|$ решения Йоста представимы в виде

$$e^{\pm}(k,x)=\exp\left\{ikx+\int_{\pm\infty}^{x}\sigma^{\pm}(k,\xi)\,d\xi\right\},\quad \pm\operatorname{Im}k\geqslant 0,$$

где $\sigma^{\pm}(k,x)$ – решения уравнения

$$\sigma_x^{\pm}+2ik\sigma^{\pm}+(\sigma^{\pm})^2-u(x,t)=0,\ \pm\operatorname{Im}k\geqslant 0, \tag{19}$$

суммируемые в окрестности $\pm\infty$. Отсюда вытекают следующие представления коэффициентов $a(k)$, $b(k)$ через функции $\sigma^{\pm}(k,x)$:

$$\left.\begin{aligned}a(k)=\left(1+\frac{\sigma^+(k,x)-\sigma^-(-k,x)}{2ik}\right)\times\\ \times\exp\left\{-\int_x^{\infty}\sigma^+(k,\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{x}\sigma^-(-k,\xi)\,d\xi\right\},\\ b(k)=\frac{\sigma^-(-k,x)-\sigma^+(-k,x)}{2ik}\times\\ \times\exp\left\{-2ikx+\int_{-\infty}^{x}\sigma^-(-k,\xi)\,d\xi-\int_x^{\infty}\sigma^+(-k,\xi)\,d\xi\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

При вещественных k

$$\mathrm{Re}\,\sigma^{\pm}(k,x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{Im}\,\sigma^{\pm}(k,x)}{k}\right). \qquad (21)$$

Если потенциал $q(x)=u(x,0)$ принадлежит пространству Шварца (то есть бесконечно дифференцируем и при $|x|\to\infty$ убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$), то решение $u(x,t)$ задачи (1) при каждом $t\in(-\infty,\infty)$ тоже принадлежит этому пространству, а функции $\sigma^{\pm}(k,x)$ удовлетворяют одному и тому же асимптотич. равенству

$$\sigma^{\pm}(k,x) \simeq \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sigma_p(x,t)}{(2ik)^p}, \quad |k|\to\infty, \quad \pm\mathrm{Im}\,k\geqslant 0, \qquad (22)$$

в к-ром коэффициенты $\sigma_p=\sigma_p(x,t)$ являются многочленами от u, u_x, ..., $u_{x\ldots x}^{(p-1)}$ и принадлежат пространству Шварца. Функции $\sigma_p(x,t)$ с четными номерами $p=2q$ являются производными по x от функций, принадлежащих пространству Шварца. Поэтому

$$\ln a(k) \simeq -2\sum_{q=0}^{\infty}\frac{I_{q-1}(u)}{(2ik)^{2q+1}}, \qquad (23)$$

где

$$I_{q-1}(u) = \frac{1}{2}S_{2q+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{2q+1}(x,t)\,dx, \qquad (24)$$

причем это асимптотич. равенство выполняется независимо от того, удовлетворяет функция $u(x,t)$ уравнению Кортевега – де Фриса или нет.

Если $u(x,t)$ – решение задачи (1), то $\ln a(k)$, а значит, и коэффициенты $I_{q-1}(u)$ не зависят от t, то есть функционалы $I_{q-1}(u)$ образуют счетное семейство нетривиальных интегралов движения. Они называются полиномиальными интегралами движения, так как являются интегралами от полиномов относительно функции $u(x,t)$ и ее производных по x. Напр.,

$$\left.\begin{aligned} I_{-1}(u) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,dx, \quad I_0(u) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)^2\,dx,\\ I_1(u) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x(x,t)^2+2u(x,t)^3)\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (24')$$

Их можно также выразить через корни $i\varkappa_1$, $i\varkappa_2$, ..., $i\varkappa_m$, $\varkappa_j>0$, функции $a(k)$ и значения ее модуля $|a(\xi)|=|a(-\xi)|$ на вещественной оси:

$$I_{q-1}(u) = -\frac{2^{2q+1}}{2q+1}\sum_{p=1}^{m}\varkappa_p^{2q+1} + \\ + 2^{2q+1}\frac{(-1)^q}{\pi}\int_0^{\infty}k^{2q}\ln|a(k)|\,dk. \qquad (25)$$

В. Е. Захаров и Л. Д. Фаддеев [4] обнаружили глубокую связь между О. з. р. м. и теорией гамильтоновых систем, установив, что переход от функций $u(x,t)$ к данным рассеяния операторов (2) является переходом к переменным типа действие–угол в соответствующей гамильтоновой системе. Для уравнения Кортевега – де Фриса фазовым пространством служит пространство Шварца, снабженное кососкалярным произведением

$$[u,v] = \int_{-\infty}^{\infty}u(x)\frac{dv(x)}{dx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u\,dv - v\,du),$$

превращающим его в симплектич. линейное пространство M. Переменная x играет роль номера координаты, а значение $u(x)$ функции u является x-й координатой точки $u\in M$. Роль функций на фазовом пространстве играют функционалы $F(u)$ ($F: M\to\mathbb{R}^1$), а роль частных производных – вариационные производные $\frac{\delta F}{\delta u(x)}$, то есть такие обычные или обобщенные функции, что

$$F(u+\varepsilon)-F(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta F}{\delta u(x)}\varepsilon(x)\,dx$$

с точностью до членов более высокого порядка малости, чем $\varepsilon(x)$. Функционал F называется гладким, если его вариационная производная принадлежит пространству Шварца.

Пуассонова структура на M задается скобками Пуассона

$$\{F,\mathcal{J}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta\mathcal{J}}{\delta u(x)}\right)dx,$$

к-рые удовлетворяют обычным требованиям.

Гладкие функционалы H порождают уравнения с частными производными

$$\frac{d}{dt}u = \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta H}{\delta u(x)}\right), \qquad (26)$$

к-рые называются гамильтоновыми уравнениями движения с гамильтонианом H. Напр., согласно (24), (24′)

$$\frac{\delta I_{-1}}{\delta u(x)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\delta I_0}{\delta u(x)} = -u(x), \quad \frac{\delta I_1}{\delta u(x)} = -u_{xx}+3u^2$$

и гамильтоновы уравнения с гамильтонианами $H=I_p$, $p=-1, 0, 1, \ldots$, таковы:

$$u_t = 0,\ u_t = -u_x,\ u_t = 6uu_x - u_{xxx}.$$

Таким образом, уравнение Кортевега – де Фриса является гамильтоновым с гамильтонианом $H=I_1$.

Значения функционалов F на траекториях $u(x,t)$ гамильтоновых уравнений (26) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\}.$$

При замене координат $u(x)\to F(k)$ на фазовом пространстве новые координаты являются функционалами от старых. Поэтому уравнение (26) в новых координатах переходит в уравнение

$$\frac{dF(k)}{dt} = \{F(k),H\}.$$

Лежащий в основе О. з. р. м. переход от функций $u(x)$ к данным рассеяния является нек-рой заменой координат на фазовом пространстве. Вместо данных рассеяния в качестве новых координат удобнее взять величины

$$n(k) = \frac{2k}{\pi}\ln a(k)a(-k), \quad \varphi(k) = \frac{1}{2i}\ln\frac{b(k)}{b(-k)}, \quad 0<k<\infty,$$

$$N(p) = \varkappa_p^2, \quad \Phi(p) = -\ln b_p\bar{b}_p, \quad p=1,2,\ldots,m,$$

через к-рые легко выразить данные рассеяния.

Для того чтобы найти вид уравнения Кортевега – де Фриса в этих новых координатах, нужно вычислить скобки Пуассона между ними и гамильтонианом $H=I_1$, а так как, согласно (25), все функционалы I_p выражаются только через $n(k)$, $N(p)$, то достаточно вычислить всевозможные скобки Пуассона между новыми координатами:

$$\{n(k),n(k')\},\ \{n(k),\varphi(k')\},\ \ldots$$

Решения Йоста находятся из уравнений

$$e^{\pm}(k,y) = e^{iky} - \int_{\pm\infty}^{y}\frac{\sin k(\xi-y)}{k}u(\xi)e^{\pm}(k,\xi)\,d\xi$$

и при фиксированных k и y являются функционалами от потенциала $u(y)$; их вариационные производные:

$$\frac{\delta e^{+}(k,y)}{\delta u(x)} = \begin{cases}0, & x<y,\\ -s(k,y,x)e^{+}(k,x), & x>y,\end{cases}$$

$$\frac{\delta e^{-}(k,y)}{\delta u(x)} = \begin{cases}s(k,y,x)e^{-}(k,x), & x<y,\\ 0, & x>y,\end{cases}$$

где $s(k, y, x)$ – решение уравнения $-s'' + u(y)s = k^2 s$ при таких начальных данных в точке $y = x$:

$$s(k, x, x) = 0, \quad s'_y(k, x, x) = 1$$

и вариационные производные коэффициентов $a(k)$, $b(k)$:

$$\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = -\frac{e^-(-k,x)e^+(k,x)}{2ik}, \quad \frac{\delta b(k)}{\delta u(x)} = \frac{e^+(-k,x)e^-(-k,x)}{2ik}.$$

Вычисление скобок Пуассона сводится к вычислению соответствующих интегралов, в результате чего:

$$\{n(k), n(k')\} = \{\varphi(k), \varphi(k')\} = 0, \{n(k), \varphi(k')\} = \delta(k' - k).$$

Аналогично:

$$\{N(p), N(p')\} = \{\Phi(p), \Phi(p')\} = 0, \{N(p), \Phi(p')\} = \delta(p' - p),$$

а скобки Пуассона между $n(k)$, $\varphi(k)$ и $N(p)$, $\Phi(p)$ равны нулю; наконец:

$$\{n(k), H\} = \{N(p), H\} = 0, \{\varphi(k), H\} = 8k^3,$$
$$\{\Phi(p), H\} = -16N(p)^{3/2}.$$

Таким образом, в новых координатах уравнение Кортевега – де Фриса принимает такой вид:

$$\dot{n}(k) = \dot{N}(p) = 0, \ \dot{\varphi}(k) = 8k^3, \ \dot{\Phi}(p) = -16N(p)^{3/2},$$

то есть эти координаты являются переменными типа действие ($n(k)$, $N(p)$) – угол ($\varphi(k)$, $\Phi(p)$), а уравнение Кортевега – де Фриса – вполне интегрируемой гамильтоновой системой.

Гамильтонов подход к уравнениям, интегрируемым методом обратной задачи, всесторонне развит в [5]. Открытый С. П. Новиковым метод отыскания точных квазипериодич. решений этих уравнений, базирующийся на теории гамильтоновых систем, изложен в [6].

Лит.: [1] Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M., «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 10, p. 1095; [2] Lax P. D., «Comm. Pure Appl. Math.», 1968, v. 21, p. 467–90 (рус. пер.: «Математика», 1969, т. 13, № 5, с. 128–50); [3] Захаров В. Е., Шабат А. Б., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1971, т. 61, № 1, с. 118–34; [4] Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д., «Функциональный анализ и его прилож.», 1971, т. 5, № 4, с. 18–27; [5] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., Гамильтонов подход в теории солитонов, М., 1986; [6] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов, М., 1980; [7] Абловиц М., Сигур Х., Солитоны и метод обратной задачи, пер. с англ., М., 1987.

В. А. Марченко.

ОБРАЩЕНИЯ ФОРМУЛА – см. *Лапласа преобразование.*

ОБРЕЗАНИЯ ПРИНЦИП – см. *Регуляризация расходимостей.*

ОБХОД графа – см. *Граф.*

ОБЩАЯ МЕХАНИКА – см. *Механика.*

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ – см. *Относительности теория.*

ОБЩЕЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ – см. *Термодинамики законы.*

ОБЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ – термин, употребляющийся в оборотах типа: «объекты O в О. п. имеют свойство S (или свойства S_i)», «S есть свойство О. п.», «приведение в О. п.», точный смысл которых зависит от контекста. Обычно совокупность $\mathfrak{O}$ всех рассматриваемых объектов снабжается структурой, позволяющей считать нек-рые подмножества $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{O}$ «малыми», «пренебрежимыми» или, наоборот, «большими», «массивными»; тогда S считается «свойством О. п.», если обладающие им объекты образуют в $\mathfrak{O}$ «большое» подмножество. $\mathfrak{O}$ обычно имеет одну из следующих структур: а) алгебраич. многообразия, б) дифференцируемого многообразия (возможно, бесконечномерного), в) топологич. пространства, г) пространства с мерой. «Малыми» считаются соответственно: алгебраич. подмногообразия (меньшей размерности), дифференцируемые подмногообразия и конечные или счетные объединения таковых, нигде не плотные множества или множества первой категории, множества меры нуль. Множество $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{O}$ считается «большим», если дополнение к нему – «малое». Тогда говорят также, что $\mathfrak{A}$ содержит «большинство» объектов из $\mathfrak{O}$ или «почти все» эти объекты, а свойство S, выполняющееся для почти всех объектов, называется «типичным», или свойством О. п. Нередко говорят о «типичном» объекте, объекте О. п. или объекте, находящемся в О. п., подразумевая (иногда молчаливо), что имеется одно или несколько «типичных» свойств (каких именно – должно быть ясно из контекста) и что речь идет об объекте, обладающем этими свойствами.

В более слабом смысле «большое» подмножество в случаях в) и г) может означать подмножество второй категории в непустом открытом подмножестве пространства $\mathfrak{O}$ или подмножество положительной меры. Тогда говорят, что «этим множеством объектов нельзя пренебрегать» (но уже не говорят о «типичности»).

В случаях а) и б) «малое» множество $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{O}$ имеет положительную коразмерность codim $\mathfrak{A}$. Естественно считать, что $\mathfrak{A}$ тем меньше, чем больше codim $\mathfrak{A}$. Близкой к б) (и более общей) является ситуация, когда можно говорить об n-параметрич. семействах объектов $O(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, достаточно гладко зависящих от n (скалярных) параметров. Если почти все (в смысле в)) эти семейства не содержат объектов из $\mathfrak{A}$, то говорят, что codim $\mathfrak{A} > n$, а если это так при любом n, то полагают codim $\mathfrak{A} = \infty$.

На объекты могут действовать нек-рые операции g; их совокупность G обычно является группой или хотя бы полугруппой с единицей e. О «приведении объекта O в О. п. посредством операции g» говорят, когда из контекста ясно, что рассматриваются определенные свойства; «приведение» означает, что gO обладает этими свойствами. Как и $\mathfrak{O}$, G обычно снабжается структурой, позволяющей говорить о «большом» множестве операций или о том, что операцию g, переводящую O в объект gO с нужными свойствами, можно выбрать сколь угодно близкой к e («приведение в О. п. посредством малого шевеления»).

Напр., на плоскости прямая и окружность в О. п. либо не пересекаются, либо пересекаются в двух точках. В данном случае объект есть пара (a, b), где a – прямая, b – окружность, а в качестве операций можно взять евклидовы движения (либо одни только параллельные переносы), действующие на a при фиксированном b. Совокупность всевозможных объектов $\mathfrak{O}$ и группа G естественно снабжаются всеми названными выше структурами, и О. п. можно понимать согласно любому из описанных вариантов. Первоначально об О. п. говорили именно в подобных геометрич. вопросах, поэтому данный термин употребляется в разделах математики, являющихся геометрическими по своему характеру или по крайней мере испытавших значительное геометрич. влияние (хотя соображения, связанные с множествами второй категории или полной меры, используются за их пределами).

В алгебраич. геометрии простые примеры (вроде приведенного) легко разбираются с помощью теории исключения, причем основное поле может быть довольно произвольным (обычно алгебраически замкнутым). Имеются теоремы, связанные с О. п. в более сложных ситуациях; при изучении действия алгебраич. группы на алгебраич. многообразии большую роль играют точки О. п. (см. [1]).

Лит.: [1] Mumford D., Geometric invariant theory, B.– Hdlb.– N.Y., 1965; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967, приложение III; [3] Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978.

Д. В. Аносов.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение.*

ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Дифференциальное уравнение.*

ОБЪЕДИНЕННЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ – теории, рассматривающие с единой точки зрения сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия. Они часто называются теориями большого, или великого, объединения. Основой для построения О. т. п. является так наз. стандартная теория, основанная на калибровочной группе $G_{ст} = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Здесь $SU(3)$ описывает сильные взаимодействия *кварков* и *глюонов* в рамках *кван-*

товой хромодинамики, $SU(2)\times U(1)$ – группа электрослабых взаимодействий. Несмотря на то что справедливость стандартной модели подтверждается всеми экспериментами при энергиях порядка 100 ГэВ и она является самосогласованной перенормируемой теорией поля, ее нельзя считать окончательно завершенной теорией всех (за исключением гравитационного) взаимодействий элементарных частиц. Нек-рые недостатки стандартной модели таковы.

1) Выбор группы и мультиплетов частиц совершенно произволен и не следует из каких бы то ни было принципов.

2) Стандартная схема не объясняет наличия трех поколений фермионов.

3) Непонятно, почему константы сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий столь сильно отличаются друг от друга (при переданном импульсе $Q^2\sim 10$ ГэВ^2, $\alpha_s\simeq 0{,}3$, $\alpha_w\simeq 0{,}03$, $\alpha_{EM}\simeq 0{,}007$).

4) Параметр теории $\alpha_{EM}/\alpha_w=\sin^2\theta_w$ произволен.

5) Из-за наличия в стандартной схеме абелева $u(1)$-фактора в модели отсутствует квантование электрич. заряда (то есть нет ответа на вопрос, почему $|Q_e+Q_p|<10^{-21}$). Схема накладывает ограничение на разность зарядов пары фермионов, образующих $SU(2)$-дублет $Q_\nu-Q_e=1$, $Q_u-Q_d=1$. Кроме того, требование отсутствия γ^5-аномалий в калибровочных вершинах BBB и AAB (B и A – калибровочные поля группы $U(1)$ и $SU(2)$ соответственно) приводит к соотношению, связывающему гиперзаряды левых дублетов кварков и лептонов: $3Y_q+Y_l=0$; но этого недостаточно, чтобы связать заряды кварков и лептонов. Для получения правильных зарядов необходимо дополнительно потребовать еще $Q_\nu=0$.

6) Из-за наличия в модели большого числа свободных параметров совершенно произвольными и никак не связанными друг с другом оказываются массы кварков, лептонов, промежуточных и хиггсовских бозонов. Никак не фиксируются углы смешивания кварков.

7) Нек-рые величины, являющиеся произвольными в стандартной модели, оказываются неестественно малыми. Напр.,

$$\Lambda_{\text{ккд}}/M_w\sim 10^{-3}\ll 1,\ m_e/M_w\sim 10^{-5}\ll 1,$$

где

$$\Lambda_{\text{ккд}}\approx 100\ \text{МэВ}$$

– масштабный параметр квантовой хромодинамики.

Переход к О. т. п. позволяет решить, по крайней мере, ряд перечисленных проблем.

Под объединением трех видов взаимодействий понимается такая ситуация, когда глюоны, промежуточные бозоны и фотон являются различными компонентами единого обобщенного калибровочного поля W_μ, к-рые при определенных условиях (напр., при сверхвысоких энергиях) одинаково взаимодействуют с кварками и лептонами, к-рые, в свою очередь, также являются различными компонентами единого фермионного поля F (см. [1]–[5]). Для того чтобы все компоненты поля W_μ были равноправны, необходимо, чтобы существовали (групповые) преобразования, переводящие их друг в друга. Следовательно, поле W_μ должно быть неприводимым мультиплетом нек-рой простой группы G либо полупростой группы вида $G\times G$ с дискретной симметрией, обеспечивающей равенство калибровочных констант связи в ее простых компонентах.

Общие свойства объединенных теорий поля.

1) Константы связи стандартной модели. Единая группа, включающая сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия, обязательно должна быть нарушена тем или иным способом. Действительно, при низких энергиях все три вида взаимодействий существенно отличаются друг от друга. Если масштаб нарушения M (см. *Большого объединения масштаб*) группы G до $G_{\text{ст}}$ достаточно велик, то проблема различия трех калибровочных констант в стандартной модели решается автоматически. Константы связи зависят (логарифмически) от переданного импульса Q. При $Q^2\geqslant M^2$ все частицы в теории эффективно безмассовы и она является теорией, где есть всего одна константа связи. При энергиях меньше M эффективное взаимодействие симметрично относительно более узкой группы $G_{\text{ст}}$. При $Q^2\sim M^2$ константы связи, отвечающие трем группам стандартной модели, совпадают с точностью до групповых коэффициентов, а при $Q^2<M^2$ эволюционируют практически независимо. Константы связи групп $SU(3)$ и $SU(2)$ являются асимптотически свободными и увеличиваются при уменьшении Q^2. При этом $\alpha_s>\alpha_w$, поскольку «неабелевый заряд» группы $SU(3)$ больше, чем у $SU(2)$. Что касается $U(1)$-константы, то она уменьшается, и при малых энергиях реализуется иерархия $\alpha_s>\alpha_w>\alpha_{EM}$.

2) Квантование электрических зарядов. Электрич. заряд элементарных частиц является квантованным, если собственные значения оператора заряда, являющегося генератором ненарушенной группы $U(1)$ электромагнетизма, являются соизмеримыми (то есть их отношения есть рациональные числа). В О. т. п. заряд всегда квантован. В самом деле, пусть собственные значения Q несоизмеримы. В этом случае топологич. замыкание однопараметрич. подгруппы $\exp(i\alpha Q)$ должно быть компактной абелевой группой Ли с двумя параметрами как минимум и, тем самым, по крайней мере с одним дополнительным генератором Q', отличным от электрич. заряда. Иными словами, в теории должна присутствовать еще одна безмассовая частица помимо фотона с такой же константой связи в силу простоты группы, что недопустимо.

3) Угол Вайнберга. При высоких энергиях в О. т. п. имеется только одна калибровочная константа связи g. Поэтому константы стандартной модели выражаются через g и асимптотич. значение угла Вайнберга при высоких энергиях определяется только структурой объединяющей группы. Пусть T_3 – генератор третьей компоненты слабого изоспина, Q – генератор электрич. заряда в нек-ром мультиплете группы G. Тогда угол Вайнберга дается выражением

$$\sin^2\theta_w=(\mathrm{Tr}T_3^2)/(\mathrm{Tr}Q^2).$$

При переходе к низким энергиям необходимо учитывать перенормировку $\sin^2\theta_w$, к-рая является модельно зависимой.

4) Несохранение барионного числа. Характерным свойством О. т. п. является несохранение барионного и лептонного зарядов. Здесь кварки и лептоны находятся в одном мультиплете G и между ними возможны переходы, осуществляемые калибровочными или хиггсовскими бозонами. Несохранение барионного числа влечет нестабильность протона и нейтрона (см. *Распад протона*).

5) Массы кварков и лептонов. Кварки и лептоны находятся теперь в одном мультиплете единой группы, поэтому возникает связь между их массами.

Основные принципы построения моделей.

1. Единая группа G должна допускать включение $G_{\text{ст}}\subset G$, в частности ранг G должен быть не меньше четырех.

2. Мультиплеты группы G должны допускать включение в схему известных кварков и лептонов.

3. Полная теория должна быть перенормируемой, то есть во всяком случае свободной от треугольных аномалий. Это требование ограничивает структуру фермионных представлений группы G. Пусть все фермионы находятся в (приводимом) представлении f_L группы G, причем все они имеют левую спиральность (правые фермионы могут рассматриваться как левые антифермионы). Тогда аномалии отсутствуют, если: (1) f_L – самосопряженное представление; (2) f_L – комплексное представление, а группа G не является унитарной (модели такого типа основаны на исключительных группах E_6, E_7, E_8 или ортогональных группах $SO(4n+2)$); (3) теория векторноподобная, то есть имеются пары различных эквивалентных фермионных мультиплетов

левой и правой спиральности; (4) имеет место «случайное» сокращение аномалий между различными мультиплетами.

4. Помимо калибровочных бозонов и фермионов необходимым атрибутом любой объединенной модели являются скалярные поля, поскольку группа G должна быть нарушена тем или иным образом для симметрии стандартной модели $G_{\text{ст}}$. Естественным требованием к составу скаляров и их самодействию является то, что данным комплектом можно нарушить G до $G_{\text{ст}}$, а затем до $SU(3)\times U(1)_{\text{ЭМ}}$.

В О. т. п. возникают специфич. проблемы, отсутствовавшие в стандартной теории. Наиболее сложной из них является проблема калибровочных иерархий — огромного различия масштаба великого объединения и M_w. Частичное решение этой проблемы достигается в суперсимметричных теориях великого объединения (см. [6]), позволяющих связать фермионные и бозонные степени свободы.

Большой интерес представляют попытки объединения сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий с гравитационными в рамках теории супергравитации и суперструн (см. [8]) и теорий с привлечением дополнительных компактных пространственных измерений в духе *Калуцы — Клейна теории* (см. [9]).

Лит.: [1] Pati J., Salam A., «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. D 8, p. 1240–51; [2] Georgi H., Glashow S., «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 438–41; [3] Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R., «Rev. Mod. Phys.», 1978, v. 50, p. 721–44; [4] Langacker P., «Phys. Rep.», 1981, v. 72 C, p. 185–385; [5] Рубаков В. А., Шапошников М. Е., в кн.: XV Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 23 нояб.– 2 дек. 1982, Дубна, 1983, с. 5–142; [6] Witten E., «Nucl. Phys.», 1981, v. B 188, p. 513–54; [7] Ellis J., Ibanez L., Ross G., «Phys. Lett.», 1982, v. 113 B, p. 283–87; [8] Gross D., in: Proc. XXIV Int. Conf. on High Energy Phys., 1988, p. 310; [9] Witten E., «Nucl. Phys.», 1981, v. B 186, p. 412–28.

М. Е. Шапошников.

ОБЫЧНЫЙ УЗЕЛ — см. *Узел.*

ОВАЛ — см. *Клейнова поверхность.*

ОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР — см. *Линейный оператор.*

ОДЕТЫЙ ПРОПАГАТОР — см. *Пропагатор.*

ОДНОЛИСТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция f, регулярная или мероморфная в области B расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ и такая, что для всяких $z_1, z_2 \in B$, $z_1 \neq z_2$, выполняется соотношение $f(z_1) \neq f(z_2)$, то есть f отображает B в $\bar{\mathbb{C}}$ взаимно однозначно. При этом обратная функция $z = f^{-1}(w)$ также однолистна. Обобщением О. ф. являются многолистные функции (*p-листные функции*) — такие, к-рые в области B принимают каждая свое значение не более p раз.

При изучении О. ф. одним из основных является вопрос о возможности однолистного отображения заданной области B на заданную область B' (то есть отображения с помощью О. ф.). Необходимым условием существования такого отображения является равенство порядков связности областей B и B'. Если B и B' — односвязные области, границы к-рых содержат более одной точки, то это условие является и достаточным (см. *Римана теорема*) и задача сводится к отображению заданной области на круг. В связи с этим особую роль в теории О. ф. в односвязных областях играет класс S функций f, регулярных и однолистных в круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и имеющих разложение

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \quad z \in \Delta.$$

В случае многосвязных областей изучают отображение заданной многосвязной области на так наз. канонич. области.

Основные задачи теории О. ф. следующие: 1) изучение соответствия границ при *конформном отображении*; 2) получение *однолистности условий*; 3) решение различных экстремальных задач теории функций. *Н. А. Лебедев.*

ОДНОЛИСТНОСТИ УСЛОВИЯ — необходимые и достаточные условия взаимной однозначности *конформного отображения*, осуществляемого аналитической функцией. Критерием (локальной) однолистности функции f в нек-рой окрестности точки z_0 является условие $f'(z_0) \neq 0$. В то же время, пример локально однолистной в каждой точке $\mathbb{C}$ функции e^z, не являющейся (глобально) однолистной в любой подобласти $\mathbb{C}$, содержащей точки z_0 и $z_0 + 2\pi i$, показывает нетривиальность построения О. у. функции, заданной в области.

О. у. геометрич. характера, связанные со сравнением поведения функции в области и на границе в рамках так наз. принципа соответствия границ, в упрощенном варианте гласят, что наличие гомеоморфизма замкнутых жордановых кривых — границ ограниченных областей — при конформном отображении гарантирует его однолистность в области.

О. у. аналитич. характера связаны с общей проблемой описания голоморфной *однолистной функции* в единичном круге U в терминах тейлоровских коэффициентов разложения

$$f(z) = \sum a_n z^n.$$

Так, недавно доказанная гипотеза Бибербаха (L. Bieberbach, 1916) утверждает, что для однолистной функции f, нормированной в U соотношениями $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ (то есть принадлежащей классу S), имеют место точные оценки коэффициентов $|a_n| \leqslant n$. Имеются содержательные результаты о теле коэффициентов $\{a_2, \ldots, a_n\}$, о поведении комбинаций коэффициентов однолистных функций, хотя в полной мере охарактеризовать $f \in S$ по a_n не удается. В то же время необходимым и достаточным О. у. для нормированной, как выше, функции f является выполнение неравенства Грунского (H. Grunsky, 1939):

$$\left|\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}(f)\lambda_m\lambda_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^n/n$$

для произвольной последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2/n < \infty,$$

где коэффициенты $b_{mn}(f)$ определяются из разложения

$$\ln\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi} = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}(f) z^m \zeta^n, \quad z, \zeta \in U.$$

К сожалению, описанный критерий неконструктивен и практически неприемлем для приложений.

Имеются критерии однолистности интегрального характера, близкие к неравенству Грунского, напр. для однолистности голоморфной функции f в круге U необходимо и достаточно (см. [5]), чтобы

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_U \left|\frac{f'(z)f'(\zeta)}{(f(z)-f(\zeta))^2} - \frac{1}{(z-\zeta)^2}\right|^2 d\bar{z} \wedge dz \leqslant \frac{1}{(1-|\zeta|^2)}, \quad z, \zeta \in U.$$

Одно из самых глубоких описаний однолистных функций на уровне необходимых и достаточных О. у. основано на уравнении Левнера–Куфарева (K. Löwner, 1923; П. П. Куфарев, 1943):

$$\partial_t w = -wh(w, t), \ (w, t) \in U \times \mathbb{R}_+,$$

лежащем в основе *параметрического метода*. Эволюционное семейство решений $w = w^h(z, t)$ уравнения Левнера — Куфарева с начальным условием $w|_{t=0} = id$ и функцией h, принадлежащей множеству $\mathcal{R}(\mathbb{R}_+)$ измеримых отображений $h(w, \cdot)$ полуоси $\mathbb{R}_+$ в класс Каратеодори $\mathcal{R}$ голоморфных функций с неотрицательной действительной частью, дает возможность параметрич. представления однолистных функций:

$$f \in S \Leftrightarrow f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t w^h(z,t), \quad h \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+).$$

Сужение $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ приводит к представлению однолистных конформных отображений с конкретными геометрич. или аналитич. свойствами. На этом пути получены многочисленные необходимые, а также достаточные О. у., широко используемые в приложениях.

Ряд О. у. характеризуется областями значений тех или иных аналитич. функционалов. Напр., легко проверяемыми на практике достаточными О. у. для функции f являются неравенства

$$\operatorname{Re}[f'(z)]>0,\ \operatorname{Re}[zf'(z)/f(z)]>0,\ \operatorname{Re}[zf''(z)/f'(z)]>-1,$$

выполняющиеся для всех $z\in U$ и гарантирующие к тому же наличие дополнительных геометрич. свойств почти выпуклости, звездности или выпуклости образа $D=f(U)$.

Менее наглядными, но широко распространенными при описании моделей универсального *Тайхмюллера пространства* являются О. у., связанные с функционалом

$$\mathcal{B}_f:=zf''(z)/f'(z)$$

и *Шварца производной*

$$\mathcal{S}_f:=\{f,\ z\}.$$

Пусть B_j, $j=1,\ 2$, обозначает комплексное банахово пространство голоморфных в U функций $\varphi(z)$ с нормой $\|\varphi\|_j=\sup\limits_{z\in U}(1-|z|^2)^j|\varphi(z)|$, а соотношениями $i_1\colon f\mapsto\mathcal{B}_f$ и $i_2\colon f\mapsto\mathcal{S}_f$ определены вложения класса S в пространства B_j соответственно. Известно, что

$$\{\|\varphi\|_1\leqslant 1\}\subset B_1(S)=\{\mathcal{B}_f|f\in S\}\subset\{\|\varphi\|_1\leqslant 6\},$$

тогда как

$$\{\|\varphi\|_2\leqslant 2\}\subset B_2(S)=\{\mathcal{S}_f|f\in S\}\subset\{\|\varphi\|_2\leqslant 6\}.$$

В то же время, структура всего класса S, как, впрочем, и его вложений $B_j(S)$, до сих пор еще плохо понята.

Многие из отмеченных выше результатов допускают перенос на случай однолистных конформных отображений других канонич. областей: внешности круга, полуплоскости, полосы и т. д. Переход к односвязным и, тем более, многосвязным областям общего вида сопровождается потерей количественных характеристик и О. у. для функций, заданных в подобных областях, носят, в основном, качественный характер.

В математич. физике О. у. часто выступают в роли условий разрешимости, позволяющих отделить физически реализуемые решения краевых задач и изучить их геометрич. свойства.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Pommerenke Chr., Univalent functions, Göttingen, 1975; [3] Duren P., Univalent functions, N. Y.– B.– Tokyo, 1985; [4] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 25, с. 3–121, М., 1987; [5] Базилевич И. Е., «Математич. сб.», 1967, т. 74, с. 133–46; [6] Гутлянский В. Я., Хохлов Ю. Е., в кн.: Комплексные методы в математической физике, Донецк, 1984, с. 45–62. *Ю. Е. Хохлов.*

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ гладкого многообразия M – отображение

$$\varphi\colon \mathbb{R}\times M\to M,$$
$$\mathbb{R}\times M\ni(t,\ p)\mapsto\varphi_t(p)\in M,$$

такое, что $\varphi_0(p)=p$ для всех $p\in M$ и $\varphi_{t+s}(p)=\varphi_t(\varphi_s(p))$ для всех $t,\ s\in\mathbb{R}$, $p\in M$. Кривая $x(t)=\varphi_t(p)$ называется орбитой точки p. *В. В. Трофимов.*

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА – семейство $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ непрерывных операторов в локально выпуклом топологическом векторном пространстве такое, что: 1) $T(t+s)=T(t)T(s)$ для всех $t,\ s\geqslant 0$, 2) $T(0)=I$, то есть $t\to T(t)$ есть гомоморфизм аддитивной *полугруппы* $\mathbb{R}_+$ в мультипликативную полугруппу операторов. Часто рассматривают гомоморфизм, непрерывный относительно какой-либо операторной топологии. Развитая теория сильно непрерывных О. п. ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве позволяет строить решение (абстрактной) задачи Коши. Используются также О. п. с параметром $t>0$, удовлетворяющие 1), О. п. нелинейных операторов, О. п. положительных операторов в полуупорядоченных пространствах и др. Важное применение О. п. находят для описания (необратимой) эволюции физич. систем.

Лит.: [1] Вувуникян Ю. М., Крейн С. Г., в кн.: Математическая энциклопедия, т. 4, М., 1984, с. 447–54; [2] Крейн С. Г., Хазан М. И., там же, с. 445–47; [3] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [4] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [5] Goldstein J. A., Semigroups of linear operators and applications, N. Y., 1985; [6] Clement Ph. [a. o.], One-parameter semigroups, Amst.– [a. o.], 1987. *А. В. Булинский.*

ОДНОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Периодическая функция, Двоякопериодическая функция.*

ОДНОРОДНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА – см. *Маркова цепь, Маркова цепь* с непрерывным временем.

ОДНОРОДНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

ОДНОРОДНОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Риманова геометрия.*

ОДНОРОДНОЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО – *симплектическое многообразие* $(M,\ \omega)$, на котором группа Ли G транзитивно действует симплектоморфизмами.

Всякое G-однородное симплектич. многообразие локально изоморфно орбите в присоединенном представлении группы G или ее центрального расширения. Соответствующий изоморфизм задается *моментов отображением.* *М. Э. Казарян.*

ОДНОРОДНОЕ СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ – см. *Случайное поле.*

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ точки p проективного пространства $P(V)$, порожденного векторным пространством V, – координаты, определяемые следующим образом. Каждая точка $p\in P(V)$ однозначно определяется любым ненулевым вектором v на соответствующей прямой в V. В V выбирают базис $e_0,\ \ldots,\ e_n$. Тогда координаты $(x_0,\ \ldots,\ x_n)$ вектора v в этом базисе называются однородными координатами точки p. Они определены с точностью до умножения на ненулевой скаляр. Традиционное обозначение $(x_0\colon\ldots\colon x_n)$. *В. В. Трофимов.*

ОДНОСВЯЗНАЯ ГРУППА – группа Ли, которая является односвязным топологическим пространством. Если G – группа Ли, то для нее существует единственная О. г. $\tilde{G}$, к-рая локально изоморфна G (см. *Ли группа*), причем G есть факторгруппа группы $\tilde{G}$ по дискретной подгруппе, содержащейся в центре G. *Ю. А. Неретин.*

ОДНОСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО – топологическое пространство X такое, что всякое непрерывное отображение $f\colon S^1\to X$ окружности

$$S^1=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}$$

можно непрерывно продолжить на диск

$$D^2=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant 1\},$$

границей которого служит S^1.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971. *В. В. Трофимов.*

ОКРЕСТНОСТЬ точки – см. *Многообразие, Топологическое пространство.*

ОКТУПОЛЬНОГО МОМЕНТА ТЕНЗОР – см. *Мультипольного момента тензор.*

ОПЕРАТОР времени – см. *Каноническая сопряженность.*

ОПЕРАТОР рождения – см. *Вторичное квантование.*

ОПЕРАТОР сдвига – см. *Когерентное состояние.*

ОПЕРАТОР уничтожения – см. *Вторичное квантование.*

ОПЕРАТОР энергии системы – см. *Статистический ансамбль.*

ОПЕРАТОРНО НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы G – представление T такое, что любой замкнутый оператор, перестановочный со всеми операторами вида T_g, $g \in G$, имеет вид λE, где E – единичный оператор. В следующих случаях понятие О. н. п. совпадает с понятием *неприводимого представления*: 1) G конечна или компактна; 2) T унитарно. *Ю. А. Неретин.*

ОПЕРАТОРНО ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД в теории солитонов – метод решения нелинейных эволюционных уравнений, основанный на замене данного уравнения уравнением того же вида относительно функций, принимающих значения в произвольной операторной алгебре. Односолитонные операторнозначные решения этих уравнений находятся элементарно и выражаются через логарифмич. производные операторнозначных решений линейных уравнений. Решения же исходных уравнений получаются из этих операторнозначных односолитонных решений окаймлением их специальными конечномерными проекторами. Произвол в выборе операторных алгебр и окаймляющих проекторов позволяет находить широкие классы решений исходных уравнений. В них входят решения, к-рые находятся *обратной задачи рассеяния методом*, *Римана задачи методом* и методами алгебраич. геометрии, а также решения, не сводящиеся к ним. Напр., решения скалярного уравнения

$$u_t + 6u_x^2 + u_{xxx} = 0$$

получаются в виде:

$$u(x, t)\hat{P} = \hat{P}\hat{\Gamma}^{-1}\hat{\Gamma}_x\hat{P},$$

где $\hat{\Gamma}$ – операторнозначное решение уравнений

$$\hat{\Gamma}_t + 4\hat{\Gamma}_{xxx} = 0,\ \hat{\Gamma}_{xx} = \hat{a}^2\hat{\Gamma},$$

удовлетворяющее условию

$$\hat{\Gamma}_x(I - \hat{P}) = \hat{\Gamma}\hat{N}(I - \hat{P}),$$

где $\hat{a}$, $\hat{N}$ – произвольные постоянные операторы и $\hat{P}$ – постоянный одномерный проектор.

Лит.: [1] Марченко В. А., Операторные алгебры и нелинейные уравнения, Киев, 1986. *В. А. Марченко.*

ОПЕРАТОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ – представление произведений нескольких локальных операторов, определенных в различных точках пространства-времени, в виде суммы отдельных локальных операторов.

В квантовой теории поля из-за сингулярного поведения *Грина функций* на малых расстояниях возникает трудность при построении локальных составных операторов из произведений гейзенберговских полей (см. *Гейзенберга представление*) $\varphi_i(x)$ (x – точка пространства-времени). В теории свободных полей для этой цели используется понятие *нормального произведения* (обозначается : ... :). Напр., для случая скалярного поля $\varphi(x)$ локальными операторами являются $:\varphi^3(x):$, $:\varphi^2(x)\partial_\mu\varphi(x)\partial_\nu\varphi(x):$ и т. д. ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$). Общий рецепт для построения локальных составных операторов, справедливый как для свободных, так и для взаимодействующих полей, дает О. р. Вильсона [1]:

$$A(x)\,B(y)\big|_{x\to y} = \sum_n C_n(x-y)O_n(x), \qquad (1)$$

где $A(x)$, $B(y)$ и $O_n(x)$ – локальные операторы, $C_n(x-y)$ – коэффициентные функции, являющиеся обобщением функций Грина. Величины $C_n(z)$ содержат сингулярности типа $(-z_\mu^2 + i\varepsilon z_0)^{-P_n}$, где добавка $i\varepsilon z_0\,(\varepsilon \to +0)$ необходима для того, чтобы матричный элемент от левой части соотношения (1) удовлетворял правильным спектральным свойствам, вытекающим из положительности энергии для всех промежуточных состояний. Показатели степени P_n могут быть выражены через размерности Δ_i (в единицах массы) операторов A, B и O_n по формуле

$$P_n = (\Delta_A + \Delta_B - \Delta_n)/2,$$

где $\Delta_i = d_i + \gamma_i$, d_i – канонич. размерности операторов, γ_i – их аномальные размерности.

О. р. (1) справедливо во всех порядках теории возмущений в перенормируемых моделях квантовой теории поля (см. *Перенормируемость*). В теории возмущений размерности полей равны каноническим ($\gamma_i = 0$), а коэффициентная функция $C_n(z)$ помимо степени $(-z^2 + i\varepsilon z_0)^{-P_n}$ содержит в виде множителя полином по $\ln(-z^2)$. Главный вклад в сумму (1) при $x \to y$ вносят операторы с минимальной размерностью, среди к-рых самыми важными являются единичный оператор I ($d_I = 1$), сохраняющиеся (точно или приближенно) токи $j_\mu(x)$ ($d_j = 3$) и тензор энергии–импульса $\theta_{\mu\nu}(x)$ ($d_\theta = 4$). При учете взаимодействия размерность операторов I, j_μ и $\theta_{\mu\nu}$ не меняется. Из этого, в частности, следует, что матричный элемент от *хронологического произведения* T двух электромагнитных токов по вакуумному состоянию

$$\langle 0|\,T(j_\mu(x)j_\nu(x))\,|0\rangle \qquad (2)$$

при $x \to 0$ ведет себя так же, как в свободной теории. Сечение e^+e^--аннигиляции в адроны, к-рое определяется мнимой частью этого матричного элемента в импульсном представлении, при больших энергиях (в системе центра инерции) $\sqrt{s}$ пропорционально α^2/s (где $\alpha \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры), что согласуется с экспериментом. Поправки к вакуумному среднему (2), возникающие из-за операторов $O_n(x)$ с более высокими размерностями $O_1(x) = G_{\mu\nu}^2(x)$, $O_2(x) = [\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)]^2$, где $\psi(x)$, $G_{\mu\nu}(x)$ – кварковое и глюонное поля, Γ – нек-рая матрица (черта над ψ означает дираковское сопряжение), приводят к вкладам

$$\sim \frac{\alpha^2}{s}\left(C_1\frac{\langle 0|O_1(0)|0\rangle}{s^2} + C_2\frac{\langle 0|O_2(0)|0\rangle}{s^3}\right),$$

нарушающим *масштабную инвариантность* сечения e^+e^--аннигиляции (см. [2]).

Существует другая версия формулы (1), а именно: О. р. произведения двух операторов на *световом конусе*

$$A(x)\,B(0)\Big|_{x^2\to 0,\ x\sim 1/m} =$$

$$= \sum_{n,\,\mathbf{k}=1}^{\infty} C_n^{\mathbf{k}}(-x^2)\,x_{\mu_1}x_{\mu_2}\dots x_{\mu_n}O^{\mathbf{k}}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(0), \qquad (3)$$

где, как и ранее, для простоты предполагается, что $A(x)$ и $B(0)$ являются скалярными по отношению к *Лоренца преобразованиям* (m – характерная масса адрона, $O^{\mathbf{k}}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ – нек-рый тензорный оператор, $\mu_i = 0, 1, 2, 3$).

Для классификации локальных операторов удобно ввести понятие твиста. Твист тензора $O^{\mathbf{k}}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(x)$ равен по определению разности его размерности Δ_n и спина S_n. Главный вклад в разложение (3) дают операторы, имеющие минимальное значение твиста; при этом их спины и моменты могут быть произвольными. Напр., для операторов, билинейных по кварковым полям, минимальный твист (два) имеет выражение $O_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = S\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\dots\partial_{\mu_n}\psi$, где символ S означает симметризацию по всем лоренцевым индексам и выделение следов. В квантовой хромодинамике для обеспечения *калибровочной инвариантности* следует в $O_{\mu_1\dots\mu_n}$ заменить все производные на ковариантные: $\partial_\mu \to \partial_\mu - igA_\mu$ (здесь A_μ – потенциал глюонного поля, g – константа взаимодействия в квантовой хромодинамике). В силу *асимптотической свободы* и *ренормализационной группы* коэффициентные функции $C_n^{\mathbf{k}}(-x^2)$ в формуле (3) ведут себя

при $x^2 \to 0$ как

$$(-x^2 + i\varepsilon x_0)^{1/2(d_n - d_A - d_B - S_n)}[\ln(x^2\mu^2)]^{c_n},$$

где c_n – числа, к-рые могут быть найдены в рамках теории возмущений. О. р. на световом конусе (3) используется, в частности, для нахождения логарифмич. и степенных эффектов нарушения масштабно-инвариантного поведения структурных функций лептон-адронных *глубоко неупругих процессов* (см. [3]).

О. р. является эффективным способом вычисления и классификации различных вкладов в физич. амплитуды процессов и находит широкое распространение в приложениях квантовой теории поля. Возможности применения формул (1), (3) в адронной физике связаны с тем, что вид коэффициентных функций C_n^K, как правило, может быть установлен с помощью теории возмущений, независимо от специфики сильного взаимодействия, после чего сравнение матричных элементов по физич. адронным состояниям от левой и правой частей равенства (1) [или (3)] приводит к соотношениям между физич. амплитудами.

Строгое доказательство О. р. пока существует только в рамках теории возмущений для простых перенормируемых моделей квантовой теории поля (см. [4]).

Лит.: [1] Wilson K. G., «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1499; [2] Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I., «Nucl. Phys. B», 1979, v. 147, p. 385; [3] Gross D. J., Wilczek F., «Phys. Rev. D», 1974, v. 9, p. 980; [4] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979. *Л. Н. Липатов.*

ОПЕРАТОРНОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ – элемент множества $\mathcal{F}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$, где $\mathcal{F}(X, \mathcal{L})$ – множество функций, заданных на множестве X, со значением во множестве $\mathcal{L}$, а $\mathcal{L}(Y, Z)$ – множество линейных операторов, отображающих векторное пространство Y в векторное пространство Z.

Пусть X – банахово пространство, и пусть D – область комплексной плоскости (связное открытое множество). Функция $x(\cdot)$, определенная на D, со значением в X называется сильно голоморфной в z_0, если существует сильный предел отношения

$$\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}$$

при h, стремящемся к нулю в $\mathbb{C}$.

Сильно голоморфная функция в каждой точке области D комплексной плоскости со значением в банаховом пространстве *ядерных операторов* называется О. ф., аналитической в ядерной норме. *В. И. Скрипник.*

ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫЙ СИМВОЛ дифференциального или псевдодифференциального оператора – функция со значениями в некоторой операторной алгебре, характеризующая данный оператор, структура которого оказывается более простой, чем у исходного оператора. В задачах с малым параметром h дифференциальные или псевдодифференциальные операторы с О. с. имеют вид: $L(-ih\nabla, x, h)$, где $L(p, x, h)$ – О. с.

Пример: символ $L(p, x)$ $(m \times m)$-матричного h-дифференциального оператора – $(m \times m)$-матричная функция (оператор, действующий в конечномерном пространстве).

Другой пример дают уравнения, в к-рых производные по части переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержат параметр, а по другим переменным $(y_1, y_2, \ldots, y_l)$ его не содержат. Тогда $L(p, x, h)$ – при каждых (p, x) – дифференциальный оператор по переменным y. Напр., символ $L(p, x)$ уравнения Шредингера для взаимодействующих легких и тяжелых частиц имеет вид:

$$L(p,x) = p^2 - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial y_l^2} + v(x,y).$$

Лит.: [1] Маслов В. П., Асимптотические методы и теория возмущений, М., 1988; [2] его же, Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965. *С. Ю. Доброхотов.*

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД – см. *Равномерно пригодные приближения* в квантовой механике.

ОПЕРАТОРЫ в квантовой теории – понятие, широко используемое в математическом аппарате квантовой механики и квантовой теории поля. О. служат для сопоставления с определенной *волновой функцией* (или *вектором состояния*) ψ другой определенной функции (вектора) ψ'. Соотношение между ψ и ψ' записывается в виде $\psi' = \hat{L}\psi$, где $\hat{L}$ – О. В квантовой механике физич. величинам L (координате, импульсу, энергии и др.) ставятся в соответствие О. $\hat{L}$ (оператор координаты, импульса и т. д.), действующие на ψ. Простейшие виды О., действующие на волновую функцию $\psi(x)$ (где x – координата частицы),– О. умножения (напр., О. координаты $\hat{x}$, $\hat{x}\psi = x\psi$) и О. дифференцирования (напр., О. $\hat{p}_x$ проекции импульса на ось x, $\hat{p}_x\psi = -i\hbar\partial\psi/\partial x$). Если ψ – вектор, компоненты к-рого можно представить в виде столбца чисел, то О. представляет собой квадратную матрицу.

В квантовой механике в основном используются линейные О., к-рые обладают следующим свойством: если

$$\hat{L}\psi_1 = \psi_1' \quad \text{и} \quad \hat{L}\psi_2 = \psi_2',$$

то

$$\hat{L}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\psi_1' + c_2\psi_2',$$

где c_1 и c_2 – комплексные числа.

Свойства О. $\hat{L}$ определяются уравнением

$$\hat{L}\psi_n = \lambda_n\psi_n,$$

где λ_n – числа. Решения этого уравнения ψ_n называются *собственными функциями* (*собственными векторами*) О. $\hat{L}$. Собственные волновые функции (собственные векторы состояния) описывают в квантовой механике такие состояния, в к-рых физич. величина L (соответствующая О. $\hat{L}$) имеет определенное значение λ_n. Числа λ_n называются *собственными значениями* О. $\hat{L}$, а их совокупность – *спектром оператора*. Спектр может быть непрерывным или дискретным; в первом случае уравнение, определяющее ψ_n, имеет решение при любом значении λ_n (в определенной области), во втором – решения существуют только при определенных дискретных значениях λ_n. Спектр О. может быть и смешанным: частично непрерывным, частично дискретным. Напр., О. координаты и импульса имеют непрерывный спектр, а О. энергии в зависимости от характера действующих в системе сил – непрерывный, дискретный или смешанный спектр. Дискретные собственные значения О. энергии называются уровнями энергии.

Собственные функции и собственные значения О. физич. величин должны удовлетворять определенным требованиям. Так как непосредственно измеряемые физич. величины всегда принимают вещественные значения, то соответствующие квантовомеханич. О. должны иметь вещественные собственные значения. Поскольку при измерении физич. величины в любом состоянии ψ должно получаться одно из возможных собственных значений О. этой величины, необходимо, чтобы произвольная волновая функция (вектор состояния) могла быть представлена в виде линейной комбинации собственных функций (векторов) ψ_n О. этой физич. величины; другими словами, совокупность собственных функций (векторов) должна представлять полную систему. Этими свойствами обладают собственные функции и собственные значения так наз. самосопряженных, или эрмитовых, О.

С О. можно производить алгебраич. действия. В частности, под произведением О. $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ понимается такой О. $\hat{L} = \hat{L}_1\hat{L}_2$, действие к-рого на ψ дает $\hat{L}\psi = \psi''$, если $\hat{L}_2\psi = \psi'$ и $\hat{L}_1\psi' = \psi''$. Произведение О. в общем случае зависит от порядка сомножителей, то есть $\hat{L}_1\hat{L}_2 \neq \hat{L}_2\hat{L}_1$. Этим алгебра О. отличается от обычной алгебры чисел. Возможность пере-

становки порядка сомножителей в произведении двух О. тесно связана с возможностью физич. системы находиться в состоянии, в к-ром соответствующие О. физич. величины имеют точно определенные значения (или с возможностью одновременного измерения физич. величин, к-рым отвечают эти О.). Необходимым и достаточным условием одновременной измеримости физич. величин L_1 и L_2 является равенство $\hat{L}_1\hat{L}_2=\hat{L}_2\hat{L}_1$ (см. *Перестановочные соотношения*).

Уравнения квантовой механики могут быть формально записаны точно в том же виде, что и уравнения классич. механики (гейзенберговское представление в квантовой механике), если заменить физич. величины, входящие в уравнения классич. механики, соответствующими им О. Различие между квантовой и классич. механикой сведется тогда к различию алгебр. Поэтому О. в квантовой механике иногда называют *q*-числами, в отличие от *c*-чисел, то есть обыкновенных чисел, с к-рыми имеет дело классич. механика.

О. можно также возводить в степень, образовывать из них ряды и рассматривать функции от О. Произведение эрмитовых О. в общем случае не является эрмитовым. В квантовой механике используются и неэрмитовы О., важным классом к-рых являются *унитарные операторы*, не меняющие норм (длин) векторов и углов между ними. Неизменность нормы вектора состояния дает возможность интерпретации его компонент как амплитуд вероятности и исходной и преобразованной функции. Поэтому действием унитарного О. описывается изменение квантовомеханич. системы с течением времени, а также ее смещение как целого в пространстве, поворот, зеркальное отражение и др. Выполняемые унитарными О. преобразования (унитарные преобразования) играют в квантовой механике такую же роль, какую в классич. механике играют канонич. преобразования.

В квантовой механике применяется также О. комплексного сопряжения, не являющийся линейным. Произведение такого О. на унитарный О. называется антиунитарным оператором. Антиунитарные О. описывают преобразование обращения времени и некоторые др.

В теории квантовых систем, состоящих из тождественных частиц, широко применяется метод *вторичного квантования*. В нем рассматриваются состояния с переменным числом частиц и вводятся О., действие к-рых на вектор состояния с данным числом частиц приводит к вектору состояния с измененным на единицу числом частиц (О. рождения и уничтожения частиц). О. рождения или уничтожения частицы в данной точке x, $\hat{\psi}(x)$, формально подобен волновой функции $\psi(x)$, как q- и c-числа, отвечающие одной и той же физич. величине соответственно в квантовой и классич. механике. Такие О. образуют квантованные поля, играющие фундаментальную роль в релятивистских квантовых теориях (квантовой электродинамике, теории элементарных частиц). *В. Б. Берестецкий.*

ОПЕРАЦИЯ – отображение, описывающее изменение состояния квантовой системы в результате эволюции или макроскопического воздействия, включая отбор по какому-либо признаку (например, по результатам измерения) в соответствующем статистическом ансамбле. Если H – гильбертово пространство системы, $\mathfrak{J}(H)$ – пространство ядерных операторов в H, то операцией называется линейное положительное отображение $\mathcal{M}$: $\mathfrak{J}(H)\to\mathfrak{J}(H)$ такое, что $\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}[T]\leqslant\mathrm{Tr}\,T$ для любого положительного $T\in\mathfrak{J}(H)$. Если ρ – оператор плотности исходного состояния, описывающего нек-рый статистич. ансамбль, то $\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}[\rho]$ интерпретируется как доля отобранных элементов ансамбля, а $\mathcal{M}[\rho]/\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}[\rho]$ – как оператор плотности, описывающий новое состояние отобранного ансамбля.

Сопряженное отображение $\mathcal{M}^*$ алгебры $\mathfrak{B}(H)$ всех ограниченных операторов в H, определяемое соотношением

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}[T]X=\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}^*[X],\ T\in\mathfrak{J}(H),\ X\in\mathfrak{B}(H),$$

является нормальным линейным положительным отображением таким, что $\mathcal{M}^*[I]\leqslant I$, где I – единичный оператор. Если $\mathrm{Tr}\,\mathcal{M}[T]=\mathrm{Tr}\,T$ для всех $T\in\mathfrak{J}(H)$ (или, что эквивалентно, $\mathcal{M}^*[I]=I$), то О. называется неселективной. В алгебраич. подходе О. называется линейное положительное отображение Φ C^*-алгебры наблюдаемых такое, что $\Phi[I]\leqslant I$.

Лит.: [1] Haag R., Kastler D., «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 848–61; [2] Kraus K., «Lect. Notes in Phys.», 1983, v. 190.

А. С. Холево.

А-ОПЕРАЦИЯ – см. *Перенормировка* в квантовой механике.

ОПОРА точки – см. *Твердое тело*; плоское движение.

ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА, соотношение Бора – Пайерлса – Плачека,– теорема, устанавливающая пропорциональность мнимой части амплитуды упругого рассеяния на нулевой угол полному сечению. В системе центра масс она имеет вид:

$$\mathrm{Im}\,F(s,\,t=0)=2|\boldsymbol{k}|\sqrt{s}\,\sigma_t(s),\qquad(1)$$

где $\boldsymbol{k}$ – импульс, s – квадрат суммы энергий сталкивающихся частиц, t – квадрат переданного импульса.

О. т. является строгим следствием унитарности S-матрицы. Если S-матрицу записать в виде: $S=I+iT$, то условие унитарности $SS^+=I$, S^+ – эрмитово сопряженная матрица, приводит к равенству:

$$2\,\mathrm{Im}\,T_{aa}=\sum\nolimits_n T_{an}T^+_{na},\qquad(2)$$

к-рое фактически и есть О. т.; $T_{ab}=\langle b|T|a\rangle$, $|a\rangle$ и $|b\rangle$ – векторы начального и конечного состояний. Аналогичное соотношение, вытекающее из унитарности S_l-матрицы в представлении, в к-ром задан момент l, связывает мнимую часть парциальной волны с парциальным сечением (обобщенная О. т.). В случае бесспиновых частиц она имеет вид:

$$\mathrm{Im}\,f_l(s)=|f_l(s)|^2+R_l(s);\ R_l(s)\geqslant 0;\qquad(3)$$

$R_l(s)$ определяет вклад неупругих процессов, для чисто упругого рассеяния $R_l(s)=0$. О. т. устанавливает важную связь между упругим и неупругим процессами. Из этой теоремы следует положительность мнимой части амплитуды упругого рассеяния вперед. Равенства (1), (3), наряду с доказанными в аксиоматич. квантовой теории поля аналитич. свойствами амплитуды рассеяния по переменным s и t, играют ключевую роль в выводе строгих ограничений на амплитуды рассеяния упругих и неупругих процессов. Важным примером такого рода результатов являются неравенства, ограничивающие допустимые в теории рост и падение амплитуд рассеяния. Так, полное сечение адрон-адронного рассеяния удовлетворяет неравенству Фруассара:

$$\sigma_t(s)\leqslant\frac{\pi}{m^2}\ln^2\frac{s}{s_0},\qquad(4)$$

где m – масса наилегчайшего адрона (π-мезона), определяющая размер области аналитичности $F(s,\,t)$ по t, s_0 – параметр. Примером ограничения снизу является неравенство:

$$\max_{s\to\infty}|F(s,t)|>c/s^2,\qquad(5)$$

c – константа.

Положительность мнимой части амплитуды упругого рассеяния вперед и неравенства (4), (5) ограничивают класс возможных аналитических по s функций $F(s,\,t=0)$ классом функций, имеющих только конечное число нулей. Нетривиальным физич. следствием такого ограничения класса аналитич. функций является асимптотич. равенство дифференциальных сечений вперед частицы и античастицы на одной и той же мишени.

В классич. физике аналогом О. т. является соотношение, связывающее мнимую часть комплексного показателя преломления, то есть величину, характеризующую ослабление амплитуды электромагнитной волны в среде, с амплитудой

рассеяния волны отдельным атомом. О. т. в этом случае есть равенство

$$\mathrm{Im}\, f(k,0) = \frac{k}{4\pi}\sigma_t(k),$$

где $\sigma_t(k)$ – полное поперечное сечение экстинции (то есть рассеяния и поглощения) падающей на атом волны, $f(k, 0)$ – амплитуда рассеяния вперед электромагнитной волны отдельным атомом, k – импульс.

Лит.: [1] Нуссенцвейг Х. М., Причинность и дисперсионные соотношения, пер. с англ., М., 1976; [2] Мессиа А., Квантовая механика, пер. с франц., т. 2, М., 1979; [3] Иден Р., Соударения элементарных частиц при высоких энергиях, пер. с англ., М., 1970.

Ю. С. Вернов.

ОРБИТ МЕТОД – метод изучения *унитарных представлений* групп Ли. С помощью О. м. была построена теория унитарных представлений нильпотентных групп Ли, а также указана возможность его применения к другим группам (см. [2]). О. м. основан на следующем «экспериментальном» факте: существует глубокая связь между унитарными неприводимыми представлениями группы Ли G и *орбитами* этой группы в *копприсоединенном представлении*. О решении основных задач теории представлений с помощью О. м. см. [3].

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 4, М., 1984, кол. 63–66; [2] Кириллов А. А., «Успехи математич. наук», 1962, т. 17, в. 4, с. 57–110; [3] его же, Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [4] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978.

А. А. Кириллов.

ОРБИТА – см. *Динамическая система.*

ОРБИТА группы G, действующей на пространстве X, – подмножество в X, содержащее вместе со всякой своей точкой x_0 также все точки вида gx_0, где $g \in G$. Две О. группы G на множестве либо не пересекаются, либо совпадают.

Ю. А. Неретин.

ОРБИТА копприсоединенного представления группы Ли G на сопряженном пространстве $\mathfrak{G}^*$ ее алгебры Ли $\mathfrak{G}$ является однородным симплектическим многообразием (в частности, она всегда четномерна). Симплектич. структура на О. задается *Ли – Березина – Костанта – Кириллова формой* и играет важную роль в теории групп Ли и их представлений.

М. Э. Казарян.

ОРБИТА точки – см. *Однопараметрическая группа преобразований.*

ОРБИТАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ – см. *Ландау уровни.*

ОРБИТАЛЬНЫЙ МОМЕНТ, момент количества движения,– динамическая характеристика движения частицы или механической системы, связанная с вращением. В классич. механике О. м. системы частиц (материальных точек) относительно центра O равен

$$\boldsymbol{L} = \sum\nolimits_\alpha [\boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha], \qquad (1)$$

где индекс α нумерует частицы, $\boldsymbol{r}_\alpha$ и $\boldsymbol{p}_\alpha = m_\alpha \upsilon_\alpha$ – радиус-вектор (проведенный из начала координат O) и импульс α-й частицы (m_α, υ_α – масса и скорость частицы). Из изотропии пространства следует, что при произвольном движении замкнутой системы вектор $\boldsymbol{L}$ сохраняется по величине и направлению (закон сохранения момента). Значение О. м. зависит, вообще говоря, от выбора начала координат. А именно, при сдвиге на вектор $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha + \boldsymbol{a}$) имеем

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' + [\boldsymbol{a}\boldsymbol{P}], \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{P} = \sum_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha$ – полный импульс системы. На законе сохранения О. м. эта неоднозначность не сказывается, так как у замкнутой системы полный импульс $\boldsymbol{P}$ также сохраняется. В этом случае, когда $\boldsymbol{P} = 0$ (то есть система как целое покоится), ее О. м. не зависит от выбора начала координат.

Компоненты О. м. имеют следующие скобки Пуассона:

$$\{L_i, L_j\} = -e_{ij\mathbf{k}} L_{\mathbf{k}}, \qquad (3)$$

где $e_{ij\mathbf{k}}$ – полностью антисимметричный тензор ($e_{123} = 1$; значения $i = 1, 2, 3$ соответствуют осям x, y, z). Для системы частиц, находящейся под действием внешних сил, изменение О. м. во времени связано с полным моментом внешних сил $\boldsymbol{N}$:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} = \sum\nolimits_\alpha [\boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{f}_\alpha], \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{f}_\alpha$ – сила, приложенная к α-й частице. В этой сумме должны учитываться только внешние силы, так как сумма моментов всех сил, действующих внутри замкнутой системы, всегда равна нулю.

При переходе к квантовой механике переменные $\boldsymbol{r}_\alpha$, $\boldsymbol{p}_\alpha$ заменяются операторами $\hat{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{p}}_\alpha$, причем $\hat{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha$, $\boldsymbol{p}_\alpha = -i\hbar\nabla_\alpha$, где $\nabla_\alpha = (\partial/\partial x_\alpha, \partial/\partial y_\alpha, \partial/\partial z_\alpha)$, а О. м.– оператором $\hat{\boldsymbol{L}} = [\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{p}}]$. Соотношение (3) заменяется коммутатором

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \hat{L}_i\hat{L}_j - \hat{L}_j\hat{L}_i = i\hbar e_{ijk}\hat{L}_k, \qquad (5)$$

из к-рого следует, что различные компоненты оператора О. м. $\hat{L}_i$ не коммутируют между собой и поэтому, в соответствии с общими принципами квантовой механики, компоненты момента L_i не являются одновременно измеримыми величинами (за исключением случая $\boldsymbol{L} = 0$, когда все компоненты О. м. также имеют нулевые значения). Поскольку $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$, то одновременно измеримы квадрат О. м. и одна из его компонент, в качестве к-рой обычно выбирают L_z. Возможные наблюдаемые значения этих величин совпадают с собственными значениями λ, μ соответствующих операторов и определяются из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \hat{L}^2\psi = -\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\right\}\psi = \lambda\psi, \\ \hat{L}_z\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \mu\psi, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где θ и φ – углы в сферич. системе координат, причем φ – угол поворота вокруг оси z (ψ – собственные функции операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$, общие для обоих операторов). Однозначные и всюду ограниченные (на единичной сфере) решения этих уравнений существуют только при

$$\lambda = l(l+1)\hbar^2, \quad \mu = m\hbar, \qquad (7)$$

где l (так наз. орбитальное, или азимутальное, квантовое число) принимает значения: $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$, а m (магнитное квантовое число) определяет величину проекции О. м. на ось z и принимает $2l+1$ значений: $m = l, l-1, \ldots, -l$, что дает кратность вырождения уровней энергии с данным l, равную $2l+1$. Таким образом, в квантовой механике возникает квантование О. м.

Решения уравнения (6) совпадают со сферич. функциями $\psi = Y_{lm}$:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \mathrm{const}\cdot P_l^m(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \qquad (8)$$

где P_l^m – присоединенные многочлены Лежандра. В простейших случаях $l = 0$ (S-состояние) и $l = 1$ (P-состояние) Y_{lm} выражаются следующим образом:

$$Y_{00} = (4\pi)^{-1/2}, \quad Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\vartheta,$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}, \qquad (8a)$$

[в литературе встречаются и другие определения Y_{lm}, отличающиеся от (8а) фазовыми множителями]. Сферич. функции образуют ортонормированную систему:

$$\int Y^*_{lm} Y_{lm}\, d\Omega = \delta_{ll}\delta_{mm}, \qquad (9)$$

где $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ – элемент телесного угла, а интегрирование ведется по единичной сфере ($0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$), $\delta_{tt'}$ –

символ Кронекера. Величина $|Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2$ определяет угловую зависимость плотности вероятности пространственного распределения для частицы, находящейся в состоянии с квантовыми числами l, m.

О. м. и квантовое число l играют важную роль в классификации состояний квантовых систем. Электрон в атоме движется в результирующем самосогласованном поле, к-рое возникает при сложении кулоновского поля ядра и полей остальных электронов. Приближенно можно считать, что это поле является сферически-симметричным, и пренебречь спин-орбитальным взаимодействием (что справедливо для не слишком тяжелых атомов). В этом случае квантовые состояния электрона в атоме характеризуются определенными значениями l. В сферич. ядре состояния нуклона, движущегося в усредненном поле остальных нуклонов, также характеризуются значениями l (ядерные оболочки). Даже в тех случаях, когда потенциал взаимодействия не является сферически-симметричным и, следовательно, О. м. не сохраняется (то есть не имеет вполне определенных значений), состояния с определенными l, m часто используются в качестве базиса для разложения волновой функции. Во многих случаях это является эффективным методом численного решения *Шредингера уравнения* для потенциалов, не обладающих сферич. симметрией.

Классификация квантовых состояний частицы по значениям l встречается в теории атома, теории ядра и ядерных реакций, теории столкновений, физике элементарных частиц и др.

О. м. микрочастицы (электрон, атом, ядро и т. д.) связан с ее движением в пространстве. Помимо О. м. микрочастица, как правило, обладает внутренним, или спиновым, моментом s, имеющим чисто квантовое происхождение (спин исчезает при переходе к пределу $\hbar \to 0$ и не допускает классич. интерпретации). При наличии спина из изотропии пространства следует, что сохраняются не $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{s}$ по отдельности, а лишь полный момент $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$ (см. *Квантовое сложение моментов*). При этом собственные значения оператора $\boldsymbol{j}^2$ равны $j(j+1)\hbar^2$. Волновая функция с определенными значениями $\boldsymbol{j}^2$ и j_z может быть построена из координатной и спиновой волновых функций с помощью *Клебша–Гордона коэффициентов*. Имеются правила отбора для переходов между состояниями с определенными l и j, к-рые играют важную роль в теории электромагнитных переходов в атомах и ядрах, при рассмотрении распадов элементарных частиц и т. д.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 4 изд., М., 1989; [2] их же, Механика, 4 изд., М., 1988; [3] Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К., Квантовая теория углового момента, Л., 1975.

В. С. Попов.

ОРИГИНАЛ – см. *Лапласа преобразование.*

ОРИЕНТАЦИИ ВЕКТОР – см. *Плотности матрица.*

ОРИЕНТАЦИИ УГЛЫ – три угла $\hat{\varphi}$, $\hat{\vartheta}$, $\hat{\psi}$, определяющие положение твердого тела, имеющего неподвижную точку, то есть его ориентацию во вращательном движении по отношению к неподвижным прямоугольным осям $O\xi\eta\zeta$. Для наблюдателя, находящегося на рассматриваемом объекте, эти углы в общем соответствуют физич. представлениям о крене, тангаже и рысканьи по курсу, вследствие чего О. у. часто называют самолетными, или корабельными, углами. Обычно ось $O\xi$ – направление движения тела (курс), ось $O\zeta$ направлена по местной вертикали, так что плоскость $O\xi\eta$ характеризует местный горизонт. Если с телом жестко связать прямоугольные оси $OXYZ$ и обозначить линии пересечения плоскостей OXY, $OZ\xi$ и OXY, $O\eta\zeta$ через OM, ON соответственно, то О. у. будут:

1) угол крена $\hat{\varphi} = \angle \eta ON$, отсчитываемый в положительном направлении в плоскости $O\eta\zeta$ от оси $O\eta$ до оси ON;

2) угол тангажа $\hat{\vartheta} = \angle \xi OM$, отсчитываемый в плоскости $OZ\xi$ от оси $O\xi$ до оси OM;

3) угол рысканья $\hat{\psi} = \angle MOX$, отсчитываемый в положительном направлении в плоскости OXY от оси OM до оси OX.

Положение тела будет определяться однозначно, если считать угол $\hat{\vartheta}$ изменяющимся в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а углы $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ – в пределах от 0 до 2π.

Необходимо отметить, что, в отличие от *Эйлера углов*, О. у. допускают линеаризацию в окрестности тождественного поворота, и в линеаризированном виде такое соответствие с физич. представлениями становится точным; другими словами, локальные координаты, отвечающие О. у. $\hat{\varphi}$, $\hat{\vartheta}$, $\hat{\psi}$, покрывают точку, соответствующую тождественному повороту, в пространстве всевозможных поворотов – группе $SO(3)$.

М. И. Войцеховский.

ОРИЕНТАЦИОННОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ – см. *Дальний и ближний порядок.*

ОРИЕНТИРУЕМЫЙ ГРАФ – см. *Граф.*

ОРИЦИКЛИЧЕСКИЙ ПОТОК – *динамическая система* с непрерывным временем h^t на единичном касательном расслоении SM компактной ориентируемой связной поверхности M с неположительной эйлеровой характеристикой и римановой метрикой без сопряженных точек; отображение h^t (t фиксировано) сопоставляет вектору $v \in SM$ вектор, ортогональный тому же орициклу, что и вектор v, и отстающему от v на расстояние t (измеряемому вдоль орицикла) влево от геодезической, задаваемой вектором v (см. *Орициклическое слоение*).

О. п. обладает инвариантной мерой (мера Боуэна – Маркуса – Маргулиса), относительно к-рой (если кривизна M отрицательна) он строго эргодичен и перемешивает с любой кратностью; его топологич. энтропия равна нулю. О. п. интенсивно изучаются в связи с внутренними проблемами эргодич. теории (эквивалентность по Какутани и др.).

Лит.: [1] Песин Я. Б., «Успехи математич. наук», 1981, т. 36, № 4, с. 3–51.

Я. Б. Песин.

ОРИЦИКЛИЧЕСКОЕ СЛОЕНИЕ – непрерывное *слоение* W на единичном касательном расслоении односвязной ориентируемой поверхности с неположительной эйлеровой характеристикой и римановой метрикой без сопряженных точек; слой $W(v)$, проходящий через вектор v (орицикл),– это оснащение предельной сферы, задаваемой ортогональными векторами, направленными в ту же сторону, что и v.

Я. Б. Песин.

ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА ПРОЦЕСС – однородный *диффузионный процесс* U_t, предложенный Л. Орнштейном (L. Ornstein) и Дж. Уленбеком (G. Uhlenbeck) как альтернатива *винеровскому процессу* при описании броуновского движения. Поскольку винеровский процесс, описывающий физич. модель Эйнштейна – Смолуховского броуновского движения, недифференцируем, то в теории Эйнштейна – Смолуховского частица, совершающая броуновское движение, не имеет нигде конечной скорости. В подходе Л. Орнштейна и Дж. Уленбека основной случайной величиной является скорость U_t блуждающей частицы. При этом предполагается, что силу, действующую на взвешенную в среде частицу, можно разложить на две компоненты – систематическую (сила трения) и стохастическую – обусловленную случайными толчками молекул среды.

О.– У. п. может быть определен как решение следующего стохастического дифференциального уравнения (уравнения Ланжевена):

$$dU_t = -\gamma U_t\, dt + \sqrt{\sigma}\, dW_t,$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, γ – коэффициент, обусловленный вязкостью среды, σ – коэффициент диффузии.

Уравнение Фоккера – Планка для переходной плотности вероятности О.– У. п. имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(ut|u_0t_0)=\frac{\partial}{\partial u}\gamma up(ut|u_0t_0)+\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^2}{\partial u^2}p(ut|u_0t_0),$$

фундаментальное решение к-рого есть

$$p(ut|u_0t_0)=\left(\frac{\pi\sigma}{\gamma}(1-e^{-2\gamma(t-t_0)})\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\left(u-u_0e^{-\gamma(t-t_0)}\right)^2}{\frac{\sigma}{\gamma}(1-e^{-2\gamma(t-t_0)})}\right\},\quad t>t_0.$$

О.– У. п. является гауссовским стационарным процессом и обладает следующими свойствами:

а) $\mathsf{E}\{U_t\}=0$, $\mathsf{D}\{U_t\}=\frac{\sigma}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})$, $\mathsf{E}\{U_tU_s\}=\frac{\sigma}{2\gamma}e^{-\gamma|t-s|}$,

причем при вычислении этих средних следует выполнить усреднение по начальным данным u_0 О.– У. п. со стационарной функцией распределения

$$p(u_0)=\left(\frac{\pi\sigma}{\gamma}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{u_0^2}{\sigma/\gamma}\right\}.$$

б) О.– У. п. не имеет независимых приращений, то есть изменения скорости броуновской частицы коррелированы на непересекающихся временных интервалах.

О.– У. п. является единственным стационарным, гауссовским, марковским случайным процессом (теорема Дуба).

Стационарность О.– У. п. и отсутствие независимых приращений отличают его от винеровского процесса. Винеровский процесс, как математич. модель броуновского движения в пространстве координат блуждающей частицы, получается из О.– У. п. в результате предельного перехода $\sigma\to\infty$, $\gamma\to\infty$, так что $\frac{\sigma}{\gamma^2}=\text{const}$ (для стандартного винеровского процесса $\frac{\sigma}{\gamma^2}=1$). Таким образом, винеровский процесс соответствует описанию броуновского движения в пределе большой вязкости среды (сильное трение) и интенсивного шума.

О.– У. п. U_τ при $0\leqslant\tau\leqslant t$ допускает каноническое представление:

$$U_\tau=\sum_{k=0}^{\infty}u_kv_k(\tau),$$

где коэффициенты u_k – независимые гауссовские случайные величины такие, что $\mathsf{E}(u_k)=0$, $\mathsf{E}(u_ku_l)=\lambda_k\delta_{kl}$, λ_k – собственные числа, $v_k(\tau)$ – собственные функции интегрального оператора с ядром $\mathsf{E}\{U_\tau U_s\}=\frac{\sigma}{2\gamma}e^{-\gamma|\tau-s|}$:

$$\int_0^t ds\,\mathsf{E}\{U_\tau U_s\}v_k(s)=\lambda_kv_k(\tau).$$

Многомерный О.– У. п. $\boldsymbol{U}_t=\{U_t^{(1)},\ \ldots,\ U_t^{(n)}\}$ может быть определен как решение уравнения Ланжевена

$$d\boldsymbol{U}_t=-\Gamma\boldsymbol{U}_tdt+\mathrm{B}d\boldsymbol{W}_t,$$

где $\boldsymbol{W}_t=\{W_t^{(1)},\ \ldots,\ W_t^{(n)}\}$, $W_t^{(i)}$ – стохастически независимые стандартные винеровские процессы $\mathsf{E}\{W_t^{(i)}W_s^{(k)}\}=\delta_{ik}\min(t,s)$, $\|\Gamma\|_{ik}$ и $\|\mathrm{B}\|_{ik}$ суть $(n\times n)$-матрицы, причем матрица $\|\mathrm{B}\|_{ik}$ связана с диффузионной матрицей $\|\sigma\|_{ik}$, входящей в уравнение Фоккера – Планка соотношением $\|\sigma\|_{ik}=\|\mathrm{B}\mathrm{B}^{\top}\|_{ik}$. Уравнение Фоккера – Планка для многомерного О.– У. п. имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\boldsymbol{ut}|\boldsymbol{u}_0t_0)=\frac{\partial}{\partial u_i}\Gamma_{ik}u_kp(\boldsymbol{ut}|\boldsymbol{u}_0t_0)+\frac{1}{2}\sigma_{ik}\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_k}p(\boldsymbol{ut}|\boldsymbol{u}_0t_0),$$

фундаментальное решение к-рого есть

$$p(\boldsymbol{ut}|\boldsymbol{u}_0t_0)=(2\pi)^{-n/2}(\det A)^{-1/2}\exp\left\{-\tilde{u}_i(A^{-1})_{ik}\tilde{u}_k\right\},$$

где

$$\tilde{u}_i=u_i-(e^{-\Gamma(t-t_0)})_{ik}u_{0k},$$

$$A_{ik}=\int_{t_0}^t d\tau(e^{-\Gamma(t-\tau)})_{ij}\sigma_{jl}(e^{-\Gamma(t-\tau)})_{lk}.$$

Простейшим примером двумерного ($n=2$) О.– У. п. может служить гармонический стохастич. процесс x_t, описываемый стохастич. дифференциальным уравнением

$$d\dot{x}_t+2\beta dx_t+\omega_0x_t\,dt=\sqrt{\sigma}\,dW_t,$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, ω_0 – частота свободных колебаний, β – коэффициент затухания, σ – интенсивность внешнего шума. В терминах двухкомпонентных векторов $\boldsymbol{U}_t=\begin{Vmatrix}x_t\\ \dot{x}_t\\ \omega\end{Vmatrix}$ и $d\boldsymbol{w}_t=\begin{Vmatrix}0\\ \frac{\sqrt{\sigma}}{\omega_0}dW_t\end{Vmatrix}$ уравнение Ланжевена для стохастич. гармонич. процесса приобретает вид

$$d\boldsymbol{U}_t=-\Gamma\boldsymbol{U}_tdt+d\boldsymbol{W}_t,$$

где матрица $\Gamma=\begin{Vmatrix}0&-\omega_0\\ \omega_0&2\beta\end{Vmatrix}$, а корреляционная функция двумерного процесса $\boldsymbol{W}_t$ имеет вид:

$$\mathsf{E}\{W_t^{(i)}W_s^{(k)}\}=\tilde{\sigma}_{ik}\min(t,s),$$

где матрица $\tilde{\sigma}=\frac{\sigma}{\omega_0}\begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}$.

Лит.: [1] Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S., «Phys. Rev.», 1930, v. 36, p. 823–41; [2] Чандрасекар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2., М., 1972.

Н. В. Ласкин.

ОРНШТЕЙНА – ЦЕРНИКЕ УРАВНЕНИЕ – точное соотношение, связывающее *парную корреляционную функцию* $\nu_2(r)$ и *прямую корреляционную функцию* $C(r)$ пространственно однородной системы:

$$\nu_2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=C(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+n\int d\vec{r}_3\,\nu_2(\vec{r}_1-\vec{r}_3)C(\vec{r}_3-\vec{r}_2),$$

где n – средняя плотность числа частиц в системе. О.– Ц. у. содержит две неизвестные функции. Чтобы дополнить О.– Ц. у., используются приближенные уравнения различной степени сложности (см. *Перкуса – Йевика уравнение, Гиперцепное уравнение*).

Лит.: [1] Ornstein L. S., Zernike F., «Proc. Acad. Sci. Amst.», 1914, t. 17, p. 783; [2] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978.

Д. П. Санкович.

ОРРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА УРАВНЕНИЕ – дифференциальное уравнение

$$\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi=i\alpha\,\mathrm{Re}\{(\omega-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-\omega''\varphi\}$$

для амплитуды двумерных возмущений плоскопараллельного течения вязкой жидкости, имеющих вид распространяющихся волн

$$\varphi(y)\exp(i\alpha(x-ct)).$$

Здесь Re – число Рейнольдса течения, $w(y)$ – профиль скорости, c – собственное значение, подлежащее определению. Обычно на плоскости параметров α, Re строится кривая нейтральной устойчивости, соответствующая $\mathrm{Im}\,c=0$. Для плоского течения Пуазейля установлено наличие неустойчивости. Теория численного интегрирования О.–З. у. построена с использованием ВКБ-асимптотик (см.[3]).

Лит.: [1] Orr W., «Proc. Roy Irish Acad.», A, 1906–07, v. 27, p. 9–27, 69–138; [2] Sommerfeld A., «Atti del IV Congr. intern. dei matem. Roma», 1909, v. 3, p. 116–24; [3] Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, пер. с англ., М., 1958.

Л. А. Дикий.

ОРТ – см. *Вектор.*

ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕСС – см. *Гильбертово пространство.*

ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ – см. *Координаты.*

ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ – конечная или счетная система функций $\{\varphi_i(x)\}$, принадлежащих (сепарабельному) *гильбертову пространству* $L^2(a, b)$ (квадратично интегрируемых функций) и удовлетворяющих условиям

$$\int \varphi_i(x)\varphi_j^*(x)g(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \lambda_i > 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Функция $g(x)$ называется весом О. с. ф., *означает комплексное сопряжение. Если все $\lambda_i = 1$, то О. с. ф. называется ортонормированной. О. с. ф. называется полной, если для любой функции $f(x) \in L^2(a, b)$ существует ряд Фурье

$$\sum_n c_n \varphi_n(x),$$

сходящийся к $f(x)$; такой ряд будет единственным, а его коэффициенты определяются формулами:

$$c_n = \lambda_n^{-1} \int f \varphi_n^* g(x)dx = (f, \varphi_n).$$

Для всякого ряда Фурье, построенного по О. с. ф. $\{\varphi_n(x)\}$, выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \lambda_k \leqslant \|f\|^2 = (f, f),$$

а для полной О. с. ф. справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \lambda_k = \|f\|^2.$$

Примеры полных О. с. ф.:

1) тригонометрическая система функций на отрезке $[-1, 1]$, $g(x) = 1$:

$$1/2, \cos \pi n x, \sin \pi n x, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

2) системы *ортогональных многочленов*;

3) система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$: $\chi_1(x) = 1$,

$$\chi_m(x) = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -2^{n/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right), \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка,} \end{cases}$$

а $m = 2^n + k$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $m = 2, 3, \ldots$.

О. с. ф. используют в различных физич. задачах. Спектральный анализ в теории колебаний, акустике, радиофизике и оптике основан на разложении функций в ряды по тригонометрич. системе. В любых задачах на собственные значения операторов также появляются О. с. ф., так как для эрмитова оператора $\hat{H}$ собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой. В квантовой механике, где квадрат модуля волновой функции $|\psi(x)|^2$ играет роль плотности распределения вероятностей, свойство ортонормируемости отражает тот факт, что полная вероятность найти частицу в данном состоянии равна 1, если известно, что система находится в состоянии с определенным квантовым числом.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1982.

Л. О. Чехов.

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ – см. *Гильбертово пространство.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ – см. *Гильбертово пространство.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ – система многочленов $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условию ортогональности:

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) h(x)\,dx = 0, \quad n \neq m,$$

причем степень каждого многочлена $P_n(x)$ равна индексу n, а $h(x) \geqslant 0$ – так называемая весовая функция (вес).

О. м. называются ортонормированными и обозначаются $\{\hat{P}_n(x)\}$, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и выполняется условие нормированности:

$$\int_a^b \hat{P}_n^2(x) h(x)\,dx = 1.$$

Если старший коэффициент каждого многочлена равен 1, то система О. м. обозначается $\{\tilde{P}_n(x)\}$. Наиболее важный класс О. м. составляют так наз. классические О. м.; они получаются (с точностью до постоянного множителя) при указанных ниже a, b и $h(x)$.

1) *Якоби многочлены* $\{P_n(x;\ \alpha,\ \beta)\}$ – для них $h(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $a = -1$, $b = 1$; специальные частные случаи многочленов Якоби:

ультрасферические многочлены (иногда их называют многочленами Гегенбауэра) $\{P_n(x, \alpha)\}$ – для них $\alpha = \beta$;

Чебышева многочлены 1-го рода $\{T_n(x)\}$ – для них $\alpha = \beta = -1/2$, $h(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$; Чебышева многочлены 2-го рода $\{U_n(x)\}$ – для них $\alpha = \beta = 1/2$, $h(x) = \sqrt{1-x^2}$;

Лежандра многочлены $\{P_n(x)\}$ – для них $\alpha = \beta = 0$, $h(x) \equiv 1$.

2) *Лагерра многочлены* $\{L_n(x)\}$ – для них $h(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$; обобщенные многочлены Лагерра $\{L_n(x, \alpha)\}$, для к-рых $h(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, $\alpha > -1$.

3) *Эрмита многочлены* $\{H_n(x)\}$ – для них $a = -\infty$, $b = +\infty$, $h(x) = e^{-x^2}$.

Весовая функция классич. О. м. удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1(x)}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} = \frac{A(x)}{B(x)}; \quad x \in (a, b), \qquad (*)$$

а многочлен $y = P_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$B(x)y'' + [A(x) + B'(x)]y' - n[p_1 + (n+1)q_2]y = 0.$$

О. м. обладают многими общими свойствами. Нули О. м. в случае ортогональности по интервалу (a, b) являются действительными, различными и расположены внутри (a, b), причем между двумя соседними нулями многочлена $P_n(x)$ находится один нуль многочлена $P_{n-1}(x)$. Нули О. м. часто применяются в качестве узлов интерполяционных и квадратурных формул.

Многочлен $P_n(x)$ может быть представлен в виде так наз. формулы Родрига:

$$P_n(x) = \frac{c_n}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n}[h(x)B^n(x)],$$

где c_n – нормировочный коэффициент (постоянное), а B – см. формулу (*). Исторически первым примером О. м. были многочлены Лежандра. Затем были введены многочлены Чебышева, общие многочлены Якоби, многочлены Эрмита и Лагерра.

Лит.: [1] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979.

П. К. Суетин.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ в квантовой механике – чистые состояния, описываемые ортогональными векторами в гильбертовом пространстве. Если ψ_1, ψ_2 –

два ортогональных вектора в гильбертовом пространстве и система находится в состоянии ψ_1, то вероятность обнаружения системы в состоянии ψ_2 равна нулю. В частности, всегда ортогональны состояния, в к-рых нек-рая наблюдаемая имеет нулевую дисперсию и различные средние значения. *Ф. А. Лунев.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТОР – см. *Проекционный оператор.*

ОРТОНОРМИРОВАННАЯ СИСТЕМА – см. *Гильбертово пространство, Ортогональная система функций.*

ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС – см. *Гильбертово пространство.*

ОРТОПРОЕКТОР – см. *Проекционный оператор.*

ОРТОХРОННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Лоренца группа, Лоренца преобразование.*

ОСГУДА–БРАУНА ТЕОРЕМА – см. *Аналитическая функция.*

ОСЕВОЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ – см. *Момент инерции.*

ОСЛАБЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ ПРИНЦИП – см. *Кластерное свойство, Термодинамический предел* для равновесных состояний.

ОСНАЩЕННОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Гильбертово пространство.*

ОСНОВНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Обобщенная функция.*

ОСНОВНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – уравнение для вероятности распределения квантовой системы по квантовым состояниям. Установлено В. Паули (W. Pauli, 1928). О. к. у. является квантовым кинетич. уравнением; иногда его называют управляющим уравнением, или уравнением Паули, из него можно вывести *Больцмана кинетическое уравнение.*

О. к. у. для вероятности P_n квантового состояния n имеет вид

$$\frac{dP_n}{dt} = \sum_m (w_{nm}P_m - w_{mn}P_n), \qquad (1)$$

где w_{nm} – вероятность перехода системы из квантового состояния m в состояние n в единицу времени под влиянием не зависящего от времени возмущения. Индексы n, m соответствуют квантовым стационарным состояниям гамильтониана свободных частиц H_0, то есть многочастичным состояниям. Вероятность P_n равна диагональному элементу *плотности матрицы* ρ_{nn}.

О. к. у. описывает необратимый процесс приближения к статистич. равновесию систем со многими степенями свободы. Обычно предполагают, что оно вызывается возмущающим членом λV в *гамильтониане* $H = H_0 + \lambda V$ (λ – параметр взаимодействия). Внешние поля предполагаются отсутствующими, возмущение считается малым. О. к. у. выводится из *Лиувилля уравнения* для матрицы плотности во втором приближении теории возмущений. Для изолированных систем вероятность прямого перехода равна вероятности обратного перехода:

$$w_{nm} = w_{mn},$$

так как

$$w_{mn} = 2\pi\lambda^2\hbar^{-1}|V_{mn}|^2\delta(\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n).$$

Для дискретных m, n δ-функция переходит в символ Кронекера.

Если динамич. подсистема взаимодействует с системой с большим числом степеней свободы, находящейся в состоянии статистич. равновесия (термостатом), то для получения вероятности распределения состояний в динамич. подсистеме нужно просуммировать распределение вероятностей в полной системе (удовлетворяющее О. к. у.) по квантовым состояниям термостата. В этом случае вероятность распределения по состояниям динамич. подсистемы также удовлетворяет О. к. у., но вероятность прямого перехода уже не равна вероятности обратного перехода, а удовлетворяет принципу детального равновесия:

$$w_{mn}/w_{nm} = \exp[-(\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m)/kT],$$

T – абсолютная температура, m, n определяют теперь квантовые состояния динамич. подсистемы, соответствующие уровням энергии $\mathscr{E}_m$, $\mathscr{E}_n$. Наиболее простую форму имеет О. к. у. для одночастичных квантовых уровней системы. Тогда числа заполнения уровней n_k удовлетворяют уравнению

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_l (w_{kl}n_l - w_{lk}n_k),$$

w_{kl} – вероятность перехода в единицу времени между одночастичными уровнями.

О. к. у. позволяет ввести энтропию неравновесного квантового состояния:

$$S = -k\sum_n P_n \ln P_n,$$

к-рая монотонно возрастает, стремясь к равновесной при $t \to \infty$, то есть удовлетворяет квантовой H-теореме Больцмана.

При выводе О. к. у. В. Паули использовал предположение о хаотичности фаз квантовых состояний (гипотеза молекулярного хаоса) в любой момент времени. Затем Л. Ван Хов (L. Van Hove) показал, что достаточно предположить случайность фаз лишь для начального момента времени. Для вывода О. к. у. существенны макроскопич. размеры системы, то есть наличие большого числа степеней свободы. Математически это выражается предельным переходом, при к-ром объем системы стремится к бесконечности (при фиксированном отношении объема к числу частиц) и приводит к возникновению так наз. диагональных сингулярностей в матричных элементах энергии возмущения. Строгий вывод О. к. у. возможен в пределе $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ при $\lambda^2 t = \text{const}$. Наиболее прост вывод О. к. у. с помощью метода проекционных операторов.

В общем случае вероятность $P_n(t)$ зависит от предшествующей истории (эффект памяти) и О. к. у. имеет вид

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \sum_m [w_{nm}(t-\tau)P_m(\tau) - w_{mn}(t-\tau)P_n(\tau)]d\tau,$$

где $w_{nm}(t-\tau)$ – функция памяти. Для непрерывно распределенных случайных переменных x О. к. у. для плотности вероятности $W(x, t)$ имеет форму интегрального уравнения:

$$\frac{\partial W(x,t)}{dt} = \int [w(x, x')W(x', t) - w(x', x)W(x, t)]dx'$$

[$w(x, x')$ – плотность вероятности перехода $x' \to x$].

Метод О. к. у. применяется в теории магнитного резонанса, квантовой радиофизике и квантовой оптике.

Лит.: [1] Ван Хов Л., Квантовомеханические возмущения и кинетическое уравнение, в сб.: Вопросы квантовой теории необратимых процессов, пер. с англ., М., 1961; [2] Файн В. М., Ханин Я. И., Квантовая радиофизика, М., 1965, гл. 2; [3] Честер Дж., Теория необратимых процессов, пер. с англ., М., 1966; [4] Паули В., Труды по квантовой теории, [пер. с нем.], М., 1975, с. 661; [5] Зубарев Д. Н., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 15, М., 1980. *Д. Н. Зубарев.*

ОСНОВНОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Обобщенная функция.*

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ – аналог понятия *Гиббса распределения* для предельного случая нулевой температуры. Поскольку распределение Гиббса в конечном объеме $\Lambda \subset T$ для решетчатой системы с обратной температурой β задается как

$$p_\Lambda^\beta(x_t, t \in \Lambda) = \frac{\exp\{-\beta H_\Lambda(x_t, t\in\Lambda)\}}{Z_\Lambda^\beta},$$

где H_Λ – гамильтониан системы и Z_Λ^β – статистич. сумма, то пределом p_Λ при $\beta \to \infty$ распределения p_Λ^β является равномерное распределение, сосредоточенное на множестве

конфигураций $(x_t, t\in\Lambda)$, для к-рых гамильтониан H_Λ принимает минимальное значение. Это подсказывает следующее определение, применимое к случайному полю Гиббса на всем бесконечном множестве индексов T. Фиксировав потенциал U решетчатой системы для любого конечного $\Lambda\subset T$, обозначим через $\varepsilon_\Lambda(x_{T\setminus\Lambda})$ совокупность конфигураций x_Λ в Λ таких, что при фиксированном значении $x_{T\setminus\Lambda}$ конфигурации в $T\setminus\Lambda$ условный гамильтониан $H(x_\Lambda|x_{T\setminus\Lambda})$ принимает минимальное значение. Случайное поле $(X_t, t\in T)$ называется основным состоянием для потенциала U, если при любом конечном $\Lambda\subset T$ почти всюду условное распределение для $\{X_t, t\in\Lambda\}$ при заданном значении конфигурации $(X_t, t\in T\setminus\Lambda)$ вне Λ является равномерным распределением на множестве $\varepsilon_\Lambda[(X_t, t\in T\setminus\Lambda)]$. Если О. с. сосредоточено на одной конфигурации $(x_t, t\in\Lambda)$, то эта конфигурация называется основной. Эквивалентно, конфигурация $(x_t, t\in\Lambda)$ называется основной, если при любом конечном Λ множество $\varepsilon_\Lambda[(x_t, t\in T\setminus\Lambda)]$ состоит из единственной конфигурации $(x_t, t\in\Lambda)$.

Оправданием этому определению служит тот легко доказываемый факт, что если P^β – распределение вероятностей гиббсовского случайного поля с обратной температурой β и потенциалом U, то любая предельная при $\beta\to\infty$ (в смысле слабой сходимости) точка семейства распределений P^β является О. с. Обратная к этой теореме, вообще говоря, не верна. Исследование совокупности О. с. для многих конкретных ситуаций (напр., для *Изинга модели* и *Гейзенберга модели*) является существенно более простой задачей, чем исследование совокупности гиббсовских состояний. Поэтому важное в теории фазовых переходов место занимает выделение О. с., для к-рых есть семейство сходящихся к ним при $\beta\to\infty$ гиббсовских состояний. Наиболее общий из результатов такого рода – *Пирогова – Синая теорема.*

Лит.: [1] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [2] Dobrushin R. L., Shlosman S. B., «Sov. Sci. Rev., Sec. C», 1985, v. 5, p. 53–195.

Р. Л. Добрушин.

ОСОБАЯ ТОЧКА аналитической функции $f(z)$ – препятствие для *аналитического продолжения* элемента функции $f(z)$ комплексного переменного z вдоль какого-либо пути на плоскости этого переменного.

Пусть аналитич. функция $f(z)$ определена нек-рым элементом $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, состоящим из степенного ряда

$$f_\zeta = f_\zeta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\zeta)^k \qquad (1)$$

и его круга сходимости

$$U(\zeta, R) = \{z\in\overline{\mathbb{C}}: |z-\zeta| < R\}$$

с центром $\zeta\neq\infty$ и радиусом сходимости $R>0$. Рассмотрим всевозможные пути $L:[0, 1]\to\mathbb{C}$, то есть непрерывные отображения $L: z=\varphi(t)$ отрезка $0\leqslant t\leqslant 1$ в расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, начинающиеся в центре этого элемента ζ, $\zeta=\varphi(0)$. Если аналитич. продолжение данного элемента возможно вдоль любого такого пути в любую точку $z\in\overline{\mathbb{C}}$, то получающаяся при этом полная аналитич. функция $f(z)$ сводится к константе: $f(z)=\text{const}$. Для нетривиальных же аналитич. функций $f(z)\neq\text{const}$ характерно существование препятствий для аналитич. продолжения вдоль нек-рых путей L.

Пусть точка a расширенной плоскости $\mathbb{C}$ расположена на пути $L_1: z=\varphi_1(t)$, $a=\varphi_1(\tau_1)$, $0<\tau_1\leqslant 1$, $\varphi_1(0)=\zeta$, и на пути $L_2: z=\varphi_2(t)$, $a=\varphi_2(\tau_2)$, $0<\tau_2\leqslant 1$, $\varphi_2(0)=\zeta$, причем аналитич. продолжение вдоль L_1 и L_2 осуществимо во все предшествующие точки $z=\varphi_1(t)$, $0\leqslant t<\tau_1$, и $z=\varphi_2(t)$, $0\leqslant t<\tau_2$. Два таких пути L_1 и L_2 называются эквивалентными по отношению к аналитич. продолжению данного элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ в точку a, если для любой окрестности $V(a)$ точки a в $\overline{\mathbb{C}}$ существует такое число $\varepsilon>0$, что круговой элемент, получаемый из $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ посредством аналитич. продолжения вдоль L_1 до какой-либо точки $z'=\varphi_1(\tau')$, $\tau_1-\varepsilon<\tau'<\tau_1$, может быть продолжен вдоль нек-рого пути, расположенного в $V(a)$, в элемент, получаемый посредством продолжения вдоль L_2 из $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ до какой-либо точки $z''=\varphi_2(\tau'')$, $\tau_2-\varepsilon<\tau''<\tau_2$.

Если аналитич. продолжение в точку a осуществимо вдоль нек-рого пути L, то оно возможно и вдоль всех путей класса эквивалентности $\{L\}$, содержащего L. В этом случае пара $(a, \{L\})$ называется регулярной, или правильной; она определяет однозначную регулярную ветвь аналитич. функции $f(z)$ в окрестности точки $V(a)$.

Если же аналитич. продолжение вдоль нек-рого пути $L: z=\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $\varphi(0)=\zeta$, проходящего через a, $a=\varphi(\tau)$, $0<\tau\leqslant 1$, осуществимо во все точки $\varphi(t)$, $0\leqslant t<\tau$, предшествующие a, но не осуществимо в точку $a=\varphi(\tau)$, то a есть особая точка при аналитическом продолжении элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ вдоль пути L. В этом случае она будет особой и при продолжении вдоль всех проходящих через a путей класса эквивалентности $\{L\}$. Пара $(a, \{L\})$, состоящая из точки $a\in\overline{\mathbb{C}}$ и класса эквивалентности $\{L\}$ путей L, проходящих через a, для каждого из к-рых точка a особая, называется особой точкой аналитической функции $f(z)$, определяемой элементом $(U(\zeta, R), f_\zeta)$. Две О. т. $(a, \{L\})$ и $(b, \{M\})$ считаются совпадающими, если $a=b$ и совпадают классы $\{L\}$ и $\{M\}$.

Если радиус сходимости исходного ряда (1) $R<\infty$, то на окружности $\Gamma=\{z\in\overline{\mathbb{C}}: |z-\zeta|=R\}$ круга сходимости $U(\zeta, R)$ непременно имеется хотя бы одна особая точка a элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, то есть О. т. аналитич. функции $f(z)$ при продолжении вдоль путей $z=\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, класса $\{L\}$ таких, что $z=\varphi(t)\in U(\zeta, R)$ при $0\leqslant t<1$, $a=\varphi(1)$.

Пусть в достаточно малой окрестности $V(a)=\{z\in\overline{\mathbb{C}}: |z-a|<R\}$ точки $a\neq\infty$ (или $V(\infty)=\{z\in\overline{\mathbb{C}}: |z|>R\}$) аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей определенного класса $\{L\}$, возможно во все точки, отличные от a, то есть по всем путям, расположенным в проколотой окрестности $V'(a)=\{z\in\overline{\mathbb{C}}: 0<|z-a|<R\}$ (соответственно $V'(\infty)=\{z\in\overline{\mathbb{C}}: R<|z|<\infty\}$); тогда О. т. $(a, \{L\})$ называется *изолированной особой точкой.* Если при этом аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей класса $\{L\}$, по всевозможным замкнутым путям, расположенным в $V'(a)$, не изменяет этих элементов, то изолированная О. т. $(a, \{L\})$ называется особой точкой однозначного характера. Такая О. т. может быть полюсом или существенно особой точкой: если существует бесконечный предел $\lim f(z)=\infty$ при стремлении $z\to a$ вдоль путей класса $\{L\}$, то О. т. однозначного характера $(a, \{L\})$ называется *полюсом*; если не существует никакого конечного или бесконечного предела $\lim f(z)$ при стремлении $z\to a$ вдоль путей класса $\{L\}$, то $(a, \{L\})$ – *существенно особая точка*; случай конечного предела соответствует регулярной паре $(a, \{L\})$. Если же аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей класса $\{L\}$, по замкнутым путям, окружающим в $V'(a)$ точку a, изменяет эти элементы, то изолированная О. т. $(a, \{L\})$ называется *ветвления точкой*, или особой точкой многозначного характера. Класс точек ветвления, в свою очередь, подразделяется на алгебраические точки ветвления и трансцендентные точки ветвления (включая логарифмические точки ветвления). Если после нек-рого конечного числа $m\geqslant 2$ однократных обходов точки a в одном и том же направлении в $V'(a)$ элементы, получаемые вдоль путей класса $\{L\}$, принимают исходный вид, то $(a, \{L\})$ есть алгебраич. точка ветвления и число $m-1$ называется ее порядком. В противном случае, когда

обходы точки a дают все новые и новые элементы, $(a, \{L\})$ есть трансцендентная точка ветвления.

Если радиус сходимости исходного ряда (1) $R=\infty$, то он представляет *целую функцию* $f(z)$, голоморфную во всей конечной плоскости $\mathbb{C}$. Такая функция в случае $f(z)\neq \text{const}$ имеет единственную изолированную О. т. $a=\infty$ однозначного характера; если при этом $a=\infty$ – полюс, то $f(z)$ есть целая рациональная функция, или многочлен (полином); если же $a=\infty$ – существенно особая точка, то $f(z)$ есть целая трансцендентная функция.

Мероморфная функция $f(z)$ в конечной плоскости $\mathbb{C}$ получается, когда аналитич. продолжение ряда (1) приводит к однозначной аналитич. функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$, имеющей в $\mathbb{C}$ в качестве О. т. только полюсы. Если при этом и $a=\infty$ есть полюс или регулярная точка, то общее число всех полюсов $f(z)$ в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ конечно и $f(z)$ есть *рациональная функция*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1–2, М., 1967–68; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1–2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ОСОБАЯ ТОЧКА дифференциального уравнения – точка, в которой одновременно обращаются в нуль и числитель и знаменатель правой части дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \qquad (*)$$

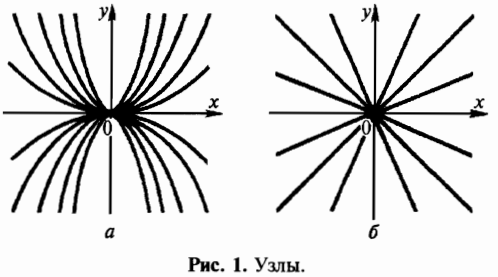
где P и Q – непрерывно дифференцируемые функции. Предполагая О. т. расположенной в начале координат и используя формулу Тейлора, можно представить уравнение (*) в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy+P_1(x,y)}{ax+by+Q_1(x,y)},$$

где $P_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ – бесконечно малые по отношению к $\sqrt{x^2+y^2}$. Характер поведения интегральных кривых около О. т. зависит от корней λ_1 и λ_2 характеристич. уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Именно, если $\lambda_1\neq\lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2>0$ или $\lambda_1=\lambda_2$, то О. т. есть *узел*; все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности узла, входят в него. Если $\lambda_1\neq\lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2<0$, то О. т. есть *седло*; в окрестности седла четыре интегральные кривые (сепаратрисы) входят в О. т., а между ними располагаются интегральные кривые типа гиперболы. Если $\lambda_{1,2}=-\alpha\pm i\beta$, $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$, то О. т. есть *фокус*; все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности фокуса, представляют собой спирали с бесконечным числом витков в любой сколь угодно малой окрестности фокуса. Если, наконец, $\lambda_{1,2}=\pm i\beta$, $\beta\neq 0$, то характер О. т. не определяется одними линейными членами в разложениях $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, как это имело место во всех перечисленных случаях; здесь О. т. может быть фокусом или *центром*, а может иметь и более сложный характер. В окрестности центра все интегральные



а *б*

Рис. 1. Узлы.

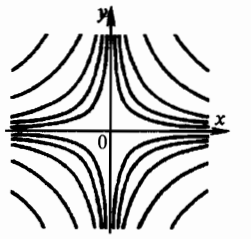


Рис. 2. Седло.

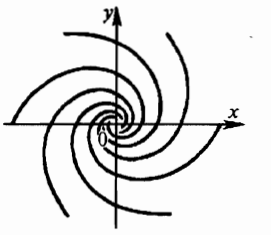


Рис. 3. Фокус.

кривые являются замкнутыми и содержат центр внутри себя. Так, напр., точка (0, 0) является узлом для уравнений $y'=2y/x$ ($\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$; рис. 1, *а*) и $y'=y/x$ ($\lambda_1=\lambda_2=1$; рис. 1, *б*), седлом для уравнения $y'=-y/x$ ($\lambda_1=-1$; $\lambda_2=1$; рис. 2), фокусом для уравнения $y'=(x+y)/(x-y)$ ($\lambda_1=1-i$, $\lambda_2=1+i$; рис. 3) и центром для уравнения $y'=-x/y$ ($\lambda_1=-i$, $\lambda_2=i$; рис. 4).

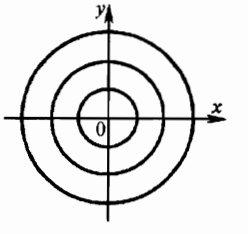


Рис. 4. Центр.

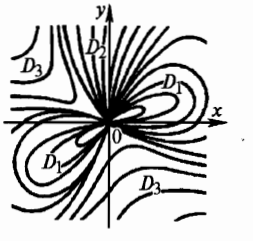


Рис. 5. Окрестность особой точки высшего порядка.

Если $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$, то О. т. называется особой точкой высшего порядка. О. т. высшего порядка могут принадлежать к указанным типам, но могут иметь и более сложный характер. В случае когда функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ аналитические, окрестность О. т. высшего порядка может распадаться на области (рис. 5): D_1 – заполненные интегральными кривыми, обоими концами входящими в О. т. (эллиптич. области), D_2 – заполненные интегральными кривыми, одним концом входящими в О. т. (параболич. области), и D_3 – области, ограниченные двумя интегральными кривыми, входящими в О. т., между к-рыми расположены интегральные кривые типа гипербол (гиперболич. области). Если нет интегральных кривых, входящих в О. т., то О. т. называется точкой устойчивого типа. Окрестность устойчивой О. т. состоит из замкнутых интегральных кривых, содержащих О. т. внутри себя, между к-рыми расположены спирали (рис. 6).

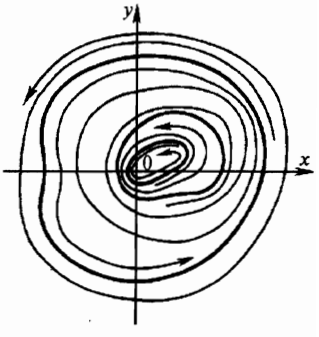


Рис. 6. Особая точка устойчивого типа.

Изучение О. т. дифференциальных уравнений, то есть по существу изучение поведения семейств интегральных кривых в окрестности О. т., составляет один из разделов качественной теории дифференциальных уравнений и играет важную роль в приложениях, в частности в вопросах устойчивости движения.

См. также *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.–Л., 1949; [2] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971. *В. В. Немыцкий.*

СОБОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

СОБЫЙ УЗЕЛ – см. *Узел.*

СРЕДНЕНИЯ МЕТОД – см. *Усреднения метод.*

СТАТОЧНЫЙ СПЕКТР – см. *Спектр* оператора.

СТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА – формула интегрального исчисления функций многих переменных, устанавливающая связь между n-кратным интегралом по области и $(n-1)$-кратным интегралом по ее границе. Пусть функции $v_i = X_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ вместе со своими частными производными $\partial X_i/\partial x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, интегрируемы по Лебегу в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$, граница ∂G к-рой является объединением конечного множества кусочно гладких $(n-1)$-мерных гиперповерхностей, ориентированных с помощью внешней нормали ν. Тогда О. ф. имеет вид:

$$\int\dots\int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\,dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int\dots\int_{\partial G} \sum_{i=1}^n X_i\,dx_{i+1} \dots dx_n dx_1 \dots dx_{i-1}. \qquad (1)$$

Если $\cos\alpha_i$, $i = 1, 2, ..., n$, – направляющие косинусы внешних нормалей ν гиперповерхностей, составляющих границу ∂G области G, то формула (1) может быть записана в виде

$$\int\dots\int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\,dv = \int\dots\int_{\partial G} \sum_{i=1}^n X_i \cos\alpha_i\,d\sigma, \qquad (2)$$

где $dv = dx_1 \dots dx_n$ – элемент n-мерного объема в $\mathbb{R}^n$, а $d\sigma$ – элемент $(n-1)$-мерного объема на ∂G.

В терминах векторного поля $\boldsymbol{a} = (X_1, ..., X_n)$ формулы (1) (2) означают равенство интеграла от *дивергенции* этого поля по области G его *потоку* через границу области G:

$$\int\dots\int_G \operatorname{div} a\,dv = \int\dots\int_{\partial G} a\nu\,d\sigma.$$

Для гладких функций О. ф. была впервые получена в пространственном случае М. В. Остроградским в 1828. На n-кратные интегралы в случае произвольного натурального n О. ф. была обобщена им в 1834. При $n = 3$ для одного частного случая О. ф. была получена К. Гауссом (C. Gauss, 1813), поэтому иногда О. ф. называют также формулой Гаусса – Остроградского. Обобщением О. ф. является *Стокса формула* для многообразий с краем. *Л. Д. Кудрявцев.*

СЦИЛЛИРУЮЩИЙ ИНТЕГРАЛ – интеграл вида

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x)\,dx_1 \dots dx_n,$$

зависящий от параметра τ. Функция f называется фазой О. и., φ – амплитудой О. и. *С. В. Чмутов.*

СЦИЛЛИРУЮЩИЙ СОЛИТОН – см. *Беклунда преобразование.*

СЦИЛЛЯТОР – физическая система (или материальная точка), совершающая колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия. Термин «О.» применим к любой системе, если описывающие ее величины периодически изменяются со временем. Простейшие примеры О. в классич. механике – грузик на пружинке, *маятник.*

Важнейший тип О. – линейный гармонический осциллятор, колебания к-рого являются основной моделью движения частиц в атомах, атомных ядрах, молекулах, твердых телах. Потенциальная энергия линейного гармонич. О.

$$U = kx^2/2,$$

где $x(t)$ – отклонение от положения равновесия, k – постоянный коэффициент (в случае груза на пружинке k – жесткость пружины). Она представляет собой первый член разложения в ряд по x потенциальной энергии $U(x)$ при малых x.

Уравнение движения линейного гармонич. О. имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ – частота О., m – масса ($\omega = 2\pi/T$, где T – период колебаний; точки означают дифференцирование по времени). Общее решение уравнения (1):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\,[A \exp i(\omega t + \varphi)] \qquad (2)$$

(A – амплитуда колебаний О., φ – начальная фаза). Движение О., описываемое зависимостью (2), происходит под влиянием возвращающей силы F, направленной к положению равновесия и пропорциональной величине отклонения от положения равновесия: $F = -\partial U/\partial x = -kx$. При движении О. в пренебрежении силами трения его полная энергия

$$\mathscr{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \qquad (3)$$

сохраняется. Кинетич. энергия $mx^2/2$ и потенциальная энергия $kx^2/2$ в процессе движения изменяются от нуля до $\mathscr{E}$. Энергия колебаний О. может быть выражена через амплитуду и частоту:

$$\mathscr{E} = m\omega^2 A^2/2. \qquad (4)$$

Импульс О. $p = m\dot{x}$ меняется по тому же закону (2), что и x, но со сдвигом по фазе на $\pi/2$:

$$p(t) = m\omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2) \qquad (5)$$

(соответственно кинетич. и потенциальной энергии О. изменяются в противофазе). Если изобразить движение О. на фазовой плоскости, по оси абсцисс к-рой отложена координата, а по оси ординат – импульс, то его периодич. движение происходит по эллипсу

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{(m\omega A)^2} = 1 \qquad (6)$$

с полуосями соответственно A и $m\omega A$.

Понятие «О.» распространяется и на немеханич. системы: колебания тока и напряжения в колебательном контуре, колебания векторов напряженностей электрич. и магнитного полей в электромагнитной волне и т. д.

Квантовый осциллятор описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}, \qquad (7)$$

где $\hat{p}$ и $\hat{x}$ – операторы импульса и координаты; в конфигурационном представлении

$$\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x,\ \hat{x} = x.$$

Уровни энергии квантового О. эквидистантны:

$$\mathscr{E}_n = \hbar\omega(n + 1/2),\ n = 0, 1, 2, ... \qquad (8)$$

Они определяются из *Шредингера уравнения*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_n(x,t)}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2\psi_n(x,t)}{2} = i\hbar\frac{\partial\psi_n}{\partial t} \qquad (9)$$

и изображаются обычно на кривой потенциальной энергии О., а волновые функции $\psi_n(x, t)$ стационарных состояний О. выражаются через многочлены Эрмита H_n:

$$\psi_n(x, t) =$$

$$= (l\sqrt{\pi}\,2^n n!)^{-1/2} \exp(-x^2/2l^2) H_n(x/l) \exp(-i\mathscr{E}_n t/\hbar). \qquad (10)$$

Здесь l – амплитуда нулевых колебаний, $l = \sqrt{\hbar/m\omega}$. В основном состоянии О. с волновой функцией

$$\psi_0(x) = (l\sqrt{\pi})^{-1/2} \exp(-x^2/2l^2) \exp(-i\omega t/2) \qquad (11)$$

его энергия (энергия нулевых колебаний) имеет наинизшее возможное значение $\mathscr{E}_0 = \hbar\omega/2$. В стационарных состояниях О. средние значения координаты и импульса равны нулю. Согласно теореме Эренфеста, средние значения координаты и импульса гармонич. О. изменяются в соответствии с

классич. траекториями. Наглядно это движение проявляется в нормированных когерентных состояниях О.:

$$\psi_\alpha(x,t) = (m\omega/\hbar\pi)^{1/4}\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{i\omega t}{2} - \frac{x^2}{2\hbar}m\omega + \right.$$
$$\left. + \exp(-i\omega t)\alpha x(2m\omega/\hbar)^{1/2} - 1/2\alpha^2\exp(-2i\omega t)\right\}, \qquad (12)$$

удовлетворяющих нестационарному уравнению Шредингера и являющихся собственными состояниями для неэрмитового интеграла движения (оператора уничтожения)

$$\hat{A}(t) = \frac{\exp(i\omega t)}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{l} + l\frac{i\hat{p}}{\hbar}\right), \quad [\hat{A}, \hat{A}^+] = 1, \qquad (13)$$

с комплексным собственным значением α: $\hat{A}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$. В когерентном состоянии ψ_α средние значения координаты $\langle\hat{x}\rangle$ и импульса $\langle\hat{p}\rangle$, как и в классич. механике, описывают в фазовом пространстве эллипс. Оператор уничтожения $\hat{A}$ и оператор рождения $\hat{A}^+$ действуют на n-е состояние следующим образом:

$$\hat{A}\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}, \quad \hat{A}^+\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}, \qquad (14)$$

то есть соответственно уничтожают и рождают квант энергии О. Через операторы рождения и уничтожения гамильтониан гармонич. О. выражается так:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{A}^+\hat{A} + 1/2). \qquad (15)$$

Важность модели О. заключается в том, что все современные модели квантовой теории поля базируются на многомерном (бесконечномерном) обобщении этого выражения:

$$\hat{H} = \sum_i \hbar\omega_i(\hat{A}_i^+\hat{A}_i + 1/2), \qquad (16)$$

где индекс i трактуется как характеристика моды поля (электромагнитного, акустического и т. д., то есть фотона, фонона и т. п.), а операторы $\hat{A}_i^+$, $\hat{A}_i$ — как операторы рождения и уничтожения кванта бозонного поля. К этой же модели сводятся движение заряда в магнитном поле, изменение тока и напряжения в колебательном контуре, колебания ядер в многоатомных молекулах и атомов и молекул в твердых телах, колебательное движение нуклонов в ядрах и т. д.

При учете затухания уравнение движения (1) О. принимает вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (17)$$

где γ — коэффициент затухания, а движение О. представляет собой затухающие колебания около положения равновесия:

$$x(t) = A\exp(-\gamma t)\cos(\omega t + \varphi). \qquad (18)$$

В квантовой картине затухание колебаний О. описывается несколькими моделями, одна из к-рых базируется на гамильтониане

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m\exp(2\gamma t)} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2\exp(2\gamma t)}{2}, \qquad (19)$$

причем во всех моделях средние значения координаты О. описываются формулой (18), а для других величин в рамках разных моделей имеются различия. Если на О. действует внешняя периодическая (с частотой Ω) сила $f\cos(\Omega t)$, то возникают вынужденные колебания О. на частоте вынуждающей силы, описываемые формулой

$$x(t) = \frac{f\cos(\Omega t + \tilde{\varphi})}{m\sqrt{(\Omega^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\tilde{\varphi} = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2-\omega^2}. \qquad (20)$$

Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при сближении собственной частоты О. и частоты вынуждающей силы называется резонансом гармонич. О. Коэффициент затухания определяет сдвиг фазы $\tilde{\varphi}$ колебаний О. по отношению к вынуждающей силе, равный 0 при отсутствии затухания и $\pi/2$ в резонансе. Для квантового аналога О. с затуханием также существует резонанс.

Под влиянием внешней силы $f(t)$ квантовый О. может переходить с одного уровня энергии (n) на другие (m). Вероятность этого перехода $W_{nm}(t)$ для О. без затухания дается формулой

$$W_{nm}(t) = \frac{n!}{m!}|\delta|^{2(n-m)}\exp(-|\delta|^2)\left\{L_n^{m-n}(|\delta|^2)\right\}^2, \qquad (21)$$

где

$$\delta(t) = -il\hbar^{-1}\int_0^t f(\tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau,$$

L_n^{m-n} — многочлены Лагерра. Правила отбора для О. определяются ненулевыми матричными элементами оператора координаты (дипольное приближение). Согласно формулам (13), (14), эти элементы отличны от нуля только для переходов между соседними уровнями, поэтому излучение О. происходит на одной частоте (совпадающей с классической, $\omega = \sqrt{k/m}$).

Если потенциальная энергия О. содержит члены типа αx^4, βx^6 и т. д., то О. называется ангармоническим (нелинейным) и характер его движения радикально отличается от даваемого формулой (2). Если частота гармонич. О. меняется со временем, то О. называется параметрическим, для к-рого также характер колебаний отличен от (2), причем существуют новые явления, напр. параметрич. резонанс О.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 4 изд., М., 1989; [2] их же, Механика, 4 изд., М., 1988, с. 207; [3] Малкин И. А., Манько В. И., Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, М., 1979. *В. И. Манько.*

ОСЦИЛЛЯТОРА УРАВНЕНИЕ — см. *Осциллятор, Волновое уравнение.*

ОСЦИЛЛЯЦИЙ НОСИТЕЛЬ $\operatorname{osc}^{(ck)}(\psi)$ волновой функции ψ по $\operatorname{mod} O(h^k)$ — дополнение в фазовом пространстве $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$ к множеству точек $z \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$ таких, что в некоторой окрестности $U_z \ni z$ плотности функция ρ_ψ есть $O(h^{2k})$ (то есть для любой функции $f \in C_0^\infty(U_z)\langle\rho_\psi, f\rangle = O(h^{2k})$, $k > 0$).

О. н. по $\operatorname{mod} o(1)$, $\operatorname{osc}^{(o)}(\psi)$ совпадает с *осцилляций фронтом* $\operatorname{osc}_o(\psi)$, если последний существует. О. н. по $\operatorname{mod} O(h^\infty)$ — аналог волнового фронта распределения по Хермандеру (см. также *Сингулярностей плотность*). Если $\psi = K\varphi$, где K — *Маслова канонический оператор* на лагранжевом многообразии L, то $\operatorname{osc}^{(l)}(\psi) \subset L$ при любом l.

Лит.: [1] Карасев М. В., Маслов В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 13, М., 1979, с. 145–267; [2] их же, «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 6, с. 115–73; [3] их же, «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1983, т. 47, № 5, с. 999–1029. *В. Е. Назайкинский.*

ОСЦИЛЛЯЦИЙ ПЛОТНОСТЬ — квазиклассический предел при $h \to 0$ функции плотности, отвечающей заданной волновой функции ψ:

$$F_\psi = \lim_{h\to 0}\rho_\psi$$

(предельный переход производится в слабом смысле, то есть в топологии пространства обобщенных функций). Если $\psi = K\varphi$, где K — *Маслова канонический оператор* на лагранжевом многообразии $L \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$ с мерой μ, то

$$F_\psi = |\varphi|^2\tilde{\mu},$$

где $\tilde{\mu}$ — мера в фазовом пространстве, сосредоточенная на L,

$$\langle\tilde{\mu}, f\rangle = \int_L f\,|\mu|, \quad f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n\right).$$

Если ψ — решение уравнения Шредингера

$$-ih\partial_t\psi + H(x, -ih\partial_x)\psi = 0,$$

имеющее О. п. F_ψ, то F_ψ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\partial_t F_\psi + \{H, F_\psi\} = 0,$$

$\{H, F_\psi\}$ – *Пуассона скобка* функций H и F_ψ.

Лит.: [1] Карасев М. В., Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 6, с. 115–73.

В. Е. Назайкинский.

ОСЦИЛЛЯЦИЙ СУБПЛОТНОСТЬ – коэффициенты G_ψ (обобщенная функция на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}_{q,p}$) разложения по h функции плотности Блохинцева–Вагнера ρ^h_ψ, отвечающей волновой функции ψ (см. [1]):

$$\rho^h_\psi = F_\psi + hG_\psi + O(h),$$

где F_ψ – *осцилляций плотность*. Напр., О. с. для гауссова пакета

$$\psi(q) = (\pi h)^{-n/4} \exp(-q^2/2h)$$

имеет вид:

$$G_\psi = \frac{1}{4}\Delta(\delta(q)\delta(p)),$$

где Δ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^{2n}_{q,p}$.

Лит.: [1] Карасев М. В., Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 6, с. 115–73.

Ю. М. Воробьев.

ОСЦИЛЛЯЦИЙ ФРОНТ волновой функции ψ – подмножество фазового пространства, представляющее собой носитель соответствующей *осцилляций плотности* F_ψ. Если ψ – решение уравнения Шредингера

$$-ih\partial_t\psi + H(x, -ih\partial_x)\psi = 0,$$

то О. ф. распространяется вдоль характеристик функции Гамильтона $H(x, p)$ (решений системы Гамильтона $\dot{x} = H_p(x, p)$, $\dot{p} = -H_x(x, p)$).

См. также *Осцилляций носитель.*

В. Е. Назайкинский.

ОСЦИЛЛЯЦИЙ ШЛЕЙФ – область, возникающая в результате распространения возмущений от точечных источников в средах с дисперсией. Типичными примерами являются среды, описываемые разностными, дифференциально-разностными или псевдодифференциальными уравнениями с малым параметром. Математич. описание этого явления на примере уравнения кристалла (см. *Разностные уравнения*; асимптотика решения)

$$h^2 u_{tt} + L(x, -ih\partial/\partial_x)u = 0,$$

$$L(x, p) = 4c^2(x)\sin^2 p/2,\ x \in \mathbb{R}^1,\ -\pi \leqslant p \leqslant \pi,$$

h – малый параметр, заключается в том, что областью осцилляций решения задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями $u|_{t=0} = h^{-1/2}\delta_h(x - x^0)$, $u_t|_{t=0} = 0$ в момент времени t является множество $\{x = X^\pm(x^0, t, \omega), -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi\}$, где $X^\pm(x^0, t, \omega)$, $P^\pm(x^0, t, \omega)$ – решение гамильтоновой системы $\dot{x} = \partial H^\pm_\omega/\partial p$, $\dot{p} = -\partial H^\pm_\omega/\partial x$, удовлетворяющее начальным данным $X^\pm|_{t=0} = x^0$, $P^\pm|_{t=0} = 1$. Область осцилляций функции $\psi_h(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ определяется как дополнение к множеству точек таких, что в их окрестности $\psi_h \in L_2$ и $\partial\psi_h/\partial x_i \in L_2$, $i = 1, \ldots, n$, равномерно по h. В том случае, когда $\psi_h = K\varphi$, где K – *Маслова канонический оператор* на лагранжевом многообразии $\Lambda \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$, область осцилляций совпадает с проекцией *осцилляций фронта* на конфигурационное пространство $\mathbb{R}^n_x$. В указанном примере область осцилляций начального данного – точка x^0, а область осцилляций решения в момент времени t – нек-рый отрезок прямой $\mathbb{R}^1$.

См. также *Черенкова эффект* в разностных уравнениях.

Лит.: [1] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [2] Маслов В. П., Данилов В. Г., «Труды Математич. ин-та АН СССР», 1984, т. 166, с. 130–60; 1985, т. 167, с. 96–107; [3] Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н., «Функциональный анализ и его приложения», 1985, т. 19, № 4, с. 43–54.

В. Г. Данилов, П. Н. Жевандров.

ОТБОРА ПРАВИЛА – правила, определяющие возможные *квантовые переходы* для атомов, молекул, атомных ядер, взаимодействующих элементарных частиц и др. О. п. устанавливают, какие переходы разрешены (вероятность перехода велика) и какие запрещены строго (вероятность перехода равна нулю) или приближенно (вероятность перехода мала); соответствующие О. п. разделяют на строгие и приближенные. При характеристике состояний системы с помощью *квантовых чисел* О. п. определяют возможные изменения этих чисел при переходе рассматриваемого типа.

О. п. связаны с симметрией квантовых систем, то есть с неизменностью (инвариантностью) их свойств при определенных преобразованиях, в частности координат и времени, и с соответствующими *сохранения законами*. Переходы с нарушением строгих законов сохранения энергии, импульса (для реальных переходов), момента импульса, электрич. заряда и т. д. замкнутой системы абсолютно исключаются.

Для излучательных квантовых переходов между стационарными состояниями атомов и молекул очень важны строгие О. п. для квантовых чисел J и m_J, определяющих возможные значения полного момента импульса $\boldsymbol{M}$ и его проекции $M_z[M^2 = \hbar^2 J(J+1)$, $M_z = \hbar m_J]$. Эти правила связаны с равноправием в пространстве всех направлений (для любой точки – сферическая симметрия) и всех направлений, перпендикулярных выделенной оси z (аксиальная симметрия), и соответствуют сохранению момента импульса и его проекции на ось z. Из законов сохранения полного момента импульса и его проекции для системы, состоящей из микрочастиц и из испускаемых, поглощаемых и рассеиваемых фотонов, следует, что при квантовом переходе J и m_J могут изменяться в случае электрич. и магнитных дипольных излучений лишь на 0, ± 1, а в случае электрич. квадрупольного излучения на 0, ± 1, ± 2.

Другое важное О. п. связано с законом сохранения полной четности для изолированной квантовой системы (этот закон нарушается лишь слабым взаимодействием). Квантовые состояния атомов, всегда имеющих центр симметрии, а также тех молекул и кристаллов, к-рые имеют такой центр, делятся на четные и нечетные по отношению к пространственной инверсии (отражению в центре симметрии, то есть к преобразованию координат $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$); в этих случаях справедлив так наз. альтернативный запрет для излучательных квантовых переходов: для электрич. дипольного излучения запрещены переходы между состояниями одинаковой четности (то есть между четными или между нечетными состояниями), а для дипольного магнитного и квадрупольного электрич. излучений – переходы между состояниями различной четности (то есть между четными и нечетными состояниями).

Наряду с точными О. п. по J и m_J существенны приближенные О. п. при дипольном излучении атомов для квантовых чисел, определяющих величины орбитальных и спиновых моментов электронов и проекций этих моментов. Напр., для атома с одним внешним электроном орбитальное (азимутальное) квантовое число l, определяющее величину орбитального момента электрона $M_l[M_l^2 = \hbar^2 l(l+1)]$, может изменяться на ± 1 ($\Delta l = 0$ невозможно, так как состояния с одинаковыми l имеют одинаковую четность: они четные при четном l и нечетные при нечетном l). Для сложных атомов квантовое число L, определяющее полный орбитальный момент всех электронов, подчинено приближенному О. п. $\Delta L = 0, \pm 1$, а квантовое число S, определяющее полный спиновый момент всех электронов,– приближенному О. п. $\Delta S = 0$, справедливому, если не учитывать спинорбитальное взаимодействие. Учет этого взаимодействия нарушает последнее О. п., и появляются так наз. интеркомбинационные переходы, вероятности к-рых тем больше, чем больше атомный номер элемента.

Для молекул имеются специфич. О. п. для электронных, колебательных и вращательных молекулярных спектров, определяемые симметрией равновесных конфигураций молекул, а для кристаллов – О. п. для их электронных и колебательных спектров, определяемые симметрией кристаллич. решетки.

В физике элементарных частиц, кроме общих законов сохранения энергии, импульса, момента импульса, имеются дополнительные законы сохранения, связанные с симметриями фундаментальных взаимодействий частиц – сильного, электромагнитного и слабого. Процессы превращений элементарных частиц подчиняются строгим законам сохранения электрич. заряда Q, барионного заряда B и лептонного заряда L, к-рым соответствуют строгие О. п.: $\Delta Q = \Delta B = \Delta L = 0$ (это означает, что при достигнутой точности измерений нарушения этих О. п. не обнаружены).

М. А. Ельяшевич.

ОТКРЫТАЯ ВСЕЛЕННАЯ – см. *Космологические модели.*

ОТКРЫТАЯ КВАНТОВАЯ СИСТЕМА – см. *Квантовая открытая система.*

ОТКРЫТОЕ МНОЖЕСТВО – см. *Топологическое пространство.*

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ – см. *Ричардсона закон четырех третей.*

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ – состояние гамильтоновой системы, которому соответствует фазовая кривая, проектирующаяся в положение равновесия приведенной системы.

Пусть гамильтонова система с гамильтонианом H обладает группой с симметрией *G. Симплектическая редукция* позволяет рассмотреть приведенную систему на приведенном фазовом пространстве F_p. Фазовые кривые исходной системы M, проектирующиеся в положение равновесия приведенной системы, отвечают положениям О. р.

Фазовая кривая соответствует О. р. тогда и только тогда, когда она является орбитой однопараметрич. подгруппы группы G в исходном пространстве. Другое описание О. р.– критич. точки отображения момента и энергии

$$P \times H : M \to \mathfrak{G}^* \times \mathbb{R}$$

на регулярном множестве уровня момента. *М. Э. Казарян.*

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ в динамике твердого тела – вид движения твердого тела, подчиненного нестационарной связи, при котором тело не изменяет своего положения относительно этой связи. Обычно нестационарная связь реализуется путем принудительного *перманентного вращения* нек-рого второго тела. Тогда О. р. проявляется в том, что оба тела совершают перманентное вращение как одно целое. Напр., горизонтальная ось качания физич. маятника совершает принудительное вращение вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью. В этом случае существует несколько положений О. р. маятника. Нек-рые из них могут изменяться вместе с изменением величины угловой скорости вращения оси.

См. также *Равновесие механической системы.*

В. А. Самсонов.

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ПРИНЦИП, принцип относительности Эйнштейна – утверждение, состоящее в том, что все физические явления (механические, оптические, электромагнитные и любые другие) при всех одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех *инерциальных системах отсчета.* Этот постулат был, по-видимому, впервые высказан А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1895). Вместе с постулатом о независимости скорости света от движения источника О. п. был положен А. Эйнштейном (A. Einstein) в основу построения *относительности теории*, приведшей к глубокому пересмотру понятий о пространстве и времени. О. п. содержит *Галилея принцип относительности* как предельный случай при малых по сравнению со скоростью света скоростях тел. *И. Ю. Кобзарев.*

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ТЕОРИЯ – физическая теория, рассматривающая пространственно-временные закономерности, справедливые для любых физических процессов. Универсальность пространственно-временных свойств, рассматриваемых О. т., позволяет говорить о них просто как о свойствах пространства-времени. Наиболее общая теория пространства-времени называется общей теорией относительности, или теорией тяготения, так как согласно этой теории свойства пространства-времени в данной области определяются действующими в ней полями тяготения. В частной теории относительности, основы к-рой были даны А. Эйнштейном (A. Einstein, 1905), изучаются свойства пространства-времени, справедливые с той точностью, с какой можно пренебрегать действием тяготения. Таким образом, логически частная О. т. есть частный случай общей О. т.; построение общей О. т. было завершено А. Эйнштейном позже (в 1915), после чего и появился термин «частная О. т.». В русской литературе последняя называется также специальной теорией относительности или просто О. т.

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 4, М., 1984, с. 145–51; [2] Физическая энциклопедия, т. 3, М., 1992, с. 493–502; см. также *лит.* к статьям в [1] и [2].

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ОДНОВРЕМЕННОСТИ – см. *Релятивистские эффекты.*

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ – см. *Вейерштрасса эллиптические функции, Модулярная функция.*

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ – дифференциальная k-форма ω на гладком многообразии M, интегралы от которой по замкнутым k-мерным цепям сохраняются заданным диффеоморфизмом

$$g : M \to M, \int_{gc} \omega = \int_c \omega.$$

Если ω – О. и. и., то $d\omega$ – абсолютный интегральный инвариант. Обратное верно, только если любая замкнутая k-мерная цепь в M является границей. См. *Интегральный инвариант.*

Пример. Канонич. отображение $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ имеет относительным инвариантом 1-форму $pdg = \sum p_i dq_i$.

М. Э. Казарян.

ОТОБРАЖЕНИЕ ПЕРИОДОВ дифференциальной формы ω на пространстве гладкого расслоения – многозначное отображение базы в когомологии отмеченного слоя. Точке λ базы ставится в соответствие класс когомологий формы ω, перенесенный *Гаусса – Манина связностью* в отмеченный слой. Если $\delta_1(\lambda), \ldots, \delta_\mu(\lambda)$ – ковариантно постоянный базис гомологий, то в этих координатах О. п. имеет вид:

$$\lambda \to \left(\int_{\delta_1(\lambda)} \omega, \ldots, \int_{\delta_\mu(\lambda)} \omega \right).$$

С. В. Чмутов.

ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТОД – см. *Изображений метод.*

ОТРАЖЕНИЙ ГРУППА – см. *Вращений группа.*

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ВЯЗКОСТЬ – явление, наблюдающееся в турбулентно движущихся жидкостях (газах, плазме) и заключающееся в нелинейном переносе кинетической энергии мелкомасштабных (турбулентных) движений среды к крупномасштабным (осредненным). При предположении о пропорциональности тензора напряжений Рейнольдса тензору скоростей деформации осредненного поля скорости среды, коэффициенты пропорциональности (коэффициенты турбулентной вязкости) в случае явления О. в. оказываются отрицательными. Явление О. в. обнаружено экспериментально в атмосфере Земли, океане, фотосфере Солнца.

Лит.: [1] Старр В., Физика явлений с отрицательной вязкостью, пер. с англ., М., 1971.

Р. В. Озмидов.

ОТТАЛКИВАЮЩЕЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Центральное многообразие.*

ОЧАРОВАНИЕ квантового числа – см. *Аромат.*

ОШИБКА – см. *Анализ данных.*

ОШИБОК ИНТЕГРАЛ – см. *Интегральные функции.*

П

ПАДЕ АППРОКСИМАЦИЯ – метод суммирования расходящихся рядов с помощью рациональных функций. Понятие П. а. сформировалось в конце 19 в. в рамках классич. теории непрерывных дробей в работах Г. Фробениуса (G. Frobenius) и А. Паде (H. Padé).

Для аналитич. функции $f(z)$, определенной разложением в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

аппроксимацией Паде $f^{[N,\,M]}(z)$ (или просто $[N, M]$) называется рациональная функция

$$f^{[N,\,M]}(z)=P_N(z)/Q_M(z)=f(z)+O(z^{N+M+1}), \qquad (1)$$

где $P_N(z)$ и $Q_M(z)$ – многочлены степеней N и M соответственно. Если $N=M$, то $f^{[N,\,M]}$ называется диагональной аппроксимацией Паде. Фундаментальные результаты о диагональных П. а. были получены П. Л. Чебышевым, А. А. Марковым и Т. Стилтьесом (Th. Stieltjes) в терминах непрерывных дробей. Вычисление П. а. $f^{[N,\,M]}$ сводится к решению системы линейных уравнений, коэффициенты к-рых выражаются через коэффициенты f_n.

П. а. (1) обладает следующими свойствами. 1) При фиксированных N и M П. а. $f^{[N,\,M]}$ единственна. 2) Класс функций, к-рый можно аппроксимировать методом П. а., включает в себя функции, имеющие особенности в виде полюсов; это отличает П. а. от аппроксимации с помощью многочленов, несправедливой в окрестности полюса. 3) Поскольку П. а. осуществляет гладкое аналитич. продолжение неизвестных членов ряда Тейлора, начиная с $N+M+1$, она имеет смысл, если члены ряда медленно меняются с ростом n. Это всегда справедливо, если ряд имеет ненулевой радиус сходимости. 4) Для любой мероморфной функции $f(z)$ и для любых $R>0$, $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ существует номер N такой, что при $n\geqslant N$ диагональные П. а. $[n, n]$ удовлетворяют условию

$$|f(z)-f^{[n,n]}(z)|<\varepsilon$$

при $|z|\leqslant R$ за исключением области D_n меры менее δ. Это свойство обычно называют сходимостью по мере. Тот же результат справедлив и для $[n+k, n]$ П. а. 5) Недостатком П. а. является то, что в нек-рых случаях функция $f^{[N,\,M]}$ при фиксированных N и M может иметь особенности, отличные от особенностей функции $f(z)$. В этом смысле наилучшее описание обычно дают диагональные П. а.

Метод П. а. применяют в различных физич. задачах для улучшения свойств решений, полученных приближенными методами. Метод позволяет ускорить сходимость ряда теории возмущений по малому параметру, аналитически продолжить полученное решение за пределы круга сходимости исходного ряда, осуществить численное решение уравнений, в этом случае П. а. имеет преимущество по сравнению с методом Ньютона.

Метод П. а. можно также применить для суммирования асимптотич. разложений, имеющих нулевой радиус сходимости. В этом случае П. а. следует использовать в комбинации с другими методами, улучшающими сходимость исходного ряда, напр. с методом преобразования Бореля. Разработано много алгоритмов для машинного вычисления П. а., что существенно для различных приложений. Метод П. а. применяют к задачам статистич. механики, физики твердого тела, физики элементарных частиц, теории критич. явлений, квантовой механики – ко всем задачам, где имеется разложение по малому параметру.

Лит.: [1] Бейкер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П., Аппроксимации Паде, пер. с англ., М., 1986.

Д. И. Казаков.

ПАЙЕРЛСА НЕРАВЕНСТВО – неравенство

$$\sum_i \exp[-(\varphi_i, \hat{A}\varphi_i)] \leqslant \mathrm{Tr}\, e^{-\hat{A}},$$

где $\hat{A}$ – самосопряженный (неограниченный) оператор и $\{\varphi_i\}$ – ортонормированное семейство векторов в области его определения $D(\hat{A})$. П. н. широко применяется в равновесной статистич. механике, в частности в теории фазовых переходов.

Лит.: [1] Peierls R., «Phys. Rev.», 1934, v. 54, p. 918; [2] Рюэль Д., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1971.

Д. П. Санкович.

ПАЙЕРЛСА УСЛОВИЕ – см. *Пирогова – Синая теорема.*

ПАЙЕРЛСА – ФРЕЛИХА МОДЕЛЬ – модель, описывающая самосогласованное поведение электронов и атомов упругой кристаллической решетки. На ее основе строится теория, объясняющая характерные особенности квазиодномерных проводников. В приближении модели пренебрегают прямым межэлектронным взаимодействием, но учитывают их коллективное взаимодействие с решеткой. Оно сводится к тому, что конфигурация последней определяет спектр энергии электронов. Типичный гамильтониан моделей подобного типа в одномерном случае имеет вид:

$$H=\sum_n c_n(\psi_{n+1}\psi_n^{+}+\psi_n\psi_{n+1}^{+})+\frac{1}{2m}p_n^2+\Phi(x_n-x_{n+1}).$$

Здесь x_n, p_n – координаты и импульсы атомов решетки; $c_n=c(x_n-x_{n+1})$ – интегралы перескока между соседними узлами решетки; Φ – потенциал упругого взаимодействия атомов решетки.

При фиксированном значении плотности электронов ρ на один узел задача отыскания основного состояния системы есть задача минимизации нелинейного и нелокального функционала энергии

$$E(x_1,\ldots,x_N)=2\sum_{i=1}^{m}E_i+\sum_n\Phi(x_n-x_{n+1}), \quad \rho=\frac{m}{N},$$

где электронные уровни $E_1<E_2<\ldots<E_N$ (к-рые могут сливаться, но не более чем попарно) являются точками спектра разностного оператора Шредингера

$$L\psi_n=c_n\psi_{n+1}+c_{n-1}\psi_{n-1}=E_i\psi_n,\ c_{n+N}=c_n,$$
$$\psi_{n+N}(E_i)=\psi_n(E_i).$$

В ряде частных случаев, напр. при $\Phi=\lambda_1 c^2+\lambda_2\ln c$, модель оказывается точно интегрируемой и позволяет детально проанализировать появление сверхструктур, волн зарядовой плотности, пайерлсовскую неустойчивость металлич. фазы квазиодномерных проводников.

В отсутствие электронов ($\rho=0$) минимизация упругой энергии приводит к регулярной решетке: $x_n=na+x_0$. При $\rho\neq 0$ решетка может деформироваться, так как хотя при этом происходит увеличение упругой энергии, но оно мо-

жет компенсироваться понижением электронных уровней. Удвоение периода при $\rho = 1/2$ было впервые обнаружено Р. Пайерлсом (R. Peierls). В общем случае $\rho \neq 0, 1/2, 1$ узлы решетки в основном состоянии даются формулой вида $x_n = f(n\rho)$, где эллиптич. функция $f(x)$, зависящая от констант ρ, λ_1, λ_2, имеет вещественный период 1. Спектр соответствующего оператора Шредингера в термодинамич. пределе m, $N \to \infty$, $m/N \to \rho$ состоит из трех разрешенных зон

$$[E_1, E_2], [E_3, -E_3], [-E_2, -E_1], E_1 < E_2 < E_3 < 0.$$

При $\rho < 1/2$ заполнена нижняя зона, а две верхние пусты. При $\rho > 1/2$ заполненными оказываются две нижние зоны. Во всех случаях уровень Ферми лежит в запрещенной зоне, то есть в основном состоянии система оказывается диэлектриком.

В интегрируемом случае основное состояние оказывается вырожденным и в системе появляется помимо обычных звуковых волн дополнительная ветвь спектра возбуждений. Зависимость энергии основного состояния $E(\rho)$ от плотности электронов является аналитической. При малых неинтегрируемых возмущениях основное состояние оказывается по-прежнему квазипериодич. функцией с двумя периодами 1 и ρ. Энергия основного состояния становится разрывной во всех рациональных точках $\rho = p/q$. Причем величина разрыва имеет порядок $\sim e^{-\text{const}\, q}$. Такой же характер имеет и энергия «пининга» – энергия зацепления дополнительной звуковой волны за узлы решетки.

Лит.: [1] Пайерлс Р., Квантовая теория твердых тел, пер. с англ., М., 1956; [2] Бразовский С. А., Дзялошинский И. Е., Кричевер И. М., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1982, т. 82, в. 8; [3] Белоколос Е. Д., «Теоретич. и математич. физика», 1980, т. 45, в. 2, с. 268–74.

И. М. Кричевер.

ПАО ФОРМУЛА – см. *Спектр турбулентности.*

ПАРА СИЛ – система двух сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P}'$, действующих на твердое тело, равных по абсолютной величине и направленных параллельно, но в противоположные стороны, то есть

$$\boldsymbol{P}' = -\boldsymbol{P}.$$

П. с. не имеет равнодействующей, то есть ее нельзя заменить (а следовательно, и уравновесить) одной силой. Расстояние l между линиями действия сил пары называется плечом П. с. Действие, оказываемое П. с. на твердое тело, характеризуется ее моментом, к-рый изображается вектором $\boldsymbol{M}$, равным по абсолютной величине Pl и направленным перпендикулярно к плоскости действия П. с. в сторону, откуда поворот, совершаемый П. с., виден происходящим против хода часовой стрелки. Основное свойство П. с.: действие, оказываемое ею на данное твердое тело, не изменяется, если П. с. переносить куда угодно в плоскости пары или в плоскости, ей параллельной, а также если изменять абсолютную величину сил пары и длину ее плеча, сохраняя неизменным момент П. с. Таким образом, момент пары можно считать приложенным в любой точке тела. Две П. с. с одинаковыми моментами, приложенные к одному и тому же телу, механически эквивалентны одна другой. Любая система П. с., приложенных к данному твердому телу, механически эквивалентна одной П. с. с моментом, равным сумме векторов–моментов этих П. с. Если сумма моментов нек-рой системы П. с. равна нулю, то эта система П. с. является уравновешенной.

С. М. Targ.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ – см. *Координаты.*

ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ФУНКЦИИ – см. *Вебера уравнение.*

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение* с частными производными второго порядка.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ПЕРИОДОВ – см. *Двоякопериодическая функция.*

ПАРАМЕТРИКС – см. *Волновое уравнение*; асимптотическое решение.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД – один из основных методов геометрической теории функций комплексного переменного, заключающийся в описании *конформных отображений* посредством однопараметрических семейств отображений специального вида.

Трудности построения эффективного вариационного исчисления на классах *однолистных функций* коренятся в существенной нелинейности объекта исследований. Способ их преодоления, предложенный К. Левнером (K. Löwner, 1923), состоит в следующем. Пусть L – совокупность голоморфных и однолистных в $U = \{z : |z| < 1\}$ функций φ, удовлетворяющих условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ и $|\varphi(z)| < 1$ при $z \in U$. Внутренние задачи теории однолистных функций легко формулируются как экстремальные задачи на классе L. Заметив, что L образует полугруппу относительно операции композиции, К. Левнер, по аналогии с теорией групп Ли, поставил и исследовал вопрос об ее инфинитезимальном описании.

Пусть $\{\varphi_t\}_{t \geqslant 0}$ – однопараметрич. семейство в L такое, что $\varphi_0(z) \equiv z$ и $t \mapsto \varphi_t(z)$ дифференцируемо, локально равномерно в U относительно z. Тогда производная

$$\left.\frac{d\varphi_t(z)}{dt}\right|_{t=0} = v(z)$$

представляет собой голоморфную в U функцию и называется инфинитезимальным преобразованием полугруппы L. Непосредственно из *Шварца леммы* следует, что

$$v(z) = -zp(z),$$

где p – голоморфная в U функция с неотрицательной действительной частью. Вопрос об инфинитезимальном описании полугруппы L состоит в возможности представления каждого φ из L в виде композиции инфинитезимальных преобразований, то есть в виде $\varphi(z) = w(T, z)$, где $T \geqslant 0$, а $w = w(t, z)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -wP(w, t) \qquad (1)$$

с начальным условием $w|_{t=0} = z$ и функцией $P(z, t)$, измеримой по t на $[0, T]$, голоморфной по z в U и удовлетворяющей условиям $P(0, t) = 1$, $\operatorname{Re} P(z, t) > 0$ при $z \in U$. Уравнение (1) известно как уравнение Левнера. Положительное решение вопроса об инфинитезимальном описании полугруппы L дает возможность применения средств анализа к исследованию задач теории однолистных функций. В частности, широкий круг экстремальных задач на L приводится посредством (1) к задачам оптимального управления.

П. м. возник в связи с решением гипотезы Бибербаха для третьего коэффициента. В дальнейшем этот метод привел к решению широкого круга задач теории однолистных функций, среди к-рых проблема вращения и проблема коэффициентов.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

В. В. Горяйнов.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР – см. *Осциллятор.*

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС – явление потери устойчивости линейной гамильтоновой системой, зависящей от параметров, при периодическом изменении параметров во времени. Система, автономная и устойчивая при каждом фиксированном значении параметров, становится неустойчивой при периодич. изменении параметров подходящего периода и сколь угодно малой амплитуды. Для возникновения П. р. период изменения параметров должен быть таким, чтобы исходная автономная система, рассматриваемая как периодическая с этим периодом, имела два совпадающих *мультипликатора* (необходимо лежащих на единичной окружности ввиду устойчивости) и эти мультипликаторы были разного рода. Последнее означает, что при замене матрицы A системы на матрицу λA и при изменении λ мультипликаторы движутся по единичной окружности в разные

стороны (см. [1]). Сколь угодно малым периодич. изменением коэффициентов системы можно добиться того, чтобы один из этих мультипликаторов оказался внутри единичного круга, а другой – вне его, то есть чтобы система стала неустойчивой. Напр., линейный осциллятор

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon \sin \Omega t)x = 0$$

неустойчив при малых $\varepsilon > 0$, если выполнено условие П. р.:

$$\Omega = 2/k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Явление П. р. изучается в рамках общей теории потери устойчивости линейной гамильтоновой периодической по времени системой при малом возмущении ее матрицы (см. [1]).

Лит.: [1] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972. *А. И. Нейштадт.*

ПАРАСТАТИСТИКА – квантовая статистика тождественных частиц, отличная от *Бозе – Эйнштейна статистики* и *Ферми – Дирака статистики*. Гипотеза о существовании парачастиц, отличных от *бозонов* и *фермионов*, не противоречит основным постулатам квантовой теории и, хотя к настоящему времени отсутствуют экспериментальные данные, свидетельствующие об их реализации в природе, концепция параполей часто используется при теоретич. обсуждениях в модельных теориях.

Напр., в модели *кварков* имеются основания считать, что они являются парафермионами 3-го порядка. В случае, когда в состоянии с энергией ε_i может находиться не более m парачастиц, равновесная функция распределения имеет вид:

$$f_m(x) = [e^{\alpha+x} - 1]^{-1} - (m+1)[e^{(m+1)(\alpha+x)} - 1]^{-1},$$

$$x = \frac{\varepsilon_i}{kT}, \quad \alpha = -\frac{\mu}{kT},$$

где μ – химич. потенциал, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Для $m = 1$ получают функцию Ферми – Дирака распределения

$$f_{FD}(x) = [e^{\alpha+x} + 1]^{-1},$$

а при $m \to \infty$ функцию Бозе – Эйнштейна распределения

$$f_{BE}(x) = [e^{\alpha+x} - 1]^{-1}.$$

Известно, что уравнения движения Гейзенберга в квантовой теории следуют из классич. уравнений Гамильтона и стандартных коммутационных соотношений между канонич. переменными. Однако обратное не верно. Е. Вигнер [2] показал, что при

$$H = \frac{1}{2}(a^+ a + a a^+)$$

из уравнений Гейзенберга

$$i\dot{a} = [H,\ a]_{(-)} = -a$$

следуют не стандартные коммутационные соотношения

$$[a,\ a^+]_{(-)} = 1,$$

а однопараметрич. семейство

$$[a,\ a^+]_{(-)} = 1 + (2\varepsilon_0 - 1)\exp\{-i\pi(H - \varepsilon_0)\},$$

ε_0 – низшее собственное значение энергии. Полное решение этой задачи дано в [3], [4], где, в частности, показано, что для $H = a^+ a$ и $\varepsilon_0 = 0$ при каждом натуральном $d \geqslant 0$ имеется представление a $(d \times d)$-матрицей, все элементы к-рой, не стоящие на первой наддиагонали, равны нулю:

$$a = \mathrm{diag}_{(+1)}\{k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{(d-1)}\},\ |k_j|^2 = 1.$$

В случае $d = 2$ имеют фермионы: $a = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| e^{i\varphi}$, при $d \to \infty$ – бозоны, а при остальных значениях d – парачастицы. Многочисленные исследования П. суммированы в [5]. Наиболее популярным методом введения П. является так наз. анзатц Грина: Г. Грин [6] предложил в качестве фундаментальных коммутационных соотношений рассматривать трилинейные соотношения:

$$\left[a_k, \left[a_l^+, a_m\right]_{\pm}\right]_- = 2\delta_{kl} a_m,$$

$$\left[a_k, \left[a_l^+, a_m^+\right]_{\pm}\right]_- = 2(\delta_{kl} a_m^+ \pm \delta_{km} a_l^+),$$

$$[a_k, [a_l, a_m]_{\pm}]_- = 0,$$

где верхний знак соответствует парабозонам, нижний – парафермионам. В предположении существования паравакуума $|0\rangle$ такого, что $a_k|0\rangle = 0$ для любого k, каждый оператор допускает разложение Грина:

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^{p} a_k^{(\alpha)},$$

где $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ – порядок П. При этом предполагается, что выполнены билинейные коммутационные соотношения:

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)+}\right]_{\mp} = \delta_{kl}, \quad \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}\right]_{\mp} = 0,$$

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)+}\right]_{\pm} = 0, \quad \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)}\right]_{\pm} = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Нек-рые общие свойства параполей обсуждаются в [7]; в рамках алгебраич. формализма П. изучалась в [8]. В настоящее время интерес к параполям возрос в связи с появлением концепции суперсимметрии и возможными применениями в теории струн.

Лит.: [1] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [2] Wigner E. P., «Phys. Rev.», 1950, v. 77, p. 711–12; [3] O'Raifeartaigh L., Ryan E., «Proc. Roy. Irish Acad.», 1963, v. 62, № 8, p. 93–115; [4] Gruber B., O'Raifeartaigh L., там же, 1964, v. 63, № 5, p. 69–73; [5] Ohnuki Y., Kamefuchi S., Quantum field theory and parastatistics, Tokyo, 1982; [6] Green H. S., «Phys. Rev.», 1953, v. 90, p. 270–73; [7] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987; [8] Druhl K., Haag R., Roberts J. E., «Comm. Math. Phys.», 1970, v. 18, № 3, p. 204–26. *Е. В. Дамаскинский.*

ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ – действительная функция $\nu_2(r)$, связанная с парной функцией распределения $n_2(r)$ классической равновесной системы N тождественных точечных частиц, находящихся в объеме V, соотношением

$$n_2(r) = 1 + \nu_2(r).$$

Через П. к. ф. выражаются основные термодинамич. свойства равновесных классич. систем.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.–Л., 1946; [2] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1976. *Д. П. Санкович.*

ПАРСЕВАЛЯ РАВЕНСТВО – см. *Гильбертово пространство, Ортогональная система функций, Фурье ряд, Состояния вектор.*

ПАРТОН – см. *Глубоконеупругий процесс.*

ПАРЦИАЛЬНАЯ ВОЛНА – коэффициент в разложении амплитуды рассеяния по сферическим функциям. В простейшем случае упругого рассеяния двух бесспиновых частиц массы m это разложение имеет вид:

$$F(s, \cos\theta) = \frac{16\pi\sqrt{s}}{\sqrt{s - 4m^2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) P_l(\cos\theta), \qquad (*)$$

где $s = (p_1 + p_2)^2$; p_1 и p_2 – четырехимпульсы сталкивающихся частиц, θ – угол рассеяния. Разложение (*) справедливо не только при физич. θ, но и внутри области аналитичности по $\cos\theta$. П. в. может быть представлена в виде

$$f_l(s) = -\frac{i}{2}[\eta_l \exp 2i\delta_l - 1],$$

где δ_l и η_l действительны, η_l учитывает вклад неупругих процессов и удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \eta_l \leqslant 1$. Чисто упругое рассеяние соответствует случаю $\eta_l = 1$. П. в. $f_l(s)$

может быть определена при произвольных l. Унитарность S-матрицы накладывает сильное ограничение на $f_l(s)$ (см. *Оптическая теорема*).

См. также *Рассеяния теория*.

Лит.: [1] Тейлор Дж., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1975; [2] Иден Р., Соударения элементарных частиц при высоких энергиях, пер. с англ., М., 1970. *Ю. С. Вернов.*

ПАРЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ – полное сечение рассеяния частиц при заданном угловом моменте l. Полное сечение $\sigma_t(s)$ следующим образом выражается через П. с. $\sigma_l(s)$:

$$\sigma_t(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l(s), \qquad (*)$$

где $s=(p_1+p_2)^2$; p_1, p_2 – четырехимпульсы сталкивающихся частиц. Унитарность S-матрицы приводит к связи между П. с. и парциальной волной (см. *Оптическая теорема*) и к абсолютному ограничению на $\sigma_l(s)$, к-рое в случае рассеяния бесспиновых частиц одинаковой массы m имеет вид:

$$\sigma_l(s) \leqslant \frac{16\pi(2l+1)}{s-4m^2}.$$

Полные упругое и неупругое сечения выражаются аналогичным образом через парциальные упругие и неупругие сечения соответственно:

$$\sigma_{\text{el}}(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l^{\text{el}}(s); \quad \sigma_{\text{inel}}(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l^{\text{inel}}(s).$$

Для адрон-адронного рассеяния суммирование в (*) реально ограничено по нек-рым эффективным L. Вследствие унитарности и аналитичности по переданному импульсу

$$L \sim \sqrt{s}\,\ln(s/s_0),$$

то есть

$$\sigma_t(s) < C\ln^2(s/s_0)$$

– неравенство Фруассара.

Лит.: [1] Тейлор Дж., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1975; [2] Иден Р., Соударения элементарных частиц при высоких энергиях, пер. с англ., М., 1970. *Ю. С. Вернов.*

ПАССИВНАЯ СИСТЕМА – физическая система, поглощающая и перераспределяющая энергию с учетом причинности относительно некоторого конуса. Пусть исходное возмущение $u(x)=(u_1(x), \ldots, u_N(x))$ действует на физич. систему и в результате возникает ответный отклик системы $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_N(x))$. Под $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$ понимаются временные, пространственные и другие переменные. Предположим выполненными условия:

а) линейности: линейной комбинации возмущений системы отвечает линейная комбинация откликов;

б) вещественности: вещественному возмущению отвечает вещественный отклик системы;

в) непрерывности: если $u(x)$ стремится к нулю в пространстве $\mathscr{E}'$ *Шварца распределений* с компактными носителями, то отклик $f(x)$ стремится к нулю в пространстве D' распределений Шварца;

г) трансляционной инвариантности: для любого сдвига $h\in\mathbb{R}^n$ возмущению $u(x+h)$ отвечает отклик $f(x+h)$.

Условия а) – г) эквивалентны существованию единственной $(N\times N)$-матрицы $Z(x)=\|Z_{ij}(x)\|$, $Z_{ij}(x)\in D'$, к-рая связывает исходное возмущение и отклик системы формулой

$$Z(x)^* u(x) = f(x).$$

Пусть Γ – замкнутый, выпуклый, острый, телесный конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле, а физич. система удовлетворяет еще условию:

д) пассивности относительно конуса Γ:

$$\operatorname{Re}\int_{-\Gamma}\langle Z(x)^*\varphi(x), \varphi(x)\rangle\,dx \geqslant 0$$

для любой вектор-функции $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x))$, компоненты к-рой $\varphi_j(x)$ – бесконечно дифференцируемые финитные функции в $\mathbb{R}^n$.

Неравенство д) энергетич. типа. Оно отражает способность физич. системы поглощать и перераспределять (но не генерировать) энергию, учитывая причинность относительно конуса Γ.

Физич. система, удовлетворяющая условиям а)–д), называется линейной П.с. относительно конуса Γ, сверточный оператор Z^* называется пассивным оператором относительно конуса Γ, а соответствующая матрица-функция $\widetilde{Z}(\zeta)$ – преобразование Лапласа матрицы $Z(x)$ – импедансом физич. системы.

Одномерные линейные П. с. ($n=1$) описывают связь между токами и напряжениями в сложных электрич. цепях; линейные термодинамич. системы; рассеяние электромагнитных волн и элементарных частиц (см. [1], [2]).

Многомерные линейные П. с. ($n\geqslant 2$) описывают физич. процессы с учетом пространственно-временной динамики. К ним, напр., относятся уравнения Максвелла, Дирака, вращающейся жидкости и акустики, линеаризованная система уравнений магнитной гидродинамики, уравнения теории упругости, переноса нейтронов и излучения и многие другие.

Теория многомерных линейных П. с. разработана В. С. Владимировым [3] на основе теории положительно-вещественных матриц-функций. О свойствах пассивных операторов, постановках задач, квазиасимптотич. свойствах фундаментальных решений и других вопросах см. [3], [4].

Лит.: [1] Zemanian A., Distribution theory and transform analysis, N. Y.– L., 1965; [2] Beltrami E., Wohlers M., Distribution and the boundary values of analytic functions, N. Y.– L., 1966; [3] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [4] Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И., Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций, М., 1986. *Ю. Н. Дрожжинов.*

ПАССИВНЫЙ ОПЕРАТОР – см. *Пассивная система*.

ПАУЛИ МАТРИЦЫ – двухрядные комплексные эрмитовы матрицы

$$\sigma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Введены В. Паули (W. Pauli, 1927) для описания собственного механич. момента (*спина*) $\boldsymbol{s}=1/2\hbar\boldsymbol{\sigma}$ и магнитного момента $\boldsymbol{\mu}=(e\hbar/2mc)\boldsymbol{\sigma}$ электрона (см. *Паули уравнение*).

Благодаря *перестановочным соотношениям*

$$\sigma_i\sigma_k - \sigma_k\sigma_i = 2\varepsilon_{ikl}\sigma_l$$

(где ε_{ikl} – *Леви-Чивиты символ*) компоненты спина $\boldsymbol{s}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям для углового момента. При повороте на угол φ вокруг оси с направляющим единичным вектором $\boldsymbol{n}(n_1, n_2, n_3)$ задающий волновую функцию электрона двухкомпонентный спинор $\psi = \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Vmatrix}$ преобразуется по формуле

$$\psi \to \psi' = \exp\left(-\frac{i\varphi}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\right)\psi,$$

реализуя простейшее спинорное представление группы вращений $SO(3)$. В качестве базиса в пространстве этого представления можно взять, напр., собственные векторы матрицы σ_3, $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$ с собственными значениями 1 и -1 соответственно.

П. м. используются при описании любой квантовой системы с дискретной переменной, принимающей два значения. Помимо спина классич. примером является система протон – нейтрон; ее дискретную переменную называют 3-й компонентой изотопич. спина (обычно П. м. обозначаются в этом случае символами τ_i, $i=1, 2$). Поскольку $SO(3)$ локально изоморфна группе унитарных унимодулярных комплексных матриц [точнее, $SO(3)\sim SO(2)/Z_2$], в терминах П. м. описываются калибровочные поля с унитарной симметрией $SU(2)$. П. м. используются также в многочисленных моделях квантовых систем на решетках (различные варианты модели Изинга и т. п.).

Лит.: [1] Паули В., Труды по квантовой теории, [пер. с нем.], т. 1–2, М., 1975–77; [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, 2 изд., М., 1986; [3] Медведев Б. В., Начала теоретической физики, М., 1977. *В. П. Павлов.*

ПАУЛИ ПРИНЦИП – фундаментальный закон природы, заключающийся в том, что в квантовой системе две тождественные частицы с полуцелым спином не могут одновременно находиться в одном состоянии. Сформулирован в 1925 В. Паули (W. Pauli) для электронов в атоме и назван им принципом запрета, затем распространен на любые фермионы. В 1940 В. Паули показал, что принцип запрета – следствие существующей в квантовой теории поля связи спина и статистики; частицы с полуцелым спином подчиняются *Ферми – Дирака статистике*, поэтому волновая функция системы одинаковых фермионов должна быть антисимметричной относительно перестановки любых двух фермионов; отсюда и следует, что в одном состоянии может находиться не более одного фермиона.

П. п. сыграл решающую роль в понимании закономерностей заполнения электронных оболочек атома, послужил исходным пунктом для объяснения атомных и молекулярных спектров. Фундаментальна роль П. п. в квантовой теории твердого тела и атомного ядра, а также в теории ядерных реакций и реакций между элементарными частицами.

Естественный для физики вопрос о том, с какой точностью П. п. подтверждается опытом, для самой своей постановки требует пересмотра ряда основных положений квантовой теории. Такой альтернативной непротиворечивой схемы построить не удалось, и поэтому вообще нельзя говорить о количественной характеристике отклонений от П. п. В рамках современных представлений физики вынуждены считать, что П. п. является абсолютно строгим.

Лит.: [1] Luders G., Zumino B., «Phys. Rev.», 1958, v. 110, p. 1450; [2] Теоретическая физика 20 века. [Памяти В. Паули. Переводы], М., 1962; [3] Стритер Р., Вайтман А. С., *PCT*, спин и статистика и всё такое, пер. с англ., М., 1966; [4] Паули В., Физические очерки, Сб. ст., [пер. с англ.], М., 1975, с. 65; [5] его же, Труды по квантовой теории, [пер. с нем.], т. 1–2, М., 1975–77; [6] Фейнман Р., «Успехи физич. наук», 1989, т. 157, с. 163. *Л. Б. Окунь, В. П. Павлов.*

ПАУЛИ ТЕОРЕМА – теорема, устанавливающая связь спина со статистикой (В. Паули, W. Pauli, 1940) и утверждающая, что поля, описывающие частицы с целым спином, квантуются по Бозе – Эйнштейну, а с полуцелым – по Ферми – Дираку. Соответственно все частицы подразделяются на *бозоны* и *фермионы*. П. т. фиксирует характер *перестановочных соотношений* между операторами рождения и уничтожения частиц: бозонные операторы связаны отношениями коммутации, фермионные – антикоммутации. Из-за возможности взаимного превращения частиц операторы рождения и уничтожения различных фермионов также следует считать антикоммутирующими. П. т. обосновывает принцип запрета Паули нерелятивистской квантовой механики – невозможность нахождения двух электронов в одном и том же квантовом состоянии. Доказательство П. т. основывается на условиях микропричинности, а именно: использует независимость операторов полей в точках, разделенных пространственноподобным интервалом. При этом важна локальность квантовой теории поля. При ее формулировке с помощью *функционального интеграла* П. т. заставляет описывать поля с полуцелым спином грассмановыми (антикоммутирующими) числами.

На первый взгляд, П. т. делает невозможным симметричное описание частиц с целыми и полуцелыми спинами. Такое описание становится, однако, возможным при введении наряду с обычной пространственно-временной координатой x_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, грассмановых координат θ. Коэффициенты разложения поля (суперполя) $S(x, \theta)$ в ряд по θ являются бозонными и фермионными полями. Простейший пример отвечает одной грассмановой переменной. При этом суперполе $S(x, \theta)$ имеет вид $S(x, \theta) = \varphi(x) + \theta\psi(x)$. Ряд по θ обрывается, так как $\theta^2 = 0$. Компоненты суперполя φ и ψ описывают соответственно бозон и фермион. Бозонно-фермионная симметрия получила название суперсимметрии.

Лит.: [1] Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, пер. с англ., М., 1947; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984. *М. И. Высоцкий.*

ПАУЛИ УРАВНЕНИЕ – уравнение нерелятивистской квантовой механики, описывающее движение заряженной частицы со спином 1/2 (например, электрона) во внешнем электромагнитном поле. Предложено В. Паули (W. Pauli, 1927).

П. у. является обобщением *Шредингера уравнения*, учитывающим наличие у частицы собственного механич. момента импульса – *спина*. Частица со спином 1/2 может находиться в двух различных спиновых состояниях с проекциями спина $+1/2$ и $-1/2$ на нек-рое (произвольно выбранное) направление, принимаемое обычно за ось z. В соответствии с этим *волновая функция* частицы $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ (где $\boldsymbol{r}$ – координата частицы, t – время) является двухкомпонентной:

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \begin{Vmatrix} \psi_1(\boldsymbol{r},t) \\ \psi_2(\boldsymbol{r},t) \end{Vmatrix}.$$

При поворотах координатных осей ψ_1 и ψ_2 преобразуются как компоненты *спинора*. В пространстве спинорных волновых функций скалярное произведение ψ и ψ' имеет вид:

$$(\psi', \psi) = \int \left(\psi_1'^{*}\psi_1 + \psi_2'^{*}\psi_2\right) d\boldsymbol{r},$$

операторы физич. величин являются (2×2)-матрицами, к-рые для величин (наблюдаемых), не зависящих от спина, кратны единичной матрице.

В силу общих законов электродинамики электрически заряженная система с отличным от нуля спиновым моментом $\boldsymbol{s}$ обладает и магнитным моментом, пропорциональным $\boldsymbol{s}$: $\mu = g\boldsymbol{s}$ (g – гиромагнитное отношение). Для орбитального момента $g = e/2mc$, где e – заряд, m – масса частицы; спиновое гиромагнитное отношение оказывается в два раза большим: $g = e/mc$. Во внешнем магнитном поле напряженности $\boldsymbol{B}$ магнитный момент обладает потенциальной энергией $U = -\mu\boldsymbol{B}$, добавление к-рой в гамильтониан H электрона во внешнем электромагнитном поле с потенциалами φ и $\boldsymbol{A}$ приводит к уравнению Паули:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi; \quad H = \frac{\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m} I - \frac{e\hbar}{2mc}(\sigma\boldsymbol{B}) + e\varphi I, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{p}$ – оператор импульса, σ – *Паули матрицы* [оператор спина $\boldsymbol{s} = (\hbar/2)\sigma$].

Предложенное первоначально на основе эвристич. соображений П. у. оказалось естественным следствием релятивистски-инвариантного *Дирака уравнения* в слаборелятивистском приближении, в к-ром учитываются лишь первые члены разложения по обратным степеням скорости света.

Если напряженность внешнего магнитного поля не зависит от пространственных координат, то орбитальное движение частицы и изменение ориентации ее спина происходят независимо. Волновая функция при этом имеет вид $\psi(\boldsymbol{r}, t) = \Phi(\boldsymbol{r}, t)\chi(t)$, где $\Phi(\boldsymbol{r}, t)$ – скалярная функция, подчиняющаяся уравнению Шредингера, а спинор $\chi = \begin{Vmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Vmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\frac{e\hbar}{2mc}(\sigma\boldsymbol{B})\chi.$$

Из этого уравнения следует, что среднее значение спина $\langle\boldsymbol{s}\rangle = \frac{\hbar}{2}(\chi + \sigma\chi)$ прецессирует вокруг направления магнитного поля:

$$\frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{s}\rangle = -\omega_B[\boldsymbol{n}\langle\boldsymbol{s}\rangle].$$

Здесь $\omega_B = eB/mc$ – циклотронная частота, $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор вдоль магнитного поля.

На основе П. у. может быть рассчитано расщепление уровней энергии электронов в атоме во внешнем магнитном поле с учетом спина (эффект Зеемана). Однако более тонкие релятивистские эффекты в атомах, обусловленные спином электрона, могут быть описаны лишь при учете более высоких членов разложения релятивистского уравнения Дирака по обратным степеням скорости света.

Д. В. Гальцов.

ПАУЛИ УРАВНЕНИЕ в статистической механике – *основное кинетическое уравнение* для распределения P_n вероятностей дискретных состояний n, выражающее баланс прихода и расхода для вероятности:

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = \sum_{n'} \{W_{nn'} P_{n'}(t) - W_{n'n} P_n(t)\},$$

где $W_{nn'} > 0$ – вероятность перехода в единицу времени из состояния n' в n, $W_{n'n}$ – вероятность обратного перехода.

П. у. было введено В. Паули (W. Pauli, 1928) для изолированной квантовомеханич. системы. В этом случае вероятность прямого перехода равна вероятности обратного перехода $W_{mn} = W_{nm}$, где W_{mn} во втором приближении квантовомеханич. теории возмущений равна

$$W_{mn} = 2\pi\lambda^2\hbar^{-1}|V_{mn}|^2\left(\frac{d\Gamma}{d\xi}\right)_{\xi_m=\xi_n},$$

где m, n соответствуют квантовым стационарным состояниям гамильтониана свободных частиц H_0, а λV – возмущение в гамильтониане системы $H = H_0 + \lambda V$, V_{mn} – матричный элемент возмущения по собственным функциям H_0, $\left(\frac{d\Gamma}{d\xi}\right)_{\xi_m=\xi_n}$ – плотность невозмущенных уровней на единицу энергии. Для непрерывного спектра этот множитель переходит в $\delta(\xi_m - \xi_n)$.

Если динамич. подсистема взаимодействует с системой с большим числом степеней свободы, находящейся в состоянии статистич. равновесия (термостатом), то для получения вероятности распределения состояний в динамич. системе нужно просуммировать распределение вероятностей в полной системе по квантовым состояниям термостата. После этого вероятность распределения по состояниям подсистемы также удовлетворяет П. у., но вероятность прямого перехода уже не равна вероятности обратного перехода, а удовлетворяет принципу детального баланса:

$$\frac{W_{mn}}{W_{nm}} = \exp[-(\xi_n - \xi_m)/k_Б T],$$

где $k_Б$ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m, n определяют теперь квантовые состояния подсистемы, соответствующие уровням энергии ξ_m, ξ_n.

П. у. имеет наиболее простую форму для одночастичных квантовых уровней подсистемы. Тогда числа заполнения уровней n_l удовлетворяют уравнению

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_l (w_{kl} n_l - w_{lk} n_k),$$

где w_{kl} – вероятность перехода в единицу времени между одночастичными состояниями.

П. у. позволяет ввести энтропию неравновесного состояния

$$S(t) = -k_Б \sum_n P_n(t) \ln P_n(t).$$

Энтропия $S(t)$ монотонно возрастает, стремясь к равновесному значению при $t \to \infty$, то есть удовлетворяет *Больцмана H-теореме.*

При выводе кинетич. уравнения В. Паули использовал предположение о хаотичности фаз волновых функций квантовых состояний в любой момент времени. Это предположение аналогично гипотезе молекулярного хаоса, к-рая использовалась Л. Больцманом (L. Boltzmann) при выводе кинетич. уравнения для газа малой плотности. Л. Ван Хов (L. Van Hove) показал, что достаточно предположить случайность фаз лишь для начального момента времени. Для этого вывода П. у. существенно предположение о макроскопич. размерах системы, то есть о наличии большого числа степеней свободы. Математически это выражается требованием предельного перехода, при к-ром объем системы стремится к бесконечности (при фиксированном отношении объема к числу частиц) и возникают так наз. сингулярности в матричных элементах энергии возмущения во всех порядках теории возмущений. Строгий вывод П. у. возможен в пределе $\lambda \to 0$, $t \to \infty$ при $\lambda^2 t = \text{const}$.

П. у. является частным случаем уравнения Колмогорова – Чепмена теории марковских процессов, к-рое формулируется для матрицы перехода $T_\tau(y_3|y_1)$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} T_\tau(y_3|y_1) = \int \{W(y,y') T_\tau(y',t) - W(y'|y) T_\tau(y,t)\} dy'.$$

Из него следует обычная форма основного кинетич. уравнения для непрерывного распределения вероятностей $P(y, t)$:

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \int \{W(y,y') P(y',t) - W(y'|y) P(y,t)\} dy'.$$

Функция $P(y, t)$ может быть определена при задании нек-рого начального распределения $P(y, 0)$.

Лит.: [1] Паули В., Труды по квантовой теории, пер. с нем., М., 1975, с. 661; [2] Ван Хов Л., в сб.: Вопросы квантовой теории необратимых процессов, пер. с англ., М., 1961; [3] Честер Дж., Теория необратимых процессов, пер. с англ., М., 1966; [4] Зубарев Д. Н., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 15, 1990; [5] Ван Кампен Н. Г., Стохастические процессы в физике и химии, пер. с англ., М., 1990; [6] Кайзер Дж., Статистическая термодинамика неравновесных процессов, пер. с англ., М., 1990.

Д. Н. Зубарев.

ПАУЛИ – ВИЛЛАРСА РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ – см. *Расходимость* в квантовой теории поля, *Регуляризация расходимостей, Ультрафиолетовая расходимость.*

ПЕНЛЕВЕ СВОЙСТВО – свойство дифференциального уравнения, определяющего функцию $w = w(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, которым обладает его решение, если оно представимо в виде формального ряда:

$$w = \sum_{k=-m}^{\infty} \varphi^k(\boldsymbol{x}) w_k(\boldsymbol{x}), \quad m > 0,$$

где множество нулей функции φ не зависит от коэффициентов уравнения, то есть содержит произвольные параметры, и

$$\operatorname{grad}\varphi|_{\varphi=0} \neq 0, \infty.$$

П. с. было введено П. Пенлеве [1] в связи с классификацией обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка (см. *Пенлеве уравнения*). Наличие П. с., как правило, указывает на интегрируемость дифференциального уравнения в том или ином смысле.

Лит.: [1] Painleve P., «Acta math.», 1902, t. 25, p. 1–86; [2] Абловиц М., Сигур Х., Солитоны и метод обратной задачи, пер. с англ., М., 1987.

В. Ю. Новокшенов.

ПЕНЛЕВЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ – свойство обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$w'' = F(w', w, x),$$

где функция F рациональна по w', w и локально аналитична по x, определяющего трансцендентную функцию Пенлеве $w = w(x)$, если уравнение не сводится к линейному и не имеет подвижных критических особых точек, то есть зависящих от произвольной постоянной, точек ветвления и существенно особых точек. Такие уравнения (обладающие *Пенлеве свойством*) приводятся к шести канонич. типам

(см. *Пенлеве уравнения*); все они гамильтоновы и имеют коммутационное представление типа лаксовой пары.

Важную роль играют асимптотич. представления в окрестности существенно особых точек решений этих шести канонич. типов уравнений Пенлеве в терминах их первых интегралов, в качестве к-рых выступают данные монодромии вспомогательной линейной системы, коэффициентами к-рой являются функции Пенлеве и их производные. Решение прямой и обратной задачи теории монодромии для такой линейной системы эквивалентно построению интегрального представления функции Пенлеве. Данные монодромии вычисляются явным образом по параметрам асимптотик, что позволяет получить явные формулы связи асимптотик в различных существенно особых точках или в различных областях вблизи одной особой точки.

Лит.: [1] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Харьков, 1939; [2] Its A. R., Novokshenov V. Yu., «Lecture Notes Math.», v. 1191, B., 1986.

В. Ю. Новокшенов.

ПЕНЛЕВЕ УРАВНЕНИЯ – общее название группы из шести обыкновенных дифференциальных уравнений. Введены П. Пенлеве (P. Painlevé, 1900) и Б. Гамбье (B. Gambier, 1910) при классификации уравнений типа

$$w'' = R(z, w, w'),$$

где R – функция аналитическая по z и рациональная по w и w'.

Обычно П. у. записывают в следующем виде:

I. $w'' = 6w^2 + z$,

II. $w'' = 2w^3 + zw + a$,

III. $w'' = (w')^2 w^{-1} + (aw^2 + b)\exp z +$
$+ (cw^3 + dw^{-1})\exp 2z,\ |b| + |d| \neq 0$,

IV. $w'' = (w')^2 w^{-1}/2 + 3w^3/2 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \beta w^{-1}$,

V. $w'' = (w')^2\left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right) - \frac{w'}{z} +$
$+ \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma\frac{w}{z} + \delta\frac{w(w+1)}{w-1}$,

VI. $w'' = \frac{(w')^2}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right) - w'\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right) +$
$+ \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[\alpha + \beta\frac{z}{w^2} + \gamma\frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right]$.

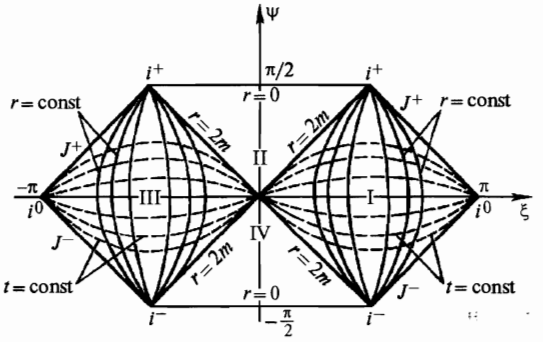
П. у. возникают при сведении к обыкновенным дифференциальным уравнениям некоторых нелинейных уравнений математич. физики, в частности *Кортевега – де Фриса уравнения* (П. у. II), *синус-Гордона уравнения* (П. у. III), *нелинейного уравнения Шредингера* (П. у. IV).

Решения П. у. (трансцендентные функции Пенлеве – специальные функции, не сводящиеся к известным) обладают *Пенлеве свойством*: не имеют других подвижных (то есть зависящих от постоянных интегрирования или начальных данных) особенностей, кроме полюсов. Так, решения П. у. I–IV не имеют вообще никаких особенностей, кроме полюсов; решения П. у. V имеют неподвижные логарифмич. точки ветвления при $z = 0$ и $z = \infty$, а решения П. у. VI – при $z = 0$, $z = 1$ и $z = \infty$. Установление свойства Пенлеве позволяет находить интегрируемые варианты различных моделей нелинейных явлений и многих нелинейных уравнений, решаемых при помощи *обратной задачи рассеяния метода*.

Лит.: [1] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Харьков, 1939; [2] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.– Л., 1950; [3] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 1, М., 1985.

Ю. А. Данилов.

ПЕНРОУЗА ДИАГРАММЫ – координатные диаграммы конформного пространства-времени, предложенные Р. Пенроузом [1]. П. д. строятся в системе координат, переход к к-рым делает возможным представление бесконечности в виде границы конечной области. Конформное преобразование пространства-времени позволяет ввести регулярную метрику на расширенном многообразии, образованном присоединением этой границы к исходному многообразию. На рис. изображена П. д. $r = t$ плоскости аналитически про-



долженного пространства-времени Шварцшильда в координатах ψ, ξ, связанных с координатами Крускала – Шекерса u, v по формулам

$$v + u = \operatorname{tg}(\psi + \xi)/2,\ v - u = \operatorname{tg}(\psi - \xi)/2.$$

Области I, III ($r > 2m$) на диаграмме соответствуют двум асимптотически плоским областям, области II, IV ($r < 2m$) – внутренности черной и белой дыры; горизонты изображаются линиями $\psi = \pm\xi$. Диаграмма содержит две сингулярности $r = 0$ и по две изотропных конформных бесконечности J^+ и J^- (см. *Конформная бесконечность* асимптотически плоского пространства-времени). Времениподобные бесконечности, где начинаются и кончаются времениподобные кривые и, в частности, мировые линии $r = \text{const}$ (изображены на рис. пунктиром), обозначаются на диаграмме точками i^- и i^+. Точки i^0 представляют собой пространственноподобные бесконечности, куда простираются сечения $t = \text{const}$ (изображены сплошными линиями). Радиальные нулевые геодезические имеют наклон $\pm 45°$.

Лит.: [1] Penrose R., «Proc. Roy. Soc. London, Ser. A», 1965, v. 284, № 1397, p. 159–203; [2] Kruskal M., «Phys. Rev.», 1960, v. 119, № 5, p. 1743–45.

А. Т. Ильичев.

ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА поверхности M^k в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, радиус-вектор текущей точки которой задан параметрически $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, \ldots, u^k)$, – форма вида

$$(d\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}) = g_{ab}du^a du^b,$$

то есть

$$g_{ab} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^a}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^b}\right).$$

В инвариантной форме П. к. ф. в точке $m \in M^k$ – это ограничение евклидовой метрики $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ на касательное пространство $T_m M^k$. В случае когда $n = 3$, часто используют классич. обозначения

$$E = g_{11},\ F = g_{12},\ G = g_{22}.$$

Коэффициенты g_{ij} образуют тензор, называемый метрическим тензором.

См. также *Римана геометрия*.

В. В. Трофимов.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА – см. *Краевая задача, Дирихле задача*.

ПЕРВИЧНАЯ СВЯЗЬ – см. *Гамильтонов формализм*.

ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ – см. *Термодинамики законы*.

ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВА – см. *Колмогорова уравнение*.

ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ автономного обыкновенного дифференциального уравнения (не зависящий от времени) – функция F в фазовом пространстве M этого уравнения, постоянная на фазовых кривых. Поверхности уровня $\{F=\text{const}\}$ П. и. суть инвариантные множества уравнения. Напр., если гамильтониан какой-нибудь гамильтоновой системы не зависит от времени, то он является П. и. этой системы.

Зависящий от времени П. и. обыкновенного дифференциального уравнения (вообще говоря, неавтономного) – функция F в расширенном фазовом пространстве $M\times\mathbb{R}$ этого уравнения, постоянная на интегральных кривых (графиках решений). Непрерывно дифференцируемая функция $F(x, t)$ является П. и. уравнения

$$\frac{dx}{dt}=V(x, t)$$

тогда и только тогда, когда ее производная вдоль решений этого уравнения тождественно равна нулю, то есть

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}V\equiv 0.$$

Непостоянный гладкий П. и. позволяет понизить порядок уравнения (размерность фазового пространства) на единицу. Отсюда происхождение термина «П. и.» – «первый шаг к решению (интегрированию)».

Полной системой первых интегралов уравнения называется такой набор F_i П. и. этого уравнения, что любой другой П. и. F является функцией от F_i.

Лит. см. при ст. *Фазовое пространство.* *М. Б. Севрюк.*

ПЕРЕВАЛА МЕТОД – метод вычисления асимптотики интегралов вида

$$F(\lambda)=\int_\gamma f(z)\exp\{\lambda S(z)\}\,dz. \qquad (1)$$

Здесь $\lambda>0$ – большой параметр, γ – кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости z, функции $f(z)\not\equiv 0$, $S(z)\not\equiv$ $\not\equiv\text{const}$ голоморфны в области $\mathcal{D}$, γ лежит внутри $\mathcal{D}$.

По формуле Стокса, интеграл не изменится, если цепь деформировать, не меняя ее границы. Поэтому цепь деформируют так, чтобы уменьшить на ней вещественную часть фазы f (при больших τ она определяет величину интеграла). Уменьшать вещественную часть f можно сдвигом внутренности Γ вдоль градиента f. Сдвигать Γ можно до тех пор, пока цепь не наткнется на критич. точки f (в них градиент равен нулю).

Таким образом, П. м. состоит из двух частей: топологической, заключающейся в указании нужным образом продеформированной цепи (перевальнoго контура), и аналитической, состоящей из оценки интеграла по перевальному контуру в окрестностях критич. точек f, а также из оценки интеграла по окрестности границы перевального контура (если максимум вещественной части f достигается на границе перевального контура).

Рассматривается аналитич. часть П. м., точнее, исследование асимптотики интеграла в окрестности критич. точки f. Предполагается, что ограничение f на границу цепи Γ имеет отрицательную вещественную часть, критич. точка находится в начале координат и $f(0)=0$.

Точка z_0 называется точкой перевала (или седловой точкой), если $S'(z_0)=0$, и простой точкой перевала, если $S''(z_0)\neq 0$.

Пусть

$$S'(z_0)=0,\ \ldots,\ S^{(n-1)}(z_0)=0,\ S^{(n)}(z_0)\neq 0,\ n\geqslant 2;$$

тогда локально вблизи точки z_0 линии уровня

$$\operatorname{Re}[S(z)-S(z_0)]=c,\ \operatorname{Im}[S(z)-S(z_0)]=c$$

топологически устроены так же, как и для функции

$$S=a(z-z_0)^n.$$

При $c\neq 0$ линии уровня – аналитич. кривые, а при $c=0$ они состоят из $n+2$ аналитич. дуг с вершиной z_0. Линией наискорейшего спуска называется линия

$$\operatorname{Im}S(z)=\operatorname{Im}S(z_0),$$

вдоль к-рой

$$\operatorname{Re}S(z)<\operatorname{Re}S(z_0);$$

имеется $n+2$ линий наискорейшего спуска.

Контур γ называется перевальным, если

$$M=\max_\gamma \operatorname{Re}S(z)$$

достигается в конечном числе точек $z_1, \ldots, z_N$, к-рые являются точками перевала или концами контура. Кроме того, если z_j есть точка перевала, U_j – малая ее окрестность, то концы кривой $\gamma\cap U_j$ лежат в двух разных секторах, в к-рых $\operatorname{Re}S(z)<\operatorname{Re}S(z_0)$. Асимптотика интеграла (1) по перевальному контуру равна сумме вкладов от точек перевала и концов контура:

$$F(\lambda)=\sum_{j=1}^N V(z_j,\lambda)+O(\exp\{\lambda(M-\varepsilon)\}),\ \varepsilon>0,\ \lambda\to+\infty.$$

Если z_j – простая точка перевала, то

$$V(z_j,\lambda)=\left[\frac{2\pi}{-\lambda S''(z_j)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\exp\{\lambda S(z_j)\}\left[f(z_j)+\sum_{n=1}^\infty a_n\lambda^{-n}\right]. \qquad (2)$$

Если z_j – начало γ и $S'(z_j)\neq 0$, то

$$V(z_j,\lambda)=-\frac{1}{\lambda S'(z_j)}\exp\{\lambda S(z_j)\}\left[f(z_j)+\sum_{n=1}^\infty b_n\lambda^{-n}\right].$$

Эти асимптотич. ряды можно дифференцировать почленно любое число раз. Вклады от кратных точек перевала и от точек перевала, лежащих на концах γ, вычислены (см. [1]). Исследованы также случаи слияния особенностей: две близкие точки перевала, близкие точки перевала и конец контура, близкие точки перевала и полюс (см. [1]).

П. м. был создан П. Дебаем (см. [3]) и является мощным методом вычисления асимптотики интегралов. С его помощью вычислена асимптотика всех специальных функций, для к-рых имеются интегральные представления, асимптотика преобразований Фурье, Лапласа, Меллина, Ганкеля и других от различных классов функций. П. м. называется также метод седловой точки, метод наискорейшего спуска.

Пусть в (1) $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $dz=dz_1, \ldots, dz_n$ и γ – гладкая ограниченная поверхность вещественной размерности n в C^n. Точка z^0 называется точкой перевала функции $S(z)$, если $\nabla S(z^0)=0$. Точка перевала называется невырожденной, если

$$\det H(z^0)\neq 0,\quad H(z^0)=\frac{\partial^2 S(z^0)}{\partial z_j\partial z_k},\quad 1\leqslant j,\quad k\leqslant n.$$

Определение перевального контура и (2) сохраняются. Вклад от невырожденной точки перевала имеет вид:

$$V(z^0,\lambda)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}[\det H(z^0)]^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\{\lambda S(z^0)\}\left[f(z^0)+\sum_{m=1}^\infty a_m\lambda^{-m}\right].$$

Этот асимптотич. ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.

Развит многомерный П. м. (см. [1]).

Лит.: [1] Федорюк М. В., Асимптотика. Интегралы и ряды, М., 1987; [2] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений, М., 1984; [3] Debye P., «Math. Ann.», 1909, Bd 67, S. 535–58. *М. В. Федорюк.*

ПЕРЕВАЛА ТОЧКА – см. *Перевала метод.*

ПЕРЕВАЛЬНЫЙ КОНТУР – см. *Перевала метод.*

ПЕРЕКЛЕЙКИ ФУНКЦИЯ – см. *Комплексное многообразие.*

ПЕРЕКРЕСТНАЯ СИММЕТРИЯ, кроссинг-симметрия,– особый вид симметрии в квантовой теории поля, состоящий в том, что амплитуда любого процесса не изменяется, если какие-либо частицы из начального и конечного состояний поменять местами, заменив при этом частицы на античастицы. Была открыта в теории возмущений. В общем случае П. с. следует из редукционных формул и доказана в аксиоматич. квантовой теории поля.

Наиболее интересные выводы из П. с. следуют для бинарного процесса $a+b\to c+d$. Обозначим через $s=(p_a+p_b)^2$ квадрат его полной энергии в системе центра инерции (p_i – 4-импульс частицы i). Применяя П. с. к двум парам частиц (a, c) и (a, d), получим еще два процесса, для к-рых роль s выполняют соответственно переменные $u=(p_b-p_c)^2$ и $t=(p_b-p_d)^2$. Величины (s, u, t) называются манделстамовскими переменными, а соответствующие им три процесса – s-, u- и t-каналами. П. с. утверждает, что амплитуды трех процессов

$$\text{I. } a+b\to c+d\ (s,\ u,\ t),$$

$$\text{II. } \tilde{c}+b\to\tilde{a}+d\ (u,\ s,\ t),$$

$$\text{III. } \tilde{d}+b\to c+\tilde{a}\ (t,\ u,\ s)$$

равны при указанных заменах манделстамовских переменных. Замены переменных следует понимать не формально, а как аналитич. продолжение, напр. по переменной s для процесса I. При аналитич. продолжении точка (s, u, t) из физич. области реакции I переходит в нефизич. область реакции II, что легко усматривается из вида замены (a, c) в импульсном пространстве:

$$(p_a,\ p_b,\ p_c,\ p_d)\to(-p_c,\ p_b,\ -p_a,\ p_d).$$

Возможность такого аналитич. продолжения была впервые доказана Н. Н. Боголюбовым при установлении *дисперсионных соотношений* для πN-рассеяния при фиксированном значении переданного импульса. На основе специальной аксиоматики, в к-рой ключевую роль играет принцип микропричинности Боголюбова, было доказано существование единой аналитич. функции комплексного переменного s, граничные значения к-рой представляют собой амплитуды перекрестных процессов. Трудности доказательства аналитич. свойств и конструктивного построения удовлетворяющих им амплитуд препятствуют прямой экспериментальной проверке П. с. Наиболее эффективно она была использована при проверке дисперсионных соотношений в физике частиц. С ее помощью по данным об электромагнитной структуре протона предсказано существование ρ-мезона – резонансного состояния в системе двух пионов. Наиболее интересное использование П. с. нашла в физике низких энергий. Вместе с условием унитарности и предположением о важности малого числа парциальных волн она позволила получить замкнутые системы уравнений.

Лит.: [1] Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А., Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях, М., 1967; [2] Бартон Г., Дисперсионные методы в теории поля, пер. с англ., М., 1968; [3] Иниксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 1, М., 1984, гл. 5.

В. А. Мещеряков.

ПЕРЕМЕННОГО ДЕЙСТВИЯ ПРИНЦИП, принцип Гельдера,– один из *вариационных принципов классической механики*; является расширением *Гамильтона–Остроградского принципа* стационарного действия. П. д. п. устанавливает вариацию функции действия δ по Гамильтону при переходе от одного действительного движения к другому близкому и тоже действительному движению, полученному в результате варьирования начального и конечного положений системы (вариации Гамильтона $\delta q_i^{(1)}$ и $\delta q_i^{(2)}$ равны нулю). Принцип предложен О. Гельдером (O. Hölder, 1896)

Лит.: [1] Беленький Н. М., Введение в аналитическую механику, М., 1964.

М. И. Войцеховский.

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ – свойство *стационарного случайного процесса* X_t, состоящее в том, что

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}(\Lambda\cap\theta_t\Gamma)=\mathsf{P}(\Lambda)\mathsf{P}(\Gamma)$$

для всех $\Lambda,\Gamma\in\mathfrak{R}$ (обозначения см. в ст. *Эргодическая теорема*). П. влечет *эргодичность* процесса.

Существуют различные модификации понятия П. Напр., слабое П. стационарного случайного процесса X_t с непрерывным временем состоит в том, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathsf{P}(\Lambda\cap\theta_u\Gamma)\,du=\mathsf{P}(\Lambda)\mathsf{P}(\Gamma)$$

для всех $\Lambda,\Gamma\in\mathfrak{R}$. Слабое П. также влечет эргодичность процесса.

Сильное П., по Розенблатту, усиливает свойство П. до следующего:

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\Lambda\in\mathfrak{R}^s,\,\Gamma\in\mathfrak{R}_{s+t}}|\mathsf{P}(\Lambda,\Gamma)-\mathsf{P}(\Lambda)\mathsf{P}(\Gamma)|=0,$$

где $\mathfrak{R}^s(\mathfrak{R}_s)$ есть наименьшая σ-алгебра, порожденная течением процесса X_t до (после) момента времени s.

Равномерно сильное П. означает, что

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\Lambda\in\mathfrak{R}^s,\,\Gamma\in\mathfrak{R}_{s+t}}|\mathsf{P}(\Gamma|\Lambda)-\mathsf{P}(\Gamma)|=0.$$

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные случайные величины, М., 1965.

В. М. Шуренков.

***K*-ПЕРЕМЕШИВАНИЕ** – свойство автоморфизма T вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, состоящее в том, что для любого натурального k и любых множеств $A_0, A_1, \ldots, A_k\in\mathcal{F}$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\mathcal{F}_n^\infty(A_1,\ldots,A_k)}|\mathsf{P}(A_0\cap A)-\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A)|=0,$$

где $\mathcal{F}_n^\infty(A_1,\ldots,A_n)$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая множества T^mA_i, $m\geqslant n$, $i=1,\ldots,k$. Свойство K-п. равносильно тому, что T является K-автоморфизмом (этим и объясняется название).

Лит.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

Б. М. Гуревич.

ПЕРЕМЕШИВАНИЯ УСЛОВИЯ для случайного поля – условия, выражающие слабую зависимость (в определенном смысле) σ-алгебр, порожденных полем на достаточно удаленных друг от друга множествах. Пусть $X(t)=X(t,\ \omega)$ – *случайное поле*, заданное для $t\in T\subset\mathbb{R}^n$ и $\omega\in\Omega$, где $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ – вероятностное пространство. Множеству $U\subset\mathbb{R}^n$ сопоставляется $\mathfrak{A}_X(U)=\sigma\{X(t),\ t\in U\cap T\}$ – наименьшая σ-алгебра, порожденная полем $X(\cdot)$ на множестве $U\cap T$; $\mathfrak{A}_X(\varnothing)=\{\varnothing,\Omega\}$. Коэффициенты зависимости (перемешивания) используют для описания связей σ-алгебр $\mathfrak{A}_X(U_1),\ \ldots,\ \mathfrak{A}_X(U_k)$, $k\in\mathbb{N}$, $U_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\ldots,k$. При этом существенно, как выбрана мера зависимости для набора σ-алгебр и как учтено «пространственное расположение» этих σ-алгебр, то есть расположение множеств U_i, $i=1,\ldots,k$. Широко употребительными являются парные коэффициенты перемешивания, введенные первоначально для случайных процессов. Однако перенесение этих коэффициентов перемешивания с процессов на поля должно учитывать многомерную специфику параметрич. множества T (см. [1]–[3]). Пусть $\nu\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}$ – нек-рая мера зависимости, то есть неотрицательная функция от σ-алгебр $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\subset\mathcal{F}$ такая, что $\nu\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}=0$, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ независимы. Положив

$$\nu_X(V_1;\ V_2)=\nu\{\mathfrak{A}_X(V_1),\ \mathfrak{B}_X(V_2)\},\ V_i\subset\mathbb{R}^n,\ i=1,\ 2,$$

определим коэффициенты перемешивания поля $X(\cdot)$ на множестве $U\subset\mathbb{R}^n$:

$$\nu_X(r,\ U)=\sup\nu_X(V_1;\ V_2).\qquad(1)$$

Здесь верхняя грань берется по V_1, $V_2 \subset U$ таким, что $d(V_1, V_2) \geqslant r$, d – расстояние между множествами [напр., $d(V_1, V_2) = \inf\{d(x_1, x_2); x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$, где d – метрика в $\mathbb{R}^n$]; верхняя грань по пустому множеству равна нулю. При этом, как правило, V_1 и V_2 удовлетворяют нек-рым дополнительным условиям. Напр., можно требовать, чтобы V_1 и V_2 отделялись слоем ширины r между парой гиперплоскостей или между концентрич. шарами (кубами), можно налагать ограничения на диаметры V_1 и V_2, на число элементов V_1 и V_2 (в дискретном случае) и т. п.

П. у. (парные) обычно означают, что $\nu_X(V_1; V_2) \to 0$, если V_1 и V_2 «раздвигаются». Простейший вариант этого требования состоит в m-зависимости поля, то есть $\mathfrak{A}_X(V_1)$ и $\mathfrak{A}_X(V_2)$ независимы при $d(V_1, V_2) \geqslant m$. Более общим образом определяется $m(U)$-зависимое поле, для к-рого $\mathfrak{A}_X(V_1)$ и $\mathfrak{A}_X(V_2)$ независимы при $d(V_1, V_2) \geqslant m(U)$ для $V_1, V_2 \subset U$. Используют также для нек-рых ν П. у. вида $\nu_X(r) = \nu_X(r; \mathbb{R}^n) \to 0$ при $r \to \infty$ (см. [4]). Если на V_1, V_2 в (1) наложены дополнительные ограничения, то фактически речь может идти о поведении (необязательно равномерном) целого семейства коэффициентов (напр., если $T = \mathbb{Z}^n$, $V_1, V_2 \subset \mathbb{Z}^n$ и $|V_1| \leqslant k$, $|V_2| \leqslant l$, $k, l \in \mathbb{N}$, $|\cdot|$ – число элементов). Рассматривается и поведение $\nu_X(r, U)$ при согласованном изменении r и U или даются оценки сверху для $\nu_X(V_1; V_2)$, учитывающие свойства V_1, V_2. По изложенной схеме возможно описывать зависимость величин $X(t_1)$, ..., $X(t_k)$, $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, k$, не обращаясь к σ-алгебрам событий, а оперируя системами событий (связанных, напр., с пересечением нек-рого уровня) или применяя функционалы, заданные на системах случайных величин. О перемешивании, используемом в эргодич. теории, см. в [5]. О непарных коэффициентах перемешивания и П. у. см. в [5]–[7]. Так, напр., кратное перемешивание означает, что для любого k и любого набора локальных ограниченных функций $F_{A_1}, \ldots, F_{A_k}$

$$\mathsf{E}(F_{A_1+t_1}(X) \ldots F_{A_k+t_k}(X)) \to \mathsf{E}F_{A_1}(X) \ldots \mathsf{E}F_{A_k}(X),$$

когда

$$\min_{1 \leqslant i < j \leqslant k} d(t_i, t_j) \to \infty,$$

здесь

$$F_{A+t}(X) = F_A(\tau_t X), \quad (\tau_t X)(s) = X(s+t).$$

Важнейшим примером непарных коэффициентов перемешивания являются семиинварианты (см. [8]). Если нек-рая группа из величин $X(t_1)$, ..., $X(t_k)$ независима от остальных величин в наборе, то семиинвариант

$$\operatorname{cum}(X(t_1), \ldots, X(t_k)) = 0.$$

Таким образом, близость к нулю указанного семиинварианта характеризует степень зависимости величин $X(t_i)$, $i = 1, \ldots, k$. При этом, оценивая сверху

$$\operatorname{cum}(g_1(X(t_1)), \ldots, g_k(X(t_k)))$$

для определенных семейств функций g_i, $i = 1, \ldots, k$ (см. [7]), расположение точек $t_1, \ldots, t_k$ удается учитывать в терминах теории графов. Заметим также, что описание зависимости поля может основываться и на свойствах случайной функции $X(\cdot)$ безотносительно к ее поведению на «удаленных» подмножествах пространства параметров. В этой связи о конечно зависимых полях см. в [9], о многопараметрич. мартингалах см. в [10], о марковских полях см. в [11], о системах ассоциированных величин см. в [12].

Лит.: [1] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 201–29; [2] Журбенко И. Г., «Доклады АН СССР», 1984, т. 278, № 4, с. 793–96; [3] Булинский А. В., «Доклады АН СССР», 1988, т. 299, № 4, с. 785–89; [4] Dependence in Probability and Statistics, v. 11, Boston – [a. o.], 1986; [5] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [6] Bradley R. C., Bryc W., «J. Multivar. Analis», 1985, v. 16, № 3, p. 335–67; [7] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [8] Саулис Л., Статулявичус В., Предельные теоремы о больших уклонениях, Вильнюс, 1989; [9] Chen L. H. Y., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1978, Bd 43, S. 223–43; [10] Гихман И. И., «Успехи математич. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 3–28; [11] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1980; [12] Newman C. M., «Comm. Math. Phys.», 1981, v. 74, p. 119–28.

А. В. Булинский.

ПЕРЕНОРМИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ – см. *Перенормировка* в квантовой механике.

ПЕРЕНОРМИРОВКА в квантовой теории поля – процедура устранения *ультрафиолетовых расходимостей*, которые возникают при разложении квантовополевых величин в формальные степенные ряды по константе связи в рамках метода теории возмущений. В каждом порядке теории возмущений квантовополевые величины представляют собой сумму диаграмм (амплитуд) Фейнмана. Если выразить диаграмму Фейнмана через фейнмановский интеграл по петлевым 4-мерным импульсам, то ультрафиолетовые расходимости проявятся в виде его расходимости в области больших импульсов. Если же определять фейнмановскую диаграмму в координатном пространстве (то есть преобразование Фурье от фейнмановской диаграммы в импульсном пространстве), то задача сведется к определению произведения пропагаторов (причинных функций свободных полей)

$$\prod_l D_l\left(x_{\pi_+(l)} - x_{\pi_-(l)}\right)$$

(произведение берется по всем линиям диаграммы; $\pi_+(l)$ и $\pi_-(l)$ – соответственно начало и конец линии l; x_i – 4-мерные пространственно-временные координаты). Такой объект оказывается некорректно определенным, поскольку сомножители являются обобщенными функциями, причем их поверхности сингулярности пересекаются. Это произведение однозначно определено по крайней мере всюду, кроме точек, где совпадают нек-рые из координат x_i. П. можно, таким образом, охарактеризовать как продолжение функционала на всю область изменения координат.

Математич. основы теории П. заложены в середине 50-х гг. Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком. П. на диаграммном уровне, то есть в применении к диаграммам Фейнмана, называется также R-операцией. Центральным пунктом теории перенормировок является теорема Боголюбова – Парасюка, к-рая утверждает, что действие R-операции на произвольную фейнмановскую амплитуду дает конечный результат. Основное физич. требование, предъявляемое к П., состоит в том, что она должна описываться переопределением (перенормировкой) параметров исходного лагранжиана рассматриваемой теории. Напр., в скалярной φ^4-теории с лагранжианом

$$\mathscr{L} = (\partial\varphi)^2/2 - m^2\varphi^2/2 - \frac{1}{4!} g\varphi^4$$

П. эквивалентна переходу к перенормированному лагранжиану

$$\mathscr{L}^{\text{ren}} = \frac{1}{2} Z_2 (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} Z_{m^2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} Z_1 g\varphi^4, \qquad (1)$$

то есть введению в исходный лагранжиан $\mathscr{L}$ дополнительных слагаемых (контрчленов) с коэффициентами

$$\delta Z_2 = Z_2 - 1, \quad \delta Z_{m^2} = Z_{m^2} - 1, \quad \delta Z_1 = Z_1 - 1.$$

Эти коэффициенты представляются в виде суммы вкладов от соответствующих диаграммных контрчленов, к-рые устраняют расходимости из отдельных фейнмановских интегралов.

По отношению к характеру П. квантовополевые модели подразделяются на перенормируемые и неперенормируемые. Теория называется перенормируемой, если для ее П. в лагранжиан достаточно добавлять контрчлены с той же операторной структурой, что и в исходном лагран-

жиане. Если же приходится добавлять контрчлены новых типов, теория называется неперенормируемой. В этом случае теория фактически не допускает корректной процедуры квантования. Перенормируемыми оказываются практически все теории с безразмерными константами взаимодействия, напр. φ^4-теория, квантовая электродинамика и квантовая хромодинамика. Массивные векторные поля, вообще говоря, могут привести к неперенормируемости. Однако с помощью спонтанного нарушения симметрии, основанного на так наз. механизме Хиггса, удается построить перенормируемую теорию с массивными векторными бозонами.

Таким образом, процедура П. в любой перенормируемой теории фиксируется конечным числом контрчленов, коэффициенты в к-рых представляют собой константы П. волновых функций, масс и П. констант взаимодействия. Напр., в квантовой электродинамике П. сводится к замене первоначальной («затравочной», или «голой») массы электрона m_0 и квадрата первоначальной константы взаимодействия α_0 на перенормированные значения $m = m_0 + \delta m = Z_m m_0$ и $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha = Z_\alpha \alpha_0$, к-рые отождествляются с экспериментально наблюдаемыми значениями: массой электрона и постоянной тонкой структуры, приблизительно равной 1/137.

Чтобы сделать фейнмановскую амплитуду конечной, нужно устранить «ее собственную» расходимость, а также все внутренние расходимости, связанные с расходящимися подграфами, то есть для к-рых индекс расходимости неотрицателен (см. *Ультрафиолетовые расходимости*). Достаточно устранять расходимости из сильно связных (одночастично неприводимых) подграфов. Устранение расходимости в сильно связном подграфе означает доопределение произведения пропагаторов в точках совпадения координат, соответствующих вершинам данного подграфа. Поэтому процедура устранения расходимости описывается добавлением к исходному произведению пропагаторов

$$\prod_l D_l\left(x_{\pi_+(l)} - x_{\pi_-(l)}\right)$$

слагаемых, сосредоточенных в этих точках, то есть произведений δ-функций $\delta(x_i - x_j)$ и их производных.

Для того чтобы удаление ультрафиолетовых расходимостей сводилось к переопределению параметров лагранжиана, нужно применять R-операцию, обладающую следующей структурой:

$$R_\Gamma = \sum_{\mathfrak{S}} \Delta(\mathfrak{S}) \equiv R'_\Gamma + \Delta(\Gamma). \qquad (2)$$

В (2) производится суммирование по множествам $\mathfrak{S} = \{\gamma^i\}$ попарно непересекающихся расходящихся подграфов данного графа Г, а граф называется расходящимся, если его индекс расходимости

$$\omega = 4\mathfrak{R} - 2L + \sum_l n_l$$

неотрицателен (здесь $\mathfrak{R}$ и L – соответственно число петель и линий, а n_l – степень полинома P_l в числителе пропагатора

$$D_l(q) = \frac{P_l(q)}{m_l^2 - q^2 - i0},$$

соответствующего l-й линии). Кроме того, R'_Γ – это «R-операция без последнего вычитания», а $\Delta(\mathfrak{S})$ – контрчленные операции. Действуя на фейнмановскую амплитуду G_Γ, операция $\Delta(\mathfrak{S})$ превращает ее в фейнмановскую амплитуду для редуцированного графа $\Gamma/\cup_i \gamma^i$ (он получается из Г стягиванием каждого из подграфов γ^i в точку), причем вершинам, в к-рые стянулись подграфы γ^i, сопоставляются полиномиальные по импульсам факторы («диаграммные» контрчлены). Локальность контрчленов позволяет в конечном счете связать «диаграммные» контрчлены с контрчленами лагранжиана. Напр., в теории φ^4 контрчлены собственно-энергетич. графов (см. *Фейнмана диаграмма*) дают вклад в контрчлены δZ_2 и $\delta Z_m{}^2$ в лагранжиане (1), а контрчлены графов вершинного типа – в δZ_1.

Контрчленные операции задаются рекуррентными соотношениями

$$\Delta(\mathfrak{S}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathfrak{S} = \varnothing, \\ \prod_i \Delta(\gamma^i), & \text{если } \mathfrak{S} = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^i, \ldots\}, \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$\Delta(\gamma) = \begin{cases} -M_\gamma R'_\gamma & \text{– сильно связный подграф,} \\ 0 & \text{– в остальных случаях} \end{cases} \qquad (4)$$

– контрчленные операции для подграфов, а M_γ – нек-рый вычитающий оператор, выбор к-рого фиксирует перенормировочную схему. Обычно перенормировочная схема описывает нек-рый класс R-операций, характеризующийся значениями одного или нескольких параметров. Среди «множества» перенормировочных схем можно выделить два основных подмножества: схемы, основанные на вычитаниях по импульсам, и схемы с вычитаниями полюсов по комплексным параметрам регуляризации. Если для схем первого вида регуляризацию можно и не вводить, то определение какой-либо схемы второго вида основано на вполне конкретной регуляризации (см. *Ультрафиолетовая расходимость*). Вычитающий оператор, по крайней мере, должен обеспечивать локальность контрчленных операций. Это требование автоматически выполняется в схемах с вычитаниями по импульсам. Простейшим вариантом такой перенормировочной схемы является R-операция Боголюбова–Парасюка, к-рая основана на вычитающем операторе, выделяющем несколько первых членов разложения фейнмановского интеграла в ряд Тейлора при нулевых импульсах.

Переномировка Боголюбова – Парасюка в своем первоначальном виде неприменима в теориях с безмассовыми частицами, поскольку в этом случае вычитания при нулевых импульсах порождают *инфракрасные расходимости*. Существует несколько вариантов ее обобщения для теорий, включающих безмассовые частицы. Они основаны на введении в контрчлены нек-рого массивного параметра, предупреждающего возникновение инфракрасных расходимостей. Напр., тейлоровские вычитания можно производить не при нулевых импульсах, а в нек-рой точке евклидовых импульсов. Еще один вариант схемы с вычитаниями по импульсам – П. на массовой поверхности, то есть при $q^2 = m^2_{\text{физ}}$, где $m_{\text{физ}}$ – наблюдаемая масса частицы. Эта схема характеризуется нормировочными условиями

$$\Sigma(q^2, m^2)\Big|_{q^2 = m^2_{\text{физ}}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q^2}\Sigma(q^2, m^2)\Big|_{q^2 = m^2_{\text{физ}}} = 0,$$

налагаемыми на вклад $\Sigma(q^2, m^2)$ сильно связных собственно-энергетич. диаграмм.

К перенормировочным схемам с использованием комплексных параметров регуляризации относятся аналитическая и размерная перенормировки. Вычитающий оператор для аналитич. П. выделяет полюсную часть разложения в ряд Лорана по параметру аналитич. регуляризации. Аналогичным образом вычитающий оператор для размерной П. выделяет полюсы по параметру $\varepsilon = (4 - d)/2$, характеризующему отклонение параметра размерной регуляризации от физич. значения $d = 4$. Следует подчеркнуть, что величины $\Delta(\gamma) G_\Gamma$, $M_\gamma G_\Gamma$, как и сами неперенормированные фейнмановские амплитуды, имеют смысл лишь при наличии регуляризации (напр., размерной), а в перенормированных фейнмановских амплитудах можно уже перейти к физич. значениям регуляризующих параметров, то есть снять регуляризацию. Хотя все перенормировочные схемы физически эквивалентны, выбор какой-то конкретной из них может предоставить существенные преимущества. Напр., в калибровочных теориях целесообразно применять

П. (и регуляризацию), совместную с калибровочной инвариантностью, в частности размерную П.

Соотношения (2)–(4) рекурсивно определяют R-операцию через вычитающий оператор. Явное разрешение этих рекуррентных соотношений дает так наз. лесная формула (см. *Боголюбова–Парасюка R-операция*).

П. производится не только в матрице рассеяния

$$S = RT\exp\left(i\int \mathscr{L}_{\text{int}}(y)\,dy\right)$$

(здесь $\mathscr{L}_{\text{int}}$ – лагранжиан взаимодействия, T – символ хронологич. упорядочения, R – нек-рая R-операция; подразумевается отсутствие вклада вакуумных диаграмм), но и в составных операторах (полях) – объектах, к-рые участвуют в уравнениях движения и тождествах Уорда–Славнова, позволяя тем самым выразить фундаментальные свойства квантовополевой теории. Составной оператор $J(x)$ задается нек-рым полиномом $j(x)$ по полям и их производных. Его разложение по диаграммам Фейнмана можно получить из представления

$$J(x) = RT\exp\left(i\int \mathscr{L}_{\text{int}}(y)\,dy\right)j(x).$$

В этих диаграммах помимо вершин, тип к-рых определяется лагранжианом взаимодействия, содержится одна специальная вершина (она всегда внешняя), связанная с составным оператором. Обычно выбирают нек-рый базис составных операторов $\{J_i(x)\}$, заданный своими прообразами – полиномами $j_i(x)$. П. составных операторов задается соотношением

$$J_i(x) = \sum_k Z_{ik} J_k^B(x). \qquad (5)$$

Здесь Z_{ik} – матрица П. составных операторов, а $J_k^B(x)$ – составные операторы, в к-рых устранены все ультрафиолетовые расходимости, за исключением расходимостей, связанных с вершиной x.

Устранение ультрафиолетовых расходимостей содержит конечный произвол. Если задана нек-рая перенормировочная процедура, то из нее можно получить любые другие схемы, добавляя к контрчленам конечные (при снятии регуляризации) слагаемые. Точнее говоря, для этого можно изменить заданный вычитающий оператор M_γ на $M_\gamma - P_\gamma$, где P_γ – оператор конечной П. Оператор P_γ при действии на фейнмановскую амплитуду G_Γ превращает ее в фейнмановскую амплитуду $G_{\Gamma/\gamma}$, в к-рой редуцированной вершине сопоставлен нек-рый конечный полином по импульсам.

На лагранжевом уровне изменение перенормировочной процедуры означает перегруппировку слагаемых за счет перебрасывания членов между основной и контрчленной частями лагранжиана (в φ^4-теории – это, соответственно,

$$\mathscr{L}_{\text{осн}} = (\partial\varphi)^2/2 - m^2\varphi^2/2 - g\varphi^4/4!$$

и

$$\mathscr{L}_{\text{кч}} = \delta Z_2(\partial\varphi)^2/2 - \delta m^2\varphi^2/2 - \delta g\varphi^4/4!).$$

Совокупность этих преобразований образует группу, к-рая называется *ренормализационной группой*. На множестве параметров лагранжиана эта группа действует мультипликативно: $m \to z_m m$, $g \to z_g g$ и т. д. Наблюдаемые физич. величины не зависят от выбора перенормировочных предписаний, то есть являются инвариантными относительно ренормгрупповых преобразований. Таким образом, изменение перенормировочной схемы не меняет теории, а лишь означает переход к другой ее параметризации.

Обычно выделяют какую-нибудь однопараметрич. подгруппу ренормгрупповых преобразований. Напр., в рамках размерной П. эта подгруппа характеризуется параметром μ размерности массы. Таким образом, каждому значению μ соответствуют нек-рые значения масс и констант связи рассматриваемой теории. В результате естественным образом определяются массы $m_i(\mu)$ и константы связи $g_i(\mu)$. Эти параметры называются эффективными, или бегущими, и зависят от рассматриваемого масштаба энергий.

Основу математич. аппарата метода ренормализационной группы составляют функциональные и дифференциальные ренормгрупповые уравнения. Напр., для эффективной константы связи $\bar{g}(Q/\mu^2, g_\mu)$, к-рая в рамках теории возмущений может определяться за счет нормировки в разных точках μ (где она принимает значение g_μ) и тем не менее не должна зависеть от выбора этой точки, функциональное ренормгрупповое уравнение имеет вид

$$\bar{g}(x, g) = \bar{g}(x/t, \bar{g}(t, g)). \qquad (6)$$

Из уравнения (6) можно получить различного рода дифференциальные уравнения, напр.

$$x\frac{\partial\bar{g}(x,g)}{\partial x} = \beta(\bar{g}(x,g)). \qquad (7)$$

Здесь $\beta(g)$ – так наз. *бета-функция*, к-рая выражается через решение уравнения (6) соотношением $\beta(g) = \frac{\partial\bar{g}(x,g)}{\partial x}\Big|_{x=1}$. На практике это дифференциальное ренормгрупповое уравнение применяется следующим образом. Сначала β-функция вычисляется через эффективную константу связи в первых порядках теории возмущений, а затем ренормгрупповое уравнение (7) решается с найденной β-функцией. В результате для эффективной константы связи получается ренорминвариантное выражение, к-рое в заданном порядке теории возмущений совпадает с исходным приближением. Если в β-функцию закладывается информация об однопетлевом приближении, то за счет такой процедуры фактически осуществляется суммирование членов вида $(\alpha\ln Q^2/\mu^2)^n$, дающих вклад в асимптотич. поведение функции Грина при больших переданных импульсах Q. Напр., в квантовой электродинамике в однопетлевом приближении квадрат эффективной константы связи $\bar{\alpha}$ равен

$$\bar{\alpha}^{(1)}(x,\alpha) = \alpha + \frac{\alpha^2}{3\pi}\ln x,$$

что дает выражение

$$\beta(\alpha) = \alpha^2/3\pi$$

для однопетлевой β-функции. Решение дифференциального ренормгруппового уравнения (7) приводит к результату

$$\bar{\alpha}(x,\alpha) = \frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln x}. \qquad (8)$$

Аналогичным образом однопетлевое приближение в квантовой хромодинамике дает для эффективной константы взаимодействия следующее выражение:

$$\bar{\alpha}_s(x,\alpha) = \frac{\alpha_s}{1+\alpha_s\varkappa\ln x}, \qquad (9)$$

где $\varkappa = (33-2n)/12\pi$, а n – число сортов различных кварков.

Если эффективная константа связи стремится к нулю при больших значениях импульсов (то есть на малых расстояниях), то теория называется асимптотически свободной. В этом случае теория возмущений оказывается применимой для описания физики малых расстояний, поскольку эффективный параметр разложения становится малым. Явное выражение (9) показывает, что квантовая хромодинамика обладает асимптотич. свободой, причем учет следующих порядков теории возмущений не изменяет этого свойства. Напротив, в квантовой электродинамике эффективная константа связи (8) является возрастающей. Однако из-за малости низкоэнергетич. параметра разложения

$$\alpha_{\text{физ}} \equiv \bar{\alpha}(Q^2)\big|_{Q^2=0} \cong 1/137$$

можно применять теорию возмущений, так как возрастание эффективной константы связи происходит при экспериментально недоступных энергиях. Более того, квантовоэлектродинамич. расчеты по теории возмущений находятся в прекрасном согласии с экспериментальными данными.

Метод ренормализационной группы был развит в середине 50-х гг. Э. Штюкельбергом (E. Stueckelberg) и А. Петерманом (A. Peterman), М. Гелл-Маном (M. Gell-Mann) и Ф. Лоу (F. Low), Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым. Помимо квантовой теории поля этот метод стал успешно применяться в статистич. физике, а также в нек-рых разделах физики, изучающих не только микроскопич., но и макроскопич. процессы.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979; [3] Иццксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., М., 1984; [4] Коллинз Дж., Перенормировка, пер. с англ., М., 1988; [5] Смирнов В. А., Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд, М., 1990. *В. А. Смирнов.*

ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ – см. *Глэшоу–Вайнберга–Салама модель, Квантовая теория гравитации.*

ПЕРЕНОСА УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА – см. *Больцмана кинетическое уравнение.*

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА – см. *Дифференциальное уравнение* с частными производными второго порядка.

ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ ОПЕРАТОР – см. *Сплетающий оператор.*

ПЕРЕПОЛНЕННАЯ СИСТЕМА – семейство векторов $\{e_x;\ x\in\mathscr{X}\}$ в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющее свойству полноты

$$\|\psi\|^2=\int_{\mathscr{X}}(e_x,\psi)^2\,\mu(dx)\ \text{ для всех }\psi\in H,$$

где μ – нек-рая мера на $\mathscr{X}$. Всякий вектор $\psi\in H$ допускает разложение по векторам П. с.

$$\psi=\int_{\mathscr{X}}e_x(e_x,\psi)\,\mu(dx);$$

соответствующее представление имеет место и для операторов в H. Частным случаем П. с. является полная ортогональная система в H, однако в общем случае векторы e_x могут быть неортогональными и даже линейно зависимыми. Важнейший пример П. с.– система *когерентных состояний.*

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] Клаудер Дж., Сударшан Э., Основы квантовой оптики, пер. с англ., М., 1970. *А. С. Холево.*

ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ФОРМА – билинейная форма $(\cdot\circ\cdot)$ на пространстве гомологий $H_n(M)$ $2n$-мерного ориентированного многообразия M, определяемая по следующему правилу. Пусть α и β – ориентированные цепи, представляющие два цикла $[\alpha]$ и $[\beta]$ в $H_n(M)$. Каждой точке пересечения α и β ставится в соответствие знак ±1, в зависимости от того, индуцируют ли ориентации α и β ориентацию M или противоположную. Тогда $(\alpha\circ\beta)$ равно сумме всех знаков. *С. В. Чмутов.*

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ – соотношения, описывающие различие в воздействии на состояния квантовой системы последовательно применяемых операторов, взятых в разном порядке, то есть отличие $AB|\psi\rangle$ от $BA|\psi\rangle$. В математич. аппарате квантовой теории П. с. отражают свойство некоммутативности *наблюдаемых алгебры*, связанное с существованием физич. величин, не допускающих в принципе одновременное измерение. Отличие от нуля коммутатора $[A,\ B]\doteqdot AB-BA$ операторов, описывающих эти величины, приводит к существованию соотношений неопределенности. Коммутатор является квантовым аналогом классич. скобок Пуассона и приводит к наличию структуры Ли в алгебре наблюдаемых. Примерами некоммутирующих величин являются операторы координаты и импульса, компоненты оператора углового момента, компоненты спина и т. п. Особый класс образуют П. с. генераторов динамич. групп Ли и генераторов групп, описывающих свойства симметрии рассматриваемой физич. системы (напр., генераторы групп Галилея и Пуанкаре или групп унитарной симметрии $SU(n)$ и т. п.). Важное значение в квантовой теории играют П. с. *токов алгебр.* В последние годы в связи с появлением концепции *суперсимметрии*, квантованием нелинейных уравнений и развитием теории квантовых струн активно используются П. с. алгебр Ли бесконечномерных групп Ли, таких, как группа Вирасоро или группа Каца – Муди. Фундаментальное значение имеют П. с. канонич. переменных (или полей), соответствующих бозевским или фермиевским степеням свободы, и П. с. фундаментальных токов (модель нерелятивистских токов, модель Сугавара и т. д.).

П. с. для бозевских степеней свободы. В квантовой механике систем с конечным числом $d<\infty$ степеней свободы постулируются П. с. вида

$$[Q_j,\ P_k]=i\delta_{jk}\mathbb{1},\ \ [Q_j,\ Q_k]=0,\ \ [P_j,\ P_k]=0,\qquad j,\ k=1,\ \ldots,\ d,\ \ \hbar=1. \tag{1}$$

Здесь Q_j – обобщенные координаты, а P_j – канонически сопряженные импульсы. П. с. (1) обычно называют каноническими коммутационными соотношениями в форме Гейзенберга. Известно, что соотношения (1) нельзя удовлетворить ограниченными операторами и они выполняются только на плотной области в гильбертовом пространстве H. От канонич. операторов Q и P часто переходят к унитарным операторам Вейля $U(p)=e^{ipQ}$, $V(q)=e^{iqP}$, $q,\ p\in\mathbb{R}$, к-рые удовлетворяют в силу (1) коммутационным соотношениям в форме Вейля:

$$\left.\begin{aligned}&V(q)U(p)=e^{ipq}U(p)V(q),\\&U(p_1)U(p_2)=U(p_1+p_2),\ \ V(q_1)V(q_2)=V(q_1+q_2)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(для упрощения обозначений рассматривается случай $d=1$). Соотношения (2) определяют группу Гейзенберга – Вейля, алгеброй Ли к-рой служит алгебра Гейзенберга, порождаемая П. с. (1). Наряду с канонич. операторами Q и P часто рассматривают операторы *рождения и гибели процессов*

$$a^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP),\quad a=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q-iP).$$

Это замкнутые неограниченные операторы, удовлетворяющие в силу (1) П. с. вида

$$[a,\ a^+]=\mathbb{1},\ [a,\ a]=0,\ [a^+,\ a^+]=0, \tag{3}$$

к-рые также выполняются только на плотной в H области.

В релятивистской квантовой теории поля постулируются П. с. полевых операторов в разных точках. Напр., для нейтрального скалярного поля $\varphi(x)$ массы m П. с. имеют вид:

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)]=-i\Delta(x-y),$$

где Δ – инвариантная причинная функция, к-рая является решением уравнения $(\Box-m^2)\Delta=0$ и обращается в нуль при пространственноподобном аргументе. В канонич. подходе используют одновременные П. с. между полем $\varphi(x,\ t)$ и канонически сопряженным импульсом $\pi(x,\ t)=\dfrac{\delta z}{\delta\dot{\varphi}}$ (точнее плотность импульса) вида:

$$\left.\begin{aligned}&[\varphi(x,t),\ \pi(y,t)]=i\delta(x-y),\\&[\varphi(x,t),\ \varphi(y,t)]=0,\\&[\pi(x,t),\ \pi(y,t)]=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Поскольку $\varphi(x,\ t)$, $\pi(y,\ t)$ являются операторно-значными распределениями, то для получения операторов производится сглаживание с функциями из подходящего действительного векторного пространства V пробных функций, снабженного скалярным произведением

$$(f,\ g)=\int f(x)g(x)d^3x,$$

то есть вводятся операторы

$$\varphi(f)=\int\varphi(x,t)f(x)\,d^3x,$$

$$\pi(g)=\int\pi(x,t)\,g(x)\,d^3x,$$

удовлетворяющие в силу (4) гейзенберговским канонич. коммутационным соотношениям

$$[\varphi(f),\ \pi(g)]=i(f,\ g),\ [\varphi(f),\ \varphi(g)]=0,\ [\pi(f),\ \pi(g)]=0.$$

В качестве пространства пробных функций обычно используются S- или D-пространства Шварца. Операторы Вейля

$$U(f)=e^{i\varphi(f)},\ V(g)=e^{i\pi(g)}$$

удовлетворяют вейлевским канонич. коммутационным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} V(g)U(f)&=e^{i(f,g)}U(f)V(g),\\ U(f)U(g)&=U(f+g),\\ V(f)V(g)&=V(f+g). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Аналогичные П. с. выполняются для полей старшего спина, заряженных полей и полей нулевой массы. Операторы, удовлетворяющие канонич. коммутационным соотношениям (2) или (5), порождают C^*-алгебру, известную как ККС-алгебра.

П. с. для фермиевских степеней свободы. В квантовой механике фермиевские степени свободы описываются семейством ограниченных линейных операторов рождения и гибели $(a_k^+;\ a_k)_{k=1}^d$, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\left\{a_k^+,a_j\right\}=\delta_{kj},\ \left\{a_k,a_j\right\}=0,\ \left\{a_k^+,a_j^+\right\}=0;\ k,j=1,\dots,d,\\ &\{A,B\}\doteq AB+BA. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Из антикоммутационных соотношений следует, что эти операторы реализуют грассманову алгебру с d образующими. Самосопряженные операторы $A_k=a_k^++a_k$ и $B_k=i(a_k^+-a_k)$, удовлетворяющие П. с.:

$$\{A_k,\ A_j\}=0=\{B_k,\ B_j\},\ k\neq j,\ \{A_k,\ B_j\}=0,\ A_k^2=B_k^2=\mathbb{1},$$

образуют алгебру Клиффорда с $2d$ образующими. Минимальная W^*-алгебра, порождаемая в H операторами $(a_k^+;\ a_k)_{k=1}^d$, известна как АКС-алгебра. В квантовой теории спинорных полей также возникают соотношения (6), но с $d=\infty$.

См. также ст. *Перестановочных соотношений представления.*

Е. В. Дамаскинский.

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — реализация *перестановочных соотношений* операторами в гильбертовом пространстве. В случае бозонных систем с конечным числом d степеней свободы для перестановочных соотношений в форме Вейля *Шредингера представление* единственно, с точностью до унитарной эквивалентности (см. *Перестановочных соотношений представления унитарно эквивалентные*). Для перестановочных соотношений в форме Гейзенберга имеются представления, неэквивалентные представлению Шредингера (см. *Гейзенберга представление, Перестановочных соотношений представления неэквивалентные*). Для фермиевских систем с $d<\infty$, согласно теореме Вигнера — Йордана имеется единственное неприводимое представление, действующее в пространстве размерности 2^d, унитарно эквивалентное фермиевскому представлению Фока. В случае бесконечных систем ($d=\infty$) ситуация усложняется наличием как для бозонов, так и для фермионов по крайней мере континуума представлений, унитарно неэквивалентных друг другу и, в частности, представлению Фока. Первая схема построения П. с. п. была анонсирована в работах [1] и частично доказана в [2]. В случае фермионов доказательство основных результатов приведено в [3].

Пусть X_F — пространство бесконечных двоичных последовательностей $x=\{x_1,\ x_2,\ \dots\}$, $x_k=1$ или 0, являющееся группой относительно покомпонентного сложения (mod 2). Пусть Γ_F — подгруппа в X_F, состоящая из последовательностей, имеющих только конечное число отличных от нуля элементов. Обозначив μ вероятностную меру на X_F, квазиинвариантную относительно сдвигов на $\delta\in\Gamma_F$, рассмотрим прямой интеграл

$$H=\int_{X_F}^{\oplus} H_x\,d\mu(x)$$

гильбертовых пространств H_x таких, что

$$\nu(x+\delta)=\nu(x),\ \text{для любых } \delta\in\Gamma_F,\ \mu\text{-п. в. } x\in X_F,$$

где $\nu(x)=\dim H_x$. Тогда фермиевские операторы рождения и гибели действуют на $f\in H$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} \left(a_k^+f\right)(x)&=J_k(x)(1-x_k)c_k(x)\sqrt{\frac{d\mu(x+\delta_k)}{d\mu(x)}}\,f(x+\delta_k),\\ \left(a_kf\right)(x)&=J_k(x)x_kc_k(x)\sqrt{\frac{d\mu(x+\delta_k)}{d\mu(x)}}\,f(x+\delta_k). \end{aligned}\right\} \quad (1_F)$$

Здесь $\delta_k\in\Gamma_F$ — последовательность, имеющая 1 на k-м месте, а остальные элементы, равные нулю;

$$J_k(x)=\exp\left\{i\pi\sum_{j=1}^{k-1}x_j\right\}$$

— фазовый множитель Вигнера — Йордана, а

$$c_k(x):H_x\cap H_{x+\delta_k}$$

— измеримое отображение из X_F в изометрич. операторы, так что

$$c_k^*(x)=c_k(x+\delta_k),$$

$$c_k(x)c_l(x+\delta_k)=c_l(x)c_k(x+\delta_l),\ k\neq l,$$

$$\mu\text{-п. в. } x\in X_F.$$

Построенное П. с. п. определяется мерой μ, функцией размерности $\nu(x)$ и семейством операторов $\{c_k(x)\}$. В простейшем случае ($c_k=1$ для любых k) необходимыми условиями неприводимости П. с. п. являются эргодичность меры и постоянство функций размерности, а для унитарной эквивалентности двух представлений необходимы абсолютная непрерывность мер $\mu\sim\mu'$ и равенство функций размерности $\nu(x)=\nu'(x)$, μ-п. в. x. В случае бозонной системы конструкция П. с. п. по Гордингу и Вайтману аналогична, только последовательности x из Γ_B, X_B имеют в качестве компонент x_k любые неотрицательные целые числа. Операторы рождения и гибели действуют по формулам

$$\left.\begin{aligned} \left(a_k^+f\right)(x)&=\sqrt{x_k+1}\,c_k(x)\sqrt{\frac{d\mu(x+\delta_k)}{d\mu(x)}}\,f(x+\delta_k),\\ \left(a_kf\right)(x)&=\sqrt{x_k}\,c_k^*(x-\delta_k)\sqrt{\frac{d\mu(x-\delta_k)}{d\mu(x)}}\,f(x-\delta_k). \end{aligned}\right\} \quad (1_B)$$

Бозевские операторы $a_k^{\#}$ неограниченны. Их область определения задается условием

$$\int x_k|f(x)|^2\,d\mu(x)<\infty.$$

Условия неприводимости и унитарной эквивалентности формулируются как свойства мер, функций размерности и семейств операторов $\{c_k(x)\}$. В случае, когда мера является продакт-мерой, конструкция Гординга — Вайтмана может быть реализована в гильбертовом пространстве (неполного) прямого произведения Неймана. Соответствующие продакт-представления описаны в [3] (фермионы) и в [4] (бозоны). Недостатком конструкции Гординга — Вайтмана в бозевском случае является ее явная зависимость от выбора базиса в пространстве сглаживающих функций, используемом при определении операторов $a_k^{\#}$. Независящие от базиса построения были предложены в работах [5]—[8]. Эти подходы могут быть разбиты на два типа. Один из них (см. [8]) основан на ГНС-конструкции. Другой подход (см. [5]—[7]) является бесконечномерным аналогом метода индуцированных представлений. В этом подходе Гельфанда — Араки исходным является оснащенное гильбертово пространство $\mathcal{V}\subset\Phi\subset\mathcal{V}'$, где $\mathcal{V}$ — линейное действительное

пространство пробных функций, $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство, являющееся пополнением $\mathscr{V}$ по выделенному в нем скалярному произведению, а $\mathscr{V}'$ – топологически двойственное пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{V}$. Пусть μ есть $\mathscr{V}$-квазиинвариантная мера на $\mathscr{V}'$. Тогда в гильбертовом пространстве $H=L^2_m(\mathscr{V}')$ действует представление вейлевской формы перестановочных соотношений вида

$$\left.\begin{aligned}(U(f)\psi)(F)&=e^{iF(f)}\psi(F),\\(V(g)\psi)(F)&=c(g,F)\sqrt{\frac{d\mu(F+g)}{d\mu(F)}}\,\psi(F+g),\\\psi(F)&\in H,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

где $c(g, F)$ удовлетворяет условию коцикла

$$c(g, F)c(h, F+g)=c(g+h, F).$$

Это представление является циклическим относительно операторов $U(f)$ и имеет циклич. вектором функцию $\Omega(F)=1$, μ-п. в. F. В заданном представлении теорема Стоуна позволяет восстановить генераторы, реализующие форму Гейзенберга перестановочных соотношений. Представлению Фока отвечает гауссовская мера. Это единственное представление, обладающее универсально инвариантным вакуумом. Эргодичность μ является достаточным условием неприводимости представления. Два представления унитарно эквивалентны, если соответствующие им меры абсолютно непрерывны, а коциклы $c(g, F)$ и $c'(g, F)$ когомологичны, то есть существует функция $K(F)$ такая, что

$$c'(g, F)=K(F)c(g, F)K(F)^{-1}.$$

Порождающий функционал

$$E(f)=(\Omega(F), U(f)\Omega(F))=\int e^{iF(f)}\,d\mu(F)$$

меры μ определяет (регулярное) состояние на C^*-алгебре, порождаемой операторами

$$\{U(f);\ V(f)\},$$

что дает связь схемы Гельфанда – Араки со схемой, основанной на ГНС-конструкции.

Лит.: [1] Garding L., Wightman A., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1954, v. 70, № 7, p. 617–25; [2] Wightman A. S., Schweber S. S., «Phys. Rev.», 1955, v. 98, № 3, p. 812–37; [3] Голодец В. Я., «Успехи математич. наук», 1969, т. 24, в. 4, с. 3–64; [4] Klauder J. R., McKenna J., Woods E. J., «J. Math. Phys.», 1966, v. 7, № 5, p. 822–28; [5] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа: оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [6] Araki H., «J. Math. Phys.», 1960, v. 1, № 6, p. 492–504; [7] Fukutome H., «Progr. Theor. Phys.», 1960, v. 23, № 6, p. 989–1002; [8] Сигал И., Математические проблемы релятивистской физики, пер. с англ., М., 1968.

Е. В. Дамаскинский.

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕЭКВИВАЛЕНТНЫЕ – представления, наличие которых является характерной особенностью квантовых систем с бесконечным числом степеней свободы. Два представления перестановочных соотношений операторами $R^{(i)}_\lambda$, $i=1, 2$, в гильбертовых пространствах $H^{(i)}$ называются неэквивалентными представлениями перестановочных соотношений, если не существует изометрич. отображения $W: H^{(1)}\cap H^{(2)}$ такого, что

$$R^{(2)}_\lambda=WR^{(1)}_\lambda W^{-1} \text{ для любых } \lambda.$$

Существование П. с. п. н. было явно отмечено в [1], где они были названы муриотическими («тьма-тьмущая»). П. с. п. н. имеют разное физич. содержание, так что выбор подходящего представления является первоочередной задачей для строгого описания физич. системы.

Теорема Хаага (см. [2], [3]) означает, что представление Фока соответствует свободным системам и при математически корректном описании взаимодействующих систем требуется привлекать представления неэквивалентные представлению Фока. Одним из следствий наличия П. с. п. н. является существование унитарно нереализуемых канонич. преобразований (см. [4], [5]). В соответствии с теоремой Колемана П. с. п. н. необходимы при описании систем со спонтанным нарушением симметрии (см. [6], [7]). В квантовой теории поля П. с. п. н. существенны в решении проблемы инфракрасных расходимостей (см. [8]). В квантовой теории систем многих частиц П. с. п. н. возникают при описании фазовых переходов, сверхтекучести, сверхпроводимости (см. [9]), бозонного и фермионного газов (см. [10], [11]).

См. также *Перестановочные соотношения, Перестановочных соотношений представления, Гейзенберга представление.*

Лит.: [1] Friedrichs K. O., Mathematical aspects of the quantum theory of fields, N. Y.– L., 1953; [2] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987; [3] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [4] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [5] Завьялов О. И., Сушко В. Н., в сб.: Статистическая физика и квантовая теория поля, М., 1973, с. 411–40; [6] Гриб А. А., Дамаскинский Е. В., Максимов В. М., «Успехи физич. наук», 1970, т. 102, № 4, с. 587–620; [7] Гриб А. А., Проблемы неинвариантности вакуума в квантовой теории поля, М., 1978; [8] Кулиш П. П., Фаддеев Л. Д., «Теоретич. и математич. физика», 1970, т. 4, № 2, с. 153–70; [9] Haag R., «Nuovo Cimento», 1962, v. 25, № 2, p. 287–99; [10] Araki H., Woods E. J., «J. Math. Phys.», 1963, v. 4, № 5, p. 637–62; [11] Araki H., Wyss W., «Helv. Phys. Acta», 1964, v. 37, № 2, p. 136–59.

Е. В. Дамаскинский.

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УНИТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ – представления, несущие идентичную физическую информацию и в этом смысле неразличимые (однако для решения конкретных задач целесообразно использование наиболее подходящего из них). Два представления перестановочных соотношений операторами $R^{(i)}_\lambda$, $i=1, 2$, в гильбертовых пространствах $H^{(i)}$ называются унитарно эквивалентными, если существует изометрич. отображение $W: H^{(1)}\cap H^{(2)}$ такое, что

$$R^{(2)}_\lambda=WR^{(1)}_\lambda W^{-1} \text{ для любых } \lambda.$$

Согласно теореме единственности Неймана для системы с конечным числом степеней свободы, каждое представление вейлевской формы канонич. коммутационных соотношений унитарно эквивалентно прямой сумме копий *Шредингера представления*. Наряду с представлением Шредингера в квантовой механике часто используют другие П. с. п. у. э., среди к-рых наиболее известны: представление (чисел заполнения) Фока, метода вторичного квантования, голоморфное представление, гауссово (нормальное) представление, пространство к-рого является L^2-пространством по гауссовой мере квазиинвариантной относительно трансляций и поэтому допускающее прямое обобщение на случай бесконечных полевых систем. В случае гейзенберговских канонич. коммутационных соотношений даже для конечных систем существуют представления неэквивалентные представлению Шредингера (см. *Гейзенберга представление*). В случае фермиевских антикоммутационных соотношений для систем с конечным числом степеней свободы согласно теореме Вигнера – Йордана имеется единственное с точностью до унитарной эквивалентности неприводимое представление. Для системы с бесконечным числом степеней свободы ситуация кардинально меняется и существует континуум представлений канонич. коммутационных соотношений и антикоммутационных соотношений, унитарно неэквивалентных стандартному представлению Фока. Эти представления разбиваются на классы унитарно эквивалентных друг другу представлений. Аналогичная ситуация имеется и в случае представлений бесконечномерных групп и алгебр, порождаемых перестановочными соотношениями фундаментальных токов.

Лит. см. при ст. *Перестановочных соотношений представления.*

Е. В. Дамаскинский.

ПЕРЕХОДА ТОЧКА – см. *Фазовый переход, Поворота точка.*

ПЕРЕХОДНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ – см. *Маркова цепь, Марковский процесс.*

ПЕРЕХОДНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Марковское отображение.*

ПЕРЕХОДНЫЙ РЕЖИМ – см. *Вынужденное колебание.*

ПЕРИОД – см. *Периодическая функция.*

ПЕРИОД абелева дифференциала – см. *Абелев дифференциал.*

ПЕРИОД абелевой функции – см. *Абелева функция.*

ПЕРИОД колебания – см. *Гармоника.*

ПЕРИОД свободного гармонического колебания – см. *Свободное гармоническое колебание.*

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – функция $f(x)$, имеющая период – такое число $T\neq 0$, что при любом $x\in X\subset\mathbb{R}$ (или $X\subset\mathbb{C}$) числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат множеству X и выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x).$$

Числа $\pm nT$, где n – натуральное число, также являются периодом функции $f(x)$.

1) Пусть функция $f(x)$ определена на $X\in\mathbb{R}$ и имеет период T. Для получения графика $f(x)$ достаточно график функции $f(x)$ на $[a, a+T]\cap X$, где a – нек-рое число, переместить вдоль $\mathbb{R}$ на $\pm T$, $\pm 2T$, ... Если П. ф. $f(x)$ с периодом T имеет конечную производную $f'(x)$, то $f'(x)$ является П. ф. с тем же периодом. Пусть $f(x)$ интегрируема на любом отрезке и имеет период T. Первообразная

$$F=\int_0^x f(t)\,dt$$

имеет период T, если

$$\int_0^T f(t)\,dt=0,$$

в противном случае первообразная П. ф. непериодическая, такова, напр., первообразная функции $f(x)=\cos x+1$.

2) П. ф. комплексного переменного z – однозначная аналитич. функция $f(z)$, имеющая только *изолированные особые точки* во всей плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$, для к-рой существует число $p\neq 0$, называемое периодом функции $f(z)$, такое, что

$$f(z+p)=f(z),\ z\in\mathbb{C}.$$

Любая линейная комбинация периодов данной П. ф. $f(z)$ с целочисленными коэффициентами также является периодом $f(z)$. Все периоды данной П. ф. $f(z)\neq\text{const}$ составляют дискретную абелеву группу по сложению, называемую группой периодов функции $f(z)$. Если базис этой группы состоит из одного единственного основного, или примитивного, периода $2\omega=2\omega_1\neq 0$, то есть если любой период p есть целое кратное 2ω, то $f(z)$ называется однопериодической функцией. В случае базиса, состоящего из двух основных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_3)\neq 0$, имеем *двоякопериодическую функцию.* Если П. ф. $f(z)$ отлична от константы, то базис ее группы периодов не может состоять более чем из двух основных независимых периодов.

Любая полоса вида

$$\{z=(\tau e^{i\alpha}+t)2\omega:\ -\infty<\tau<\infty,\ 0\leqslant t<1,\ 0<\alpha\leqslant\pi/2\},$$

где 2ω – один из основных периодов П. ф. $f(z)$, или ей конгруэнтная называется полосой периодов функции $f(z)$; обычно принимают $\alpha=\pi/2$, то есть рассматривают полосу периодов, стороны к-рой перпендикулярны основному периоду 2ω. В каждой полосе периодов П. ф. принимает любое свое значение и притом одинаково часто.

Е. Д. Соломенцев.

ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ГРАФ – бесконечный связный *граф* G, для которого при некотором $d=1, 2, \ldots$ существует вложение $\mathcal{F}$ в пространство $\mathbb{R}^d$ такое, что в каждой компактной области в $\mathbb{R}^d$ будет находиться лишь конечный набор вершин и ребер графа. Кроме того, это вложение обладает следующими свойствами:

1) для любых двух вершин u и v таких, что (u, v) – ребро графа G, выполняется условие

$$|\mathcal{F}u-\mathcal{F}v|<\infty,$$

где $|\cdot|$ – длина в пространстве $\mathbb{R}^d$;

2) пусть $z(v)$ – степень вершины v, то есть число ребер графа G, выходящих из v, тогда

$$z=\max_{v\in G} z(v)<\infty;$$

3) существует аффинный базис $e_1, \ldots, e_d$ в $\mathbb{R}^d$ такой, что для любой вершины $u\in G$ и любого $i=1, \ldots, d$

$$\mathcal{F}u\pm e_i\in\mathcal{F}G,$$

кроме того, для любых вершин v и w, связанных ребром на графе, $(v, w)\in G$, пары $(\mathcal{F}v\pm e_i, \mathcal{F}w\pm e_i)$ для любого $i=1, \ldots, d$ также являются ребрами графа $\mathcal{F}G$; векторы $e_1, \ldots, e_d$ называются периодами вложения $\mathcal{F}$.

П. г. G является основным элементом для формулировки задач теории *перколяции.* Понятие протекания в этих задачах связано с заданием случайного бернуллиевского поля ξ, на вершинах (ребрах) G и определением связанных множеств вершин (ребер) на G, для к-рых значения выборочных функций поля ξ одинаковы.

Ю. П. Вирченко.

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ – см. *Релаксационное колебание.*

ПЕРИОДОВ ГРУППА – см. *Периодическая функция, Двоякопериодическая функция.*

ПЕРКОЛЯЦИИ ПОРОГ – критическое значение λ_c параметра λ, определяющего случайное поле в однопараметрических моделях теории *перколяции.* П. п. указывает на то, что при значениях $\lambda<\lambda_c$ вероятность *просачивания* $Q(\lambda)$ случайного поля модели равна нулю и $Q(\lambda)>0$ при $\lambda>\lambda_c$.

Рассмотрим, напр., простейшую модель теории перколяции – «задачу узлов» на $\mathbb{Z}^d$, $d\geqslant 2$, в к-рой случайное поле $\{\xi(x)=0 \text{ или } 1,\ x\in\mathbb{Z}^d\}$ является бернуллиевским и описывается одним параметром $\lambda=\mathsf{P}\{\xi(x)=1\}\in[0, 1]$. Пусть $W(v)$ – связная компонента множества $\{x:\xi(x)=1\}$, к-рая содержит точку v. Определим вероятность просачивания как

$$Q_H(\lambda)=\mathsf{P}\{|W(v)|=\infty\},\qquad(1)$$

где $|W|$ – число точек в W. Тогда существует порог перколяции

$$p_H=\sup\{\lambda: Q_H(\lambda)=0\},\ \lambda_c=p_H.$$

Имеется, однако, и другая возможность определения функции $Q(\lambda)$, к-рая описывает наличие свойства просачивания случайного поля в рассматриваемой модели и к-рая более важна с точки зрения приложений. Пусть $B(n, i)$ – параллелепипед, расстояние между гранями к-рого, ортогональными базисному вектору e_i, $i=1, \ldots, d$, равно n. В остальных направлениях параллелепипед $B(n, i)$ достаточно сильно вытянут. Пусть $\sigma(\lambda; n)$ – вероятность существования связного пути на множестве $\{x:\xi(x)=1\}$, соединяющего грани, ортогональные e_i. Определим вероятность просачивания в виде:

$$Q_S(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\sigma(\lambda; n).$$

Тогда существует число

$$p_S=\sup\{\lambda: Q_S(\lambda)=0\},\ \lambda_c=p_S,$$

к-рое также имеет смысл порога перколяции. Понятия о П. п. p_S и p_H можно ввести и для моделей более общего типа. В ряде случаев имеются доказательства теоремы о совпадении П. п. p_S и p_H.

Ю. П. Вирченко.

ПЕРКОЛЯЦИЯ, протекание, просачивание,– физический термин, используемый при объяснении некоторых явлений, которые присущи поведению разупорядоченных систем и которые имеют пороговый характер. Механизмом, ответственным за возникновение этих явлений

(перколяционным механизмом), служит образование единой структуры, составленной случайным образом из нек-рого набора элементов и пронизывающей весь объем системы. Эта структура является носителем физич. свойств, к-рыми система не обладает в отсутствие ее. Перколяционная структура существует, только если физич. параметры, характеризующие систему, изменяются в определенной области значений, тогда как при других их значениях она отсутствует.

Теория П., первоначально возникнув в физике твердого тела, находит применение во многих других естественнонаучных дисциплинах. Примерами явлений, к-рые могут быть объяснены на ее основе, являются фазовый переход Мотта в легированных полупроводниках; процесс разрушения твердых тел; электропроводность суспензий из металла и диэлектрика; старение полимерных материалов; установившийся процесс протекания либо диффузии через гетерофазную среду, возникновение примесного ферромагнетизма и т. д.

Начало математич. исследованию перколяционных явлений положил И. Хаммерсли (I. Hammersley, 1957). Он сформулировал простейшие математич. модели, в поведении к-рых проявляется перколяционный механизм.

Основным объектом математич. теории П. являются такие случайные множества W в $\mathbb{R}^d$, для к-рых можно ввести в каком-либо естественном смысле понятие связности. Центральным вопросом при этом является существование с ненулевой вероятностью у множеств W неограниченной связной компоненты. Если реализуется такая ситуация, то говорят о наличии П. В противном случае П. у случайных множеств W отсутствует. Таким образом, математич. модель теории П. должна состоять из следующих объектов:

1) фазового пространства — неограниченного подмножества D в $\mathbb{R}^d$;

2) системы $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств из D, к-рая наделяет D структурой связности;

3) вероятностного пространства $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$ случайных множеств в D.

Система $\mathfrak{S}$ должна быть настолько богата, чтобы для любого набора точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из D существовало множество A из $\mathfrak{S}$, содержащее весь этот набор. Кроме того, если $A, B \in \mathfrak{S}$ и $A \cap B \neq \varnothing$, то $A \cap B \in \mathfrak{S}$ и $A \cup B \in \mathfrak{S}$. Расширяющиеся последовательности $\{A_n\}_1^\infty$, $A_n \in \mathfrak{S}$, определяют связные множества A в D, $A = \lim A_n$. В частности, D должно быть связным множеством. Множества W — элементарные события из Ω представимы в виде счетной суммы множеств из $\mathfrak{S}$, $W = \bigcup_n A_n$, $A_n \in \mathfrak{S}$. При этом W распадается на сумму непересекающихся связных компонент. Если точки x и y находятся в одной связной компоненте, то они называются связанными; σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождается всеми событиями $\{W: \pi(x_i, x_j) = \alpha_{ij};\ i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n\}$ с любым набором точек $x_1, \ldots, x_n$ из D, $\alpha_{ij} = 0, 1$. Здесь $\pi(x, y) = 1$, если $x, y \in W$ и связаны, а $\pi(x, y) = 0$ в противном случае.

Обычно в теории П. рассматривают модели, у к-рых либо $D = \mathbb{R}^d$, либо D является вложением в $\mathbb{R}^d$ *периодического графа* G. В первом случае модели называются непрерывными; их случайные множества обычно являются однородными, то есть для любого события $\{W\} \in \mathfrak{B}$ и любого вектора a из $\mathbb{R}^d$ выполняется условие

$$\mathsf{P}\{W\} = \mathsf{P}\{W + a\}. \qquad (*)$$

Во втором случае модели называются дискретными и соответствующие им случайные множества W однородны на графе G, то есть равенство (*) выполняется только для векторов $a = n_1 e_1 + \ldots + n_d e_d$, где $n_1, \ldots, n_d$ — целые числа и $e_1, \ldots, e_d$ — аффинный базис из периодов графа G, отвечающих его вложению в $\mathbb{R}^d$.

Для дискретных моделей система $\mathfrak{S}$ состоит из множеств точек, к-рые связаны друг с другом конечными путями по ребрам графа. Определение вероятностного пространства $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$ для этих моделей эквивалентно построению случайного поля $\{\xi(x);\ \xi(x) = 0, 1\}$, точки x — вершины графа (задача узлов), либо $\{\xi(x, y);\ \xi(x, y) = 0, 1\}$, где пары (x, y) — ребра графа (задача связей). Случайные множества W определяются как состоящие из таких точек, значение случайной реализации поля в к-рых равно 1.

Точно так же конструируется вероятностное пространство в непрерывных моделях, описывающих просачивание непрерывных с вероятностью 1 случайных полей $\{\xi(x)\}$ в $\mathbb{R}^d$ (см. *Просачивание* случайных полей). Множества W строятся по реализации $\xi(x)$ поля, $W = \{x: \xi(x) < h\}$, где уровень h фиксирует распределение вероятностей для W по известному распределению вероятностей для $\xi(x)$. В качестве системы $\mathfrak{S}$ в этом случае выбираются открытые ограниченные области в $\mathbb{R}^d$.

Примером иного способа определения вероятностного пространства и системы $\mathfrak{S}$ служит непрерывная модель в $\mathbb{R}^3$, описывающая фазовый переход Мотта. Система $\mathfrak{S}$ состоит из различных связных объединений $\bigcup_{k=1}^n S(a_k)$ поверхностей $S(a_k) = S(0) + a_k$, $k = 1, \ldots, n$, где $S(0)$ — нек-рая стандартная двумерная, ограниченная, замкнутая поверхность — так наз. поверхность Ферми. Распределение вероятностей для случайных множеств модели $W = \bigcup_{l=1}^\infty S(x_l)$ определяется *Пуассона распределением* с плотностью ρ для счетных наборов случайных точек $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Распределение вероятностей P модели теории П. зависит от одного или нескольких параметров. Напр., в дискретных моделях, если поле $\{\xi(x)\}$ бернуллиевское, то параметром, определяющим P в «задаче узлов», служит концентрация $c = \mathsf{P}\{\xi(x) = 1\}$, а в «задаче связей» $c = \mathsf{P}\{\xi(x, y) = 1$; (x, y) — ребро графа $G\}$. В непрерывных моделях просачивания случайных полей обязательно присутствует параметр — уровень просачивания h. В модели перехода Мотта имеется параметр — плотность ρ.

Основным вопросом теории П. является определение условий, то есть тех значений параметров модели, при к-рых имеется П. Решению этой задачи соответствует разбиение пространства параметров на области существования и отсутствия П. (фазовая диаграмма модели). Если распределение вероятностей однопараметрическое, то решением задачи является нахождение критич. точек для параметра модели — порогов П. (см. *Перколяции порог*). Не исключаются также случаи, когда модель не обнаруживает перколяционного поведения ни при каких значениях ее параметров.

Наряду с указанной основной задачей теория П. изучает также и другие вопросы, такие, как статистику ограниченных связных компонент случайных множеств, случайную функцию $\{\zeta(x)\}$, $\zeta(x) = 1$, если $x \in W_\infty$ (бесконечной связной компоненте) и $\zeta(x) = 0$, $x \notin W_\infty$; в частности, вероятность $\mathsf{P}\{x \in W_\infty\}$.

Лит.: [1] Кестен Х., Теория просачивания для математиков, пер. с англ., М., 1986; [2] Essam J. W., «Rep. Prog. Phys.», 1986, v. 43, p. 833–912; [3] Мельников Н. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф., Теория перколяции и некоторые приложения, в кн.: Итоги науки и техники, сер. «Теория вероятностей, математич. статистика, теоретич. кибернетика», 1986, т. 24, с. 53–110; [4] Зуев С. А., Сидоренко А. Ф., «Теоретич. и математич. физика», 1985, т. 62, № 1, с. 76–86; т. 62, № 2, с. 253–62; [5] Молчанов С. А., Степанов А. К., Теоретич. и математич. физика, 1983, т. 55, № 2, с. 246–56; № 3, 419–30.

Ю. П. Вирченко.

ПЕРКУСА — ЙЕВИКА УРАВНЕНИЕ — приближенное замкнутое нелинейное интегральное уравнение для парной функции распределения $n_2(r)$:

$$n_2(r) e^{\beta V(r)} = 1 - n \int ds\, [e^{\beta V(s)} - 1] n_2(s) [n_2(|r - s|) - 1],$$

где $V(r)$ — потенциал парного взаимодействия частиц, n — плотность числа частиц, β — обратная температура. П.—Й. у. впервые получено диаграммным методом и описывает поведение систем с большой плотностью. П.—Й. у. или его

модификации представляют собой наилучшее приближение из числа всех известных к настоящему времени. П.– Й. у. имеет точное решение в случае потенциала твердых сфер: $V(r)=+\infty$ при $r<d_0$, $V(r)=0$ при $r\geqslant d_0$ (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978; [2] Percus J. K., Yevick G. J., «Phys. Rev.», 1958, v. 110, № 1; [3] Thiele E., «J. Chem. Phys.», 1963, v. 39, p. 474; [4] Wertheim M. S., «Phys. Rev. Lett.», 1963; [5] его же, «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 643.

Д. П. Санкович.

ПЕРМАНЕНТНОЕ ВРАЩЕНИЕ – частный тип *стационарного движения* твердого тела около неподвижной точки, в котором вектор его угловой скорости остается постоянным как в неподвижной, так и в связанной с телом системах координат. Это означает, что подвижный и неподвижный аксоиды (см. *Винтовое движение*) вырождаются в прямую. П. в. отвечает стационарное решение уравнений движения твердого тела, записанных в связанных осях. При отсутствии внешних сил (случай Эйлера – Пуансо) осями П. в. служат главные оси инерции тела для неподвижной точки. При действии сил, момент к-рых относительно неподвижной точки стационарен (в связанных с телом осях), П. в. могут образовывать в теле конич. многообразия различной геометрии.

В. А. Самсонов.

ПЕТЕРСОНА – КОДАЦЦИ УРАВНЕНИЯ – уравнения, связывающие между собой коэффициенты первой g_{ij} и второй b_{ij} квадратичных форм поверхности:

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}-\Gamma^\lambda_{\gamma\alpha}\,b_{\lambda\beta}=\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}-\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\,b_{\lambda\gamma},$$

где

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\,g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}\right),$$

(x^1, x^2) – локальная система координат на поверхности. Эти соотношения можно переписать в виде

$$\nabla_\gamma b_{\alpha\beta}-\nabla_\beta b_{\alpha\gamma}=0,$$

если использовать понятие ковариантной производной. Впервые эти условия были получены Г. Майнарди (G. Mainardi, 1856) и Д. Кодацци (D. Kodacci, 1867). К. М. Петерсон (1853) доказал теорему об определении поверхности двумя квадратичными формами с точностью до движения трехмерного пространства, к-рая была сформулирована О. Бонне (O. Bonne).

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, М., 1986.

В. В. Трофимов.

ПЕТЛЯ графа – см. *Граф.*

ПИКАРА ТЕОРЕМА – о поведении *аналитической функции* $f(z)$ комплексного переменного z в окрестности *существенно особой точки* a – название результата классической теории функций, явившегося отправным пунктом многочисленных глубоких исследований и состоящего из двух частей.

1) Малая теорема Пикара: всякая целая функция $f(z)\neq\text{const}$ принимает любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного.

2) Большая теорема Пикара: всякая однозначная аналитич. функция $f(z)$ в произвольной окрестности изолированной существенно особой точки a принимает любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного.

Впервые эта теорема опубликована Э. Пикаром (E. Picard, 1879). Она существенно дополняет *Сохоцкого теорему*. Малая П. т. есть следствие большой П. т. Из большой П. т. непосредственно следует, что любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного, принимается в произвольной окрестности существенно особой точки бесконечно часто. Для мероморфной функции в конечной плоскости $\mathbb{C}:|z|<\infty$ П. т. принимает вид: если точка $a=\infty$ – существенно особая для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $F(z)$, то в произвольной окрестности точки a функция $F(z)$ принимает любое комплексное значение из расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}:|z|\leqslant\infty$, за исключением, быть может, двух, и притом бесконечно часто.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1–2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

ПИКАРА – ЛЕФШЕЦА ФОРМУЛА – формула, описывающая оператор монодромии

$$h_*: H_{n-1}(V_{t_0})\to H_{n-1}(V_{t_0}),$$

порожденный обходом вокруг морсовского критического значения ростка $f:(\mathbb{C}^n, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$. Пусть Δ – исчезающий цикл при подходе к данному критич. значению. Тогда

$$h_*(x)=x+(-1)^{n(n+1)/2}(x\circ\Delta)\Delta,$$

где $(\cdot\circ\cdot)$ – форма пересечений в $H_{n-1}(V_{t_0})$.

С. В. Чмутов.

ПИКАРА – ФУКСА УРАВНЕНИЕ голоморфной формы ω в $(\mathbb{C}^n, 0)$ – дифференциальное уравнение

$$I^{(l)}+p_1(t)I^{(l-1)}+\ldots+p_l(t)I=0,$$

решениями которого служат линейные комбинации функций

$$I(t)=\int_{\delta(t)}\omega/df,$$

здесь $f:(\mathbb{C}^n, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$ – росток голоморфной функции, t – координата в $\mathbb{C}$; $\delta(t)$ – произвольный непрерывно зависящий от t целочисленный класс гомологий гиперповерхности $\{f(x)=t\}$.

С. В. Чмутов.

ПИРОГОВА – СИНАЯ ТЕОРЕМА – общий результат о возможности построения *Гиббса случайных полей* при малых значениях температуры. Пусть $U=\{U_A(x_A),\ A\in\mathbb{Z}^d\}$ – трансляционно инвариантный финитный потенциал поля Гиббса, и пусть для этого поля есть конечный набор $x^1, \ldots, x^n$ основных конфигураций (см. *Основное состояние*), являющихся периодическими с общим периодом $d\in\mathbb{Z}^d$. Конфигурация $x=(x_t,\ t\in\mathbb{Z}^d)$ называется периодической с периодом $l=(l^1, \ldots, l^d)$, $l^i>0$, если $x_t=x_t+l$ при всех $l^i=(k_1 l^1, \ldots, k_d l^d)$, $k\in_i\mathbb{Z}^d$. Пусть выполнено следующее условие Пайерлса (или условие Герцика – Пирогова – Синая): x – конфигурация, почти всюду совпадающая с одной из основных конфигураций x^{j^0}, $j^0=1, \ldots, n$. Ее границей ∂x называется совокупность всех точек $t=(t_1, \ldots, t_d)\in\mathbb{Z}^d$ таких, что сужение x на параллелепипед

$$W_t=\{s=(s_1, \ldots, s_d): t_i\leqslant s_i<t_i+l_i,\ i=1, \ldots, d\}$$

не совпадает с сужением на этот параллелепипед ни одной из основных конфигураций x^j, $j=1, \ldots, n$. Тогда условие Пайерлса состоит в существовании константы $\rho>0$ такой, что для всех x

$$\sum_{A\subset\mathbb{Z}^d}\left(U_A(x_A)-U_A\left(x^j_A\right)\right)\geqslant\rho|\partial x|.$$

Здесь x_A и x^j_A – сужения на A конфигураций x и x^j, $|\partial x|$ – число точек в границе ∂x. Пусть теперь задано семейство потенциалов

$$U_\mu=U+\mu_1U_1+\ldots+\mu_{n-1}U_{n-1},\ \mu=(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},$$

где $U_1, \ldots, U_{n-1}$ – нек-рые трансляционно инвариантные потенциалы, и

$$h^j_\mu=\lim_{|\Lambda|\to\infty}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{A\subset\Lambda}U_{A\mu}\left(x^j_t, t\in A\right)$$

– средняя энергия основной конфигурации x^j, вычисленная для потенциала U_μ. Пусть это семейство таково, что отображение

$$\mu\to\left(\hat h^1_\mu, \ldots, \hat h^n_\mu\right)\in\mathbb{R}^n,$$

где

$$\hat{h}^j_\mu = h^j_\mu - \min_{i=1,\ldots,h} h^i_\mu,$$

переводит пространство параметров на всю границу n-мерного положительного октанта. Это условие выполняется для семейства потенциалов «общего положения». Теорема Пирогова – Синая (см. [1]–[3]) вместе с ее уточнением (см. [4]) утверждает, что существуют константы β_0, $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при всех $\beta \geqslant \beta_0$ существует гомеоморфизм $\mathscr{J}_\beta$ окрестности нулевой точки границы n-мерного положительного октанта o^n в пространстве параметров μ такой, что если точка этой границы $x \in \partial o^n$ имеет q нулевых координат, то для потенциала U_μ с $\mu = \mathscr{J}_\beta(x)$ существует ровно q различных регулярных периодич. состояний с обратной температурой β.

В случае, когда потенциал U обладает нек-рыми симметриями, то аналогичной симметрией обладают и гиббсовские состояния с потенциалами U_μ. Для такой ситуации результат П.– С.т. был известен и ранее (см. [5], [6]). Известны также обобщения П.– С.т. на более сложные ситуации (см.[7]–[9]).

Лит.: [1] Пирогов С.А., Синай Я.Г., «Функциональный анализ и его прилож.», 1974, т. 8, № 1, с. 25–31; [2] их же, «Теоретич. и математич. физика», 1975, т. 25, № 3, с. 358–69; [3] Синай Я.Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [4] Zahradnik M., «Comm. Math. Phys.», 1984, v. 93, p. 559–81; [5] Герцик В.М., Добрушин Р.Л., «Функциональный анализ и его прилож.», 1974, т. 8, в. 3, с. 12–25; [6] Герцик В.М., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1976, т. 40, с. 448–62; [7] Динабург Е.И., Синай Я.Г., «Труды конференции по математич. физике», Дубна, 1984; [8] Imbrie J.Z., «Comm. Math. Phys.», 1981, v. 82, p. 261–304; [9] Dobrushin R.L., Zahradnik M., в кн.: Mathematical problems of statistical mechanics and dynamics, Dordrecht – Boston, 1986, p. 1–123.

Р. Л. Добрушин.

ПИРСИ ИНТЕГРАЛ – интеграл вида

$$\mathrm{Pe}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(x^4/8 - \lambda_1 x^2/2 + \lambda_2 x\right)} dx.$$

Фаза П.и.– версальная деформация критич. точки $x^4/8$ (типа A_3). Функция $\mathrm{Pe}(\lambda_1, \lambda_2)$ называется функцией Пирси и возникает при исследовании волнового поля вблизи точки возврата каустики. *С. В. Чмутов.*

ПИРСОНА УРАВНЕНИЕ – см. *Ортогональные многочлены.*

ПЛАВЛЕНИЯ КРИВАЯ – см. *Фазовая диаграмма.*

ПЛАНКА ЗАКОН ИЗЛУЧЕНИЯ, формула Планка,– закон распределения энергии в спектре равновесного излучения при определенной температуре T. Был впервые выведен М. Планком (M. Planck, 1900) на основе гипотезы квантования энергии вещества. М. Планк моделировал вещество совокупностями гармонич. осцилляторов различной частоты ν – резонаторов, испускающих и поглощающих излучение соответствующей частоты. Он предположил, что энергия вещества распределяется по резонаторам каждой частоты ν в виде дискретных порций $h\nu$ – квантов энергии (h – постоянная Планка). А. Эйнштейн (A. Einstein, 1916) вывел П. з. и. путем рассмотрения квантовых переходов для атомов, находящихся в равновесии с излучением. П. з. и. является частным случаем *Бозе – Эйнштейна распределения.*

П. з. и. дает спектральную зависимость (зависимость от частоты ν или длины волны $\lambda = c/\nu$) объемной плотности излучения (энергии излучения в единице объема) и пропорциональной ей испускательной способности абсолютно черного тела $\varepsilon = cu/4$ (энергии излучения, испускаемой единицей его поверхности за единицу времени). Функции $u_{\nu,T}$ и $\varepsilon_{\nu,T}$ (или $u_{\lambda,T}$ и $\varepsilon_{\lambda,T}$), отнесенные к единице интервала частот (или длин волн), являются универсальными функциями от ν (или λ) и T, не зависящими от природы вещества, с к-рым излучение находится в равновесии.

П. з. и. выражается формулой

$$u_{\nu,T} = \frac{4}{c}\varepsilon_{\nu,T} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

или

$$u_{\lambda,T} = \frac{4}{c}\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1}. \qquad (*)$$

Максимум функции (*) с ростом T смещается в сторону малых λ.

Из П. з. и. вытекают другие законы равновесного излучения. Интегрирование по ν (или λ) от 0 до ∞ дает значения полной объемной плотности излучения всех частот – закон излучения Стефана – Больцмана:

$$u_T = \int_0^\infty u_{\nu,T}\, d\nu = aT^4, \text{ где } a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3},$$

и полной испускательной способности черного тела

$$\varepsilon_T = \int_0^\infty \varepsilon_{\nu,T}\, d\nu = \sigma T^4, \text{ где } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}.$$

В области больших частот, когда энергия фотона много больше тепловой энергии ($h\nu \gg kT$), П. з. и. переходит в закон излучения Вина:

$$u_{\nu,T} = (8\pi h\nu^3/c^3)\exp(-h\nu/kT),$$

в области малых частот ($h\nu \ll kT$) – в закон излучения Рэлея – Джинса:

$$u_{\nu,T} = (8\pi\nu^2/c^3)kT.$$

Таким образом, эти законы представляют собой предельные случаи П. з. и.

П. з. и. находится в согласии с экспериментальными данными, применяя его можно по этим данным вычислить значения h и k. С помощью методов оптич. пирометрии можно на основе П. з. и. определять температуру нагретых тел.

Лит.: [1] Борн М., Атомная физика, пер. с англ., 3 изд., М., 1970; [2] Сивухин Д.В., Общий курс физики, 2 изд., [т. 4] – Оптика, М., 1985; [3] Kuhn T.S., Klack-body theory and the quantum discontinuity, Oxf., 1978.

М. А. Ельяшевич.

ПЛАНКА МАССА – масса, определяемая соотношением

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1{,}22 \cdot 10^{19}\,\mathrm{Gev}/c^2 = 2{,}17 \cdot 10^{17}\,\mathrm{г},$$

где G – гравитационная постоянная, $\hbar$ – постоянная Планка, c – скорость света. П. м.– одна из фундаментальных физич. величин. Ее значение в физике определяется тем, что это единственная величина размерности массы, к-рую можно составить из фундаментальных констант, описывающих три главных области физики: теорию тяготения (G), теорию относительности (c) и квантовую механику ($\hbar$). Поэтому следует ожидать, что, во-первых, при описании взаимодействия элементарных частиц с энергиями, превышающими $M_{Pl}c^2$, нельзя пренебрегать гравитационными эффектами и, во-вторых, что при таких энергиях гравитационные взаимодействия нельзя описывать классич. теорией, а нужно использовать квантовую теорию гравитации. Последовательное построение последней – одна из важнейших задач современной теоретич. физики. Одним из шагов в этом направлении является теория *суперструн.*

Лит.: [1] Proceedings of the fourth seminar on quantum gravity, 1984, May 25–29, M., 1987.

А. Ю. Игнатьев.

ПЛАНКА ФОРМУЛА – см. *Планка закон излучения.*

ПЛАНШЕРЕЛЯ ТЕОРЕМА – см. *Фурье преобразование.*

ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ – теория деформируемого пластичного твердого тела, в которой исследуются задачи, состоящие в определении полей вектора перемещений $u(x, t)$ или вектора скоростей $v(x, t)$, тензора деформации $\varepsilon_{ij}(x, t)$ или скоростей деформации $v_{ij}(x, t)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x, t)$, которые возникают в теле, занимающем область Ω с границей S, под действием массовых $K(x, t)$ и поверхностных $F(x, t)$ сил при заданных начальных и граничных условиях, а также в определении тех нагрузок и процессов, при которых равновесие (движе-

ние) тела является неустойчивым. Особенности П. м. т. состоят в том, что:

а) соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ нелинейны и необратимы и описываются, вообще говоря, функционалами; следовательно, задачи П. м. т. существенно нелинейны;

б) конфигурации искомых квазистатич. полей определяются процессом изменения заданных функций на промежутке $[0, t]$, а не их мгновенными значениями в момент t;

в) в процессе изменения функций K, F возникают области упругой деформации, активной пластич. деформации (нагрузки) и пассивной деформации (разгрузки), в к-рых соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ различны; эти области должны быть определены при решении задачи;

г) уравнения краевой задачи могут, вообще говоря, оказаться разных типов (эллиптического или гиперболического) в разных областях тела.

При произвольном сложном процессе известны лишь весьма общие свойства функционалов пластичности, их явная аналитич. структура не установлена. Конкретные соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, не содержащие явно функционалов, построены и экспериментально обоснованы для ряда типичных процессов деформации. Иногда рассматриваются также нек-рые искусственные «модели» соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, к-рые лишь частично отражают упругопластич. свойства материалов.

Статические краевые задачи. В теории упругопластич. процессов (см. [1]), согласно постулату изотропии А. А. Ильюшина, соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k \tag{1}$$

(суммирование по k от 1 до 6), где ε_{ij}^k – базис, построенный на основе тензора малой деформации, A_k – функционалы от инвариантов тензора деформации, давления p, температуры T и, возможно, других инвариантных величин немеханич. природы. Искомые функции $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ при равновесии удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_{ij,\,j} + \rho K_i = 0,\ x \in \Omega, \tag{2}$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,\,j} + u_{j,\,i},\ x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k,\ x \in \Omega \cup S, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} l_j = F_i,\ x \in S_\sigma, \tag{5}$$

$$u_i = \varphi_i,\ x \in S_u,\ S_\sigma \cup S_u = S,\ S_\sigma \cap S_u = 0 \tag{6}$$

при заданных функциях $K_i(x, t)$, $F_i(x, t)$, $\varphi_i(x, t)$ и областях Ω, S_σ, S_u. Здесь l_j – направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности S; t – параметр процесса (напр., истинное или условное время); ρ – плотность материала; (2) – дифференциальные уравнения равновесия, (3) – кинематич. соотношения между малыми деформациями и перемещениями, (5) и (6) – граничные условия в напряжениях и перемещениях соответственно. Равенства (2)–(6), строго говоря, не реализуют постановку краевой задачи, поскольку при неизвестной структуре функционалов пластичности нельзя решить вопрос о существовании решения.

С учетом этой неопределенности для решения задачи (2)–(6), допуская его существование при произвольном сложном нагружении (СН), предложен и в частных задачах реализован следующий метод СН-ЭВМ. Ниже система равенств (2), (3), (5), (6) будет называться неполной системой (В). В связи с использованием конечноразностной процедуры область Ω разбивается на N ячеек (элементов), в каждой из к-рых искомые функции имеют постоянные (средние) значения, зависящие от параметра t (интересующий интервал времени $[0, t]$ разбивается на M шагов), и в ν-й ячейке заменяются соотношения (4) аппроксимирующими соотношениями вида

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k} \varepsilon_{\nu ij}^k, \tag{7}$$

где $C_{\nu k}$ – функции t, такими, что решение задачи (В), (7) существует. Пусть в первом приближении с конкретно заданными (по возможности – наиболее простым способом, напр. в соответствии с обобщенным законом Гука) функциями $C_{\nu k}$

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k}^{(1)} \varepsilon_{\nu ij}^k, \tag{7_1}$$

решение задачи (В), (7) есть $u_{\nu i}^{(1)}(t)$, $\varepsilon_{\nu ij}^{(1)}$, $\sigma_{\nu ij}^{(1)}(t)$. Определяемый по нему набор инвариантов $I_\nu^{(1)}(t)$ вместе с $p_\nu(t)$ и $T_\nu(t)$ рассматривается как совокупность программ испытаний N образцов в однородном напряженном состоянии. Проведение их на испытательном комбайне класса СН дает истинные зависимости $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ в процессах $I_\nu^{(1)}(t)$, $p_\nu(t)$, $T_\nu(t)$, что определяет уточненные аппроксимирующие соотношения

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k}^{(2)} \varepsilon_{\nu ij}^k, \tag{7_2}$$

к-рые используются для численного решения задачи (В), (7_2) во втором приближении. Аналогично строятся последующие приближения. Сходимость оценивается по нормам разностей двух последующих приближений.

В отличие от применяемых вариантов теоретико-экспериментальных методов решения краевых задач с известными соотношениями (4), здесь используется испытание стандартных образцов в одномерном напряженном состоянии по стандартной методике, а не натурного объекта или его модели в сложном напряженном состоянии.

Предложен апостериорный критерий существования (см. [2]): если указанный процесс итераций сходится, то решение задачи (2)–(6) (с неизвестной структурой функционалов A_k) существует и с заданной степенью точности определяется в n-м приближении.

Если соотношения (4) известны, но сложны, то этот метод также применим с использованием (4) вместо испытательного комбайна СН.

Сложности постановки и решения краевой задачи теории пластичности в общем случае существенно уменьшаются при рассмотрении конкретных классов процессов.

Степень сложности процесса деформации в точке тела определяется сопоставлением кривизн траектории деформации, к-рая в 5-мерном евклидовом пространстве изображает процесс изменения девиатора деформации

$$\vartheta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij},\ 3\varepsilon = \varepsilon_{ii},$$

с типичной для каждого материала величиной следа запаздывания h, определяемой экспериментально. На этой основе выделяются частные классы процессов, для к-рых соотношения (4) конкретизируются и не содержат явно функционалов. Для каждого такого класса процессов постановка краевой задачи (2)–(6) становится определенной, допускающей доказательство теорем существования и единственности и построение общих методов решения. При этом, однако, возникает проблема физич. достоверности решения, поскольку при заданных функциях $K_i(x, t)$, $F_i(x, t)$, $\varphi_i(x, t)$ процессы, определяемые решением, могут не соответствовать области достоверности частного вида соотношения (4), принятого при постановке задачи. Эту проблему можно поставить как задачу об определении класса заданных функций K_i, F_i, φ_i и, может быть, ограничений на соотношения (4) частного вида, при к-рых система уравнений (2) – (6), дополненная соотношениями, определяющими соответствующий класс процессов, совместна.

В теории малых упругопластич. деформаций (см. [3]), относящейся к процессам простой деформации (нулевой кривизны), соотношения (4) имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\Phi(\varepsilon_u)}{3\varepsilon_u}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}) + 3K\varepsilon\delta_{ij}, \tag{8}$$

где $\varepsilon_u = \left(\frac{2}{3}\vartheta_{ij}\vartheta_{ij}\right)$ – интенсивность деформации, Φ – экспериментально определяемая функция упрочнения, K – константа (модуль объемной упругости), $3\varepsilon = \varepsilon_{ii}$.

При ограничениях

$$3G \geqslant \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \geqslant \frac{d\Phi}{d\varepsilon_u} \geqslant \lambda > 0 \qquad (9)$$

($\lambda < 1$ – число), приемлемых для конструкционных материалов, установлена эллиптич. природа краевой задачи (B), (8), доказаны теоремы существования и единственности решения, установлены минимальные принципы и даны соответствующие вариационные постановки задач. Доказана теорема о простом нагружении, определяющая класс функций K_i, F_i, φ_i (однопараметрич. нагрузки), при к-ром решение задачи физически достоверно. Для решения краевой задачи (B), (8) в принципе применимы методы Ритца и Бубнова – Галеркина, к-рые вследствие нелинейности задачи малоэффективны. Широко используется метод упругих решений, сходящийся при условиях (9): в каждом последовательном приближении решается более простая краевая задача линейной теории упругости (см. [3]). При этом в ходе решения определяются области упругих деформаций, в к-рых имеет место обобщенный закон Гука. Применяется также метод переменных параметров упругости (см. [4]).

Постановка задачи (B), (8) и указанные методы решения применяются также к задачам термопластичности. При этом при температурном поле $T(x, t)$, определяемом решением задачи теплопроводности, в соотношениях (8) полагается $\Phi \equiv \Phi(\varepsilon_u, T)$ и член $3K\varepsilon\delta_{ij}$ заменяется выражением $3K(\varepsilon - \alpha T)\delta_{ij}$. Ввиду функциональной природы соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ использование функции $\Phi(\varepsilon_u, T)$ ограничено нек-рым классом тепловых процессов. Специальный интерес представляют задачи о циклич. нагружении тела (см. [5]), сопровождающемся периодич. возникновением областей разгрузки и нагрузки обратного знака.

В теории упругопластич. процессов малой кривизны (наибольшая кривизна значительно меньше h^{-1}) с соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{2\Phi(s)}{3v_u}(v_{ij} - v\delta_{ij}) + \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma = 3Kv, \qquad (10)$$

где

$$v_u = \left(\frac{2}{3}V_{ij}V_{ij}\right)^{1/2}, \quad V_{ij} = v_{ij} - u\delta_{ij}, \quad 3v = v_{mm},$$

$s = \int_0^t v_u dt$ – длина дуги траектории деформации, и с кинематич. уравнениями

$$2v_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}, \qquad (11)$$

где $v_i(x, t)$ – координаты вектора скорости частицы среды, ставится краевая задача (2), (10), (11), (5), (6), для к-рой доказаны теоремы существования и единственности, сформулированы вариационные принципы и предложен метод последовательных приближений. Условия физич. достоверности решения не выяснены. Эта задача формулируется, в частности, применительно к расчету установившегося пластич. течения упрочняющегося металла в технологич. процессах обработки давлением (прессование, прокатка и т. п.).

Аналогично ставится краевая задача для упругопластич. процессов средней кривизны (главная кривизна траектории деформации меньше или порядка h^{-1}).

Для теории двухзвенных процессов (траектория деформации – ломаная с углом излома θ при $s = s_0$), типичных для двухпараметрич. нагружений тела, с соотношениями (8) при $s \leqslant s_0$ и соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3\sin\theta}\left[\frac{\vartheta_{ij} - \vartheta_{ij}^0}{s - s_0}\sin(\theta - \vartheta) + \frac{\vartheta_{ij}^0}{s_0}\sin\vartheta\right] + 3K\varepsilon\delta_{ij} \qquad (12)$$

при $s > s_0$, где σ_u, ϑ – известные функции от s_0, θ, s, дана постановка краевой задачи (B), (12) при $s > s_0$ и (B), (8) при $s \leqslant s_0$ с доказательством теорем существования и единственности. Доказана локальная теорема физич. достоверности, определяющая достаточные условия, налагаемые на функции K_i, F_i, φ_i, при к-рых почти всюду в области Ω происходят изломы траекторий деформации. Свойства решений и материальных функций в окрестности точки излома существенны для решения задач об устойчивости равновесия при упругопластич. деформациях.

В современной теории течения для пластич. части тензора деформации ε_{ij}^p из постулатов пластичности энергетич. типа выводятся соотношения вида:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = H\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\Delta\sigma_{mn}, \qquad (13)$$

а для упругой части принимается обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{mm}^l\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^l,$$

где λ, μ – постоянные Ламе, причем функция нагружения f является функционалом процесса нагружения $\sigma_{ij}(t)$, а функция упрочнения H, кроме того, зависит от приращений $\Delta\sigma_{ij}$. Чаще всего предполагается, что H не зависит от $\Delta\sigma_{ij}$. При этом линеаризованные по приращениям соотношения (13) позволяют строго формулировать краевую задачу типа (B), (13) с доказательством ряда общих теорем и минимальных принципов (см. [6]); разработаны процедуры численно-аналитич. решения. Преимущество простоты, даваемое линеаризацией соотношений (13), серьезно ослабляется ограниченностью области, в к-рой линеаризованные соотношения физически достоверны.

В П. м. т. часто используется постановка краевой задачи на основе теории пластичности Прандтля – Рейса, к-рая описывается соотношениями

$$2G\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}\delta_{ij} + R(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) + \frac{2G}{3K}\dot{\sigma}\delta_{ij},$$

где G, K – константы упругости, R – функция от $\sigma_u = \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2}$. Область достоверности этих соотношений ограничена (точно не определена).

Развита теория идеально пластич. тел (см. [7], [8]), основанная на физич. соотношениях Сен-Венана – Леви – Мизеса. Эти соотношения формально получаются из соотношений малой кривизны (10), если в них положить $\Phi(s) = \sigma_s = \text{const}$ (σ_s – предел текучести материала) и принять условие несжимаемости:

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{2\sigma_s}{3V_u}v_{ij}, \quad v = 0. \qquad (14)$$

Понятие идеальной пластичности подразумевает, кроме того, соблюдение в области активных пластич. деформаций условия текучести вида

$$F(\sigma_{ij}) = 0, \qquad (15)$$

напр. условия Генки – Мизеса

$$3/2s_{ij}s_{ij} = \sigma_s^2, \; s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij},$$

или условия Треска – Сен-Венана

$$\tau_{\max} = \tau_s,$$

где $\tau_{\max}$ – наибольшее касательное напряжение, σ_s, τ_s – константы материала.

Краевая задача вида (B), (14), (15) с заменой (3) на (11) обычно гиперболического (иногда эллиптического) типа. Полная задача теории идеальной пластичности состоит в решении уравнений (2), (11), (14), (15) в части области Ω_1, в к-рой имеют место пластич. деформации, и уравнений (2), (3) с соотношениями обобщенного закона Гука в области упругих деформаций Ω_2 с соответствующими граничными условиями и кинематич. и динамич. условиями сопряжения

решений на неизвестной границе областей Ω_1 и Ω_2 (упруго-пластич. задача).

Часто практически полезные результаты дает жесткопластич. анализ, в к-ром упругие деформации игнорируются и части тела вне области пластичности считаются недеформируемыми. При этом, как правило, возникают стационарные поверхности разрыва скоростей частиц, что несовместимо с классич. положениями механики сплошной среды. В нек-рых задачах при задании граничных условий в напряжениях уравнения равновесия вместе с условиями типа (15) можно рассматривать как автономную систему гиперболич. типа. При этом возникает возможность неоднозначного определения области пластич. деформаций и напряжений в этой области, к-рую часто разрешают на основе нек-рых эвристич. соображений. Многозначность не возникает при решении упруго-пластич. задачи.

Среди задач, решаемых методами теории идеальной пластичности, специального упоминания заслуживают задачи об установившемся пластич. течении неупрочняющегося металла в «каналах» с определением скоростей и напряжений, включая контактные, применительно к технологич. задачам обработки давлением (ковка, штамповка, прессование).

Для ряда инженерных приложений особый интерес представляет теория пластич. течения тонких слоев металла, основанная на ряде рациональных гипотез кинематич. и физич. характера. При этом определяются условия, необходимые для поддержания пластич. течения (напр., мощность пресса), и распределение скоростей, позволяющее предвидеть форму изделия.

Прикладные задачи П. м. т. (напр., о равновесии оболочек) приводят к краевым задачам с нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными высокого порядка (напр., четвертого).

Для задач об устойчивости равновесия при пластич. деформациях характерно бифуркационное изменение типа процесса деформации в момент потери устойчивости с образованием точек излома на траекториях деформации. Напр., при простом нагружении тела в момент потери устойчивости возникает сложное нагружение, и для решения задачи об устойчивости необходимо привлекать соотношения, описывающие бесконечно малый процесс после точки излома траектории (см. [1]).

Динамические задачи теорий пластичности. Общая постановка динамич. задачи получается, если (2) заменить уравнением движения

$$\sigma_{ij,\,j} - \rho K_i = \rho U_{i,\,tt},\ x \in \Omega,$$

и к (2)–(6) добавить начальные условия, напр. вида

$$u_i(x,\,0) = \psi_i(x),\ u_{i,\,t}(x,\,0) = \chi_i(x),\ x \in \Omega.$$

При этом возникают трудности двоякого характера:

1) вследствие возникновения разных типов волн с различными скоростями распространения, зависящими от величин деформаций, процессы деформации в разных точках тела (и в каждой точке в разные промежутки времени) имеют разную степень сложности даже при простейших типах прилагаемых нагрузок, и априори нельзя установить возможность использования соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ частного вида;

2) необходимо использовать динамич. соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ с учетом зависимости от развития процесса деформации во времени.

Динамич. функционал пластичности изучен не полностью даже для одномерного процесса, то есть при простой деформации. Информация о динамич. характеристиках материалов в сложном напряженном состоянии при сложных процессах деформации чрезвычайно скудна и не позволяет судить хотя бы о качественных свойствах динамич. функционалов пластичности. В связи с этим динамич. задачи теории пластичности ставятся с использованием статич. соотношений теории пластичности, что позволяет отрабатывать методы решения, выяснять специфические для динамики механич. эффекты и получать решения, полезные для практики в качестве оценок. Такой подход в качестве этапа исследования оправдывается чрезвычайной важностью изучения динамич. процессов в конструкциях, сооружениях и массивах.

Анализ распространения активных нелинейных деформаций в сложном напряженном состоянии обнаруживает возникновение комбинированных разрывов разных типов, характерных только для нелинейных задач. Насколько можно судить по имеющимся результатам, наиболее сложные процессы протекают в областях, примыкающих к поверхностям разрыва, тогда как в основной области движения сложность процесса по кривизнам траекторий и по времени ограничена. Поэтому представляется возможным решать динамич. задачи теории пластичности для сложных случаев путем комбинированного использования соотношений частного вида (напр., для процессов средней кривизны) в основной области и соотношений для окрестности точки излома (или для двухзвенных процессов) в областях, примыкающих к поверхностям разрыва. Нетривиальной и специфической для динамич. задач теории пластичности является задача о нахождении поверхности разгрузки, разделяющей области активных и пассивных деформаций.

Наиболее детально изучены задачи о распространении одномерных упруго-пластич. волн (см. [9]). Исследована задача о распространении волны разгрузки в стержне при растяжении-сжатии. В дальнейшем распространение и взаимодействие упруго-пластич. продольных волн в стержне исследованы с учетом различных типов зависимости механич. нагрузок от скорости деформации. В свою очередь, полученные решения используются в качестве теории эксперимента (базисного или контрольного) для изучения динамич. свойств материалов (см. [10]).

Математические задачи теории уравнений состояния. Явление пластичности настолько сложно, что построить уравнения состояния (соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$) путем прямого обобщения опытных данных не удается. В связи с этим доминирует тенденция к созданию общей теории, к-рая, в частности, определит и теорию эксперимента. На этом пути ведется математич. исследование допустимых форм уравнений состояний, не противоречащих законам механики и термодинамики, изучение свойств кривых и поверхностей в n-мерном пространстве в связи с исследованием процессов и предельных конфигураций, формулирование определяющих принципов, относящихся к нек-рым классам (так или иначе идеализированных) материалов, указывающих выбор независимых параметров состояния и уточняющих (в достаточно общем виде) структуру соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, аналитич. исследование свойств функционалов пластичности, выяснение классов процессов, допускающих более простое математич. описание в рамках общих соотношений (см. [1], [11]). Большое значение для теории и экспериментального исследования имеет развитие теории представления функционалов. Результаты этой теории позволяют, в частности, устанавливать физич. достоверность уравнения состояния сложной функциональной структуры по анализу явлений, сравнительно легко воспроизводимых в натуре.

Лит.: [1] Ильюшин А. А., Пластичность. Основы общей математической теории, М., 1963; [2] Ильюшин А. А., Ленский В. С., Модель и алгоритм, «Прикладные проблемы прочности и пластичности», 1975, № 1 (Горький); [3] Ильюшин А. А., Пластичность, ч. 1 – Упруго-пластические деформации, М.– Л., 1948; [4] Биргер И. А., «Прикладная математика и механика», 1951, т. 15, № 6, с. 765–70; [5] Москвитин В. В., Пластичность при переменных нагружениях, М., 1965; [6] Койтер В. Т., Общие теоремы теории упруго-пластических сред, пер. с англ., М., 1961; [7] Соколовский В. В., Теория пластичности, 3 изд., М., 1969; [8] Хилл Р., Математическая теория пластичности, пер. с англ., М., 1956; [9] Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А., Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, М., 1961; [10] Васин Р. А., Ленский В. С., Ленский Э. В., Динамические зависимости между напряжениями и деформациями, в кн.: Проблемы динамики упруго-пластических сред, М., 1975; [11] Трусделл К., Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред, пер. с англ., М., 1975.

В. С. Ленский.

ПЛАТО ЗАДАЧА – задача, составляющая важный раздел современной теории *минимальных поверхностей*. В классич. постановке П. з. состоит в следующем: рассматривается замкнутый контур (замкнутая кусочно гладкая кривая) в трехмерном пространстве и все двумерные поверхности, ограниченные этим контуром (то есть граница к-рых совпадает с данным контуром); найти среди этих поверхностей поверхность с наименьшей площадью. С математич. точки зрения нужно доказать существование такой поверхности и изучить ее локальные свойства (напр., структуру ее особенностей).

Аналогично формулируется многомерная П. з. Классич. двумерная П. з. решена Дж. Дугласом (J. Douglas) и Т. Радо (T. Rado) в первой трети 20 в.

Лит.: [1] Fomenko A. T., The Plateau problem, v. 1, 2, L., 1990; [2] Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т., Минимальные поверхности и проблема Плато, М., 1987. *А. Т. Фоменко.*

ПЛЕЧО пары сил – расстояние между линиями действия *пары сил*.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА теории упругости – название типа задач, в которых картина изучаемого явления в упругой среде одинакова во всех плоскостях, параллельных некоторой плоскости (например, плоскости Ox_1x_2 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$). Математич. теорией П. з. часто описываются и задачи, к-рые по содержанию имеют пространственный характер (напр., изгиб тонких пластинок).

По П. з. теории упругости успехи достигнуты главным образом благодаря использованию формул, выражающих искомые решения через аналитич. функции одного комплексного аргумента; впервые эти формулы были выведены в 1909 Г. К. Колосовым, а начиная с 20-х гг. 20 в. в работах Н. И. Мусхелишвили они нашли полное обоснование, и на их базе развиты методы решения широкого круга граничных (краевых) и контактных П. з. теории упругости. Полученные по П. з. теоретич. результаты используются при решении практич. задач.

Комплексное представление полей смещений и напряжений. Говорят, что упругая среда находится в состоянии плоской деформации, если существует такая декартова система координат $Ox_1x_2x_3$, относительно к-рой компоненты вектора смещения имеют вид:

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2, t),\ \alpha = 1, 2,\ u_3 = 0,$$

где t – время. Компоненты тензора напряжений таковы:

$$X_{\alpha\beta} = \lambda\theta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta},\ X_{\alpha 3} = 0,\ X_{33} = \lambda\theta,$$

где λ, μ – постоянные Ламе, $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кронекера, $e_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора деформации: $e_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha$; $\theta = e_{\alpha\alpha} = \partial_\alpha u_\alpha$ – дилатация ($\alpha, \beta = 1, 2$; наличие в выражении двух одинаковых индексов означает суммирование).

Плоская деформация возможна в упругой среде, к-рая заполняет цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости Ox_1x_2, если при этом компоненты объемных сил имеют вид $X_\alpha = X_\alpha(x_1, x_2, t)$, $X_3 = 0$, а боковые усилия не зависят от координаты x_3 и расположены на плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра. Для реализации плоской деформации упругого цилиндра к его торцам необходимо приложить нормальные силы, равные $\pm\lambda\theta$.

При сделанных допущениях система уравнений динамики упругого тела относительно компонентов вектора смещений имеет вид:

$$\mu\Delta u_\alpha + (\lambda + \mu)\,\partial_\alpha\theta + X_\alpha = \rho\ddot{u}_\alpha,\ \alpha = 1, 2,$$

где ρ – плотность распределения масс, $\rho\ddot{u}_\alpha$ – силы инерции, Δ – оператор Лапласа. Если воспользоваться операциями комплексного дифференцирования:

$$2\partial_{\bar z} = \partial_1 + i\partial_2,\quad 2\partial_z = \partial_1 - i\partial_2\quad (\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha),$$

то при отсутствии сил инерции (статич. задача) эту систему можно записать в виде одного (комплексного) уравнения:

$$(\lambda + 3\mu)\partial^2_{z\bar z} u + (\lambda + \mu)\partial^2_{zz}\bar u + X = 0,$$

где

$$u = u_1 + iu_2,\ X = 2^{-1}(X_1 + iX_2).$$

Пусть область S, занятая упругой средой, представляет связную часть плоскости Ox_1x_2, ограниченную одним или несколькими контурами L_0, L_1, ..., L_m без общих точек, $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ – граница области S; точка $z = 0$ принадлежит S.

Искомое решение уравнения равновесия выражается по формуле $u = u_0 + TX$, где TX – нек-рое частное решение, к-рое можно выразить в виде:

$$TX = -\varkappa(\mu\pi(1+\varkappa))^{-1}\iint X(\zeta)\ln|\zeta - z|\,d\zeta_1\,d\zeta_2 +$$

$$+ (2\mu\pi(1+\varkappa))^{-1}\iint \bar X(\zeta - z)(\bar\zeta - \bar z)^{-1}\,d\zeta_1\,d\zeta_2,$$

а u_0 – общее решение однородного уравнения ($X = 0$), к-рое выражается по формуле:

$$u_0 = K(\varphi, \psi; \varkappa) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z),$$

где φ и ψ – произвольные аналитич. функции от $z = x_1 + ix_2$ в области S ($\varkappa = 3 - 4\sigma$, где σ – постоянная Пуассона, $0 < \sigma < 0{,}5$). Если X – многочлен от x, y, то TX можно выразить в явной форме.

Оператор $K(\varphi, \psi; \varkappa)$ не изменится, если функции φ и ψ подчинить условию $\varphi(0) = 0$ или $\psi(0) = 0$. При выполнении одного из этих условий всякому полю смещений $u = u_1 + iu_2$, заданному в области S, соответствует вполне определенная пара аналитич. функций φ, ψ.

Если в предыдущих формулах постоянную $\varkappa$ заменить через $\varkappa^* = (3 - \sigma)/(1 + \sigma)$, то получается формула для поля смещения обобщенного плосконапряженного состояния.

Комплексная запись

$$X_{\alpha\alpha} = 2(\lambda + \mu)(\partial_z u + \partial_{\bar z}\bar u),\quad X_{11} - X_{22} + 2iX_{12} = 4\mu\partial_{\bar z} u$$

компонентов тензора напряжений, в силу равенства

$$u = K(\varphi, \psi; \varkappa) + TX,$$

принимает вид:

$$X_{\alpha\alpha} = 4\operatorname{Re}\Phi(z) + T_0X,$$

$$X_{11} - X_{22} + 2iX_{12} = 2(\bar z\Phi'(z) + \Psi(z)) + T_1X,$$

где

$$\Phi = 2\mu\varphi',\ \Psi = 2\mu\Psi',$$

$$T_0 = 4(\lambda + \mu)\operatorname{Re}\partial_z TX,\quad T_1X = 4\mu\partial_{\bar z} TX.$$

Пусть упругая среда подвергается непрерывной деформации. Тогда можно считать, что компоненты тензора напряжений и смещений – непрерывные однозначные функции в области S; Φ и Ψ голоморфны в S, причем Φ можно подчинить условию $\Phi'(0) = \overline{\Phi'(0)}$.

Если область S ограничена и односвязна, а деформация непрерывна, то функции φ и ψ голоморфны в S. В случае конечной многосвязной области φ и ψ будут, вообще говоря, многозначными функциями определенного вида.

Основными задачами плоской теории упругости являются следующие задачи.

1) Первая основная задача: определить упругое равновесие тела, когда на его границе заданы внешние силы.

Сила напряжения (X_n, Y_n), действующая на элемент дуги ds контура L с нормалью n, может быть записана в комплексной форме:

$$(X_n + iY_n)\,ds = -2i\mu d(\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}),$$

и краевые условия первой задачи имеют вид:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + c(t),\quad t \in L, \qquad (1)$$

где

$$f(t) = i(2\mu)^{-1}\int_L (X_n + iY_n)\,ds,$$

причем дуга s отсчитывается на каждом L_k от нек-рой фиксированной точки $z_k \in L_k$ в положительном направлении; $c(t) = c_k = \text{const}$ на L_k. Всегда можно считать $c_0 = 0$, остальные постоянные c_k определяются в ходе решения задачи. Если $m = 0$, то искомые функции φ и ψ голоморфны в S. Тогда равенства $\varphi(0) = 0$, $\operatorname{Im}\varphi'(0) = 0$ обеспечивают единственность решения задачи (1), а необходимые и достаточные условия существования решения

$$\int_L (X_n + iY_n)\,ds = 0, \quad 2\mu \int_L (x_1 Y_n - x_2 X_n)\,ds = \operatorname{Re}\int_L f\,dt = 0$$

представляют собой условия статич. равновесия абсолютно жесткого тела.

При $m > 0$, как уже было отмечено, φ и ψ – многозначные функции специального вида, причем они выражаются через новые искомые голоморфные в области S функции φ^* и ψ^*.

2) Вторая основная задача: определить упругое равновесие тела по заданным смещениям точек его границы.

Эта задача приводит к граничному условию вида:

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = f(t), \quad t \in L,$$

где $f = u_1 + iu_2$ – заданная на L функция.

3) Основная смешанная задача. Пусть S – конечная односвязная область, ограниченная замкнутым контуром L; $L = L' + L''$, где L' состоит из конечного числа дуг $L'_1, \ldots, L'_m$ контура L, к-рые попарно не имеют общих точек; на L' заданы внешние напряжения, а на L'' – смещения. Соответствующие краевые условия можно записать в виде

$$\gamma(t)\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + c(t), \quad t \in L,$$

где f – заданная функция точки $t \in L$; $\gamma(t) = 1$, если $t \in L'$, и $\gamma(t) = -\varkappa$, если $t \in L''$; $c(t) = c_k = \text{const}$, если $t \in L'$; $c(t) = 0$, если $t \in L''$. Постоянные c_k (кроме одной, выбираемой как угодно) не задаются заранее и подлежат определению в ходе решения задачи.

4) Третья основная задача. На границе области задаются нормальная составляющая вектора смещения и касательная составляющая вектора внешнего напряжения.

Такая задача возникает, напр., в случае соприкасания упругого тела с жестким профилем заданной формы, когда контакт между упругим и жестким телами осуществляется по всей границе. Рассматриваются также другого рода контактные задачи. Все эти задачи также приводятся к граничным задачам для аналитич. функций.

5) Граничные задачи изгиба тонких пластинок. К аналогичным граничным условиям приводят задачи изгиба тонких пластинок. Прогиб w серединной поверхности тонкой однородной упругой пластинки, подверженной действию распределенной по ее поверхности нормальной нагрузки интенсивности q, удовлетворяет неоднородному бигармонич. уравнению

$$\Delta\Delta w = q/D,$$

где $D = Eh^3/12(1-\sigma^2)$ – цилиндрич. жесткость; h – толщина пластинки, E – модуль Юнга. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$w = w_0 + \tilde{T}q,$$

где $\tilde{T}q$ – частное решение, к-рое выражается формулой:

$$\tilde{T}q = (8\pi D)^{-1} \iint q(\zeta)|\zeta - t|^2 \ln|\zeta - z|\,d\zeta_1\,d\zeta_2,$$

а w_0 – общее решение:

$$w_0 = \operatorname{Re}(\bar{z}\Phi(z) + \Psi(z))$$

однородного бигармонич. уравнения

$$\Delta\Delta w_0 = 0,$$

где Φ и Ψ – произвольные аналитич. функции в S.

Если q – многочлен от x_1 и x_2, то $\tilde{T}q$ выражается в явной форме. Если $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, $\Phi'(0) = \overline{\Phi'(0)}$, то функции Φ и Ψ выражаются однозначно посредством заданной бигармонич. функции w_0.

Решение w уравнения $\Delta\Delta w = q/D$ следует подчинить граничным условиям, соответствующим тому или иному характеру закрепления границы пластинки. В случае заделанной по краям пластинки на границе L области S, занятой серединной поверхностью пластинки, должны выполняться условия $w = dw/dn = 0$, где n – внешняя нормаль к контуру L. Эти два условия можно записать в виде одного комплексного равенства $\partial_{\bar{z}} w = 0$ (на L). Последнее приводится к виду (1).

Решение этой задачи всегда существует, единственно и выражается по формуле:

$$w(x_1, x_2) = D^{-1} \iint SG(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2)\, q(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2,$$

где G – функция Грина. Для круга $|z| < 1$:

$$G(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2) = 2|\zeta - z|^2 \ln\left(|1 - z\bar{\zeta}|\,|\zeta - z|^{-1}\right) - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2),$$

$$z = x_1 + ix_2, \ \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2.$$

В случае свободной пластинки граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma\Delta w + (1-\sigma)(w_{x_1x_1}\cos^2\nu + w_{x_2x_2}\sin^2\nu + w_{x_1x_2}\sin 2\nu) = 0, \\ &\frac{d\Delta w}{dn} + (1-\sigma)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}(w_{x_1x_2} - w_{x_1x_1})\sin 2\nu + w_{x_1x_2}\cos 2\nu\right) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где ν – угол, составляемый внешней нормалью n с осью Ox_1. Левые части равенств (2) представляют собой соответственно изгибающий момент и обобщенную перерезывающую силу, отнесенные к единице длины и действующие на боковой элемент пластинки с нормалью n. Граничные условия (2) можно записать в виде:

$$d\left((3+\sigma)/(1-\sigma)\Phi - z\bar{\Phi}' - \bar{\Psi}'\right) = g,$$

где g – заданная функция на L.

6) Плоские стационарные упругие колебания. Когда решения системы уравнений динамики упругой среды ищутся в виде

$$u = v(x_1, x_2)e^{i\nu t}, \ u_3 = 0,$$

где ν – частота колебания, для v получается формула

$$v = \partial_{\bar{z}}(w_1 + iw_2)$$

(предполагается, что внешние силы равны нулю, $X_\alpha = 0$), где w_1 и w_2 – произвольные решения уравнений:

$$\Delta w_1 + a^2\nu^2 w_1 = 0, \ \Delta w_2 + b^2\nu^2 w_2 = 0,$$

$$a^2 = \rho(\lambda + 2\mu)^{-1}, \ b^2 = \rho\mu^{-1}.$$

Поле напряжений выражается по формулам

$$X_{11} + X_{22} = -(\lambda + \mu)\alpha^2\nu^2 w_1,$$

$$X_{11} - X_{22} + 2iX_{22} = 4\mu\,\partial_{\bar{z}}^2(w_1 - iw_2),$$

$$X_{33} = -2^{-1}a^2\nu^2 w_1.$$

Общее решение уравнения

$$\Delta w + k^2 w = 0, \ k^2 = \text{const},$$

выражается в виде:

$$w = A_0 J_0(k|z|) + \int_0^1 \operatorname{Re}\left[z\Phi(zt)\right] J_0(k|z|\sqrt{1-t})\,dt, \quad (3)$$

где A_0 – произвольная действительная постоянная, Φ – произвольная аналитич. функция, J_0 – функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка. При помощи формулы (3) выводятся комплексные представления для полей смещений и напряжений при плоском стационарном колебании упругой среды; они могут быть использованы для исследования граничных задач, а также для построения различных

полных систем частных решений, к-рые позволяют аппроксимировать любые поля смещений и напряжений. В частности, эти полные системы можно использовать для построения приближенных решений краевых задач.

7) Задача определения концентраций напряжений около отверстий в анизотропных и изотропных пластинах. Основу приближенных методов решения таких задач также составляют введение функций комплексного переменного специальной структуры в виде степенных рядов и различных модификаций теории возмущений, а также использование теорем сложения цилиндрич. и сферич. функций с последующим сведением граничных задач к бесконечным системам алгебраич. уравнений.

Методы решения граничных задач. Формулы представления полей смещений и напряжений через аналитич. функции используются для доказательства существования и единственности решения общих граничных задач, а также для построения в явной форме решений нек-рых классов задач частного вида.

Метод степенных рядов с применением конформного отображения позволяет решать основные П. з. для областей, конформно отображающихся на круг посредством рациональных функций. Задача редуцируется к линейной алгебраич. системе уравнений и квадратурам. Этим методом практически решаются основные граничные задачи для любой односвязной области с использованием приближенного конформного отображения области на круг с помощью рациональных функций. При использовании ЭВМ этот прием является эффективным для построения решений основных граничных П. з. теории упругости и изгиба пластинок.

На основе теории интеграла типа Коши исследование П. з. редуцируется к хорошо изученным интегральным уравнениям. Полезными являются также методы, сочетающие конформное отображение с применением аппарата интегралов типа Коши. Существуют и другие способы приведения граничных П. з. теории упругости к интегральным уравнениям, к-рые дают возможность изучить вопросы существования и единственности решения.

Для редукции граничных П. з. теории упругости к интегральным уравнениям используется также метод потенциалов, не вводящий в рассмотрение комплексные аналитич. функции (φ и ψ).

Лит.: [1] Колосов Г. В., Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости, Л.—М., 1935; [2] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [3] его же, Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [4] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948.

И. Н. Векуа, Р. А. Кордзадзе.

ПЛОТИНЫ ЗАДАЧА с неизвестной границей — задача, описывающая фильтрацию жидкости через пористую плотину П, перегораживающую водонепроницаемый желоб N. При этом неизвестными являются область $D_t \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — влажная часть плотины П — и распределенное в ней давление $p(x, t)$ или пьезометрич. напор

$$h(x, t) = z + p/\gamma,$$

где гравитационная константа соответствующим образом нормирована, γ — удельный вес жидкости, координата $z = x_3$ ($z = x_2$, $n = 2$) определяет геометрич. высоты (см. [1]). Для большинства грунтов (рыхлых) справедлив закон Дарси, линейно связывающий скорость фильтрации и градиент пьезометрич. напора (см. [1]). Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид:

$$h_t = \operatorname{div}(k\nabla h) \text{ в } D_t,$$

где k — коэффициент фильтрации. Граница D_t состоит из поверхности Γ_t — части заданного многообразия Γ — границы плотины, и неизвестной поверхности γ_t [поверхности депрессии с уравнением $F(x, t) = 0$]. На неизвестной границе γ_t функция h должна удовлетворять двум условиям — одно определяется постоянством давления на γ_t, а второе имеет вид $V_\nu = k\nabla h$, где V_ν — скорость перемещения поверхности γ_t в направлении нормали ν к этой поверхности, внешней для D_t:

$$V_\nu = -(\partial_t F)\,(\nabla F, \nu)^{-1}.$$

В начальный момент фиксируются напор h и положение неизвестной границы. На части фиксированной границы $\Gamma_t \setminus N$ либо фиксируется напор h (на верхнем и нижнем бьефе), либо справедливо условие постоянства давления (на «зоне высачивания»).

Корректность стационарной П. з. с неизвестной границей при $n = 3$ установлена в [2]. Случай $n = 2$, как установившегося, так и неустановившегося движения, рассмотрен многими авторами (см. [1]—[3]).

Лит.: [1] Полубаринова-Кочина П. Я., Теория движения грунтовых вод, М., 1986; [2] Киндерлерер Д., Стампаккья Г., Введение в вариационные неравенства и их приложения, М., 1983; [3] Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н., Краевые задачи механики неоднородных жидкостей, Новосиб., 1983.

Е. В. Радкевич.

ПЛОТНОСТИ МАТРИЦА, статистический оператор, — оператор, при помощи которого можно вычислить среднее значение любой физической величины в квантовой статистической механике и, в частности, в квантовой механике. Термин «П. м.» связан с тем, что статистич. оператор обычно задается в матричной форме и определяет плотность вероятности. П. м. введена Дж. Нейманом (J. Neumann) и Л. Д. Ландау в 1927.

В квантовой механике среднее значение физич. величины, представляемой оператором $\hat{A}$, в квантовом состоянии, к-рое описывается волновой функцией $\psi(x)$, равно

$$\bar{A} = (\psi^*, \hat{A}\psi) = \int \psi^*(x)\,\hat{A}\psi(x)\,dx,$$

* означает комплексное сопряжение (для частиц со спином нужно учесть зависимость волновой функции от спиновых переменных и кроме интегрирования выполнить суммирование по возможным значениям спина). Соответствующий статистич. ансамбль называется чистым ансамблем, а состояние, к-рое можно описать волновой функцией,— «чистым» состоянием. Вся квантовая механика, за исключением нек-рых вопросов теории измерений, основана на применении чистых ансамблей.

Квантовая статистич. механика основана на использовании статистич. ансамбля более общего типа, а именно смешанного ансамбля (или смеси состояний), к-рый характеризуется заданием лишь вероятностей w_1, w_2, ... пребывания системы в различных квантовых состояниях, описываемых волновыми функциями ψ_1, ψ_2, ... Для такого ансамбля среднее значение величины $\hat{A}$ определяется формулой

$$\bar{A} = \sum_k w_k(\psi_k^*, \hat{A}\psi_k), \quad \sum_k w_k = 1, \quad w_k > 0,$$

к-рую можно записать в виде

$$\bar{A} = \operatorname{Sp}(\hat{A}\rho) = \iint A(x, x')\rho(x', x)\,dx\,dx',$$

$$\rho(x, x') = \sum_k w_k \psi_k(x)\psi_k^*(x'),$$

где Sp — след оператора, а $\rho(x, x')$ — П. м. в x-представлении, x — совокупность одночастичных координат x_1, x_2, ..., x_n, для частиц со спином x_i включает спин σ_i. Матричный элемент оператора $\hat{A}$ в x-представлении определяется соотношением

$$A(x, x') = \sum_{k, k'} \psi_k(x)(\hat{A})_{kk'}\psi_{k'}^*(x').$$

Чистое состояние есть частный случай смешанного, когда вероятность состояния k равна 1, а вероятность осталь-

ных – нулю. В этом случае П. м. равна произведению волновых функций

$$\rho(x, x') = \psi_k(x)\psi_k^*(x').$$

В общем случае П. м. нельзя представить в такой форме, преобразуя волновые функции. Описание системы с помощью П. м. является неполным с точки зрения квантовой механики, так как оно не основано на максимально полном наборе данных, как при описании с помощью волновой функции, но в статистич. механике эта «неполнота», как правило, не является недостатком. Полное описание системы очень большого числа частиц не только чрезвычайно сложно, но и излишне, поскольку для таких систем проявляются статистич. закономерности. Однако для основного состояния квантовомеханич. систем с большим числом частиц иногда удается в нек-ром приближении теоретически рассчитать волновые функции и пользоваться чистым ансамблем.

Физич. смысл П. м. можно пояснить, рассматривая подсистему с координатами x квантовомеханич. изолированной системы с координатами q, x, к-рая описывается волновой функцией $\psi(q, x)$. Среднее значение величины $\hat{A}$, относящейся к подсистеме и зависящей лишь от x, равно

$$\overline{A} = \iint \psi^*(q, x)\hat{A}\psi(q, x)\,dq\,dx.$$

Определяя линейный оператор $\hat{A}$ в матричном координатном представлении с помощью соотношения

$$\hat{A}\psi(q, x) = \int A(x, x')\psi(q, x')\,dx',$$

получаем для среднего значения оператора выражение

$$\overline{A} = \iiint \psi^*(q, x')\psi(q, x)A(x, x')\,dx\,dx'\,dq =$$

$$= \iint \rho(x', x)A(x, x')\,dx\,dx' = \mathrm{Sp}(\rho\hat{A}),$$

где

$$\rho(x, x') = \int \psi(q, x)\psi^*(q, x')\,dq$$

– П. м. подсистемы x. Диагональные элементы П. м. $\rho(x, x')$ определяют вероятности координат подсистемы. Таким образом, состояние подсистемы описывается не волновой функцией, а П. м.

П. м. обладает следующими свойствами: из нормировки вероятности вытекает, что

$$\mathrm{Sp}\rho = \sum_k w_k = 1,$$

П. м.– эрмитова, то есть $\rho(x, x') = \rho^*(x', x)$, и, кроме того, симметрична относительно переменных $x_1, \ldots, x_N$ (или $x_1', \ldots, x_N'$), включая спиновые переменные, для *Бозе – Эйнштейна статистики* и антисимметрична для *Ферми – Дирака статистики*.

Если П. м. удовлетворяет условию $\rho^2 = \rho$, то рассматриваемая система находится в чистом состоянии и обладает определенной волновой функцией. Действительно, когда ρ приведено к диагональной форме, это означает, что какой-либо один из матричных элементов ρ_{nn} равен 1, а остальные элементы равны нулю. Для любой физич. величины $\hat{A}$ тогда имеем $\overline{A} = A_{nn}$, что соответствует наличию определенной волновой функции ψ_n. В этом случае нет необходимости вводить П. м.

П. м. удовлетворяет квантовому уравнению Лиувилля

$$i\hbar\partial\rho/\partial t = [H, \rho] = H\rho - \rho H,$$

аналогичному уравнению Лиувилля в классич. статистич. механике. Это уравнение получается из того факта, что $\psi_k(x)$ удовлетворяет уравнению Шредингера. В стационарном состоянии $\partial\rho/\partial t = 0$ и $[H, \rho] = 0$, то есть П. м.– интеграл движения. Это свойство является исходным при построении равновесных статистич. ансамблей и перенесении идей Гиббса в квантовую статистику. Напр., для микроканонич. ансамбля $w(\mathscr{E}_k) = \mathrm{const}$ при $\mathscr{E} \leqslant \mathscr{E}_k \leqslant \mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}$, $\Delta\mathscr{E} \ll \mathscr{E}$ и $w = 0$ вне этого интервала, где $\mathscr{E}_k$ – собственное значение гамильтониана H. Для канонич. ансамбля

$$w(\mathscr{E}_k) = \exp[(F - \mathscr{E}_k)/\theta]$$

(F – свободная энергия, или энергия Гельмгольца; $\theta = kT$; T – абсолютная температура). В этом случае

$$\rho = \exp[(F - H)/\theta]$$

или, в матричной форме,

$$\rho(x, x') = \sum_k \psi_k^*(x')\exp[(F - H)/\theta]\psi_k(x).$$

П. м. применяют в теории необратимых процессов. Если при $t \to \infty$ система с гамильтонианом H находилась в состоянии статистич. равновесия, а затем адиабатически было включено внешнее возмущение H_t (напр., вызванное электрич. или магнитным полем), зависящее от времени, то с помощью $\rho(t)$ можно найти реакцию системы на внешнее возмущение. В линейном приближении по внешнему возмущению

$$\rho(t) = \rho_0 + (ih)^{-1}\int_{-\infty}^{t} \exp\{iH(\tau - t)/\hbar\}[H_\tau', \rho_0] \times$$

$$\times \exp\{-iH(\tau - t)/\hbar\}\,d\tau,$$

ρ_0 – статистич. оператор в состоянии равновесия. Отсюда для среднего значения оператора получим

$$\overline{A} = \langle\hat{A}\rangle + (i\hbar)^{-1}\int_{-\infty}^{t}\left\langle\left[\hat{A}(t),\ H_\tau'(\tau)\right]\right\rangle d\tau,$$

$\langle\ldots\rangle = \mathrm{Sp}(\rho_0\ldots)$ и операторы взяты в гейзенберговском представлении:

$$\hat{A}(t) = e^{iHt/\hbar}\hat{A}e^{-iHt/\hbar}, \quad H_\tau'(\tau) = e^{iH\tau/\hbar}H_\tau' e^{-iH\tau/\hbar}.$$

Эти формулы можно представить через двухвременные запаздывающие *Грина функции*, что используют в теории электропроводности и магнитного резонанса.

П. м. применяют для построения операторов плотности комплексов молекул, удовлетворяющих цепочке *Боголюбова уравнений*, с помощью к-рой можно обосновать кинетич. уравнение квантового газа.

П. м. используют в теории поляризованных пучков частиц со спином (магнитным моментом) или фотонов. Напр., П. м. пучка частиц со спином $\pm 1/2$ в смешанном состоянии имеет вид:

$$\rho = w_a|\chi_a\rangle\langle\chi_a| + w_b|\chi_b\rangle\langle\chi_b|, \ w_a + w_b = 1,$$

$|\chi_a\rangle$, $|\chi_b\rangle$ – спиновые функции двух различных суперпозиций состояний $|+1/2\rangle$, $|-1/2\rangle$. П. м. в представлении спиновых функций $|\pm 1/2\rangle$ дается выражением

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\left(e + \sum_i P_i\sigma_i\right),$$

где $P_i = \mathrm{Sp}(\rho\sigma_i)$ – i-я компонента поляризации, σ_i – матрицы Паули, e – единичная матрица. П. м. пучка фотонов с различной поляризацией имеет аналогичный вид и зависит от трех параметров Стокса, описывающих степени линейной и круговой поляризации относительно различных осей.

Смешанный ансамбль частиц в различных состояниях углового момента $|JM\rangle$ описывается П. м. с элементами $\langle JM|\rho|J'M'\rangle$:

$$\rho = \sum_{JJ'MM'}\langle J'M'|\rho|JM\rangle|J'M'\rangle\langle JM|.$$

Для того чтобы учесть симметрию, связанную с угловым моментом частиц ансамбля, удобно разложить ρ по неприводимым тензорным операторам угловых моментов $T(J'J)_{KQ}$:

$$\rho = \sum_{JJ'KQ}\left\langle T(J'J)^+_{KQ}\right\rangle T(J'J)_{KQ},$$

где

$$|J' - J| \leqslant K \leqslant J' + J, \quad -K \leqslant Q \leqslant K,$$

$$T(J'J)_{KQ} = \sum_{MM'} (-1)^{J-M} (J'M', J-M|KQ)|J'M'\rangle\langle JM|$$

$(J'M', J-M|KQ)$ – *Клебша – Гордана коэффициенты*, K, Q – полный момент и его z-компонента, $T(J'J)_{KQ}$ – матрица, имеющая $2J'+1$ строк и $2J+1$ столбцов. Величины

$$\left\langle T(J'J)^{+}_{KQ} \right\rangle = \mathrm{Sp}\left(\rho T(J'J)^{+}_{KQ}\right)$$

называются мультиполями состояния и характеризуют свойства поляризации и когерентности пучков. Три параметра (при $J'=J$) $\langle T(J)^{+}_{1Q}\rangle$ с $Q=\pm 1, 0$ называются вектором ориентации и характеризуют средний по ансамблю угловой момент. Тензор 2-го ранга $\langle T(J)^{-}_{2Q}\rangle$ называется тензором выстроенности, он пропорционален средним сферич. компонентам тензора электрич. квадрупольного момента.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 4 изд., М., 1989, § 4; [2] их же, Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976, § 5; [3] Зубарев Д. Н., Неравновесная статистическая термодинамика, М., 1971; [4] Блум К., Теория матрицы плотности и ее приложения, пер. с англ., М., 1983. *Д. Н. Зубарев.*

ПЛОТНОСТИ МОМЕНТА ТЕНЗОР – см. *Нетер теорема.*

ПЛОТНОСТИ ОПЕРАТОР – оператор в гильбертовом пространстве квантовомеханической системы, характеризующий ее состояние, то есть определенным образом приготовленный статистический ансамбль индивидуальных экземпляров системы. П. о. является положительным самосопряженным оператором ρ с единичным следом в гильбертовом пространстве H системы. При этом среднее значение *наблюдаемой* X в состоянии, описываемом П. о. ρ, равно

$$\langle X\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\,\rho X.$$

Говоря о квантовом состоянии, обычно имеют в виду соответствующий П. о.

Соотношение

$$\varphi_\rho(X) = \mathrm{Tr}\,\rho X;\ X \in \mathfrak{B}(H)$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между П. о. ρ и нормальными состояниями φ_ρ на алгебре $\mathfrak{B}(H)$ всех ограниченных операторов в H. Таким образом, П. о. можно рассматривать как некоммутативную производную Радона – Никодима нормального состояния относительно следа.

Если ρ_i, $i=1, ..., n$,– операторы плотности, то любая их смесь, то есть выпуклая комбинация

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} p_i \rho_i,$$

где

$$p_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

также является П. о., к-рый описывает смесь статистич. ансамблей, задаваемых П. о. ρ_i, в пропорциях p_i, $i=1, ..., n$. Таким образом, совокупность $\mathfrak{S}(H)$ всех П. о. в гильбертовом пространстве H является выпуклым множеством. П. о. ρ является крайней точкой множества $\mathfrak{S}(H)$, если он представим в виде смеси других П. о. Соответствующие состояния называются чистыми. Для того чтобы П. о. ρ представлял чистое состояние, необходимо и достаточно, чтобы он являлся ортопроектором на нек-рый единичный вектор ψ пространства H, называемый вектором состояния. При этом $\langle X\rangle_\rho = (\psi, X_\psi)$. Соответствие между чистыми состояниями и векторами ψ взаимно однозначно с точностью до комплексного множителя, по модулю равного единице.

Всякий П. о. ρ представляется в виде смеси одномерных ортопроекторов, причем такое представление неоднозначно; выделенное представление, для к-рого компоненты смеси взаимно ортогональны, дается спектральным разложением П. о. ρ.

Лит. см. при ст. *Наблюдаемая.* *А. С. Холево.*

ПЛОТНОСТЬ – см. *Масса.*

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ, плотность распределения вероятностей, случайной величины X, – функция $p(x)$ такая, что

$$p(x) \geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

и при любых $a<b$ вероятность события $a<X<b$ равна

$$\int_a^b p(x)\,dx.$$

Если $p(x)$ непрерывна, то при достаточно малых Δx вероятность неравенства $x<X<x+\Delta x$ приближенно равна $p(x)\Delta x$ (с точностью до малых более высокого порядка). Функция распределения $F(x)$ случайной величины X, имеющей плотность, связана с П. в. соотношениями

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$$

и, если $F(x)$ дифференцируема,

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Случайные величины, имеющие П. в., называются непрерывно распределенными случайными величинами, а их распределения – непрерывными (точнее, абсолютно непрерывными) распределениями.

Момент $\mathsf{E}X^r$ любого порядка r таких случайных величин X вычисляют по формуле

$$\mathsf{E}X^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p(x)\,dx,$$

если интегралы абсолютно сходятся.

Аналогично определяют совместную П. в. нескольких случайных величин $X_1, ..., X_n$ (П. в. совместного распределения):

$$p(x_1, ..., x_n) \geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, ..., x_n)\,dx_1 ... dx_n = 1,$$

и для любых $a_i<b_i$, $i=1, ..., n$, вероятность одновременного выполнения неравенств

$$a_1 < X_1 < b_1, ..., a_n < X_n < b_n$$

равна

$$\int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_n}^{b_n} p(x_1, ..., x_n)\,dx_1 ... dx_n.$$

Если существует совместная П. в. случайных величин $X_1, ..., X_n$, то для независимости этих величин необходимо и достаточно, чтобы совместная П. в. была произведением П. в. отдельных величин, то есть

$$p(x_1, ..., x_n) = p_1(x_1)...p_n(x_n),$$

где p_i – П. в. величины X_i. По совместной П. в. случайных величин можно найти распределение вероятностей любых функций от этих величин: так, напр., для двух независимых случайных величин с П. в. $p_1(x)$ и $p_2(x)$ П. в. их суммы задается формулой свертки

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y-x)\,p_2(x)\,dx.$$

А. В. Прохоров.

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ – см. *Плотность вероятности.*

ПЛОЩАДЕЙ ЗАКОН – закон движения материальной точки (или центра масс тела) под действием центральной силы, согласно которому: а) траекторией точки является плоская кривая, лежащая в плоскости, проходящей через центр силы; б) площадь, сметаемая радиус-вектором точки, проведенным из центра силы, растет пропорционально времени.

П. з. открыт И. Кеплером (I. Kepler, 1609) для движения планет вокруг Солнца, а для общего случая доказан И. Ньютоном (I. Newton, 1687).

ПЛОЩАДЕЙ МЕТОД – один из основных методов геометрической теории функций комплексного переменного, основанный на том, что площадь дополнения образа области при ее отображении голоморфной функцией неотрицательна. Неравенство, выражающее это свойство, обычно дается для нек-рого класса функций (или систем функций) и составляет содержание теоремы площадей (для класса или системы функций).

Первой (1914) такой теоремой была внешняя теорема площадей Гронуолла [5]: если

$$F(z)=z+\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$$

– *однолистная функция* в области $U^-=\{z\in\mathbb{C}\mid 1<|z|<\infty\}$, то есть принадлежит так наз. классу Σ, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2\leqslant 1, \tag{1}$$

причем знак равенства в (1) реализуется только для функции

$$F(z)=z+a_0+a_1 z^{-1},\ |a_1|=1,$$

отображающей U^- на плоскость с исключенным отрезком. Неравенство (1) позволило получить оценки нек-рых коэффициентов в классе Σ, в классе S голоморфных однолистных функций, а также доказать теоремы об искажении и покрытии в этих классах, найти радиус выпуклости в S.

Более общая теорема доказана (1951) Н. А. Лебедевым и И. М. Милиным [3]; если $F\in\Sigma$, $\overline{B}=\overline{\mathbb{C}}\setminus F(U^-)$ – дополнение образа U^- при отображении $w=F(z)$, $Q(w)$ – голоморфная функция на $\overline{B}$, отличная от постоянной, то

$$\sum_{q=1}^{\infty} q|\omega_q|^2\leqslant\sum_{p=1}^{\infty} p|\beta_p|^2, \tag{2}$$

где ω_q, β_p – коэффициенты разложения

$$Q(F(z))=\sum_{q=1}^{\infty}\omega_q/z^q+\sum_{p=1}^{\infty}\beta_p z^p$$

в *Лорана ряд* в нек-ром кольце. Знак равенства имеет место в том и только том случае, если площадь множества равна нулю.

Из неравенства (2) можно получить оценки

$$|\ln F'(z)|\leqslant\ln|z|^2/(|z|^2-1),\quad z\in U^-,$$

$$\left|\ln\frac{F(z_1)-F(z_2)}{z_1-z_2}\right|\leqslant\ln\frac{|z_1|^2}{|z_1|^2-1}\ln\frac{|z_2|^2}{|z_2|^2-1},\quad z_1,z_2\in U^-,$$

и ряд других результатов (см. [1]) для класса Σ и классов, связанных с ним взаимно однозначным соответствием.

П. м. распространен на неналегающие односвязные и многосвязные области (см. [1], [2]), на отображения, конформные в области и q-квазиконформные в ее дополнении (см. [4], [6]).

Полученные с использованием П. м. необходимые *однолистности условия* находят применение в качестве критериев разрешимости краевых задач математич. физики с неизвестными границами.

Лит.: [1] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975; [2] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1975; [3] Лебедев Н. А., Милин И. М., «Математич. сб.», 1951, т. 28, № 2, с. 359–400; [4] Гутлянский В. Я., «Доклады АН СССР», 1971, т. 212, № 3, с. 540–43; [5] Gronwall T. H., «Ann. Math.», Ser. 2, 1914/1915, v. 16, p. 72–76; [6] Lehto O., «Ann. Acad. Sci. Fenn.», Ser. Al., 1971, № 500, p. 3–10.

И. А. Александров.

ПЛОЩАДЕЙ ТЕОРЕМА – см. *Площадей метод.*

ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – функция $u=u(z)$ от n комплексных переменных $z=(z_1,\ldots,z_n)$ в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, имеющая в D непрерывные частные производные по координатам x_ν, y_ν, $z_\nu=x_\nu+iy_\nu$, $\nu=1,\ldots,n$, до 2-го порядка включительно и удовлетворяющая в D системе n^2 уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial x_\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu\partial y_\nu}=0,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial y_\nu}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu\partial x_\nu}=0,\end{aligned}\right\}\quad \mu,\nu=1,\ldots,n. \tag{1}$$

Применяя формальные производные

$$\frac{\partial u}{\partial z_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}-i\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial\bar z_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}+i\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right),$$

можно записать систему (1) в более компактной форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\mu\partial\bar z_\nu}=0,\quad \mu,\nu=1,\ldots,n. \tag{2}$$

Значение класса П. ф. определяется тем, что действительная и мнимая части $u=\mathrm{Re}\,f$, $v=\mathrm{Im}\,f$ любой голоморфной в области D функции $f=u+iv$ являются П. ф. в D; такие две (действительные) П. ф. называются сопряженными. Обратно, если дана П. ф. u в окрестности V точки $z^0=x^0+iy^0\in\mathbb{C}^n$, то в этой окрестности существует голоморфная функция $f=u+iv$, действительная часть к-рой равна u. Задача определения этой голоморфной функции f сводится к нахождению сопряженной П. ф. v по формуле

$$v(z)=\int_{z^0}^{z}\sum_{\nu=1}^{n}\left(-\frac{\partial u}{\partial y_\nu}dx_\nu+\frac{\partial u}{\partial x_\nu}dy_\nu\right)+C,\quad z\in V,$$

где интеграл не зависит от пути в силу (1).

Вообще говоря, рассматриваются сами по себе и комплексные П. ф., определяемые как решения системы (1) или (2). При $n>1$ П. ф. составляют правильный подкласс класса *гармонических функций.*

Кроме общих свойств гармонич. функций П. ф. при $n>1$ обладают характерными свойствами, обусловленными в основном переопределенностью системы (1) или (2) в этом случае. Пусть, напр., при $n>1$ П. ф. $u(z)$ в единичном поликруге

$$U^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu|<1,\ \nu=1,\ldots,n\}$$

непрерывна в замкнутом поликруге $\overline{U}^n$. При этом даже ее граничные значения на остове

$$T^n=\{\zeta\in\mathbb{C}^n:|\zeta_\nu|=1,\ \nu=1,\ldots,n\},$$

являющемся правильной частью всей границы ∂U^n, не могут быть заданы в виде произвольной непрерывной функции $U^*(\zeta)$, $\zeta\in T^n$, – они удовлетворяют определенным дополнительным условиям. Таким образом, задача Дирихле в классе П. ф. с данными на остове разрешима лишь при специально подобранных граничных данных.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – действительная функция $u=u(z)$, $-\infty\leqslant u<+\infty$, n комплексных переменных $z=(z_1,\ldots,z_n)$ в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$: $n\geqslant 1$, удовлетворяющая условиям: 1) $u(z)$ полунепрерывна сверху всюду в D; 2) $u(z^0+\lambda a)$ есть *субгармоническая функция* переменного $\lambda\in\mathbb{C}$ в каждой связной компоненте открытого множества $\{\lambda\in\mathbb{C}:z^0+\lambda a\in D\}$ для любых фиксированных точек $z^0\in D$, $a\in\mathbb{C}^n$. Функция $v(z)$ называется плюрисупергармонической функцией, если $-v(z)$ есть П. ф. Плюрисубгармонич. функции при $n>1$ составляют правильный подкласс класса субгармонич. функций, а при $n=1$ эти два класса совпадают. Наиболее важные примеры П. ф.: $\ln|f(z)|$, $\ln^+|f(z)|$, $|f(z)|^p$, $p\geqslant 0$, где $f(z)$ – голоморфная функция в D.

Для того чтобы полунепрерывная сверху в области $D\subset\mathbb{C}^n$ функция $u(z)$, $u(z)<+\infty$, была П. ф., необходимо и достаточно, чтобы для любых фиксированных $z\in D$, $a\in\mathbb{C}^n$,

$|a|=1$ существовало число $\delta=\delta(z,\ a)>0$ такое, что при $0<r<\delta$ выполняется неравенство

$$u(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{i\varphi}a)\,d\varphi.$$

Для функций $u(z)$ класса $C^2(D)$ более удобен следующий критерий: $u(z)$ есть П. ф. в D тогда и только тогда, когда эрмитова форма (гессиан функции u)

$$H((z;u)\,a,\bar{a})=\sum_{j,\,k=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial z_j\,\partial\bar{z}_k}a_j\,a_k$$

неотрицательно определена в каждой точке $z\in D$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ПЛЮРИСУПЕРГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Плюрисубгармоническая функция.*

ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЯ – раздел геометрии, изучающий топологические и метрические свойства и внешнее строение (форму) поверхностей в евклидовых и, в общем случае, в римановых и псевдоримановых пространствах; для большей наглядности и краткости изложения ниже предполагается, что объемлющее пространство является евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$.

Само определение объекта исследования – поверхности – может быть различным. Наиболее часто встречаются следующие два варианта.

1) Поверхность понимается как множество точек в $\mathbb{R}^n$, координаты к-рых удовлетворяют нек-рой системе уравнений

$$f_i(x^1,\ \ldots,\ x^n)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m<n;$$

в таком виде поверхности встречаются, напр., как поверхности уровня, первые интегралы систем дифференциальных уравнений, поверхности раздела сред, области изменения переменных в задачах условного экстремума и т. д.

2) Поверхность можно понимать как отображение f нек-рого многообразия M в $\mathbb{R}^n$ (параметрически заданные поверхности); в этом случае поверхность представляется как параметризованное множество точек в $\mathbb{R}^n$, для к-рых так наз. внутренние координаты u^i определяют положение точки x на M (в локальной карте), а через x и $f(x)$ – положение точки на $S=f(M)\subset\mathbb{R}^n$.

Среди геометрич. свойств поверхности различают внутренние и внешние свойства. Внутренняя геометрия поверхности S описывает те ее свойства, к-рые зависят только от метрики поверхности. В свою очередь, метрики на S имеют два возможных источника своего происхождения: а) поверхность S задана заранее, напр., одним из указанных выше способов и метрика на ней тогда индуцируется через измерение длин кривых по закону метрики объемлющего пространства (расстояние между точками на S определяется как inf длин кривых на S, соединяющих эти точки); б) поверхность S получена изометрич. отображением риманова многообразия M в $\mathbb{R}^n$; в этом случае говорят, что поверхность S реализует в $\mathbb{R}^n$ метрику риманова многообразия M.

Проблема изометрич. погружения в $\mathbb{R}^n$ данного риманова многообразия является одной из центральных задач дифференциальной геометрии, и для классич. случая (погружение двумерного риманова многообразия в трехмерное евклидово пространство) решение ее дано с достаточной полнотой для метрик с кривизной $K>0$, $K<0$ и $K=0$, а для случаев знакопеременной кривизны известны лишь отдельные результаты. По поводу гладкости погружений есть общий результат, утверждающий, что поверхность S (любой размерности) гладкости $C^{m,\,\alpha}$, $m\geqslant 2$, $0<\alpha<1$, в произвольном римановом пространстве той же гладкости $C^{m,\,\alpha}$ имеет метрику риманова многообразия гладкости $C^{m,\,\alpha}$, следовательно, данное риманово многообразие M гладкости $C^{m,\,\alpha}$ нельзя изометрически погрузить в $\mathbb{R}^n$ поверхностью гладкости больше, чем $C^{m,\,\alpha}$.

Внутренняя геометрия поверхности не изменяется при ее изометрич. преобразованиях, в частности при ее изгибаниях. К ней относятся такие важные понятия, как длина кривой, угол между кривыми, площадь и объем, параллельный перенос векторов, геодезические и кратчайшие линии, градиент скалярного поля, тензор кривизны и т. д. Все эти величины и объекты можно определить, зная лишь *первую квадратичную форму* поверхности S, задаваемую во внутренних координатах u^i в виде

$$ds^2=g_{ij}(u)du^idu^j,$$

где дважды ковариантное тензорное поле g_{ij} или вычисляется по уравнению S в $\mathbb{R}^n$ или оно задано заранее, если S определена как изометрич. погружение риманова многообразия M в $\mathbb{R}^n$.

Внешняя геометрия поверхности связана с формой (внешним видом) расположения поверхности в пространстве. Важнейшей ее характеристикой является *вторая квадратичная форма* поверхности, выражающая, кратко говоря, разность ковариантного дифференцирования векторных полей на поверхности по закону метрики окружающего пространства и метрики самой поверхности. Эта форма определяет характер искривленности поверхности в пространстве, в частности, через ее коэффициенты можно вычислять кривизны линий на поверхности, ввести такие понятия, как главные кривизны, средняя кривизна, асимптотич. линии, эллипс кривизны и т. д. Она позволяет также исследовать расположение поверхности по отношению к касательной плоскости и аппроксимировать поверхность ее соприкасающимся параболоидом, в соответствии с классификацией точек поверхности как точки эллиптические (точки выпуклости), гиперболические (или седловые), параболические с обобщением этих типов точек на многомерные случаи.

Первая и вторая квадратичные формы определяют поверхность однозначно с точностью до движения в пространстве. Задавать, однако, эти формы заранее нельзя: их коэффициенты связаны так наз. основными уравнениями теории поверхностей.

Дополнительные требования на внешнее строение поверхности приводят к различного рода конкретным классам поверхностей – минимальные поверхности, выпуклые поверхности, развертывающиеся поверхности, поверхности вращения, линейчатые поверхности и т. д. На существование и свойства поверхностей в целом существенное влияние имеет их топологич. строение. Топология поверхности важна также для теории функций и дифференциальных уравнений на поверхности.

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, М., 1986.

И. Х. Сабитов.

ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТ – см. *Минимальная поверхность.*

ПОВОРОТА ТОЧКА – точка x_0 для уравнения

$$\varepsilon^2y''+q(x)y=0 \qquad (1)$$

такая, что $q(x_0)=0$. П. т. называется простой, если $q'(x_0)\neq 0$, и кратности m, если $q^{(j)}(x_0)=0$, $j\leqslant m-1$, $q^{(m)}(x_0)\neq 0$. Пусть на отрезке $I=[a,\ b]$ имеется ровно одна П. т. x_0, $a<x_0<b$, $q\in C^\infty(I)$ и она вещественна. Тогда асимптотика решений уравнения (1) при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $x\in I$) выражается через функции Эйри при $m=1$ и через функции Бесселя при $m\geqslant 2$ (см. [1], [2]). Для уравнения

$$\varepsilon^2y''+q(x,\ \varepsilon)y=0, \qquad (2)$$

имеются два определения П. т.:

1) $q(x_0,\ 0)=0$;

2) $q(x_0(\varepsilon),\ \varepsilon)=0$ и П. т. называется **простой,** если $q'_x(x_0,\ 0)\neq 0$.

Для простой П. т. асимптотика решений уравнений (2) в окрестности П. т. также выражается через функции Эйри, для кратной (в общем случае) – через решения уравнения вида:

$$\omega''+Q(x)\omega=0,$$

где Q – многочлен с не зависящими от ε коэффициентами (см. [3], [4]). Для системы из n уравнений

$$\varepsilon y' = A(x)y \qquad (3)$$

точка x_0 называется простой, если матрица $A(x_0)$ имеет кратное собственное значение, и в простейших случаях асимптотика решений (3) при $\varepsilon \to +0$ в окрестности П. т. известна (см. [4]).

Для системы вида

$$\varepsilon y' = A(x, \varepsilon)y$$

имеются два определения П. т., как и для (2). П. т. называется также точкой перехода, или точкой поворота.

См. также *Асимптотический ряд* в квантовой механике.

Лит.: [1] Langer R. E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 36, p. 90–106; [2] Дородницын А. А., «Успехи математич. наук», 1952, т. 7, в. 6, с. 3–96; [3] Olver F. W. J., Asymptotics and special functions, N. Y.– L., 1974; [4] Федорюк М. В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1983. *М. В. Федорюк.*

ПОВОРОТНОЕ УСКОРЕНИЕ – см. *Кориолиса ускорение.*

ПОГЛОЩАЮЩАЯ ОБЛАСТЬ – см. *Аттрактор.*

ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН – см. *Звуковые волны.*

ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МЕТОД – метод исследования решений дифференциальных уравнений вблизи границы области в том случае, когда поведение решения в малой окрестности границы (в пограничном слое) существенно отличается от поведения внутри области. Термин «пограничный слой» возник в гидродинамике в связи с рассмотрением задачи об обтекании тела жидкостью с малой вязкостью. Вязкая жидкость прилипает к телу, и поэтому в тонком слое, прилегающем к границе тела, течение жидкости существенно отличается от течения вне пограничного слоя, где влияние вязкости незначительно. Уравнение движения жидкости с малой вязкостью (уравнение Навье–Стокса) представляет собой дифференциальное уравнение с частными производными с малым множителем (малым параметром) при старших производных, к-рый характеризует малую вязкость.

В дальнейшем термин «пограничный слой» распространился и на другие задачи для уравнений с малыми параметрами при производных. Такие уравнения принято называть сингулярно возмущенными. Они выступают в качестве математич. моделей при исследовании разнообразных процессов в естествознании и технике: в задачах гидродинамики, химич. кинетики, физики полупроводников, тепло- и массопереноса, теории тонких оболочек, синергетики и многих др. Для сингулярно возмущенных уравнений характерно существование узких зон, в к-рых происходит резкое изменение решения. Такие зоны возникают как вблизи границы (пограничный слой), так и внутри области (внутренний переходный слой). Конкретные физич. задачи с пограничными слоями исследовались еще в работах П. Лапласа (P. Laplace), К. Максвелла (C. Maxwell), Г. Кирхгофа (G. Kirchhoff) в 19 в. Систематическое же исследование сингулярно возмущенных задач началось после появления основополагающей работы А. Н. Тихонова [1], в к-рой была доказана теорема о предельном переходе при $\mu \to 0$ от решения системы уравнений

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z,y,t), \quad z(0) = z^0, \quad y(0) = y^0, \qquad (1)$$

к решению вырожденной системы

$$0 = F(\bar z, \bar y, t), \quad \frac{d\bar y}{dt} = f(\bar z, \bar y, t), \quad \bar y(0) = y^0.$$

Следующим шагом явилось построение (см. [2]) полного асимптотич. разложения решения

$$x(t, \mu) = (z(t, \mu), y(t, \mu))$$

задачи (1):

$$x(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\bar x_k(t) + \prod\nolimits_k x(\tau)\right), \quad \tau = t/\mu. \qquad (2)$$

Здесь $\bar x_k(t)$ – члены регулярного ряда, в частности $\bar x_0(t) = (\bar z(t), \bar y(t))$ – решение вырожденной задачи, $\Pi_k x(\tau)$ – пограничные функции, описывающие поведение решения в пограничном слое вблизи точки $t = 0$.

В развитии П. с. м. для уравнений с частными производными важную роль сыграла работа [3], в к-рой предложен метод построения погранслойных разложений типа (2) для широкого класса сингулярно возмущенных задач. Основная идея метода состоит во введении растянутой переменной, изменяющейся вдоль нормали к границе области [роль такой переменной в (2) играет τ], и построении пограничных функций как решений (как правило) обыкновенных дифференциальных уравнений с растянутой переменной в качестве независимой переменной.

Для решения сингулярно возмущенных задач с пограничным слоем развиты различные методы: метод угловых пограничных функций, метод согласования, метод регуляризации, метод исследования релаксационных режимов, методы типа ВКБ и др.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Математич. сб.», 1952, т. 31, № 3, с. 575–86; [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973; [3] Вишик М. И., Люстерник Л. А., «Успехи математич. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 3–122. *В. Ф. Бутузов.*

ПОГРЕШНОСТЬ – см. *Анализ данных.*

ПОГРУЖЕНИЕ многообразия N^n – гладкое отображение $f\colon N^n \to M^m$ многообразия N^n в многообразие M^m такое, что его дифференциал

$$f_*\colon T_x N^n \to T_{f(x)} M^m$$

– мономорфизм для произвольной точки $x \in N^n$, то есть f_* индуцирует изоморфизм пространства $T_x N^n$ на подпространство $f_*(T_x N^n) \subset T_{f(x)} M^m$.

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, М., 1986. *В. В. Трофимов.*

ПОДВЕСА ТОЧКА – см. *Лагранжа – Пуассона случай.*

ПОДВИЖНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА – см. *Кинетика.*

ПОДВИЖНАЯ ЦЕНТРОИДА – см. *Твердое тело*; плоское движение.

ПОДВИЖНЫЙ АКСОИД – см. *Винтовое движение, Вращательное движение.*

ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА – см. *Грина формулы.*

ПОДМНОГООБРАЗИЕ многообразия M^n – подмножество A такое, что каждая точка из A принадлежит области определения такой карты (φ, U), что $U \cap A = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k)$, где $(x^1, \ldots, x^n)$ – множество точек, у которых последние $n-k$ координат равны нулю. Отображения $\varphi | U \cap A : U \cap A \to \mathbb{R}^k$ составляют атлас П. A, число $n-k$ называют его коразмерностью. Другими словами, П. Y многообразия X имеет окрестность в X, устроенную вроде «трубчатой» окрестности у гладкой кривой в трехмерном пространстве. *М. И. Войцеховский.*

ПОДОБИЕ – см. *Масштабная инвариантность.*

ПОДОБИЯ ТЕОРИЯ МОНИНА – ОБУХОВА – см. *Монина – Обухова теория подобия.*

ПОДПРЕДСТАВЛЕНИЕ – см. *Представление* группы.

ПОДПРОСТРАНСТВО – см. *Векторное пространство.*

ПОДСТАНОВОК ГРУППА – см. *Группа.*

ПОКАЗАТЕЛЬ особости фазы – сумма *показателя* осцилляции фазы и числа $n/2$, где n – число переменных голоморфной фазы.

См. также *Стационарной фазы метод.* *С. В. Чмутов.*

ПОКАЗАТЕЛЬ осцилляции фазы – порядок главного члена асимптотики *осциллирующего интеграла.* В окрестности критич. точки x аналитич. фазы f осциллирующий интеграл разлагается в асимптотич. ряд (см. *Стационарной фазы метод*):

$$\exp(i\tau f(x)) \sum\nolimits_\alpha \sum\nolimits_k a_{k,\alpha}(\varphi)\tau^\alpha (\ln \tau)^k \quad \text{при} \quad \tau \to \infty.$$

Показателем называется максимальное число среди таких чисел α, что для любой окрестности точки x найдется амплитуда φ с носителем в этой окрестности и число k, для к-рых $a_{k,\alpha}(\varphi) \neq 0$. *С. В. Чмутов.*

ПОКОЛЕНИЯ ФЕРМИОНОВ – сходные по свойствам группы (семейства) частиц – *кварков* и *лептонов*:

$$(\nu_l, l^-, u, d), (\nu_\mu, \mu^-, c, s), (\nu_\tau, \tau^-, t, b).$$

Соответствующие частицы из каждого П. ф. имеют одни и те же *квантовые числа* относительно группы симметрии электрослабого взаимодействия и отличаются только массами: каждое следующее П. ф. тяжелее предыдущего. Указанные три поколения содержат все известные в настоящее время кварки и лептоны.

Приведем состав первого П. ф., в к-ром частицы разбиты на дублеты и синглеты по группе $SU(2)$ электрослабого взаимодействия:

$$\left\|\begin{matrix}\nu_l \\ l^-\end{matrix}\right\|_L, \quad l_R^-, \quad \left\|\begin{matrix}u \\ d\end{matrix}\right\|_L, \quad u_R, \quad d_R,$$

где l_L, l_R, ...– соответственно левое (L) и правое (R) электронные и т. д. киральные поля (см. *Киральная симметрия*). Так как кварки образуют триплеты по группе *цвета* сильного взаимодействия, то в каждом П. ф. насчитывается 15 двухкомпонентных вейлевских спиноров.

В связи с существованием П. ф. теория должна ответить на два вопроса: почему фермионы объединяются в поколения и почему поколения повторяются? *Великого объединения модели* дают удовлетворительный ответ на первый вопрос. В простейшей $SU(5)$-модели 15 фермионов разбиваются на представления 5 и 10 (см. *Представление* группы). В схеме, основанной на группе $SU(10)$, фундаментальные фермионы преобразуются по спинорному представлению, имеющему размерность 16, и предсказывается существование правого нейтрино (что не противоречит эксперименту). Таким образом, каждое П. ф. в такой модели содержит 16 двухкомпонентных частиц. В теориях, основанных на группах более высокого ранга, предсказывается существование большего числа частиц в поколении; напр., в случае группы E_6 – 27 частиц. Второй вопрос пока остается открытым и считается одним из основных в физике элементарных частиц. Вопрос этот возник еще в эпоху открытия мюона μ^- и формулировался так: зачем нужен μ^- и почему его масса сильно отличается от электронной, хотя все его известные взаимодействия такие же, как у электрона? Наиболее простым является предположение, что кварки и лептоны – составные объекты и все последующие поколения являются возбужденными состояниями первого. Частицы, из к-рых «построены» лептоны и кварки, получили название *преонов*. Попытки реализации такой возможности наталкиваются на противоречие между сравнительно небольшими расстояниями между уровнями в спектре связанных состояний (для заряженных лептонов $m_l \approx 0{,}5$ МэВ, $m_\mu \approx 105$ МэВ, $m_\tau \approx 1{,}7$ ГэВ) и отсутствием *формфакторов* у лептонов и кварков вплоть до максимально достижимых энергий (то есть до $10^2 - 10^3$ ГэВ). Экономной и последовательной преонной схемы пока нет. Другой, более глубокий подход связан с теориями типа *Калуцы – Клейна теории*. При этом исходной является единая квантовая теория поля, обладающая высокой симметрией в многомерном пространстве-времени, из к-рой в результате компактификации образуется наш 4-мерный мир. Компактификация – это динамич. механизм, в результате к-рого по нек-рым измерениям в исходном пространстве размерности D спонтанно образуется компактное многообразие размерности $D-4$, а оставшиеся 4 измерения соответствуют реальному пространству-времени. Степени свободы, отвечающие компактифицированным $D-4$ измерениям, отражаются во внутренних симметриях реального мира. Размер компактного многообразия очень мал ($R \sim \hbar/m_{Pl}c \sim 10^{-33}$ см, где $m_{Pl} \approx 10^{19}$ ГэВ/c^2 – так наз. Планка масса, характеризующая обратную константу гравитационного взаимодействия). Большинство частиц в таких схемах оказываются тяжелыми, с массами порядка планковской. Количество безмассовых в этом масштабе частиц, а следовательно, и число поколений определяются геометрией компактного многообразия. В популярных современных моделях, порождаемых теорией *суперструн* в 10-мерном пространстве-времени, предсказывается существование четырех поколений, каждое из к-рых состоит из 27 частиц.

Лит.: [1] Окунь Л. Б., Лептоны и кварки, 2 изд., М., 1990; [2] Witten E., «Nucl. Phys.», 1981, v. B 186, p. 412. *М. И. Высоцкий.*

ПОКОЯ МАССА – см. *Масса, Релятивистская механика.*

ПОКОЯ ЭНЕРГИЯ – см. *Масса, Релятивистская механика.*

ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ порядка m – комплексная функция $w = u + iv$ действительных переменных x и y или, что эквивалентно, независимых комплексных переменных $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ в плоской области D, представимая в виде

$$w = f(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k f_k(z), \qquad (1)$$

где $f_k(z)$, $k = 0, \ldots, m-1$,– комплексные аналитические функции в D. Иначе, П. ф. w порядка m можно определить как функцию, имеющую в D непрерывные частные производные по x и y или по z и $\bar{z}$ до порядка m включительно и удовлетворяющую всюду в D обобщенному условию Коши – Римана:

$$\frac{\partial^m w}{\partial \bar{z}^m} = 0.$$

При $m = 1$ получаются *аналитические функции*.

Для того чтобы функция $u = u(x, y)$ была действительной (или мнимой) частью нек-рой П. ф. $w = u + iv$ в области D, необходимо и достаточно, чтобы u была *полигармонической функцией* в D. На П. ф. переносятся с соответствующими изменениями нек-рые классич. свойства аналитич. функций. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, гипергармоническая функция, метагармоническая функция, порядка m – функция

$$u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$$

действительных переменных, определенная в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеющая непрерывные частные производные до $2m$-го порядка включительно и удовлетворяющая всюду в D полигармоническому уравнению

$$\Delta^m u \equiv \Delta(\Delta(\ldots(\Delta u))) = 0, \; m \geqslant 1,$$

где Δ – оператор Лапласа. При $m = 1$ получаются *гармонические функции*, при $m = 2$ – *бигармонические функции*. Каждая П. ф. есть аналитич. функция от координат x_j. Нек-рые другие свойства гармонич. функций также переносятся с соответствующими изменениями на П. ф.

Для П. ф. любого порядка $m > 1$ обобщаются представления при помощи гармонич. функций, известные для бигармонич. функций (см. [1]–[5]). Напр., для П. ф. u двух переменных справедливо представление

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{m-1} r^{2k} \omega_k(x_1, x_2), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

где ω_k, $k = 0, \ldots, m-1$, – гармонич. функции в области D. Для того чтобы функция $u(x_1, x_2)$ двух переменных была П. ф., необходимо и достаточно, чтобы она была действительной (или мнимой) частью *полианалитической функции*.

Основная краевая задача для П. ф. порядка $m > 1$ состоит в следующем: найти П. ф. $u = u(x)$ в области D, непрерывную вместе с производными до $(m-1)$-го порядка включи-

тельно в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$ и удовлетворяющую на границе C условиям:

$$\left.\begin{aligned} u|_C &= f_0(y), \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C &= f_1(y), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\Big|_C = f_{m-1}(y), \quad y \in C, \end{aligned}\right\}$$

где $\partial u/\partial n$ – производная по нормали к C, а $f_0(y)$, ..., $f_{m-1}(y)$ – заданные достаточно гладкие функции на достаточно гладкой границе C.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.– Л., 1948. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Полигармоническая функция.*

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ – см. *Обратной задачи рассеяния метод.*

ПОЛНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – совокупность всех элементов аналитической функции, получающихся при всевозможных *аналитических продолжениях* исходной аналитической функции $f=f(z)$ комплексного переменного z, заданной первоначально в некоторой области D расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Пара (D, f), состоящая из области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и заданной в D однозначной аналитической, или голоморфной, функции f, называется элементом аналитической функции, аналитическим элементом, или, короче, просто элементом. Всегда возможно, в частности, при задании аналитич. функции пользоваться круговым элементом $(U(a, R), f_a)$, состоящим при $a \neq \infty$ из степенного ряда

$$f_a = f_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (1)$$

и круга сходимости $U(a, R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z-a| < R\}$ этого ряда с центром a и радиусом сходимости $R > 0$. В случае $a = \infty$ круговой элемент $(U(\infty, R), f_\infty)$ состоит из ряда

$$f_\infty = f_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \qquad (2)$$

и области сходимости этого ряда $U(\infty, R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R\}$, $R \geqslant 0$.

Пусть E_f – множество всех тех точек $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$, в к-рые исходный элемент $(U(a, R), f_a)$ аналитически продолжается хотя бы по одному пути, связывающему в $\overline{\mathbb{C}}$ точки a и ζ. Следует иметь в виду возможность такой ситуации, когда в точку $\zeta \in E_f$ аналитич. продолжение возможно вдоль нек-рого класса путей L_1 и невозможно вдоль другого класса путей L_2. Множество E_f есть область плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Полной аналитической функцией (в смысле Вейерштрасса) f_W, порожденной элементом $(U(a, R), f_a)$, называется совокупность всех круговых элементов $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, $\zeta \in E_f$, получаемых при этом аналитич. продолжении вдоль всевозможных путей $L \subset \overline{\mathbb{C}}$. Область E_f называется (вейерштрассовой) областью существования П. а. ф. f_W. Применяя элементы общего вида (D, f), вместо круговых на самом деле получают ту же самую П. а. ф. f_W. Элементы (D, f) П. а. ф. f_W часто называют *ветвями аналитической функции* f_W. Любой элемент (D, f) П. а. ф. f_W, будучи взят за исходный при аналитич. продолжении, приводит к той же самой П. а. ф. f_W. Каждый элемент $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ П. а. ф. f_W может быть получен из любого другого ее элемента $(U(a, R), f_a)$ посредством аналитич. продолжения вдоль нек-рого пути, связывающего в $\overline{\mathbb{C}}$ точки a и ζ.

Может оказаться, что исходный элемент (D, f) не допускает аналитич. продолжения ни в одну точку $\zeta \notin D$. В этом случае $D = E_f$ является естественной областью существования, или областью голоморфности, функции f, а ее граница $\Gamma = \partial D$ – естественной границей функции f. Напр., для кругового элемента

$$\left(U(0, 1), f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}\right)$$

естественной границей является окружность

$$\Gamma = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| = 1\}$$

его круга сходимости $U(0, 1)$, так как этот элемент нельзя продолжить аналитически ни в одну точку ζ такую, что $|\zeta| \geqslant 1$. Какова бы ни была область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, можно построить аналитич. функцию $f_D(z)$, для к-рой D есть естественная область существования $f_D(z)$, а ее граница $\Gamma = \partial D$ – естественная граница $f_D(z)$. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ – см. *Система в инволюции.*

ПОЛНАЯ КРИВИЗНА – величина, равная произведению *главных кривизн* поверхности.

ПОЛНАЯ СИСТЕМА первых интегралов – см. *Первый интеграл.*

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ – см. *Ортогональная система функций.*

ПОЛНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА – см. *Грина функция* в квантовой теории поля.

ПОЛНЫЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Дифференциальное уравнение* с частными производными второго порядка.

ПОЛНЫЙ РЕЗОНАНС – см. *Многоволновые процессы.*

ПОЛНЫЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Эллиптический интеграл.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ энергии гравитационного поля – свойство положительности полной энергии изолированной гравитирующей системы с неотрицательной локальной плотностью материи. Наиболее последовательное определение энергии гравитационного поля дается в рамках *гамильтонова формализма* общей теории относительности; при этом полная энергия может быть выражена через асимптотику гравитационного поля.

Пусть N – 4-мерное многообразие с метрикой $g_{\alpha\beta}$ сигнатуры $- + + +$, $R_{\alpha\beta}$ – кривизна Риччи, R – скалярная кривизна, $T_{\alpha\beta}$ – симметрич. тензор энергии–импульса материи, так что выполнены уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta}.$$

Предполагается, что задана полная пространственно-подобная трехмерная гиперповерхность $M \subset N$ (поверхность начальных данных) такая, что дополнение $\widetilde{M} = M \setminus K$ к нек-рому компактному подмножеству K диффеоморфно дополнению шара в $\mathbb{R}^3$, и в индуцированных декартовых координатах метрика в $\widetilde{M}$ имеет вид:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-1}), \ \partial_k g_{ij} = O(r^{-2}), \ \partial_k \partial_l g_{ij} = O(r^{-3});$$

кроме того, вторая фундаментальная форма π_{ij} поверхности $\widetilde{M} \subset N$ удовлетворяет условиям

$$\pi_{ij} = O(r^{-2}), \ \partial_k \pi_{ij} = O(r^{-3}).$$

Эти асимптотич. условия отражают изолированность гравитирующей системы; при этом говорят, что N асимптотически плоско вдоль M.

Полная энергия E и полный импульс P_k определяются как пределы интегралов по сферам S_r радиуса r в $\widetilde{M}$:

$$E = \lim_{r \to \infty} \int_{S_r} (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}) \, ds_i,$$

$$P_k = \lim_{r \to \infty} \int_{S_r} 2(\pi_{ik} - \delta_{ik} \pi_{jj}) \, ds_i.$$

Далее предполагается, что $T_{\alpha\beta}$ удовлетворяет локальному условию положительности энергии $T_{00} \geqslant (T_{0i} T_0^i)^{1/2}$ в любой локальной лоренцевой системе координат.

Теорема о П. о. энергии утверждает, что при этих условиях $E \geqslant |P|$, и если $E=0$, то пространство N плоское. Более общая формулировка этой теоремы допускает наличие у N нескольких асимптотически плоских рукавов. В важном специальном случае шварцшильдовской асимптотики

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{m}{4\pi r}\right)\frac{x_i x_j}{r^2} + O(r^{-2})$$

имеет место $E=m$. *А. Г. Рейман.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ при отражении – свойство квазисостояния (или состояния), заданного на полевой алгебре и описывающего евклидово поле на $\mathbb{R}^{\nu+1}$ или на $\mathbb{Z}^{\nu+1}$. Пусть $\{a(\varphi), \varphi \in D(\mathbb{R}^{\nu+1}, K)\}$ – семейство образующих полевой алгебры ε, помеченных элементами нек-рого векторного пространства функций φ, определенных на $\mathbb{R}^{\nu+1}$ со значениями в (конечномерном) векторном пространстве K. Пусть отражение во времени

$$\vartheta : x = (x^0, x^1, \ldots, x^\nu) \to (-x^0, x^1, \ldots, x^\nu)$$

порождает автоморфизм в $D(\mathbb{R}^\nu, K)$:

$$(\vartheta\varphi)(x) = I\varphi(\vartheta x),$$

где I – антилинейная инволюция в K, и, затем, антилинейную инволюцию в ε, действующую на образующие по формуле

$$\theta a(\varphi) = a(\vartheta\varphi)$$

и продолжающуюся на всю алгебру ε с помощью соотношения

$$\theta(AB) = \theta(A)\theta(B), \quad A, B \in \varepsilon.$$

Квазисостояние (то есть линейный функционал $\langle\cdot\rangle$ на ε такой, что $\langle\mathbb{1}\rangle = 1$) называется положительным при отражении, или положительным по Остервальдеру – Шрадеру (*OS*-положительным), если:

1) оно инвариантно относительно θ:

$$\langle\theta F\rangle = \overline{\langle F\rangle}, \ F \in \varepsilon;$$

2) для любого $F \in \varepsilon_+$, $\langle F, \theta F\rangle \geqslant 0$, где $\varepsilon_+ \subset \varepsilon$ – подалгебра, порожденная образующими $\{a(\varphi)\}$, у к-рых

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_+^{\nu+1} = \{x : x^0 \geqslant 0\}$$

(подалгебра «будущего»).

Свойство *OS*-положительности позволяет ввести «физическое» гильбертово пространство поля

$$\mathcal{H}_{\text{физ}} = \overline{\varepsilon_+ / N}, \qquad (1)$$

где $N = \{F \in \varepsilon_+ : \langle F, \theta F\rangle = 0\}$ – нулевое подпространство со скалярным произведением в ε_+/N:

$$([F], [G]) = \langle F, \theta G\rangle$$

($[F]$ – класс элемента $F \in \varepsilon_+$ при факторизации ε_+/N; черта в (1) означает пополнение по этому скалярному произведению).

Семейство отображений

$$U_\tau : \mathcal{H}_{\text{физ}} \to \mathcal{H}_{\text{физ}}, \ \tau > 0,$$

порождаемых сдвигами $U_\tau : \varepsilon_+ \to \varepsilon_+$, действующими на образующие $U_\tau a(\varphi) = a(\varphi + \tau)$ ($\varphi + \tau$ – сдвиг функции φ на величину τ вдоль направления «времени»), является сжимающей полугруппой в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$, и ее генератор H называется гамильтонианом поля.

Лит.: [1] Osterwalder K., Schrader R., «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 31, p. 83–112, 1975, v. 42, p. 281–305. *Р. А. Минлос.*

ПОЛОИДАЛЬНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ПОЛОСА ПЕРИОДОВ – см. *Периодическая функция, Двоякопериодическая функция.*

ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ в римановом многообразии (M^n, g_{ij}) – координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ такие, что метрический тензор в них имеет вид:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta + (dx^n)^2,$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1$. Эти координаты допускают следующее геометрич. описание. Координатные линии для координаты x^n суть геодезические, вдоль к-рых x^n служит длиной дуги, причем эти геодезические ортогонально пересекают координатные гиперповерхности $x^n = \text{const}$. На двумерном многообразии П. к. иногда называют полярными.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967. *В. В. Трофимов.*

ПОЛУГРУППА – множество M, для любых двух элементов m_1, m_2 которого определено их произведение $m_1 m_2$, причем

$$(m_1 m_2)m_3 = m_1(m_2 m_3),$$

то есть определяемая операция ассоциативна. В математич. физике встречается ряд интересных примеров П., не являющихся *группами*.

Однопараметрические полугруппы. Пусть $0 \leqslant t < \infty$. Семейство ограниченных операторов $T(t)$ в банаховом пространстве V называется однопараметрической полугруппой, если: а) $T(1) = E$, где E – единичный оператор; б) $T(t+s) = T(t)T(s)$; в) для любого $x \in V$ отображение $t \to T(t)x$ непрерывно. Генератором полугруппы $T(t)$ называется оператор

$$Av = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}(T(\varepsilon) - E)v.$$

Оператор A является генератором однопараметрич. сжимающей П. (то есть $\|T(t)\| \leqslant 1$) тогда и только тогда, когда выполнены два условия: 1) область определения оператора A плотна; 2) для любого s, $-\infty < s < 0$, оператор $(s-A)^{-1}$ существует и $\|(s-A)^{-1}\| \leqslant s^{-1}$ (теорема Хилле – Иосиды). Естественно считать, что $T(t) = \exp(tA)$. Замкнутый плотно определенный оператор A в гильбертовом пространстве называется диссипативным, если для любого x из области определения оператора A выполнено неравенство $\operatorname{Re}(Ax, x) \leqslant 0$. Если оператор A диссипативен вместе со своим сопряженным, то A является генератором однопараметрич. П.

Полугруппы Ли. Иногда приходится рассматривать подмножества в *Ли группе*, замкнутые относительно умножения, но не замкнутые относительно взятия обратного элемента. Напр., пусть $\overline{\mathbb{C}}$ – сфера Римана (то есть комплексная плоскость $\mathbb{C}$, к к-рой добавлена точка ∞) и D – круг $|z| < 1$ на $\mathbb{C}$. Тогда конформные преобразования $\overline{\mathbb{C}}$, переводящие круг D в себя, образуют полугруппу Ли Г и она содержит группу $SL_2(\mathbb{R})$ мебиусовских преобразований круга, то есть преобразований вида

$$z \to (\alpha z + \beta)/(\bar\beta z + \bar\alpha),$$

где $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, и содержится в группе $SL_2(\mathbb{C})$ конформных преобразований сферы $\overline{\mathbb{C}}$. Оказывается, что *квадратично интегрируемые представления* группы $SL_2(\mathbb{R})$ продолжаются голоморфно на П. Г. Это позволяет вычислить, в частности, обобщенные характеры представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$.

Бесконечномерные полугруппы. Пусть G – бесконечномерная группа Ли, T – ее представление. Обнаружено, что представление T, как правило, может быть продолжено до представления нек-рой П. $\Gamma \supset G$ (см. [3]). Этот прием оказывается сильным инструментом для исследования представлений бесконечномерных групп.

Лит.: [1] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 2, пер. с англ., М., 1978; [2] Неретин Ю. А., «Математич. сб.», 1978, т. 180, № 5; [3] Ольшанский Г. И., «Функциональный анализ и его прилож.», 1981, т. 15, в. 4, с. 53–66. *Ю. А. Неретин.*

ПОЛУИНВАРИАНТ – см. *Семивариант.*

ПОЛУКРУГОВОЙ ЗАКОН ВИГНЕРА – см. *Вигнера распределение.*

ПОЛУЛОКАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ – см. *Нелокальная бифуркация.*

ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРА ЛИ – см. *Ли алгебра.*

ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ группы K на группу H – *группа* G, являющаяся произведением своих подгрупп KH (то есть любой элемент из G однозначно представим в виде произведения элемента из K на элемент из H), причем H – нормальная подгруппа в G и $H\cap K=\{1\}$. Подгруппа K изоморфна факторгруппе G/H. Однако не обязательно группа разложима в П. п. своей нормальной подгруппы и нек-рой другой.

См. также *Расширение группы.* *Ю. А. Неретин.*

ПОЛУСТОХАСТИЧЕСКОЕ ЯДРО – см. *Марковский процесс.*

ПОЛУТЕНЬ – область вне *каустики* в пространстве дополнительных параметров λ фазы F *осциллирующего интеграла* по полупространству. Точка λ принадлежит П. тогда и только тогда, когда $F(\cdot,\lambda)$ не имеет *критических точек* в полупространстве интегрирования, а ее ограничение на границу имеет хотя бы одну критич. точку. Главный член асимптотики в этом случае имеет порядок $\tau^{-(n+1)/2}$. *С. В. Чмутов.*

ПОЛУТОРАЛИНЕЙНАЯ ФОРМА – см. *Классические группы и алгебры Ли.*

ПОЛУУСТОЙЧИВЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ – см. *Предельный цикл.*

ПОЛУШИРИНА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ – см. *Ширина спектральной линии.*

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ – теоретическое описание *турбулентности* по аналогии с описанием молекулярного хаоса в кинетической теории газов. Основная гипотеза П. т. т.– это линейная зависимость тензора турбулентных напряжений

$$\tau_{jl}=-\rho\langle u_j'u_l'\rangle,$$

где u_j – компоненты скорости, ρ – плотность, штрихи – турбулентные флуктуации, угловые скобки – осреднение, от тензора скоростей деформации осредненного течения

$$\partial\langle u_j\rangle/\partial x_l+\partial\langle u_l\rangle/\partial x_j$$

(коэффициенты этой зависимости имеют смысл коэффициентов турбулентной вязкости; они образуют, вообще говоря, тензор валентности 4, но обычно дополнительно предполагается, что он вырожден и различны только вертикальная и горизонтальная турбулентные вязкости). Аналогичные гипотезы принимаются относительно линейной зависимости турбулентных потоков тепла $q_j=c\rho\langle\theta'u_j'\rangle$ (θ – температура, c – теплоемкость) или примеси $I_j=\rho\langle s''u_j'\rangle$ (s – концентрация) от градиентов осредненных полей $\partial\langle\theta\rangle/\partial x_j$ или $\partial\langle s\rangle/\partial x_j$ (здесь коэффициенты линейных зависимостей суть коэффициенты турбулентной теплопроводности или диффузии соответственно).

По аналогии с длиной свободного пробега молекул вводится «путь перемешивания» l. Напр., в случае горизонтального, горизонтально-однородного плоскопараллельного течения $\langle u\rangle=V(z)$, $\langle v\rangle=\langle w\rangle=0$ полагают $w'=l'\partial V/\partial z$, и кинематич. коэффициенты турбулентного переноса принимают вид:

$$K\sim\langle l'w'\rangle=l^2\partial V/\partial z,$$

турбулентное напряжение

$$\tau=\rho K\partial U/\partial z=\rho l^2(\partial U/\partial z)^2.$$

Для определения величины l Т. Карман (T. Karman, 1930) предложил гипотезу локального кинематического подобия турбулентности, по к-рой

$$l=-\varkappa(\partial V/\partial z)(\partial^2V/\partial z^2)^{-1},$$

где $\varkappa\approx0{,}4$ (с возможными обобщениями при другой геометрии процесса). Такой подход осуществляет замыкание осредненных уравнений гидромеханики турбулентных течений (*Рейнольдса уравнений*). Главным достижением такого подхода явилось установление для $V(z)$ пристеночного логарифмич. закона, при к-ром $l=\varkappa z$ (см. *Турбулентное течение*).

Для замыкания уравнений динамики турбулентности на уровне вторых моментов А. Н. Колмогоров привлек уравнение для турбулентной энергии

$$B=1/2\langle|u'|^2\rangle,$$

в к-ром полагал $K\sim B^{1/2}l$ и $\varepsilon\sim B^{3/2}l^{-1}$, где ε – скорость диссипации турбулентной энергии. Детальные уравнения такого рода для всех вторых моментов предложил И. Ротта (1951); для пограничного слоя атмосферы они применялись А. С. Мониным (1965), для конвективного слоя Солнца – А. С. Мониным и Л. М. Симуни (1980).

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1, М., 1965; [2] Хинце И.-О., Турбулентность, пер. с англ., М., 1963; [3] Таунсенд А. А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, пер. с англ., М., 1959. *А. С. Монин.*

ПОЛЮС – изолированная *особая точка* a однозначного характера аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного z такая, что $|f(z)|$ неограниченно возрастает при приближении к a:

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty.$$

В достаточно малой проколотой окрестности

$$V=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-a|<r\}$$

точки $a\neq\infty$ или

$$V'=\{z\in\mathbb{C}:r<|z|<\infty\}$$

в случае бесконечно удаленной точки $a=\infty$ функция $f(z)$ представима в виде *Лорана ряда* специального вида:

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}c_k(z-a)^k,\quad a\neq\infty,\quad c_{-m}\neq0,\quad z\in V,\qquad(1)$$

или, соответственно,

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},\quad a=\infty,\quad c_{-m}\neq0,\quad z\in V',\qquad(2)$$

с конечным числом отрицательных степеней в главной части при $a\neq\infty$ или соответственно конечным числом положительных степеней при $a=\infty$. Натуральное число m в этих разложениях называется порядком, или кратностью, полюса a; при $m=1$ П. называется простым. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛЮС – см. *Координаты.*

ПОЛЮСНАЯ СИСТЕМА – конечномерная *динамическая система*, являющаяся ограничением уравнения с частными производными на подкласс мероморфных функций (рациональных, эллиптических или некоторых специальных функций). Классич. примером П. с. является система вихрей двумерной гидродинамики идеальной жидкости.

Существование П. с. для заданного нелинейного уравнения является ситуацией исключительной. Повышенный интерес к ним в современной математич. физике был вызван работой [1], показавшей, что *Кортевега – де Фриса уравнение* имеет рациональные решения вида:

$$u(x,t)=2\sum_{i=1}^{N}(x-x_i(t))^{-2},\quad N=\frac{n(n+1)}{2},\quad n\in\mathbb{Z},$$

динамика полюсов к-рых тесно связана с теорией интегрируемой системы частиц на прямой – *Мозера – Калоджеро системой.* Впоследствии было показано [2], что существование рациональных решений характерно для большинства уравнений, допускающих коммутационное представление.

Особенно важны П. с., связанные с двумерными уравнениями типа *Кадомцева – Петвиашвили уравнения.* Их рациональные решения с полюсами в комплексной области являются солитонами – решениями, локализованными по всем направлениям [3]. Процесс взаимодействия солитонов в этих случаях и описывается соответствующей П. с.

Лит.: [1] Airault H., McKean H., Moser I., «Comm. Pure Appl. Math.», 1977, v. 30, p. 95–125; [2] Кричевер И. М., «Функциональный анализ и его прилож.», 1978, т. 12, в. 1, с. 76–78; [3] Bordag L., Its A. R., Manakov S. V., Matveev V. B., Zakharov V. E., «Phys. Lett.», 1977, p. 205–07. *И. М. Кричевер.*

ПОЛЯРИЗАЦИИ ПЛОСКОСТЬ для плоской электрической волны – плоскость, проходящая через вектор электрической напряженности и нормаль к фронту волны; для плоской поперечной упругой волны – плоскость, проходящая через вектор смещения частиц упругой среды и нормаль к фронту волны. Для волн в неоднородных средах П. п. определяется только в геометро-оптич. приближении – для нулевого члена разложения волны в асимптотич. ряд (для высокочастотных гармонич. волн – в ряд по обратным степеням частоты). *В. С. Булдырев.*

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР в квантовой электродинамике – функция, представляющая собой аналог *массового оператора* для безмассовой частицы – *фотона.* Включает вклады диаграмм поляризации вакуума в пропагатор фотона. Совокупность таких вкладов образует простейший П. о. $\Pi_{\mu,\nu}(k, \alpha)$. Здесь k – 4-импульс фотона, $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры, по степеням к-рой располагаются вклады теории возмущений в П. о., μ, ν – лоренцевы индексы, соответствующие различным значениям поляризации фотона. После устранения расходимостей в соответствии с условием калибровочной инвариантности $\Pi_{\mu,\nu}$ имеет поперечную структуру:

$$\Pi_{\mu,\nu}(k, \alpha) = \left(g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu\right)\pi(k^2, \alpha),$$

где $g_{\mu,\nu}$ – метрич. тензор пространства-времени Минковского, а скалярная функция $\pi(k^2, \alpha)$ входит в знаменатель поперечной части «одетого» фотонного пропагатора:

$$D_{\mu\nu}(k, \alpha) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2 - \pi(k^2, \alpha)}.$$

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980. *Д. В. Ширков.*

ПОЛЯРИЗАЦИЯ – см. *Симплектическая геометрия.*

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ – см. *Координаты, Полугеодезические координаты.*

ПОЛЯРНЫЙ РАДИУС – см. *Координаты.*

ПОЛЯРНЫЙ УГОЛ – см. *Координаты.*

ПОМЕРАНЧУКА ТЕОРЕМА устанавливает асимптотическое равенство полных сечений взаимодействия частиц a и античастиц $\bar{a}$ с произвольной мишенью b в пределе, когда энергия частиц $E \to \infty$:

$$\lim_{E\to\infty}\left(\sigma^{\bar{a}b}_{\text{полн}}(E)/\sigma^{ab}_{\text{полн}}(E)\right) = 1. \qquad (1)$$

П. т. основана на свойствах аналитичности и кроссинга амплитуд рассеяния, к-рые вытекают из общих принципов квантовой теории поля, а также на естественных физич. предположениях:

1) амплитуды $T(E)$ не являются осциллирующими функциями при $E \to \infty$,

2) $\lim \dfrac{\operatorname{Re} T(E)}{\operatorname{Im} T(E)\ln(E/E_0)} \to 0$ при $E \to \infty$.

Эта теорема была сформулирована И. Я. Померанчуком [1] в предположении о том, что взаимодействие адронов при высоких энергиях имеет дифракционный характер, амплитуды процессов упругого рассеяния являются преимущественно мнимыми и полные сечения взаимодействия $\sigma^{ab}_{\text{полн}}(E)$ стремятся к постоянному пределу при $E \to \infty$. В этом случае равенство (1) можно сформулировать как утверждение о том, что разность полных сечений взаимодействия частиц и античастиц

$$\Delta\sigma = \sigma^{\bar{a}b}_{\text{полн}}(E) - \sigma^{ab}_{\text{полн}}(E)$$

стремится к нулю с ростом энергии. В настоящее время экспериментальные данные показывают, что полные сечения взаимодействия адронов растут с увеличением энергии. Равенство (1) справедливо и в случае растущих полных сечений. Если $\sigma^{ab}_{\text{полн}} \to \infty$ при $E \to \infty$, то предположение (2) может быть доказано, исходя из аналитичности и унитарности.

П. т. явилась исторически первой из асимптотич. теорем, к-рые следуют из весьма общих свойств релятивистской квантовой теории.

Общий метод доказательства П. т. для растущих полных сечений взаимодействия, а также ее обобщение на дифференциальные сечения процессов, связанных соотношениями кроссинга, были разработаны в работах [2]–[4]. Доказано, что в предположении об отсутствии осцилляций амплитуд рассеяния при $E \to \infty$ дифференциальные сечения упругого рассеяния частиц и античастиц при фиксированных значениях квадрата переданного 4-импульса t стремятся к одинаковому пределу с ростом E:

$$\lim_{E\to\infty}\left(\frac{d\sigma^{\bar{a}b}_{\text{упр}}(E,t)}{dt}\Big/\frac{d\sigma^{ab}_{\text{упр}}(E,t)}{dt}\right) = 1. \qquad (2)$$

В случае произвольной двухчастичной реакции $ab \to cd$ аналогичное равенство должно выполняться для дифференциальных сечений прямого и перекрестного $\bar{c}b \to \bar{a}d$ канала при одинаковых значениях $t = (p_b - p_d)^2$. Все существующие в настоящее время экспериментальные данные о полных сечениях взаимодействия адронов и дифференциальных сечениях бинарных реакций согласуются с равенствами (1), (2).

Лит.: [1] Померанчук И. Я., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1958, т. 34, с. 725; [2] Мейман Н. Н., там же, 1962, т. 43, с. 2277; [3] Logunov A. A., Nguen Van Hieu, Todorov L. T., Khrustalev O. A., «Phys Lett.», 1963, v. 7, p. 69; [4] Van Hove L., там же, 1963, v. 5, p. 252. *А. Б. Кайдалов.*

ПОМО – МАННЕВИЛЯ СЦЕНАРИЙ стохастизации – возникновение перемежаемости по времени периодического и стохастического движения после обратной тангенциальной бифуркации (слияния и исчезновения устойчивой и неустойчивой периодических фазовых траекторий), причем промежутки времени со стохастическим движением случайны, а с периодическим – пропорциональны $|\mu - \mu_c|^{-1/2}$, где μ – параметр неравновесности динамической системы. Примером может служить бифуркация слияния устойчивой и неустойчивой траекторий с периодом 3 у отображения $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ при значении $\mu_c \approx 3{,}83$, служащем точкой накопления для последовательности обратных бифуркаций удвоения этого периода. *А. С. Монин.*

ПОНТРЯГИНА ИНДЕКС – см. *Топологический заряд.*

ПОНТРЯГИНА ПРОСТРАНСТВО – см. *Пространство с индефинитной метрикой.*

ПОНТРЯГИНА – РОДЫГИНА ТЕОРЕМЫ – три теоремы, описывающие поведение *быстро-медленных систем* (систем с быстрыми и медленными движениями):

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon),\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon),$$

$$x \in \mathbb{R}^m,\ \varphi \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

в случаях, когда быстрое уравнение (первое уравнение системы при $y = \text{const}$, $\varepsilon = 0$) имеет предельный цикл. Пусть $x = l(y, t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(y)$,– уравнение этого цикла, $T(y)$ – его период. Обозначение:

$$L_Y = \{x, y : x = l(Y, t),\ y = Y,\ 0 \leqslant t \leqslant T(Y)\}.$$

Медленным уравнением называется уравнение

$$\dot{Y} = \varepsilon G(Y),$$

$$G(y) = \frac{1}{T(y)}\int_0^{T(y)} g(l(y,t), y, 0)\,dt.$$

Теорема 1. Если цикл быстрой системы экспоненциально орбитально устойчив (то есть все его мультипликаторы, кроме одного, равного 1, лежат в единичном круге), то фазовая точка, начавшая движение при $t = 0$, $y = y_0$ в области притяжения цикла быстрой системы, будет при $\delta \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$ находиться в $O(\varepsilon)$-окрестности цикла $L_{Y(\varepsilon t)}$, где

$Y(\varepsilon t)$ – решение медленной системы с начальным условием $Y(0)=y_0$ (предполагается, что это решение определено при $0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon$; $\delta\sim\ln\varepsilon$) (см. [1]).

Теорема 2. Если цикл быстрой системы невырожден (то есть его мультипликаторы, кроме одного, отличны от 1) и если Y_* – невырожденное равновесие медленной системы (то есть равновесие с отличными от 0 собственными числами), то исходная система имеет невырожденный предельный цикл, лежащий в $O(\varepsilon)$-окрестности цикла L_{Y_*} (см. [2]).

Теорема 3. Если цикл быстрой системы гиперболический (то есть его мультипликаторы, кроме одного, равного 1, не лежат на единичной окружности) и если медленное уравнение само имеет гиперболич. предельный цикл

$$H=\{y: y=h(\varepsilon t),\ 0\leqslant\varepsilon t\leqslant\Theta\},$$

то исходная система имеет двумерный инвариантный тор, лежащий в $O(\varepsilon)$-окрестности тора

$$\{x, y: (x, y)\in L_y,\ y=h(\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant\Theta\}$$

(см. [3]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В., «Доклады АН СССР», 1960, т. 131, № 2, с. 255–58; [2] их же, там же, 1960, т. 132, № 3, с. 537–40; [3] Родыгин Л. В., «Известия ВУЗов. Радиофизика», 1960, т. 3, № 1, с. 116–29. *А. И. Нейштадт.*

ПОПЕРЕЧНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ – см. *Упругие волны.*

ПОПЕРЕЧНЫЙ РАЗРЫВ – см. *Ударные волны.*

ПОПРАВКА – см. *Анализ данных.*

ПОРОГ КАНАЛА рассеяния, определяемого *кластерным разбиением* с подсистемами $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_l$ и связанными состояниями $\psi_{j_1}, \psi_{j_2}, ..., \psi_{j_l}$, – величина

$$E_A=\sum_{k=1}^{l}\varepsilon_{j_k},\quad A=\{j_1, j_2, ..., j_l\},$$

где ε_{j_k} – собственные значения операторов энергии H_{ω_k} подсистем

$$H_{\omega_k}\psi_{j_k}=\varepsilon_{j_k}\psi_{j_k}.$$

П. к. тесно связаны со спектральными свойствами оператора энергии системы N частиц H в *центра масс системе.* Именно, каждый канал рассеяния определяет ветвь непрерывного спектра оператора H, а число E_A определяет начало этой ветви.

См. *Кластерное разбиение, Рассеяния канал, Многоканальное рассеяние.*

Лит.: [1] Гольдбергер М., Ватсон К., Теория столкновений, пер. с англ., М., 1967; [2] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985. *С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.*

ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ – см. *Марковский процесс.*

ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – см. *Гравитационного поля уравнения.*

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ – движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая любые две точки тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению. При П. д. все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по численной величине и направлению скорости и ускорения. Поэтому изучение П. д. тела сводится к задаче кинематики точки.

ПОТЕНЦИАЛ, потенциальная функция, – характеристика *векторного поля*, например силового (электромагнитного, гравитационного и др.), поля скоростей (жидкости, газа) и т. п.

Скалярным потенциалом векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется функция $\varphi(\boldsymbol{r})$ такая, что $\boldsymbol{a}=-\operatorname{grad}\varphi$ (или $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\varphi$). Физич. смысл имеет не сам П., определяемый с точностью до произвольной постоянной, а разность П.

Векторным потенциалом векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется векторная функция $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ такая, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$. Векторный П. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ определен с точностью до градиента произвольной функции [калибровочная (градиентная) инвариантность]. Векторное поле называется потенциальным, если $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$ ($\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=0$ и поле описывается скалярным П. $\varphi(\boldsymbol{r})$). Если $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$, то поле называется соленоидальным (вихревым). Произвольное векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей. Поверхности (линии) равного скалярного П. (то есть поверхности, все точки к-рых имеют один и тот же П.) называются эквипотенциальными. Силовые линии векторного поля (такие, что $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ касателен к ним в каждой точке) перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. П. электростатич. (гравитационного) поля определяется как отношение потенциальной энергии частицы, внесенной в поле, к величине ее заряда (массы). П. служит энергетич. характеристикой поля и удовлетворяет *Пуассона уравнению*:

$$\Delta\varphi(x, y, z)=-4\pi\rho(x, y, z),$$

где ρ – плотность распределения зарядов (масс).

См. также *Двойного слоя потенциал, Логарифмический потенциал, Комплексный потенциал, Ньютонов потенциал, Простого слоя потенциал.*

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., 5 изд., 1984. *П. В. Малышев.*

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ среды – см. *Геофизическая турбулентность.*

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Потенциал, Ньютонов потенциал.*

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ – часть общей механической энергии системы, зависящая от взаимного расположения *материальных точек*, составляющих эту систему, и от их положений во внешнем силовом поле (напр., гравитационном). Численно П. э. системы в данном ее положении равна работе, к-рую произведут действующие на систему силы при перемещении системы из этого положения в то, где П. э. условно принимается равной нулю ($U=0$). Из определения следует, что понятие «П. э.» имеет место только для *консервативных систем*, то есть систем, у к-рых работа действующих сил зависит только от начального и конечного положения системы. Так, для груза весом P, поднятого на высоту h, П. э. будет равна

$$U=Ph$$

($U=0$ при $h=0$); для груза, прикрепленного к пружине,

$$U=0{,}5\ k\Delta l^2,$$

где Δl – удлинение (сжатие) пружины, k – ее коэффициент жесткости ($U=0$ при $\Delta l=0$); для двух частиц с массами m_1 и m_2, притягивающимися по закону всемирного тяготения,

$$U=-fm_1m_2/r,$$

где f – гравитационная постоянная, r – расстояние между частицами ($U=0$ при $r=\infty$); аналогично определяется П. э. для двух точечных электрич. зарядов e_1 и e_2.

Иногда термин «П. э.» употребляют, подразумевая любую энергию, содержащуюся в системе в скрытом виде.

С. М. Targ.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНСТРОФИЯ – величина, равная половине среднего квадрата потенциального вихря. П. э. введена в число основных понятий крупномасштабной атмосферной и океанской турбулентности (образуемой циклонами и антициклонами в атмосфере и синоптич. вихрями в океане), развивающейся вблизи состояния геострофич. и гидростатич. равновесия. П. э., являясь адиабатич. интегралом (интегральным инвариантом) такой (обычно называемой геострофической) турбулентности, переносится в малые масштабы по спектральному «закону минус трех» (см. [1]–[4]).

См. также *Геофизическая турбулентность.*

Лит.: [1] Charney J., «J. Atm. Sci.», 1971, v. 28, № 6, p. 1087–95; [2] Rhines P. S., «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1979, v. 11, p. 401–41; [3] Гаврилин Б. Л., Мирабель А. П., Монин А. С., «Известия АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана», 1972, т. 8, № 5, с. 483–93; [4] Мирабель А. П., Монин А. С., там же, 1980, т. 16, № 10, с. 1011–23. *А. П. Мирабель.*

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ – см. *Потенциал.*

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ – безвихревое движение жидкости или газа, при котором каждый малый объем деформируется и перемещается поступательно, но не имеет вращения (вихря). При П. т. проекции скорости v частицы жидкости на оси координат представляются в виде частных производных

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

от функции φ координат и времени, называемой потенциалом скорости течения. Движение реальных жидкостей и газов будет потенциальным в тех областях, в к-рых действие сил вязкости ничтожно мало по сравнению с действием сил давления (жидкость считается идеальной) и в к-рых нет завихрений, образовавшихся за счет срыва со стенок пограничного слоя или за счет неравномерного нагревания. Необходимыми и достаточными условиями потенциальности течения являются равенства

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}.$$

Простейшими примерами П. т. служат поступательное течение с постоянной скоростью v_{x0} вдоль оси x ($v_x = v_{x0}$, $v_y = v_z = 0$, потенциал $\varphi = v_{x0}x + \text{const}$), а также источник и сток в пространстве, для к-рых $\varphi = -Q/4\pi r$, где Q – постоянная ($Q = \text{const}$) или переменная ($Q = Q(t)$) мощность источника (стока), $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от начала координат. При $Q > 0$ жидкость вытекает из начала координат во всех направлениях (точечный источник), а при $Q < 0$ – втекает в начало координат (сток).

Движение идеальной жидкости, возникшее из состояния покоя, будет потенциальным; будучи потенциальным в какой-либо момент времени, оно будет потенциальным и в последующее время, если давление зависит только от плотности и массовые силы являются консервативными. Движение идеальной несжимаемой (плотность $\rho = \text{const}$) жидкости, вызванное мгновенным приложением импульсных давлений (внезапное движение погруженного тела, удар тела о поверхность жидкости), будет также потенциальным.

Для П. т. дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости приводятся к интегралу Лагранжа – Коши:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = f(t), \qquad (1)$$

где U – потенциальная энергия поля массовых сил, приходящаяся на единицу массы, $f(t)$ – произвольная функция от времени t.

Для установившегося движения соотношение (1) принимает вид:

$$\Pi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C, \qquad (2)$$

где C – постоянная для всей области П. т. сжимаемой жидкости. Таким образом, для изучения П. т. достаточно определить потенциал скоростей с помощью *неразрывности уравнения*, соотношения (2) и уравнения физич. состояния. Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

и поэтому изучение П. т. сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

с учетом граничных условий на твердых стенках и на свободной поверхности (условий безотрывности обтекания твердых стенок и условия постоянства давления на свободной поверхности).

Для плоскопараллельного П. т. несжимаемой жидкости уравнение неразрывности позволяет ввести функцию тока ψ:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

к-рая в комбинации с потенциалом скоростей φ составляет *комплексный потенциал* $W = \varphi + i\psi$, представляющий функцию от комплексного переменного $z = x + iy$. С помощью комплексного потенциала скоростей изучаются безотрывное обтекание плоского контура, струйное обтекание стенок и волновое движение. Безотрывное П. т. вокруг плоского контура может быть бесциркуляционным или циркуляционным. В первом случае результирующее воздействие жидкости на плоский контур равно нулю, во втором – результирующее воздействие потока жидкости на контур сводится к подъемной силе, а в случае струйного П. т. вокруг плоского контура – к силе сопротивления, пропорциональной квадрату скорости.

П. т. имеет место также при движениях сжимаемой жидкости или газа, представляющих собой малые возмущения нек-рого известного состояния равновесия или движения, напр. при распространении звука в среде; при этом малый избыток давления над давлением в состоянии равновесия среды связан с потенциалом скоростей соотношением

$$p = -p_0 \partial \varphi / \partial t,$$

а из уравнения неразрывности в случае, когда потенциал массовых сил не зависит от времени, получается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right),$$

где c – скорость распространения звука, вычисленная для невозмущенного состояния покоя: $c^2 = (dp/d\rho)_0$. Для П. т. газа при адиабатич. законе дифференциальное уравнение для потенциала скоростей становится нелинейным, но с помощью преобразования С. А. Чаплыгина оно приводится к линейному уравнению, разрешаемому в ряде случаев.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, 6 изд., ч. 1, М., 1963; [2] Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, 6 изд., М., 1987; [3] Седов Л. И., Механика сплошной среды, 4 изд., т. 1–2, М., 1983–84.

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ВИХРЬ – см. *Геофизическая турбулентность, Турбулентность.*

ПОТОК – см. *Динамическая система.*

ПОТОК векторного поля – одно из понятий теории *векторного поля.* П. векторного поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность ∂V выражается с точностью до знака поверхностным интегралом

$$\iint_{\partial V} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, ds = \iint_{\partial V} (a_x\, dy dz + a_y\, dz dx + a_z\, dx dy),$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности ∂V (предполагается, что изменение вектора $\boldsymbol{n}$ по поверхности ∂V непрерывно). Для поля скоростей частиц жидкости П. векторного поля равен объему жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность ∂V.

См. также *Векторный анализ.* *В. И. Битюцков.*

ПОТОК, динамическая система с непрерывным временем,– *динамическая система*, определяемая действием аддитивной группы действительных чисел $\mathbb{R}$ (или аддитивной полугруппы неотрицательных действительных чисел) на некотором фазовом пространстве W. Другими словами, каждому $t \in \mathbb{R}$ (каждому $t \geqslant 0$) сопоставлено нек-рое преобразование $S_t: W \to W$, причем

$$S_0(w) = w \text{ и } S_{t+s}(w) = S_t(S_s(w)), \; w \in W.$$

При этом t обычно называют «временем» и о зависимости $S_t w$ от t (при фиксированном w) говорят как о «движении» точки $S_t w$; множество всех $S_t w$ для данного w называется траекторией w (нередко этот термин употребляется применительно к функции $t \mapsto S_t w$). Как и для любых динамич. систем, обычно фазовое пространство наделено нек-рой структурой, и П. в каком-то смысле согласован с ней: преобразования S_t сохраняют эту структуру, накладываются определенные условия на характер зависимости $S_t w$ от t.

П. образуют наиболее важный класс динамич. систем, к-рый к тому же первым начал изучаться. Термин «динамическая система» часто употребляют в узком смысле, понимая под ним именно П. (или П. и *каскады*). *Д. В. Аносов.*

ПОТОК физических величин – понятие, возникающее при формулировке законов сохранения в дифференциальной форме. Уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения ξ_α имеют вид:

$$\dot{\xi}_\alpha = -\nabla_k \xi_{\alpha k},$$

где $\xi_{\alpha k}$ – плотности П. Существование законов сохранения связывают обычно со свойствами симметрии гамильтониана (лагранжиана) системы по отношению к нек-рым группам преобразований. Пространственно-временная симметрия приводит к законам сохранения импульса и энергии системы и введению соответственно понятий плотности потока импульса (тензора напряжений) и плотности П. энергии. Наличие внутренних симметрий связано с законами сохранения числа частиц, спина и др. и приводит к введению соответствующих плотностей П. При формулировке уравнений гидродинамики возникает проблема замыкания, то есть необходимость выразить П. $\xi_{\alpha k}$ в терминах плотностей ξ_α. Решение этой проблемы в статистич. механике проводится в рамках метода сокращенного описания с использованием теории возмущений по пространственным градиентам параметров сокращенного описания.

М. Ю. Ковалевский.

K-ПОТОК – см. *K-система.*

ПРАВАЯ МЕРА ХААРА – см. *Инвариантное интегрирование, Хаара мера.*

ПРАВИЛЬНАЯ ТОЧКА – см. *Аналитическая функция.*

ПРАВИЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Регулярная функция.*

ПРАВИЛЬНАЯ ЧАСТЬ ряда Лорана – см. *Лорана ряд.*

ПРАВЫЙ ИДЕАЛ – см. *Идеал.*

ПРЕДГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Гильбертово пространство.*

ПРЕДЕЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ в интегрируемой гамильтоновой системе с n степенями свободы – гладко расслоенная на инвариантные m-мерные торы (где $m < n$) $2m$-мерная поверхность в фазовом пространстве системы, на которой n первых интегралов в инволюции, определяющих эту систему, функционально зависимы. Наиболее часто встречаются случаи $m = 0$ (положение равновесия) и $m = 1$ (однопараметрич. семейство периодич. траекторий). Примером для произвольного m может служить интегрируемая система с гамильтонианом $H(I, \tau)$ в пространстве с координатами

$$I \in \mathbb{R}^m,\ \varphi \in T^m = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^m$$

и симплектич. структурой

$$dI \wedge d\varphi + dp \wedge dq,$$

где $p \in \mathbb{R}^{n-m}$, $q \in \mathbb{R}^{n-m}$ изменяются в окрестности 0 и

$$\tau_i = (p_i^2 + q_i^2)/2,\ i = 1, \ldots, n-m.$$

Эта система имеет $2m$-мерную инвариантную поверхность $\{p = q = 0\}$, расслоенную на инвариантные m-мерные торы $\{p = q = 0,\ I = \text{const}\}$, движение по к-рым условно-периодично с частотами

$$\partial H(I, 0)/\partial I_1, \ldots, \partial H(I, 0)/\partial I_m,$$

и n первых интегралов в инволюции $I_1, \ldots, I_m, \tau_1, \ldots, \tau_{n-m}$ теряют функциональную независимость, если хотя бы одна из величин τ_i обращается в нуль.

При выполнении нек-рых условий общности положения большинство инвариантных торов, составляющих П. в. в интегрируемой гамильтоновой системе, при малом гамильтоновом возмущении системы не разрушается, а лишь слегка деформируется (см. *КАМ-теория*).

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Успехи математич. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 91–192.

М. Б. Севрюк.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

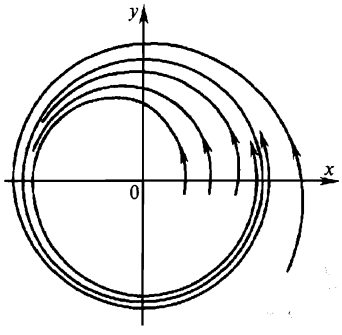
– замкнутая траектория в фазовом пространстве Oxy, обладающая тем свойством, что все траектории, начинающиеся в достаточно узкой кольцеобразной ее окрестности, неограниченно приближаются к этой траектории или при $t \to +\infty$ (устойчивый П. ц.), или при $t \to -\infty$ (неустойчивый П. ц.), или часть из них при $t \to +\infty$, а остальные – при $t \to -\infty$ (полуустойчивый П. ц.). Напр., система

$$\frac{dr}{dt} = 1 - r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1$$

(r и φ – полярные координаты), общее решение к-рой

$$r = 1 - (1 - r_0)e^{-t},$$

$$\varphi = \varphi_0 + t$$



Устойчивый предельный цикл.

(где $r_0 \geqslant 0$), имеет устойчивый П. ц. $r = 1$ (рис.). Понятие П. ц. переносится также на систему n-го порядка. С механич. точки зрения устойчивый П. ц. соответствует устойчивому периодич. режиму системы. Поэтому разыскание П. ц. имеет важное значение в теории нелинейных колебаний.

В. В. Немыцкий.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в пространстве V – сопоставление T каждому элементу X алгебры $\mathfrak{G}$ оператора (в V) такое, что

$$T([X, Y]) = [T(X), T(Y)].$$

Если SV конечномерно, то и представление T называется конечномерным. Пусть S – представление группы Ли G соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Тогда формула

$$T(X) = \frac{d}{dt} S \exp(tX)$$

задает П. алгебры $\mathfrak{G}$. Обратно, формула

$$S_{\exp}(tX) = \exp(tT(X))$$

восстанавливает П. S по П. T.

Если пространство V бесконечномерно и в нем введена топология (напр., если V – гильбертово пространство), то дополнительно требуют, чтобы все операторы $T(X)$ имели общую инвариантную область определения. Обычно в определении бесконечномерного П. ничего больше не требуется, однако получающееся определение не совсем удовлетворительно и при работе с ним нужна нек-рая осторожность. Дело в том, что операторы $T(X)$, как правило, оказываются неограниченными дифференциальными операторами, а свойства дифференциальных операторов, как известно, очень чувствительны к выбору области определения. Напр., уже в простейших содержательных случаях

может оказаться, что одному и тому же набору дифференциальных операторов $T(X)$ соответствует много различных П. группы Ли, а может оказаться, что ни одного.

Лит.: [1] Нельсон Э., «Математика», 1962, т. 6, № 3, с. 89–132; [2] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978. *Ю. А. Неретин.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы – в общем случае, произвольная реализация этой группы как группы преобразований. Чаще, однако, под термином «представление группы» подразумевается то, что точнее называется «линейным представлением». Пусть G – группа, а H – линейное пространство. Линейным представлением группы G в пространстве H называется отображение $g \mapsto T_g$ из G в множество операторов в H, удовлетворяющее условиям

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2} \text{ и } T_e = E,$$

где e – единица группы, а E – единичный оператор. Если H бесконечномерно и в нем введена какая-либо топология (чаще всего H – гильбертово пространство), то естественно требовать еще, чтобы операторы T_g были ограничены. Если G – топологич. группа (в частности, группа Ли), то на отображение $g \to T_g$ необходимо наложить нек-рые условия непрерывности. Обычно требуют, чтобы матричные элементы П. $g \to T_g$ были непрерывными функциями на G.

Если для разных элементов g группы соответствующие им операторы T_g попарно различны, то П. T называется точным.

Пусть H' – подпространство в H, инвариантное относительно всех операторов П. T. Тогда, рассматривая операторы П. T как операторы в H', получим П. T' той же группы в пространстве H'. Представление T' называется подпредставлением П. T. *Ю. А. Неретин.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ дискретной серии – см. *Квадратично интегрируемое представление.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ нулевой кривизны – см. *Нелинейное уравнение Шредингера.*

***P*-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ** – диагональное представление оператора через *переполненную систему* когерентных состояний. Пусть H – комплексное гильбертово пространство, $|\psi\rangle$, $\psi \in H$,– система *когерентных состояний* в пространстве Фока $\Gamma(H)$. Оператор X в $\Gamma(H)$ допускает *P*-представление, если существует (обобщенная) функция $P(\psi)$ такая, что

$$X = \int_H P(\psi) |\psi\rangle\langle\psi| \prod d\psi\, d\bar{\psi},$$

где $|\psi\rangle\langle\psi|$ – ортогональный проектор на вектор $|\psi\rangle$, и интеграл сходится в подходящем смысле.

Оператор плотности ρ в $\Gamma(H)$ называется квазиклассическим, если

$$\rho = \int_H |\psi\rangle\langle\psi| \mu(d\psi d\bar{\psi}), \qquad (*)$$

где μ – вероятностная мера на H. Любой оператор плотности может быть аппроксимирован по ядерной норме операторами вида (*), где, однако, μ может быть знакопеременной мерой. Среднее значение нормально упорядоченного оператора $X =: F(a^+, a)$: в состоянии с оператором плотности (*) дается формулой

$$\mathrm{Tr}\rho X = \int F(\bar{\psi}, \psi)\, \mu(d\psi d\bar{\psi}),$$

где $F(\bar{\psi}, \psi)$ – виковский символ оператора. Эта формула лежит в основе теоремы эквивалентности в квантовой оптике, позволяющей вычислять нормально упорядоченные квантовомеханич. выражения с помощью соотношений, формально аналогичных классич. выражениям.

Понятие *P*-П. обобщается на случай произвольной переполненной системы векторов.

Лит.: [1] Глаубер Р., в сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. пер. с англ. и франц., М., 1966, с. 91–279; [2] Клаудер Дж., Сударшан Э., Основы квантовой оптики, пер. с англ., М., 1970; [3] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986, ч. 2, гл. 2. *А. С. Холево.*

ПРЕДСТАВЛЯЮЩАЯ ТОЧКА – см. *Динамическая система.*

ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРУППА множества X, симметрическая группа преобразований,– любая подгруппа в группе всех взаимно однозначных отображений множества X на X. Обычно множество X имеет нек-рую дополнительную структуру. Тогда рассматриваются только такие подгруппы, к-рые сохраняют в том или ином смысле эту структуру. Напр., если X – гладкое многообразие, то П. г. многообразия X называется группа Ли G вместе с гомоморфизмом $\tau: G \to \mathrm{Diff}(X)$ группы G в группу диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(X)$ многообразия X, причем отображение $G \times X \to X$, задаваемое формулой

$$(g, x) \to \tau(g)(x),$$

является гладким. *В. В. Трофимов.*

ПРЕОН – гипотетическая составляющая *кварков* и *лептонов*. В настоящее время нет каких-либо экспериментальных указаний на составную структуру кварков и лептонов, они являются точечными объектами вплоть до расстояний 10^{-15} см. Однако ряд недостатков стандартной модели электрослабых взаимодействий (таких, напр., как проблема калибровочной иерархии, проблема числа фермионных поколений и др.) вынуждают рассматривать различные расширения стандартной модели. Составные (или преонные) модели кварков и лептонов – одна из возможностей такого расширения. К настоящему времени построено большое число таких моделей, однако говорить о какой-либо одной общепринятой модели пока нельзя. В преонных моделях 18 кварков и 6 лептонов строятся из относительно небольшого числа точечных массивных П. Ключевая проблема этих моделей заключается в том, как обеспечить малый радиус и малую массу фермионов, построенных из тяжелых П.

Лит.: [1] Харари Х., Структура кварков и лептонов, пер. с англ., М., 1983. *А. Ю. Игнатьев.*

ПРЕПЯТСТВИЯ ЗАДАЧА, задача с (внутренним) препятствием φ в области D для оператора $Lv = -\Delta v - f$ – задача вида *вариационного неравенства* с множеством $K = \{v \in \mathring{W}_2^1(D) |\ v \geqslant \varphi \text{ в } D\}$ или, как односторонняя задача: $\min\{Lu,\ u - \varphi\} = 0$ в D, $u = 0$ на ∂D. При достаточно гладких f, ∂D, φ, $\varphi \leqslant 0$ на ∂D, решение u существует и принадлежит $W_\infty^2(D)$. Более высокой гладкости может не быть даже при данных класса C^∞. Подобные результаты имеют место для общих эллиптич. операторов L дивергентного вида. Для операторов недивергентного вида П. з. формулируется как односторонняя. П. з. ставятся также для параболич. операторов. *Т. Н. Рожковская.*

ПРЕЦЕССИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Гироскоп.*

ПРЕЦЕССИОННОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Гироскопа математическая теория.*

ПРЕЦЕССИЯ – частный тип движения твердого тела около неподвижной точки, при котором вектор Ω его угловой скорости может быть представлен в виде суммы двух векторов Ω_1 и Ω_2, обладающих следующим свойством: вектор Ω_1 сохраняет свое направление в неподвижной системе координат, а вектор Ω_2 – в связанной системе координат. Величины этих векторов могут изменяться, но угол ϑ между ними остается постоянным. Величину Ω_1 называют угловой скоростью прецессии, а величину Ω_2 – угловой скоростью собственного вращения. П.– последовательность двух простых вращений: тело вращается вокруг своей оси, а последняя вращается вокруг другой (неподвижной оси). В нек-рых задачах полезно выделение и более сложных комбинаций простых движений.

См. также *Гироскопа математическая теория, Лагранжа – Пуассона случай, Эйлера углы.* *В. А. Самсонов.*

ПРИВЕДЕННАЯ ДЛИНА физического маятника – см. *Маятник.*

ПРИВЕДЕННАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ для m квантовых частиц в объеме V – интегральный оператор с ядром

$$\rho_V((x)_m;(y)_m)=\Xi^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{m+n}}{n!}\times$$

$$\times\int d(u)_n\sum_{\pi}\varepsilon^{\pi}Q_{m+n}((x)_m,(u)_n;(y)_m,(u)_n),$$

где

$$\Xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int d(u)_n\sum_{\pi}\varepsilon^{\pi}Q_n((u)_n;(u)_n),$$

$$Q_n=\exp(-\beta H_n^V),$$

$$H_n^V=\left(\sum_{i=1}^{n}-\frac{\Delta_i}{4}+U\right)_{V^n}$$

– гамильтониан системы n частиц, заключенных в открытой связной области $V\in\mathbb{R}^{\nu}$, являющейся самосопряженным расширением (задаваемым нулевым граничным условием) симметричного оператора $-\frac{1}{4}\Delta+U$, определенного на дважды непрерывно дифференцируемых функциях с носителями, лежащими в V; Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{\nu}$; $(x)_j=(x_1, x_2, ..., x_j)$, $x_k\in\mathbb{R}^{\nu}$, z – активность. Суммирование производится по всем перестановкам π соответствующего числа переменных, при этом $\varepsilon^{\pi}=1$ для бозонов и обозначает знак перестановки для фермионов. П. м. п. является квантовым аналогом корреляционной функции.

См. также *Термодинамический предел* для равновесных состояний.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971. *Д. П. Санкович.*

ПРИГОЖИНА УРАВНЕНИЕ – интегро-дифференциальное уравнение, предложенное И. Пригожиным (I. Prigogine, 1961), для описания движения автомобильного транспорта

$$\frac{\partial F}{\partial t}+v\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{1}{T^0}\left(F-G(v)\int_{v_1}^{v_2}F(x,v',t)\,dv'\right)+$$

$$+(1-p)F(x,v,t)\int_{v_1}^{v_2}(v-v')F(x,v',t)\,dv',$$

$$F(x,v,0)=f(x,v),\quad x\in[0,L],\quad v\in[v_1,v_2],$$

$$F(0,v,t)=h(v,t),\quad t>0,\quad v\in[v_1,v_2].$$

Здесь $F(x, v, t)$ – плотность автомобилей в точке x, имеющих скорость v в момент $t>0$, T^0 – время релаксации, $G(v):[v_1, v_2]\to\mathbb{R}$ – заданная функция с условием

$$\int_{v_1}^{v_2}G(v)\,dv=1.$$

И. А. Кузин, В. П. Политюков.

ПРИМЕСИ ВЕРОЯТНОСТЬ – см. *Анализ данных.*

ПРИМИТИВНЫЙ ПЕРИОД – см. *Абелева функция, Двоякопериодическая функция, Периодическая функция.*

ПРИНУДИТЕЛЬНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ – см. *Автоколебания, Вынужденное колебание.*

ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА – см. *Твердое тело*; движение в идеальной жидкости.

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА – см. *Сферические функции.*

ПРИТЯГИВАЮЩЕЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Центральное многообразие.*

ПРИЦЕЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР – одна из числовых характеристик рассеяния в системе двух частиц в классической механике. П. п. определяется как минимальное расстояние, на к-рое сблизились бы частицы при отсутствии между ними взаимодействия.

Лит.: [1] Ньютон Р., Рассеяние волн и частиц, пер. с англ., М., 1969. *С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.*

ПРИЧИННАЯ СТРУКТУРА – ряд внутренних свойств ориентируемого пространства-времени, основанных на понятии причинной связи. Говорят, что точка A предшествует точке B, если существует направленная в будущее времениподобная мировая линия, начинающаяся в A и проходящая через B. Точки A и B называются причинно связанными. В пространстве Минковского, напр., две точки A и B причинно связаны, если B лежит внутри светового конуса будущего A. В связи с тем, что точки пространства-времени интерпретируются как точечные события, причинная связь означает, что событие A может повлиять на событие B. П. с. пространства-времени предполагает выполнение принципа причинности в том или ином его варианте (см. *Пространство-время* теории относительности) и обуславливает отсутствие дальнодействия (как в ньютоновской теории тяготения), что связано с существованием областей зависимости, или областей Коши, и горизонтов Коши.

Лит.: [1] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977. *А. Т. Ильичев.*

ПРИЧИННАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА – см. *Грина функция* в квантовой теории поля, *Грина функция* в статистической механике, *Пропагатор.*

ПРИЧИННО СВЯЗНЫЕ ТОЧКИ – см. *Причинная структура.*

ПРИЧИННОСТИ АКСИОМА – см. *Аксиоматическая квантовая теория поля.*

ПРОВЕРОЧНАЯ СТАТИСТИКА – см. *Анализ данных.*

ПРОДОЛЖЕНИЕ оператора – см. *Расширение* оператора.

ПРОДОЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ – см. *Упругие волны.*

ПРОЕКТИВНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ – естественный изоморфизм контактного многообразия контактных элементов в проективном пространстве P и многообразия контактных элементов в двойственном пространстве P^*. Тангенциальное отображение, сопоставляющее точке гиперповерхности $X\subset P$ касательную плоскость к X в этой точке, лежандрово. Его образ $X^*\subset P^*$ называется проективно двойственной гиперповерхностью. *М. Э. Казарян.*

ПРОЕКТИВНАЯ КРИВИЗНА – величина, характеризующая отклонение риманова пространства от проективно евклидова пространства (то есть такого, которое может быть отображено так на евклидово пространство, что геодезическим первого соответствуют прямые второго). П. к. описывается тензором проективной кривизны:

$$W_{ijk}^l=R_{ijk}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_k^l R_{ij}-\delta_i^l R_{ik});$$

здесь R_{ijk}^l – *Римана тензор*, а R_{ij} – *Риччи тензор.*

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы G в векторном пространстве V – представление

$$g\to T_g,\ g\in G,$$

такое, что

$$T_{g_1g_2}=c(g_1g_2)T_{g_1}T_{g_2},$$

где $c(g_1, g_2)$ – комплексное число, называемое мультипликатором проективного представления. Этот множитель не произволен, он должен удовлетворять тождеству

$$c(g_1, g_2)c(g_1g_2, g_3)=c(g_1, g_2g_3)c(g_2, g_3).$$

Таким образом, каждое П. п. группы G определяет элемент группы $H^2(G, \mathbb{C}^*)$ – группы двумерных когомологий группы G со значениями в группе $\mathbb{C}^*$ комплексных чисел по умножению.

Пусть $\widetilde{G}$ – центральное расширение группы G с помощью группы H и $\widetilde{T}$ – неприводимое линейное представление $\widetilde{G}$. Для любого $h \in H$ операторы T_h скалярны. Пусть $g \in G$, а $\widetilde{g}$ – какой-нибудь его прообраз в $\widetilde{G}$. Поставим в соответствие элементу g оператор $T_g = \widetilde{T}_{\widetilde{g}}$. Тогда $g \to T$ – П. п. группы G. Если нек-рое П. п. T_g группы G может быть получено такой процедурой из представления $\widetilde{T}$ группы $\widetilde{G}$, то говорят, что представление T линеаризуется на $\widetilde{G}$.

Пусть G – конечная группа. Тогда существует, вообще говоря, не единственное центральное расширение $\widetilde{G}$ группы G с помощью нек-рой конечной абелевой группы H, на к-ром линеаризуются все неприводимые представления группы G. Напр., если $G = S_n$ – группа подстановок из n элементов (симметрич. группа), то при $n > 6$ группа H оказывается группой из двух элементов.

Любое проективное унитарное или конечномерное представление простой группы Ли G линеаризуется на универсальной накрывающей группе $\widetilde{G}$ группы G (в частности, если группа G односвязна, то любое ее П. п. сводится к линейному). Любое унитарное представление T группы Ли G линеаризуется на нек-рой группе Ли $\widetilde{G}$ (она зависит от T). *Ю. А. Неретин.*

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО, порожденное векторным пространством V (или образованное из V), – фактормножество $P(V) = (V \setminus 0)/R$ пространства V без нуля $0 \in V$ по отношению эквивалентности: xRy тогда и только тогда, когда найдется такое $\lambda \neq 0$ из основного поля K (над которым определено V), что $x = \lambda y$. Если $V = \mathbb{R}^{n+1}$ или $= \mathbb{C}^{n+1}$, то есть пространство вещественных или комплексных строк длины $n+1$, то $P(V)$ обозначается $\mathbb{R}P^n$ или $\mathbb{C}P^n$ соответственно и в этом случае оно состоит из наборов $(x_0 : \ldots : x_n)$ соответственно вещественных или комплексных не обращающихся одновременно в нуль чисел, рассматриваемых с точностью до умножения на общий ненулевой скаляр $\lambda \neq 0$. Размерность пространства $P(V)$ по определению равна $\dim V - 1$. Каноническая проекция – это естественное отображение p: $V \setminus 0 \to P(V)$.

Лит.: [1] Берже М., Геометрия, т. 1, 2, пер. с франц., М., 1984.
В. В. Трофимов.

ПРОЕКТИВНО ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Проективная кривизна.*

ПРОЕКТИВНОЙ КРИВИЗНЫ ТЕНЗОР – см. *Проективная кривизна.*

ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ – координаты, определяемые в трехмерном проективном пространстве пятью точками O_1, O_2, O_3, O_4, E, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Точки O_1, O_2, O_3, O_4 называются фундаментальными, или базисными. Точка E называется единичной точкой системы П. к.

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 и E имеют следующие *однородные координаты*:

$$O_1(a_{11} : a_{21} : a_{31} : a_{41}),\ O_2(a_{12} : a_{22} : a_{32} : a_{42}),$$

$$O_3(a_{13} : a_{23} : a_{33} : a_{43}),\ O_4(a_{14} : a_{24} : a_{34} : a_{44}),$$

$$E(e_1 : e_2 : e_3 : e_4),$$

а произвольная точка M – однородные координаты $M(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$. Тогда П. к. точки M относительно системы П. к. O_1, O_2, O_3, O_4, E будут числа $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$, определяемые из следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda x_1 &= a_{11}\lambda_1 y_1 + a_{12}\lambda_2 y_2 + a_{13}\lambda_3 y_3 + a_{14}\lambda_4 y_4,\\
\lambda x_2 &= a_{21}\lambda_1 y_1 + a_{22}\lambda_2 y_2 + a_{23}\lambda_3 y_3 + a_{24}\lambda_4 y_4,\\
\lambda x_3 &= a_{31}\lambda_1 y_1 + a_{32}\lambda_2 y_2 + a_{33}\lambda_3 y_3 + a_{34}\lambda_4 y_4,\\
\lambda x_4 &= a_{41}\lambda_1 y_1 + a_{42}\lambda_2 y_2 + a_{43}\lambda_3 y_3 + a_{44}\lambda_4 y_4,
\end{aligned}\right\}$$

где числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 + a_{14}\lambda_4 &= e_1,\\
a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 + a_{24}\lambda_4 &= e_2,\\
a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 + a_{34}\lambda_4 &= e_3,\\
a_{41}\lambda_1 + a_{42}\lambda_2 + a_{43}\lambda_3 + a_{44}\lambda_4 &= e_4.
\end{aligned}\right\}$$

Аналогичную конструкцию можно проделать и в n-мерном пространстве.

Лит.: [1] Берже М., Геометрия, т. 1, 2, пер. с франц., М., 1984.
В. В. Трофимов.

ПРОЕКТОР – см. *Проекционный оператор, Линейный оператор.*

ПРОЕКЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР, проектор, – идемпотентный *линейный оператор* P в векторном пространстве L, то есть $P^2 = P$, а $L = PL \dot{+} (I - P)L$. П. о. P проектирует L на подпространство $R(P) = PL$ «параллельно» $N(P) = (I - P)L$. В топологич. линейном пространстве L рассматривают непрерывные П. о. В банаховом пространстве X множество $\mathscr{P}(X) \subset \mathscr{B}(X)$ частично упорядоченно ($P_1 \geqslant P_2 \Leftrightarrow R(P_2) \subset R(P_1)$), коммутирующие П. о. имеют верхнюю грань $P_1 \vee P_2 = P_1 + P_2 - P_1P_2$ и нижнюю грань $P_1 \wedge P_2 = P_1P_2$. Для $P \in \mathscr{P}(X)$ норма $\|P\| \geqslant 1$. П. о. нормы 1 иногда называется ортопроектором. Между всеми разложениями X в прямую сумму двух замкнутых подпространств и $\mathscr{P}(X)$ есть взаимно однозначное соответствие, но не любое бесконечномерное подпространство дополнимо, то есть является образом проектора. В гильбертовом пространстве H П. о. P называется ортогональным П. о., если

$$R(P) \perp N(P) (\Leftrightarrow P = P^*)$$

и между замкнутыми подпространствами (они ортодополнимы) и ортопроекторами есть взаимно однозначное соответствие. В гильбертовом пространстве обычно под П. о. подразумевают ортопроектор.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.
А. В. Булинский.

ПРОЕКЦИОННЫЙ ПОСТУЛАТ – см. *Воспроизводимости гипотеза, Квантовое измерение.*

ПРОЕКЦИЯ вектора – см. *Гильбертово пространство.*

ПРОЕКЦИЯ расслоения – см. *Расслоение.*

ПРОИЗВЕДЕНИЕ представлений групп, тензорное произведение представлений групп, – *представление* прямой суммы групп в тензорном произведении соответствующих пространств. Точнее, пусть G и G' – группы, а T и T' – их представления соответственно в пространствах V и V'. Представление $T \otimes T'$ $G \oplus G'$ в $V \otimes V'$ определяется соответствием

$$(T \otimes T')_{g \oplus g'}(v \otimes v') = T_g v \otimes T_{g'} v',$$

где $v \in V$, $v' \in V'$.

Пусть теперь T и T' – представления одной и той же группы G в пространствах V и V'. Тогда определено представление $T \otimes T'$ группы G в $V \otimes V'$. Оно действует по формуле

$$(T \otimes T')_g(v \otimes v') = T_g v \otimes T_g' v'.$$ *Ю. А. Неретин.*

ПРОИЗВОДНАЯ группы – см. *Коммутант* группы.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ – функция, определяющая лагранжево многообразие или каноническое преобразование. Если L – лагранжево многообразие в симплектич. многообразии $(M, \omega = d\alpha)$, то ограничение 1-формы α на L замкнуто и в окрестности любой точки является дифференциалом dS нек-рой гладкой функции S на L, называемой производящей функцией многообразия L. П. ф. определена с точностью до прибавления константы и при продолжении на все L может становиться многозначной. П. ф. зависит также от 1-формы α такой, что $\omega = d\alpha$.

Примеры. 1) Если $L \subset T^*X$ диффеоморфно проектируется на базу X, то L является графиком дифференциала dS нек-рой функции $S: X \to \mathbb{R}$.

2) Если координаты (p_I, q_J) можно взять в качестве координат на лагранжевом многообразии L в стандартном симплектич. пространстве с координатами $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, то L задается П. ф. $S(p_I, q_J)$ по формуле

$$q_I = -\frac{\partial s}{\partial p_I}, \quad p_J = \frac{\partial s}{\partial q_J},$$

где множество индексов $\{1, \ldots, n\}$ разбито на два подмножества I и J.

3) П. ф. канонич. преобразования (симплектоморфизма) $\varphi: M_1 \to M_2$ симплектич. многообразий (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) – это П. ф. графика $\Gamma_\varphi \subset M_1 \times M_2$ отображения φ. В координатах Дарбу (p, q) на M_1 и (P, Q) на M_2 преобразование φ задается П. ф. $S(q, Q)$ такой, что

$$\det \frac{\partial^2 s}{\partial q \partial Q} \neq 0,$$

формулами

$$p = \frac{\partial s}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial s}{\partial Q}.$$

М. Э. Казарян.

ПРОИЗВОДЯЩЕЕ СЕМЕЙСТВО функций $F(x, q)$, зависящих от переменной $x \in \mathbb{R}^k$ и параметра $q \in \mathbb{R}^n$, задает *лагранжево многообразие*

$$L = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} | \exists\, x,\ \partial F/\partial x = 0,\ p = \partial F/\partial q\},$$

если выполнено условие невырожденности: ранг матрицы $(\partial^2 F/\partial x^2, \partial^2 F/\partial x \partial q)$ максимально возможный. Обратно, росток любого лагранжевого многообразия задается ростком подходящего невырожденного П. с. Значение П. с. заключается в том, что классификация *лагранжевых отображений* с точностью до лагранжевой эквивалентности сводится к классификации П. с. функций с точностью до расслоенных вдоль x замены координат (x, q) и прибавления функции параметра q.

Аналогично, *лежандрово многообразие* можно задавать производящим семейством гиперповерхностей $F(x, q) = 0$ по формуле

$$L = \{([p], q) \in PT^*\mathbb{R}^n \cong P^{n-1} \times \mathbb{R}^n | \exists\, x,\ F = \partial F/\partial x = 0,\ p = \partial F/\partial q\}.$$

М. Э. Казарян.

ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ – функционал $F[f]$, функциональные производные которого по аргументу $f(x)$ дают изучаемый набор функций $F_n(x_1, \ldots, x_n)$:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta f(x_1) \ldots \delta f(x_n)} F[f]\Big|_{f=0}.$$

Формально П. ф. представляется рядом

$$F[f] = \sum_{n \geqslant 0} (n!)^{-1} \int dx_1 \ldots dx_n\, F_n(x_1, \ldots, x_n) f(x_1) \ldots f(x_n),$$

а функции F_n называются коэффициентными функциями разложения $F[f]$. Функциональный аргумент может быть набором многокомпонентных функций многих переменных:

$$f(x) = \{f_\mu(x_1, \ldots, x_\alpha)\},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Целесообразность введения П. ф. для набора функций F_n в том, что многие их свойства переносятся на $F[f]$ и компактно записываются на языке П. ф.

Роль П. ф. в квантовой теории поля основана на том, что в наиболее употребительном в ней *Фока представлении* векторам состояния Φ и операторам $\hat{A}$ по самому их построению отвечают П. ф. (для простоты берется случай скалярного поля):

$$\Phi = \sum_{n \geqslant 0} (n!)^{-1} \int d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n \times$$

$$\times \Phi_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \hat{a}^+(\mathbf{k}_1) \ldots \hat{a}^+(\mathbf{k}_n) \Phi_0 \leftrightarrow \Phi[a^*] =$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} (n!)^{-1} \int d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n \Phi_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) a^*(\mathbf{k}_1) \ldots a^*(\mathbf{k}_n);$$

$$\hat{A} = \sum_{m,\, n \geqslant 0} (m!n!)^{-1} \int d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_m\, d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n \times$$

$$\times A_{mn}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$

$$\times \hat{a}^+(\mathbf{k}_1) \ldots \hat{a}^+(\mathbf{k}_m) \hat{a}^-(\mathbf{p}_1) \ldots \hat{a}^-(\mathbf{p}_n) \leftrightarrow A[a^*, a],$$

где Φ_0 – фоковский вакуум, $\hat{a}^\pm$ – операторы рождения и уничтожения частиц с 3-импульсом $\mathbf{k}$. П. ф. $A[a^*, a]$ называется нормальным символом оператора $\hat{A}$, а его разложение получается заменой $\hat{a}^+$, $\hat{a}^-$ на комплексно сопряженные функции a^*, a из нек-рого гильбертова пространства. При этом $\Phi[a^*]$ – П. ф. для волновых функций Φ_n n-частичных состояний, а $A[a^*, a]$ – П. ф. для матричных элементов A_{mn} оператора $\hat{A}$ в фоковском базисе.

В релятивистской теории в качестве функционального аргумента берется нормальный символ φ_0 оператора свободного поля:

$$\hat{\varphi}_0(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k} (2k_0)^{-1/2} \{\hat{a}^+(\mathbf{k}) \exp(ikx) +$$

$$+ \hat{a}^-(\mathbf{k}) \exp(-ikx), \quad k_0 = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

Нормальный символ матрицы рассеяния $\hat{S}$:

$$S[\varphi_0] = \sum_{n \geqslant 0} (n!)^{-1} \int dx_1 \ldots dx_n\, S_n(x_1, \ldots, x_n) \varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n)$$

является П. ф. ее коэффициентных функций S_n. Поскольку $\hat{\varphi}_0$, как и φ_0, удовлетворяют уравнению свободного поля, $\hat{S}$ и $S[\varphi_0]$ определены лишь на поверхности энергии. Для формулировки причинности вводят расширенный нормальный символ $S[\varphi]$, аргумент к-рого уже не удовлетворяет уравнению свободного поля. В теории возмущений этот П. ф. выражается формулой Хори:

$$S[\varphi] = \exp\left\{\frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} D^c(x - y) \frac{\delta}{\delta \varphi(y)}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{i \int dx\, \mathscr{L}_I[\varphi]\right\},$$

где $D^c(x)$ – причинная функция Грина (*пропагатор*), $\mathscr{L}_I[\varphi]$ – нормальный символ лагранжиана взаимодействия. Эта формула компактно записывает результат применения *Вика теоремы* к стандартному выражению для S-матрицы в теории возмущений:

$$\hat{S} = T \exp\{i \int d\hat{x}\, \hat{\mathscr{L}}\}.$$

Заменой функционального аргумента у $S[\varphi]$ можно получить П. ф. для *Грина функций* $G_n(x_1, \ldots, x_n)$:

$$Z[J] = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int dx dy\, J(x) D^c(x - y) J(y)\right\} \times$$

$$\times S\left[i \int dy\, D^c(x - y) J(y)\right],$$

где $J(x)$ – внешний источник поля. Функционал $W[J] = \ln Z[J]$ является П. ф. для связных функций Грина. *Лежандра преобразование* $W[J]$ дает П. ф. для сильно связных функций Грина, называемый иногда эффективным действием. На языке П. ф. легко выводятся и компактно формулируются *Уорда тождества* и нек-рые другие соотношения между функциями Грина.

П. ф. используется и в статистич. физике. Напр., введем s-частичные функции распределения N-частичной системы:

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_n) = V^s \int dx_{s+1} \ldots dx_N w_N(t, x_1, \ldots, x_n),$$
$$s = 1, 2, \ldots,$$

где V – объем, $x_i = (\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{p}_i)$, а полная функция распределения w_N удовлетворяет *Лиувилля уравнению*

$$dw_N/dt = \{\boldsymbol{H}, w_N\}$$

с *Гамильтона функцией*

$$H = T(\boldsymbol{p}_i) + U(|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j|).$$

Тогда всю цепочку *Боголюбова уравнений* для F_s порождает (в термодинамич. пределе V, $N \to \infty$, $V/N = v = \text{const}$) уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = dx f(x) \left\{T, \frac{\delta F}{\delta f(x)}\right\} + \int \frac{1}{2} \int dx dy (f(x)(f(y) + v^{-1} f(x) + v^{-1} f(y)) \left\{U, \frac{\delta^2 F}{\delta f(x) \delta f(y)}\right\},$$

для П. ф.

$$F[t; f] = \int dx_1 \ldots dx_N w_N(t, x_1, \ldots, x_N) \prod_{1 \leqslant i \leqslant N} (1 + v f(x_i)),$$

а сами F_s выражаются через него формулами

$$F(t; x_1, \ldots, x_s) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{-1} \frac{\delta^2 F}{\delta f(x_1) \ldots \delta f(x_s)}.$$

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] Васильев А. Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Л., 1976; [3] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988; [4] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

А. М. Малокостов, В. П. Павлов.

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ БОЗОНЫ, $W^{\pm}$- и Z^0-бозоны – короткоживущие частицы со спином 1 и массами $m_W \approx 80$ ГэВ и $m_Z \approx 90$ ГэВ соответственно, обмен которыми приводит к слабому взаимодействию между *кварками* и *лептонами*. При этом большая масса П. б. объясняет контактный характер этого взаимодействия. Обнаружение W- и Z-бозонов в соударениях на ускорителе ЦЕРН в 1983 К. Руббиа и С. Ван дер Меером (см. [1]) и совпадение их основных характеристик с предсказаниями теории стало одним из наиболее ярких свидетельств в пользу единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. W-бозон распадается по каналам $e\nu_l$, $\mu\nu_\mu$, $\tau\nu_\tau$, $\bar{q}q$, Z-бозон – по каналам e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$, $\bar{q}q$. Ширина распадов П. б. составляет примерно 2 ГэВ.

Лит.: [1] Руббиа К., «Успехи физич. наук», 1985, т. 147, № 2, с. 371–404.

А. Ю. Игнатьев.

ПРОПАГАТОР, функция распространения, причинная функция Грина, в квантовой теории поля – функция, характеризующая распространение релятивистского поля (или его кванта) от одного акта взаимодействия до другого. П. является решением классич. волнового уравнения с δ-образной правой частью, удовлетворяющим специфич. краевым условиям. Простейший П. $D^c(x-y)$ скалярного поля $\varphi(x)$ описывает распространение скалярной частицы между точками пространства-времени x и y и может быть представлен в виде 4-мерного интеграла Фурье:

$$D^c(x-y) = (2\pi)^{-4} \int e^{ik(x-y)} \Delta^c(k) d^4k,$$
$$\Delta^c(k) = (m^2 - k^2 - i\varepsilon)^{-1}, \quad \varepsilon \to +0.$$

Бесконечно малая мнимая добавка $i\varepsilon$, отвечающая упомянутым выше краевым условиям, дает правило обхода полюсов $\Delta^c(k)$, так что после выполнения интегрирования П. оказывается представимым в виде:

$$D^c(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) D^-(x-y) - \Theta(y^0 - x^0) D^+(x-y).$$

Таким образом, при $x^0 > y^0$ он совпадает с отрицательно-частотной частью перестановочной функции Паули – Йордана, равной вакуумному среднему $D^-(x-y) = i\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle_0$, а при $x^0 < y^0$ – положительно-частотной частью, то есть $i\langle\varphi(y)\varphi(x)\rangle_0$. Поэтому

$$D^c(x-y) = i\langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle_0,$$

где T – символ *хронологического произведения*; при $x^0 > y^0$ описывает распространение скалярного кванта из y в x, а при $x^0 < y^0$ – из x в y. Важность П. в квантовой теории поля связана с тем, что он является основным понятием ковариантной теории возмущений и фигурирует в правилах Фейнмана. Центральная роль П. в квантовополевой теории возмущений впервые установлена Д. Ривье (D. Rivier) и Э. Штюкельбергом (E. Stueckelberg).

Функцию распространения, учитывающую радиационные поправки при движении частицы между точками x и y, называют одетым пропагатором, или двухточечной функцией Грина.

См. также *Грина функция* в квантовой теории поля, *Фейнмана диаграмма*.

Лит.: [1] Rivier D., Stueckelberg E., «Phys. Rev.», 1948, v. 74, p. 218; [2] Feynman R. P., там же, 1949, v. 76, p. 749; [3] его же, там же, p. 769; [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1993.

Д. В. Ширков.

ПРОПАГАТОР уравнения Лиувилля – функция Грина *Лиувилля уравнения* для вектора распределения. Вектор распределения $\vec{f}(t) = \{fs(x_1, \ldots, x_s; t)\}$, являющийся совокупностью s-частичных функций распределения, удовлетворяет обобщенному уравнению Лиувилля

$$\partial_t \vec{f}(t) = \mathscr{L}\vec{f}(t),$$

где $\mathscr{L}$ – оператор Лиувилля. Решение этого уравнения выражается через П. $U(t)$ в виде

$$\vec{f}(t) = U(t)\vec{f}(0).$$

При этом П. уравнения Лиувилля можно определить как решение уравнения

$$\partial_t U(t) = \mathscr{L}U(t)$$

с начальным условием $U(0) = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ – единичный оператор.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 2, М., 1978.

Д. П. Санкович.

ПРОСАЧИВАНИЕ случайного поля – понятие теории *перколяции*, характеризующее структуру множеств уровня скалярного однородного относительно трансляций *случайного поля* $\{\xi(x)\}$, где $x \in \mathbb{R}^d$, либо x является элементом (вершиной, ребром) *периодического графа* G. Определения П. случайного поля в дискретном ($x \in G$) и непрерывном ($x \in \mathbb{R}^d$) случаях несколько отличаются друг от друга. Введем для каждого $h \in \mathbb{R}$ множества уровня $A_h^+ = \{x: \xi(x) \geqslant h\}$, $A_h^- = \{x: \xi(x) < h\}$, $x \in G$, либо $\mathbb{R}^d$. В дискретном случае поле $\{\xi(x);\ x \in G\}$, по определению, просачивается, если существует уровень h^+ (просачивания) такой, что при $h > h^+$ множество A_h^+ с вероятностью 1 распадается на конечные связные компоненты, а множество A_h^- с ненулевой вероятностью содержит бесконечную связную компоненту. Рассматривается иногда и двойственное понятие, к-рое эквивалентно просачиванию поля $\{-\xi(x)\}$. В случае непрерывного с вероятностью 1 поля $\{\xi(x);\ x \in \mathbb{R}^d\}$ определение просачивания отличается от определения в дискретном случае требованием существования случайной величины $\rho(\xi)$ такой, что множество A_h^+ распадалось бы с вероятностью 1 на непересекающиеся компакты, расстояние между к-рыми не меньше $\rho(\xi)$, а множество A_h^- содержало бы с

ненулевой вероятностью уходящую на бесконечность кривую вместе с ее $\rho(\xi)$-окрестностью. Это видоизменение связано с возможностью существования у непрерывных случайных полей типичных множеств уровня канторовского типа, рассмотрение к-рых в задачах теории перколяции нежелательно по физич. соображениям.

Лит.: [1] Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф., в кн.: Итоги науки и техники, сер. Теория вероятностей, математич. статистика и теоретич. кибернетика, т. 24, М., 1986, с. 53–110. *Ю. П. Вирченко.*

ПРОСТАЯ АЛГЕБРА – *алгебра*, не имеющая идеалов кроме нулевого и совпадающего со всей алгеброй. Согласно классификации Киллинга существует 4 бесконечных серии простых комплексных алгебр Ли A_n, B_n, C_n, D_n и 5 особых алгебр. Другие обозначения:

$$A_n = sl(n+1),\ B_n = SO(2n+1),\ C_n = Sp(2n),\ D_n = SO(2n).$$

Бесконечные серии определяются следующим образом ($n = 1, 2, \ldots$):

A_n – алгебра матриц размера $(n+1)\times(n+1)$ со следом 0;

B_n – алгебра кососимметрич. матриц размера $(2n+1)\times(2n+1)$;

D_n – алгебра кососимметрич. матриц размера $2n\times 2n$;

C_n – алгебра матриц X размера $2n\times 2n$, удовлетворяющих условию $XJ + JX' = 0$, где X' – транспонированная матрица к X, а

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Особые алгебры обозначаются G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 и имеют размерности соответственно 14, 52, 78, 133, 248.

Существует также 12 серий вещественных простых алгебр Ли (это так наз. классические вещественные алгебры Ли, см. *Классические группы и алгебры Ли*) и 23 особых алгебры. *Ю. А. Неретин.*

ПРОСТАЯ ГРУППА – *группа* без нормальных делителей, отличных от единичной подгруппы и всей группы. Связная группа Ли называется простой, если она не содержит замкнутых нормальных делителей размерности больше 0, отличных от самой группы. Это определение не согласовано с определением для абстрактной группы: простая группа Ли может содержать дискретный (нульмерный) нормальный делитель (тогда он должен содержаться в центре группы). Связная группа Ли проста тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли проста (см. *Простая алгебра*). *Ю. А. Неретин.*

ПРОСТОГО СЛОЯ ПОТЕНЦИАЛ – выражение вида

$$u(x) = \int_S h(|x-y|)\, f(y)\, d\sigma(y), \qquad (1)$$

где S – замкнутая поверхность Ляпунова в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, разделяющая $\mathbb{R}^n$ на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-; $f(y)$ – плотность потенциала – функция, заданная на S; $h(|x-y|)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$h(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_N |x-y|^{N-2}}, & n \geqslant 3; \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & n \geqslant 2; \end{cases}$$

$\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $|x-y|$ – расстояние между точками x и y, $d\sigma(y)$ – элемент площади S.

Если $f(x) \in C^{(0)}(S)$, то П. с. п. $u(x)$ определен всюду в $\mathbb{R}^n$. П. с. п. представляет собой частный случай *ньютонова потенциала*, порождаемого массами, распределенными на поверхности S с поверхностной плотностью $f(y)$, и обладает следующими свойствами.

В D^+ и D^- П. с. п. $u(x)$ имеет производные всех порядков, к-рые можно вычислять под знаком интеграла, и удовлетворяет *Лапласа уравнению*

$$\Delta u(x) = 0,$$

то есть является *гармонической функцией*. При $n \geqslant 3$ эта функция регулярна на бесконечности, $u(\infty) = 0$. П. с. п. $u(x)$ непрерывен во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. При переходе через поверхность S производная по направлению внешней нормали n_0 к S в точке $y_0 \in S$ терпит разрыв. Предельные значения нормальной производной из области D^+ и из области D^- существуют и непрерывны всюду на S.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теории потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977. *Е. Д. Соломенцев.*

ПРОСТОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ – см. *Свободное гармоническое колебание.*

ПРОСТОЙ МАЯТНИК – см. *Лагранжа – Пуассона случай.*

ПРОСТОЙ СПЕКТР – см. *Спектральная теорема.*

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ИНВЕРСИЯ – см. *Киральная симметрия.*

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ СИММЕТРИЯ – симметрия пространственно-временного континуума, в котором протекают физические процессы. В основном П.-в. с.– это следствие изотропии и однородности пространства-времени, они проявляются в инвариантности (ковариантности) физич. систем, полей и уравнений движения относительно преобразований координат, отвечающих вращениям или трансляциям вдоль направлений пространственно-временных осей. В квантовой механике и квантовой теории поля существенную роль играют дополнительные, дискретные симметрии, связанные с отражениями пространственно-временных осей. С П.-в. с. связаны *сохранения законы*: из свойства изотропии пространства следует сохранение углового момента, из однородности пространства-времени – сохранение 4-импульса. Дискретные симметрии приводят к сохранению четности. Законы сохранения четности являются приближенными, но нет никаких указаний на приближенный характер непрерывных П.-в. с.

Группа П.-в. с. называется *Пуанкаре группой*. Ее генераторами в квантовой теории поля являются 6 компонент антисимметричного тензора момента количества движения $M_{\mu\nu}$ и 4 компоненты вектора импульса P_ν, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

В квантовой теории поля существует теоретич. возможность расширения пространственно-временного континуума за счет включения $4N$ дополнительных вещественных антикоммутирующих координат, при этом группа Пуанкаре расширяется до группы простой ($N = 1$) или расширенной ($1 < N < 8$) суперсимметрии (см. *Суперсимметрия, Супергравитация*). Однако неясно, реализуется ли в природе эта возможность.

Существует глубокая связь между П.-в. с. и *внутренними симметриями*. Наиболее ярким примером такой связи является строгое сохранение CPT-четности (при приближенном сохранении C- и PT-четности). *М. В. Терентьев.*

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ – см. *Геометро-оптическое приближение.*

ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОСЛАБЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ ПРИНЦИП – основное утверждение статистической механики, согласно которому статистический оператор $\hat{\rho}$, описывающий макроскопическое состояние физической системы, удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{Sp}\,\rho\,\hat{a}(x)\,\hat{b}(y) \xrightarrow[|x-y|\to\infty]{} \mathrm{Sp}\,\rho\,\hat{a}(x)\,\mathrm{Sp}\,\rho\,\hat{b}(y)$$

при произвольных квазилокальных операторах $\hat{a}(x)$, $\hat{b}(y)$. [Оператор $\hat{a}(x)$ – квазилокальный, если аргументы x' полевых операторов $\psi(x')$, $\psi^+(x')$, из к-рых строится оператор $\hat{a}(x)$, лежат вблизи точки x.] В этом соотношении предельный переход $|x-y| \to \infty$ осуществляется после термодинамич. предельного перехода. Соотношение П. о. к. п.– нелинейно, что приводит к нелинейности урав-

нений макроскопич. физики. П. о. к. п., в частности, удовлетворяет равновесный статистич. оператор Гиббса.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 3, Киев, 1971; [2] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984. *М. Ю. Ковалевский.*

ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫЙ ВЕКТОР в частной (специальной) и общей теории относительности – четырехмерный вектор, сумма квадратов пространственных компонент которого больше квадрата его временной компоненты. П. в., имеющий начало в какой-нибудь точке четырехмерного пространства-времени, лежит вне внутренних полостей светового конуса с вершиной в данной точке. Всегда существует система отсчета, в к-рой временная компонента П. в. обращается в нуль, и у него остаются только пространственные компоненты. В *Минковского пространстве-времени* с метрич. тензором $(+1, -1, -1, -1)$ квадрат длины П. в. A отрицателен:

$$(A)^2 = A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - A^2 < 0, \ \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь A^0 – временная, A^i, $i = 1, 2, 3$, – пространственная компоненты 4-вектора, $A = (A^1, A^2, A^3)$. *И. Д. Новиков.*

ПРОСТРАНСТВО КОНФИГУРАЦИЙ – см. *Классический ансамбль.*

ПРОСТРАНСТВО РЕАЛИЗАЦИЙ – см. *Случайный процесс.*

ПРОСТРАНСТВО С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ – векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ (соответственно $\mathbb{R}$) с полуторалинейной (соответственно билинейной) формой, которая, не являясь положительно определенной, по традиции называется индефинитной метрикой. Исследование геометрии развито для П. с и. м., имеющих добавочную структуру топологич. пространства.

Пример. Так называемое пространство с G-метрикой – гильбертово пространство H с эрмитовой непрерывной формой $\langle x, y\rangle = (x, Gy)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, а оператор G ограничен и самосопряжен. Наиболее продвинута теория операторов в J-пространствах, когда индефинитная метрика в гильбертовом пространстве $\langle x, y\rangle = (x, Jy)$ задается такой инволюцией $J = J^{-1} = J^*$, что $J = P_+ - P_-$; здесь P_+ – ортогональные проекторы, $P_\pm \neq 0$, $P_+P_- = 0$, $P_+ + P_- = I$ и $\langle x, y\rangle = (P_+x, P_+y) - (P_-x, P_-y)$. При

$$\varkappa = \min\{\dim P_+ H, \dim P_- H\} < \infty$$

J-пространство называется пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$, при $\varkappa = \infty$ – пространством Крейна. Пространства Крейна применяются, в частности, в квантовой теории калибровочных полей.

Лит.: [1] Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С., «Успехи математич. наук», 1962, т. 17, в. 4, с. 3–56; [2] Крейн М. Г., в кн.: II летняя математическая школа, т. 1, Киев, 1965, с. 15–92; [3] Надь К., Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1969; [4] Bognar J., Indefinite inner product spaces, B.– [a. o.], 1974; [5] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С., Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, М., 1986; [6] Хоружий С. С., Введение в алгебраическую квантовую теорию поля, М., 1986. *А. В. Булинский.*

ПРОСТРАНСТВО С УГЛОВОЙ МЕТРИКОЙ – см. *Вейля связность.*

ПРОСТРАНСТВО ТИПА S' – пространство *обобщенных функций*, обладающих свойствами *ультрараспределений* и *умеренных распределений*. Введены И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым в конце 50-х гг. 20 в.

Основное пространство S_p, $p \geqslant 0$, состоит из всех функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих оценкам

$$|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leqslant C_{|\beta|} A^{|\alpha|} |\alpha|^{p|\alpha|}, \ |\alpha|, |\beta| = 0, 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

где постоянные $C_{|\beta|}$, A зависят от φ.

Основное пространство S^q, $q \geqslant 0$, состоит из всех функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих оценкам

$$|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leqslant C_{|\alpha|} B^{|\beta|} |\beta|^{q|\beta|}, \ |\alpha|, |\beta| = 0, 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

где постоянные $C_{|\alpha|}$, B зависят от φ.

Основное пространство S_p^q, $p, q \geqslant 0$, состоит из всех функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих оценкам

$$|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leqslant C A^{|\alpha|} B^{|\beta|} |\alpha|^{p|\alpha|} |\beta|^{q|\beta|},$$
$$|\alpha|, |\beta| = 0, 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

где постоянные C, A, B зависят от φ.

Здесь функции $\varphi(x)$ определены и имеют непрерывные производные всех порядков в $\mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, – мультииндексы, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta = D_1^{\beta_1} \ldots D_n^{\beta_n}$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$.

Пространства S_p, S^q, S_p^q снабжаются естественными локально выпуклыми топологиями. Сопряженные пространства называются пространствами типа S'. Пространства S_p и S^q всегда нетривиальны, то есть содержат отличные от нуля элементы, пространства S_p^0 и S_0^q нетривиальны тогда и только тогда, когда $p > 1$ и $q > 1$, S_p^q при $p > 0$ и $q > 0$ нетривиально тогда и только тогда, когда $p + q \geqslant 1$. Преобразование Фурье F (см. *Фурье преобразование* обобщенных функций) задает топологич. изоморфизмы

$$F: S_p \cong S^p, \ F: S_p^q \cong S_q^p$$

и аналогичные изоморфизмы для сопряженных пространств. В пространствах S^q и S_p^q, $q > 0$, действуют дифференциальные операторы бесконечного порядка

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha,$$

где символ $P(z)$ – целая функция минимального типа порядка роста $1/q$.

Изучаются пространства типа S' более общего вида с заменой последовательности $|\alpha|^{p|\alpha|}$ на $a_{|\alpha|}$ и $|\beta|^{q|\beta|}$ на $b_{|\beta|}$.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958. *В. В. Жаринов.*

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ньютоновской гравитации – геометрическая модель гравитационного поля, представляющая собой прямое произведение $E^1 \times E^3$ оси времени E^1 на евклидово пространство E^3. Точки П.-в. ньютоновской гравитации моделируют события. Расстояние между двумя точками в П.-в. ньютоновской гравитации определено лишь для одновременных событий. П.-в. ньютоновской гравитации, таким образом, представляет собой расслоенное по времени 4-мерное пространство-время со слоями E^3. Свободное движение (движение по инерции) в П.-в. ньютоновской гравитации происходит по кривым, соответствующим свободному движению в гравитационном поле. Различным ньютоновским гравитационным полям соответствуют различные П.-в. ньютоновской гравитации. Величина гравитационного поля характеризуется отклонением «геодезических» в соответствующем П.-в. ньютоновской гравитации от прямых, представляющих собой геодезические в пространстве-времени Галилея, к-рое является частным случаем П.-в. ньютоновской гравитации при отсутствии гравитационного поля и обладает десятипараметрич. группой движений Галилея. Световой конус в П.-в. ньютоновской гравитации вырождается, и в силу этого возможно движение с любыми скоростями.

Лит.: [1] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972. *А. Т. Ильичев.*

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ теории относительности – модель физического мира, гладкое четырехмерное многообразие с гладкой (псевдо)метрикой – интервалом. В основе концепции П.-в. лежит понятие точечного события. Точечное событие моделируется точкой П.-в. и

характеризуется четырьмя числами – координатами, одна из к-рых – временная, а три других – пространственные. Движение в П.-в. происходит по траекториям, к-рые называются мировыми линиями. Различают П.-в. специальной теории относительности, или пространство Минковского, и П.-в. общей теории относительности. Г. Минковский [1] заметил, что пространственно-временные свойства физич. явлений могут быть описаны как геометрич. свойства упомянутого П.-в. Эти свойства основаны на постулате о независимости скорости света c в вакууме от движения источника и на принципе относительности А. Эйнштейна [2]. Существуют глобальные системы координат t, x, y, z, определяющие так наз. инерциальные системы отсчета, в к-рых интервал в любой точке пространства Минковского записывается в виде:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (1)$$

и может иметь как положительное, так и нулевое и отрицательное значение. Точечное событие отвечает конкретным значениям времени t и пространственных координат x, y, z. Переход к системе координат $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, характеризующих другую инерциальную систему отсчета, осуществляется при помощи *Лоренца преобразований*, при этом вид интервала (1) сохраняется в новых координатах.

А. Эйнштейн первым связал физич. свойства гравитационного поля с геометрией 4-многообразия с интервалом

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j,\ i, j = 0, 1, 2, 3. \qquad (2)$$

При этом «потенциалами» гравитационного поля являются геометрич. характеристики П.-в.– компоненты метрич. тензора g_{ij}. Придать конкретный смысл четверке чисел – координат, моделирующих точечное событие, как это делается в пространстве Минковского, не представляется возможным. Этот факт лежит в основе принципа общей ковариантности, к-рый является своего рода обобщением принципа относительности Эйнштейна. Вопрос о структуре П.-в. тесно связан с вопросом о структуре нашей Вселенной, так как всякая адекватная модель должна удовлетворительным образом описывать реальный мир. Поэтому геометрич. свойства П.-в. должны определяться совокупностью физически приемлемых постулатов, основанных на экспериментальных данных. Часть постулатов, обеспечивающих характерные локальные свойства П.-в., являются общими для специальной и общей теории относительности, и поэтому основанием для их принятия служит экспериментальное подтверждение специальной теории относительности.

Локальные свойства пространства-времени. Указать преобразование координат, приводящее метрику (2) к лоренцеву виду (1) во всем П.-в. возможно лишь в пространстве Минковского. В П.-в. общей теории относительности это можно сделать только в бесконечно малой окрестности любой точки (при этом можно занулить также и символы Кристоффеля в данной точке). Полученная таким образом локальная эквивалентность П.-в. специальной теории относительности является выражением принципа эквивалентности Эйнштейна (см. [3]), утверждающего равенство гравитационной и инертной масс. Полная эквивалентность гравитационного поля (в бесконечно малом объеме) и соответствующего ускорения системы отсчета проявляется в том, что локально гравитационное поле может быть устранено преобразованием координат так же, как и метрика в криволинейной (ускоренной) системе отсчета в П.-в. без тяготения может быть приведена к виду (1). Таким образом, локальные свойства искривленного П.-в. совпадают со свойствами пространства Минковского. Системы отсчета, в к-рых метрика имеет вид (1) и символы Кристоффеля равны нулю, называются свободно падающими.

Уравнения для материальных полей должны быть такими, чтобы все взаимодействия, описываемые ими, распространялись по кривым, лежащим внутри или на поверхности светового конуса, определяемого уравнением $ds=0$ в каждой точке П.-в. (локальная причинность).

Компоненты метрич. тензора должны удовлетворять *Эйнштейна уравнениям*, получающимся из вариационного принципа, предложенного Д. Гильбертом [4]:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = 4\pi T_{ij}, \qquad (3)$$

где R_{ij} – компоненты тензора Риччи, R – скалярная кривизна, T_{ij} – компоненты тензора энергии-импульса материи, обуславливающие влияние материальных полей на геометрию. К системе (3) необходимо добавить уравнения, к-рым подчиняются характеристики этих полей. Компоненты метрич. тензора пространства Минковского являются частным решением уравнений (3) в пустоте ($T_{ij}=0$). Следствием уравнений (3) является локальный закон сохранения энергии-импульса

$$\nabla_i T^{ij} = 0.$$

Глобальные свойства пространства-времени. В настоящее время не существует экспериментов, в достаточной мере проливающих свет на свойства крупномасштабной структуры реальной Вселенной. В связи с этим изучение глобальной структуры П.-в. основывается на специфич. свойствах многообразий с лоренцевой метрикой (2), а также на нек-рых интуитивных представлениях о непрерывности П.-в. и причинности. Наиболее типичные глобальные свойства, характерные для различных классов физически важных (моделирующих ту или иную физич. ситуацию) решений уравнений (3) и соответствующих уравнений, описывающих материальные поля, основаны на приводимых ниже понятиях и определениях.

Одним из самых важных свойств, присущих П.-в., является свойство пространственной и временной ориентируемости. П.-в. называется ориентируемым, если в каждой точке и непрерывно от точки к точке можно провести разделение времениподобных векторов на направленные в будущее и в прошлое, а ортогональных пространственноподобных триад – на левые и на правые. Два времениподобных вектора одинаково ориентированы (оба направлены в будущее или в прошлое), когда их скалярное произведение положительно. Все многообразия, имеющие топологию $\mathbb{R}^4$, напр., отвечают ориентируемому П.-в. В общей теории относительности таковыми являются, в частности, пространство Минковского, вселенная Казнера, открытая вселенная Фридмана, пространства, отвечающие решению Геделя и плосковолновым решениям. Любое односвязное П.-в. также является ориентируемым. В ориентируемом П.-в. для любой точки A ее областью влияния будущего, или просто будущим, $I^+(A)$ называется множество всех точек, к-рым A предшествует (см. *Причинная структура*). Областью влияния прошлого, или прошлым, $I^-(A)$ точки A называется множество всех точек, к-рые предшествуют A. $I^+(A)$ и $I^-(A)$ являются открытыми множествами. Границей будущего ∂I^+ (прошлого ∂I^-) любой точки является изотропная поверхность: для любой точки $B \in \partial I^+$ ($B \in \partial I^-$) через эту точку проходит направленная в прошлое (будущее) нулевая геодезическая, целиком лежащая на этой границе и не имеющая конечных точек в прошлом (будущем), кроме, быть может, A. Примером будущего $I^+(A)$ для любой точки A в пространстве Минковского может служить внутренность верхней половины светового конуса точки A, а прошлого $I^-(A)$ – внутренность нижней половины. Границей $\partial I^\pm(A)$ является световой конус с вершиной в точке A – изотропная поверхность.

Существуют решения уравнения (3), содержащие области, где нарушается причинность, то есть имеются точки, к-рые предшествуют сами себе, и времениподобные кривые, проходящие через них, являются замкнутыми. Примерами таких решений служат П.-в. Геделя, П.-в. Тауба–Нут, продолженное П.-в. Керра. В теории относительности такие области считаются нефизичными. Более сильный вари-

ант требования отсутствия замкнутых времениподобных мировых линий известен как условие сильной причинности: для любой точки П.-в. существуют сколь угодно малые ее окрестности такие, что ни одна времениподобная мировая линия не пересекает каждую из этих окрестностей более одного раза. П.-в. называется устойчиво причинным, если существует поле неисчезающего времениподобного вектора с компонентами t_a такого, что П.-в. с метрикой $G_{ab}=g_{ab}+t_at_b$, к-рая является лоренцевой, не допускает замкнутых времениподобных линий. Смысл данного определения заключается в том, что внутренность светового конуса для метрики G_{ab} содержит световой конус для метрики g_{ab} и поэтому множество мировых линий, к-рые являются времениподобными, расширяется. Для П.-в., имеющего замкнутые времениподобные и нулевые линии или не удовлетворяющего условию сильной причинности, нарушается также и устойчивая причинность. Любое компактное многообразие, напр., не может служить моделью устойчиво причинного П.-в. Этим объясняется тот факт, что компактное П.-в. редко рассматривается в теории относительности. Если П.-в. допускает глобальную временную функцию, то есть функцию, возрастающую вдоль любой непространственноподобной кривой при движении в будущее и имеющую времениподобный градиент, то оно является устойчиво причинным и наоборот (см. [5]). В устойчиво причинном П.-в. топология может быть введена при помощи окрестностей, являющихся пересечением открытых множеств $I^+(A)$ и $I^-(A)$ для любых точек A и B, где A предшествует B (см. [5]). Наряду с понятием будущего (прошлого) для точки, важную роль в теории относительности играет понятие области зависимости будущего (прошлого) пространственноподобной поверхности S. Областью зависимости будущего $D^+(S)$ поверхности S называется такая область П.-в., что каждая направленная в прошлое непродолжимая времениподобная мировая линия, проходящая через любую точку этой области, пересекает S. Физика в области зависимости будущего полностью определяется «начальными данными» на поверхности S. Область зависимости прошлого определяется аналогичным образом, с той лишь разницей, что слово «будущее» везде заменяется на «прошлое» и наоборот. Областью зависимости называется объединение областей зависимости будущего и прошлого. Области зависимости $D^+(S)$ и $D^-(S)$ замкнуты: каждая из них включает S. Примером области зависимости будущего может служить область зависимости будущего поверхности $t=0$ (плоскости) или верхней полости гиперболоида $t^2=x^2+y^2+z^2+1$ в пространстве Минковского. В первом случае $D^+(S)$ определяется неравенством $t\geqslant 0$, а во втором – $t\geqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$. Более нетривиальный пример представляет собой область $D^+(S)$ для другой половины гиперболоида: она имеет границу в будущем и состоит из области П.-в., ограниченной поверхностью светового конуса и гиперболоида: $-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant t\geqslant-\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$.

Если две точки A и B принадлежат внутренности области зависимости поверхности S (A предшествует B), то существует времениподобная геодезическая максимальной длины, соединяющая эти точки. Задача Коши для уравнений Эйнштейна (3) может быть сформулирована при помощи понятия области зависимости пространственноподобной поверхности S, а именно: если на S задана 3-мерная метрика и материальные поля, подчиненные специальным ограничениям (см. [5]), то существует и единственно решение уравнений (3), определяющее П.-в. в максимальной области зависимости $D^+(S)$. Поверхность S называется поверхностью Коши, если область $D^+(S)\cup D^-(S)$ совпадает со всем пространством. В качестве примера поверхности Коши можно привести поверхность $t=0$ в пространстве Минковского. Наличие поверхности Коши не является типичным для П.-в. Напр., такие важные решения (3), как максимально продолженные П.-в. Рейсснера – Нордстрема и П.-в. Керра, П.-в. Тауба–Нут и плосковолновые П.-в., не имеют поверхностей Коши. Если S – поверхность Коши, то границы $D^+(S)$ и $D^-(S)$ – горизонты Коши – отсутствуют.

Особую роль в теории относительности играет понятие асимптотически плоского П.-в., переходящего в пространство Минковского на бесконечности. В асимптотически плоском П.-в. появляется возможность определить энергию излученных гравитационных волн как разность масс источника до и после излучения. Г. Бонди (H. Bondi) и Р. Сакс (R. Sachs) построили процедуру измерения соответствующих масс при помощи интегрирования по изотропным поверхностям (см., напр., [6]). Р. Пенроуз (R. Penrose) обобщил их результаты, предложив использовать свойства конформной границы (*конформной бесконечности*), к-рая образована начальными и конечными точками нулевых геодезических, для решения проблемы, где существенны асимптотич. свойства, напр. для изучения поведения безмассовых полей на бесконечности (см. [7]). Понятие конформной бесконечности используется также и в космологии (см. [7]). Типичным примером асимптотически плоского П.-в. является П.-в. *черных дыр*, в частности П.-в. Керра и П.-в. Шварцшильда. Последнее соответствует также полю тяготения вне сферически симметричного тела с интервалом

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Вследствие принципа общей ковариантности допустима любая гладкая замена координат, в частности:

$$x=\frac{1}{r},\quad u=t-r-2m\ln(r-2m). \tag{4}$$

В координатах u, x, φ, θ интервал (4) примет вид:

$$ds^2=x^{-2}(-2dudx+x^2(1-2mx)du^2-d\theta^2-\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{5}$$

Исходное многообразие может быть расширено за счет присоединения к нему конформной границы $x=0$. В карте (4) эти точки будут принадлежать конформной бесконечности будущего J^+. Если заменить в (4) t на $-t$, получится аналогично граница J^-. Конформный множитель $\Omega=x$, его градиент в метрике (5) изотропен. Метрика Ω^2ds^2 регулярна всюду, в том числе и на конформной бесконечности. Важным свойством ряда асимптотически плоских полей является наличие в соответствующем П.-в. области, из к-рой наблюдатель, движущийся по непространственноподобной кривой, не может попасть на бесконечность J^+. Граница этой области называется горизонтом событий, или просто горизонтом. Горизонт представляет собой изотропную поверхность и является границей прошлого конформной бесконечности будущего J^+. П.-в., имеющее горизонт, называется черной дырой. Аффинному параметру вдоль нулевых образующих горизонта соответствует параметр «времени» τ, возрастающий с возрастанием аффинного параметра ($l^a\tau_a>0$, l^a – компоненты вектора, касательного к нулевым образующим горизонта). «Время» τ параметризует семейство пространственноподобных поверхностей, пересечение к-рых с горизонтом H^+ образует границу ядерной дыры в фиксированный момент времени. Внешность горизонта называется областью внешних сношений. В симметричных по времени решениях (3) при замене знака времени черная дыра превращается в *белую дыру* – П.-в., обладающее границей будущего H^- конформной бесконечности прошлого J^-. В общем случае наличие черной и белой дыры (а значит, и двух горизонтов H^+ и H^-) область внешних сношений является пересечением областей прошлого J^+ и будущего J^-, то есть находится вне обоих горизонтов. В физически реалистичных

ситуациях гравитационного коллапса области П.-в., соответствующие белым дырам, отсутствуют.

Изучение свойств П.-в. составляет предмет специальной и общей теории относительности. Так как современная наука располагает малым количеством экспериментов для подтверждения общей теории относительности, упомянутые свойства могут иметь пока лишь предсказательную силу для крупномасштабных эффектов и физич. явлений в сильных гравитационных полях. Что касается пространства Минковского, то его свойства лежат в основе теорий, в к-рых рассматриваются движения с релятивистскими скоростями: классич. и квантовой электродинамики, теории сильного и слабого взаимодействия; они нашли свое подтверждение в эксперименте. На свойствах П.-в. с усложненной по сравнению с П.-в. теории относительности структурой основаны многие активно развивающиеся в настоящее время теории гравитации. В частности, при описании релятивистской сплошной среды рассматривается связь между спиновыми свойствами вещества и кручением П.-в. (см. [8]). П.-в. с кручением составляет предмет изучения также и в *супергравитации* (см. [9]) – теории с дополнительными локальными симметриями между бозонами и фермионами, где кручение П.-в. проявляется в результате наличия поля спина 3/2. Кроме того, рассматриваются теории, где используются модели П.-в. большего числа измерений (см. [10]).

Лит.: [1] Minkowski H., «Phys. Z.», 1909, Bd 10, S. 104–11; [2] Einstein A., «Ann. Phys.», 1905, Bd 17, S. 891–921; [3] Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. 1, пер. с нем., М., 1965, с. 452–504; [4] Hilbert D., «Nachr. Gesellschaft Wiss. Göttingen. Math.-phys. Klasse», 1915, № 3, S. 395; [5] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977; [6] Sachs R., «Proc. Roy. Soc.», 1962, v. A270, № 1340, p. 103–26; [7] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [8] Traufman A., «Sympos. Math.», 1972, v. 12, p. 139–62; [9] Deser S., Zumino B., «Phys. Lett.», 1976, v. B 62, № 3, p. 335–37; [10] Владимиров Ю. С., Системы отсчета в теории гравитации, М., 1982; [11] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 1–3, М., 1977; [12] Бим Дж., Эрлих П., Глобальная лоренцева геометрия, пер. с англ., М., 1985.

А. Т. Ильичев.

ПРОТЕКАНИЕ – см. *Перколяция.*

ПРОТЯЖЕННАЯ СИСТЕМА – система излучателей, линейные размеры которой много больше длины волны испускаемого ею излучения. В П. с., в отличие от *сосредоточенной системы*, существенны процессы распространения поля, то есть, напр., для получения когерентного отклика системы необходимо, чтобы процессы, происходящие в двух различных точках системы, не были синхронны во времени, а зависели от запаздывающего времени $\tau = t - \frac{x}{c}$, где t – время, x – координата точки в одномерной П. с., c – скорость распространения волны в среде. Второй член в последней формуле учитывает разность фаз когерентной волны $\Delta\varphi = \frac{\omega}{c}(x_2 - x_1)$ в точках с координатами x_1 и x_2 соответственно. Часто распределенную систему при нек-рых упрощающих предположениях удается заменить эффективной сосредоточенной. Если атомная система взаимодействует с одной модой поля, то уравнения движения такой системы принимают вид уравнений движения сосредоточенной системы при следующей замене атомных операторов:

$$\sigma_{i+} \to \sigma_{i+} \exp(i\boldsymbol{k}_0 \boldsymbol{r}_i),$$

где $\boldsymbol{k}_0$ – волновой вектор выделенной моды поля, $\boldsymbol{r}_i$ – радиус-вектор i-го атома.

А. В. Андреев.

ПРОШЛОГО ГОРИЗОНТ КОШИ – см. *Коши горизонт* прошлого.

ПРОШЛОГО ТРУБА – см. *Труба будущего.*

ПРОШЛОЕ в теории относительности – см. *Пространство-время* теории относительности.

ПРЫГАЮЩИЙ МЯЧИК; асимптотические собственные функции – приближенные, асимптотические при $k_{pq} \to \infty$, решения $u_{pq}(x)$ задачи на собственные функции оператора Лапласа Δ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Delta u_{pq}(x) + k_{pq}^2 u_{pq}(x) = 0,\ x \in \Omega,\ u_{pq}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (1)$$

сосредоточенные вблизи устойчивого диаметра AB области Ω. Вместо условия Дирихле (1) можно рассматривать и другие самосопряженные краевые условия. Отрезок AB, целиком лежащий в Ω с концами A, B, принадлежащими границе $\partial\Omega$ области Ω, называется диаметром, если касательные к $\partial\Omega$ в точках A и B ортогональны AB. Диаметру AB отвечает замкнутая биллиардная траектория γ в Ω, состоящая из двух звеньев AB и BA. Диаметр называется устойчивым, если близкие к γ биллиардные траектории при неограниченном продолжении остаются в малой окрестности γ. В этом случае собственные числа линейной части отображения Пуанкаре замкнутой траектории γ имеют вид $\exp\{\pm i\alpha_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Асимптотика соответствующих собственных чисел k_{pq} оператора Лапласа выражается (при определенном выборе знаков у α_j) следующей формулой:

$$k_{pq} \approx d^{-1}\left(\pi p + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left(q_j + \frac{1}{2}\right)\alpha_j\right), \qquad (2)$$

где d – длина AB, q_j – натуральные числа, причем $p \gg 1$. Показано (см. [1]) в случае $n = 2$, что асимптотич. формула (2) справедлива с погрешностью порядка $p^{1-2\varepsilon}$ при $p \to \infty$, если

$$q_j \leqslant \text{const}\, p^{1-\varepsilon},\ \varepsilon \in (0,\ 1).$$

С другой стороны, асимптотич. собственные функции П. м., вообще говоря, не аппроксимируют истинные собственные функции оператора Лапласа (см. [2]).

Лит.: [1] Лазуткин В. Ф., Терман Д. Я., «Записки научных семинаров Ленингр. отд. Математич. ин-та», 1981, т. 117, с. 172–82; [2] Арнольд В. И., «Функциональный анализ и его прилож.», 1972, т. 6, в. 2, с. 12–20; [3] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.

В. Ф. Лазуткин.

ПРЯМАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ – объект равновесной статистической механики классических систем, определяемый соотношением

$$-\beta\frac{\delta\psi(\vec{q}_2)}{\delta n_1(\vec{q}_1;\psi)} = \frac{1}{n_1(\vec{q}_1;\psi)}\delta(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) - C(\vec{q}_1, \vec{q}_2;\psi),$$

где β – обратная температура, n_1 – одночастичная функция распределения классической системы N тождественных частиц с гамильтонианом $H_\psi = H + \Psi$, где

$$H = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N}\Phi(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|);$$

$$\Psi = \sum_{j=1}^{N}\psi(\vec{q}_j),$$

$\vec{q}_i, \vec{p}_i$ – канонические координаты и импульсы i-й частицы, Ψ – внешнее поле, зависящее только от пространственных координат частиц, $\delta(\vec{q})$ – δ-функция Дирака. В определение П. к. ф. $C(\vec{q}_1, \vec{q}_2;\psi)$ входит обратная функциональная производная от одночастичной функции распределения по внешнему полю. П. к. ф. при $\psi = 0$ в пространственно однородном случае удовлетворяет *Орнштейна – Цернике уравнению.* П. к. ф. широко используется в функциональной формулировке равновесной статистич. механики.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.–Л., 1946; [2] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978; [3] Lebowitz J. L., Percus J. K., «J. Math. Phys.», 1963, v. 4, p. 116.

Д. П. Санкович.

ПРЯМАЯ СУММА представлений T и T' группы G – линейное представление группы G, определяемое следующим образом: если T – линейное представление в про-

странстве H, а T' – в H' и $g\in G$, то оператор $(T+T')_g$ определен в $H\oplus H'$ как

$$(T+T')_g(h\oplus h')=T_gh\oplus T'_gh'$$

и отображение

$$g\to(T\oplus T')_g$$

– линейное представление группы G, называемое прямой суммой представлений T и T'. П. с. представлений ассоциативных алгебр, алгебр Ли, C^*-алгебр и др. определяется аналогично. *Ю. А. Неретин.*

ПРЯМЕЙШЕГО ПУТИ ПРИНЦИП – один из *вариационных принципов классической механики*. См. *Герца принцип* прямейшего пути.

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ – одна из основных общематематических конструкций, идея которой принадлежит Р. Декарту (R. Descartes); П. п. называют также декартовым произведением. Прямым произведением, или просто произведением, двух непустых множеств X и Y называют множество $X\times Y$, состоящее из всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x\in X$, $y\in Y$:

$$X\times Y=\{(x, y)\,|\,x\in X,\ y\in Y\}.$$

Если одно из множеств X или Y пусто, то произведение пусто. Множество $X\times Y$ можно отождествить с множеством функций, определенных на двухэлементном множестве $\{1, 2\}$ и принимающих значения в множестве X при значении аргумента, равном 1, и в множестве Y при значении аргумента, равном 2. Это отождествление позволяет распространить определение П. п. на случай любого количества множителей.

Многие задачи математики связаны с описанием математич. объектов, неразложимых в П. п., и с выяснением условий, при к-рых множители произведения определены однозначно с точностью до изоморфизма. *М. Ш. Цаленко.*

ПРЯМОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВА – см. *Колмогорова уравнение, Диффузионный процесс, Марковский процесс, Маркова цепь, Маркова цепь* с непрерывным временем, *Статистическая гидромеханика.*

ПРЯМОЙ ИНТЕГРАЛ представлений – см. *Интеграл* представлений.

ПРЯМОЙ УДАР – см. *Удар.*

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Траектория.*

ПСЕВДОВЕКТОР – см. *Аксиальный вектор.*

ПСЕВДОГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО – комплексное векторное *пространство с индефинитной метрикой.*

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР – оператор, действующий в функциональных пространствах на дифференцируемом многообразии и локально по определенным правилам записываемый с помощью некоторой функции, обычно называемой символом П. о., и удовлетворяющей оценкам производных определенного типа, аналогичных оценкам производных полиномов, являющихся символами *дифференциальных операторов.*

Пусть Ω – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, принадлежащим Ω. Простейший П. о. в Ω – это оператор $P\colon C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$, задаваемый формулой

$$Pu(x)=(2\pi)^{-n}\int\exp ix\cdot\xi\,p(x,\xi)\,\hat u(\xi)\,d\xi,\qquad(1)$$

где $u\in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $d\xi$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $x\cdot\xi$ – обычное скалярное произведение векторов x и ξ, $\hat u(\xi)$ – преобразование Фурье функции u, то есть

$$\hat u(\xi)=\int\exp -ix\cdot\xi\,u(x)\,dx$$

(интеграл здесь и выше берется по $\mathbb{R}^n$), $p(x, \xi)$ – гладкая функция на $\Omega\times\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая нек-рым условиям и называемая символом П. о. P. Оператор P вида (1) обозначается также $p(x, D)$ или $p(x, D_x)$. Если

$$p(x,\xi)=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant m}p_\alpha(x)\xi^\alpha$$

– многочлен от ξ с коэффициентами $p_\alpha\in C^\infty(\Omega)$ [здесь α – мультииндекс, то есть $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$, α_j – целые, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\xi^\alpha=(\xi_1^{\alpha_1}, \ldots, \xi_n^{\alpha_n})$], то $p(x, D)$ совпадает с *дифференциальным оператором*, получаемым, если в выражение для $p(x, \xi)$ вместо ξ подставить вектор $D=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$.

Можно задавать П. о. в Ω с помощью двойных символов, то есть в виде:

$$Pu=(2\pi)^{-n}\int\int\exp i(x-y)\cdot\xi\,a(x,y,\xi)\,u(y)\,dy\,d\xi.$$

При $a(x, y, \xi)=p(x, \xi)$ эта формула переходит в (1). Символ $p(x, \xi)$ имеет следующее асимптотич. разложение:

$$p(x,\xi)\sim\sum\nolimits_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\Big|_{y=x},$$

где $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$ и суммирование ведется по всем мультииндексам.

Роль П. о. состоит в том, что имеется ряд операций, выводящих за класс дифференциальных операторов, но сохраняющих класс П. о. Напр., резольвента и комплексные степени эллиптич. дифференциального оператора на компактном многообразии являются классич. П. о.

Существуют разные варианты теории П. о., приспособленные к решению различных задач анализа и математич. физики. Часто возникают П. о. с параметром, необходимые, напр., для изучения резольвенты и асимптотики собственных значений. Важную роль играют различные варианты теории П. о. на $\mathbb{R}^n$, учитывающие эффекты, связанные с описанием поведения функции на бесконечности, и частично инспирированные математич. вопросами квантовой механики, возникающими при изучении квантования классич. систем.

Частным случаем П. о. являются многомерные сингулярные интегральные и интегро-дифференциальные операторы, изучение к-рых подготовило появление теории П. о.

Лит.: [1] Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1967; [2] Агранович М. С., Вишик М. И., Псевдодифференциальные операторы, М., 1968; [3] Эскин Г. И., Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М., 1973; [4] Грушин В. В., Псевдодифференциальные операторы, М., 1975; [5] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978. *М. А. Шубин.*

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР; формула композиции – формула, выражающая символ или асимптотическое разложение символа композиции двух *псевдодифференциальных операторов* через символы или асимптотические разложения символов сомножителей. Напр., для двух операторов A, B в $\mathbb{R}^n$ с qp-символами $a(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ класса $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, положительно однородными по (x, ξ) порядков m_1, m_2, композиция $C=AB$ имеет qp-символ $c(x, \xi)$, допускающий асимптотич. разложение

$$c(x,\xi)\sim\sum\nolimits_\alpha\frac{(-i\hbar)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\partial_x^\alpha b(x,\xi),$$

где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$ – целые, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$,

$$\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!,\quad\partial_x^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Точный смысл этого разложения состоит в том, что при любом целом $N\geqslant 0$ и для любых γ, δ

$$\left|\partial_\xi^\gamma\partial_x^\delta\left[c(x,\xi)-\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{(-i\hbar)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\partial_x^\alpha b(x,\xi)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_{\gamma\delta N}\hbar^N(1+|x|+|\xi|)^{m_1+m_2-N}.$$

Лит.: [1] Березин Ф. А., Шубин М. А., Уравнение Шредингера, М., 1983; [2] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [3] Тейлор М., Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1985; [4] Трев Ф., Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, т. 1, Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1984; [5] Хёрмандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 3, Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1987; [6] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978. *М. А. Шубин.*

A-ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР – оператор в $\mathbb{R}^n$, определяемый по символу $H(s, p)$ формулой

$$\hat{H}\left(x, -iA^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\right)f = \left(\frac{A}{2\pi}\right)^n \int \exp\left[iAp(x-y)\right]H(x, p)f(y)\,dpdy,$$

где $A: E \to E$ – неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, имеющий ограниченный обратный A^{-1}; $H(x, p)$ – операторнозначная C^∞-функция, разлагающаяся в асимптотический ряд

$$H(x, p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x, p)A^{-k} \qquad (1)$$

и удовлетворяющая оценке

$$\left\| D_x^\alpha D_p^\beta H(x, p)\right\| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^m$$

с некоторым m. Разложение (1) понимается в том смысле, что для любого $N \geqslant 0$ оператор

$$A^{N+1}\left[H(x, p) - \sum_{k=0}^{N} H_k(x, p)A^{-k}\right]$$

ограничен в E. С помощью разложения единицы определение A-п. о. переносится на операторы на гладком многообразии M.

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965. *Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.*

$1/h$-ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР (классический) – оператор в $\mathbb{R}^n$, определяемый по символу $H(x, p, h)$ формулой

$$\hat{H}\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}, h\right)f = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int \exp\left[\frac{i}{h}p(x-y)\right]H(x, p, h)f(y)\,dpdy.$$

Здесь $H(x, p, h)$ – C^∞-функция при $h > 0$, разлагающаяся в асимптотич. ряд по степеням h:

$$H(x, p, h) \sim \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x, p)h^k$$

и удовлетворяющая оценке

$$\left| D_x^\alpha D_p^\beta H(x, p, h)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^m$$

с нек-рым m. С помощью разложения единицы определение $1/h$-п. о. переносится на операторы на гладком многообразии M.

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [2] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978. *Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.*

ПСЕВДОЕВКЛИДОВА МЕТРИКА – см. *Метрика пространства-времени.*

ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Евклидово пространство, Гильбертово пространство, Векторное пространство.*

ПСЕВДОЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЕ – аналог *Лиувилля уравнения* для системы N частиц, которые взаимодействуют как упругие шары. При $t \geqslant 0$ П. у. имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}D(t, x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial}{\partial q_i}D(t, x_1, \ldots, x_N) +$$

$$+\sigma^2 \sum_{i<j=1}^{N} \int_{n(p_i-p_j)\geqslant 0} dn\, n(p_i - p_j) \times$$

$$\times \{\delta(q_i - q_j - \sigma_n)D(t, x_1, \ldots, q_i, p_i - n(n(p_i - p_j)), \ldots$$

$$\ldots, q_j, p_j + n(n(p_i - p_j)), \ldots, x_N) -$$

$$- \delta(q_i - q_j + \sigma_n)D(t, x_1, \ldots, x_N)\},$$

где σ – диаметр частиц, масса частиц принята равной единице, $(\cdot)$ – символ скалярного произведения, $x_i \equiv (q_i, p_i) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, d_n – элемент телесного угла, $n \in \mathbb{R}^3$ – единичный вектор.

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985. *В. И. Герасименко.*

ПСЕВДОМЕТРИКА – см. *Метрика.*

ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА МЕТОД – см. *Квантовая теория многих частиц.*

ПСЕВДОРИМАНОВА МЕТРИКА сигнатуры (p, q) на гладком многообразии M^n размерности $n = p + q$ – тензорное поле g_{ij} типа (0, 2) на многообразии M^n такое, что

$$g_{ij} = g_{ji},\ \det g_{ij} \neq 0$$

и квадратичная форма с коэффициентами g_{ij} имеет сигнатуру (p, q). Пара (M^n, g_{ij}) называется псевдоримановым многообразием. Форма g имеет сигнатуру (p, q), если существует такая система координат, что g в ней имеет вид:

$$g = \sum_{s=1}^{p}(x_i)^2 - \sum_{s=p+1}^{p+q}(x_i)^2;$$

при этом, если $q = 0$, то получается *риманова метрика.* Если $p = 1$ и $q > 0$, то форма q называется лоренцевой метрикой, а пара (M^n, g_{ij}) – лоренцевым многообразием. *В. В. Трофимов.*

ПСЕВДОРИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ – см. *Псевдориманова метрика.*

ПСЕВДОРИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Метрика пространства-времени, Риманово пространство.*

ПСЕВДОСКАЛЯР веса α на многообразии M^n – величина, задаваемая в каждой карте, отвечающей данной гладкой структуре, некоторой функцией $f(x^1, \ldots, x^n)$, преобразующейся при переходе от карты к карте по следующему закону:

$$f_y(y^1, \ldots, y^n) = \left[\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\right]^\alpha f_x(x^1, \ldots, x^n),$$

где f_y – представление данного П. в координатах $y^1, \ldots, y^n$; f_x – в координатах $x^1, \ldots, x^n$.

Лит.: [1] Мак-Коннел А. Дж., Введение в тензорный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. В. Трофимов.*

ПСЕВДОСПИНА ВЕКТОР – см. *Блоха вектор.*

ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Эллиптический интеграл.*

ПУАНКАРЕ ГРУППА, неоднородная группа Лоренца, – *группа* всех вещественных преобразований 4-векторов $x = x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ пространства Минковского M_4 вида:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu,$$

где Λ – преобразование из *Лоренца группы*, а a^μ – 4-вектор смещения (трансляции). Элемент П. г. обычно обозначается $\{a, \Lambda\}$, а закон композиции имеет вид:

$$\{a_1, \Lambda_1\}\{a_2, \Lambda_2\} = \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2\}.$$

П. г. играет чрезвычайно важную роль в релятивистской физике, являясь группой ее глобальной симметрии. Она была введена А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1905). Как и группа Лоренца, П. г. $\mathscr{P}$ имеет четыре компоненты связности, различаемые значениями $\det\Lambda$ и знаком Λ^0_0, а именно: $\mathscr{P}^\uparrow_+$, $\mathscr{P}^\uparrow_-$, $\mathscr{P}^\downarrow_+$ и $\mathscr{P}^\downarrow_-$. Это – неабелева некомпактная группа Ли. Наиболее важной является компонента $\mathscr{P}^\uparrow_+$, представляю-

щая собой множество преобразований $\{a, \Lambda\}$ с $\Lambda \in L_+^\uparrow$, содержащая единичное преобразование. В дальнейшем речь будет идти именно об этой группе.

Группа $\mathscr{P}_+^\uparrow$ – 10-параметрическая; к шести генераторам $M_{\mu\nu}$ группы Лоренца добавляются четыре генератора P_μ трансляций. Алгебра Ли П. г. определяется перестановочными соотношениями для генераторов:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\nu\delta}M_{\mu\rho}),$$
$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu),$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрич. тензор. Десять генераторов П. г. являются основными динамич. величинами в релятивистской механике. Величину P_μ называют вектором энергии-импульса или 4-импульсом; 3-вектор $M = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$ есть угловой момент. В квантовой теории поля для любого оператора $A(x)$

$$[A(x), P_\mu] = i\partial A(x)/\partial x^\mu.$$

В частности, эволюция во времени определяется оператором P_0, или *гамильтонианом* системы.

Для П. г. имеются два *Казимира оператора*, коммутирующих со всеми ее генераторами и, следовательно, релятивистски инвариантных. Это $P^2 = P_\mu P^\mu$ и $W = -w^2$, где псевдовектор $w^\mu = (1/2)\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}M_{\nu\lambda}P_\sigma$, а $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ – полностью антисимметричный тензор.

При $P^2 \geqslant 0$ имеется еще одна дискретная инвариантная характеристика – знак энергии: $\varepsilon = P_0/|P_0|$ с собственными значениями ± 1.

Как и в случае группы Лоренца, представления П. г. строят с помощью односвязной группы $\mathscr{P}_0$ – универсальной накрывающей для группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Для квантовой теории поля важны унитарные неприводимые представления $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Согласно требованию релятивистской инвариантности, векторам состояния отвечают так наз. проективные представления, задаваемые с точностью до фазового множителя. Имеет место теорема Вигнера – Баргмана, утверждающая, что любое проективное представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ порождается обычным однозначным унитарным представлением группы $\mathscr{P}_0$.

Изучение важных для физики унитарных представлений группы $\mathscr{P}_0$ сводится к классификации ее неприводимых унитарных представлений, так как хотя $\mathscr{P}_0$ и некомпактна, любое ее унитарное представление может быть разложено в прямую сумму (или интеграл) неприводимых представлений.

Группа $\mathscr{P}_0$ локально изоморфна группе $\mathscr{P}_+^\uparrow$ и имеет те же генераторы и те же операторы Казимира, что и $\mathscr{P}_+^\uparrow$. В зависимости от значений оператора P^2 представления группы $\mathscr{P}_0$ могут быть разделены на следующие классы:

1) $P^2 = m^2 > 0$.

1а) $\varepsilon = 1$ (то есть $P_0 > 0$). Соответствующие представления описывают трансформационные свойства реальных частиц с массой покоя m.

1б) $\varepsilon = -1$ (то есть $P_0 < 0$). Эти представления комплексно сопряжены с представлениями класса 1а).

2) $P^2 = 0$, $P \neq 0$.

2а) $\varepsilon = 1$ ($P_0 > 0$). Соответствующие представления описывают частицы с нулевой массой покоя (нейтрино и фотон).

2б) $\varepsilon = -1$ ($P_0 < 0$). Представления этого класса комплексно сопряжены с представлениями класса 2а).

3) $P^2 = -m^2 < 0$ (то есть вектор P пространственноподобен). Согласно основным принципам релятивистской механики, частицы с таким импульсом не могут реально существовать. Однако представления класса 3) также встречаются в квантовой теории поля, напр. при описании трансформационных свойств взаимодействующих полей.

4) $P = 0$. Все состояния с таким P трансляционно инвариантны. Все унитарные представления этого класса, кроме единичного, бесконечномерны. Единичное представление соответствует вакууму, инвариантному относительно всех преобразований из П. г.

Физич. смысл инварианта w^2 выявляется просто при $m^2 > 0$, $P_0 > 0$. В этом случае величина $-w^2/m^2$ равна квадрату углового момента M^2 в состоянии покоя, то есть квадрату спина.

Таким образом, неприводимое унитарное представление П. г. характеризуется значениями массы m, спина S и знака энергии (при $m^2 > 0$).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [2] Новожилов Ю. В., Введение в теорию элементарных частиц, М., 1972; [3] Мишель Л., Шааф М., Симметрия в квантовой физике, пер. с англ., М., 1974; [4] Барут А., Ронцка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1980; [5] Эллиот Дж., Добер П., Симметрия в физике, пер. с англ., т. 1–2, М., 1983.

С. И. Азаков.

ПУАНКАРЕ ЗАДАЧА – см. *Краевая задача* теории аналитических функций.

ПУАНКАРЕ ИНДЕКС особой точки – топологический инвариант изолированной особой точки O непрерывного векторного поля V на n-мерном многообразии M, равный, по определению, степени отображения $f: S \to S$, заданного формулой

$$f(x) = \rho V(x)/|V(x)|,$$

где x – система локальных координат на M с центром в O, а S – сфера $|x| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ. П. и. особой точки O поля V на плоскости ($n = 2$) совпадает с числом оборотов вектора V при обходе вокруг O по окружности достаточно малого радиуса. П. и. невырожденной особой точки O гладкого векторного поля V равен $\operatorname{sign}(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа линеаризации поля V в O. В частности, при $n = 2$ П. и. узла, фокуса, центра и центро-фокуса равен 1, а П. и. седла равен -1.

Понятие индекса особой точки, введенное А. Пуанкаре в 1886 (см. [1]) (только для невырожденных особых точек), восходит, так же как и более общее понятие степени отображения, к так наз. характеристике Кронекера системы функций (см. [2]), поэтому П. и. часто называют индексом Кронекера – Пуанкаре (см. [6]).

Если все особые точки векторного поля V на компактном многообразии без края изолированы, то сумма их П. и. не зависит от V и равна эйлеровой характеристике многообразия (теорема Пуанкаре, или теорема Пуанкаре – Хопфа).

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.–Л., 1947; [2] Kronecker L., «Monatsber. Berl. Akad.», 1869, S. 159–93, 688–98; [3] Hopf H., «Math. Ann.», 1927, Bd 96, S. 225–50; [4] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1984; [5] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, 2 изд., М., 1986; [6] Аносов Д. В. [и др.], в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 1, Динамические системы, М., 1985, с. 151–242; [7] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979.

М. Б. Севрюк.

ПУАНКАРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ – дифференциальная 1-форма pdq в стандартном симплектическом пространстве $(\mathbb{R}^{2n}, dp \wedge dq)$. Фазовый поток гамильтоновой системы сохраняет интеграл от П. и. и. по замкнутым кривым:

$$\int_{g\gamma} p\,dq = \int_\gamma p\,dq.$$

М. Э. Казарян.

ПУАНКАРЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – преобразование *Минковского пространства-времени*, сохраняющее его интервал. П. п. линейны и образуют 10-параметрическую группу Ли, к-рая называется *Пуанкаре группой*; она состоит из *Лоренца преобразований* и так наз. трансляций – преобразований, изменяющих координаты событий на одну и ту же величину. Названа по имени А. Пуанкаре (H. Poincaré), к-рый рассмотрел ее в 1905.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [2] Румер Ю. Б., Фет А. И., Теория групп и квантованные поля, М., 1977. *М. И. Войцеховский.*

ПУАНКАРЕ СЛУЧАЙ – см. *Малые знаменатели.*

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА о возвращении – одна из основных теорем, характеризующих поведение *динамической системы* с инвариантной мерой. Примером такой системы является *гамильтонова система*, эволюция к-рой описывается решениями *Гамильтона уравнений*

$$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i,\ \dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$$

[q_i и p_i – канонич. координаты и импульсы; $i = 1, \ldots, n$; $H = H(p, q)$ – *Гамильтона функция*; точкой обозначено дифференцирование по времени t]. Инвариантной (сохраняющейся при эволюции) мерой служит объем

$$\int_A \prod_{i=1}^{n} dp_i\, dq_i$$

области A в фазовом пространстве M, сохраняющийся в соответствии с *Лиувилля теоремой*. Согласно П. т., через любую окрестность U любой точки $x = (p_i, q_i)$, принадлежащей инвариантному множеству конечной положительной меры из M, проходит траектория, к-рая возвращается в U. П. т. доказана А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1890).

Общая динамич. система описывается однопараметрич. группой отображений f^t фазового пространства на себя: для точки x из M $f^t(x) = x(t)$, причем $f^{t_1 + t_2}(x) = f^{t_2}(f^{t_1}(x))$, $f^0(x) = x_0$. В общем случае M – нек-рое пространство с мерой μ, инвариантность к-рой означает, что $\mu(f^t(A)) = \mu(A)$ для любой области A из M. Напр., если $f^t(x)$ – решение системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = X(x)$ с начальным условием $f^0(x) = x_0$, то инвариантная мера

$$\mu(A) = \int_A \rho(x)\, dx,$$

где $\rho(x)$ – неотрицательное решение *Лиувилля уравнения* $\operatorname{div}(\rho(x) X(x)) = 0$. Если функция Гамильтона H не зависит от времени явно, она сохраняется, а траектории не покидают поверхность уровня $M_c: H(p, q) = c$ в M. При $\operatorname{grad} H \neq 0$ на M_c инвариантная мера на поверхности уровня задается соотношением $d\mu = d\sigma/|\operatorname{grad} H|$, где $d\sigma$ – элемент объема на M_c.

В общем случае П. т. утверждает, что у динамич. системы с конечной инвариантной мерой для почти всех точек $x \in A$ при $\mu(A) > 0$ траектория $f^t(x)$ возвращается в A: найдется такое $\tau > 1$, что $f^\tau(x) \in A$. При нек-рых предположениях относительно M П. т. усиливается: траектории возвращаются в A бесконечное число раз, то есть устойчивы по Пуассону.

Примеры. В гамильтоновой системе уравнений $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - x^3$ все траектории, кроме траекторий, лежащих на уровне $H = 0$, $H = (y^2 - x^2 + x^4/3)/2$, являются периодическими, поэтому возвращаются в любую свою окрестность. Отображение f тора T^2 с координатами (φ, ψ) (mod 2π), задаваемое соотношением $(\varphi, \psi) \to (2\varphi + \psi, \varphi + \psi)$, сохраняет площадь. Здесь периодич. точек счетное множество, а через множество полной меры проходят траектории, не являющиеся периодическими, но устойчивые по Пуассону.

Пусть F – любая непрерывная функция на фазовом пространстве M динамич. системы f^t, удовлетворяющей условиям П. т. Тогда для почти всякой точки $x \in M$ и любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность значений $t_n \to \infty$, для к-рой $|F(x) - F(f^{t_n}(x))| < \varepsilon$, то есть значение $F(x)$ при движении вдоль траектории повторяется с любой заданной точностью. На это утверждение опирается известный парадокс классич. статистич. механики (парадокс возвратов Пуанкаре – Цермело), однако, строго говоря, ни одна из используемых для построения этого парадокса функций (энтропия и т. д.) не является функцией на фазовом пространстве.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.– Л., 1949; [2] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989. *Л. М. Лерман.*

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА об особых точках – см. *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория, *Пуанкаре индекс.*

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА последняя: пусть дано сохраняющее площади гомеоморфное отображение плоского кругового кольца в себя, граничные окружности кольца сдвигаются отображением в разные стороны; тогда это отображение имеет не менее двух неподвижных точек.

П. т. привела в 1965 В. И. Арнольда к ряду обобщений и гипотез об ограничении снизу числа неподвижных точек симплектоморфизмов, числа точек пересечений пары лагранжевых многообразий и т. п. Развитие этих идей составляет основную часть современной симплектич. топологии. *М. Э. Казарян.*

ПУАНКАРЕ ТЕТА-РЯД – см. *Автоморфная форма, Тета-ряд.*

ПУАНКАРЕ – КАРТАНА ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ – 1-форма $pdq - Hdt$ в расширенном фазовом пространстве гамильтоновой системы. Интегралы от П.– К. и. и. по двум замкнутым кривым, охватывающим одну и ту же трубку траекторий, совпадают. См. *Интегральный инвариант.* *М. Э. Казарян.*

ПУАНКАРЕ – ХОПФА ТЕОРЕМА – см. *Пуанкаре индекс* особой точки.

ПУАССОНА ИНТЕГРАЛ – интегральное представление решения *Дирихле задачи* для *Лапласа уравнения* в простейших областях.

Так, П. и. для шара $B_n(0, R)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, радиуса R с центром в начале координат имеет вид:

$$u(x) = \int_{S_n(0, R)} f(y)\, PB_n(x, y)\, dS_n(y), \qquad (1)$$

где $f(y)$ – данная непрерывная функция на сфере $S_n(0, R)$ радиуса R,

$$PB_n(x, y) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)}{|x - y|^n},$$

– ядро Пуассона для шара,

$$\sigma_n = n\pi^{n/2} R^{n-1}/\Gamma(n/2 + 1),$$

– площадь сферы $S_n(0, R)$, dS_n – элемент площади $S_n(0, R)$.

С. Пуассон (S. Poisson, 1823) пришел к формуле (1) в случае $n = 2$ как к интегральной форме записи суммы тригонометрич. ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k,$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f(y) = f(e^{i\varphi})$, (r, θ) и $(1, \varphi)$ – полярные координаты соответственно точек $x = re^{i\theta}$ и $y = e^{i\varphi}$, когда ядро Пуассона имеет вид:

$$PB_2(x, y) = PB_2(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}. \qquad (2)$$

П. и. для полупространства

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

имеет вид:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n_0} f(y) P\mathbb{R}^n_+(x,y)\, d\mathbb{R}^n_0(y), \qquad (3)$$

где

$$\mathbb{R}^n_0 = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\},$$

$d\mathbb{R}^n_0$ – элемент площади $\mathbb{R}^n_0$, $f(y)$ – ограниченная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n_0$,

$$P\mathbb{R}^n_+(x,y) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n\pi^{n/2}} \frac{x_n}{|x-y|^n}$$

– ядро Пуассона для полупространства. Формулы (1) и (3) суть частные случаи формулы Грина:

$$u(x) = \int_\Gamma f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} d\Gamma(y), \qquad (4)$$

дающей решение задачи Дирихле для областей $D \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ при помощи производной $dG(x,y)/dn_y$ функции Грина $G(x,y)$ по направлению внутренней нормали к Γ в точке $y \in \Gamma$. Иногда формулу (4) также называют интегралом Пуассона.

Основные свойства П. и.: 1) $u(x)$ есть *гармоническая функция* координат точки x; 2) П. и. дает решение задачи Дирихле с граничными данными $f(y)$ в классе (ограниченных) гармонич. функций, то есть функция $u(x)$, продолженная на границу области значениями $f(y)$, непрерывна в замкнутой области. На этих свойствах основаны применения П. и. в классич. математич. физике.

Большую роль в теории аналитич. функций многих комплексных переменных и в ее применениях к квантовой теории поля играют различные модификации П. и. Напр., ядро Пуассона для поликруга

$$U^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \ldots, n\}$$

комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ получается при перемножении ядер (2):

$$PU^n(z,\xi) = \prod_{j=1}^n PB_2(z_j, \xi_j).$$

Соответствующий П. и.

$$u(z) = \int_{T^n} f(\xi) PU^n(z,\xi)\, dT^n(\xi)$$

по остову поликруга

$$T^n = \{\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j| = 1, j = 1, \ldots, n\}$$

дает кратногармонич. функцию $u(z)$, $z \in U^n$, принимающую на остове T^n непрерывные значения $f(\zeta)$.

В квантовой теории поля применяются П. и. для трубчатых областей T^C комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ над выпуклым открытым острым конусом C в пространстве $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в начале координат) вида:

$$T^C = \mathbb{R}^n + i\mathbb{C} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n;$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}\}.$$

П. и. для полуплоскости вида (3) при $n = 2$ есть частный случай таких П. и. для трубчатых областей.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977. *Е. Д. Соломенцев.*

ПУАССОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – распределение вероятностей случайной величины N, принимающей целые неотрицательные значения $n = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$P_n = \mathsf{P}\{N = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},$$

где λ – параметр распределения. Характеристич. функция П. р. имеет вид:

$$f(t) = \mathsf{E} e^{iNt} = \exp[\lambda(e^{it} - 1)]$$

и поэтому семиинварианты любого порядка равны λ.

Сумма независимых случайных величин N_1, N_2, ..., N_s, имеющих П. р. с параметрами $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_s$, подчиняется П. р. с параметром $(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s)$ и, обратно, если сумма $(N_1 + N_2)$ двух независимых случайных величин N_1 и N_2 имеет П. р., то каждая случайная величина N_1 и N_2 подчинена П. р.

П. р. было впервые получено С. Пуассоном (S. Poisson, 1837) как асимптотич. распределение вероятностей числа «успехов» N в схеме Бернулли при большом числе испытаний M и малой вероятности успеха p:

$$\mathsf{P}\{N = n\} = C^n_M p^n (1-p)^{M-n} \to \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},$$

при $M \to \infty$, $p \to 0$, $Mp \to \lambda$. Это обстоятельство обуславливает то, что П. р. является хорошим приближением при моделировании многих явлений, связанных с появлением случайного числа редких слабозависимых событий в фиксированном промежутке времени и в ограниченной области пространства. Наряду с обыкновенным П. р. в математич. физике используется и так наз. обобщенное, или сложное, П. р. для вероятностей значений суммы $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N)$ случайного числа N одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$. При этом $N; \xi_1, \xi_2, \ldots$ – взаимно независимы и N распределено согласно П. р. с параметром λ. Характеристич. функция $f(t)$ сложного П. р. имеет вид:

$$f(t) = \exp[\lambda(\psi(t) - 1)],$$

где $\psi(t)$ – характеристич. функция ξ_s.

Если распределение вероятностей целой неотрицательной случайной величины N определяется случайной величиной ξ так, что условное распределение вероятностей $\mathsf{P}\{N = n | \xi = x\}$ является П. р. с параметром $\xi = x$, то оно называется составным П. р. и определяется формулой

$$P_n = \mathsf{P}\{N = n\} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty dx\, p(x) x^n e^{-x},$$

где $p(x)$ – плотность распределения величины ξ. Характеристич. функция составного П. р. имеет вид:

$$f(t) = \mathsf{E} e^{itN} = \varphi(i(1 - e^{it})),$$

где $\varphi(t) = \mathsf{E} e^{it\xi}$. Составное П. р. находит применение в задачах квантовой оптики.

Лит.: [1] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2 изд., М., 1984; [4] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1980. *Ю. П. Вирченко.*

ПУАССОНА СКОБКИ – важное понятие аналитической механики, введенное С. Пуассоном (S. Poisson, 1809) и получившее дальнейшее развитие в гамильтоновой механике (см. *Гамильтонов формализм*). П. с. могут быть обобщены на случай квантовой механики, а также классич. и квантовой теории поля. Скобкой Пуассона двух динамич. величин f и g нек-рой гамильтоновой системы называют выражение

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right), \qquad (1)$$

где $f(q, p, t)$ и $g(q, p, t)$ – нек-рые функции так наз. гамильтоновых (канонических) переменных $q_1, \ldots, p_n$ (n – число степеней свободы системы). Встречается определение П. с. $\{f, g\}$, отличающееся от определения (1) множителем (-1). Для обозначения П. с. могут использоваться также круглые (f, g) или квадратные $[f, g]$ скобки. Иногда термин употребляется в единственном числе – «скобка Пуассона». Из определения (1) следуют свойства П. с.:

$$\{g, f\} = -\{f, g\}; \qquad (I)$$

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}, \qquad (II)$$

где α, β – нек-рые константы;

$$\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}; \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}; \qquad \text{(IV)}$$

$$\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} \equiv 0 \qquad \text{(V)}$$

(тождество (V) – так наз. тождество Якоби). Важным свойством П. с. является их инвариантность относительно канонич. преобразований (инвариантность относительно перехода к другому набору канонич. переменных $Q_1, \ldots, P_n$):

$$\{f,g\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_k} - \frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_k}\right), \qquad (1^*)$$

причем оба набора переменных удовлетворяют *Гамильтона уравнениям*. Если одна из функций f или g совпадает с обобщенной координатой q_i или обобщенным импульсом p_k, то

$$\{f,q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}; \quad \{p_k,g\} = \frac{\partial g}{\partial q_k}. \qquad (2)$$

Если и вторая функция заменена на координату или импульс, то

$$\{q_i, q_k\} = 0; \ \{p_i, p_k\} = 0; \ \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}. \qquad (3)$$

Выполнение условия (3) для какого-либо набора переменных $q_i, \ldots, p_n$ есть критерий каноничности этого набора. Замена f на гамильтониан системы H, а g – на q_i или p_k дает

$$\{H, q_i\} = \dot{q}_i; \ \{H, p_k\} = \dot{p}_k, \qquad (4)$$

то есть соотношения, совпадающие с уравнениями Гамильтона. Однако наиболее полно проявляется важность понятия П. с. при рассмотрении полной производной по времени от нек-рой динамич. величины $F(q, p, t)$:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H,F\}. \qquad (5)$$

При выводе (5) использованы уравнения Гамильтона и определение П. с. (1). Для сохраняющейся со временем величины F (так наз. интеграла движения) имеет место равенство:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H,F\} = 0, \qquad (6)$$

принимающее в случае F, не зависящего явно от времени, вид:

$$\{H, F\} = 0. \qquad (7)$$

Из (5), (6) и свойств П. с. вытекает теорема Пуассона – П. с. двух интегралов движения F и G есть также интеграл движения:

$$\frac{d}{dt}\{F,G\} = 0. \qquad (8)$$

В квантовой механике, в к-рой роль классич. динамич. величин играют эрмитовы операторы, аналогом (1) являются так наз. квантовые скобки Пуассона

$$\{\hat{f},\hat{g}\}_{\text{кв}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{f},\hat{g}] \equiv \frac{i}{\hbar}(\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}). \qquad (9)$$

[Определение этих скобок иногда также отличается от (9) множителем (–1).] Квантовые П. с. обладают теми же свойствами (I)–(V), что и классические, причем доказательство справедливости тождества Якоби является в квантовом случае более простым. Сохраняют свой вид соотношения (3), и тем самым коммутационное соотношение Борна – Йордана

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$$

представляет собой аналог соответствующей классич. формулы, что впервые использовано П. Дираком (P. Dirac) в построении формального математич. аппарата квантовой механики. Через квантовые П. с. выражается оператор, отвечающий производной по времени нек-рой физич. величины A:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \{\hat{H},\hat{A}\}_{\text{кв}} \equiv \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}]. \qquad (10)$$

Наконец, сохраняет свой вид теорема Пуассона: умноженный на $i/\hbar$ коммутатор двух интегралов движения есть также интеграл движения. В квантовом случае теореме Пуассона может быть придана групповая интерпретация, если интегралы движения обусловлены той или иной группой симметрии задачи (посредством *Нетер теоремы*). В таком случае интегралы движения совпадают (с точностью до множителя) с генераторами группы симметрии квантовой системы $\hat{\Lambda}_\alpha$. Коммутатор какой-либо пары генераторов (являющийся в силу теоремы Пуассона интегралом движения) должен каким-либо образом выражаться через все эти генераторы. Обычно эта связь линейна:

$$[\hat{\Lambda}_\alpha, \hat{\Lambda}_\beta] = iC^\gamma_{\alpha\beta}\hat{\Lambda}_\gamma \qquad (11)$$

(по индексу γ подразумевается суммирование). Формулы (11) фактически совпадают с соотношениями, определяющими алгебру Ли соответствующей группы симметрии квантовой системы, где $C^\gamma_{\alpha\beta}$ – так наз. структурные константы. Следует иметь в виду, что в физич. литературе генераторы, как правило, являются эрмитовыми операторами, тогда как в математич. литературе – антиэрмитовыми. По этой причине в правой части соотношения (11) возникает мнимая единица i и возможно появление множителя (–1).

В ряде случаев складывается, в известном смысле, обратная ситуация, если не все из имеющихся в данной задаче интегралов движения связаны с явной (следующей из геометрич. соображений) группой симметрии. Если коммутатор любой пары интегралов движения линейно выражается через все интегралы движения

$$[\hat{M}_\alpha, \hat{M}_\beta] = iD^\gamma_{\alpha\beta}\hat{M}_\gamma, \qquad (12)$$

можно попытаться найти группу, алгебра Ли к-рой описывается соотношениями (12). Если такая группа существует, то о ней говорят как о группе «скрытой» симметрии задачи (при этом числа $D^\gamma_{\alpha\beta}$ являются структурными константами этой группы). Следующие примеры иллюстрируют изложенное.

1. Свободная частица массы m с импульсом $\boldsymbol{p}$:

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m.$$

Группа симметрии – группа движений трехмерного пространства (совокупность трехмерных вращений и произвольных трансляций). Имеющиеся в данной задаче интегралы движения – компоненты импульса $\hat{\boldsymbol{p}}$ и момента импульса $\hat{\boldsymbol{L}} = [\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{p}}]$, деленные на $\hbar$, представляют собой набор генераторов упомянутой группы.

2. Частица в трехмерном центральном поле:

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + U(r).$$

Группа симметрии задачи – группа трехмерных вращений $O(3)$. Компоненты моменты импульса $\hat{\boldsymbol{L}}$ (в единицах $\hbar$) являются генераторами группы $O(3)$.

3. Трехмерный изотропный осциллятор:

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + m\omega^2\boldsymbol{r}^2/2.$$

Явная (геометрическая) симметрия задачи – $O(3)$. Кроме момента импульса $\hat{\boldsymbol{L}}$ имеется еще три очевидных интеграла движения

$$\hat{H}_k = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_k^2}{2},$$

$k = 1, 2, 3$, – сохраняющиеся энергии трех независимых осцилляторов, отвечающих колебаниям вдоль трех декартовых осей. Они взаимно перестановочны. Коммутаторы вида $[\hat{H}_k, \hat{L}_l]$ порождают интегралы движения

$$K_1 = \frac{p_2 p_3}{m} + m\omega^2 x_2 x_3$$

и т. п. Удобно перейти к следующим операторам:

$$\hat{A}_l^k = \hat{a}_k^+ \hat{a}_l; \quad \hat{a}_l = \frac{m\omega\hat{x}_l + i\hat{p}_l}{\sqrt{2m\hbar\omega}}; \quad \hat{a}_k^+ = \frac{m\omega\hat{x}_k - i\hat{p}_k}{\sqrt{2m\hbar\omega}},$$

через к-рые исходные интегралы движения выражаются в виде линейных комбинаций

$$\hat{H}_1 = \hbar\omega\left(\hat{A}_1^1 + \frac{1}{2}\right), \ldots,$$

$$\hat{K}_1 = \hbar\omega\left(\hat{A}_3^2 + \hat{A}_2^3\right), \quad \hat{L}_1 = i\hbar\left(\hat{A}_2^3 - \hat{A}_3^2\right)$$

и т. п.

Алгебра Ли, связанная с операторами $\hat{A}_l^k$, описывается соотношениями

$$\left[\hat{A}_i^j, \hat{A}_k^l\right] = \delta_i^l \hat{A}_k^j - \delta_k^j \hat{A}_i^l,$$

представляющими собой канонич. форму алгебры Ли группы трехмерных унитарных преобразований $U(3)$ — группы «скрытой» симметрии трехмерного изотропного осциллятора. Отсутствие множителя i в правой части предыдущего соотношения обусловлено неэрмитовостью (вообще говоря) инфинитезимальных операторов $\hat{A}_l^k$.

4. Атом водорода. В атомных единицах ($e = \hbar = m = 1$) гамильтониан задачи имеет вид

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2 - 1/r.$$

Кроме момента импульса $\hat{\boldsymbol{L}}$ (безразмерного в используемых единицах) задача обладает специфическим векторным интегралом движения, так наз. вектором Рунге — Ленца:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{L}}\,\hat{\boldsymbol{p}}] - \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{p}}\,\hat{\boldsymbol{L}}].$$

Удобно ввести «нормированный» вектор Рунге — Ленца, имея в виду отрицательность энергии в связанных состояниях атома водорода:

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{-2\hat{H}}}\hat{\boldsymbol{A}}.$$

Коммутационные соотношения между операторами $\hat{L}_\alpha$ и $\hat{N}_\beta$ имеют вид:

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = ie_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\gamma; \quad [\hat{L}_\alpha, \hat{N}_\beta] = ie_{\alpha\beta\gamma}\hat{N}_\gamma;$$

$$[\hat{N}_\alpha, \hat{N}_\beta] = ie_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\gamma;$$

$e_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный единичный псевдотензор в пространстве трех измерений. Последние соотношения представляют собой алгебру Ли группы вращений четырехмерного евклидова пространства $O(4)$ — группу «скрытой» симметрии атома водорода.

Аналог П. с. может быть получен в классич. теории поля, если описание этого поля допускает применение гамильтонова формализма. Для двух динамич. величин F и G, характеризующих поле как целое, то есть являющихся интегральными характеристиками поля и тем самым функционалами гамильтоновых переменных $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ и $\pi(\boldsymbol{r}, t)$ (играющих роль обобщенных координат и импульсов гамильтоновой системы с конечным числом степеней свободы), П. с. определяются соотношением

$$\{F,G\}_{\text{кл. поле}} = \iiint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta F}{\delta\pi}\frac{\delta G}{\delta\xi} - \frac{\delta F}{\delta\xi}\frac{\delta G}{\delta\pi}\right)d^3\boldsymbol{r}, \qquad (13)$$

где $\delta/\delta\pi$, $\delta/\delta\xi$ — так наз. функциональные производные, имеющие в простейшем случае скалярного поля (и лагранжиана 1-го порядка) вид:

$$\frac{\delta F}{\delta\pi} = \frac{\partial f}{\partial\pi}; \quad \frac{\delta G}{\delta\xi} = \frac{\partial g}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial q}{\partial\nabla\xi}\right),$$

f и g — плотности величин F и G:

$$F = \iiint f(\xi(\boldsymbol{r},t), \pi(\boldsymbol{r},t), t)\,d^3\boldsymbol{r},$$

G определяется аналогичным образом.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 4 изд., М., 1989; [2] их же, Механика, 4 изд., М., 1988; [3] Шифф Л., Квантовая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1959; [4] Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, 2 изд., М., 1966; [5] Ланцош К., Вариационные принципы механики, пер. с англ., М., 1965; [6] Хаар Д., Основы гамильтоновой механики, пер. с англ., М., 1974; [7] Джеммер М., Эволюция понятий квантовой механики, пер. с англ., М., 1985. *С. П. Аллилуев.*

ПУАССОНА СКОБКИ; квантовые поправки — коэффициенты Φ, R, ... разложения по степеням $\hbar$ правых частей нелинейных коммутационных соотношений между квантовыми наблюдаемыми

$$[A^j, A^k] = i\hbar\Psi_h^{jk}(A^1, \ldots, A^n), \quad \Psi_h = \Psi_0 + \hbar\Phi + \hbar^2 R + \ldots,$$

где тензор Ψ_0 задает классическую *Пуассона скобку*. Поправки Φ, R, ... удовлетворяют уравнениям $[\![\Psi_0, \Phi]\!] = 0$, $[\![\Psi_0, R]\!] = \Gamma$, ..., где $[\![\cdot,\cdot]\!]$ — скобка Схоутена (см. [1]), тензоры Γ, ... (аномалии в тождестве Якоби) выражаются через Ψ_0, Φ (см. [2]); напр.:

$$\Gamma^{jkm} = \sum_{j,k,m}\Big(\frac{1}{12}\Psi_0^{i\alpha}\partial_\alpha\Psi_0^{pn}\partial_{l_n}^2\Psi_0^{qm}\partial_{pq}^2\Psi_0^{jk} + \\ + \frac{1}{24}\Psi_0^{i\alpha}\Psi_0^{pn}\partial_{ln}^2\Psi_0^{qm}\partial_{pq\alpha}^3\Psi_0^{jk} - \Phi^{j\alpha}\partial_\alpha\Phi^{km}\Big).$$

В случае квадратичных скобок $\Psi_0^{jk}(\xi) = C_{sl}^{jk}\xi^s\xi^l$ тензоры $\Phi(\xi)$, $R(\xi)$, ... также квадратичны и явно вычисляются (см. [3]).

Лит.: [1] Bayen F. [a. o.], «Ann. Phys.», 1978, v. 111, № 1, p. 61–151; [2] Воробьев Ю. М., Карасев М. В., «Функциональный анализ и его прилож.», 1988, т. 22, № 1, с. 1–11; [3] Дринфельд В. Г., «Доклады АН СССР», 1983, т. 273, № 3, с. 531–35. *Ю. М. Воробьев.*

ПУАССОНА ТЕОРЕМА — см. *Пуассона скобки, Симплектическая геометрия.*

ПУАССОНА УРАВНЕНИЕ — неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}),$$

где Δ — *Лапласа оператор*, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. *Краевые задачи* для П. у. сводятся к соответствующим задачам *Лапласа уравнения* подстановкой

$$u = v + V,$$

где v удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta v = 0,$$

а V — фундаментальное решение П. у. в области G:

$$V(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-1}\int_G d\boldsymbol{y}\ln|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|\,f(\boldsymbol{y}), \quad n = 2$$

(логарифмический потенциал);

$$V(\boldsymbol{x}) = -[(n-2)\sigma_n]^{-1}\int_G d\boldsymbol{y}\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{2-n}f(\boldsymbol{y}), \quad n \geqslant 3$$

(ньютонов потенциал). Здесь $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь поверхности единичной сферы в n-мерном евклидовом пространстве, Γ — гамма-функция.

П. у. фигурирует в обширном круге физич. задач. Ему удовлетворяют: потенциалы ньютоновых (кулоновых) сил, порожденных массами (зарядами), распределенными в области G с плотностью $\rho(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})/4\pi$; потенциал скоростей идеальной несжимаемой жидкости; характеристики стационарных процессов теплопроводности и диффузии. П. у. возникает также в стационарных задачах теории упругости.

См. также *Гравитационного поля уравнение*, *Твердое тело*; движение около неподвижной точки.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [2] их же, Гидродинамика, 4 изд., М., 1988; [3] их же, Теория упругости, 4 изд., М., 1987; [4] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [5] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988. *В. П. Павлов.*

ПУАССОНА ФОРМУЛА – формула, представляющая единственное классическое решение $u(x, t)$ *Коши задачи для волнового уравнения*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c^2} f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \pi(x)$$

в трехмерном пространстве-времени:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\int_{|y-x|^2 \leqslant c^2t^2} \frac{\pi(y)\,dy}{(c^2t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi c}\int_{|y-x|^2 < c^2t^2} \frac{\varphi(y)\,dy}{(c^2t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi c}\int_0^t d\tau \int_{|y-x|^2 < (ct-\tau)^2} \frac{f(y,\tau)\,dy}{[(ct-\tau)^2 - |y-x|^2]^{1/2}},$$

где $x = (x_1, x_2)$; $y \in \mathbb{R}^2$; c – скорость распространения сигнала, в случае, если начальные данные $\varphi(x)$, $\pi(x)$ – соответственно трижды и дважды непрерывно дифференцируемые функции, а $f(x, t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988. *С. В. Молодцов.*

ПУАССОНА ЯДРО – см. *Пуассона интеграл.*

ПУАССОНА – БОЛЬЦМАНА УРАВНЕНИЕ – см. *Дебая – Хюккеля теория.*

ПУАССОНА – ИЕНСЕНА ФОРМУЛА – см. *Иенсена формула.*

ПУАССОНОВА СТРУКТУРА на многообразии M – билинейная операция $\{\cdot,\cdot\}$ в пространстве гладких функций на нем, удовлетворяющая требованию антикоммутативности, тождеству Якоби, правилу Лейбница. Многообразие, снабженное П. с., называется *пуассоновым многообразием.* П. с. называется невырожденной в точке $x \in M$, если для всякой функции F, для к-рой точка x не является критической, существует функция G такая, что $\{F, G\}(x) \neq 0$. Задание невырожденной П. с. на M равносильно заданию *симплектической структуры.*

Пример многообразия, снабженного вырожденной П. с.: сопряженное пространство $\mathfrak{G}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Скобка Пуассона задается продолжением по правилу Лейбница скобки Ли на линейных функциях на $\mathfrak{G}^*$ – элементах $\mathfrak{G}$. *М. Э. Казарян.*

ПУАССОНОВО ДЕЙСТВИЕ – см. *Момента отображение.*

ПУАССОНОВО МНОГООБРАЗИЕ – гладкое многообразие, снабженное *пуассоновой структурой.* П. м. разбивается на симплектич. слои – подмногообразия (размерности, зависящей, вообще говоря, от слоя), наделенные канонич. симплектич. структурой, к-рые в совокупности определяют пуассонову структуру; скобку Пуассона функций можно вычислять по их ограничениям на симплектич. слои. *М. Э. Казарян.*

ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС – *марковский процесс* n_t, описывающий случайные величины, изменяющиеся только дискретным образом. П. п. находит применение при моделировании радиоактивного распада, статистики фотоотсчетов, систем массового обслуживания и т. д. Переходная вероятность П. п. удовлетворяет дифференциальному уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n,t|n',t') = -\lambda P(n,t|n',t') + \lambda P(n-1,t|n',t')$$

с начальными условиями $P(n, t|n, t) = 1$, $P(n+k, t|n, t) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и имеет вид:

$$P(n,t|n',t') = e^{-\lambda(t-t')}\frac{\lambda^{n-n'}(t-t')^{n-n'}}{(n-n')!}, \quad t \geqslant t', \quad n - n' = 0, 1, 2, \ldots,$$

где λ – средняя скорость отсчетов П. п. П. п. характеризуется тем, что

$$n_{t=0} = 0, \ \mathsf{E}\{n_t\} = \lambda t, \ \mathsf{D}\{n_t\} = \lambda t,$$

$$\mathsf{E}\{(n_t - \mathsf{E}\{n_t\})(n_s - \mathsf{E}\{n_s\})\} = \lambda \min(t, s).$$

П. п. является процессом с независимыми приращениями, имеющими *Пуассона распределение*

$$\mathsf{P}\{n_{t+\tau} - n_t = k\} = \frac{\lambda^k \tau^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Выборочная функция П. п. является неубывающей ступенчатой функцией с единичными скачками. Моменты скачков $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ образуют простейший поток, описывающий поток требований во многих системах массового обслуживания. Временные интервалы $\tau_l = t_l - t_{l-1}$ являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $p(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$.

С П. п. тесно связаны такие процессы, как телеграфный (дихотомич. процесс) и процесс дробового шума. Случайный телеграфный процесс x_t – функция, принимающая два значения $+a$ или $-a$, причем последовательность «переключений» от одного значения к другому и наоборот представляет собой П. п. со средней скоростью отсчетов λ. Телеграфный процесс характеризуется тем, что

$$\mathsf{E}\{x_t\} = 0, \ \mathsf{E}\{x_t x_{t+\tau}\} = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}.$$

Процесс дробового шума есть сумма большого числа импульсов

$$y_t = \sum\nolimits_k a_k u(t - t_k),$$

форма к-рых определяется функцией $u(t)$, амплитуда отдельного импульса a_k – случайная величина с конечной дисперсией, причем случайные моменты t_k описываются П. п. со средней скоростью отсчетов λ. Процесс дробового шума характеризуется тем, что

$$\mathsf{E}\{y_t\} = \lambda \mathsf{E}\{a_k\}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, u(t),$$

$$\mathsf{E}\{y_t\, y_{t+\tau}\} = (\mathsf{E}\{y_t\})^2 + \lambda \mathsf{E}\{a_k^2\}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, u(t)\, u(t+\tau).$$

В частном случае, когда a_k – детерминированные величины, эти формулы носят название формул Кемпбелла.

Лит.: [1] Гардинер К. В., Стохастические методы в естественных науках, пер. с англ., М., 1986; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, 2 изд., М., 1984. *Н. В. Ласкин.*

ПУАССОНОВСКОЕ ТОЧЕЧНОЕ ПОЛЕ – см. *Случайное поле.*

ПЭ-ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА, $\wp$-функция, – см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

Р

РАБОТА с и л ы — мера действия силы, зависящая от численной величины и направления силы и от перемещения точки ее приложения. Если сила $\boldsymbol{F}$ численно и по направлению постоянна, а перемещение M_0M_1 прямолинейно, то Р.

$$A = Fs\cos\alpha,$$

где $s = M_0M_1$, α — угол между направлениями силы и перемещения. Когда $\alpha < 90°$, Р. силы положительна, при $180° \geqslant \alpha > 90°$ — отрицательна, а при $\alpha = 90°$, то есть когда сила перпендикулярна перемещению, $A = 0$.

В общем случае для вычисления Р. силы вводится понятие э л е м е н т а р н о й р а б о т ы

$$dA = Fds\cos\alpha,$$

где ds — элементарное перемещение, α — угол между направлениями силы и касательной к траектории точки ее приложения, направленной в сторону перемещения. В декартовых координатах

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где F_x, F_y, F_z — проекции силы на координатные оси, x, y, z — координаты точки ее приложения. В обобщенных координатах

$$dA = \sum Q_i \delta q_i, \qquad (*)$$

где q_i — *обобщенные координаты*, Q_i — *обобщенные силы*. Для сил, действующих на тело, имеющее неподвижную ось вращения,

$$dA = M_z d\varphi,$$

где M_z — сумма моментов сил относительно оси вращения z, φ — угол поворота. Для сил давления

$$dA = pdV,$$

где p — давление, V — объем.

Р. силы на конечном перемещении определяется как интегральная сумма элементарных Р. и при перемещении M_0M_1 выражается криволинейным интегралом:

$$A = \int_{M_0M_1} (F\cos\alpha)\, ds = \int_{M_0M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Для потенциальных сил

$$dA = -dU$$

и

$$A = U_0 - U_1,$$

где U_0 и U_1 — значения потенциальной энергии U в начальном и конечном положениях системы; в этом случае Р. не зависит от вида траекторий точек приложения сил. При движении механич. системы сумма Р. всех действующих сил на нек-ром перемещении равна изменению ее кинетич. энергии T, то есть

$$\sum A_i = T_1 - T_0.$$

С. М. Тарг.

Р. в т е р м о д и н а м и к е — обобщение понятия «работы силы» [выраженного в дифференциальной форме (*)]. Обобщенные координаты в термодинамике — это внешние параметры термодинамич. системы (объем, напряженность внешнего магнитного или электрич. поля и т. п.), а обобщенные силы (давление и др.) — величины, зависящие не только от координат, но и от внутренних параметров системы (температуры или энтропии). Р. термодинамич. системы над внешними телами заключается в изменении состояния этих тел и определяется количеством энергии, передаваемой системой внешним телам при изменении внешних параметров системы. В квазистатических (то есть бесконечно медленных) *адиабатических процессах* Р. равна изменению внутренней энергии системы. В ряде случаев Р. может быть выражена через другие термодинамич. потенциалы. В общем случае величина Р. при переходе системы из начального состояния в конечное зависит от способа (пути), каким осуществляется этот переход. Это означает, что бесконечно малая (элементарная) Р. системы не является полным дифференциалом какой-либо функции состояния системы; поэтому элементарную Р. обозначают обычно не dA (как полный дифференциал), а δA. Зависимость Р. от пути приводит к тому, что для кругового процесса, когда система вновь возвращается в исходное состояние, Р. системы может оказаться не равной нулю, что используется во всех тепловых двигателях. Р. внешних сил над системой $\delta A = -\delta A$, если энергия взаимодействия системы с внешними телами не меняется в процессе совершения Р. Примерами Р. при изменении одного из внешних параметров системы могут служить: Р. сил давления p при изменении объема V системы $\delta A = pdV$; Р. сил поверхностного натяжения при изменении поверхности системы $\delta A = -\sigma d\Sigma$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения, $d\Sigma$ — элемент поверхности); Р. намагничивания системы $\delta A = -HdJ$ (H — напряженность внешнего магнитного поля, J — намагниченность вещества) и т. д. Р. системы в неравновесном (необратимом) процессе всегда меньше, чем в равновесном.

Г. Я. Мякишев.

РАВНОВЕСИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ — состояние механической системы, находящейся под действием сил, при котором все ее точки покоятся по отношению к рассматриваемой системе отсчета. Если система отсчета является инерциальной (см. *Инерциальная система отсчета*), равновесие называется а б с о л ю т н ы м, а если неинерциальной, то о т н о с и т е л ь н ы м. Изучение условий Р. м. с.— одна из основных задач *статики*. Условия Р. м. с. имеют вид равенств, связывающих действующие силы и параметры, определяющие положения системы; число этих условий равно числу степеней свободы системы. Условия относительного Р. м. с. составляются так же, как и условия абсолютного равновесия, но к действующим на точки силам прибавляют соответствующие переносные силы инерции. Условия равновесия свободного твердого тела состоят в равенстве нулю сумм (по k) проекций сил на три координатные оси $Oxyz$ и сумм моментов всех приложенных к телу сил относительно этих осей, то есть

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0; \\ &\sum m_x(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

При выполнении условий (1) тело будет по отношению к данной системе отсчета находиться в покое, если скорости всех его точек относительно этой системы в момент начала действия сил были равны нулю. В противном случае тело

при выполнении условий (1) будет совершать так наз. движение по инерции, напр. двигаться поступательно, равномерно и прямолинейно. Если твердое тело не является свободным (см. *Связи механические*), то условия его равновесия дают те из равенств (1) (или их следствий), к-рые не содержат реакций наложенных связей; остальные равенства дают уравнения для определения неизвестных реакций. Напр., для тела, имеющего неподвижную ось вращения Oz, условием равновесия будет

$$\sum m_z(F_k) = 0;$$

остальные равенства (1) служат для определения реакций подшипников, закрепляющих ось. Если тело закреплено наложенными связями жестко, то все равенства (1) дают уравнения для определения реакций связей.

Согласно принципу отвердевания, равенства (1), не содержащие реакций внешних связей, дают одновременно необходимые (но недостаточные) условия равновесия любой механич. системы и, в частности, деформируемого тела. Необходимые и достаточные условия равновесия любой механич. системы могут быть найдены с помощью *возможных перемещений принципа*. Для системы, имеющей s степеней свободы, эти условия состоят в равенстве нулю соответствующих обобщенных сил:

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ \ldots,\ Q_s = 0. \qquad (2)$$

Из состояний равновесия, определяемых условиями (1) или (2), практически реализуются лишь те, к-рые являются устойчивыми (см. *Устойчивость равновесия*). *С. М. Targ.*

РАВНОВЕСИЯ ДИАГРАММА – см. *Фазовая диаграмма.*

РАВНОВЕСНАЯ МЕРА – см. *Емкость* множества.

РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ статистических систем – состояния статистических систем, в которых средние значения любых термодинамических величин (параметров), характеризующих систему, не зависят от времени, то есть могут оставаться неизменными сколь угодно долго.

Статистич. равновесие не означает равновесия в механич. смысле, то есть и в Р. с. статистич. систем частицы движутся в соответствии с уравнениями Гамильтона, а не покоятся в положениях равновесия (минимумах потенциальной энергии). С этим связаны постоянно существующие небольшие отклонения значений термодинамич. величин (параметров) от равновесных – флуктуации.

В статистич. механике состоянием классич. статистич. системы называется распределение вероятностей (вероятностная мера), заданное на фазовом пространстве системы. Для квантовых систем состояние определяется заданием *плотности матрицы* с соответствующими условиями симметрии относительно перестановок частиц (см. *Ферми – Дирака статистика*, *Бозе – Эйнштейна статистика*). Эквивалентным способом определения состояния статистич. систем служит задание последовательности *распределения вероятностей частичных функций* (приведенных матриц плотности – в квантовом случае). В статистич. механике Р. с. статистич. систем описываются с помощью *Гиббса распределений* [микроканонического – для изолированной системы, канонического – для системы, обменивающейся с окружающей средой (термостатом) энергией, и большого канонич.– для системы, обменивающейся с термостатом энергией и частицами].

Используется также понятие локального равновесного состояния статистич. системы (см. *Локально возмущенные равновесные функции распределения*).

Одной из важных и до конца не решенных проблем статистич. механики является математически строгое обоснование стремления статистич. системы к равновесию, то есть доказательство того, что неравновесные состояния статистич. систем стремятся к Р. с. с течением времени.

Наиболее точное описание термодинамич. свойств статистич. систем в состоянии равновесия может быть получено при исследовании *бесконечных систем*, к-рые получаются из систем конечного числа частиц в *термодинамическом пределе*. Их состояния описываются предельными распределениями Гиббса, удовлетворяющими *ДЛР-уравнениям* [или *Майера уравнению*, *Кирквуда – Зальцбурга уравнению* для частичных (приведенных) функций распределения вероятностей].

См. также *Термодинамический предел* для равновесных состояний непрерывных систем квантовой статистической механики, *Термодинамический предел* для равновесных состояний непрерывных систем классической статистической механики.

Лит. см. при ст. *Гиббсовские состояния.* *П. В. Малышев.*

РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ; кинетический предел – предельный переход по параметрам, входящим в *гамильтониан* системы частиц, при котором равновесные n-частичные функции распределения в пределе факторизуются на одночастичные. Основными примерами кинетич. пределов являются *среднего поля предел*, *Больцмана – Грэда предел* (малой плотности), слабой связи и т. п.

Кинетич. предел Р. с. является стационарным (равновесным) решением соответствующего этому пределу *кинетического уравнения.*

Предел среднего поля состоит в следующем. Пусть

$$\rho_\varepsilon(q_1, \ldots, q_m) = \varepsilon^m \rho(q_1, \ldots, q_m; \varepsilon),\ q_i \in \mathbb{R}^\nu,$$

а $\rho(q_1, \ldots, q_m; \varepsilon)$ – гиббсовские функции распределения с парным потенциалом $\varepsilon\Phi(q)$, активностью $\varepsilon^{-1}z$, обратной температурой β. Последовательность $\rho_\varepsilon = \{\rho_\varepsilon(q_1, \ldots, q_m)\}_{m \geqslant 1}$ удовлетворяет уравнениям Кирквуда – Зальцбурга

$$\rho_\varepsilon = z(K_\varepsilon \rho_\varepsilon + \alpha),$$

где $\alpha = (1, 0, \ldots)$,

$$(K_\varepsilon \rho)(q_1, \ldots, q_m) =$$

$$= \exp\Big\{-\beta \sum_{k=2}^m \Phi(q_1 - q_k)\Big\}[(1 - \delta_{m,1})\rho(q_2, \ldots, q_m) +$$

$$+ \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{\nu n}} dq_1' \ldots dq_n' \times$$

$$\times \prod_{j=1}^n f_\varepsilon(q_1 - q_j')\rho(q_2, \ldots, q_m, q_1', \ldots, q_n')],$$

$$f_\varepsilon(q) = \frac{1}{\varepsilon}\exp\{-\beta\varepsilon\Phi(q)\} - 1, \quad f_0(q) = -\beta\Phi(q).$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ имеет место уравнение

$$\rho_0 = z(K_0\rho_0 + \alpha).$$

Последовательность $\rho_0 = \{\rho_0(q_1, \ldots, q_m)\}_{m \geqslant 1}$ является решением этого уравнения, если

$$\rho_0(q_1, \ldots, q_m) = \prod_{i=1}^m \rho_0(q_i)$$

и $\rho_0(q)$ удовлетворяет уравнению Кирквуда – Монро

$$\rho_0(q) = z\exp\Big\{-\beta \int_{\mathbb{R}^\nu} dq' \Phi(q - q')\rho_0(q')\Big\}.$$

Уравнение Кирквуда – Зальцбурга имеет единственное в пространстве $\mathbb{E}_\xi$ решение, если

$$|z| \leqslant \xi^{-1}\exp\{-2\beta B - \xi C_0(\beta)\},$$

где

$$C_0(\beta) = e^{\beta\Phi_0}\int_{\mathbb{R}^\nu} dq\Phi(q),$$

$\Phi(q) \geqslant -\Phi_0$, B – константа из условия устойчивости.

Если потенциал $\Phi(q)$ положителен, то $\rho_\varepsilon - \rho_0$ стремится к нулю в норме пространства $\mathbb{E}_\xi$ при $\varepsilon \to 0$, если ρ_ε и ρ_0 – соответственно решения допредельного и предельного уравнений Кирквуда – Зальцбурга.

Предел Больцмана – Грэда для бесконечной системы частиц, к-рые взаимодействуют как упругие шары, состоит в том, что диаметр частиц $d \to 0$, активность $z \to \infty$,

так что $d^{(\nu-1)}z=\lambda^{-1}$ (величина λ^{-1} обратно пропорциональна длине свободного пробега).

Последовательность гиббсовских функций распределения

$$F_n(x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-\nu n/2}\exp\left\{-\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2}\right\}\rho_n(q_1,\ldots,q_n),\ n\geqslant 1,$$

$$x_i=(q_i,p_i)\in\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu,$$

где $\rho_n(q_1,\ldots,q_n)$ – решение уравнений Кирквуда – Зальцбурга для системы упругих шаров, принадлежит пространству $\mathbb{E}_\xi$ последовательностей функций, равных нулю на запрещенных конфигурациях $W_n=\{(q_1,\ \ldots,\ q_n)\in\mathbb{R}^{\nu n}:\ |q_i-q_j|<d$, хотя бы для одной пары $(i,j): i\neq j=1,\ \ldots,\ n\}$, к-рые ограничены по конфигурационным и экспоненциально убывают по импульсным переменным.

Если

$$\xi=k\lambda^{-1}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{-\nu}{2}}$$

и

$$d<d_0\equiv\frac{\ln 2}{k\lambda^{-1}}\begin{cases}\nu\dfrac{\left(\frac{\nu}{2}-1\right)!}{2\pi^{\nu/2}}\\ \nu\dfrac{\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\left(\frac{\nu}{2}-2\right)\ldots\frac{1}{2}}{\pi(\nu-1)}\end{cases}$$

при четном ν,

при нечетном ν}, где $k>2$, то в пределе Больцмана – Грэда функции $d^{(\nu-1)n}F_n(x_1,\ldots,x_n)$ сходятся равномерно на каждом компакте из $\mathbb{R}^{\nu n}\times(\mathbb{R}^{\nu n}\setminus W_n)$ к функциям распределения Максвелла:

$$F_n^{(0)}(x_1,\ldots,x_n)=\lambda^{-n}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-\nu n/2}\exp\left\{-\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2}\right\}.$$

Лит.: [1] Grewe N., Klein W., «J. Math. Phys.», 1976, v. 17, № 5, p. 699–703; [2] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., «Доклады АН УССР, сер. А», 1988, № 12, с. 17–19.

В. И. Герасименко, В. И. Скрипник.

РАВНОВЕСНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ при произвольных значениях термодинамических параметров.

Одной из важных задач классич. статистич. механики является исследование функций распределения статистич. систем и их *термодинамических пределов* при произвольных значениях термодинамич. параметров. При этом, напр., неединственность таких пределов интерпретируется как наличие (или возможность) фазовых переходов в статистич. системах.

Рассмотрим непрерывные статистич. системы в большом канонич. ансамбле. Термодинамич. параметрами в этом случае служат активность z и обратная температура β, а термодинамич. предельный переход осуществляется при постоянной активности ($\Lambda\nearrow\mathbb{R}^\nu$, $z=\text{const}$). Соответствие между последовательностью предельного распределения вероятностей частичных (приведенных) функций и предельным распределением Гиббса, то есть вероятностной мерой μ на конфигурационном пространстве бесконечной системы, устанавливается следующей теоремой (обозначения см. в ст. *ДЛР-уравнения*).

Пусть потенциальная энергия U определяется парным потенциалом взаимодействия Φ, удовлетворяющим условиям сверхустойчивости, регулярности и регулярности снизу (см. *Сверхустойчивый потенциал взаимодействия, Регулярный потенциал взаимодействия*), а μ – вероятностная мера на $(\mathfrak{X},\ \mathcal{S})$, тогда следующие условия эквивалентны:

1) μ – мера умеренного роста, удовлетворяющая ДЛР-уравнениям;

2) последовательность частичных функций распределения вероятностей F_m, $m\geqslant 0$, построенная по мере (по гиббсовскому распределению) μ, удовлетворяет предельным *Кирквуда – Зальцбурга уравнениям* (и, следовательно, предельным *Майера уравнениям*).

Наоборот, по последовательности частичных функций распределения вероятностей, удовлетворяющих уравнениям Майера (уравнениям Кирквуда – Зальцбурга), можно построить меру μ, удовлетворяющую ДЛР-уравнениям и условию умеренного роста, причем существует по крайней мере одна такая мера.

Все точки множества Σ предельного распределения Гиббса можно получить, задавая различные условия для системы в сосуде; Σ представляет собой замыкание выпуклой оболочки множества таких предельных точек. Термодинамич. предел частичных функций распределения вероятностей устанавливается следующей теоремой.

Пусть Φ – сверхустойчивый, регулярный и регулярный снизу потенциал взаимодействия, z – произвольно, а $\{\Lambda_j\}$ – произвольная последовательность областей, стремящихся к $\mathbb{R}^\nu$, $\nu>1$, в том смысле, что для любой ограниченной $\Delta\subset\mathbb{R}^\nu$ можно указать n_Δ такое, что $\Delta\subset\Lambda_j$ при всех $j\geqslant n_\Delta$. Тогда из этой последовательности всегда можно выбрать подпоследовательность $\{\Lambda_j'\}$ такую, что при любом m последовательность частичных функций распределения вероятностей $F_{m,\,\Lambda_j'}$ сходится при $\Lambda_j'\nearrow\mathbb{R}^\nu$ к предельной последовательности F_m равномерно на компактах. Последовательность F_m удовлетворяет предельным уравнениям Кирквуда – Зальцбурга. При любом $\beta>0$ можно указать $z_0=z_0(\beta)>0$ такое, что при $0<z<z_0$ существует единственный термодинамич. предел для последовательности распределения вероятностей частичных функций, удовлетворяющий предельным уравнениям Кирквуда – Зальцбурга.

Таким образом, установить единственность предела последовательности частичных функций распределения вероятностей при достаточно больших z (в случае $\nu>1$) не представляется возможным.

Охарактеризуем множество Σ конфигурационного предельного распределения Гиббса. При любых $z>0$ и $\beta>0$ множество Σ является непустым, компактным и выпуклым, а при $0<z<z_0$ оно состоит из одной точки. Аналогичное утверждение справедливо и для множества $\Sigma_0\subset\Sigma$ предельных распределений Гиббса, инвариантных относительно сдвигов в $\mathbb{R}^\nu$, то есть существует по крайней мере одно инвариантное относительно сдвигов предельное распределение Гиббса. При $\nu=1$ и быстро убывающем потенциалом взаимодействия с твердой сердцевиной множество Σ состоит из одной точки при любых $z>0$ и $\beta>0$, то есть фазовые переходы в таких системах отсутствуют. Для предельного распределения Гиббса с потенциалом взаимодействия такого типа установлены и другие свойства, напр. регулярности, сильного перемешивания.

Любое инвариантное состояние из Σ_0 может быть единственным образом разложено на так наз. «чистые» термодинамич. фазы.

Лит. см. при ст. *Гиббсовские состояния.* *П. В. Малышев.*

РАВНОВЕСНЫЙ АНСАМБЛЬ – см. *Статистический ансамбль.*

РАВНОВЕСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Емкость* множества.

РАВНОМЕРНО ПРИГОДНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ в квантовой механике – одно из приближенных аналитических представлений решений уравнений, описывающих физические системы. Пусть гамильтониан $\hat{H}$ нек-рой квантовой системы зависит от произвольного параметра λ. Тогда собственные векторы $|\Psi_\lambda\rangle$ и собственные значения $E(\lambda)$, определенные стационарным уравнением Шредингера

$$\hat{H}(\lambda)|\Psi_\lambda\rangle=E(\lambda)|\Psi_\lambda\rangle,\qquad(1)$$

также зависят от этого параметра.

Пусть при решении уравнения (1) используется нек-рый метод, позволяющий найти приближенные собственные зна-

чения $E^{(0)}(\lambda)$ и собственные векторы $|\Psi_\lambda^{(0)}\rangle$ соответственно. В большинстве случаев, напр. при использовании теории возмущений, полученные выражения представляют собой главные члены асимптотич. рядов и имеют необходимую точность только в узком интервале значений параметра λ. Однако возможна и такая ситуация, что функции $E^{(0)}(\lambda)$ и $|\Psi_\lambda^{(0)}\rangle$ аппроксимируют решения уравнения (1) при всех λ с достаточно высокой относительной точностью, так что справедлива следующая оценка:

$$\left|\frac{E(\lambda)-E^0(\lambda)}{E(\lambda)}\right| \simeq \left|\frac{\langle x|\Psi_\lambda\rangle-\langle x|\Psi_\lambda^{(0)}\rangle}{\langle x|\Psi_\lambda\rangle}\right| \leqslant \delta \ll 1. \qquad (2)$$

Здесь переменное x определяет выбор представления для вектора состояния системы.

Если неравенства (2) выполняются во всей области допустимых значений x и λ, то $|\Psi_\lambda^{(0)}\rangle$ и $E^{(0)}(\lambda)$ определяют равномерно пригодное приближение для решений уравнения Шредингера.

По существу, наиболее известной формой Р. п. п. является численное решение дифференциального уравнения с частными производными (1). В этом случае используется либо конечноразностная аппроксимация дифференциальных операторов в $\hat{H}$ (см., напр., [1]), либо (1) сводится к системе линейных алгебраич. уравнений высокой размерности с помощью разложения вектора $|\Psi_\lambda\rangle$ по полному набору базисных волновых функций (см. [2]). В первом случае точность аппроксимации решения определяется искусственно введенным параметром – шагом интегрирования Δx дифференциальных операторов в уравнении Шредингера, и условие (2) может быть выполнено при любых параметрах гамильтониана, а во втором – зависит от числа N функций из полного набора (в общем случае бесконечного), использованных в разложении вектора $|\Psi_\lambda\rangle$. Следует, однако, отметить, что уже для систем с числом степеней свободы $s \geqslant 3$ прямое численное решение уравнения Шредингера сталкивается с большими вычислительными трудностями.

Другая группа методов получения Р. п. п. в квантовой механике связана с различными модификациями вариационного принципа (см. [3]). Его использование основано на том, что точный вектор основного состояния системы является экстремалью функционала

$$J\{\langle x|\Psi_\lambda\rangle\} = \langle\Psi_\lambda|\hat{H}\,|\Psi_\lambda\rangle \qquad (3)$$

при дополнительном условии нормировки $\langle\Psi_\lambda|\Psi_\lambda\rangle = 1$. Если качественный анализ решения уравнения Шредингера позволяет найти нек-рое приближенное выражение $|\Psi_\lambda^{(0)}\{C_i\}\rangle$ для вектора состояния, зависящее от набора вариационных параметров $C_1, \ldots, C_l$, то при выборе этих параметров из условий экстремума функционала

$$\frac{\partial J_0}{\partial C_i}=0;\ i=1,2,\ldots,l;\ J_0(C_1,\ldots,C_l)=\left\langle\Psi_\lambda^{(0)}\{C_i\}\middle|\hat{H}\middle|\Psi_\lambda^{(0)}\{C_i\}\right\rangle,$$

вектор $|\Psi_\lambda^{(0)}\{C_i\}\rangle$ и величина $E_0^{(0)} = J_0(C_1, \ldots, C_l)$ определяют Р. п. п. для основного состояния системы. Существует очень много примеров эффективного использования вариационных методов решения конкретных физич. задач. В частности, один из вариантов вариационного подхода – метод Хартли – Фока – является единственным инструментом описания сколько-нибудь сложных многомерных задач атомной и молекулярной физики. Основные трудности в применении вариационных методов связаны с выбором пробных волновых функций, особенно для возбужденных состояний, и оценкой точности получающихся результатов.

Во многих случаях эффективным способом получения Р. п. п. для решений уравнения Шредингера является метод *Паде аппроксимации* (см. [4]). Его цель состоит в выделении количественной информации о структуре решения на основе в общем случае расходящегося ряда теории возмущений, что достигается заменой ряда по степеням нек-рого параметра λ, входящего в гамильтониан, на отношение многочленов по этому параметру, что и приводит к более эффективному вычислительному алгоритму.

Принцип построения аппроксимации Паде является достаточно простым. Пусть использование теории возмущений позволяет найти нек-рую физич. величину, напр. энергию, в виде следующего ряда

$$E(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\lambda^k.$$

Тогда аппроксимация Паде $P^{[N,M]}(\lambda)$ для этой величины определяется следующим соотношением (см. [4]):

$$E(\lambda) = P^{[N,M]}(\lambda) + \lambda^{N+M+1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\lambda^k \qquad (5)$$

и представляет собой отношение многочленов $P_M(\lambda)/Q_N(\lambda)$ порядка M и N соответственно. Известно решение уравнения (5), определяющее явный вид этих многочленов:

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{M-N+1} & \varepsilon_{M-N+2} & \cdots & \varepsilon_{M+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_M & \varepsilon_{M+1} & \cdots & \varepsilon_{M+N} \\ \sum_{j=N}^{M}\varepsilon_{j-N}\lambda^j & & \cdots & \sum_{j=0}^{M}\varepsilon_j\lambda^j \end{vmatrix};$$

$$Q_N(\lambda) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{M-N+1} & \cdots & \varepsilon_{M+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_M & \cdots & \varepsilon_{M+N} \\ \lambda^N & \lambda^{N-1} \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Во многих задачах использование аппроксимации Паде позволило существенно расширить диапазон применимости результатов теории возмущений при описании свойств реальных физич. систем. Наиболее характерный пример – рассмотрение качественных особенностей фазовых переходов в плотных газах и жидкостях на основе аппроксимации Паде соответствующих вириальных разложений (см. [5]). Известны также обобщения этого метода, когда для построения $P^{[N,M]}(\lambda)$ были использованы не степенные многочлены, а какой-либо из полных наборов ортогональных многочленов – Чебышева или Эрмита, однако строгое доказательство его сходимости было проведено только для диагональной последовательности $P^{[N,M]}$ в задаче об ангармонич. осцилляторе (см. [4]). Большие трудности возникают также при использовании метода для многопараметрич. задач.

К Р. п. п. относятся и методы суммирования асимптотич. рядов (см. [6]), также позволяющие выйти за рамки теории возмущений. Таким является, напр., метод Бореля суммирования асимптотич. рядов. Пусть использование теории возмущений по нек-рому параметру λ приводит для физич. величины к следующему формальному ряду:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} b_n\lambda^n + R_N(\lambda). \qquad (6)$$

Если рост коэффициентов этого расходящегося ряда ограничен условием

$$|b_n| < C\sigma^n n!, \quad R_n < C\sigma^{N+1}(N+1)!|\lambda|^{N+1},$$

то ряд (6) является суммируемым по Борелю. Для этого достаточно ввести новый сходящийся ряд

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}\lambda^n,$$

к-рый называется борелевским преобразованием функции $f(\lambda)$. Тогда в области аналитичности функции $f(\lambda)$ ее можно вычислить по формуле

$$f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-a}F(\lambda a)\,da.$$

При использовании методов суммирования расходящихся рядов необходим алгоритм вычисления большого числа коэффициентов ряда для определения их асимптотич. поведения при $n \to \infty$. Это может быть сделано, напр., с помощью логарифмич. теории возмущений (см. [7]) или на основе аппроксимации Паде (см. [4]), однако при переходе к системам с несколькими степенями свободы возникают трудноразрешимые проблемы (см. [7]).

Предложен подход к построению Р. п. п. к решениям уравнения Шредингера, представляющий собой нек-рый универсальный алгоритм перестройки ряда теории возмущений (см. [8], [9]). Предложенный метод называется операторным методом в силу того, что как при построении нулевого приближения, так и при численном расчете последующих приближений, сходящихся в пределе к точному решению задачи, все вычисления сводятся к алгебраич. преобразованиям с матричными элементами операторов, входящих в гамильтониан, в том числе и для систем со многими степенями свободы. Кроме того, операторный метод можно использовать для получения Р. п. п. при вычислении интегралов, представляющих матричные элементы операторов, и при расчете статистич. сумм для квантовых систем (см. [10]). Напр., в случае задачи о квантовом ангармонич. осцилляторе (эта задача чаще всего используется для апробации различных приближенных методов) гамильтониан системы в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2) + \lambda x^4, \quad \lambda \geqslant 0, \qquad (7)$$

с операторами координаты и импульса, удовлетворяющими перестановочному соотношению $[\hat{x}, \hat{p}] = i$. Известно (см. [4]), что ряд теории возмущений по оператору $\lambda\hat{x}^4$ является асимптотическим с нулевым радиусом сходимости, причем ведущие члены разложения для собственного значения n-го стационарного состояния при $\lambda \ll 1$ определяются формулой

$$E_n(\lambda) \simeq n + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\lambda(1 + 2n + 2n^2) + O(\lambda^2), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Асимптотич. характер имеет и разложение для $E_n(\lambda)$ в пределе сильной связи $\lambda \gg 1$, так что, напр.,

$$E_0(\lambda) \simeq \lambda^{1/3}[0{,}668 + 0{,}144\lambda^{-2/3} + O(\lambda^{-4/3})].$$

В соответствии с рецептом операторного метода для получения Р. п. п. при вычислении спектра собственных значений гамильтониана необходимо выбрать достаточно простой, но соответствующий симметрии системы, полный набор состояний, зависящих от нек-рого, не определенного пока, параметра. Для рассматриваемой задачи такой параметр проще всего ввести непосредственно в гамильтониан (7) с помощью канонич. преобразования к операторам рождения a^+ и уничтожения a:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a^+ + a); \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a^+ - a); \quad [a, a^+] = 1.$$

Тогда после приведения к нормальной форме оператор $\hat{H}$ принимает следующий вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1,$$

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{4\omega}(\omega^2 + 1)(2a^+a + 1) + \frac{3\lambda}{4\omega^2}(2a^{+2}a^2 + 4a^+a + 1), \qquad (8)$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{4\omega}(\omega^2 - 1)(a^{+2} + a^2) + \frac{\lambda}{4\omega^2}[2a^{+2}(2a^+a + 3) + 2(2a^+a + 3)a^2 + a^{+4} + a^4]. \qquad (9)$$

Собственными векторами оператора (8), к-рый принимается за невозмущенный гамильтониан, являются состояния с определенными числами возбуждений

$$a^+a|n, \omega\rangle = n|n, \omega\rangle,$$

а его собственные значения определяются формулой

$$E_n^{(0)}(\omega, \lambda) = \frac{1}{4\omega}(\omega^2 + 1)(2n + 1) + \frac{3\lambda}{4\omega^2}(2n^2 + 2n + 1). \qquad (10)$$

Введенный выше параметр ω, имеющий смысл частоты осциллятора, полный набор состояний к-рого задается векторами $|n, \omega\rangle$, определяет, фактически, выбор нек-рого представления волновых функций. Поскольку точные собственные значения оператора $\hat{H}$ не должны зависеть от представления волновых функций из полного набора, то есть

$$\frac{\partial E_n}{\partial \omega} = 0, \qquad (11)$$

то $\omega = \omega_n$ выбирается так, чтобы условие (11) выполнялось уже для собственных значений невозмущенного гамильтониана, что для каждого квантового числа n дает уравнение

$$\omega_n^3 - \omega_n - 6\lambda\frac{1 + 2n + 2n^2}{1 + 2n} = 0. \qquad (12)$$

Если теперь при любом значении константы связи λ и индекса n находить энергию по формуле (10) с подстановкой в нее частоты, найденной из уравнения (12), то величины $E_n^{(0)}(\omega_n, \lambda)$ отличаются от точных собственных значений $E_n(\lambda)$ (10) не более, чем на 5% во всем диапазоне n и λ и, следовательно, определяют Р. п. п. для функций $E_n(\lambda)$.

Алгоритм построения нулевого приближения операторного метода, определяемый формулами (10) и (11), сохраняется и для существенно более сложных систем (см. [10]), в том числе и с бесконечным числом степеней свободы и во всех случаях он приводит к Р. п. п. для собственных значений.

Для вычисления последующих приближений операторного метода можно построить итерационную схему, аналогичную теории возмущений Бриллюэна – Вигнера. Для собственных значений E_n и коэффициентов разложения C_{nk} точной волновой функции

$$|\Psi_n\rangle = |n, \omega_n\rangle + \sum_{k \neq n} C_{nk}|k, \omega_n\rangle$$

получается следующая система рекуррентных уравнений, содержащая только матричные элементы гамильтониана:

$$E_n^{(s)} = H_{nn} + \sum_{k \neq n} C_{nk}^{(s)} H_{kn},$$

$$C_{nk}^{(s)} = -\left[H_{kk} - E_n^{(s-1)}\right]^{-1} \times \left[H_{nk} + \sum_{m \neq n,\, k} H_{nm} C_{mk}^{(s-1)}\right],$$

причем

$$C_{nk}^{(0)} = 0, \quad C_{nk} = \lim_{s \to \infty} C_{nk}^{(s)}, \quad E_n = \lim_{s \to \infty} E_n^{(s)},$$

и последовательные итерации достаточно быстро сходятся к точным величинам.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1975; [2] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., 1957; [3] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., М., 1958; [4] Simon B., «Ann. Phys.», 1970, v. 58, p. 79; [5] Фишер М., Природа критического состояния, пер. с англ., М., 1968; [6] Липатов Л. Н., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1977, т. 72, с. 411; [7] Турбинер А. В., «Успехи физич. наук», 1984, т. 144, с. 35; [8] Halliday I. G., Suranyi P., «Phys. Rev. D», 1980, v. 21, p. 1529; [9] Feranchuk I. D., Komarov L. I., «Phys. Lett. A.», 1982, v. 88, p. 211; [10] Feranchuk I. D., Komarov L. I., «J. Phys. A», 1984, v. 17, p. 3111.

Л. И. Комаров, И. Д. Феранчук.

РАВНОМЕРНО СИЛЬНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ – см. *Перемешивание.*

РАВНОМЕРНОГО СРЕДНЕГО УСЛОВИЕ – см. *Усреднения метод.*

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Распределение.*

РАВНОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИНЦИП: для классических систем с квадратичным по фазовым переменным гамильтонианом (идеальный газ) каждому квадратичному члену соответствует вклад в энергию (в расчете на одну частицу), равный $\theta/2$, где θ – температура в энергетических единицах. В частности, для одноатомного идеального трехмерного газа число таких квадратичных членов $l=3$ и полная энергия $\varepsilon=3\theta/2$. Для нелинейной n-атомной молекулы $l=6\ (n-1)$.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, ч. 1, М., 1976.

Д. П. Санкович.

РАДИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – см. *Корреляционная функция.*

РАДИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА – двухчастичное *Шредингера уравнение*

$$(-\Delta_{\boldsymbol{x}}+v(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{k}^2)\Psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})=0,$$

$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3$, для сферически симметричного потенциала $v(\boldsymbol{x})=v(|\boldsymbol{x}|)$, приводящееся к системе независимых уравнений

$$-\frac{d^2u_l}{dr^2}+\left[v(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}-k^2\right]u_l=0,\quad l=0,1,2,\ldots, \qquad (1)$$

$r=|\boldsymbol{x}|$. Функции $u_l=u_l(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})$ являются коэффициентами в разложении функции $\Psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ в ряд по многочленам Лежандра:

$$\Psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})=\sum\nolimits_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\frac{u_l(r,\boldsymbol{k})}{kr}P_l(\cos\theta),$$

где $\cos\theta=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})/(|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{x}|)$. Решения задачи рассеяния в этом случае определяются как решения уравнения (1) с асимптотикой при $r\to\infty$ вида

$$u_l(r,\boldsymbol{k})\sim\exp\{i\delta_l(\boldsymbol{k})\}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l(\boldsymbol{k})\right).$$

Уравнения (1) называются радиальными уравнениями Шредингера, функции $u_l(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})$ – парциальными компонентами волновой функции $\Psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$, а функции $\delta_l(\boldsymbol{k})$ – парциальными фазами рассеяния.

Лит.: [1] Faxen H., Holtzmark J., «Z. Phys.», 1927, Bd 45, S. 307–24; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 4 изд., М., 1989.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

РАДИАЦИОННАЯ ШИРИНА УРОВНЯ – см. *Ширина уровня.*

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ в квантовой электродинамике – поправки к значениям некоторых физических величин и к сечениям различных процессов (вычисленным по формулам релятивистской квантовой механики), обусловленные взаимодействием заряженной частицы с собственным электромагнитным полем. Р. п. рассчитывают по методу теории возмущений, представляя их в виде ряда по степеням постоянной тонкой структуры

$$\alpha=e^2/\hbar c\approx 1/137$$

(где e – заряд электрона), n-й член к-рого можно рассматривать как результат испускания и поглощения n виртуальных фотонов или электрон-позитронных пар. При вычислении Р. п. используется процедура *перенормировки* массы и заряда частицы.

Наибольший интерес представляют Р. п. к магнитным моментам электрона и мюона, к сверхтонкому расщеплению атомных уровней, радиационное смещение атомных уровней энергии, Р. п. к сечениям рассеяния электрона электроном или атомным ядром. Результаты расчетов Р. п. вплоть до величин 3-го порядка по степеням α блестяще согласуются с экспериментальными данными и свидетельствуют о справедливости квантовой электродинамики по крайней мере на расстояниях, бо́льших 10^{-15} см. Р. п. растут с ростом энергии, и эффективным параметром разложения (эффективным зарядом) при высоких энергиях является величина $\alpha\ln(\mathscr{E}/m)$, где $\mathscr{E}$ – энергия частицы в системе центра инерции, m – ее масса в энергетич. единицах.

Р. п. могут быть в ряде случаев подсчитаны не только для электродинамич. процессов, но и для процессов, вызванных другими взаимодействиями. Напр., в квантовой хромодинамике вычисляются Р. п. к сечениям глубоко-неупругих процессов или к вероятностям распада мезонов со скрытым «очарованием».

При вычислении Р. п. к электродинамич. величинам с точностью выше 3-го порядка существенный вклад вносят процессы виртуального рождения адронов и эффекты слабого взаимодействия.

Лит.: [1] Фейнман Р., Теория фундаментальных процессов, пер. с англ., М., 1978; [2] Бьеркен Дж., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория, пер. с англ., т. 1–2, М., 1978.

Б. Л. Иоффе.

РАДИУС СХОДИМОСТИ – см. *Степенной ряд.*

РАДИУС-ВЕКТОР – *вектор*, идущий в точку пространства из некоторой, заранее фиксированной точки.

РАЗБИЕНИЕ на подсистемы – способ разделения системы N частиц на K непересекающихся подсистем. Подробно Р. на подсистемы описывается указанием входящих в него подсистем. Напр., (132) (4) (65) обозначают разбиение системы шести частиц на три подсистемы. Порядок расположения подсистем и порядок частиц в обозначениях последних несущественен. Р. на подсистемы применяется в квантовой теории рассеяния для описания и классификации состояний системы N частиц.

Лит.: [1] Weinberg S., «Phys. Rev.», 1964, v. 133, № 1B, p. 232–56; [2] Якубовский О. А., «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 1312–20.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

РАЗГРУППИРОВКА ФОТОНОВ – см. *Антигруппировка фотонов.*

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ – один из основных подходов к исследованию систем дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными

$$\dot{x}=f(x,y,\varepsilon),\ \dot{y}=\varepsilon g(x,y,\varepsilon),\ 0<\varepsilon\ll 1.$$

При этом подходе ищется близкая к тождественной замена переменных $x,\ y\to\xi,\ \eta$, к-рая позволила бы отделить уравнение для медленных переменных, то есть записать исходную систему в виде:

$$\dot{\xi}=F(\xi,\eta,\varepsilon),\ \dot{\eta}=\varepsilon G(\eta,\varepsilon).$$

Часто дополнительно требуется, чтобы правая часть уравнения для быстрых переменных также зависела только от медленных переменных: $F=F(\eta,\varepsilon)$.

Замена переменных, осуществляющая Р. д., ищется в виде ряда по малому параметру ε. Точное Р. д. обычно невозможно, и ряды для замены переменных расходятся. Однако, обрывая эти ряды, можно осуществить Р. д. приближенно. Отбрасывая в уравнениях для новых переменных члены высокого порядка, зависящие от быстрых переменных, получают систему для приближенного описания движения, к-рая существенно проще, чем исходная. Примером Р. д. является использование процедур исключения быстрых фаз в *усреднения методе.*

Иногда приближенное Р. д. удается осуществить не во всем фазовом пространстве, а лишь на нек-рой поверхности, как это делается в теории *релаксационных колебаний.*

А. И. Нейштадт.

РАЗДУВАЮЩАЯСЯ ВСЕЛЕННАЯ – см. *Квантовая теория гравитации, Космологические модели.*

РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ – обобщение понятия *спектральной меры*, используемое в спектральном анализе несамосопряженных операторов и в теории квантового измерения. Пусть H – гильбертово пространство, $\mathfrak{X}$ – измеримое пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathscr{B}(\mathfrak{X})$. Функция множеств $\mathscr{M}(B)$, $B\in\mathscr{B}(\mathfrak{X})$, значениями к-рой являются ограниченные положительные операторы в H, называется разложением единицы, если: 1) $\mathscr{M}(\mathfrak{X})=I$, где I – единичный оператор в H; 2) для любого конечного или счетного набора $\{B_i\}$ попарно непересекающихся измеримых подмножеств

$$\mathscr{M}(\cup_i B_i)=\Sigma_i\mathscr{M}(B_i),$$

где ряд сходится в слабой (сильной) операторной топологии. Если $\mathcal{M}(B)^2 = \mathcal{M}(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, то Р. е. называется ортогональным (проекторнозначной мерой, спектральной мерой). Пример Р. е. дается формулой

$$\mathcal{M}(B) = \int_B P(x)\,\mu(dx),\ B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}),$$

где $P(x)$ – проекторы на векторы e_x *переполненной системы.*

Неортогональные Р. е. впервые появились в [1] в связи со спектральным разложением симметричных операторов и были систематически исследованы в [2], где доказано, в частности, что всякое Р. е. может быть расширено до ортогонального (см. *Наймарка теорема*). Относительно применений в квантовой теории см. *Квантовое измерение.*

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Наймарк М. А., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1940, т. 4, № 3, с. 277–318.

А. С. Холево.

РАЗМЕРНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА – см. *Перенормировка* в квантовой механике.

РАЗМЕРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ – способ доопределения расходящихся интегралов в квантовой теории поля, возникающих при вычислении диаграмм Фейнмана, основанный на формальном аналитическом продолжении по размерности пространства-времени. Интерпретация Р. р. как интегрирования в пространстве нецелого числа измерений $d = N - \varepsilon$, где N – исходное (целое) число измерений, ε – инфинитезимальный параметр регуляризации, обусловлена сходством определяющих соотношений метода Р. р. с формулами многомерного интегрирования. Однако строгого математич. смысла такой интерпретации придать не удается. С математич. точки зрения Р. р. есть специальная процедура, сопоставляющая подинтегральным выражениям определенного класса соответствующие «проинтегрированные» выражения, явно зависящие от параметра ε и разложимые в ряд Лорана по ε вида:

$$\sum_{n=-\mu}^{\infty} c_n \varepsilon^n.$$

Наличие в этом ряду членов с $n < 0$ соответствует расходимостям исходного интеграла в пространстве N измерений. Таким образом, Р. р. расходящихся интегралов состоит в их замене на конечные выражения, содержащие полюсные сингулярности по ε в окрестности $\varepsilon = 0$ (см. *Регуляризация расходимостей*).

Помимо этого, регуляризации подвергаются и алгебраич. объекты, входящие в формулировку исходной теории (матрицы Дирака, метрич. тензор). Напр., формула для следа метрич. тензора в Р. р. имеет вид $g_{\mu\mu} = d$ вместо обычного $g_{\mu\mu} = N$. При этом, в регуляризованном случае перечисленные объекты уже не являются обычными матрицами и тензорами, а их индексы не могут принимать определенное (малое) число значений. Все они становятся формальными объектами с заданным непротиворечивым набором свойств.

Последующий этап обработки размерно регуляризованных выражений (перенормировка) принципиально не отличается от других схем регуляризации. Напр., в рамках Р. р. применима процедура перенормировки методом вычитаний. Специфичной для Р. р. является перенормировочная схема минимальных вычитаний. Она сводится к отбрасыванию кусков вида

$$\sum_{n=-\mu}^{n=-1} c_n \varepsilon^n$$

в указанных выше рядах Лорана (то есть вычитаются только сингулярные по ε части).

Привлекательность и широкая популярность Р. р. обусловлена тем, что эта схема регуляризации, хотя и не является операцией интегрирования в строгом математич. смысле, обладает рядом свойств, позволяющих во многих случаях обращаться с размерно регуляризованными интегралами как с обычными сходящимися интегралами. К числу этих свойств относятся возможность замены переменных и дифференцирования под знаком интеграла, перестановочность порядка интегрирования и др. Эти свойства облегчают практич. использование Р. р. Вместе с тем, в схеме Р. р. затруднено, по сравнению с другими более стандартными подходами, доказательство общих теорем и выполнение оценок величины получаемых выражений.

Главным преимуществом Р. р. является ее явная инвариантность по отношению к широкому классу преобразований симметрии, из к-рых наиболее важны для практики абелевы и неабелевы калибровочные преобразования. На сегодня Р. р. является единственным инвариантным методом регуляризации неабелевых калибровочных теорий, не приводящим к значительному усложнению подинтегральных выражений в фейнмановских интегралах. Использование Р. р. позволило осуществить расчеты трехпетлевых диаграмм в квантовой хромодинамике.

Применение Р. р. затруднено или вовсе невозможно в тех случаях, когда размерность пространства-времени фигурирует (явно или неявно) в теории плотности лагранжиана (суперсимметрия, теории с γ_5 матрицей). В этих теориях до сих пор нет удовлетворительной модификации Р. р., к-рая обеспечивала бы тот же уровень удобства вычислений, что и в моделях с калибровочной симметрией.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979; [3] Коллинз Дж., Перенормировка, пер. с англ., М., 1988.

А. А. Владимиров.

РАЗМЕРНАЯ ТРАНСМУТАЦИЯ в квантовой теории поля – формальный прием, позволяющий использовать для характеристики взаимодействия квантовых полей размерный параметр вместо безразмерной константы связи, фигурирующей в лагранжиане взаимодействия классических полей.

Благодаря квантовым эффектам поляризации вакуума безразмерная числовая характеристика классич. теории полей – константа связи g превращается в функцию квадрата 4-импульса, $\bar{g}(k^2)$, называемую *эффективной константой связи* (или эффективным зарядом). Эта функция, рассматриваемая на плоскости k^2, $\bar{g}$, характеризуется двумя координатами – размерной абсциссой $k^2 = \mu^2$ и безразмерной ординатой $\bar{g} = g_\mu$. Новый размерный параметр μ связан с условиями измерения, и, напр., в случае квантовой электродинамики, когда роль $\bar{g}$ играет квадрат эффективного заряда электрона $\bar{\alpha}$, μ^2 равен квадрату 4-импульса фотона, при помощи к-рого измеряется заряд электрона.

В частных случаях благодаря специфике поведения функции эффективного заряда $\bar{g}(k^2)$ факт наличия двух параметров, характеризующих интенсивность взаимодействия системы квантовых полей, может быть «затушеван». Так, в квантовой электродинамике, исходя из очевидных требований соответствия с классич. макроскопич. случаем, долгое время использовали «граничное значение» квадрата эффективного заряда электрона $\alpha \equiv \bar{\alpha}(k^2 = 0)$, равное его милликеновскому значению 1/137. С другой стороны, после обработки однопетлевого приближения теории возмущений методом ренормализационной группы для эффективного заряда получают выражение, имеющее вид суммы геометрич. прогрессии. Напр., в квантовой хромодинамике однопетлевое ренормгрупповое приближение для эффективной константы связи $\bar{\alpha}_s$ имеет вид:

$$\bar{\alpha}_s^{\mathrm{pr}}(k^2) = \frac{\alpha_s}{1 + \alpha_s b_1 \ln(k^2/\mu^2)} \qquad (1)$$

(b_1 – число). Это выражение с помощью подстановки $\alpha_s = [b_1 \ln(\mu^2/\Lambda^2)]^{-1}$ может быть приведено к виду:

$$\bar{\alpha}_s^{\mathrm{pr}}(k^2) = \frac{1}{b_1 \ln(k^2/\Lambda^2)}, \qquad (2)$$

в к-ром два параметра μ и α_s входят через одну комбинацию

$$\Lambda = \mu \exp(1/2 b_1 \alpha_s).$$

Как видно, параметр Λ дает ординату полюсной особенности однопетлевого приближения и поэтому также является характеристикой краевого типа. С физич. точки зрения, величина Λ (называемая параметром шкалы квантовой хромодинамики) характеризует масштаб импульсной переменной $k=\sqrt{|k^2|}$, при к-рой $\bar{\alpha}_s$ принимает значения, большие единицы, то есть соответствует сильной связи.

Таким образом, возможность Р. т. «в чистом виде», то есть «превращения» одной безразмерной константы связи в одну размерную — параметр шкалы, является следствием специфики ренормгрупповой структуры выражения для эффективного заряда.

Лит. см. при ст. *Ренормализационная группа. Д. В. Ширков.*

РАЗМЕРНОСТЬ векторного пространства — см. *Векторное пространство.*

РАЗМЕРНОСТЬ группы Ли — см. *Ли группа.*

РАЗМЕРНОСТЬ многообразия — см. *Комплексное многообразие.*

РАЗМЕРНОСТЬ риманова пространства — см. *Риманово пространство.*

РАЗМЕРНОСТЬ слоения — см. *Слоение.*

РАЗМЕРНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ — см. *Фазовый переход.*

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ; асимптотика решения — асимптотика решения, которая может быть получена в результате перехода от разностных уравнений к псевдодифференциальным и дальнейшего использования квазиклассического приближения. Типичным примером является дифференциально-разностная задача о колебаниях связанных линейных осцилляторов, положения равновесия к-рых находятся в узлах сетки $x=nh$, $n\in\mathbb{Z}$, h — малый параметр. Функция u_n — смещение n-го осциллятора — удовлетворяет уравнению

$$h^2\ddot{u}_n=c_n^2(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}),$$

c_n — скорость звука. Сеточную функцию u_n, заданную в узлах $x=nh$, можно продолжить на всю прямую $\mathbb{R}^1_x$ с помощью интерполяционных формул Котельникова: функция

$$u(x)=h\pi^{-1}\sum\nolimits_n u_n\sin[\pi(x-nh)]/(x-nh)$$

в узлах принимает значения u_n, причем носитель преобразования Фурье этой функции принадлежит отрезку $[-\pi/h,\pi/h]$. Используя формулу $\exp(h\partial/\partial x)u(x)=u(x+h)$ исходное дифференциально-разностное уравнение можно представить в виде псевдодифференциального уравнения для $u(x,t)$:

$$h^2u_{tt}+L(x,-ih\partial/\partial x)\,u=0,$$

где $L(x,p)=4c^2\sin^2p/2$, $c(x)>0$,— гладкая функция, принимающая в узлах сетки значения c_n (предполагается, что такая функция существует). Для полученного псевдодифференциального уравнения, называемого уравнением кристалла, ставится задача Коши с начальными условиями вида: $u|_{t=0}=u_0$, $u_t|_{t=0}=0$. Если функция u_0 — быстро осциллирующая экспонента, $u_0=\varphi_0\exp(iS_0/h)$, $\varphi_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_x)$, $S_0\in C^\infty(\mathbb{R}^1_x)$, $\partial S_0/\partial x\neq 0$, то асимптотическое по параметру h решение этой задачи стандартным образом выражается через *Маслова канонический оператор* на лагранжевых многообразиях $L_t^\pm=g^\pm(t)L_0$, где

$$L_0=\{x\in\mathbb{R}^1,\ p=\partial S_0(x)/\partial x\}\subset\mathbb{R}^1_x\times\mathbb{R}^1_p,$$

$g^\pm(t)$ — фазовые потоки гамильтоновых систем с гамильтонианами $H^\pm(x,p)=\pm 2c(x)\sin p/2$. Траектории этих систем называются бихарактеристиками исходной дифференциально-разностной задачи. Ограничение $\partial S_0/\partial x\neq 0$, типичное для задач рассматриваемого класса, связано с совпадением гамильтонианов $H^\pm$ при $p=0$, что приводит к появлению особенностей у решений соответствующих уравнений переноса. Построение асимптотики решения задачи Коши с произвольными начальными данными из $L_2(\mathbb{R}^1_x)$, носитель к-рого принадлежит нек-рому компакту $\mathcal{K}$, $u_0(nh)=0$ при $nh\notin\mathcal{K}$, состоит из двух этапов. Сначала строится параметрикс задачи Коши, то есть такая последовательность операторов $T_N(x,-i\partial/\partial x,t,h)$, что композиция

$$M_N(x,-i\partial/\partial x,t,h)=(\partial_t^2+h^{-2}L(x,-ih\partial/\partial x))\circ T_N$$

является сглаживающим оператором, $\|M_Nu\|\leqslant\mathrm{const}\,\|u\|_{L_2}$, $k=k(N)\to\infty$ при $N\to\infty$, H_k — пространства Соболева, и выполнены начальные условия $T_N|_{t=0}=\mathcal{P}(x)\Pi(-ih\partial/\partial x)$, $\partial T_N/\partial t|_{t=0}=0$, $\mathcal{P}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_x)$ и $\mathcal{P}=1$ при $x\in\mathcal{K}$, $\Pi(\omega)$ — характеристич. функция отрезка $[-\pi,\pi]$ (см. *Волновое уравнение*; асимптотические решения). Символ $T_N(x,\xi,t,n)$ оператора T_N выражается через канонич. оператор Маслова, отвечающий параметру ξ^{-1} на семействах лагранжевых многообразий $L_t^\pm(\omega)=g_\omega^\pm(t)L_0$, где

$$L_0=\{x\in\mathbb{R}^1,\ p=1\},\ H_\omega^\pm(x,p)=H^\pm(x,\omega p)/\omega,$$

$g_\omega^\pm(t)$ — фазовые потоки, отвечающие гамильтонианам $H_\omega^\pm$, ω — параметр, $-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$. При условии, что $L_t^\pm(\omega)$ диффеоморфно проектируется на $\mathbb{R}^1_x$, символ T_N имеет вид:

$$T_N(x,\xi,t,h)=\sum\nolimits_{+,-}\sum\nolimits_{j=0}^N\exp(i\xi(S^\pm(x,t,\omega)-x))\times$$

$$\times\chi_j(\xi)a_j^\pm(x,t,\omega)\xi^{-j},\quad \omega=h\xi,$$

где $S^\pm$ — решения уравнений

$$S_t^\pm+H_\omega^\pm(x,\nabla S^\pm)=0,\quad S^\pm\big|_{t=0}=x,$$

$a_j^\pm$ — решения соответствующих уравнений переноса, $\chi_0\equiv 1$, χ_j, $j\geqslant 1$, — гладкие функции, равные нулю в окрестности нуля и 1 при $|\xi|\geqslant 1$. Поскольку гамильтонианы $H_\omega^\pm$ различны при $p=1$, решения уравнений переноса являются гладкими функциями. Функция T_Nu_0 удовлетворяет начальным данным и уравнению кристалла с точностью до гладкой (из H_k) функции, то есть является асимптотикой по гладкости. В силу того, что на гладких функциях

$$L(x,-ih\partial/\partial x)\,w=-h^2c^2u_{xx}+O(h^3),$$

решение уравнения кристалла с гладкой правой частью выражается через решение предельного волнового уравнения

$$w_{tt}-c^2w_{xx}=f(x,t),\ w|_{t=0}=w_t|_{t=0}=0.$$

Пусть $E(t)$ — разрешающий оператор последней задачи, $w=E(t)f$. Тогда для решения уравнения кристалла справедлива формула

$$u=T_Nu_0-E(t)(M_Nu_0)+hr(x,t,h),$$

где $r(x,t,h)$ принадлежит $H_{k(N)+1}(\mathbb{R}^1_x)$ равномерно по h и $t\in[0,t_0]$, $t_0<\infty$. Сужение функции u на сетку $x=nh$ дает решение исходной дифференциально-разностной задачи. Данная формула в случае, когда u_0 — быстро осциллирующая экспонента, приводится к стандартному виду квазиклассич. асимптотики с помощью метода стационарной фазы. Из нее следует, в частности, что слабый предел функции u в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x)$ при $h\to 0$, если он существует, совпадает с решением задачи

$$w_{tt}-c^2w_{xx}=0,\ w|_{t=0}=w_0,\ w_t|_{t=0}=0,$$

где w_0 — слабый предел функции u_0 при $h\to 0$. С помощью этой формулы получается решение в задаче о распространении «функции единичной ошибки» $u_0=h^{-1/2}\delta_h(x-x_0)$,

$\delta_h(x)=1$ при $x=0$ и $\delta_h(x)=0$ при $x=nh$, $n\neq 0$; а также решение задачи об излучении движущегося источника (см. также *Осцилляций шлейф, Черенкова эффект* в разностных уравнениях). Изложенные методы переносятся на более общие дифференциально-разностные, разностные и псевдодифференциальные уравнения. Они позволяют, напр., изучать устойчивость разностных схем в *С.*

Лит.: [1] Федорюк М. В., «Журнал вычислительной математики и математич. физики», 1967, т. 7, № 3, с. 510–40; [2] Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1968, т. 23, в. 4, с. 243; [3] его же, Операторные методы, М., 1973; [4] Данилов В. Г., Операторные методы исследования разностных схем, М., 1979; [5] Маслов В. П., Данилов В. Г., «Труды Математич. ин-та АН СССР», 1984, т. 166, с. 130–60; 1985, т. 167, с. 96–107; [6] Данилов В. Г., Жевандров П. Н., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1989, т. 53, № 2, с. 411–24.

В. Г. Данилов, П. Н. Жевандров.

РАЗРЕШЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ростка $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}, 0)$ аналитической функции в окрестности критической точки O – это n-мерное многообразие Y и аналитическое отображение $\pi: Y\to\mathbb{R}^n$ со свойствами:

1) в подходящих координатах в окрестности любой точки из $\pi^{-1}(0)$ функция $f\circ\pi$ и якобиан π являются одночленами, умноженными на не обращающуюся в 0 функцию;

2) в окрестности точки 0 найдется собственное алгебраич. подмножество, вне к-рого π аналитически обратимо;

3) прообраз любого компакта в окрестности x компактен.

С. В. Чмутов.

РАЗРЕШИМАЯ АЛГЕБРА ЛИ – см. *Ли алгебра.*

РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА – *группа*, в которой существует цепочка подгрупп

$$G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_k=\{e\} \qquad (*)$$

таких, что G_{i+1} является нормальной подгруппой в G_i и факторгруппы G_i/G_{i+1} абелевы. Для связных групп Ли обычно используется следующее эквивалентное определение: G разрешима, если в ней существует цепочка замкнутых нормальных подгрупп (*) таких, что факторгруппы G_i/G_{i+1} абелевы (через e обозначена единица группы G). Группа Ли разрешима тогда и только тогда, когда ее *Ли алгебра* разрешима. Любая подгруппа Р. г. Ли разрешима. Любое неприводимое конечномерное представление Р. г. Ли одномерно. Любое конечномерное представление Р. г. Ли в подходящем базисе задается верхнетреугольными матрицами.

Ю. А. Неретин.

РАЗРЫВА ПОВЕРХНОСТИ – поверхности, на которых терпят разрыв параметры среды. Р. п. возникают, в частности, в нелинейной звуковой волне вследствие того, что точки, соответствующие большей плотности, движутся быстрее, чем точки, соответствующие меньшей плотности. Благодаря этому профиль волн меняет со временем свою форму. Точки сжатия выдвигаются вперед, а точки разрежения оказываются отставшими. В конце концов профиль волны изгибается настолько, что кривая $\rho(x)$ (в заданный момент времени) оказывается неоднозначной: нек-рым x соответствуют три различных значения ρ. Такая неоднозначность невозможна: в этом случае функция $\rho(x)$ становится разрывной, в результате чего становится однозначной функцией. Р. п. возникают также вследствие разрыва в начальных условиях, напр. при столкновении двух газовых масс.

На Р. п. дифференциальные уравнения теряют смысл и решения по обе стороны Р. п. сшиваются с помощью граничных условий. В обычной гидродинамике существуют два типа Р. п.– тангенциальные, через поверхность к-рых нет потока вещества, и *ударные волны*, у к-рых частицы вещества пересекают Р. п. При формулировке граничных условий на ударных волнах исходят из закона сохранения энтропии, полагая газ идеальным. В действительности на поверхности ударной волны происходит диссипация – превращение части кинетич. энергии газа в тепло. Поэтому на ударной волне сохраняется не энтропия, а энергия.

Количественно Р. п. описываются скачками параметров среды – разностью их значений по обе стороны Р. п. Величины этих скачков определяются законами сохранения массы, импульса и энергии на Р. п.

При учете диссипации (вязкости и теплопроводности) никаких разрывов в принципе не может быть и все течения непрерывны. Однако при малой диссипации происходит очень быстрый (в узком слое) непрерывный переход от одного состояния к другому, к-рый приближенно рассматривается как разрыв.

Коэффициенты диссипации входят в уравнения гидродинамики множителями при производных гидродинамич. величин. На Р. п. эти производные обращаются в бесконечность. Поэтому диссипативные члены не малы, а представляют собой неопределенность типа $0\cdot\infty$, то есть ими нельзя пренебрегать.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Гидродинамика, 3 изд., М., 1986; [2] Седов Л. И., Механика сплошной среды, т. 1–2, 4 изд., М., 1983–84; [3] Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковые течения и ударные волны, пер. с англ., М., 1950.

В. П. Демуцкий, Р. В. Половин.

РАЗРЫВНОЕ КОЛЕБАНИЕ – см. *Релаксационное колебание.*

РАЗРЫВНЫЙ ПРОЦЕСС – см. *Случайный процесс.*

РАЙФЕРТИ ТЕОРЕМА – см. *Внутренняя симметрия.*

РАНГ симметрического пространства – см. *Симметрическое пространство.*

РАНГ тензора – см. *Тензорное поле.*

РАСКРЫТЫЙ ЗОНТИК – особая двумерная поверхность Λ^2 в $T^*\mathbb{R}^2\cong\mathbb{R}^4$, являющаяся пространством конормального расслоения полукубической параболы $\{x^2=y^3\}\subset\mathbb{R}^2$, то есть множество ковекторов, приложенных к точкам полукубической параболы и ортогональных ей. Образ Р. з. при проектировании $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^3$, $(x, y, p_x, p_y)\mapsto(y, p_x, p_y)$ является зонтиком Уитни $4p_x^2=9yp_y^2$. Обобщенный Р. з. определяется как пространство конормального расслоения (обобщенного) *раскрытого ласточкина хвоста*. Р. з. является важным примером особого лагранжева многообразия и появляется в качестве особенности систем лучей.

Пусть H – неособая гиперповерхность в симплектич. многообразии (M^{2n}, ω), $l\subset H$ – гладкое изотропное $(n-1)$-мерное подмногообразие общего положения. Тогда многообразие характеристик поверхности H, проходящих через l – лагранжево многообразие, особенности к-рого симплектически изоморфны особенностям (обобщенных) Р. з. или их надстроек.

М. Э. Казарян.

РАСКРЫТЫЙ ЛАСТОЧКИН ХВОСТ – особое многообразие Σ^k в пространстве многочленов

$$x^{2k+1}+a_{2k-1}x^{2k-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

состоящее из многочленов, имеющих $(k+1)$-кратный корень. Р. л. х.–*лагранжево многообразие* относительно нек-рой канонически определенной *симплектической структуры* в пространстве многочленов. Многообразие многочленов, имеющих k пар кратных корней, также лагранжево (относительно нек-рой др. симплектич. структуры) и симплектически изоморфно Р. л. х. Многообразие Σ^1 – полукубич. парабола на плоскости. Р. л. х. является важным примером особого лагранжева многообразия и появляется в качестве особенности систем лучей в задаче об обходе препятствий.

Пусть H – неособая гиперповерхность в симплектич. многообразии (M^{2n}, ω), $L\subset M$ – лагранжево многообразие, квадратично касающееся H вдоль гладкого изотропного подмногообразия $l^{n-1}=L\cap H$, а в остальном общего положения. Тогда многообразие характеристик H, проходящих через l,– лагранжево многообразие, особенности к-рого симплектически изоморфны особенностям Р. л. х. или их надстроек.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33, М., 1988.

М. Э. Казарян.

РАСПАД ПРОТОНА – нестабильность материи – одно из наиболее ярких предсказаний *объединенных теорий поля*. Процесс идет за счет обмена *лептокварками* и может быть описан (см. [1], [2]) в рамках эффективного гамильтониана

$$H_{\text{eff}} = \sum c_i M^{4-d} \mathbb{O}_i,$$

где $\mathbb{O}_i$ – операторы, состоящие из полей легких частиц, c_i определяются константами связи, M – масса сверхтяжелой векторной, скалярной или спинорной частицы, переносящей взаимодействие, d – размерность оператора $\mathbb{O}$. Необходимо рассмотреть только $G_{\text{ст}} = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ – инвариантные операторы, поскольку эффекты нарушения $G_{\text{ст}}$ подавлены степенями M_w/M. В несуперсимметричных *великого объединения моделях* в оператор $\mathbb{O}$ входят кварковые и лептонные поля, хиггсовский $SU(2)$-дублет, а также пространственные производные. Векторные лептокварки приводят к 4-фермионному взаимодействию вида *qqql*. Основными модами распада являются при этом процессы $p \to e^+\pi^0$ и $n \to e^+\pi^-$. Процессы с участием скалярных лептокварков могут приводить к усилению мод с участием странных частиц: $p \to \bar{\nu}_\mu K^+$, $\mu^+ K_0$, $\bar{\nu}_\tau K^+$. Такой же эффект возникает в суперсимметричных объединенных моделях при учете обмена скалярными суперпартнерами кварков и лептонов и спинорными суперпартнерами лептокварков.

Предсказания времени жизни протона сильно модельно зависимы. Большинство моделей предсказывает Р. п. на уровне $10^{30} - 10^{35}$ лет. Надежные экспериментальные свидетельства в пользу нестабильности материи в настоящее время отсутствуют, пределы на различные моды имеют вид (см. [3]):

$$e^+\pi^0 : 59 \cdot 10^{31} \text{ лет},$$
$$e^+\pi^- : 24 \cdot 10^{31} \text{ лет},$$
$$\nu\pi^0 : 9{,}1 \cdot 10^{31} \text{ лет},$$
$$\nu K^+ : 9{,}0 \cdot 10^{31} \text{ лет},$$
$$\nu K^0 : 7{,}7 \cdot 10^{31} \text{ лет},$$
$$\mu K^0 : 11 \cdot 10^{31} \text{ лет}.$$

Лит.: [1] Wilczek F., Zee A., «Phys. Rev. Lett.», 1979, v. 43, p. 1571–73; [2] Weinberg S., там же, p. 1566–70; [3] Totsuka Y., «Proc. XXIV Int. Conf. on High Energy Phys.», Munich, 1988, p. 282.

М. Е. Шапошников.

РАСПАД СТУПЕНЬКИ – свойство решений $u(x, t)$ нелинейных эволюционных уравнений, стремящихся на бесконечности (то есть при $x \to \pm\infty$) к различным постоянным $C_\pm (C_+ \neq C_-)$. Такие решения с течением времени становятся осциллирующими функциями в любой конечной области изменения x, а в окрестности фронта распадаются на солитоны. Асимптотика таких решений при $t \to +\infty$ моделирует осцилляционную структуру бесстолкновительных ударных волн в диспергирующих средах (см. [1], [2]). Асимптотика решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриса с монотонными начальными данными $u_0(x)$, удовлетворяющими условиям

$$u_0(x) \to \begin{cases} -C^2, & x \to -\infty, \\ 0, & x \to +\infty, \end{cases} \qquad (1)$$

построена А. В. Гуревичем и Л. П. Питаевским [2] в виде модулированной кноидальной волны:

$$u(x,t) \sim \gamma + \frac{2a}{s^2}\,\mathrm{dn}^2\left[\left(\frac{a}{6s^2}\right)^{1/2}(x - Vt), s\right]. \qquad (2)$$

Здесь $\mathrm{dn}(y, s)$ – эллиптич. функции Якоби, параметры

$$a = a(x,t), \quad s = s(x,t), \quad \gamma = \gamma(x,t) \quad \text{и} \quad V = 2a\frac{2-s}{s^2} + 6\gamma$$

являются медленно меняющимися функциями x, t и описываются уравнением гидродинамич. типа (см. *Уизема метод*). Формула (1) описывает модулированные колебания решения в уиземовской зоне.

Исследование решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриса с начальными данными типа ступеньки, полученного *обратной задачи рассеяния методом* (см. [3]), показывает, что в окрестности фронта из него выделяются солитоны, число к-рых неограниченно растет. А именно, в случае начальных данных общего вида, удовлетворяющих условиям (1), в области $x > 4C^2 t - \frac{1}{2C}\ln t^N$ справедлива асимптотич. формула

$$u(x,t) \sim -\sum_{n=1}^{m} \frac{2k_n^2}{\cosh^2[k_n x - 4k_n^3 t + \Phi_n]} -$$
$$-\sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} \frac{2C^2}{\cosh^2[Cx - 4C^3 t - \frac{1}{2C}\ln t^{n+1/2} + \Psi_n]} + O(t^{-1/2}), \qquad (3)$$

где k_n^2 ($k_n^2 > C^2$) – собственные значения L-оператора (см. *Обратной задачи рассеяния метод*), Φ_n и Ψ_n выражаются через данные рассеяния в начальный момент времени, N – любое натуральное число. В первую сумму в (3) входят обычные солитоны, порождаемые дискретным спектром L-оператора, а во вторую – солитоны, порождаемые однократным непрерывным спектром, существование к-рого обеспечивается нелокализованностью соответствующего потенциала L-оператора. Солитоны второй группы, названные асимптотическими, удовлетворяют уравнению Кортевега – де Фриса лишь асимптотически при больших временах, и расстояние между ними растет логарифмически по времени.

Аналогичные явления распада на бесконечные серии асимптотич. солитонов нелокализованных решений более сложной структуры имеют место и для других вполне интегрируемых эволюционных уравнений (см. [4]–[7]). Построены также решения уравнений Кадомцева – Петвиашвили, распадающиеся при больших временах на бесконечную серию криволинейных солитонов (см. [7]).

Лит.: [1] Сагдеев Р. З., Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, в сб.: «Вопросы теории плазмы», М., 1964; [2] Гуревич А. В., Питаевский Л. П., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1973, т. 65, в. 2, с. 590–604; [3] Хруслов Е. Я., «Математич. сб.», 1976, т. 99, № 2, с. 261–81; [4] Котляров В. П., Хруслов Е. Я., «Теоретич. и математич. физика», 1986, т. 2, с. 172–86; [5] Khruslov E. Ya., Kotlyarov V. P., «Inverse problems», 1989, v. 5, № 6, p. 1075–88; [6] Котляров В. П., «Теоретич. и математич. физика», 1989, т. 80, № 1, с. 15–28; [7] Khruslov E. Ya., Kotlyarov V. P., «Adv. in Sov. Math.», 1994, v. 19, p. 129–80.

Е. Я. Хруслов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ вероятностей – одно из центральных понятий теории вероятностей и математической статистики. Определение Р. вероятностей равносильно заданию вероятностей всех случайных событий, описывающих нек-рое случайное явление. Р. вероятностей какой-либо действительной случайной величины X, возможные значения

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

к-рой образуют конечную или бесконечную последовательность, задается указанием этих значений и соответствующих им вероятностей $\mathsf{P}\{X = x_n\}$:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

(p_n должны быть положительны и в сумме давать единицу). Р. вероятностей указанного типа называются дискретными.

Примерами дискретных Р. вероятностей служат: биномиальное распределение, определяемое вероятностями

$$\mathsf{P}\{X = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n,$$

где $n > 0$ – целое, $0 < p < 1$; *Пуассона распределение*, определяемое вероятностями

$$\mathsf{P}\{X = m\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

где $\lambda > 0$.

Во многих случаях задание Р. вероятностей указанием возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей невыполнимо. Напр., если случайная величина принимает любые значения из отрезка $[-1/2, 1/2]$, то Р. вероятностей задается указанием вероятностей того, что случайная величина примет значение из любого заданного интервала, принадлежащего отрезку $[-1/2, 1/2]$, так как вероятность каждого отдельного значения может быть равна нулю. Если существует такая функция $p(x)$, что вероятность попадания X в любой интервал (a, b) на прямой равна

$$\mathsf{P}\{a < X < b\} = \int_a^b p(x)\,dx,$$

причем $p(x) \geqslant 0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1,$$

то Р. вероятностей величины X называется абсолютно непрерывным, а функция $p(x)$ носит название *плотности вероятности*.

В случае равномерного распределения на отрезке $[-1/2, 1/2]$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

Важнейшее Р. вероятностей непрерывного типа – *Гаусса распределение* с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где $-\infty < a < \infty$ и $\sigma > 0$. Р. вероятностей не исчерпываются дискретным и непрерывным типами: они могут быть и более сложной природы. Описание Р. вероятностей, пригодное во всех случаях, может быть, напр., достигнуто при помощи *распределения функции*, к-рая для любой случайной величины X при каждом действительном x определяется формулой

$$F(x) = \mathsf{P}\{X < x\}.$$

Вероятность того, что X примет значение из нек-рого интервала $[a, b)$ на прямой, равна

$$\mathsf{P}\{a \leqslant X < b\} = F(b) - F(a).$$

Функция Р. однозначно задает соответствующее Р. вероятностей случайной величины.

Часто полное описание Р. вероятностей (напр., при помощи плотности или функции Р.) заменяют заданием небольшого числа числовых характеристик, к-рые указывают, как правило, наиболее типичные (в том или ином отношении) значения случайной величины и степень рассеяния значений случайной величины около нек-рого типичного значения. Из этих характеристик наиболее употребительны *математическое ожидание* (среднее значение), *дисперсия* и *момент*.

Помимо функций Р. полную информацию о Р. вероятностей содержат так наз. *производящие функции* и *характеристические функции*. Производящая функция Р. вероятностей случайной величины X с целыми неотрицательными значениями определяется формулой

$$\varphi(t) = \mathsf{E} z^X$$

при каждом фиксированном z, $|z| \leqslant 1$. Характеристич. функция Р. вероятностей произвольной случайной величины X определяется по формуле

$$f(t) = \mathsf{E} e^{itX}$$

для любого действительного t, $-\infty < t < \infty$. Производящие и характеристич. функции однозначно определяют соответствующие Р. вероятностей.

Если $X_1, \ldots, X_n$ – несколько случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве, то говорят о совместном Р. вероятностей величин $X_1, \ldots, X_n$ или о Р. вероятностей случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – многомерном Р. вероятностей. Многомерное Р. вероятностей задается набором вероятностей вида:

$$\mathsf{P}\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} \text{ (дискретный тип)}$$

или с помощью плотности

$$p(x_1, \ldots, x_n) \text{ (непрерывный тип)}$$

или же в общем случае функцией Р. Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы, то Р. вероятностей $X = (X_1, \ldots, X_n)$ определяется Р. вероятностей отдельных величин X_k, $k = 1, \ldots, n$. В ином случае приходится рассматривать условные Р. вероятностей одних величин при фиксированных значениях других и соответствующие числовые характеристики (условные математич. ожидания, условные дисперсии, смешанные моменты). См. также *Корреляция*.

Статистич. аналогом Р. вероятностей служит так наз. эмпирическое распределение. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – результаты наблюдений, к-рые предполагаются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с функцией Р. вероятностей $F(x)$. Эмпирич. Р. вероятностей характеризуется так наз. эмпирической функцией распределения

$$F_n^*(x) = n_x/n,$$

где n_x – число наблюдений с $X_k < x$, к-рой соответствует так наз. выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$$

и выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X})^2.$$

Эмпирич. Р. и его характеристики используются для приближенного представления теоретич. Р. вероятностей и его характеристик.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 3 изд., т. 1–2, М., 1984; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

А. В. Прохоров.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОР квантовый – аналог классического вектора распределения (см. *Распределения вектор* классический) в квантовой статистической механике. Квантовым вектором распределения системы N тождественных ферми- или бозе-частиц называется совокупность s-частичных функций Вигнера:

$$f = \left\{ f_s^B(\vec{q}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{q}_s, \vec{p}_s),\ s = 0, 1, 2, \ldots, N \right\},$$

$$f_s^B(\vec{q}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{q}_s, \vec{p}_s) = (8\pi^3)^{-s} \int d\vec{k}_1 \ldots d\vec{k}_s \times$$

$$\times \exp\left(-i\sum_{n=1}^s \vec{k}_n \vec{p}_n\right) \mathrm{Tr}\left(\rho \Psi^+\left(\vec{q}_1 - \frac{\hbar}{2}\vec{k}_1\right) \ldots \Psi^+\left(\vec{q}_s - \frac{\hbar}{2}\vec{k}_s\right) \times \right.$$

$$\left. \times \Psi\left(\vec{q}_s + \frac{\hbar}{2}\vec{k}_s\right) \ldots \Psi\left(\vec{q}_1 + \frac{\hbar}{2}\vec{k}_1\right)\right),$$

где Ψ^+, Ψ – соответствующие операторные функции, фигурирующие в формализме вторичного квантования, ρ – статистич. оператор системы. Компоненты квантового Р. в. имеют нормировку:

$$\int d\vec{q}_1 d\vec{p}_1 \ldots d\vec{q}_s d\vec{p}_s\, f_s^B(\vec{q}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{q}_s, \vec{p}_s) = \frac{N!}{(N-s)!},$$

совпадающую с нормировкой s-частичных классич. приведенных *распределения функций*. Эволюция во времени квантового Р. в. определяется квантовым обобщением цепочки уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ-цепочка) для s-частичных функций распре-

деления. Формальная структура цепочки не отличается от структуры цепочки в классич. случае. На практике часто используют так наз. импульсное представление квантового Р. в., к-рое является фурье-преобразованием компонент квантового Р. в. по координатам $\vec{q}_1, ..., \vec{q}_s$. *А. В. Солдатов.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОР классический – вектор, характеризующий состояние классической системы тождественных частиц. В статистич. механике постулируется, что состояние классич. системы N тождественных частиц полностью характеризуется симметричной относительно перестановок аргументов частиц $x_1 = \vec{q}_1\vec{p}_1$; ...; $x_N = \vec{q}_N$, $\vec{p}_N$ функцией распределения

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_N) = f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_N), \quad (1)$$

заданной в фазовом пространстве системы и удовлетворяющей условию нормировки:

$$\int d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_N\, d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N\, f(\vec{q}_1, \vec{p}_1; \dots; \vec{q}_N, \vec{p}_N) = 1. \quad (2)$$

Зададим приведённую s-частичную функцию распределения $f_s(x_1, ..., x_s)$, $s \leqslant N$, симметричную в силу условия (1) относительно перестановки аргументов частиц $x_1, ..., x_s$:

$$f_s = \frac{N!}{(N-s)!}\int dx_{s+1} \dots dx_N\, f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_N), \quad (3)$$

причем $f_0 \equiv 1$ в силу нормировки (2), а условие нормировки для $f_s(x_1, ..., x_s)$ имеет вид:

$$\int dx_1 \dots dx_s\, f_s(x_1, \dots, x_s) = \frac{N!}{(N-s)!}. \quad (4)$$

Совокупность приведенных функций распределения (3)

$$(f_0, f_1, ..., f_N) \quad (5)$$

можно рассматривать как формальный $(N+1)$-мерный вектор, поэтому ее принято называть вектором распределения системы. Компоненты вектора распределения не являются независимыми, так как

$$f_r(x_1, \dots, x_r) = \frac{(N-s)!}{(N-r)!}\int dx_{r+1} \dots dx_s\, f_s(x_1, \dots, x_s), \quad r < s \leqslant N.$$

В термодинамич. пределе $N \to \infty$, $V \to \infty$, $N/V = \text{const}$ Р. в. становится бесконечномерным. При этом

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-s)!} \Rightarrow N^s,$$

поэтому условие нормировки в термодинамич. пределе записывают в форме:

$$\lim N^{-s} \int dx_1 \dots dx_s\, f_s(x_1, \dots, x_s) = 1,$$

где предел берется при $N \to \infty$, $V \to \infty$, $N/V = \text{const}$. Удобство представления (5) заключается в том, что на практике для вычисления макроскопич. величин достаточно знать несколько низших компонент Р. в. Это обстоятельство является основой для разработки приближенных методов определения низших компонент Р. в. Временная эволюция Р. в. определяется цепочкой $N+1$ зацепляющихся уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ-цепочка). Наряду с определением (3) часто используется также определение для приведенной функции распределения, данное Н. Н. Боголюбовым:

$$f_s^{\text{Б}} = \frac{(N-s)!V^s}{N!} f_s.$$

А. В. Солдатов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧАСТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ – последовательность функций

$$F(t) = \{F_s(t, x_1, ..., x_s)\}_{s \geqslant 1},$$

которая определяется по решениям *Лиувилля уравнения*

$$D(t) = \{D_n(t, x_1, ..., x_n)\}_{n \geqslant 1}$$

формулой (см. [1]):

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \cdot$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int dx_1 \dots dx_n D_n(t, x_1, \dots, x_n)\right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int dx_{s+1} \dots dx_{s+n} D_{s+n}(t, x_1, \dots, x_{s+n}).$$

Для системы фиксированного N числа частиц $D(t)$ – однокомпонентная последовательность:

$$D(t) = \{0, ..., 0, D_N(t, x_1, ..., x_N), 0, ...\}.$$

Р. в. ч. ф. удовлетворяют *Боголюбова уравнениям*.

Равновесные Р. в. ч. ф. определяются по стационарным решениям уравнения Лиувилля – функциям Больцмана:

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \exp\left\{-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{2} - \mu\right) - \beta\sum_{i<j=1}^{N}\Phi(q_i - q_j)\right\},$$

где μ, β – параметры равновесного состояния, Φ – потенциал взаимодействия частиц. Такие функции удовлетворяют уравнениям для равновесных состояний Кирквуда – Зальцбурга, Боголюбова, Майера – Монтролла и т. п.

Р. в. ч. ф. $F_s(t, x_1, ..., x_s)$ интерпретируются как плотность вероятности (по лебеговой мере) нахождения s различных частиц в фазовых точках $x_1, ..., x_s$ независимо от фазовых состояний остальных частиц.

Для квантовых систем Р. в. ч. ф. определяются аналогичным образом по решениям уравнений для *плотности матрицы*.

В терминах Р. в. ч. ф. в статистич. механике описываются состояния систем бесконечного числа частиц.

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985.

В. И. Герасименко.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОН – удобный описательный термин, могущий означать, в зависимости от контекста, распределение вероятностей (напр., какой-либо случайной величины) или соответствующую *распределения функцию* или *плотность вероятности*. *В. И. Битюцков.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЯ в классической статистической механике – соответствие между макроскопическими наблюдаемыми величинами $A(\vec{x}, t)$, являющимися полями в физическом пространстве-времени $(\vec{x}, t)$ и соответствующими им микроскопическими динамическими переменными $a(p, q, \vec{x}, t)$, которые зависят от координат фазового пространства системы $q = \vec{q}_1, ..., \vec{q}_N$; $p = \vec{p}_1, ..., \vec{p}_N$; N – число частиц в системе. Это соответствие задает отображение пространства микросостояний системы на физич. пространство макроскопич. наблюдаемых, поэтому величину $A(\vec{x}, t)$ можно трактовать как функционал от $a(p, q, \vec{x}, t)$:

$$A(\vec{x}, t) \equiv \langle a(p, q, \vec{x}, t)\rangle. \quad (1)$$

На функционал (1) накладывают естественные ограничения:

$$\langle c_1 a_1(p, q, \vec{x}, t) + c_2 a_2(p, q, \vec{x}, t)\rangle =$$

$$= c_1\langle a_1(p, q, \vec{x}, t)\rangle + c_2\langle a_2(p, q, \vec{x}, t)\rangle, \quad (2)$$

$$\langle c\rangle = c, \quad (3)$$

где c, c_1, c_2 – произвольные постоянные. Функционал, удовлетворяющий условиям (2)–(3), можно представить в виде:

$$A(\vec{x}, t) = \int dq dp\, a(p, q, \vec{x}, t) f(q, p). \quad (4)$$

Функция $f(q, p)$ определена в фазовом пространстве системы и в силу (3) удовлетворяет условию

$$\int dq dp\, f(q, p) = 1. \quad (5)$$

Функции $f(q, p)$, пригодные для построения функционала (4), называются функциями распределения в фазовом пространстве. Постулируется, что макро-

скопич. состояние системы в данный момент времени полностью определяется нек-рой функцией распределения $f(q, p)$. Наблюдаемое макроскопич. значение $A(\vec{x}, t)$ микроскопич. динамич. переменной $a(p, q, \vec{x}, t)$, по определению, выражается соотношением (4). Если $f(q, p) \geqslant 0$, то Р. ф. можно интерпретировать как плотность вероятности нахождения системы в точке фазового пространства (q, p). Конкретный выбор функции $f(q, p)$ не является задачей механики. Она должна наиболее полно отображать доступную наблюдателю информацию о состоянии системы. На практике при исследовании системы N тождественных частиц нормировка (5) не всегда удобна, так как не обеспечивает корректный предельный переход от квантовой статистики к классической. Поэтому предпочтительнее использовать нормировку

$$\int f(q; p)\, d\Gamma = 1,$$

где $d\Gamma = \dfrac{dq\, dp}{N!\,(2\pi\hbar)^{3N}}$ — безразмерный элемент фазового объема. Тогда макроскопич. значение любой микроскопич. динамич. переменной будет определяться соотношением

$$A(\vec{x}, t) = \int d\Gamma\, a(p, q, \vec{x}, t) f(q, p). \qquad (6)$$

Интегрирование в (6) соответствует суммированию по всем различным состояниям. Тем самым учитывается, что перестановка тождественных частиц в квантовой механике не меняет состояния и это свойство должно сохраняться и в предельном случае классич. статистич. механики. Множитель $1/n!$ при фазовом объеме был введен Дж. Гиббсом (J. Gibbs), что позволило разрешить одноименный парадокс, заключающийся в возрастании энтропии при смешении одинаковых газов при одинаковых температуре и давлении. *А. В. Солдатов.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЯ для статистических систем — плотность распределения вероятностей (плотность вероятностной меры относительно меры Лебега), заданного на фазовом пространстве классической статистической системы частиц. Иными словами,

$$f_N(t, x_1, p_1; \ldots; x_N, p_N) d\Gamma_N,$$

где x_i и $p_i \in \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$,— соответственно координата и импульс i-й частицы, $d\Gamma_N = dx_1 \ldots dx_N dp_1 \ldots dp_N$, а N — число частиц,— это вероятность обнаружить в момент времени t 1-ю, ..., N-ю частицу в малых объемах dx_1, dp_1, ..., dx_N, dp_N с центрами, соответственно, в точках x_1, p_1, ..., x_N, p_N. Для системы тождественных частиц в рамках *канонического ансамбля* Р. ф. нормированы следующим образом:

$$\frac{1}{\hbar^{3N} N!} \int d\Gamma_N\, f_N(t, x_1, \ldots, x_N, p_1, \ldots, p_N) = 1$$

($\hbar$ — постоянная Планка).

Последовательность Р. ф. *большого канонического ансамбля* удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$f_0 + \sum_{N \geqslant 1} \frac{1}{\hbar^{3N} N!} \int d\Gamma_N\, f_N(t, x_1, p_1; \ldots; x_N, p_N) = 1.$$

Удобным способом описания состояний статистич. систем, то есть задания соответствующего распределения вероятностей на фазовом пространстве системы, служат также последовательности *распределения вероятностей частичных функций* (иначе: приведенных функций распределения), удовлетворяющие *согласованности условиям*. В канонич. ансамбле приведенные функции распределения определяются формулой

$$F_s^{(N)}(x_1, p_1; \ldots; x_s, p_s) =$$

$$= \frac{N!}{(N-s)!} \int d\Gamma_{N-s}\, f_N(t, x_1, p_1; \ldots; x_N, p_N), \quad 1 \leqslant s \leqslant N,$$

а в большом канонич. ансамбле — формулой

$$F_s^{(N)}(t, x_1, p_1; \ldots; x_s, p_s) =$$

$$= 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_{s+1} dp_{s+1} \ldots$$

$$\ldots dx_{s+N}\, dp_{s+N}\, f_N(t, x_1, p_1; \ldots; x_N, p_N), \quad s \geqslant 1.$$

Частичные Р. ф. соответствуют моментным функциям s-го порядка для случайных полей. Частичные функции распределения называются также корреляционными функциями. В квантовой механике роль Р. ф. и частичных функций распределения играют, соответственно, *плотности матрицы* и приведенные матрицы плотности.

Лит. см. при ст. *Гиббсовские состояния.* *П. В. Малышев.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЯ случайной величины X — функция действительного переменного x, принимающая при каждом x значение, равное вероятности неравенства $X < x$.

Каждая Р. ф. $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $F(x') \leqslant F(x'')$ при $x' < x''$;

2) $F(x)$ непрерывна слева при каждом x;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

(иногда Р. ф. определяют как вероятность неравенства $X \leqslant x$, и тогда она оказывается непрерывной справа). Каждая функция F, обладающая свойствами 1)—3), может рассматриваться как Р. ф. нек-рой случайной величины X.

В. И. Битюцков.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН в турбулентных средах сопровождается преломлением волн на турбулентных неоднородностях показателя преломления n' (для распространения электромагнитных волн в атмосфере, создаваемых турбулентными флуктуациями давления, температуры и влажности воздуха), а также флуктуациями скорости распространения волн (для звуковых волн в атмосфере, создаваемых, главным образом, флуктуациями температуры). В результате возникает рассеяние волн, а также пульсации амплитуды и фазы волн, прошедших через среду, что создает мерцание и дрожание изображений источников излучения в приемных устройствах (могущее, к тому же, быть различным в разных участках длин волн, то есть, в случае видимого света, к пульсациям цвета источника). Эти эффекты создают помехи для оптич. астрономии, радиоастрономии, оптической и радиосвязи с искусственными спутниками Земли и космич. ракетами и для гидроакустич. связи в море.

Эффективное сечение рассеяния электромагнитных волн в атмосфере объемом V в телесный угол $d\Omega$ около направления $\boldsymbol{q}$ получается в виде:

$$d\sigma = (4\pi^2)^{-1} k^4 \sin^2\alpha\, GG^*\, d\Omega,$$

где $G(\boldsymbol{k} - k\boldsymbol{q})$ — преобразование Фурье флуктуаций коэффициента преломления, $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор падающей волны, а α — угол между $\boldsymbol{q}$ и вектором поляризации падающей волны. Осреднение дает

$$\overline{GG^*} = 8\pi^3 VF(\boldsymbol{k} - k\boldsymbol{q}),$$

где F — спектральная функция показателя преломления. Таким образом, в рассеянии на данный угол участвуют турбулентные неоднородности, образующие пространственную дифракционную решетку с периодом $2\pi|\boldsymbol{k} - k\boldsymbol{q}|^{-1}$. В инерционном интервале спектра турбулентности получается

$$\overline{d\sigma} \sim \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-11/3},$$

где θ — угол рассеяния.

Для расчета флуктуаций амплитуды и фазы волны используют уравнение для эйконала ψ в приближении «плавных возмущений»

$$\Delta\psi' + 2ik\nabla\psi' = -2k^2 n',$$

из к-рого следует, что флуктуации эйконала получаются интегрированием n' с нек-рыми весами по рассеивающему объему. Приближенное вычисление соответствующих интегралов осуществляется по-разному в зависимости от ве-

личины радиуса первой зоны Френеля $(\lambda L)^{1/2}$, где λ – длина волны, L – размер рассеивающей области (см. [1]). В случае рассеяния звука флуктуации показателя преломления удобно задавать комплексной формулой

$$n' = -\left(1 - \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(\frac{u'_k}{c_0} + \frac{1}{2}\frac{T'}{T^0}\right),$$

где c_0 и T_0 – средние скорости звука и температура (А. С. Монин, 1961).

Расчеты по изложенной теории хорошо подтверждаются экспериментальными данными, в том числе материалами наблюдений о мерцании, дрожании и хроматич. мерцании звезд.

Лит.: [1] Татарский В. И., Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, М., 1959; [2] его же, Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., 1967.

А. С. Монин.

РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФУНКЦИЯ – см. *Грина функция* в квантовой теории поля, *Пропагатор*.

РАССЕЛА – САУНДЕРСА СВЯЗЬ – см. *Квантовое сложение моментов*.

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН – см. *Звуковые волны*.

РАССЕЯНИЯ АБСТРАКТНАЯ МАТРИЦА относительно конуса Γ – вещественная $(N\times N)$-матрица

$$S(x) = \|S_{ij}(x)\|,\ S_{ij}(x) \in D(\mathbb{R}^n),$$

удовлетворяющая условиям:

а) причинности относительно конуса Γ:

$$\operatorname{supp} S(x) \subset \Gamma;$$

б) ограниченности:

$$\int \langle S^*\Phi, S^*\Phi\rangle dx \leqslant \int \langle \Phi, \Phi\rangle dx$$

для всех $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$, $\Phi_j \in D(\mathbb{R}^n)$.

Соответствующий оператор S^* называется оператором рассеяния относительно конуса Γ. Между операторами рассеяния и пассивными операторами в теории *пассивных систем* имеется непосредственная связь: всякий невырожденный абстрактный оператор рассеяния S^* определяет по формуле

$$Z^* = (I\delta - S)^{-1*}(I\delta + S)^*$$

пассивный оператор; обратно, всякий пассивный оператор Z^* определяет по формуле

$$S^* = (Z + I\delta)^{-1*}(Z - I\delta)^*$$

абстрактный оператор рассеяния.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979.

Ю. Н. Дрожжинов.

РАССЕЯНИЯ АМПЛИТУДА – см. *Амплитуда рассеяния*.

РАССЕЯНИЯ ЗАДАЧИ РЕШЕНИЕ – функция $\Psi(t)$, удовлетворяющая нестационарному уравнению Шредингера:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + V)\psi$$

и одному из асимптотических условий

$$\left\| \psi(t) - e^{-iH_0 t}\varphi_\pm \right\| \to 0, \quad t \to \pm\infty, \quad \varphi_\pm \in \mathcal{H},$$

где $H_0 + V$ – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, H_0 – самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор с абсолютно непрерывным спектром. Р. з. р. можно выразить через волновые операторы

$$W_\pm = \operatorname{s.lim}_{\tau\to\infty} e^{i(H_0+V)\tau} e^{-iH_0\tau}$$

для $\psi(t)$, удовлетворяющей асимптотич. условию при $t \to -\infty$, следующим образом: $\psi(t) = W_- e^{-iH_0 t}\varphi_-$.

Если волновые операторы удовлетворяют условию полноты:

$$W_\pm W_\pm^* = I - P_d,$$

P_d – проектор на подпространство дискретного спектра оператора $H_0 + V$, то функция $\psi(t)$ удовлетворяет асимптотич. условию и при $t \to +\infty$. Элементы φ_+ и φ_- связаны в этом случае унитарным преобразованием

$$\varphi_+ = S\varphi_-,\ S \equiv W_+^* W_-.$$

Оператор S, называемый оператором рассеяния, содержит всю информацию о процессе рассеяния. Рассмотренные Р. з. р. отвечают так наз. одноканальному рассеянию; имеются соответствующие конструкции для многоканального рассеяния.

Лит.: [1] Гольдбергер М., Ватсон К., Теория столкновений, пер. с англ., М., 1967; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 3. Теория рассеяния, М., 1982.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

РАССЕЯНИЯ КАНАЛ – канал, используемый для описания начальных и конечных состояний при *многочастичном рассеянии*, когда начальное состояние соответствует свободному движению подсистем одного *кластерного разбиения*, а конечное состояние – свободному движению подсистем, вообще говоря, другого кластерного разбиения. Пусть a_I – кластерное разбиение с набором подсистем $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_I$ и набором собственных функций $\psi_{j_1}, \psi_{j_2}, \ldots, \psi_{j_I}$, операторов энергий этих подсистем в их *центра масс системе*, а P_A – проектор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$ системы N частиц на множество функций вида:

$$\Psi_A = \prod_{k=1}^{I} \psi_{j_k}, \quad A = \{j_1, j_2, \ldots, j_I\}.$$

Каналом рассеяния называется гильбертово пространство $\mathcal{H}_A$, изоморфное подпространству $P_A\mathcal{H}$. Прямая ортогональная сумма пространств $\mathcal{H}_A$

$$\mathcal{H}_{as} = \sum\nolimits_A \oplus \mathcal{H}_A$$

называется пространством каналов, или пространством асимптотических состояний. Иногда используется несколько иная терминология. Именно, каналом называют набор подсистем и их связанных состояний:

$$A = \begin{Bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_I \\ \psi_{j_1} & \psi_{j_2} & \ldots & \psi_{j_I} \end{Bmatrix},$$

соответствующее гильбертово пространство в этом случае называют гильбертовым пространством канала.

Лит.: [1] Гольдбергер М., Ватсон К., Теория столкновений, пер. с англ., М., 1967; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 3. Теория рассеяния, М., 1982; [3] Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

РАССЕЯНИЯ МАТРИЦА, S-матрица, в квантовой теории – оператор S, переводящий состояние системы (точнее, *состояния вектор*) $\Phi_{-\infty}$ до рассеяния (или реакции) в состояние $\Phi_{+\infty}$ после рассеяния:

$$\Phi_{+\infty} = S\Phi_{-\infty}. \qquad (1)$$

В конкретном представлении таким оператором является матрица, строки и столбцы к-рой удобно нумеровать значениями полного набора физич. величин, сохраняющихся при свободном движении частиц. Р. м. имеет важное значение в квантовой механике и является одним из основных объектов в квантовой теории поля.

Понятие Р. м. возникает в квантовомеханич. задаче о рассеянии на потенциальном центре. Физич. картина рассеяния бесспиновой частицы на финитном потенциале $V(\boldsymbol{r})$ подсказывает, что в асимптотике (при $r = |\boldsymbol{r}| \to \infty$) решение стационарного *Шредингера уравнения*

$$-\Delta\psi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = k^2\psi(\boldsymbol{r})$$

(Δ – *оператор Лапласа*, $\boldsymbol{k}$ – импульс частицы; принята система единиц, в к-рой $\hbar = c = 1$) должно иметь слагаемое, отвечающее частице, налетающей на рассеивающий центр по направлению $\varkappa = \boldsymbol{k}/k$, $k = |\boldsymbol{k}|$:

$$\psi_- \sim \frac{e^{ikr}}{r}\delta(\boldsymbol{n}+\varkappa), \qquad (2)$$

и слагаемое, описывающее удаляющуюся по всем возможным направлениям $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ частицу:

$$\psi_+ \sim \frac{-e^{-ikr}}{r}S(k;\boldsymbol{n},\varkappa). \qquad (3)$$

Здесь $\delta(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_0)$ – δ-функция на единичной сфере, определяемая соотношением

$$\int f(\boldsymbol{n})\delta(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_0)\,d\boldsymbol{n} = f(\boldsymbol{n}_0), \quad d\boldsymbol{n} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

в сферич. системе координат.

Для свободной частицы $[V(\boldsymbol{r}) = 0]$ при $r \to \infty$ имеем

$$\psi^0_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{k}}{2\pi i}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = \frac{e^{-ikr}}{r}\delta(\boldsymbol{n}+\varkappa) - \frac{e^{ikr}}{r}\delta(\boldsymbol{n}-\varkappa) + O(r^{-2}), \quad (4)$$

так что в отсутствие взаимодействия Р. м. тривиальна:

$$S^0(k;\,\boldsymbol{n},\,\varkappa) = \delta(\boldsymbol{n}-\varkappa). \qquad (5)$$

Для нетривиального рассеяния Р. м. определяется как интегральный оператор S с ядром

$$S(k;\boldsymbol{n},\varkappa) = \delta(\boldsymbol{n}-\varkappa) + \frac{ik}{2\pi}f(k;\boldsymbol{n},\varkappa); \qquad (6)$$

функция f называется *амплитудой рассеяния*. S действует в пространстве квадратично суммируемых на сфере функций (*волновых пакетов*). Благодаря описанному выше асимптотич. поведению этот оператор унитарен. Существование решений с нужным асимптотич. поведением следует из нестационарной теории рассеяния.

Для физич. приложений удобен другой базис в пространстве состояний – состояния с определенной энергией и угловым моментом, $|k,\,l\rangle$ (где l – орбитальное квантовое число). Тогда S представлен для бесспиновых частиц диагональной матрицей

$$\langle l',\,k'|\,S|\,k,\,l\rangle = \delta(k-k')\delta_{ll'}e^{2i\delta_l}, \qquad (7)$$

где $\delta_l(k)$ – фаза рассеяния ($\delta_{ll'}$ – символ Кронекера).

В более сложных случаях (частицы со спином, неупругое рассеяние, процессы рассеяния и поглощения частиц в релятивистской теории) элементы S-матрицы получают новые квантовые числа, и она перестает быть диагональной. Однако во всех случаях эффективные сечения непосредственно выражаются через квадраты модулей ее элементов.

Таким образом, для решения задачи рассеяния достаточно знать только асимптотику волновой функции (или S-матрицу), а не ее поведение при всех конечных r. Это побудило В. Гейзенберга (W. Heisenberg), исходившего из общей идеологии об исключении ненаблюдаемых величин, выдвинуть в 1943 S-матрицу как основной объект теории, полностью характеризующий взаимодействие частиц, к-рый должен строиться непосредственно, без обращения к гамильтониану и связанному с детальным пространственно-временным описанием уравнению Шредингера.

В представлении Фока S-матрица, как и любой другой оператор, может быть записана в виде формального ряда по операторам рождения и уничтожения, коэффициентные функции к-рого непосредственно связаны с амплитудами перехода между любыми состояниями невзаимодействующих частиц. Эти коэффициентные функции не могут быть совершенно произвольными. Определенные фундаментальные физич. требования, к-рым обязательно должна удовлетворять S-матрица, налагают на них ряд ограничений и взаимных связей. Из этих требований В. Гейзенбергом были явно сформулированы: 1) релятивистская ковариантность, то есть вытекающее из теории относительности требование независимости теоретич. предсказаний от выбранной системы координат (S должна быть инвариантом); 2) унитарность:

$$SS^+ = S^+S = 1 \qquad (8)$$

($^+$означает эрмитово сопряжение), необходимая, чтобы сохранялась норма вектора состояния (вероятность найти систему после рассеяния в каком-либо состоянии должна равняться единице). В условие унитарности включают и требование существования полной системы состояний. Однако В. Гейзенберг не рассмотрел требования причинности, к-рому, хотя бы в виде условия макропричинности, теория обязательно должна удовлетворять. Поэтому такая постановка задачи оказалась слишком общей и не принесла сразу конечных результатов.

В дальнейшем в работах Э. Штюкельберга (E. Stueckelberg) и Н. Н. Боголюбова требование причинности было уточнено. Чтобы его сформулировать, необходимы какие-либо локальные операторы. Н. Н. Боголюбов ввел для этой цели вариационные производные S-матрицы по локальным (зависящим от точки x пространства-времени) объектам (полям). В представлении Фока S-матрицу можно представить в виде разложения по *нормальным произведениям* локальных квантовых полей $\varphi(x)$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int dx_1 \ldots dx_n \Phi^n(x_1,\ldots,x_n):\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n):. \quad (9)$$

Под знаком нормального произведения : ... : поля $\varphi(x_j)$ удовлетворяют *Клейна – Гордона уравнению* или, как говорят, находятся на поверхности энергии. Чтобы воспользоваться обычным определением вариационной производной функционала, следует рассматривать это разложение при любых $\varphi(x)$, то есть расширенным за поверхность энергии.

Таким образом, чтобы наложить условие причинности и извлечь заложенную в нем физич. информацию, приходится сначала расширить введенное В. Гейзенбергом понятие Р. м. до более широкого объекта – S-матрицы вне поверхности энергии, сформулировать для него условие микропричинности и после этого использовать связи между матричными элементами, к-рые из него следуют. Подчеркнем, что в конце концов с наблюдаемыми величинами опять связывается только ограничение Р. м. на энергетич. поверхность.

Довести этот путь прямого построения Р. м. до конечных формул, дающих полное описание рассеяния, удается только, если прибегнуть к разложению в ряды теории возмущений. При этом оказывается, что требования релятивистской инвариантности, унитарности и причинности ограничивают теорию столь же сильно, как и принятие гамильтонова метода, и приводят по существу к тем же результатам, что и развитый С. Томонагой (S. Tomonaga) и Ю. Швингером (J. Schwinger) способ, обобщающий на релятивистский случай упомянутый выше метод получения Р. м. через асимптотику решений уравнений Шредингера. На обоих путях для Р. м. получается компактная символич. запись в виде так наз. хронологич. экспоненты (см. *Хронологическое произведение*):

$$S = T\left\{\exp\left[i\int L_{\text{int}}(x)\,dx\right]\right\}, \qquad (10)$$

где $L_{\text{int}}(x)$ – лагранжиан взаимодействия в представлении взаимодействия. Фактически эта формула – краткая запись ряда теорий возмущений, последовательные члены к-рого изображаются *Фейнмана диаграммами*, вычисляемыми с помощью правил Фейнмана, с применением процедуры перенормировок.

Однако теория возмущений не всегда применима. В таких случаях пользуются другими методами, в к-рых центральную роль играют рассмотрение Р. м. в целом и изучение общих свойств ее матричных элементов, прямо описывающих амплитуды процессов рассеяния и рождения. Гейзенберговы локальные операторы могут быть тогда выражены через расширенную за поверхность энергии Р. м. и играют важную роль, поскольку через них накладывается центральное в S-матричном подходе условие причинности Боголюбова. Это условие приводит к обращению в нуль матричных

элементов Р. м. в определенных пространственно-временных областях. С другой стороны, условие унитарности в комбинации с положительностью масс всех состояний полной системы (условием спектральности) приводит к обращению в нуль фурье-образов тех же матричных элементов в определенных импульсных областях. Из этих двух свойств можно вывести, что для каждого заданного числа и сорта частиц амплитуды всех возможных реакций суть граничные значения одной аналитич. функции многих комплексных переменных, фактически зависящей от их лоренц-инвариантных комбинаций. Из этих свойств голоморфности можно вывести ряд непосредственно связывающих опытные факты физич. следствий. Так, в простых случаях двухчастичного рассеяния, напр. для рассеяния пионов на нуклонах, выписываются дисперсионные соотношения, выражающие вещественную часть амплитуды рассеяния через интеграл от ее мнимой части (см. *Дисперсионных соотношений метод*). На этом пути приходят и к другим важным модельно независимым результатам, не опирающимся на конкретную форму взаимодействия, таким, как *перекрестная симметрия*, *асимптотические теоремы*, результаты относительно асимптотич. автомодельности формфакторов. В то же время этот путь позволяет исследовать многие сложные явления типа *глубоко-неупругих процессов* и дает благодаря условиям унитарности и перекрестной симметрии способы исследования связей между амплитудами и сечениями отдельных процессов.

Таким образом, исследование аналитич. свойств амплитуд, основанное на аксиоматич. S-матричном подходе с условиями причинности и предположениями о спектре масс (см. *Аксиоматическая квантовая теория поля*), позволяет получать, хотя и ограниченные, но важные точные результаты.

Лит.: [1] Heisenberg W., «Z. Phys.», 1943, Bd 120, S. 513, 673; [2] Новейшее развитие квантовой электродинамики, Сб. ст., под ред. Д. Д. Иваненко, М., 1954; [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [4] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [5] Померанчук И. Я., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1958, т. 34, с. 725; [6] Дирак П. А., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979, гл. 8; [7] Берестецкий В. Б., «Успехи физич. наук», 1962, т. 76, с. 25; [8] Новожилов Ю. В., Введение в теорию элементарных частиц, М., 1972; [9] Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Хрусталев О. А., Ограничения на поведение сечений упругих и неупругих процессов при высоких энергиях, «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1972, т. 3, с. 515; [10] Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н., «Теоретич. и математич. физика», 1972, т. 12, с. 305; [11] Тодоров И. Т., Аксиоматический подход в квантовой теории поля, в кн.: Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ, Дубна, 1964; [12] Медведев Б. В., Поливанов М. К., К аксиоматическому построению матрицы рассеяния, там же; [13] Файнберг В. Я., Уравнения квантовой теории поля в аксиоматическом подходе, там же; [14] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985.

Б. В. Медведев, М. К. Поливанов.

РАССЕЯНИЯ ОПЕРАТОР – см. *Рассеяния задачи решение, Рассеяния абстрактная матрица, Обратной задачи рассеяния метод.*

РАССЕЯНИЯ ПОРОГ – см. *Порог канала.*

РАССЕЯНИЯ ТЕОРИЯ в квантовой механике – теория рассеяния микрочастиц – процесса столкновения частиц, в результате которого либо меняются их импульсы (упругое рассеяние) или наряду с изменением импульсов меняются также внутренние состояния частиц, либо образуются другие частицы (неупругие процессы). Одна из основных количественных характеристик как упругого рассеяния, так и неупругих процессов – эффективное сечение процесса – величина, пропорциональная вероятности процесса. Измерение сечений процессов позволяет изучать законы взаимодействия частиц, исследовать их структуру.

Классическая теория рассеяния. Согласно законам класич. нерелятивистской механики, задачу рассеяния двух частиц с массами m_1 и m_2 можно свести путем перехода к системе центра инерции сталкивающихся частиц к задаче рассеяния одной частицы с приведенной массой $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ на неподвижном силовом центре. Траектория частицы, проходящей через силовое поле (с центром O), искривляется – происходит рассеяние. Угол между начальным ($\boldsymbol{p}_{\text{нач}}$) и конечным ($\boldsymbol{p}_{\text{кон}}$) импульсами рассеиваемой частицы называется углом рассеяния. Угол рассеяния зависит от взаимодействия между частицами и от прицельного параметра ρ – расстояния, на к-ром частица пролетала бы от силового центра, если бы взаимодействие отсутствовало.

В опытах обычно направляют на мишень из исследуемого вещества пучок частиц. Число частиц dN, рассеянных в единицу времени на углы, лежащие в интервале ϑ, $\vartheta + d\vartheta$, равно числу частиц, проходящих в единицу времени через кольцо площадью $2\pi\rho d\rho$. Если n – плотность потока падающих частиц, то

$$dN = 2\pi\rho d\rho n,$$

а сечение упругого рассеяния $d\sigma$ определяется как отношение dN/n и равно:

$$d\sigma = dN/n = 2\pi\rho d\rho. \qquad (1)$$

Полное сечение рассеяния σ получается интегрированием (1) по всем прицельным параметрам. Если a – минимальный прицельный параметр, при к-ром частица не рассеивается, то $\sigma = \pi a^2$.

Квантовая теория рассеяния. В квантовой теории упругое рассеяние и неупругие процессы описываются матричными элементами S-матрицы, или *рассеяния матрицы* (амплитудами процессов), – комплексными величинами, квадраты модуля к-рых пропорциональны сечениям соответствующих процессов. Через матричные элементы S-матрицы выражаются физич. величины, непосредственно измеряемые на опыте: сечение, поляризация частиц, асимметрия, компоненты тензора корреляции поляризаций и т. д. С другой стороны, эти матричные элементы могут быть вычислены при определенных предположениях о виде взаимодействия. Сравнение результатов опыта с теоретич. предсказаниями позволяет получить информацию о взаимодействии.

Общие принципы инвариантности (инвариантность относительно вращений, пространственной инверсии, обращения времени и др.) существенно ограничивают возможный вид матричных элементов процессов и позволяют получить проверяемые на опыте соотношения. Напр., из инвариантности относительно вращений и пространственной инверсии, к-рым отвечают законы сохранения углового (орбитального) момента и четности, следует, что поляризация конечной частицы, возникающая при рассеянии неполяризованных частиц, направлена по нормали к плоскости рассеяния (плоскости, проходящей через начальный и конечный импульсы частицы). Таким образом, измеряя направление вектора поляризации, можно выяснить, сохраняется ли четность во взаимодействии, обусловливающем процесс. Изотопич. инвариантность сильного взаимодействия приводит к соотношениям между сечениями различных процессов, а также к запрету нек-рых процессов. Напр., при столкновении двух дейтронов не могут образоваться α-частица и π-мезон. Экспериментальное исследование этого процесса подтвердило справедливость изотопич. инвариантности.

Условие унитарности S-матрицы, являющееся следствием сохранения полной вероятности, также накладывает ограничения на матричные элементы процессов. Так, из этого условия вытекает *оптическая теорема.*

Из общих принципов квантовой теории (условия микропричинности, релятивистской инвариантности и др.) следует, что элементы S-матрицы являются аналитич. функциями в нек-рых областях комплексных переменных. Аналитичность S-матрицы позволяет получить ряд соотношений

между определяемыми из опыта величинами — *дисперсионные соотношения*, *Померанчука теорему* и др.

В случае упругого рассеяния бесспиновых частиц решение *Шредингера уравнения* для волновой функции $\psi(\boldsymbol{r})$ при $r\to\infty$ имеет вид:

$$\psi(\boldsymbol{r})|_{r\to\infty}\sim \exp(i\boldsymbol{kr})+f(\vartheta)\,r^{-1}\exp(i\boldsymbol{kr}). \qquad (2)$$

Здесь r — расстояние между частицами, $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}/\hbar$ — волновой вектор, $\boldsymbol{p}$ — импульс в системе центра инерции сталкивающихся частиц, ϑ — угол рассеяния, $f(\vartheta)$ — *амплитуда рассеяния* — функция, зависящая от угла рассеяния и энергии сталкивающихся частиц. Первый член в этом выражении описывает падающие частицы, второй — рассеянные. Дифференциальное сечение рассеяния определяется как отношение числа частиц, рассеянных за единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$, к плотности потока падающих частиц. Сечение рассеяния на угол ϑ (в системе центра инерции) в единичный телесный угол равно:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\vartheta)|^2.$$

Амплитуду рассеяния обычно разлагают в ряд по парциальным волнам — состояниям с определенным орбитальным моментом l:

$$f(\vartheta)=\frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\vartheta).$$

Здесь $P_l(\cos\vartheta)$ — многочлены Лежандра, S_l — комплексные функции энергии, зависящие от характера взаимодействия и являющиеся элементами S-матрицы (в представлении, в к-ром диагональны энергия, угловой момент и его проекция). Если число падающих на центр частиц с орбитальным моментом l равно числу идущих от центра частиц с тем же моментом (упругое рассеяние), то $|S_l|=1$. В общем случае $|S_l|\leqslant 1$. Эти условия — следствие условия унитарности S-матрицы. Если возможно только упругое рассеяние, то $S_l=\exp(2i\delta_l)$ и рассеяние в состоянии с данным l характеризуется только одним вещественным параметром δ_l — фазой рассеяния. Если $\delta_l=0$ при нек-ром l, то рассеяние в состоянии с орбитальным моментом l отсутствует.

Полное сечение упругого рассеяния равно:

$$\sigma^{\text{упр}}=\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l^{\text{упр}},$$

$$\sigma_l^{\text{упр}}=\pi\lambda^2(2l+1)|S_l-1|^2,$$

где $\sigma_l^{\text{упр}}$ — парциальное сечение упругого рассеяния частиц с орбитальным моментом l, $\lambda=1/k$ — длина волны де Бройля частицы. При $S_l=-1$ сечение $\sigma_l^{\text{упр}}$ достигает максимума и равно:

$$\left(\sigma_l^{\text{упр}}\right)_{\text{макс}}=4\pi\lambda^2(2l+1),$$

при этом $\delta_l=\pi/2$ (резонанс в рассеянии). Таким образом, при резонансе сечение процесса определяется де-бройлевской длиной волны λ и для медленных частиц, для к-рых $\lambda\gg R_0$, где R_0 — радиус действия сил, намного превосходит величину πR_0^2 (классич. сечение рассеяния). Это явление (необъяснимое с точки зрения классич. теории рассеяния) обусловлено волновой природой микрочастиц.

Другим проявлением волновой природы микрочастиц является дифракционное рассеяние — упругое рассеяние быстрых частиц на малые углы $\vartheta\sim\lambda/R_0$ (при $\lambda\ll R_0$), обусловленное отклонением де-бройлевских волн налетающих частиц в область геометрич. тени, возникающей за рассеивающей частицей. Таким образом, дифракционное рассеяние аналогично явлению дифракции света.

Зависимость сечения рассеяния от энергии вблизи резонанса определяется формулой Брейта — Вигнера:

$$\sigma_l=4\pi\lambda^2(2l+1)\frac{(\Gamma/2)^2}{(\mathscr{E}-\mathscr{E}_0)+(\Gamma/2)^2},$$

где $\mathscr{E}_0$ — энергия, при к-рой сечение достигает максимума (положение резонанса), а Γ — ширина резонанса. При $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0+\Gamma/2$ сечение $\sigma_l=\sigma_l^{\text{макс}}/2$.

Полное сечение всех неупругих процессов

$$\sigma^{\text{неупр}}=\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l^{\text{неупр}},$$

$$\sigma_l^{\text{неупр}}=\pi\lambda^2(2l+1)(1-|S_l|^2).$$

Условие унитарности ограничивает величину парциального сечения для неупругих процессов:

$$\sigma_l^{\text{неупр}}\leqslant\pi\lambda^2(2l+1).$$

Для короткодействующих потенциалов взаимодействия основную роль играют фазы рассеяния с $l\leqslant R_0/\lambda$, где R_0 — радиус действия сил; величина $l\lambda$ определяет минимальное расстояние, на к-рое может приблизиться к центру сил свободная частица с моментом l (прицельный параметр в квантовой теории). При $R_0/\lambda\ll 1$ (малые энергии) следует учитывать только парциальную волну с $l=0$ (S-волну). Амплитуда рассеяния в этом случае

$$f\approx\frac{1}{2ik}(\exp(2i\delta_0)-1)=\frac{1}{k\operatorname{ctg}\delta_0-ik}$$

и сечение рассеяния не зависит от ϑ (рассеяние сферически симметрично). При малых энергиях

$$k\operatorname{ctg}\delta_0\approx-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}r_0k^2.$$

Параметры a и r_0 называются соответственно длиной рассеяния и эффективным радиусом рассеяния. Их находят из опыта, и они являются важными характеристиками сил, действующих между частицами. Длина рассеяния равна по величине и противоположна по знаку амплитуде рассеяния при $k=0$. Полное сечение рассеяния при $k=0$ равно $\sigma_0=4\pi a^2$.

Если у частиц имеется связанное состояние с малой энергией связи, то их рассеяние при $R_0/\lambda\ll 1$ носит резонансный характер. Типичный пример — рассеяние нейтронов протонами в состоянии с полным спином $J=1$, в к-ром система нейтрон-протон имеет связанное состояние (дейтрон). В этом случае длина рассеяния a отрицательна, а сечение рассеяния зависит только от энергии связи.

Если параметр R_0/λ невелик, фазы рассеяния могут быть получены из измеренных на опыте сечений, поляризаций и других величин. Эта процедура называется фазовым анализом. Найденные фазы рассеяния сравниваются с теоретич. предсказаниями и позволяют получить важную информацию о характере взаимодействия.

Информацию о взаимодействии дают измерения поляризационных эффектов. Для упругого рассеяния частиц со спином 0 на частицах со спином 1/2 вместо (2) имеем

$$\psi_0(\boldsymbol{r})\sim\exp(i\boldsymbol{kr})u_\sigma+M_{\sigma\sigma'}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})u_{\sigma'}\exp(i\boldsymbol{kr})/r.$$

Здесь $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ и $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{p}'/|\boldsymbol{p}'|$ ($\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}'$ — начальный и конечный импульсы в системе центра инерции), u_σ — спинор, описывающий состояние начальных частиц, $M_{\sigma\sigma'}(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{k})$ — (2×2)-матрица, называемая спиновой матрицей рассеяния, σ — спиновый индекс (по повторяющемуся индексу σ' производится суммирование). Из сохранения полного момента и четности (инвариантности относительно вращений и пространственных отражений) следует, что матрица M имеет общий вид

$$M=a+b\boldsymbol{\sigma n},$$

где a и b — комплексные функции скаляров $\boldsymbol{kk}'$ и $\boldsymbol{k}^2$, σ_i — *Паули матрицы*, $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{kk}']/|[\boldsymbol{kk}']|$ — единичный вектор нормали к плоскости рассеяния.

Один из основных приближенных методов Р. т.— *возмущений теория*. Если падающая плоская волна, описывающая начальные частицы, слабо возмущается потенциалом взаимодействия, то применимо так наз. *Борна приближение* (первый член ряда теории возмущений). Амплитуда упругого рассеяния в приближении Борна равна

$$f(\vartheta) = -2\mu\int_0^\infty V(r)\frac{\sin(qr)}{qr}r^2\,dr,$$

где $q = 2k\sin(\vartheta/2)$, $V(r)$ — потенциал взаимодействия.

Для описания процессов рассеяния при высоких энергиях используются методы квантовой теории поля, в частности метод *Фейнмана диаграмм*.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 4 изд., М., 1989; [2] Ситенко А. Г., Лекции по теории рассеяния, Киев, 1971.

С. М. Биленький.

РАССЕЯНИЯ УГОЛ — параметр, используемый для описания рассеяния в системе двух частиц со сферически симметричным потенциалом взаимодействия. В этом случае уравнение Шредингера

$$\{-\Delta_{\boldsymbol{x}} + v(|\boldsymbol{x}|) - \boldsymbol{k}^2\}\,\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}) = 0,$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$, имеет аксиально симметричное относительно оси с направляющим вектором $\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ решение $\Psi = \Psi(|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{k}|, \theta)$ с асимптотич. поведением:

$$\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}) = \exp\{i|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{k}|\cos\theta\} +$$

$$+ f(\theta, \boldsymbol{k})\exp\{i|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{k}|\}|\boldsymbol{x}|^{-1}(1 + o(1)).$$

Параметр θ, равный углу между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{k}$, называется углом рассеяния.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 4 изд., М., 1989.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

РАССЕЯНИЯ ФУНКЦИЯ — см. *Диссипативная функция*.

РАССЛОЕНИЕ, расслоенное пространство, — пространство X, снабженное (непрерывным, дифференцируемым) отображением $p: X \to B$ на пространство B. При этом X называется тотальным пространством Р., B — базой Р., p — проекцией Р. на базу. Для каждой точки $b \in B$ пространство $p^{-1}(b)$ называют слоем Р. Интуитивно Р. можно представить как объединение слоев [к-рые обычно полагаются гомеоморфными (диффеоморфными) типичному слою F], параметризованных базой B и «склеенных» топологией пространства X. Понятие Р. обобщает понятие *прямого произведения*, когда

$$X = B \times F,\ p(x) = B;$$

если этот факт локален, то есть если у каждой точки $b \in B$ существует окрестность U, для к-рой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times F$, то такое Р. называется локально тривиальным.

Отображение $S: B \to X$, для к-рого $S(b) \in p^{-1}(b)$ для каждой точки b, называется сечением Р. Сечения многих Р. могут быть отождествлены с известными физич. и геометрич. объектами, напр. векторными, тензорными или спинорными полями. У Р., с к-рыми чаще всего приходится иметь дело, слои не просто являются топологическими или дифференцируемыми пространствами, но обладают дополнительной структурой; так, напр.:

1) если типичный слой Р. является группой Ли, то такое Р. называется главным,

2) если типичный слой Р. является *векторным пространством*, то такое Р. называется векторным,

3) если типичный слой Р.— векторное пространство, на к-ром действует представление нек-рой группы Ли, то такое Р. называется ассоциированным с главным (наиболее важный пример Р. этого типа — калибровочное поле).

Лит.: [1] Шутц Б., Геометрические методы математической физики, пер. с англ., М., 1984; [2] Шварц А. С., Квантовая теория поля и топология, М., 1989; [3] Коноплева Н. П., Попов В. Н., Калибровочные поля, 2 изд., М., 1980; [4] Атья М., Математика и физика узлов, пер. с англ., М., 1995.

М. И. Войцеховский.

РАССЛОЕНИЕ струй — объект, объединяющий пространства струй функций (или, более общо,— струй отображений в фиксированное многообразие) во всех точках гладкого многообразия M^n. Струей (или джетом) порядка k (иначе — k-струей) функции f в нек-рой точке многообразия M^n называется многочлен $j^k f$, получающийся (в локальных координатах) усечением ряда Тейлора функции f в этой точке до членов степени k включительно. Пространство k-струй в нек-рой точке изоморфно пространству многочленов степени $\leqslant k$ от n переменных (имеющему размерность, равную C^n_{n+k}). В объединении пространств k-струй, соответствующих различным точкам многообразия M^n, естественным образом вводится структура топологич. пространства, при к-рой его проекция на M^n является векторным расслоением. Напр., расслоение 0-струй изоморфно тривиальному одномерному расслоению ($M \times \mathbb{R}^1 \to M$), расслоение 1-струй — прямой сумме $\mathbb{R}^1 \oplus T^*M$ одномерного тривиального расслоения и кокасательного расслоения многообразия M^n.

О. В. Ляшко.

РАССЛОЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — см. *Расслоение*.

РАССТРОЙКА — см. *Свободное гармоническое колебание*.

РАСТЯГИВАЮЩЕЕСЯ СЛОЕНИЕ — см. *Слоение*.

РАСХОДИМОСТИ ИНДЕКС — см. *Ультрафиолетовая расходимость*.

РАСХОДИМОСТЬ в квантовой теории поля — термин, указывающий на некорректность определения квантовополевых величин в рамках формального применения метода теории возмущений. Р. проявляются в Р. фейнмановских интегралов в различных областях 4-мерных импульсов, что и объясняет происхождение этого термина. Различают два типа Р.: *ультрафиолетовые расходимости* и *инфракрасные расходимости*. Ультрафиолетовые Р. обусловлены локальным характером взаимодействия квантовых полей, а физич. причиной инфракрасных Р. является дальнодействующий характер полей с нулевыми массами. В качестве математич. причины ультрафиолетовых Р. можно назвать некорректность перемножения пропагаторов (причинных функций свободных полей), из к-рых «строятся» фейнмановские диаграммы и к-рые представляют собой обобщенные функции, обладающие сингулярностями. При попытке определения таких произведений с помощью интегралов сверточного типа от соответствующих преобразований Фурье (см. *Фейнмана диаграмма*) эти интегралы оказываются расходящимися в области больших 4-мерных импульсов. Инфракрасные же Р. проявляются в виде Р. фейнмановских интегралов в различных областях малых импульсов.

Чтобы придать смысл расходящимся фейнмановским амплитудам (диаграммам), используется стандартный прием, основанный на введении регуляризации. Вместо (бессмысленной) расходящейся величины рассматривается регуляризованная, к-рая при стремлении параметра регуляризации к своему предельному «физическому» значению превращается в исходную фейнмановскую амплитуду. В результате информация об ультрафиолетовых и инфракрасных Р. выражается в сингулярных свойствах регуляризованных величин по параметрам регуляризации. Напр., аналитическая регуляризация состоит в замене пропагатора скалярной частицы

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i0} \quad \text{на} \quad \frac{1}{(m^2 - p^2 - i0)^{\lambda+1}},$$

где $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2}$, $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ — 4-мерный импульс, m — масса, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — регуляризующий параметр. Вообще говоря, пропагатор каждой линии регуляризуется своим параметром λ_l. Аналитически регуляризованная фейнмановская диаграмма представляет собой мероморфную функцию этих параметров с ультрафиолетовыми и инфракрасными сериями полюсов, соответствующих поддиаграммам.

Другим примером регуляризации с комплексным параметром является размерная регуляризация, основанная на использовании комплексной размерности пространства-времени. При вычислениях фейнмановских диаграмм она сводится рецептурно к замене в используемых формулах Р. пространства-времени $d=4$ на $d\in\mathbb{C}$. Размерно регуляризованные фейнмановские диаграммы представляют собой мероморфные функции параметра d, а наличие ультрафиолетовых или инфракрасных Р. отражается в полюсах по параметру $\varepsilon=(4-d)/2$, характеризующему отклонение параметра регуляризации от физич. значения $d=4$. Примером регуляризации, предназначенной только для ультрафиолетовых Р., является обрезание фейнмановских интегралов при больших петлевых импульсах, а также регуляризация Паули – Вилларса, состоящая в замене

$$\frac{1}{m^2-p^2-i0} \text{ на } \frac{1}{m^2-p^2-i0}-\frac{1}{M^2-p^2-i0}.$$

При устремлении массивного параметра M к бесконечности восстанавливается исходный пропагатор. Для регуляризации инфракрасных Р. стандартной является замена

$$\frac{1}{m^2-p^2-i0} \text{ на } \frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon} \text{ при } \varepsilon>0.$$

Ультрафиолетовые Р. устраняются перенормировкой (R-операцией; см. *Перенормировка* в квантовой теории поля). В перенормированных фейнмановских диаграммах можно снять ультрафиолетовую регуляризацию, то есть перейти к физич. значениям регуляризующих параметров: $\lambda=0$ для аналитич. регуляризации и $\varepsilon=0$ – для размерной. Что касается инфракрасных Р., то они встречаются разных видов, причем в физически осмысленных квантовополевых моделях часть инфракрасных Р. вообще отсутствует, а часть Р. сокращается, если рассмотреть сечения рассеяния, имеющие непосредственный физич. смысл.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979; [3] Иционсон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., М., 1984; [4] Коллинз Дж., Перенормировка, пер. с англ., М., 1988; [5] Смирнов В. А., Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд, М., 1990. *В. А. Смирнов.*

РАСХОДЯЩИЙСЯ ГРАФ – см. *Перенормировка* в квантовой механике.

РАСШИРЕНИЕ группы K с помощью нормального делителя H – *группа* G такая, что H – подгруппа в G и факторгруппа G/H изоморфна K. Основная проблема теории Р. групп: как восстановить G по K и H.

Пусть, для простоты, группа H абелева и g – элемент группы G. Тогда отображение $\tau_g\colon h\to ghg^{-1}$ задает автоморфизм группы H. Таким образом, группа G действует на H автоморфизмами, то есть отображение $g\to\tau_g$ является гомоморфизмом G в группу автоморфизмов группы H. Но H действует на себя тривиально, то есть τ_g зависит лишь от класса смежности G/H и, тем самым, факторгруппа $K=G/H$ действует на H автоморфизмами. Зная автоморфизмы τ_g в H, можно пытаться восстановить умножение в G.

Пусть k – элемент K, а $s(k)$ – нек-рый представитель соответствующего класса смежности по H. Ясно, что, вообще говоря, $s(k_1k_2)\neq s(k_1)s(k_2)$, однако они лежат в одном классе смежности по H, и, следовательно, существует элемент $c(k_1, k_2)\in H$ такой, что

$$s(k_1)s(k_2)=c(k_1, k_2)s(k_1k_2).$$

Переписывая условие

$$s(k_1)(s(k_2)s(k_3))=(s(k_1)s(k_2))s(k_3),$$

получают, что элементы $c(k_1, k_2)$ должны удовлетворять соотношению:

$$c(k_1, k_2k_3)\tau_{k_1}(c(k_2, k_3))=c(k_1k_2, k_3)c(k_1, k_2). \quad (1)$$

Зная систему элементов $c(k_1, k_2)$, можно считать известным и умножение в G. Однако в выборе $s(k)$ был произвол: с тем же успехом можно было выбрать элементы $s'(k)=h(k)s(k)$, где $h(k)\in H$. Это дает новую систему элементов $c'(k_1, k_2)$, связанную со старой соотношениями:

$$c'(k_1, k_2)=$$
$$=c(k_1, k_2)h(k_1)\tau_{k_1}(h(k_2))h(k_1k_2)^{-1}c(k_1, k_2k_3). \quad (2)$$

На языке когомологии групп равенство (1) означает, что $c(k_1, k_2)$ есть 2-коцепь на K с коэффициентами в H, а равенство (2) означает, что Р. не меняется, если коцепь c умножается на когранницу. Итак, все Р. группы K с помощью H при фиксированной системе автоморфизмов τ_k нумеруются элементами группы когомологий $H^2(K, H)$. Нулевому элементу группы $H^2(K, H)$ (то есть случаю, когда $c(k_1, k_2)=e$) отвечает полупрямое произведение групп K и H.

Во многих интересных случаях все автоморфизмы тождественны. Тогда Р. называется центральным.

Ю. А. Неретин.

РАСШИРЕНИЕ оператора A с областью определения $\mathcal{D}(A)$, действующего из пространства X в пространство Y, – такой оператор $B\colon X\to X$, что $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(B)\subset X$ и $Ax=Bx$ для $x\in\mathcal{D}(A)$, то есть график

$$\mathrm{Gr}(A):=\{\{x, Ax\}, x\in\mathcal{D}(A)\}\subset\mathrm{Gr}(B)$$

как множества в $X\times Y$. Пишут $A\subset B$, и $A=B|_{\mathcal{D}(A)}$ называется сужением B на $\mathcal{D}(A)$, а B – продолжением A.

Важные примеры в случае линейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах – замыкание оператора, расширение симметрич. оператора (в частности, для определения самосопряженного гамильтониана; см. *Шредингера уравнение*, [1], [2]).

Р. дифференциального оператора рассматривается в [3], Р. оператора с выходом в более широкое пространство и дилатации – в [4].

Лит.: [1] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1978; [3] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [4] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970. *А. В. Булинский.*

РАУСА УРАВНЕНИЯ – дифференциальные уравнения движения механической системы в переменных Рауса (см. *Рауса функция*). Предложены Э. Раусом (E. Routh) в 1867. Для системы с s степенями свободы, находящейся под действием потенциальных сил, Р. у. имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial R}{\partial p_i}=0, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad m<s, \quad (1)$$

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial R}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial q_k}, \quad k=m+1, \dots, s, \quad (2)$$

где $R(q_i, p_k, \dot q_i, \dot p_k, t)$ – *Рауса функция*, q_i, q_k – обобщенные координаты системы, $\dot q_i$ – обобщенные скорости, p_k – обобщенные импульсы, t – время. Формально равенства (1) и (2) имеют соответственно вид уравнений Лагранжа (где R играет роль функции Лагранжа L) и уравнений Гамильтона (где R играет роль функции Гамильтона H).

Р. у. удобно пользоваться, когда часть координат системы является *циклическими координатами*. Пусть q_k – циклич. координаты. Тогда они в выражение R явно не входят. Следовательно, $\partial R/\partial q_k=0$ и согласно второй совокупности уравнений (2) $p_k=\alpha_k$, где α_k – постоянные интегрирования. В результате $R=R(q_i, \dot q_i, \alpha_k, t)$ и уравнения (1), как и обычные уравнения Лагранжа, дадут систему m дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно обобщен-

ных координат q_i. Таким образом, число дифференциальных уравнений, к-рые надо проинтегрировать для нахождения закона движения системы, уменьшится на число циклич. координат. Если это интегрирование будет осуществлено, то q_i определяется в виде $q_i(t, c_i, c_i')$, где c_i, c_i' – новые постоянные интегрирования. После этого можно вычислить R в виде $R(t, c_i, c_i', \alpha_k)$, и остальные (циклические) координаты найдутся из первой группы уравнений (2) с помощью квадратур

$$q_k = \int (\partial R/\partial \alpha_k)\, dt.$$

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, М., 1960, § 13, 14; [2] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., М., 1957, § 7. 2; [3] Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961, § 7. 16,7. 17. *С. М. Тарг.*

РАУСА ФУНКЦИЯ – характеристическая функция механической системы, выраженная через переменные Рауса, которыми являются время t, все s обобщенных координат q_ν системы, обобщенные скорости $\dot{q}_i$, соответствующие каким-то m из этих координат, и обобщенные импульсы p_k, соответствующие остальным $s-m$ координатам. Такой выбор переменных удобен, когда $s-m$ координат q_k являются *циклическими координатами*. Если *Лагранжа функция* $L(q_\nu, \dot{q}_\nu)$ для данной системы известна, то Р. ф. определяется из равенства

$$R(t, q_i, q_k, \dot{q}_i, p_k) = \sum_{k=m+1}^{s} p_k \dot{q}_k - L,$$

в правой части к-рого все $\dot{q}_k$, $k = m+1, \ldots, s$, следует выразить через p_k, используя соотношения $p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$. Когда координаты q_k являются циклическими, они в Р. ф. не входят; при этом одновременно $p_k = \text{const} = \alpha_k$ и $R = R(t, q_i, \dot{q}_i, \alpha_k)$. См. также *Рауса уравнения*. *С. М. Тарг.*

РАУСА – ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ, Гурвица критерий,– необходимое и достаточное условие того, чтобы все корни многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с действительными коэффициентами и $a_0 > 0$ имели отрицательные действительные части. Р.– Г. к. состоит в том, чтобы были положительными все главные миноры Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы Гурвица H, где H – матрица порядка n, i-я строка к-рой имеет вид

$$a_{2-i}, a_{4-i}, \ldots, a_{2n-i},$$

и, по определению, $a_k = 0$, если $k < 0$ или $k > n$ (условия Гурвица, условия Рауса – Гурвица). Этот критерий получен А. Гурвицем (A. Hurwitz, 1895) и является обобщением работы Э. Рауса (E. Routh, 1877).

Многочлен $f(x)$, удовлетворяющий условиям Гурвица, называется многочленом Гурвица, или устойчивым многочленом, что связано с применениями Р.– Г. к. в теории устойчивости колебательных систем.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967. *Е. Н. Кузьмин.*

РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ – функция вида

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$Q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m;$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$$

– постоянные, называемые коэффициентами Р. ф., $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, n и m – целые неотрицательные числа. В частности, Р. ф. являются многочлен (или полином, целая рациональная функция) (при $b_i \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$) и *дробно-линейная функция* (если $P(x)$ и $Q(x)$ – линейные функции). Можно считать, что многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ взаимно простые, то есть не имеют общих корней (нулей), так как в противном случае дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ можно сократить.

Р. ф. является *мероморфной функцией* в расширенной комплексной плоскости. Полюсами Р. ф. являются корни ее знаменателя и точка $z = \infty$ при $n > m$. Если z_0 – корень многочлена $Q(z)$ кратности k, то z_0 – полюс Р. ф. порядка k; если $n > m$, то точка $z = \infty$ – полюс Р. ф. порядка $n - m$. При $z \to \infty$ имеет место асимптотич. формула

$$R(z) \sim \frac{a_0}{b_0} z^{n-m}.$$

Справедливо обратное утверждение: мероморфная в расширенной комплексной плоскости функция является Р. ф. *В. И. Битюцков.*

РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ – силы воздействия каких-либо тел на точки механической системы (см. *Связи механические*). В отличие от активных сил, Р. с. являются величинами заранее неизвестными; они зависят не только от вида связей, но и от действующих на систему активных сил, а при движении – еще и от закона движения системы и определяются в результате решения соответствующих задач механики.

Направления Р. с. в нек-рых случаях определяются видом связей. Так, если в силу наложенных связей точка системы вынуждена все время оставаться на заданной гладкой (лишенной трения) поверхности, то Р. с. $\boldsymbol{R}$ направлена по нормали $\boldsymbol{n}$ к этой поверхности. Для шероховатой поверхности Р. с. имеет две составляющие: нормальную и касательную.

В общем случае при решении задач динамики пользуются принципом освобождаемости, то есть несвободную механич. систему рассматривают как свободную, прилагая к ее точкам нек-рые силы, подобранные так, чтобы во все время движения системы выполнялись условия, налагаемые на нее связями; эти силы и называются реакциями связей. *С. М. Тарг.*

РЕАЛИЗАЦИЙ ПРОСТРАНСТВО – см. *Случайный процесс.*

РЕАЛИЗАЦИЯ симметрии – см. *Внутренняя симметрия.*

РЕАЛИЗАЦИЯ случайной функции – см. *Случайная функция.*

РЕБРО графа – см. *Граф.*

РЕГРЕССИЯ – см. *Корреляция.*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ – придание смысла расходящимся выражениям с помощью подходящего предельного процесса. Р. тесно связана с классич. методами суммирования расходящихся рядов и интегралов: применяется в теории обобщенных функций, в квантовой теории поля и в других областях теоретич. физики.

Каждая локально суммируемая функция $f(x)$ в области $O \subset \mathbb{R}^n$ задает распределение (*обобщенную функцию*) $f \in D'(O)$ по правилу

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\, d^n x, \quad \varphi \in D(O)$$

(такое распределение называется регулярным). Если же $f(x)$ не является локально суммируемой, то интеграл справа расходится и для придания ему смысла используется Р. При этом различные Р. порождают различные распределения, и выбор конкретной Р. диктуется решаемой физич. задачей.

Пример. Функция x^{-1} не является локально суммируемой в $\mathbb{R}^1$. Она имеет регуляризации px^{-1}, $(x+iO)^{-1}$,

$(x-i0)^{-1}$, где

$$\left(p\frac{1}{x},\varphi\right)=\text{v.p.}\int\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right\},$$

$$\left(\frac{1}{x+i0},\varphi\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i0}dx,\quad \varphi\in D(\mathbb{R}^1),$$

(v. p. означает *главное значение* интеграла). Остальные Р. функции x^{-1} получаются линейными комбинациями приведенных.

Р. применяется также для представления данного распределения в виде предела последовательности регулярных распределений. Напр., дельта-функция Дирака имеет Р.

$$(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx,\quad \varphi\in D(\mathbb{R}^1).$$

Обычно Р. распределений используется при перемножении распределений. Напр.,

$$\left(\frac{1}{x+i0}\frac{1}{x+i0},\varphi\right)=\left(\frac{1}{(x+i0)^2},\varphi\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)dx}{(x+i\varepsilon)^2},\quad \varphi\in D(\mathbb{R}^1).$$

Известный физич. пример — перемножение одночастотных функций в квантовой теории поля. Часто, напр. при перемножении причинных функций, такая процедура не приводит к однозначному ответу и требует доопределения, согласованного с физич. контекстом задачи (см. *Ультрафиолетовая расходимость*, *Перенормировка*). Пример подобного доопределения — *Боголюбова — Парасюка R-операция*. О других конкретных приемах Р., применяемых в физич. приложениях, см. в ст. *Регуляризация расходимостей* в квантовой теории поля.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979.

В. В. Жаринов.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ обобщенной функции — представление ее в виде предела последовательности гладких функций. Именно, последовательность функций $f_\nu(x)$ класса $C^{(\infty)}$, $\nu=1, 2, \ldots$, называется регуляризацией обобщенной функции $f\in\mathcal{F}'$, если $f_\nu(x)$ задают регулярные *обобщенные функции* $f_\nu\in\mathcal{F}'$, слабо сходящиеся к f при $\nu\to\infty$, то есть если

$$\lim_{\nu\to\infty}\int f_\nu(x)\varphi(x)\,d^nx=(f,\varphi),\quad \varphi\in\mathcal{F}.$$

Обычно используют Р. вида

$$f_\nu(x)=(f(y),\delta_\nu(x-y))\equiv f*\delta_\nu(x),$$

где $f\in\mathcal{F}'$ — данная обобщенная функция, $\delta_\nu(x)\in\mathcal{F}$, $\nu=1, 2, \ldots$,— дельта-последовательность, то есть такая последовательность, что

$$\delta_\nu*\varphi(x)=\int\delta_\nu(x-y)\varphi(y)\,d^ny\in\mathcal{F}$$

и сходится к φ в топологии $\mathcal{F}$. В стандартных пространствах обобщенных функций каждая обобщенная функция имеет Р. Этот факт лежит в основе секвенциального подхода к теории обобщенных функций, где обобщенная функция определяется как класс эквивалентности своих Р. *В. В. Жаринов.*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАСХОДИМОСТЕЙ в квантовой теории поля — вспомогательная операция, заключающаяся в замене *пропагаторов* или интегралов от их произведений (соответствующих локальной квантовой теории поля) на некоторые аппроксимирующие их выражения, не содержащие *ультрафиолетовых расходимостей* или соответствующих им в координатном представлении сингулярностей на световом конусе. Такие регуляризованные интегралы явно вычисляют (в импульсном представлении), а затем уже в вычисленных выражениях производят операцию, обратную введению регуляризации, то есть переходят к реальному физич. пределу. Ультрафиолетовые сингулярности при этом выделяются в виде аддитивных составляющих, имеющих простую (напр., полиномиальную) структуру по внешним импульсам.

Необходимость Р. р. наиболее просто увидеть в x-представлении. В квантовополевых расчетах приходится иметь дело с произведениями пропагаторов $\Delta(x)$, обладающих сингулярностями типа полюса $1/x^2$ и дельта-функции Дирака по квадрату 4-мерного интервала $x^2=(x^0)^2-\boldsymbol{x}^2$ [здесь $x(x^0,\boldsymbol{x})$ — точка пространства-времени; используется система единиц, в к-рой $\hbar=c=1$]. Ясно, что квадраты и более высокие степени таких сингулярностей [напр., $\delta^2(x^2)$] не определены математически даже в смысле *обобщенных функций*. Для соответствующего доопределения удобно иметь регулярные (то есть не имеющие особенностей) приближения к Δ или к произведениям нескольких Δ. Такие приближения и получают посредством вспомогательной Р. р.

В квантовополевых вычислениях по теории возмущений получили распространение несколько различных регуляризаций. Среди них наиболее употребительны следующие.

Регуляризация обрезанием состоит во введении конечного верхнего предела Λ (называемого также импульсом обрезания) при интегрировании по 4-импульсам виртуальных частиц. Так, напр., фейнмановский интеграл, отвечающий простейшей (однопетлевой) диаграмме поляризации вакуума в квантовой электродинамике

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=(i/\pi^2)\int d^4p\ \mathrm{Sp}\,\{\gamma^\mu S^c(p)\gamma^\nu S^c(p-k)\},\qquad(1)$$

при регуляризации обрезанием принимает вид:

$$\mathrm{reg}_\Lambda\,\Pi^{\mu\nu}(k)=(i/\pi^2)\int_{|p|<\Lambda}d^4p\ \mathrm{Sp}\,\{\gamma^\mu S^c(p)\gamma^\nu S^c(p-k)\},\qquad(2)$$

где символ $|p|<\Lambda$ под знаком интеграла обозначает, что по всем четырем компонентам 4-импульса p интегрирование проводится в пределах от $-\Lambda$ до $+\Lambda$. В приведенных формулах $\Pi^{\mu\nu}$ — *поляризационный оператор*, γ^μ — *Дирака матрицы*, $\mu=0, 1, 2, 3$, $S^c(p)$ — пропагатор электрона в импульсном представлении (см. *Фейнмана диаграммы*).

Вычисление по формуле (2) с помощью стандартной техники дает явное выражение, к-рое в пределе больших (по сравнению с массой электрона m и модулем внешнего импульса $k=\sqrt{k^2}$) значений Λ имеет вид:

$$\mathrm{reg}_\Lambda\Pi^{\mu\nu}(k)=P^{\mu\nu}(k,\Lambda)+\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k),\qquad(3)$$

где $P^{\mu\nu}$ — многочлен 2-й степени по компонентам 4-вектора k^ν с коэффициентами, пропорциональными Λ^2 и $\ln(\Lambda^2)$, а $\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}$ — конечная функция от k^μ и m^2. Ее явный вид несуществен. Отметим лишь, что при больших k^2 она имеет логарифмич. асимптотику

$$\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)\sim(g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu)\frac{1}{3}\ln k^2,\qquad(4)$$

где $g^{\mu\nu}$ — метрич. тензор пространства-времени Минковского. Представление (3) оказывается удобным для проведения *перенормировки*, то есть устранения бесконечностей. Результативно она сводится к вычитанию из правой части (3) первого, сингулярного в пределе $\Lambda\to\infty$ слагаемого. Поскольку разбиение $\mathrm{reg}_\Lambda\Pi$ на слагаемые P и $\widetilde{\Pi}$ содержит произвол, то возникает вопрос о степени однозначности определения конечной части $\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}$ поляризационного оператора. Одно из условий, к-рому должно удовлетворять $\widetilde{\Pi}$,— условие поперечности $k_\mu\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)=0$, вытекающее из требования *калибровочной инвариантности*. Это условие диктует тензорную структуру матрицы $\widetilde{\Pi}$:

$$\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)=(g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu)\pi(k^2),\qquad(5)$$

где $\pi(k^2)$ — нек-рая скалярная функция от k^2. Как можно показать, после этого остается еще однопараметрич. произвол, к-рый, напр., можно фиксировать условием $\pi(0)=0$.

Регуляризация Паули – Вилларса представляет собой специфическую модификацию одночастичного пропагатора. Ее простейший вариант сводится к вычитанию из пропагатора Δ_m для нек-рого квантового поля с массой m такого же пропагатора, но соответствующего большей фиктивной массе M:

$$\Delta_m \to \mathrm{reg}_M \Delta_m = \Delta_m - \Delta_M.$$

Так, напр., в импульсном представлении для скалярного поля

$$\mathrm{reg}\, D_m(p) = \frac{1}{m^2-p^2} - \frac{1}{M^2-p^2} = \frac{1}{m^2-p^2}\left(\frac{M^2-m^2}{M^2-p^2}\right). \qquad (6)$$

Как видно, Р. р. Паули – Вилларса существенно меняет поведение пропагаторов в ультрафиолетовой области при $p^2 \to \infty$ или, что эквивалентно, в окрестности светового конуса [где регуляризация типа (6) убирает наиболее сильные, не зависящие от массы сингулярности по переменной x^2].

В квантовой электродинамике в целях сохранения калибровочной инвариантности применяют особый вариант Р. р. Паули – Вилларса, при к-ром замкнутые электронные циклы регуляризуют как целое.

Размерная регуляризация состоит в таком изменении правил интегрирования по виртуальным импульсам, к-рое формально соответствует переходу к нецелому числу измерений $D = 4-\varepsilon$, отличному от 4 на бесконечно малую величину ε:

$$\mathrm{reg}_\varepsilon \Pi^{\mu\nu}(k) = i/\pi^2 \int d^{4-\varepsilon}p\, \mathrm{Sp}\,\{\gamma^\mu S^c(p)\gamma^\nu S^c(p-k)\}. \qquad (7)$$

Не вдаваясь в технич. детали, отметим, что результат интегрирования (7) в пределе $\varepsilon \to 0$ представим в виде (3), где вместо первого слагаемого правой части стоит многочлен $P_\varepsilon^{\mu\nu}$ с коэффициентами, содержащими сингулярности типа $1/\varepsilon$. Технич. преимущество размерной Р. р. состоит в том, что она сохраняет свойства симметрии и соответствующей инвариантности нерегуляризованных выражений. В используемом примере речь идет о калибровочной инвариантности электромагнитного поля. Результат явного вычисления выражения (7) удовлетворяет свойству поперечности, то есть размерно регуляризованный поляризационный оператор пропорционален поперечному тензору:

$$\mathrm{reg}_\varepsilon \Pi^{\mu\nu} \sim (g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu),$$

в то время как выражение (2) этим свойством не обладает.

Лит.: [1] Pauli W., Villars F., «Rev. Mod. Phys.», 1949, v. 21, p. 434; [2] Hooft G., Veltman M., «Nucl. Phys.», 1972, v. B 44, p. 189; [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980, § 23.

Д. В. Ширков.

РЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА – см. *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ – частный тип стационарного движения твердого тела около неподвижной точки; такая *прецессия*, при которой величины Ω_1, Ω_2 угловых скоростей прецессии и собственного вращения остаются постоянными. В этом случае оба аксоида (подвижный и неподвижный) представляют собой прямые круговые конусы. Произвольное движение симметричного тела в случае Эйлера – Пуансо, отличное от перманентного вращения, всегда представляет собой Р. п., в к-рой вектор Ω_1 прецессии направлен по неподвижному вектору кинетич. момента тела. В случае Лагранжа – Пуассона Р. п. тела вокруг вертикали возможна при определенном подборе начальных условий. Известен случай Р. п. и для тяжелого тела с динамич. асимметрией (прецессия Гриоли). Р. п. обычно отвечает стационарным решениям уравнений динамики твердого тела при действии силовых полей, обладающих определенными видами симметрии.

См. также *Гироскопа математическая теория, Лагранжа – Пуассона случай.*

В. А. Самсонов.

РЕГУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ, правильная функция, в области – функция $f(z)$ комплексного переменного z, однозначная в этой области и имеющая в каждой ее точке конечную производную (см. *Аналитическая функция*). Р. ф. в точке a – это Р. ф. в нек-рой окрестности a.

В. И. Битюцков.

РЕГУЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ – ограниченный снизу *взаимодействия потенциал* Φ, для которого

$$\int dx\, |e^{-\beta\Phi(x)} - 1| = C(\beta) < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^\nu, \quad \nu = 1, 2, 3,$$

при некотором $\beta > 0$. Условие регулярности накладывает ограничение на закон убывания их потенциала на больших расстояниях и эквивалентно условию абсолютной интегрируемости потенциала вне нек-рого множества конечной лебеговой меры. Если условие регулярности справедливо для какого-нибудь $\beta > 0$, то оно справедливо для всех $\beta > 0$.

Быстро убывающий потенциал взаимодействия и потенциал конечного радиуса действия являются регулярными.

Потенциалы взаимодействия называются регулярными снизу, если существует положительно убывающая ограниченная функция на $[0, \infty)$ такая, что

$$\Phi(x) \geqslant -\varphi(|x|)$$

и

$$\int_0^\infty dr\, r^{\nu-1}\varphi(r) < +\infty$$

для всех $x \in \mathbb{R}^\nu$.

Условие регулярности снизу накладывает ограничение на закон убывания лишь отрицательной части потенциала взаимодействия и в этом смысле оно слабее условия регулярности. Так, напр., положительно неубывающий потенциал регулярен снизу, но не является Р. п. в.

Р. п. в. используются в различных задачах статистич. механики при доказательстве существования *термодинамического предела* для функций распределения и термодинамич. функций (напр., давления).

Лит. см. при ст. *Устойчивый потенциал взаимодействия.*

П. В. Малышев.

РЕДЖЕ ПОЛЮСОВ МЕТОД, метод комплексных угловых моментов, в квантовой механике и в квантовой теории поля – метод описания и исследования рассеяния элементарных частиц, основанный на формальном аналитическом продолжении парциальных амплитуд из области физических значений момента количества движения $M = \hbar J$, $J = 0, 1, 2, \ldots$, в область комплексных значений J. Р. п. м. был введен Т. Редже (T. Regge) при изучении аналитич. свойств квантовомеханич. амплитуды рассеяния. Математич. исследования процесса рассеяния показали, что резонансы и связанные состояния в амплитуде рассеяния появляются сериями, каждую из к-рых характеризует нек-рая функциональная зависимость между моментом J и квадратом массы (в энергетич. единицах) t: $J = \alpha(t)$. При этом резонансы данной серии возникают только при тех массах, для к-рых функция $\alpha(t)$ равна целому неотрицательному числу (0, 1, 2, ...), выступающему как *спин* резонанса. Эта функциональная зависимость была названа траекторией полюса Редже вследствие того, что в парциальной амплитуде рассеяния это явление описывается слагаемыми, имеющими вид полюса:

$$\beta(t)\frac{1}{J-\alpha(t)}, \qquad (1)$$

где $\beta(t)$ – вычет полюса Редже. В области значений t, где $\alpha(t)$ действительна, целочисленные значения $\alpha(t)$ соответствуют стабильным связанным состояниям. При бо́льших значениях t, превышающих границу сплошного спектра в задаче рассеяния (кинетич. энергия частицы $\mathcal{E}_{\text{кин}} > 0$), функция $\alpha(t)$ становится комплексной:

$$\alpha(t) = \mathrm{Re}\,\alpha(t) + i\,\mathrm{Im}\,\alpha(t).$$

В этом случае формула (1) приобретает вид брейт-вигнеровского резонанса, причем $\mathrm{Re}\,\alpha(t)$ продолжает определять положение теперь уже резонансного уровня, а $\mathrm{Im}\,\alpha(t)$ ока-

зывается пропорциональной полной ширине уровня Г, то есть определяет время жизни резонанса. Эта же функция $\alpha(t)$ определяет и асимптотику продолжения амплитуды рассеяния в область больших нефизич. значений квадрата переданного 4-мерного импульса (4-импульса) s (при фиксированном значении квадрата энергии t):

$$f(t, s) \sim \beta(t)(-s)^{\alpha(t)}. \qquad (2)$$

В квантовой теории поля Р. п. м. не имеет строгого теоретич. обоснования и используется как феноменологич. схема. В силу специфич. свойства квантовой теории поля — *перекрестной симметрии* Р. п. м. приобретает более глубокое физич. содержание. Если амплитуду процесса $a + \tilde{c} \to \tilde{b} + d$ (рис. 1, *а*), зависящую от квадрата полной энергии в систе-

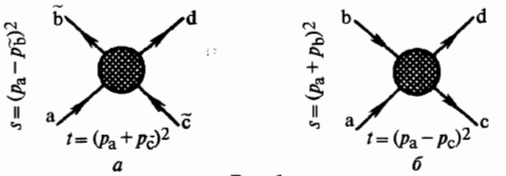


Рис. 1.

ме центра инерции частиц a и $\tilde{c}$ $t=(p_a+p_{\tilde{c}})^2$ и квадрата передачи 4-импульса $s=(p_a-p_{\tilde{b}})^2$, аналитически продолжить в область нефизич. больших значений s, то она описывает асимптотику перекрестного процесса в s-канале, то есть $a+b\to c+d$ с квадратом энергии в системе центра инерции $s=(p_a+p_b)^2$ и квадратом передачи 4-импульса $t=(p_a-p_c)^2$ (рис. 1, *б*). Отсюда следует, что в области больших энергий ($s \gg 1$ ГэВ^2) дифференциальное сечение:

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim |\beta(t)|^2 s^{2\alpha(t)-2}, \qquad (3)$$

где $\alpha(t)$ — продолжение траектории Редже в физич. область процесса $a+b\to c+d$ (то есть в область отрицательных квадратов масс t). Графически это изображается так, как будто частицы, рассеиваясь, обмениваются некой квазичастицей — так наз. р е д ж е о н о м (R), спин к-рой зависит от передачи квадрата импульса (рис. 2).

Если частицы a и c обладают изотопич. спином (I), странностью (S), барионным зарядом (B) и т. д., то возможны несколько траекторий Редже, также различающихся этими квантовыми числами. Асимптотич. поведение сече-

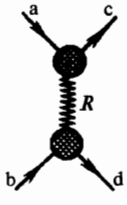


Рис. 2.

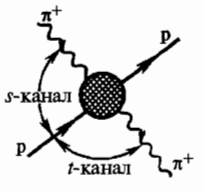


Рис. 3.

ния процесса определяется передачей квантовых чисел в t-канале (то есть квантовых чисел в системе $a\tilde{c}$) соответствующих самой верхней при $t=0$ («ведущей») траектории. Напр., процесс π^+ р-рассеяния назад:

$$\pi^+ + p \to p + \pi^+$$

(рис. 3), может идти как с передачей изотопич. спина $\Delta I = 3/2$, так и с $\Delta I = 1/2$, так как в перекрестном t-канале в системе π^- р существуют барионные резонансы с $I=3/2$ (Δ-резонансы) и с $I=1/2$ (N-резонансы). Однако из опыта известно, что Δ-траектория лежит выше N-траектории (рис. 4), поэтому асимптотика процесса будет определяться именно траекторией Δ. Асимптотика же процесса перезарядки:

$$\pi^- + p \to \pi^0 + p,$$

к-рый идет с $\Delta I = 1$, определяется обменом ρ-мезонной траекторией [рис. 4; там же показано, насколько хорошо «сшивается» траектория в области резонансов ($t>0$) и в области рассеяния ($t<0$)]. Экспериментальные точки в области $t<0$ получены в результате обработки по формуле (3) данных по перезарядке.

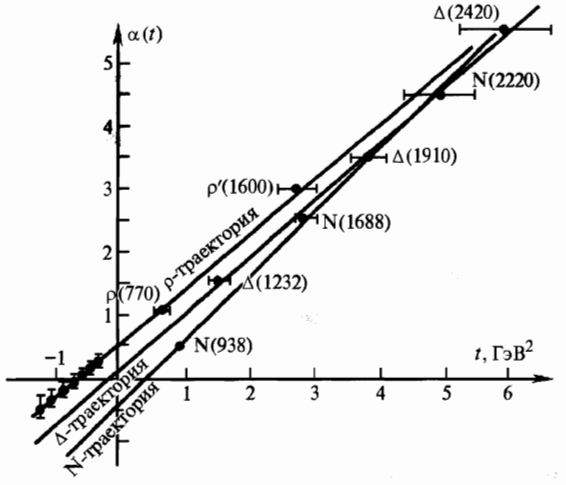


Рис. 4.

Р. п. м. позволяет разбить все процессы с небольшой передачей импульса на несколько классов, отличающихся разной передачей квантовых чисел и, следовательно, разной асимптотикой.

а) Процессы с обменом квантовыми числами вакуума ($\Delta I=0$, $\Delta B=0$ и т. д.) или с обменом так наз. особенностью Померанчука (к-рая не связана с какими-либо резонансами и, в отличие от других траекторий, не является полюсом; вопрос о ее природе нельзя считать окончательно решенным). Эти процессы характеризуются постоянными (точнее, слабо растущими) сечениями. Примерами являются все процессы упругого рассеяния. Этой же особенностью в соответствии с *оптической теоремой* ($\sigma_{полн} \sim \mathrm{Im} f(s, t=0)/s$) определяется и поведение полных сечений.

б) Процессы с обменом мезонными траекториями (ρ, ω, K*, π, η, K и др.). Сечения этих процессов с разной скоростью падают с ростом энергии в зависимости от того, какая из траекторий оказывается ведущей. К таким процессам относится рассмотренный выше процесс перезарядки.

в) Процессы с обменом барионными траекториями (напр., Δ, N, Λ, Σ). Сечения таких процессов также падают с ростом энергии.

г) Процессы с «экзотическим» обменом квантовыми числами (напр., $\Delta B=2$ или $\Delta I=2$), то есть обменом такими квантовыми числами, к-рые не могут реализоваться в системе из кварка и антикварка или из трех кварков (напр., $p+\tilde{p}\to\tilde{p}+p$). Сечения их очень быстро падают с ростом энергии. Другое важное предсказание Р. п. м.— сужение дифракционного пика. Экспериментально известно, что сечение квазиупругих процессов $a+b\to c+d$ имеет резкий пик в области малых квадратов передач 4-импульса, $|t|<0{,}1$ (ГэВ/c)^2 (дифракционный пик) и быстро падает с ростом $|t|$. Это падение обычно аппроксимируют экспоненциальной зависимостью:

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx e^{B(t)} f(s), \qquad (4)$$

а величину B называют н а к л о н о м дифракционного конуса. Если учесть, что в области малых t

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha' t,$$

где α_0 – высота траектории при $t=0$, а α' – тангенс угла ее наклона к оси t (это приближение оправдано, так как траектории Редже, как видно из рис. 4, почти прямолинейны), то формулу (3) можно привести к виду (4), причем величина B с увеличением энергии будет логарифмически расти:

$$B(s) = B_0 + 2\alpha' \ln s,$$

то есть рассеянные частицы с ростом энергии сосредоточиваются во все более узкой области передач импульса, так, как будто эффективный радиус r сталкивающихся частиц растет:

$$r^2 = r_0^2 + 2\alpha' \ln s$$

(B_0 и r_0 – величина наклона и радиус при $s=1$ ГэВ^2).

Р. п. м. нашел широкое применение и в описании множественных процессов. В частности, в рамках этого метода естественно описываются такие явления, как скейлинг Фейнмана (см. *Масштабная инвариантность*), корреляция двух вторичных частиц. Одна из загадок физики элементарных частиц – наблюдаемая в эксперименте прямолинейность всех траекторий Редже и приблизительно одинаковые их наклоны.

Лит.: [1] Ширков Д. В., «Успехи физич. наук», 1970, т. 102, в. 1; [2] Коллинз П. Д. Б., Сквайрс Э. Дж., Полюса Редже в физике частиц, пер. с англ., М., 1971. *А. В. Ефремов, Д. В. Ширков.*

РЕДЖЕ ПОЛЮСЫ в потенциальном рассеянии – полюсы функции $S(\lambda, k)$, являющейся аналитическим продолжением чисел $S_l(k)$ – парциальных матриц рассеяния при фиксированной энергии $E=k^2$ – в плоскость комплексного углового момента $\lambda = l + \frac{1}{2}$. Впервые Р. п. в квантовой теории рассеяния исследованы Т. Редже [1] в рамках метода *Ватсона преобразования*. Кривые, описываемые Р. п. на плоскости комплексного углового момента при изменении энергии, называются траекториями Редже. При отрицательных энергиях $k^2<0$ Р. п. являются простыми и лежат на действительной оси l. При положительных $k^2>0$ траектории Редже, напротив, никогда не пересекают действительную ось.

Лит.: [1] Regge T., «Nuovo cimento», 1959, v. 14, p. 951–76; [2] Newton R., The complex j-plane, N. Y.– Amst., 1964; [3] Ньютон Р., Теория рассеяния волн и частиц, пер. с англ., М., 1969. *Ю. Б. Мельников.*

РЕДЖЕОН – см. *Редже полюсов метод.*

РЕЕ – ШЛИДЕРА ТЕОРЕМА – см. *Алгебраический подход* в квантовой теории поля.

РЕЗЕРФОРДА ФОРМУЛА – формула для эффективного сечения рассеяния нерелятивистских заряженных точечных частиц, взаимодействующих по закону Кулона; получена Э. Резерфордом (E. Rutherford, 1911). В системе центра инерции сталкивающихся частиц Р. ф. имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}, \qquad (*)$$

где $d\sigma/d\Omega$ – сечение рассеяния в единичный телесный угол, ϑ – угол рассеяния, $m = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ – приведенная масса, m_1, m_2 – массы сталкивающихся частиц, v – их относительная скорость, $Z_1 e$, $Z_2 e$ – электрич. заряды частиц (e – элементарный электрич. заряд). Р. ф. справедлива как в классической, так и в квантовой теориях. Формула (*) была использована Э. Резерфордом при интерпретации опытов по рассеянию α-частиц тонкими металлич. пластинками на большие углы ($\vartheta > 90°$). В результате анализа опытных данных он пришел к выводу, что почти вся масса атома сконцентрирована в малом положительно заряженном ядре. Этим открытием были заложены основы современных представлений о строении атомов. *С. М. Биленький.*

РЕЗОЛЬВЕНТА – см. *Грина функция, Интегральное уравнение.*

РЕЗОЛЬВЕНТА уравнения Лиувилля – оператор, являющийся преобразованием Лапласа *пропагатора* уравнения Лиувилля. По определению, оператор Р. уравнения Лиувилля $\hat{\mathcal{R}}(z)$, $z\in\mathbb{C}$, задает временную эволюцию вектора распределения

$$\vec{f}(t) = (2\pi)^{-1}\int_C dz\, e^{-izt}\,\hat{\mathcal{R}}(z)\,\vec{f}(0),$$

где C – контур в комплексной плоскости z, образованный прямой, проходящей параллельно действительной оси выше всех сингулярностей функции $\hat{\mathcal{R}}(z)$. Р. уравнения Лиувилля и пропагатор $\hat{U}(t)$ связаны соотношением

$$\hat{U}(t) = (2\pi)^{-1}\int_C dz\, e^{-izt}\,\hat{\mathcal{R}}(z).$$

Р. уравнения Лиувилля формально можно определить в виде $\hat{\mathcal{R}}(z) = (-\hat{\mathcal{L}} - iz)^{-1}$, где $\hat{\mathcal{L}}$ – оператор Лиувилля.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 2, М., 1978; [2] Prigogine I., George C., Henin F., «Physica», 1969, v. 45, p. 418. *Д. П. Санкович.*

РЕЗОНАНС – явление увеличения амплитуды *вынужденных колебаний* при приближении частоты внешнего воздействия к одной из частот *собственных колебаний* динамической системы. Явление Р. имеет наиболее простой характер в линейной динамич. системе. Дифференциальное уравнение движения линейной системы с одной степенью свободы в среде с вязким трением при гармонич. воздействии имеет вид:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H\sin(pt+\delta),$$

где q – обобщенная координата; a, b, c – постоянные параметры, характеризующие систему; H, p, δ – соответственно амплитуда, частота, начальная фаза внешнего воздействия. Установившиеся вынужденные колебания происходят по гармонич. закону с частотой p и амплитудой

$$D = \frac{H}{a\sqrt{(k^2-p^2)^2 + \frac{b^2}{a^2}p^2}},$$

где $k=\sqrt{c/a}$ – частота собственных колебаний при отсутствии рассеивания энергии ($b=0$). Амплитуда D имеет максимальное значение при

$$\frac{p}{k} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{2ac}}$$

и при малом рассеивании энергии близка к ее значению при $p=k$. Принято называть резонансом тот случай, когда $p=k$. Если $b=0$, то при $p=k$ амплитуда вынужденных колебаний возрастает пропорционально времени.

Если линейная система имеет n степеней свободы, то Р. наступает при совпадении частоты внешней силы с одной из собственных частот системы. При негармонич. воздействии Р. может иметь место лишь при совпадении частот его гармонич. спектра с частотами собственных колебаний.

См. также *Малые знаменатели, Обмотка тора, Осциллятор, Резонансное соотношение.*

Лит.: [1] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, М.– Л., 1951. *Н. В. Бутенин.*

РЕЗОНАНСНАЯ ЗОНА – см. *КАМ-теория.*

РЕЗОНАНСНОЕ СООТНОШЕНИЕ, резонанс,– 1) для системы с быстро вращающимися фазами – равенство, выражающее целочисленную линейную зависимость частот: $(\boldsymbol{k}, \omega) = 0$, где $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ – целочисленный ненулевой вектор с несократимыми компонентами, $\omega = \omega(I) = (\omega_1(I), \ldots, \omega_m(I))$ – вектор частот невозмущенного движения, $(\boldsymbol{k}, \omega) \equiv k_1\omega_1 + \ldots + k_m\omega_m$. Число $|\boldsymbol{k}| = |k_1| + \ldots + |k_m|$ называется порядком Р.с. (или порядком резонанса). Гармоники

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[il(\boldsymbol{k},\varphi)],\quad l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\quad \varphi \bmod 2\pi \in T^m$$

называются резонансными гармониками данного Р. с. Поверхность в пространстве $\mathbb{R}^n$ медленных переменных

I, определяемую Р.с. $(k, \omega(I)) = 0$, называется **резонансной поверхностью**. При $m \geqslant 2$ объединение резонансных поверхностей для всех Р.с. всюду плотно в пространстве медленных переменных, если отображение $\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — общего положения.

2) Для автономной системы дифференциальных уравнений в окрестности ее положения равновесия Р.с.— равенство $\lambda_s = (k, \lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ — набор собственных чисел этого равновесия, $k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m$, $k_i \geqslant 0$, $\sum k_i \geqslant 2$. Число $|k| = k_1 + ... + k_m$ — порядок Р.с.

3) Для системы дифференциальных уравнений в окрестности ее периодич. решения (в частности, для периодич. по времени системы в окрестности ее равновесия) Р.с.— равенство $\mu_s = \mu^k$, где $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$ — набор мультипликаторов периодич. решения, $k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m$, $k_i \geqslant 0$, $\sum k_i \geqslant 2$, $\mu^k \equiv \mu_1^{k_1} ... \mu_m^{k_m}$. Число $|k| = k_1 + ... + k_m$ — порядок Р.с. Точно так же определяется Р.с. для отображения пространства в себя в окрестности неподвижной точки.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978.

А. И. Нейштадт.

РЕЗОНАНСНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ — см. *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

РЕЗОНАНСНЫЙ ТОР — см. *КАМ-теория.*

РЕЙНОЛЬДСА КРИТЕРИЙ — критерий механического подобия геометрически подобных течений жидкости, заключающийся в равенстве у них отношений сил инерции к силам вязкости:

$$\mathrm{Re} = \nu^{-1} LU,$$

где L и U — масштабы длины и скорости, а ν — кинематический коэффициент вязкости. При

$$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр} \sim 3000$$

в результате гидродинамич. неустойчивости образуется турбулентность.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1, М., 1965. *В. П. Красицкий.*

РЕЙНОЛЬДСА НАПРЯЖЕНИЯ — дополнительные напряжения

$$\tau_{jl} = -\rho \langle u_j' u_l' \rangle,$$

возникающие при осреднении уравнений гидродинамики турбулентного течения из-за наличия в них квадратичных по скоростям слагаемых. Здесь u_j' — скорости турбулентной флуктуации, угловые скобки — осреднение, ρ — плотность. Добавляясь к основным неизвестным $\langle u_j' \rangle$ и $\langle p \rangle$, Р. н. создают свойственную теории турбулентности незамкнутость осредненных уравнений. *А. С. Монин.*

РЕЙНОЛЬДСА УРАВНЕНИЯ — осредненные уравнения гидродинамики турбулентного течения (в простейшем случае — несжимаемой жидкости), имеющие вид:

$$\frac{\partial \rho \langle u_j \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho \langle u_j \rangle \langle u_\alpha \rangle + \langle p \rangle \delta_{j\alpha} - \langle \sigma_{j\alpha} \rangle - \tau_{j\alpha}),$$

где угловые скобки $\langle\ \rangle$ — осреднение, $\sigma_{j\alpha}$ — вязкие напряжения, $\tau_{j\alpha}$ — дополнительные *Рейнольдса напряжения*, делающие эти уравнения незамкнутыми. Р. у. упрощаются для СГО-течений (статистически-стационарных и горизонтально-однородных), но все же остаются незамкнутыми.

А. С. Монин.

РЕЙНОЛЬДСА ЧИСЛО — один из критериев подобия для течений вязких жидкостей и газов, характеризующий соотношение между инерционными силами и силами вязкости:

$$\mathrm{Re} = \rho v l / \mu,$$

где ρ — плотность, μ — динамический коэффициент вязкости жидкости или газа, v — характерная скорость потока, l — характерный линейный размер.

От Р. ч. зависит также режим течения жидкости, характеризуемый так наз. **критическим** Р.ч. $\mathrm{Re}_{кр}$. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ возможно лишь ламинарное течение жидкости, а при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ течение может стать турбулентным.

Р. ч. названо по имени О. Рейнольдса (O. Reynolds).

А. С. Монин.

РЕЙССНЕРА — НОРДСТРЕМА ЧЕРНАЯ ДЫРА — см. *Керра — Ньюмена черная дыра.*

РЕКОНСТРУКЦИИ ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая соответствие между сильным и слабым (статистическим) описанием квантовых стохастических систем, определяемым хронологически упорядоченными корреляционными формами $\varkappa^{t_1, ..., t_n}_{a_1, ..., a_n}$ с перечисляемыми ниже свойствами. Пусть $\{\varkappa^\tau\}$ — индексированное конечными цепями $\tau = \{t_1 < ... < t_n\}$ семейство полиэрмитовых нормированных отображений $\varkappa^\tau: \mathfrak{A}^n \to \mathbb{R}^+$ над C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$, $\varkappa^\tau_{1, ..., 1} = 1$,— удовлетворяющих условиям согласованности $\varkappa^{t_1, ..., t_n}_{a_1, ..., a_n} = \varkappa^{t_1', ..., t_n'}_{a_1', ..., a_n'}$ при $\tau \leqslant \tau' = \{t_1^1 < ... < t_{n'}'\}$, $a_i' = a_i$, если $t_i' \in \tau$ и $a_i' = 1$ при $t_i' \notin \tau$. Пусть также корреляционные ядра $\varkappa^\tau(b_1^*, ..., b_n^*; b_n', ..., b_1')$, $b_i, b_i' \in \mathfrak{A}$, определяемые поляризацией эрмитовых форм $\varkappa^\tau_{\underline{a}} = \varkappa^\tau(a^*, \underline{a})$, являются положительно определенными:

$$\sum_{j, j'=1}^N \bar{c}_j \varkappa^\tau (\underline{b}_j^*; b_{j'}) c_{j'} \geqslant 0, \text{ для всех } \tau,\ N = 1, 2, ...,$$

где $c_j \in \mathbb{C}$, $\underline{b}_j = (b_1, ..., b_n)_j \in \mathfrak{A}^k$, $j = 1, ..., N$ — произвольные конечные последовательности, и также удовлетворяют условию факторизуемости по последнему аргументу:

$$\varkappa^\tau(b_1^*, ..., b_{nj}^* a b_n', b_{n-1}', ..., b_1') =$$

$$= \varkappa^\tau(b_1^*, ..., b_{n-1}^*, b_n^* a^*, b_n', ..., b_1')$$

для любых $b_i \in \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{A}$ и $\tau = \{t_1 < ... < t_n\}$. Тогда существует квантовый случайный процесс $\{\pi_t\}$ над $\mathfrak{A}$ на нек-ром гильбертовом пространстве H с вектором состояния $\xi \in H$, для к-рого $\varkappa^\tau_{\underline{a}} = \|\pi_{t_n}(a_k) ... \pi_{t_1}(a_1) \xi\|^2$. Такой процесс определяется с точностью до унитарной эквивалентности однозначно как H-процесс $\pi_t(1) = E_t^\xi$ относительно неубывающего семейства $\{E_1^\xi\}$ ортопроекторов на подпространства $\mathscr{E}_t^\xi$, порождаемые векторами

$$\xi^\tau_{\underline{a}} = \pi_{t_n}(a_n) ... \pi_{t_1}(a_1) \xi,$$

при $\underline{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{A}^n$, $\tau = \{t_1 < ... < t_n\} \leqslant t$, $n = 1, 2, ...$

Лит.: [1] Белавкин В. П., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 2, с. 137–38; [2] его же, «Теоретич. и математич. физика», 1985, т. 62, № 3, с. 409–31; [3] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974. *В. П. Белавкин.*

РЕКОНСТРУКЦИИ ТЕОРЕМЫ в евклидовой квантовой теории поля — теоремы, гарантирующие существование *Вайтмана функций*, соответствующих заданной системе *Швингера функций*. К. Остервальдер и Р. Шрадер [2] сформулировали систему аксиом для функций Швингера, эквивалентную *Вайтмана системе аксиом* (эта система мало пригодна для приложений, поскольку одну из аксиом практически невозможно проверить). Они же предложили заменить эту аксиому на условие того, что порядок сингулярности и роста n-точечной функции Швингера растет по n не более, чем линейно, а постоянная, входящая в оценку, растет не более, чем степень $n!$. При таком ограничении удалось доказать Р. т. Однако неясно, эквивалентна ли новая система аксиом для функций Швингера системе аксиом для функций Вайтмана. Е. П. Осипов [3] сформулировал

систему аксиом для функций Швингера, эквивалентную системе аксиом для функций Вайтмана, имеющих экспоненциальный рост в пространстве импульсов.

Лит.: [1] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977; [2] Osterwalder K., Schrader R., «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 31, № 2, p. 83–112; 1975, v. 42, № 3, p. 281–305; [3] Osipov E. P., «Lett. Math. Phys.», 1989, v. 17, № 2, p. 165–72. *Ю. М. Зиновьев.*

РЕКУРРЕНТНОСТЬ – свойство траектории *динамической системы*, отражающее регулярную повторяемость движения реальной системы, математической моделью которой является динамическая система. Траектория динамич. системы рекуррентна, если с любой наперед заданной степенью точности может быть аппроксимирована конечным своим куском – то есть, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что ε-окрестность каждого отрезка траектории временной длины $T(\varepsilon)$ содержит всю эту траекторию. Очевидно, периодич. траектория рекуррентна. Непериодич. рекуррентная траектория плотна в *минимальном множестве* – замкнутом, состоящем из континуального множества рекуррентных же траекторий, подмножестве фазового пространства. Важными примерами минимальных множеств являются: в гамильтоновых системах – n-мерные торы с условно-периодич. движениями, обладающими n несоизмеримыми частотами (см. [2]), а также канторотори – инвариантные множества, локально гомеоморфные для динамич. систем с непрерывным временем прямому произведению канторова совершенного множества на отрезок (см. [3]); в диссипативных динамич. системах – полуаттракторы Фейгенбаума (см. [4]).

Лит.: [1] Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З., в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., 1985; [2] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989; [3] Mather J., «Comment. Math. Helvetici», 1985, v. 60, p. 508–57; [4] Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 3, с. 3–37. *В. С. Афраймович.*

РЕКУРСИОННЫЙ ОПЕРАТОР – см. *Обратной задачи рассеяния метод.*

РЕЛАКСАЦИОННОЕ КОЛЕБАНИЕ – периодический процесс, при котором медленное, плавное изменение состояния объекта в течение конечного промежутка времени чередуется с быстрым, скачкообразным изменением его состояния за бесконечно малое время. Такие колебательные процессы наблюдаются во многих реальных механических, радиотехнических, биологических и других объектах.

Математич. моделью, описывающей Р. к., являются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных:

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y),\ \dot{y} = g(x, y),\ \dot{} = d/dt, \qquad (1)$$

$$x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^m,\ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Периодическое по времени t решение такой системы и называется релаксационным колебанием. Классич. примером системы с одной степенью свободы, имеющей Р. к., служит *Ван дер Поля уравнение*

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \lambda(1 - x^2)\frac{dx}{d\tau} + x = 0 \qquad (2)$$

при больших положительных значениях параметра λ (с этой точки зрения уже значение $\lambda = 10$ можно считать большим). Если положить

$$y = \int_0^x (x^2 - 1)\,dx + \frac{1}{\lambda}\frac{dx}{d\tau}, \quad t = \frac{\tau}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2},$$

то уравнение (2) приводится к системе типа (1):

$$\varepsilon \dot{x} = y - \frac{x^3}{3} + x, \quad \dot{y} = -x.$$

Вопрос о существовании и числе Р. к. системы (1) решается в терминах вырожденной системы:

$$f(x, y) = 0, \quad \dot{y} = g(x, y). \qquad (3)$$

Траектории системы (3) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ естественно трактовать как пределы фазовых траекторий невырожденной системы (1) при $\varepsilon \to 0$. В частности, траектория Р. к. системы (1) при $\varepsilon \to 0$ стремится к замкнутой траектории системы (3), состоящей из чередующихся участков двух типов: участков, проходимых фазовой точкой системы (3) за конечное время (каждый из них лежит на поверхности $f(x, y) = 0$), и участков, проходимых фазовой точкой системы (3) мгновенно (каждый из них начинается в точке срыва, то есть в точке, где

$$f(x, y) = 0,\ \det \| df/dx \| = 0,$$

лежит в плоскости, параллельной $\mathbb{R}^k$, и кончается на поверхности $f(x, y) = 0$). Решение системы (3), соответствующее такой замкнутой траектории, называется разрывным периодическим решением, а потому Р. к. системы (1) часто называют периодическим решением, близким к разрывному, или даже просто разрывным колебанием. (Система (3) может иметь замкнутую траекторию, целиком лежащую на поверхности $f(x, y) = 0$ и не проходящую через точки срыва. В таком случае система (1) имеет близкую к ней замкнутую траекторию, однако соответствующее ей периодич. решение системы (1) не будет Р. к.)

Важной задачей является асимптотич. (при $\varepsilon \to 0$) вычисление фазовой траектории Р. к. системы (1), а также получение асимптотич. формул для характеристик этого колебания – его периода, амплитуды и т. д. В случае системы (1) 2-го порядка (то есть при $k = m = 1$) с точками срыва общего положения проблема асимптотич. вычисления Р. к. решена полностью. В частности, выяснена структура асимптотич. разложения при $\varepsilon \to 0$ периода Р. к.:

$$T = T_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\chi(n-2)} K_{n,\nu} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon},$$

где

$$\chi(n) = \frac{n}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{tg} \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

а $K_{n,\nu}$ – коэффициенты, эффективно вычисляемые непосредственно по функциям $f(x, y)$ и $g(x, y)$.

Изучался также вопрос о периодич. решениях типа Р. к. неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [2] Ланда П. С., Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы, М., 1980; [3] Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С., Математическое моделирование в биофизике, М., 1975. *Н. Х. Розов.*

РЕЛАКСАЦИЯ – см. *Статистической механики математические задачи.*

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ – инвариантность относительно собственных неоднородных преобразований Лоренца. Основная симметрия специальной теории относительности, означающая равноправие инерциальных систем отсчета. Ею обладают уравнения, описывающие физич. процессы в плоском пространстве-времени Минковского. В кривом пространстве, то есть при учете гравитационного взаимодействия, Р. и. приобретает локальный характер. Инвариантность относительно несобственных лоренцевых операций пространственного отражения и временной инверсии может нарушаться слабым взаимодействием. В квантовой теории поля принцип Р. и. выражается первой и пятой аксиомами из *Вайтмана системы аксиом.*

Лит.: [1] Вейнберг С., Гравитация и космология, пер. с англ., М., 1975; [2] Боголюбов Н. Н. и др., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987. *М. А. Соловьев.*

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КОВАРИАНТНОСТЬ – см. *Рассеяния матрица.*

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МАССА – см. *Релятивистская механика.*

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА классическая – раздел теоретической физики, рассматривающий законы движения тел (частиц) при скоростях движения, сравнимых со скоростью света в вакууме $c = 29979250 \cdot 10^{10}$ см/сек. При

таких скоростях (их принято называть релятивистскими) зависимость энергии E тела массы m от его скорости v описывается уже не формулой классич. (ньютоновой) механики:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2},$$

а релятивистской механики:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (1)$$

Масса m, входящая в эту формулу, называется массой покоя тела. При скоростях, много меньших c, формула (1) приобретает вид:

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \qquad (2)$$

Второй член справа совпадает с $E_{\text{кин}}$ (что свидетельствует, в частности, о соответствии Р. м. с обычной), а первый член показывает, что покоящееся тело обладает энергией $E = mc^2$, называемой энергией покоя. В ядерных реакциях и процессах превращения элементарных частиц энергия покоя может переходить в кинетич. энергию частиц. Из формулы (1) вытекает, что энергия тел с ненулевой массой стремится к бесконечности при $v \to c$. Если $m \neq 0$, то скорость тела всегда меньше c. Частицы с $m = 0$ (фотоны и нейтрино) всегда движутся со скоростью света. Иногда говорят, что при релятивистских скоростях масса тела начинает зависеть от его скорости, и величину

$$m_{\text{дв}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = M$$

называют массой движения, или релятивистской массой. Из формулы (1) следует, что

$$E = m_{\text{дв}}c^2.$$

Скорость света в вакууме в Р. м. является предельной скоростью, то есть передача любых взаимодействий и сигналов из одной точки в другую происходит со скоростью, не превышающей скорость света. Существование предельной скорости несовместимо с представлениями классич. механики и потому вызывает необходимость глубокой перестройки классич. пространственно-временных представлений.

Механич. импульс $\boldsymbol{p}$ тела (частицы) определяется его релятивистской массой M и скоростью $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{p} = M\boldsymbol{v};$$

при этом набор $(M, \boldsymbol{p})$ есть 4-мерный вектор, норма к-рого равна $M^2 - |\boldsymbol{p}|^2 = m^2$ и к-рый направлен в будущее $(M > 0)$. Если нет внешнего поля, то частица движется равномерно и прямолинейно: $\boldsymbol{v}$ есть величина постоянная. Во внешнем поле $\boldsymbol{F}$ траектория частицы описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

(основное уравнение релятивистской механики частицы), откуда следуют соотношения

$$\frac{dM}{dt} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}), \quad \frac{d}{dt}[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}] = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}],$$

где $\boldsymbol{r}$ – пространственная часть 4-вектора, определяющего событие; они определяют зависимость от времени массы и момента количества движения.

В Р. м., так же как и в классич. механике, для замкнутой системы сохраняется импульс и энергия, а при *Лоренца преобразованиях* инвариантна величина

$$\frac{E^2}{c^2} - |\boldsymbol{p}|^2 = m^2c^2.$$

Итак, два ньютоновых понятия – импульс и энергия – существовавшие порознь, в Р. м. оказываются неразделимыми, а именно: компоненты импульса, умноженные на мнимую единицу i вместе с энергией, деленной на c, являются компонентами 4-вектора энергии-импульса $E + i\boldsymbol{p}$ в пространстве-времени Минковского.

Приведенные выше уравнения движения можно вывести в рамках *лагранжева формализма* или *гамильтонова формализма*.

А) Лагранжев формализм. В Р. м., в отличие от ньютоновой, время t не служит независимой переменной, оно теперь не более чем одна из координат, равноценная трем остальным. Физич. события происходят в четырехмерном мире, в к-ром не должно существовать предпочтительного направления. Уравнения, приводящие к такому привилегированному направлению, должны быть либо отброшены либо исправлены таким образом, чтобы в конечном счете они отразили надлежащую псевдоевклидову структуру физич. мира.

Существование функции Лагранжа L облегчает эту задачу. Если эта функция является лоренц-инвариантной, то есть скаляром четырехмерного мира, то полученные из этой функции уравнения будут корректными с релятивистской точки зрения. Если выбрать время t в качестве независимой переменной, то функция Лагранжа L в интеграле действия I будет иметь вид:

$$L = -c^2 m\sqrt{1 - v^2/c^2},$$
$$I = -c\int m\,ds, \quad ds^2 = c^2\,dt^2 - d\boldsymbol{r}^2.$$

Из общих принципов вариационного метода в механике известно, что «импульсы» механич. системы равны

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Таким образом, поправка к ньютонову определению оказывается небольшой для малых скоростей и приобретает решающее значение при скоростях, близких к скорости света c. Другой важной величиной является энергия E, определяемая при помощи функции Лагранжа, как

$$E = p_i q^i - L;$$

в рассматриваемом случае она имеет вид:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Б) Гамильтонов формализм. В пункте А) время t использовалось в качестве независимого переменного. Такой подход не в духе релятивизма, потому что время должно входить на равных правах по отношению к другим координатам. Это можно сделать, введя параметр τ и рассматривая координаты q^i в пространстве-времени как функции τ (как это обычно делается при изучении уравнений движения методом Гамильтона).

Здесь основной является уже не функция Лагранжа, а функция Гамильтона

$$H = \sum\nolimits_i p_i\dot{q}^i - L, \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{ds}\sqrt{\sum(q^i)^2} = \frac{dq^i}{d\tau}. \qquad (3)$$

В рассматриваемой задаче

$$L = -mc\sqrt{\sum(\dot{q}^i)^2},$$

так что

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} = -mc\frac{dq}{ds}, \text{ и } H = \sum p_i\dot{q}^i - L = 0. \qquad (4)$$

Образовавшаяся ситуация не должна смущать, хотя в L входит H из (3), а H обращается в нуль, так как роль функции Гамильтона берет на себя тождество, к-рое должно существовать между p_i. Действительно, из (4) видно, что $\dot{q}_i$ нельзя выразить через p_i ввиду тождества

$$\sum(p_i)^2 - m^2c^2 = 0, \qquad (5)$$

к-рое следует рассматривать как дополнительное условие вариационной задачи, и надлежит минимизировать интеграл

$$A = \int\sum p_i\dot{q}^i\,d\tau$$

при условии (5). Это означает, что результирующий лагранжиан L становится

$$L' = \sum p_i \dot{q}^i - \lambda\left(\sum (p_i)^2 - m^2c^2\right);$$

появление неопределенного множителя λ связано со свободой выбора параметра τ.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [2] Логунов А. А., Лекции по теории относительности, 2 изд., М., 1984; [3] Тонелла М.-А., Основы теории относительности и электромагнетизма, пер. с франц., М., 1962; [4] Ланцош К., Вариационные принципы механики, пер. с англ., М., 1965; [5] Утияма Рёю, Теория относительности, пер. с япон., М., 1979.

М. И. Войцеховский.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СКОРОСТЬ – скорость движения, сравнимая со скоростью света в вакууме. См. *Релятивистская механика.*

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ – вытекающие из четырехмерности пространственно-временные кинематические следствия (сокращение длины, замедление времени, относительность одновременности), с другой стороны – динамические следствия (связь массы и энергии и т. п.). Пусть пространственно-временные координаты двух концов расположенного вдоль оси z стержня будут: z_1, t_1, z_2, t_2 в неподвижной системе отсчета Σ и $\tilde{z}_1$, $\tilde{t}_1$, $\tilde{z}_2$, $\tilde{t}_2$ в подвижной системе отсчета $\tilde{\Sigma}$. Тогда

$$\Delta x = \Delta y = 0, \quad \Delta z = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{1а}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{1б}$$

Измерение становится однозначным только при условии точного определения его проведения. В данном случае необходимо указать, что именно понимается под длиной стержня.

А) Пусть в системе $\tilde{\Sigma}$ стержень покоится, и длина его равна $l_0 = \Delta\tilde{z}$. В системе Σ, в к-рой стержень движется со скоростью u, измерение должно быть проведено так, чтобы концы стержня наблюдались одновременно, то есть $\Delta t = 0$. Если обозначить длину стержня в системе Σ через $l = \Delta z$, то из (1а) следует:

$$l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2},$$

длина стержня l, измеренная в системе отсчета, относительно к-рой он движется, оказывается меньше, чем его длина l_0 в системе, где он покоится (релятивистское сокращение длины).

Б) Можно предположить, что временной интервал также является величиной относительной. Пусть из неподвижной в системе Σ точки $z_1 = z_2$ посылаются сигналы с временным интервалом $\Delta t = T_0$. В соответствии с (1а) наблюдателю, находящемуся в движущейся системе, сигналы будут казаться приходящими из разных точек, расположенных на расстоянии $\Delta\tilde{z} = -\frac{u\Delta\tilde{t}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ друг от друга. Временной интервал $\Delta\tilde{t} = T$ между сигналами такого наблюдателя выражается [в соответствии с (1б)] формулой:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

из чего следует, что интервал T между сигналами наблюдателя, движущегося относительно источника сигнала, увеличивается (релятивистское замедление времени). Так, этот эффект дает естественное толкование появлению вблизи поверхности Земли мюонов, образующихся под действием космич. излучения в атмосфере на высоте 20–30 км. Достаточно подставить в последнюю формулу время жизни мюона, измеренное в системе, движущейся вместе с ним, и равное $T_0 = 2{,}2\cdot10^{-6}c$. Поскольку скорость движения мюона близка к скорости света в вакууме c, время жизни этой элементарной частицы, измеренное в системе отсчета земного наблюдателя, оказывается намного большим, так что мюоны вполне успевают пройти расстояние в 20–30 км.

С относительностью временных интервалов тесно связана относительность одновременности. Это означает, что события, к-рые в одной инерциальной системе отсчета являются одновременными, в другой такой системе, движущейся относительно первой, могут оказаться разделенными во времени; подробнее: пусть в точках z_1 и z_2 в системе Σ происходят одновременно события ($\Delta t = 0$), к-рые наблюдаются из движущейся системы $\tilde{\Sigma}$. Согласно (1б), для движущегося наблюдателя эти события разделены ненулевым интервалом

$$\Delta\tilde{t} = -\frac{u}{c^2\sqrt{1-u^2/c^2}}\Delta z.$$

Как выяснилось, ньютоновские «мировые часы» – не более чем иллюзия.

В) Хотя в теории относительности и утверждается относительность временных интервалов и одновременности, ею не допускается нарушение порядка событий, находящихся в причинно-следственной зависимости. Это связано со *световым конусом* в пространстве Минковского: световой конус ограничивает скорость распространения физич. воздействий скоростью света в вакууме. В причинно-следственной зависимости друг от друга могут состоять лишь такие события, к-рые разделены временным или изотропным интервалом, но никак не пространственным.

Г) Связь массы и энергии. Первый вклад в этот вопрос внес Ф. Хазенерль, открывший соотношение между массой и энергией электромагнитного излучения. На основании формул релятивистской механики А. Эйнштейн (A. Einstein) логич. путем вывел аналогичное соотношение между механич. массой и механич. энергией, так что в рамках теории относительности соотношение между массой и энергией

$$E = mc^2$$

носит универсальный характер, поскольку c как скорость света в вакууме является универсальной постоянной. Отношение между массой и энергией следует понимать не как возможность превращения массы в энергию или наоборот, а лишь как основание для количественного сопоставления этих величин. Неверным является и истолкование связи массы и энергии в том смысле, что энергия представляет собой «разновидность» массы, или масса – «разновидность» энергии. Масса и энергия – независимые по своей природе понятия, и ни то, ни другое не может играть подчиненную роль.

Естественно, что Р. э. начинают сказываться лишь тогда, когда скорости становятся близкими к скорости света, что видно из рассмотрения знаменателя в формуле, выражающей релятивистское правило сложения скоростей:

$$\tilde{v} = \frac{u+v}{1+uv/c^2};$$

эта формула находится в согласии с принципом, устанавливающим невозможность превышения скорости света. Иными словами, когда система отсчета Σ движется с почти световой скоростью относительно системы $\tilde{\Sigma}$, и в этой системе совершается движение также с почти световой скоростью, то скорость этого движения в системе $\tilde{\Sigma}$ не превышает скорости света, а лишь приближается к ней.

Лит.: [1] Логунов А. А., Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы, М., 1987; [2] Шмутцер Э., Теория относительности. Современное представление, пер. с нем., М., 1981.

М. И. Войцеховский.

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ЗАМЕДЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ – см. *Релятивистские эффекты.*

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРАВИЛО сложения скоростей – см. *Релятивистские эффекты.*

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ СОКРАЩЕНИЕ ДЛИНЫ – см. *Релятивистские эффекты.*

РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ АКСИОМА – см. *Аксиоматическая квантовая теория поля.*

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА – *группа* симметрии решения физической задачи относительно преобразований, изменяющих способ параметризации (или нормировки), фиксирующий это решение. Иначе, Р. г. есть группа преобразований репараметризации решения $f(x)$. Напр., если рассматривать это решение как функцию своего граничного значения f_1, заданного при нек-ром значении аргумента x_1: $f(x, x_1, f_1)$, то преобразование Р. г. есть преобразование перехода от параметризации данного решения f с помощью пары (x_1, f_1) к иной параметризации этого же самого решения, характеризуемой другой парой (x_2, f_2).

Термин «ренормализационная» обязан своим происхождением тому факту, что Р. г. была открыта в задачах квантовой теории поля, в к-рой преобразования Р. г. соответствуют переходу от одного способа перенормировки (иначе – ренормировки) к другому. Идеи и метод Р. г. распространились из квантовой теории поля на другие разделы теоретич. физики.

С математич. точки зрения Р. г. есть однопараметрич. группа Ли G непрерывных преобразований $R(t)$ дифференцируемого многообразия M с групповым законом композиции

$$R(t_1)R(t_2) = R(t_1 + t_2). \tag{1}$$

В простейшем случае эти преобразования действуют в пространстве пар действительных чисел (x, y), то есть $M = \mathbb{R}^2$, и имеют вид:

$$R(t)\colon \{x_1 \to x_2 = x_1 + t,\ g_1 \to g_2 = G(t, g_1)\}, \tag{2}$$

причем, согласно (1), функция $G(t, g)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$G(t_1,\ G(t_2, g)) = G(t_1 + t_2, g), \tag{3}$$

а также условию нормировки

$$G(0, g) = g, \tag{4}$$

отвечающему единичному (тождественному) преобразованию $R(0) = E$.

Инвариантом преобразования (2) является функция $f(x, g)$ (здесь и далее указана зависимость только от упомянутых параметров), для к-рой

$$f(x_2, g_2) = f(x_1, g_1),$$

то есть функция, удовлетворяющая уравнению

$$f(x + t,\ G(t, g)) = f(x, g) \tag{5}$$

Более сложной ситуации отвечает реализация представления Р. г., не остающегося неизменным при преобразовании (2), но приобретающего множитель, зависящий от параметров преобразования

$$F(x + t,\ G(t, g)) = z(t, g)F(x, g) \tag{6}$$

с условием нормировки $z(0, g) = 1$. Уравнение (6) может быть переписано также в виде

$$F(x + t,\ G(t, g)) = F(t,\ G(t, g))F(x, g) \tag{7}$$

с условием нормировки $F(0, g) = 1$.

Функциональные уравнения (5), (7) непосредственно обобщаются на многомерные многообразия $M = \mathbb{R}^{n+1}$. Преобразования Р. г. в этом случае по-прежнему линейны по первому аргументу и содержат n функций G^i:

$$R(t)\colon \{x_1 \to x_2 = x_1 + t,\ g_1^i \to g_2^i = G^i(t, \{g^i\}),\ i = 1, \ldots, n,$$

являющихся решением системы функциональных уравнений

$$G^i(t, \{G^n(t_2, \{g\})\}) = G^i(t_1 + t_2, \{g\}), \tag{3'}$$

обобщающих (3), (4), причем $\{g\} = g_1, \ldots, g_n$, а инварианты удовлетворяют уравнениям

$$F(x + t, \{G(t, \{g\})\}) = F(t, \{G(t, \{g\})\})F(x, \{g\}).$$

Естественным продолжением является распространение Р. г. на бесконечномерные многообразия M. Роль констант g^i здесь играет дифференцируемая функция на многообразии. С такой ситуацией сталкиваются в нек-рых задачах квантовой теории поля и статистич. механики.

В исторически первой квантовополевой реализации Р. г. роль параметра x играл $\ln\mu$, где μ есть параметр ренормировки или точка вычитания, а g является зарядом, характеризующим силу взаимодействия. Ренормализационногрупповая инвариантность вида (5), (6) здесь есть условие инвариантности относительно выбора параметра ренормировки. Свойством (5) обладают все наблюдаемые величины, а также нек-рые вспомогательные (инвариантный и эффективный заряды). Уравнениям типа (6), (7) подчиняются, напр., функции Грина.

Поскольку непрерывная группа Ли полностью характеризуется своим инфинитезимальным элементом, вместо функционального уравнения (5) достаточно рассмотреть дифференциальное уравнение

$$(\partial/\partial t + \beta(g)\partial/\partial g)f(t, g) = 0, \tag{8}$$

к-рое может быть получено из (5) в пределе бесконечно малого t (см. *Ренормализационная группа*; дифференциальные уравнения). При этом так наз. *бета-функция* $\beta(g)$, представляющая групповой генератор, определяется соотношением

$$\beta(g) = \left.\frac{\partial G(t, g)}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{9}$$

Аналогичная форма уравнения (7) имеет вид:

$$(\partial/\partial t + \beta(g)\partial/\partial g - \gamma(g))F(t, g) = 0, \tag{10}$$

где функция $\gamma(g)$, называемая *аномальной размерностью*, определяется условием

$$\gamma(g) = \left.\frac{\partial \ln z(t, g)}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{11}$$

В квантовой теории поля функцию $G(t, g)$ называют *эффективной константой связи* (эффективным зарядом), играющим наряду с инвариантным зарядом ключевую роль в решении дифференциальных уравнений Р. г. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению вида (8) или уравнению в форме Ли

$$\frac{\partial G(t, g)}{\partial t} = \beta(G(t, g)). \tag{12}$$

Обращение правой части уравнения (12) в нуль отвечает точкам стационарности или фиксированным точкам преобразования Р. г. Эффективные заряды в этих точках принимают фиксированные значения, определяемые из уравнений Р. г. В многозарядном случае существует несколько фиксированных точек: они бывают устойчивыми, неустойчивыми и седловыми. В зависимости от начальных данных решение попадает в область притяжения той или иной фиксированной точки. Как правило, фиксированные точки соответствуют определенным физич. особенностям задачи. Так, напр., в моделях статистич. механики инфракрасные фиксированные точки являются точками фазового перехода, а в асимптотически свободных теориях поля ультрафиолетовая фиксированная точка отвечает свободной картине с исчезающим взаимодействием.

Симметрию Р. г. можно рассматривать как обобщение симметрии степенного самоподобия (автомодельности), известной из задач гидро- и газодинамики. Действительно, решение функционального уравнения (3), линейное по второму аргументу, имеет вид $G(t, g) = gt^k$, вследствие чего (2) принимает вид преобразования степенной автомодельности. Поэтому преобразование Р. г. можно назвать преобразованием *функциональной автомодельности.*

В квантовой теории поля и статистич. физике Р. г. отвечает масштабному преобразованию импульсов или координат. При этом могут меняться не только соответствующие заряды, но и вид лагранжиана (гамильтониана системы). В

таком случае имеют дело с бесконечнопараметрич. Р. г. Преобразованный гамильтониан обычно проектируют на исходный, то есть приближенно представляют его в форме исходного с новыми значениями параметров. Если число параметров равно n, то преобразования Р. г. соответствуют траекториям в n-мерном фазовом пространстве и изучение критич. свойств системы сводится к анализу окрестностей неподвижных точек. Дискретным вариантом бесконечнопараметрич. Р. г. является Р. г. Каданова – Вильсона или Р. г. в прямом пространстве. Ее решеточная реализация используется в методе Монте-Карло (см. *Ренормализационная группа*; метод Монте-Карло).

Групповая симметрия, лежащая в основе Р. г., и свойство функциональной автомодельности позволяют развить регулярный метод улучшения приближенных решений физич. задач, получаемых разложением по малому параметру. Сущность метода Р. г., предложенного в 1955 Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым, состоит в восстановлении групповой симметрии решения, разрушенной в процессе приближения. Метод основан на использовании приближенных решений для нахождения явного вида генераторов, входящих в групповые дифференциальные уравнения. Последующее решение этих уравнений приводит к выражениям, к-рые, с одной стороны, надлежащим образом соответствуют исходным приближенным, а с другой – обладают правильной групповой симметрией.

Для иллюстрации рассмотрим функцию $F(t, g)$, удовлетворяющую уравнениям (7) или (10), для к-рой известно нек-рое приближенное решение $F_{\text{app}}(t, g)$ (взятое, напр., из теории возмущений в виде степенного разложения по g). Решение уравнения (10) может быть получено с помощью метода характеристик и представлено в виде

$$F(t,g) = F_{\text{app}}(1, G(t,g)) \exp \int_0^t \gamma(G(t,g))\, dt, \qquad (13)$$

где эффективный заряд $G(t, g)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (12), а функции $\gamma(g)$ и $\beta(g)$ с помощью определений (9), (11) также вычислены по теории возмущений. «Улучшенное» решение (13) по построению удовлетворяет условию функциональной автомодельности и в то же время при разложении в ряд по малому параметру g воспроизводит исходное приближенное решение F_{app}, к-рое само по себе не является автомодельным.

Метод Р. г. оказывается особенно эффективным в ситуациях, когда решение имеет те или иные сингулярности (особенности), напр. степенные или экспоненциальные. Приближения, использующие разложения, обычно искажают тип особенности. Восстановление групповой симметрии одновременно реконструирует истинную структуру сингулярности, соответствующую свойству функциональной автомодельности решения.

В качестве простой иллюстрации метода Р. г. рассмотрим плоскую задачу переноса излучения. Представим себе, что правая половина пространства, ограниченная вертикальной плоскостью, заполнена однородным веществом, а слева от границы – пустота. Обозначим через α поток падающих на границу частиц. В силу однородности среды поток частиц, продолжающих двигаться слева направо внутри среды на расстоянии l от границы раздела, однозначно определяется значением потока на границе и расстоянием до нее, то есть имеет вид нек-рой функции $A(l, a)$. Однако эту же величину можно представить в виде $A(l-l_1, a_1)$, выразив ее через поток на воображаемой границе раздела, перенесенный внутрь среды на расстояние l_1 и равный $a_1 = A(l_1, a)$. Тогда, комбинируя два различных представления для потока на расстоянии $l = l_1 + \lambda$, получаем уравнение

$$A(l_1 + \lambda, a) = A(\lambda, A(l_1, a)),$$

совпадающее с групповым уравнением (3).

Точное решение задачи переноса должно удовлетворять полученному функциональному уравнению независимо от природы падающих частиц и деталей процессов взаимодействия (рассеяния, поглощения, размножения) частиц со средой.

Допустим теперь, что при $l \ll 1$ нам известно приближенное решение, напр.

$$A_{\text{app}}(l, a) \approx a - \nu a l + o(l^2).$$

Определяя с помощью (9) на его основе генератор $\beta(g) = -\nu g$ и решая затем уравнение (12), получаем «улучшенное» решение

$$A(l, a) = a \exp(-\nu l),$$

справедливое на всем полупространстве $0 \leqslant l < \infty$, заполненном средой.

Если предположить, что инфинитезимальный отклик квадратичен по α и в окрестности границы

$$A_{\text{app}}(l, a) \approx a - \beta a^2 l,$$

то метод Р. г. приведет к следующему решению:

$$A(l,a) = \frac{a}{1+\nu a l}.$$

Полученный результат, подобно предыдущему, справедлив во всем полубесконечном объеме среды и, в частности, описывает поведение потока при $l \to \infty$.

Как уже отмечалось выше, Р. г. и основанный на ней метод улучшения приближенных решений были впервые использованы в середине 50-х гг. в задачах квантовой теории поля. С помощью указанного метода были определены ультрафиолетовые (и инфракрасные) асимптотики в квантовой электродинамике и, в частности, проанализирован парадокс *нуль-заряда*.

Впоследствии с помощью метода Р. г. было открыто свойство *асимптотической свободы* неабелевых калибровочных квантовых теорий поля, что послужило важным стимулом для создания современной теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамики. В дальнейшем метод Р. г. оказался неотъемлемым атрибутом расчетного аппарата в этой теории. Дело в том, что обычное разложение теории возмущений по малому параметру не позволяет продвинуться в область высоких энергий из-за больших, логарифмически растущих с энергией, поправок. Напротив, использование Р. г. приводит, согласно уравнению (13), к разложению по эффективному заряду, к-рый в силу явления асимптотич. свободы стремится к нулю при высоких энергиях. Использование улучшенной с помощью Р. г. теории возмущений здесь эквивалентно суммированию ведущих логарифмич. асимптотик и правильно передает высокоэнергетич. поведение. В квантовой хромодинамике теория возмущений, улучшенная с помощью Р. г., применяется для описания амплитуд процессов рассеяния частиц, характеризуемых большими передачами импульса.

В то же время непертурбативные вычисления в рамках квантовой хромодинамики ведутся на основе представления континуального интеграла, к-рый аппроксимируется конечномерным повторным интегралом высокой кратности. Для численного расчета последнего используется метод Монте-Карло. Сходимость этого статистич. метода не является быстрой и для ее улучшения также могут быть использованы идеи Р. г., к-рые формулируются в виде так наз. Монте-Карло ренормализационной группы.

Метод Р. г. служит основой гипотезы *великого объединения взаимодействий* в теории элементарных частиц. Согласно этой гипотезе, различные взаимодействия имеют единый источник происхождения, однако на больших расстояниях эффективные заряды, характеризующие интенсивность взаимодействия, ведут себя по-разному в соответствии с уравнениями Р. г. В результате единое взаимодействие расщепляется на три ветви, к-рые проявляют разные свойства и называются фундаментальными взаимодействиями.

В начале 70-х гг. К. Вильсон (K. Wilson) перенес идеологию Р. г. в статистич. физику, успешно использовав ее в задачах теории критич. явлений для вычислений индексов фазовых переходов.

Исходные построения здесь используют более сложную идеологию, поскольку не удается сформулировать симметрию функциональной автомодельности в терминах исходной задачи. Здесь приходится конструировать набор все более огрубленных моделей, связанных между собой преобразованиями Р. г.

В то же время окончательная физич. картина оказывается более наглядной, поскольку она формулируется в обычном пространстве и не связана с такими сложными понятиями, как ультрафиолетовые расходимости квантовой теории поля и их устранение с помощью перенормировок.

Благодаря этому в последующее десятилетие метод Р. г. быстро продвинулся в ряд других разделов теоретич. физики: теорию турбулентности, теорию полимеров, теорию смачивания и растрескивания (перколяции) и нек-рые другие. В результате такой экспансии метод Р. г. к настоящему времени превратился в весьма эффективный общий метод теоретич. и математич. физики.

Лит.: [1] Stueckelberg E., Petermann A., «Helv. Phys. Acta», 1953, v. 26, p. 499; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., «Доклады АН СССР», 1955, т. 103, № 3, с. 391; [3] их же, Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [4] Вильсон К., Когут Дж., Ренормализационная группа и ε-разложение, пер. с англ., М., 1975.

Д. И. Казаков, Д. В. Ширков.

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА в прямом пространстве. Пусть Ω — множество конфигураций поля $S:\mathbb{Z}^d\to\Omega$ на d-мерной решетке, то есть $S=\{S(x)\in M,\ x\in\mathbb{Z}^d\}$, где M — нек-рое метрич. пространство. Тогда преобразования $(T_yS)(x)=S(x+y)$ задают на пространстве Ω трансляции, а отображение

$$(R_k^{(\alpha)}S)(x)=k^{-d\alpha/2}\sum_{y\in\Delta_k(x)}S(y) \qquad (1)$$

для $\alpha>0$, $k\in\mathbb{N}$ и $\Delta_k(x)=\{y\in\mathbb{Z}^d: kx_i\leqslant y_i<k(x_i+1),\ 1\leqslant i\leqslant d\}$ называют преобразованием Р. г. в прямом пространстве (см. [1]). Из (1) следует, что $R_{k_2}^{(\alpha)}\circ R_{k_1}^{(\alpha)}=R_{k_1\cdot k_2}^{(\alpha)}$ (полугрупповое свойство) и что $T_x\circ R_k^{(\alpha)}=R_k^{(\alpha)}\circ T_{kx}$. Поэтому полугруппа G, порожденная преобразованиями $\{T_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ и $\{R_k^{(\alpha)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ изоморфна аффинным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

Если поле $\{S(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ случайно, то есть Ω — вероятностное пространство с естественной σ-алгеброй и вероятностным распределением P, тогда с точки зрения теории вероятностей $S_k(x)=(R_k^{(\alpha)}S)(x)$ — нормированная сумма случайных величин $\{S(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$. Случайное поле $\{S_k(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ отвечает распределению, к-рое порождается сопряженной полугруппой G^*, действующей в пространстве вероятностных распределений на Ω по формуле

$$(g^*\mathsf{P})(S)=\mathsf{P}(g^{-1}S),\ g\in G,\ S\in\Omega. \qquad (2)$$

Распределение P_0 на Ω называется автомодельным, если оно является неподвижной точкой Р. г. Ясно, что автомодельное распределение является трансляционно-инвариантным, то есть оно является неподвижной точкой и преобразования (2). В теории фазовых переходов нетривиальные автомодельные распределения соответствуют критич. точкам модели, а их изменения в окрестности этих точек дает информацию о критич. индексах по соответствующим параметрам системы.

Если распределение P соответствует стационарному случайному полю S на $\mathbb{Z}^d$, то слабый предел распределений $\mathsf{P}_k={}^*R_k^{(\alpha)}\mathsf{P}$ при $k\to\infty$ является автомодельным. Величина параметра α, обеспечивающего сходимость $\{\mathsf{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ к предельному распределению P_0, определяется скоростью убывания корреляций исходного поля S, а по нек-рым особенностям сходимости можно судить о величине соответствующих критич. индексов. Вне критич. точек предел P_0 является гауссовским автомодельным распределением.

Непрерывные аналоги определенных выше понятий формулируются в терминах обобщенных случайных процессов и играют важную роль в квантовой теории поля.

В. А. Загребнов.

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА; дифференциальные уравнения — дифференциальная форма записи математических соотношений для перенормированных квантовополевых функций (пропагаторов, вершинных функций), лежащих в основе метода *ренормализационной группы* в квантовой теории поля и некоторых других разделах теоретической физики. Дифференциальные уравнения ренормализационной группы могут быть получены путем дифференцирования ренормализационно-групповых функциональных уравнений. При этом возможны две различные формы дифференциальных уравнений. Дифференцируя, напр., безмассовое функциональное уравнение для *эффективной константы связи* $\bar g$ (см. *Ренормализационная группа*; функциональные уравнения):

$$\bar g(x,g)=\bar g(x/t,\bar g(t,g)) \qquad (1)$$

по x и полагая затем $t=x$, получают

$$x\frac{\partial\bar g(x,g)}{\partial x}=\beta(\bar g,(x,g)). \qquad (2)$$

В правой части этого нелинейного дифференциального уравнения стоит групповой генератор (иначе — *бета-функция*) β, определенный соотношением

$$\beta(g)=\left.\frac{\partial\bar g(t,g)}{\partial t}\right|_{t=1}. \qquad (3)$$

В то же время, дифференцируя (1) по t и полагая затем $t=1$, приходят к линейному уравнению с частными производными

$$\left\{x\frac{\partial}{\partial x}-\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right\}\bar g(x,g)=0. \qquad (4)$$

Уравнения (2) и (4) содержат одинаковую информацию и в совокупности с условием нормировки $\bar g(1,g)=g$ эквивалентны исходному уравнению (1).

Аналогичным способом могут быть получены дифференциальные уравнения для более сложных случаев.

Нелинейные дифференциальные уравнения типа (1), впервые полученные в 1955 Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым, иногда называют уравнениями Гелл-Мана — Лоу, а линейные уравнения вида (4), полученные впервые Л. В. Овсянниковым, известны как уравнения Каллана — Симанчика.

Дифференциальные уравнения Р. г. являются технич. основой метода ренормализационной группы в квантовой теории поля, служащего эффективным инструментом улучшения аппроксимационных свойств теории возмущений в окрестности особенностей решений. Дело в том, что при разложении в ряд структура особенностей, как правило, искажается, а конечные отрезки рядов теории возмущений не обладает также групповой симметрией и, следовательно, их суммы не удовлетворяют групповым функциональным уравнениям.

В методе ренормализационной группы такие приближенные решения используются в качестве отправной точки. С их помощью соотношениями вида

$$\beta(g)=\left.\frac{\partial\bar g_{TB}(x,g)}{\partial x}\right|_{x=1}, \qquad (5)$$

где $\bar g_{TB}$ — сумма небольшого числа членов теории возмущений, определяются групповые генераторы. Затем решают дифференциальные уравнения в явном виде. Полученные таким способом новые «ренормализационно-групповые» решения, с одной стороны, в точности удовлетворяют надлежащим функциональным уравнениям, а с другой — соображениям соответствия с исходными решениями.

Д. В. Ширков.

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА; метод Монте-Карло (МКРГ-метод) в квантовой теории поля – практическая реализация преобразования *ренормализационной группы* (РГ-преобразования) в реальном пространстве с помощью численного метода Монте-Карло. Этот метод применим к перенормируемым теориям, для к-рых изменение радиуса обрезания $a \to a'$ можно скомпенсировать одновременным изменением константы связи $g \to g'$, так что никакие физич. величины при этом не изменятся. Для решеточной формулировки квантовой теории роль радиуса обрезания играет постоянная решетки a, к-рую из-за дискретности нельзя менять произвольно. Чтобы уменьшить влияние конечного размера решетки, удобно при РГ-преобразовании уменьшить в два раза число L узлов по каждой из осей ($L \to L' = L/2$), сохранив тем самым постоянство пространственного размера решетки $L \cdot a$.

Программа осуществления дискретного РГ-преобразования в решеточных калибровочных теориях с помощью численного интегрирования методом Монте-Карло была предложена в 1976 К. Вильсоном (K. Wilson). Важную роль в развитии этого подхода сыграли работы А. А. Мигдала (1975) и Л. Каданова (L. Kadanoff) (1976), в к-рых РГ-преобразование выполнялось приближенно с помощью аналитич. формул. Излагаемый ниже современный статус проблемы основан на результатах, полученных в 1984–85 независимо несколькими группами ученых.

Центральное место в МКРГ-методе занимает численный алгоритм, позволяющий выполнять дискретное РГ-преобразование. Пусть U обозначает совокупность переменных, описывающих систему на исходной решетке шага a (напр., совокупность значений спиновой переменной в узлах решетки), а U^1 – аналогичную совокупность переменных для новой решетки шага $2a$. В задачах статистич. физики переменные U^1 часто называют блок-спиновыми переменными, а переход от переменных U к переменным U^1 – переходом к блок-спиновым переменным. Полное число степеней свободы уменьшается при этом в 2^d раза для d-мерной решетки. Действие $S^1(U^1)$ для новой системы получается из старого действия $S(U)$ усреднением по переменным U в тех узлах (ребрах в случае калибровочной теории) решетки, к-рые исчезли при переходе от левой решетки к правой. Именно при этом усреднении используется численный метод Монте-Карло.

МКРГ-метод позволяет получить $S^1(U^1)$, стартовав с $S(U)$. Такое дискретное РГ-преобразование можно последовательно применить несколько раз, после чего полученная последовательность действий $S^{(n)}(U^n)$ определяет фиксированные точки, расположение РГ-траектории, по к-рой решеточная система приближается к своему непрерывному пределу, и зависимость g' от g. Поскольку для асимптотически свободных теорий эта зависимость определяется при $g \to 0$ теорией возмущений, проводилось сравнение численных расчетов зависимости g' от g с предсказанием теории возмущений. Обнаруженное согласие в той области значений g, где обычно производятся численные расчеты методом Монте-Карло, явилось наиболее важным результатом, полученным для квантовой хромодинамики с помощью МКРГ-метода. *Ю. М. Макеенко.*

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА; функциональные уравнения – функциональные соотношения, выражающие законы преобразования пропагаторов и (перенормированных полных) вершинных функций при конечных ренормировочных преобразованиях, лежащих в основе *ренормализационной группы.* Наиболее простой вид функциональное уравнение Р. г. имеет для так наз. *эффективной константы связи* $\bar{g}(x, g)$ в безмассовой перенормированной квантовой теории поля с одной безразмерной константой связи g. Помимо g функция $\bar{g}$ зависит еще от безразмерного аргумента, равного отношению квадрата 4-импульса Q к квадрату так наз. параметра шкалы μ (иначе – массы или импульса нормировки) $x = Q^2/\mu^2$. Это уравнение для $\bar{g}$ может быть записано в виде:

$$\bar{g}(x, g) = \bar{g}(x/t, \bar{g}(t, g)), \qquad (1)$$

выражающем инвариантность $\bar{g}$ относительно ренормировочного преобразования

$$x \to x' = x/t, \; g \to g' = \bar{g}(t, g).$$

В случае учета массы частицы m эффективная константа связи зависит от дополнительного аргумента $y = m^2/\mu^2$, а уравнение принимает вид:

$$\bar{g}(x, y, g) = \bar{g}(x/t, y/t, \bar{g}(t, y, g)). \qquad (2)$$

В общем случае эффективная константа связи представляется произведением нек-рого числа пропагаторов и симметричной (по импульсным аргументам) вершинной функции, соответствующей элементарной вершине с данной константой связи. Для каждого из этих сомножителей, напр. для пропагатора $s(x, y, g)$, к-рый при ренормировочных преобразованиях приобретает множитель z, уравнение имеет вид:

$$s(x, y, g) = z(t, y, g)\, s(x/t, y/t, \bar{g}(t, y, g)).$$

Обычно функция s удовлетворяет условию нормировки $s(1, y, g) = 1$, за счет чего z может быть выражено через s.

Для квантовополевых моделей с несколькими константами связи функциональные уравнения Р. г. для соответствующих эффективных констант образуют систему. Напр., в случае двух констант связи g и h:

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}(x; g, h) &= \bar{g}(x/t; g_t, h_t), \\ \bar{h}(x; g, h) &= \bar{h}(x/t; g_t, h_t), \end{aligned}\right\}$$

где $g_t \equiv \bar{g}(t; g, h)$, $h_t \equiv \bar{h}(t; g, h)$.

Решения приведенных уравнений содержат произвольные функции. Напр., общее решение уравнения (2) выражается через произвольную функцию $\Phi(y, g)$, однозначно обратимую относительно второго аргумента, соотношением

$$\Phi(y/x, \bar{g}(x, y, g)) = \Phi(y, g),$$

общее решение уравнения (1) – через произвольную однозначную функцию одного аргумента и т. д.

Уравнения, подобные приведенным, возникают при анализе функционального самоподобия, подобно ренормализационно-групповому, во многих других разделах теоретич. физики: теории критич. явлений, теории полимеров, теории турбулентности и др.

См. также *Функциональная автомодельность. Д. В. Ширков.*

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ – см. *Связи константа.*

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Ренормализационная группа*; метод Монте-Карло, *Устойчивое распределение.*

РЕШЕТКА ПЕРИОДОВ – см. *Двоякопериодическая функция.*

РЕШЕТЧАТАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – см. *Непрерывная статистическая система.*

РИБА ПОЛЕ – см. *Контактная геометрия, Характеристика контактной формы.*

РИМАНА БИЛИНЕЙНОЕ СООТНОШЕНИЕ – см. *Абелев дифференциал.*

РИМАНА ЗАДАЧИ МЕТОД в теории солитонов – базирующийся на задачах Римана метод построения и интегрирования систем нелинейных эволюционных уравнений, предложенный В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [1].

Задача Римана состоит в представлении заданной на замкнутом контуре Γ матричной функции N-го порядка $G(\lambda)$ в виде произведения двух функций

$$G^+(\lambda) G^-(\lambda) = G(\lambda), \; \lambda \in \Gamma,$$

являющихся предельными значениями матричных функций $G^+(z)$ и $G^-(z)$ аналитических соответственно внутри и вне контура Γ. Контур Γ может проходить через бесконечно удаленную точку. Особенно важен случай, когда контуром служит вещественная ось. Кроме контура Γ и функции $G(\lambda)$

задается нормировка задачи, то есть значение одной из функций ($G^+(z)$ или $G^-(z)$) в нек-рой точке области ее аналитичности. Чаще всего задается канонич. нормировка:

$$G^-(\infty)=I.$$

Задача Римана называется регулярной, если ее решение ищется в классе невырожденных матриц, то есть если $\det G^+(z)\neq 0$ и $\det G^-(z)\neq 0$.

Задача называется задачей Римана с нулями, если ее решение ищется в классе матриц-функций, вырождающихся в точках $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_n^+$ и $\lambda_1^-, \lambda_2^-, \ldots, \lambda_n^-$, в к-рых матрицы $G^+(z)^{-1}$ и $G^-(z)^{-1}$ имеют простые полюсы.

В задачах Римана с нулями кроме контура Г, функции $G(\lambda)$ нормировки, точек $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_n^+$ и $\lambda_1^-, \lambda_2^-, \ldots, \lambda_n^-$ задаются подпространства

$$\operatorname{Im} G^+(\lambda_k^+),\ \operatorname{Ker} G^-(\lambda_k^-),\ k=1, 2, \ldots, n,$$

прямая сумма к-рых совпадает со всем пространством:

$$\operatorname{Im} G^+(\lambda_k^+)\oplus \operatorname{Ker} G^-(\lambda_k^-)=\mathbb{C}^N.$$

Задачи Римана сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений или уравнений типа Винера – Хопфа. Разрешимость этих уравнений, а значит, и задач Римана в различных классах функций исследована достаточно полно (см. [2]–[4]). Задачи Римана естественно возникают в теории обратных задач рассеяния (см. [5], [6]).

Ключевым моментом Р. з. м. является представление нелинейных уравнений в виде условия совместности переопределенной системы линейных уравнений вида:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=U\Psi,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial t}=V\Psi, \tag{1}$$

в к-рой матричные функции $U=U(x, t, z)$, $V=V(x, t, z)$ рационально зависят от комплексного параметра z. Условие совместности такой системы имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial x}+[U,V]=0 \tag{2}$$

и состоит из системы уравнений, к-рым должны удовлетворять коэффициенты в разложении матриц U, V на простейшие дроби. На геометрич. языке представление нелинейных уравнений в виде условия совместности (2) называется представлением нулевой кривизны. Число уравнений совместности на единицу меньше числа входящих в них матричных функций, то есть коэффициентов в разложении матриц U, V на простейшие дроби. Вид уравнений совместности зависит только от расположения и порядка полюсов матриц U, V. Напр., если матрицы U и V имеют единственный простой полюс в нуле, то есть если

$$U=u^{(0)}(x, t)+z^{-1}u^{(1)}(x, t),\ V=v^{(0)}(x, t)+z^{-1}v^{(1)}(x, t),$$

то уравнения совместности имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u_t^{(0)}-v_x^{(0)}+[u^{(0)},v^{(0)}]&=0,\\ u_t^{(1)}-v_x^{(1)}+[u^{(0)},v^{(1)}]+[u^{(1)},v^{(0)}]&=0,\\ [u^{(1)},v^{(1)}]&=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Пусть матрица $\Psi=\Psi(x, t, z)$ удовлетворяет системе уравнений (1), а $g=g(x, t, z)$ – произвольная матричная функция, не вырожденная в нек-рой области изменения переменных x, t и параметра z. Элементарная проверка показывает, что матрица $\tilde\Psi=g\Psi$ в этой области удовлетворяет аналогичной системе, в к-рой матрицы U, V заменены на

$$\tilde U=g_xg^{-1}+gUg^{-1},\ \tilde V=g_tg^{-1}+gVg^{-1}. \tag{4}$$

Следовательно, в этой области матрицы $\tilde U$, $\tilde V$ удовлетворяют уравнению (2). Но в общем случае они не будут рациональными функциями от z и уравнение (2) не сведется к конечной системе уравнений. Исключением является случай, когда обратимая матрица g не зависит от z. Формулы (4) показывают, что в этом случае матрицы $\tilde U$, $\tilde V$ тоже рационально зависят от z и имеют те же полюсы, что матрицы U, V.

Поэтому коэффициенты в разложении на простейшие дроби матриц U, V и $\tilde U$, $\tilde V$ будут удовлетворять одинаковым системам уравнений совместности. Преобразование $U\to\tilde U$, $V\to\tilde V$, $\Psi\to\tilde\Psi=g\Psi$ с матрицей g, не зависящей от z, называется калибровочным, а соответствующие уравнения – калибровочно эквивалентными.

В Р. з. м. преобразования (4) производятся с помощью зависящей от z матричной функции $g=g(x, t, z)$, к-рая подбирается так, чтобы у получающихся матриц $\tilde U$, $\tilde V$ не появились новые особые точки. Из формул (4) видно, что новые особенности могут появиться только там, где находятся особенности матриц $g=g(x, t, z)$ и $g^{-1}=g(x, t, z)^{-1}$. Пусть контур Г разбивает $\mathbb{C}$-плоскость на внутреннюю (O_+) и внешнюю (O_-) области и в области $\mathbb{C}\setminus\Gamma=O_-\cup O_+$ матрица g голоморфна всюду, кроме точек $\lambda_k^+\in O_+$, $k=1, 2, \ldots, n$, а матрица g^{-1} – всюду, кроме точек $\lambda_k^-\in O_-$, $k=1, 2, \ldots, n$, где они имеют простые полюсы. Тогда новые особенности могут появиться только на контуре Г и в точках λ_k^+, λ_k^-, $k=1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что на контуре Г у новых матриц $\tilde U$, $\tilde V$ не будет особенностей тогда и только тогда, когда на нем совпадают их предельные значения из внутренней и внешней областей, то есть когда

$$\begin{aligned} &g_x^+(\lambda)g^+(\lambda)^{-1}+g^+(\lambda)U(\lambda)g^+(\lambda)^{-1}=\\ &=g_x^-(\lambda)g^-(\lambda)^{-1}+g^-(\lambda)U(\lambda)g^-(\lambda)^{-1},\\ &g_t^+(\lambda)g^+(\lambda)^{-1}+g^+(\lambda)V(\lambda)g^+(\lambda)^{-1}=\\ &=g_t^-(\lambda)g^-(\lambda)^{-1}+g^-(\lambda)V(\lambda)g^-(\lambda)^{-1},\end{aligned}$$

где $\lambda\in\Gamma$, $g^\pm(\lambda)$ – предельные значения матрицы g из внешней (+) и внутренней (–) областей, $g_x^\pm(\lambda)$, $g_t^\pm(\lambda)$ – частные производные по x и по t.

Элементарное преобразование показывает, что эти равенства эквивалентны следующим:

$$Y_x=[U, Y],\ Y_t=[V, Y],$$

где $Y=g^+(\lambda)^{-1}g^-(\lambda)$. Общее решение последней системы имеет вид:

$$\omega(x, t, \lambda)G(\lambda)\omega(x, t, \lambda)^{-1},$$

где $\omega(x, t, \lambda)$ – невырожденное ($\det\omega(x, t, \lambda)\neq 0$ при $\lambda\in\Gamma$) решение системы (1), а $G(\lambda)$ – произвольная матрица, не зависящая от x и t. Таким образом, равенство

$$g^+(\lambda)^{-1}g^-(\lambda)=\omega(x, t, \lambda)G(\lambda)\omega(x, t, \lambda)^{-1}$$

гарантирует отсутствие особенностей на контуре Г у матриц $\tilde U$, $\tilde V$.

В окрестности точки λ_k^- матрица $g(z)$ голоморфна, а матрица $g(z)^{-1}$ имеет простой полюс. Поэтому в этой окрестности

$$\left.\begin{aligned} g(z)&=g(\lambda_k^-)+a_1(z-\lambda_k^-)+a_2(z-\lambda_k^-)^2+\ldots,\\ g(z)^{-1}&=(z-\lambda_k^-)^{-1}r+b_0+b_1(z-\lambda_k^-)+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$g(\lambda_k^-)r=rg(\lambda_k^-)=0,\quad g(\lambda_k^-)b_0+a_1r=b_0g(\lambda_k^-)+ra_1=I,$$

откуда, в частности, следует, что

$$\operatorname{Ker} g(\lambda_k^-)=\operatorname{Im} r,\ \operatorname{Im} g(\lambda_k^-)=\operatorname{Ker} r.$$

Согласно (4), (5), в окрестности λ_k^- матрицы $\tilde U, \tilde V$ разлагаются в такие ряды Лорана:

$$\tilde U(z) = (z-\lambda_k^-)^{-1} g(\lambda_k^-)\{-r_x + Ur\} + c_0 + c_1(z-\lambda_k^-) + \dots,$$

$$\tilde V(z) = (z-\lambda_k^-)^{-1} g(\lambda_k^-)\{-r_t + Vr\} + d_0 + d_1(z-\lambda_k^-) + \dots$$

и для того, чтобы они были голоморфны в этой точке, нужно, чтобы выполнялись равенства

$$g(\lambda_k^-)\{-r_x + U(\lambda_k^-)\, r\} = g(\lambda_k^-)\{-r_t + V(\lambda_k^-)\, r\} = 0. \qquad (6)$$

Пусть

$$\operatorname{Ker} g(\lambda_k^-) = \operatorname{Im} \omega(x,\, t,\, \lambda_k^-)\, n(\lambda_k^-),$$

где $n(\lambda_k^-)$ – не зависящая от x, t матрица оператора проектирования на фиксированное подпространство $N(\lambda_k^-)$, а $\omega(x,\, t,\, \lambda_k^-)$ – невырожденное ($\det \omega(x,\, t,\, \lambda_k^-) \neq 0$) решение системы (1) при $z = \lambda_k^-$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Im} r = \operatorname{Ker} g(\lambda_k^-) = \operatorname{Im} \omega(x,t,\lambda_k^-) n(\lambda_k^-), \\ g(\lambda_k^-)\omega(x,t,\lambda_k^-) n(\lambda_k^-) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

и существует такая матрица $Q = Q(x,\, t)$, что

$$r = \omega(x,\, t,\, \lambda_k^-)\, n(\lambda_k^-)\, Q(x,\, t).$$

Так как

$$-\omega_x + U(\lambda_k^-)\,\omega = 0,\ -\omega_t + V(\lambda_k^-)\,\omega = 0,$$

то

$$-r_x + U(\lambda_k^-)\, r = \omega(x,\, t,\, \lambda_k^-)\, n(\lambda_k^-) Q_x,\ -r_t + V(\lambda_k^-)\, r = \omega n(\lambda_k^-)\, Q_t,$$

равенства (6) выполняются в силу (7), и в точке λ_k^- матрицы $\tilde U$, $\tilde V$ голоморфны. Аналогично проверяется, что в точках λ_k^+ голоморфность этих матриц гарантируется условием

$$\operatorname{Im} g(\lambda_k^+)^{-1} = \operatorname{Im} \omega(x,\, t,\, \lambda_k^+)\, n(\lambda_k^+),$$

где $n(\lambda_k^+)$ – оператор проектирования на фиксированное подпространство $N(\lambda_k^+)$.

Таким образом, если $G^+(z)$, $G^-(z)$ – решения задачи Римана с нулями

$$\left.\begin{aligned} &G^+(\lambda)G^-(\lambda) = \omega(x,t,\lambda)G(\lambda)\omega(x,t,\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \Gamma, \\ &\operatorname{Im} G^+(\lambda_k^+) = \omega(x,t,\lambda_k^+)N(\lambda_k^+), \\ &\operatorname{Ker} G^-(\lambda_k^-) = \omega(x,t,\lambda_k^-)N(\lambda_k^-), \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где $N(\lambda_k^+)$, $N(\lambda_k^-)$ – произвольные подпространства, не зависящие от x, t, то преобразование (4) с матрицей

$$g(z) = \begin{cases} G^+(z)^{-1}, & z \in O_+, \\ G^-(z)^{-1}, & z \in O_-, \end{cases} \qquad (9)$$

переводит матрицы U, V в матрицы $\tilde U, \tilde V$, тоже удовлетворяющие условию совместности (2), сохраняя расположение и порядок полюсов. Следовательно, коэффициенты в разложениях на простейшие дроби матриц U, V и матриц $\tilde U$, $\tilde V$ удовлетворяют одной и той же системе уравнений, то есть Р. з. м. позволяет, зная какое-нибудь одно «затравочное» решение этой системы [и невырожденное решение ω соответствующей ей системы (1)], найти целое семейство других решений, зависящих от произвольно выбираемых данных задачи Римана. Этот метод часто называют одеванием «затравочного» решения с помощью матрицы (9). Напр., если матрицы

$$U = u_0(x,t) + \sum\nolimits_k (z-\alpha_k)^{-1}\, u_k(x,t),$$

$$V = v_0(x,t) + \sum\nolimits_l (z-\beta_l)^{-1}\, v_l(x,t)$$

одевают с помощью матрицы $g(z)$, то получаются матрицы

$$\tilde U = \tilde u_0(x,t) + \sum\nolimits_k (z-\alpha_k)^{-1}\, \tilde u_k(x,t),$$

$$\tilde V = \tilde v_0(x,t) + \sum\nolimits_l (z-\beta_l)^{-1}\, \tilde v_l(x,t),$$

у к-рых

$$\tilde u_0 = g_x(\infty)\, g(\infty)^{-1} + g(\infty)\, u_0 g(\infty)^{-1},\ \tilde u_k = g(\alpha_k)\, u_k g(\alpha_k)^{-1},$$

$$\tilde v_0 = g_t(\infty)\, g(\infty)^{-1} + g(\infty)\, v_0 g(\infty)^{-1},\ \tilde v_l = g(\beta_l)\, v_l g(\beta_l)^{-1}.$$

[Матрица $g(\infty)$ задает нормировку задачи Римана.] В качестве «затравочных» матриц всегда можно взять перестановочные матрицы

$$U = A(x,\, z),\ V = B(t,\, z),\ [A(x,\, z),\, B(t,\, z)] = 0,$$

к-рые, очевидно, удовлетворяют условию совместности (2).

В общем случае при одевании нужно решать системы сингулярных интегральных уравнений, к к-рым сводятся задачи Римана. Но если в качестве $G(\lambda)$ взять единичную матрицу, то для отыскания одевающей матрицы $g_0 = g_0(x,\, t,\, z)$ нужно решить только систему линейных алгебраич. уравнений. При $G(\lambda) = I$ на контуре Γ выполняется равенство $g_0^+(\lambda) = g_0^-(\lambda)$, то есть матрица $g_0(z)$ голоморфна всюду, кроме точек $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_n^+$, а матрица $g_0(z)^{-1}$ голоморфна всюду, кроме точек $\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_n^-$, где они имеют простые полюсы и удовлетворяют условиям:

$$\operatorname{Im} g_0(\lambda_k^+)^{-1} = \omega(x,\, t,\, \lambda_k^+)\, N(\lambda_k^+),$$

$$\operatorname{Ker} g_0(\lambda_k^-) = \omega(x,\, t,\, \lambda_k^-)\, N(\lambda_k^-).$$

Поэтому при канонич. нормировке

$$g_0(z)^{-1} = I + \sum\nolimits_{k=1}^n (z-\lambda_k^-)^{-1} A(k) \qquad (10)$$

и так как

$$\operatorname{Im} A(k) = \operatorname{Ker} g_0(\lambda_k^-) = \omega(x,\, t,\, \lambda_k^-)\, N(\lambda_k^-),$$

то операторы $A(k)$ должны иметь вид

$$A(k)(\boldsymbol{f}) = \sum\nolimits_{i=1}^{q_k} \boldsymbol{m}^i(k)(\boldsymbol{x}^i(k), \boldsymbol{f}), \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{m}^i(k)$ – базис подпространства $\operatorname{Im} A(k) = \operatorname{Ker} g_0(\lambda_k^-)$, а $\boldsymbol{x}^i(k)$ – нек-рые неизвестные векторы. Пусть векторы $\boldsymbol{n}^j(p)$, $j = 1, 2, \dots, q_p$, образуют базис ортогонального дополнения к подпространству $\operatorname{Im} g(\lambda_k^+)^{-1}$. Тогда $(\boldsymbol{n}^j(p),\ g_0(\lambda_k^+)^{-1}\boldsymbol{f}) = 0$ при всех $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^N$, откуда, согласно (10), (11), следует, что

$$\left(\boldsymbol{n}^j(p) + \sum\nolimits_{k=1}^n \sum\nolimits_{i=1}^{q_k} \frac{\boldsymbol{n}^j(p),\, \boldsymbol{m}^i(k)}{\lambda_p^+ - \lambda_k^-} \boldsymbol{x}^i(k), \boldsymbol{f}\right) = 0,$$

$$\boldsymbol{n}^j(p) + \sum\nolimits_{k=1}^n \sum\nolimits_{i=1}^{q_k} \frac{\boldsymbol{n}^j(p),\, \boldsymbol{m}^i(k)}{\lambda_p^+ - \lambda_k^-} \boldsymbol{x}^i(k) = 0.$$

Из этой системы линейных уравнений находятся векторы $\boldsymbol{x}^i(k)$, а, значит, и матрица-функция $g_0(z)$. Подстановка $G^+(z) = g_0(z)^{-1} G_1^+(z)$, $G^-(z) = G_1^-(z)\, g_0(z)$ сводит решение общей задачи к решению регулярной задачи Римана

$$G_1^+(\lambda)\, G_1^-(\lambda) = g_0(\lambda)\omega(\lambda)\, G(\lambda)\omega(\lambda)^{-1} g_0(\lambda)^{-1}$$

для матриц $G_1^\pm(z)$.

При фиксированных полюсах матриц U и V система уравнений совместности (2) имеет весьма общий вид. Интересные для физики уравнения получаются из нее при наложении на матрицы U, V дополнительных условий, совместных с системой (2). Такие условия называются редукциями. Конечно, получающиеся при одевании матрицы $\tilde U$, $\tilde V$ тоже должны удовлетворять наложенным условиям, что накладывает определенные ограничения на

данные соответствующих задач Римана. Напр., если у матриц U, V все полюсы лежат на вещественной оси, можно наложить условие антиэрмитовости на коэффициенты в их разложениях на простейшие дроби. Для того чтобы антиэрмитовость сохранялась при одевании, достаточно в качестве Γ взять вещественную ось, в качестве $G(\lambda)$ — эрмитову матрицу и в качестве $\omega(x, t, \lambda)$ — то решение системы (1), к-рое обращается в единичную матрицу в точке $x=t=0$. Другие дополнительные редукции могут зависеть от расположения полюсов. Так, в примере (3), кроме условия антиэрмитовости, можно потребовать, чтобы

$$u^{(1)}(x, t)=iA,\ v^{(1)}(x, t)=iB,$$

где A и B — постоянные вещественные диагональные матрицы. Это условие сохранится при одевании, если $G(0)=I$ и задача Римана нормирована условием $G^{+}(0)=I$. При наложении этих редукций система уравнений (3) сводится к одному уравнению

$$[A, Q_t]-[B, Q_x]+i[[A, Q], [B, Q]]=0 \qquad (12)$$

для матрицы $Q=Q^{*}$, через к-рую выражаются матрицы $u^{(0)}=[A, Q]$, $v^{(0)}=[B, Q]$. Уравнение (12) имеет физич. смысл — оно описывает взаимодействие волн в нелинейной среде.

Отыскание подходящих редукций — важная составная часть Р. з. м. (см. [7]).

Лит.: [1] Захаров В. Е., Шабат А. Б., «Функциональный анализ и его прилож.», 1979, т. 13, в. 3, с. 13–22; [2] Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М., 1970; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., «Успехи математич. наук», 1958, т. 13, в. 2, с. 3–72; [5] Агранович З. С., Марченко В. А., Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960; [6] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., Гамильтонов подход в теории солитонов, М., 1986; [7] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов — метод обратной задачи, М., 1980.

В. А. Марченко.

РИМАНА МАТРИЦА — см. *Абелева функция.*

РИМАНА ТЕНЗОР, тензор кривизны Римана, аффинной связности Γ^{i}_{jk} — тензорное поле, определяемое равенством

$$-R^{i}_{j,kl}=\frac{\partial}{\partial x^{k}}\Gamma^{i}_{jl}-\frac{\partial}{\partial x^{l}}\Gamma^{i}_{jk}+\Gamma^{i}_{mk}\Gamma^{m}_{jl}-\Gamma^{i}_{ml}\Gamma^{m}_{jk}.$$

Иногда используется и другое соглашение о знаке для $R^{i}_{j,kl}$. Р. т. часто определяют исходя из равенства

$$(\nabla_k\nabla_l-\nabla_l\nabla_k)T^{i}=-R^{i}_{j,kl}\,T^{j}.$$

В этом случае для тензорного поля произвольного строения $Z^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ имеет место формула

$$(\nabla_k\nabla_l-\nabla_l\nabla_k)Z^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=-R^{i_1}_{s,kl}Z^{si_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}-\dots$$

$$\dots-R^{i_p}_{s,kl}Z^{i_1\dots i_{p-1}s}_{j_1\dots j_q}+R^{s}_{j_1,kl}Z^{i_1\dots i_p}_{sj_2\dots j_q}+\dots+R^{s}_{j_q,kl}Z^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1}s}.$$

Пусть $[R(\xi,\eta)\zeta]^{i}=R^{i}_{j,kl}\xi^{k}\eta^{l}\zeta^{j}$. Тогда Р. т. допускает инвариантное определение:

$$R(\xi,\eta)\zeta=\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta-\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta+\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta.$$

Р. т. риманова многообразия (M, g_{ij}) есть тензор кривизны *Леви-Чивита связности* для метрики. *В. В. Трофимов.*

РИМАНА ТЕОРЕМА о конформном отображении: для любой односвязной области D существует однолистное *конформное отображение* f на одну из трех канонических областей: 1) риманову сферу $\overline{\mathbb{C}}$; 2) конечную комплексную плоскость $\mathbb{C}$; 3) единичный круг U. Любое другое отображение имеет вид $\varphi\circ f$, где φ — *дробно-линейное преобразование* $f(D)$.

Единственность конформного отображения f гарантируется, в частности, условиями нормировки $f(z_0)=w_0$ и $\arg f'(z_0)=\alpha$, где $z_0\in D$, $w_0\in f(D)$ и $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ — наперед заданные величины.

Оригинальное доказательство Р. т., восходящее к Б. Риману (B. Riemann, 1851), в значительной мере использовало физич. представления и содержало пробелы в обосновании *Дирихле принципа*, устраненные впоследствии Д. Гильбертом (D. Hilbert, конец 19 в.). Р. т. является основной в геометрич. теории функций комплексного переменного и широко применяется при доказательстве теорем существования в математич. физике, аэро- и гидродинамике, теории упругости, электро- и магнитостатике и т. д.

Р. т. допускает обобщение для многосвязных областей, римановых поверхностей (см. [2]) и квазиконформных отображений (см. [3]). Распространение Р. т. на случай биголоморфных отображений в $\mathbb{C}^{n}$ изобилует значительными трудностями (см. [4]).

Лит.: [1] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.– Л., 1948, с. 49–87; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962; [4] Витушкин А. Г., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 7, М., 1985, с. 5–22.

Ю. Е. Хохлов.

РИМАНА ТЕТА-ФОРМУЛА — см. *Якоби эллиптические функции.*

РИМАНА ФОРМУЛА — см. *Грина формулы.*

РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ЗАДАЧА — см. *Краевая задача* теории аналитических функций.

РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА – ПУАНКАРЕ ЗАДАЧА — см. *Краевая задача* теории аналитических функций.

РИМАНА – ГУРВИЦА ФОРМУЛА — см. *Римановa поверхность.*

РИМАНА – ШВАРЦА ПРИНЦИП, принцип симметрии Римана – Шварца,– метод продолжения конформных отображений и аналитических функций комплексного переменного, сформулированный Б. Риманом (B. Riemann) и обоснованный Г. Шварцем (H. Schwarz) в 19 в.

Р.– Ш. п. для конформных отображений состоит в следующем. Пусть области D_1, D_2 на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ симметричны относительно действительной оси $\mathbb{R}$ и не пересекаются, а их границы содержат общий интервал $\gamma\subset\mathbb{R}$, причем $D=D_1\cup\gamma\cup D_2$ — тоже область. Пусть аналогично определены D_1^{*}, D_2^{*}, γ^{*} и D^{*}. Если функция f_1, непрерывная на $D_1\cup\gamma$, конформно отображает D_1 на D_1^{*} и если $f_1(\gamma)=\gamma^{*}$, то функция $f(z)$, равная $f_1(z)$ при $z\in D_1\cup\gamma$ и $\overline{f_1(z)}$ при $z\in D_2$, осуществляет конформное отображение области D на область D^{*}.

Р.– Ш. п. для голоморфных функций. Пусть граница области $D\subset\mathbb{C}$ содержит открытый участок γ, к-рый является гладкой вещественно аналитич. дугой. Если функция f голоморфна в D, непрерывна в $D\cup\gamma$ и ее значения на γ принадлежат нек-рой другой гладкой вещественно аналитич. дуге γ^{*}, то f аналитически продолжается в нек-рую окрестность дуги γ.

Р.– Ш. п. используется для построения конформных отображений плоских областей, а также в теории аналитич. продолжения функций одного и многих комплексных переменных.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973.

Е. М. Чирка.

РИМАНА – ШВАРЦА ФУНКЦИЯ — см. *Шварца функция.*

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия *риманова пространства.* Основные понятия Р. г. являются обобщением понятий евклидовой геометрии на пространства с произвольным *метрическим тензором* g_{ij}.

Скалярное произведение касательных векторов $\xi=(\xi^{1},\dots,\xi^{n})$, $\eta=(\eta^{1},\dots,\eta^{n})$ в точке x определяется формулой

$$(\xi,\eta)=g_{ij}(x)\xi^{i}\eta^{j}.$$

Это позволяет определить длины векторов

$$|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)}$$

и углы между векторами в данной точке. Длина s кривой, $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$; $a \leqslant t \leqslant b$, определяется формулой

$$s = \int_a^b |\dot{x}|\, dt,$$

где $\dot{x} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ – вектор скорости.

Расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и y определяется как минимум длин кривых, соединяющих точки x и y. Функция $\rho(x, y)$ задает *метрику* в римановом пространстве.

Объем области U риманова пространства определяется формулой

$$V(U) = \int_U \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \ldots dx^n.$$

На k-мерной поверхности, заданной в римановом пространстве в параметрич. виде:

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^k),\ i = 1, \ldots, n,$$

возникает метрич. тензор

$$h_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} g_{ij}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, k,$$

называемый первой квадратичной формой поверхности. Длины кривых, углы и объемы k-мерных областей на поверхности вычисляются в терминах внутренней геометрии, то есть через первую квадратичную форму. Р. г. двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве широко применяется в механике оболочек. Большое внимание уделяется изучению минимальных поверхностей, то есть экстремалей функционала k-мерного объема. Простейшей их физич. реализацией (при $k = 2$) являются мыльные пленки. Считается, что двумерные минимальные поверхности в пространстве Минковского описывают классич. динамику релятивистской струны.

Дифференциальное исчисление *тензоров* в римановом пространстве основано на введении симметричной *связности*, согласованной с метрикой g_{ij}. Ее *Кристоффеля символы* имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

Кривизны тензор R_{ijkl} этой связности определяет кривизну риманова пространства, характеризующую его отличие от евклидова.

Движения риманова пространства определяются как преобразования, сохраняющие метрику. Однопараметрич. группы движений определяются векторными полями Киллинга $\xi^i(x)$, удовлетворяющими соотношениям:

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0,$$

где $\xi_i = g_{ik}\xi^k$, ∇_i – *ковариантная производная*. Сдвиги вдоль траекторий системы $\dot{x}^i = \xi^i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, определяют движения пространства. Движения n-мерного риманова пространства образуют группу Ли, размерность к-рой не превосходит $n(n-1)/2$. Для общих римановых пространств эта группа тривиальна; примерами пространств с группой движений максимальной размерности служат: евклидово пространство, сфера с метрикой

$$g_{ij} = 4\delta_{ij}[1 + \textstyle\sum_i (x^i)^2]^2,$$

δ_{ij} – символ Кронекера; пространство Лобачевского с метрикой

$$g_{ij} = 4\delta_{ij}[1 - \textstyle\sum_i (x^i)^2]^2.$$

Если группа движений достаточно богата, так что с помощью движения любую точку x можно перевести в заданную точку y, то риманово пространство называется однородным. Если для любой точки существует движение, являющееся симметрией пространства с центром в этой точке, то однородное пространство называется симметрическим. Локально симметрич. пространства выделяются условием постоянства кривизны

$$\nabla_s R_{ijkl} = 0.$$

Теория симметрических и римановых однородных пространств сочетает применение Р. г. и методов теории групп Ли. Идеи и методы этой теории используются при изучении однородных космологич. моделей общей теории относительности.

Конформными называются такие преобразования риманова пространства, при к-рых метрика подвергается растяжению:

$$g_{ij}(x) \to \lambda(x) g_{ij}(x).$$

Конформные преобразования n-мерного риманова пространства при $n \geqslant 3$ образуют группу Ли, размерность к-рой не превосходит $(n+1)(n+2)/2$. Инвариантностью относительно конформных преобразований обычно обладают теории безмассовых частиц.

Геодезическая линия – экстремаль функционала длины, рассматриваемого на кривых с закрепленными концами. Уравнения геодезических имеют вид:

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

Геодезические могут быть получены также как экстремаль функционала действия:

$$S = \int_a^b |\dot{x}|^2\, dt = \int_a^b g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\, dt.$$

Близкие точки x, y риманова пространства всегда можно соединить локально единственной геодезической, длина к-рой и будет равна расстоянию $\rho(x, y)$. Риманово пространство называется геодезически полным, если любая геодезическая $x^i(t)$ неограниченно продолжается по t. В полном римановом пространстве любые две точки можно соединить геодезической (вообще говоря, не единственной). Изучение глобальных свойств геодезических риманова пространства составляет важный раздел вариационного исчисления «в целом». Поскольку многие уравнения классич. механики могут быть записаны в виде уравнений геодезических, методы теории геодезических применимы для получения качественной информации о характере механич. движения. В общей теории относительности, где массивные частицы движутся по времениподобным (а безмассовые – по изотропным) геодезическим *индефинитной метрики*, в основном изучаются именно такие геодезические. Нек-рые их глобальные свойства допускают физич. интерпретацию. Так, наличие замкнутых геодезических означает нарушение причинности. Геодезич. неполнота трактуется как наиболее универсальный способ определения сингулярности пространства-времени.

Важная задача Р. г.– установление зависимости между геометрией риманова пространства и его топологией. Простейшим примером такой зависимости является формула Гаусса – Бонне, справедливая для замкнутой двумерной поверхности:

$$\frac{1}{4\pi}\oint K\, d\sigma = 1 - g,$$

где K – гауссова кривизна поверхности, $d\sigma$ – элемент площади, g – топологич. характеристика поверхности, равная числу ручек (напр., для сферы $g = 0$, для тора $g = 1$). Для многомерных римановых пространств строятся более сложные топологич. характеристики, вычисляемые в виде интегралов от инвариантов тензора кривизны. Известны также теоремы, выводящие топологич. ограничения на риманово пространство из соотношений типа неравенств для его кривизны. Простейшим примером является такое утверждение: полное односвязное (то есть любой замкнутый путь стягивается в точку) риманово пространство отрицательной кривизны топологически евклидово.

Комплексный аналог Р. г.– теория пространств с эрмитовой метрикой, записываемой в комплексных координатах $z^1, \ldots, z^n$ в виде:

$$ds^2 = g_{ij}\, dz^i d\bar{z}^j$$

(черта означает комплексное сопряжение), причем $g_{ji}=\bar{g}_{ij}$. В частности, двумерная метрика может быть записана в комплексном виде:

$$ds^2=g(z,\bar{z})dzd\bar{z},$$

если ввести изотермич. координаты x^1, x^2 такие, что $g_{ij}=g\delta_{ij}$, и положить $z=x^1+ix^2$, $\bar{z}=x^1-ix^2$ (здесь $i=\sqrt{-1}$). Конформные преобразования сводятся тогда к комплексно-аналитич. заменам: $\bar{z}\to w(z)$, $dw/d\bar{z}=0$, и сопряжению: $z\to\bar{z}$.

Большинство методов Р. г. переносятся на псевдоримановы пространства, в к-рых задана индефинитная метрика, и поэтому являются основным аппаратом общей теории относительности.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [4] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, 2 изд., М., 1986; [5] их же, Современная геометрия. Методы теории гомологий, М., 1984. *Б. А. Дубровин.*

РИМАНОВА МЕРА – см. *Дифференциальная форма.*

РИМАНОВА МЕТРИКА, метрический тензор,– тензорное поле g_{ij} типа (0, 2) на многообразии M^n такое, что $g_{ij}=g_{ji}$ и квадратичная форма с коэффициентами g_{ij} положительно определена. Многообразие M^n с Р. м. называется римановым многообразием. *В. В. Трофимов.*

РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ – ориентируемая поверхность без края, покрытая областями U_i, параметризованными комплексными числами. Параметризация задается с помощью непрерывных обратимых отображений z_i области U_i на единичный круг U комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом отображения z_i выбираются таким образом, чтобы все отображения $z_{ij}=z_iz_j^{-1}$ являлись голоморфными функциями. Пары (U_i, z_i) называются голоморфными картами, а их совокупность $\{(U_i, z_i)\}$ – голоморфным атласом. Таким образом, Р.п.– одномерное комплексное многообразие.

Пример. Сфера Римана – пополненная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$ с голоморфным атласом из двух карт $U_1=2U$, $z_i(u)=\frac{u}{2}$, $U_2=\bar{\mathbb{C}}\setminus\frac{U}{2}$, $z_2(u)=\frac{1}{2u}$, где $u\in U$.

Отображение φ Р.п. A в Р.п. $\tilde{A}$ называется голоморфным, если оно задается голоморфными функциями $\varphi_{ij}=\tilde{z}_i\varphi z_j^{-1}$ в любых голоморфных картах $(\tilde{U}_i, \tilde{z}_i)$, (U_i, z_i). Если φ – голоморфное отображение и $\frac{\partial\varphi_{ij}(u_0)}{\partial u}=0$, то точка $a_0=z_j^{-1}(u_0)\in A$ называется критической точкой, или точкой ветвления. Точка $\varphi(a_0)\in\tilde{A}$ называется критическим значением отображения φ. В этом случае

$$\varphi_{ij}(u)=\tilde{z}_i(\tilde{a}_0)+\sum_{n=m}^{\infty}\alpha_n(u-u_0)^n,$$

где $m>1$, $\alpha_m\neq0$. Число m называется степенью ветвления отображения φ в точке a. Голоморфное отображение на сферу Римана называется *мероморфной функцией.* Точки, переходящие в ∞, называются полюсами; степень ветвления в полюсе – кратностью полюса; однократные полюса – простыми.

Взаимно однозначное голоморфное отображение одной Р.п. на другую Р.п. называется изоморфизмом, а Р.п., между к-рыми существует изоморфизм – изоморфными. Всякая односвязная Р.п. изоморфна комплексной плоскости $\mathbb{C}$, сфере Римана $\bar{\mathbb{C}}$ или верхней полуплоскости $H=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}\,z>0\}$. Изоморфизм Р.п. на себя называется автоморфизмом. Автоморфизмы Р.п. A образуют группу $\mathrm{Aut}\,A$. Автоморфизмы плоскости состоят из параллельных переносов $z\mapsto z+a$, где $a\in\mathbb{C}$, то есть $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}=\mathbb{C}$. Автоморфизмы сферы Римана имеют вид:

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, $d\in\mathbb{C}$ и $ad-bc\neq0$, то есть $\mathrm{Aut}\,\bar{\mathbb{C}}=PSL(2,\mathbb{C})$. Автоморфизмы верхней полуплоскости сохраняют метрику постоянной отрицательной кривизны $ds^2=\frac{|dz|^2}{(\mathrm{Im}\,z)^2}$. Если $\Gamma\subset\mathrm{Aut}\,A$ – дискретная группа преобразований, то ее множество орбит (факторповерхность) A/Γ обладает естественной структурой Р.п., для к-рой проекция $A\mapsto A/\Gamma$ голоморфна. Напр., Р.п. $\mathbb{C}\setminus0$ изоморфна Р.п. $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – группа сдвигов на целое число $z\mapsto z+n$. Дискретная подгруппа группы автоморфизмов верхней полуплоскости называется фуксовой группой. Фуксова группа Mod, состоящая из целочисленных дробно-линейных автоморфизмов

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbb{Z},$$

называется модулярной группой Клейна; ее фундаментальная область $\{z\in\mathbb{C}\,||z|<1/2,\ |z|>1\}$ – модулярной фигурой. Р.п. H/Mod изоморфна $\mathbb{C}$ и получается из модулярной фигуры отождествлением симметричных относительно мнимой оси точек.

Многозначная аналитич. функция f с помощью процедуры аналитич. продолжения порождает Р.п. A_f аналитич. функции f. При этом на Р.п. возникают (однозначные!) мероморфные функции φ_f и φ^f такие, что $f=\varphi^f\varphi_f^{-1}$. Р.п. A_f компактна, если и только если f – конечнозначная (n-значная) и, следовательно, алгебраич. функция. Напр., для функции $f(z)=z^{1/n}$ Р.п. A_f совпадает со сферой Римана $\bar{\mathbb{C}}$, $\varphi_f(u)=u^n$, $\varphi^f(u)=u$. Двузначная алгебраич. функция называется гиперэллиптической и имеет вид $f(z)=\sqrt{F(z)}$, где $F(z)$ – многочлен без кратных корней; ее Р.п. называется гиперэллиптической Р.п.

Всякая компактная Р.п. гомеоморфна сфере с g ручками. Число ручек называется родом поверхности. Род Р.п. n-значной алгебраич. функции f называется родом функции f и равен

$$1-n+\frac{1}{2}\sum(n_\alpha-1),$$

где n_α – степень ветвления функции φ_f в точке a, и сумма берется по всем критич. точкам. Напр., род гиперэллиптич. Р.п. $A_{\sqrt{F(z)}}$ равен $\left[\frac{m-1}{2}\right]$, где m – степень многочлена $F(z)$. Все компактные Р.п. рода меньше трех – гиперэллиптические.

Всякая компактная Р.п. является Р.п. нек-рой алгебраич. функции и, следовательно, полной неприводимой комплексной алгебраич. кривой. Голоморфным отображениям Р.п. $\varphi: A\to\tilde{A}$ отвечают рациональные отображения кривых. Число n прообразов $\varphi^{-1}(\tilde{a})$ одинаково для всех некритич. значений $\tilde{a}\in\tilde{A}$ и называется степенью отображения φ. Роды g и $\tilde{g}$ поверхностей A и $\tilde{A}$ связаны соотношением

$$g-1=n(\tilde{g}-1)+\frac{1}{2}\sum(n_\alpha-1)$$

(формула Римана – Гурвица), где n_α – степень ветвления отображения φ в точке a, и сумма берется по всем критич. точкам. Согласно теореме Гурвица, компактная Р.п. рода $g>1$ допускает не более $84(g-1)$ автоморфизмов.

Компактные Р.п. рода 1 (римановы торы, эллиптич. кривые, одномерные абелевы многообразия) обладают рядом особых свойств. Все они – гиперэллиптические. Каждая из них изоморфна поверхности $A(\tau)=\mathbb{C}/\Gamma(\tau)$, где $\Gamma(\tau)$ – дискретная группа, порожденная сдвигами $z\mapsto z+1$ и

$z \mapsto z+\tau$, где τ – точка верхней полуплоскости H. Фундаментальная область группы $\Gamma(\tau)$ имеет вид параллелограмма, натянутого на векторы 1 и τ. Тор $A(\tau)$ получается из параллелограмма отождествлением его противоположных сторон. Каждой точке z_0 параллелограмма отвечает автоморфизм тора, порожденный сдвигом $z \mapsto z+z_0$. Таким образом, группа автоморфизмов тора бесконечна. Множество классов изоморфности римановых торов называется пространством модулей эллиптич. кривых. Торы $A(\tau_1)$ и $A(\tau_2)$ изоморфны, если и только если τ_1 и τ_2 принадлежат одной орбите модулярной группы Клейна и, следовательно, пространство модулей эллиптич. кривых изоморфно комплексной плоскости.

Согласно теореме Пуанкаре – Кебе об униформизации всякая Р. п. A, не совпадающая с $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}\setminus 0$ или тором, изоморфна поверхности H/Γ, где Γ – фуксова группа, каждый элемент к-рой действует на H без неподвижных точек. Группа Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(A)$ и определяется Р. п. A однозначно с точностью до сопряжения автоморфизмом верхней полуплоскости. Метрика ds^2 на H индуцирует на A метрику постоянной отрицательной кривизны.

Группа Γ имеет конечную систему образующих, если и только если Р. п. A получается из нек-рой компактной поверхности рода g выкидыванием конечного числа (n) дисков и конечного числа (m) точек. В этом случае говорят, что (g, n, m) – тип поверхности A и группы Γ. Группа типа (g, n, m) имеет фундаментальной областью выпуклый многоугольник, связанный с системой образующих

$$\left\{A_i, B_i, i = 1, \ldots, g, C_j, j = 1, \ldots, n+m \;\middle|\; \prod_{i=1}^{g} A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} \prod_{j=1}^{m+n} C_j = 1\right\}.$$

Множество $M(g, n, m)$ классов изоморфных Р. п. типа (g, n, m) называется пространством модулей. Оно представляется в виде $T(g, n, m)/\mathrm{Mod}(g, n, m)$, где $T(g, n, m)$ – гомеоморфное $\mathbb{R}^{6g+3n+2m-6}$ пространство Фрике – Клейна – Тайхмюллера, а $\mathrm{Mod}(g, n, m)$ – модулярная группа, к-рая изоморфна группе гомотопич. классов, сохраняющих ориентацию и множество проколов, гомеоморфизмов поверхности типа (g, n, m) на себя. Пространство Фрике – Клейна – Тайхмюллера поверхностей без дыр $T(g, 0, m)$ имеет комплексную структуру, сохраняемую группой $\mathrm{Mod}(g, 0, m)$. Таким образом, $\mathrm{Mod}(g, 0, m)$ – комплексное аналитич. пространство комплексной размерности $3g+m-3$.

Аналог структуры Р. п. для поверхностей с границей и неориентируемых поверхностей называется *клейновой поверхностью*, супераналог Р. п. – суперримановой поверхностью. Их пространства модулей описываются с помощью супераналога пространства Фрике – Клейна – Тайхмюллера (см. [4]).

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Форстер О., Римановы поверхности, пер. с англ., М., 1980; [3] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.– Л., 1948; [4] Натанзон С. М., «Математич. заметки», 1989, т. 45, № 4, с. 111–16. *С. М. Натанзон.*

РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ – см. *Риманова метрика.*

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО – пространство, точки которого однозначно задаются координатами

$$x = (x^1, \ldots, x^n)$$

(быть может, локальными) и в котором определен *метрический тензор* g_{ij}. Число n называется размерностью пространства. В случае, когда Р. п. не допускает введения единой системы координат (напр., ее нет на сфере), предполагается, что на нем задана структура *многообразия*. Это означает, что Р. п. разбито на области U_1, U_2, ..., причем в каждой области U_p заданы свои координаты $x_p^1, \ldots, x_p^n$; требуется, чтобы для пересекающихся пар областей U_p, U_q координаты $x_p^1, \ldots, x_p^n$ гладко выражались через координаты $x_q^1, \ldots, x_q^n$ и наоборот. В каждой области U_p задается метрич. тензор $g_{ij}^p(x_p)$, причем на пересечении U_p и U_q компоненты g_{ij}^p и g_{kl}^q связаны тензорным законом преобразования:

$$g_{ij}^p[x_p(x_q)] \frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^k} \frac{\partial x_p^j}{\partial x_q^l} = g_{kl}^q(x_q).$$

Простейшим примером Р. п. является евклидово пространство, где в прямоугольных координатах метрич. тензор

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Если тензор g_{ij} задает *индефинитную метрику*, то пространство называется псевдоримановым. Простейшим примером таких пространств является четырехмерное пространство-время специальной теории относительности (пространство Минковского). Геометрия Р. п. составляет предмет *римановой геометрии.* Псевдоримановы пространства изучаются общей теорией относительности.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, 2 изд., М., 1986. *Б. А. Дубровин.*

РИССА МЕРА – см. *Субгармоническая функция.*

РИССА ТЕОРЕМА – см. *Гильбертово пространство, Субгармоническая функция.*

РИССА – ШАУДЕРА ТЕОРЕМА – см. *Собственное значение.*

РИЧАРДСОНА ЗАКОН ЧЕТЫРЕХ ТРЕТЕЙ в теории турбулентности – соотношение, описывающее зависимость скорости относительной турбулентной диффузии (то есть процесса взаимного удаления друг от друга пары частиц, перемешиваемых жидкостью, или рассеяния облака примеси, состоящего из большого числа частиц) от масштаба явления (то есть от расстояния l между рассматриваемыми двумя частицами или типичного размера l диффундирующего облака). Так как в развитой турбулентности присутствуют возмущения (вихри) разнообразных масштабов, процесс относительной диффузии убыстряется с ростом l, поскольку возмущения, к-рые при малых значениях l переносят все частицы как целое, при больших l начинают уже изменять их взаимное расположение.

Л. Ричардсон [1] предложил характеризовать скорость относительной диффузии коэффициентом диффузии $\mathcal{K}$, определяемым формулой

$$\mathcal{K} = 1/6 \frac{d}{dt}[El^2(t)],$$

где $l(t)$ – масштаб длины диффундирующей группы частиц в момент t; после чего, обработав обширный эмпирич. материал о рассеянии примесей в атмосфере, он вывел Р. з. ч. т., согласно к-рому

$$\mathcal{K}(l_*) = \alpha l_*^{4/3},$$

где $l_* = [El^2]^{1/2}$, а α – размерный коэффициент. А. М. Обухов [2] указал, что эмпирич. закон Ричардсона непосредственно следует из развитой им и А. Н. Колмогоровым теории локально изотропной турбулентности, согласно к-рой для значений l_*, принадлежащих инерционному интервалу масштабов, должно выполняться соотношение

$$\mathcal{K}(l_*) = a\varepsilon^{1/3} l_*^{4/3},$$

где ε – диссипация энергии турбулентности, а a – безразмерная универсальная постоянная (согласно имеющимся в настоящее время данным, близка к 0,1).

Лит.: [1] Richardson L., «Proc. Roy. Soc. London A», 1926, v. 110, № 756, p. 709–37; [2] Обухов А. М., «Известия АН СССР. Сер. географическая и геофизическая», 1941, № 4–5, с. 453–66; [3] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1987, § 24.3. *А. М. Яглом.*

РИЧАРДСОНА ЧИСЛО – число Ri, равное отношению квадрата частоты Вяйсяля – Брента

$$N^2 = g\partial\rho_*/\rho_*\partial z,$$

где $\rho_*(z)$ – потенциальная плотность, g – ускорение силы тяжести к квадрату сдвига скорости

$$U' = \partial U(z)/\partial z$$

в стратифицированном течении:

$$\mathrm{Ri} = N^2(U')^{-2}.$$

Р. ч. служит критерием гидродинамич. неустойчивости течения ($\mathrm{Ri} < \mathrm{Ri}_{кр}$; в идеальных жидкостях $\mathrm{Ri}_{кр} = 1/4$). Используется также динамическое число Ричардсона

$$\mathrm{Rf} = \alpha\mathrm{Ri},\ \alpha = K_\rho/K,$$

где K_ρ и K – коэффициенты турбулентного массообмена и вязкости.

См. также *Геофизическая турбулентность.* *А. С. Монин.*

РИЧЧИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ВРАЩЕНИЯ – см. *Тетрадный формализм.*

РИЧЧИ КРИВИЗНА $R(\xi)$ риманова многообразия (M^n, g_{ij}) по направлению единичного вектора $\xi \in T_xM^n$ – значение на векторе ξ квадратичной формы, коэффициенты которой совпадают с координатами *Риччи тензора*, то есть величина

$$R(\xi) = R^i_{j,\,k\,l}\xi^j\xi^k,$$

где $R^i_{j,\,kl}$ – *Римана тензор.*

Лит.: [1] Бишоп Р., Криттенден Р., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967. *В. В. Трофимов.*

РИЧЧИ ТЕНЗОР многообразия с аффинной *связностью* Γ^i_{jk} – след тензора Риччи $R_{gl} = R^i_{q,\,il}$. В трехмерном пространстве Р. т. определяет *Римана тензор.*

Точнее

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + \frac{g^{\varepsilon\xi}R_{\varepsilon\xi}}{2}(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}),$$

где $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\beta}R^p_{\beta,\gamma\delta}$, $R^p_{\beta,\gamma\delta}$ – тензор кривизны для связности, согласованной с метрикой g_{ij}.

Р. т. риманова многообразия – это тензор Риччи связности, согласованной с римановой метрикой.

См. также *Ньюмена – Пенроуза формализм.* *В. В. Трофимов.*

РИЧЧИ ТОЖДЕСТВО для тензора кривизны $R^i_{j,pq}$ симметричной *связности* – тождество:

$$R^i_{q,kl} + R^i_{k,lq} + R^i_{l,qk} = 0.$$ *В. В. Трофимов.*

РККИ-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – см. *Гейзенберга модель.*

РОБИНСОНА ТЕОРЕМА – см. *Черная дыра*; теоремы единственности.

РОД кривой – см. *Клейнова поверхность.*

РОД поверхности – см. *Риманова поверхность.*

РОД функции – см. *Риманова поверхность.*

РОДРИГА ФОРМУЛА – см. *Ортогональные многочлены.*

РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ ПРОЦЕСС – однородная *Маркова цепь* $\{\xi(t)\}$ с непрерывным временем $t \in (0, \infty)$ и со счетным набором состояний $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, у которой инфинитизимальное преобразование функции

$$P_n(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = n\}$$

обладает равномерно по n следующим свойством регулярности

$$\left.\begin{aligned} P_n(h) &= \lambda_{n-1}P_{n-1}(0)h + \mu_{n+1}P_{n+1}(0)h + \\ &+ [1 - h(\lambda_n + \mu_n)]P_n(0) + o(h), \quad n > 0; \\ P_0(h) &= \mu_1P_1(0)h + (1 - \lambda_0 h)P_0(0) + o(h) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

при $h \to +0$. Неотрицательные постоянные коэффициенты λ_n и μ_n называются соответственно интенсивностями рождения и интенсивностями гибели в состоянии h ($\mu_0 = 0$). Выборочные функции Р. и г. п., принимающие значения из N, с вероятностью 1 кусочно постоянны со скачками, равными ± 1, к-рые происходят в случайные моменты времени τ_k, $k = 1, 2, \ldots$ Из (1) следуют дифференциальные уравнения Колмогорова, к-рым удовлетворяет распределение вероятностей $P_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_n(t) &= \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - \\ &- (\lambda_n + \mu_n)P_n(t), \quad n > 0, \\ \frac{d}{dt}P_0(t) &= \mu_1P_1(t) - \lambda_0P_0(t). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

К этим уравнениям должны быть добавлены начальные условия процесса, $\xi(0) = n_0$, то есть $P_n(0) = \delta_{nn_0}$. Частные случаи Р. и г. п., когда $\lambda_n \equiv 0$, либо $\mu_n \equiv 0$, носят название соответственно простого процесса гибели и процесса чистого рождения. В последнем случае, если $\lambda_n = \lambda = \mathrm{const}$, то процесс чистого рождения является *пуассоновским процессом*, для к-рого

$$P_n(t) = [(n - n_0)!]^{-1}(\lambda t)^{n-n_0}e^{-\lambda t}.$$

Важным частным случаем Р. и г. п., к-рый служит довольно реалистич. моделью эволюции биологич. популяции, является так наз. линейный Р. и г. п., для него $\lambda_n = \lambda n$, $\mu_n = \mu n$, λ, $\mu > 0$. Линейный процесс чистого рождения ($\mu = 0$) носит название процесса Юла – Фарри.

Основным инструментом изучения Р. и г. п. является метод производящих функций для распределений $P_n(t)$. Он позволяет часто либо получить точное решение уравнений (2), либо указать главные, с точки зрения приложений, качественные свойства процесса. Так, напр., для линейного Р. и г. п. введение производящей функции

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n$$

сводит уравнения (2) к уравнению с частными производными

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) = (\lambda x^2 - (\lambda + \mu)x + \mu)\frac{\partial}{\partial x}F(x,t),$$

к-рое точно интегрируется методом характеристик, что позволяет в сочетании с начальным условием $F(x, 0) = x^{n_0}$ получить явные формулы зависимости от времени вероятностей

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\min(n,\,n_0)} C^k_{n_0}C^{n-k}_{n_0+n-k-1} \times \times [1 - \alpha(t) - \beta(t)]^k[\beta(t)]^{n-k}[\alpha(t)]^{n_0-k},$$

где

$$\alpha(t) = \mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)[\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu]^{-1},$$
$$\beta(t) = \lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)[\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu]^{-1}.$$

При этом одномоментное математич. ожидание и дисперсия процесса определяются выражениями

$$\mathsf{E}\xi(t) = n_0e^{(\lambda-\mu)t},$$
$$\mathsf{D}\xi(t) = n_0^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1).$$

В прикладных вопросах очень важно, чтобы Р. и г. п. имел отличную от 1 вероятность вырождения при неограниченном увеличении времени и при этом обладал стацио-

нарным невырожденным распределением. Вероятностью вырождения называется предел

$$q_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t).$$

Напр., для линейного Р. и г. п. вероятность вырождения равна 1 при $\lambda \leqslant \mu$ и $(\mu/\lambda)^{n_0}$ при $\lambda > \mu$. Стационарное распределение вероятностей q_n для Р. и г. п., по определению, удовлетворяет системе уравнений:

$$q_{n+1}\mu_{n+1} + \lambda_{n-1}q_{n-1} = (\lambda_n + \mu_n)q_n, \quad n > 0$$

$$\mu_1 q_1 = \lambda_0 q_0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1.$$

Наиболее интересен случай, когда процесс имеет единственное стационарное распределение. Такой процесс называется эргодическим и для него

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = q_n$$

при любом n. Для эргодичности процесса необходимо и достаточно, чтобы он был необрывающимся (см. *Марковский процесс*), существовал номер n, при к-ром

$$\mu_k > 0,\ k \geqslant n;\ \mu_k = 0,\ k < n;\ \lambda_k > 0,\ k < n,$$

и сходился ряд

$$Q = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_n \dots \lambda_{k-1}}{\mu_n \mu_{n+1} \dots \mu_k}.$$

Если этот ряд сходится, то

$$q_0 = q_1 = \dots = q_{n-2} = 0,$$

$$q_k = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_n \dots \lambda_{k-1}}{\mu_n \mu_{n+1} \dots \mu_k} q_{n-1}, \quad k \geqslant n,$$

$$q_{n-1} = (1+Q)^{-1}.$$

Для линейного Р. и г. п. нет стационарного распределения, так как только при $\lambda = \mu$ средняя интенсивность роста равна нулю и размер популяции стационарен, $\mathsf{E}\xi(t) = n_0$, однако при этом $\mathsf{D}\xi(t) = 2\lambda t n_0^2$.

Важной теоретич. задачей при классификации Р. и г. п. с произвольными интенсивностями рождения λ_n и гибели μ_n является получение условий, при к-рых уравнения (2) однозначно определяют процесс, или, другими словами, получением условий необрываемости. Обрываемость Р. и г. п. связана с очень быстрым ростом выборочных функций (численности популяции) таким, что с ненулевой вероятностью за конечное время они «уходят на бесконечность». Это возможно, если λ_n достаточно велики и μ_n при этом не компенсируют их рост при увеличении численности популяции. В общем случае дать полную классификацию имеющихся здесь возможностей затруднительно. Известны достаточно эффективные критерии, к-рые позволяют гарантировать необрываемость процесса. Примерами таких достаточных условий необрываемости могут служить следующие ограничения на коэффициенты λ_n, μ_n:

$$\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty,$$

либо

$$\sum_{k=j}^{\infty} \frac{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_j}{\lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_j} = \infty,$$

если $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant j$.

Наряду с Р. и г. п., к-рые являются однородными цепями Маркова с непрерывным временем, иногда при моделировании динамики биологич. популяций рассматриваются неоднородные Р. и г. п., у к-рых интенсивности рождения $\lambda_n(t)$ и гибели $\mu_n(t)$ являются функциями времени.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, 2 изд., М., 1984; [2] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [3] Саати Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., М., 1965; [4] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [5] Добрушин Р. Л., «Успехи математич. наук», 1952, т. 7, № 6, с. 185–91. *Ю. П. Вирченко.*

РОЖДЕНИЯ ОПЕРАТОР – см. *Вторичное квантование.*

РОССБИ РАДИУС ДЕФОРМАЦИИ – см. *Геофизическая турбулентность.*

РОССБИ ЧИСЛО – см. *Геофизическая турбулентность.*

РОТАЦИЯ – см. *Эйлера углы.*

РОТОР векторного поля – см. *Вихрь* векторного поля, *Векторный анализ.*

РУМЬЕ КЛАСС – см. *Ультрараспределение.*

РУНГЕ – ЛЕНЦА ВЕКТОР – см. *Пуассона скобки.*

РЫСКАНЬЯ УГОЛ – см. *Ориентации углы.*

РЫТОВА ЗАКОН – см. *Максвелла уравнения*; асимптотические решения.

РЭЛЕЯ ВОЛНЫ – см. *Упругие волны.*

РЭЛЕЯ УРАВНЕНИЕ – нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0,\ \dot{x} = dx/dt, \qquad (*)$$

где функция $F(u)$ удовлетворяет предположению:

$$uF(u) < 0 \text{ при малых } |u|,$$

$$uF(u) > 0 \text{ при больших } |u|.$$

Р. у. описывает типичную нелинейную систему с одной степенью свободы, в к-рой возможны *автоколебания.* Названо по имени Рэлея (Rayleigh), изучавшего уравнение такого типа в связи с задачами акустики [1]. Частным случаем Р. у. при

$$F(u) = -\lambda\left(u - \frac{u^3}{3}\right), \quad \lambda = \text{const},$$

является *Ван дер Поля уравнение.* Иногда Р. у. называют частный случай уравнения (*):

$$\ddot{x} - (a - b\dot{x}^2)\dot{x} + x = 0,\ a > 0,\ b > 0.$$

Имеется большое число работ, в к-рых выясняются условия существования и единственности устойчивого предельного цикла у Р. у., то есть условия возникновения автоколебаний. Вопрос о периодич. решениях изучался и для различных обобщений Р. у., напр. для

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t),$$

где $e(t)$ – периодич. функция.

Системой типа Рэлея часто называют уравнение

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + G(x) = H(t, x, \dot{x}),$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

причем обычно предполагается, что

$$F = \operatorname{grad} f,\ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in C^1,$$

$$G = \operatorname{grad} g,\ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g \in C^2,$$

а H – ограниченная и периодическая по t вектор-функция. Представляет интерес получение достаточных условий существования периодич. решений таких систем.

Лит.: [1] Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Теория звука, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М.– Л., 1955; [2] Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1964. *Н. Х. Розов.*

РЭЛЕЯ – ДЖИНСА ЗАКОН ИЗЛУЧЕНИЯ – см. *Планка закон излучения.*

РЮЭЛЛЯ – ТЭКЕНСА СЦЕНАРИЙ стохастизации – появление в фазовом пространстве *динамической системы* странного аттрактора после трех нормальных бифуркаций. Доказательство существования сценария основано на возможности аппроксимации фазового потока с трехмерным тором потоком с обвивающей тор замкнутой траекторией, в к-рый можно вложить аттрактор канторовского типа. Иначе говоря, при этом сценарии трехчастотное движение разрушается путем нелинейной синхронизации (образования резонансов) его высоких гармоник. Этот сцена-

рий обладает так наз. структурной устойчивостью, то есть в каждой достаточно малой окрестности фазового потока с инвариантным трехмерным тором имеется открытое множество фазовых потоков со странным аттрактором.

Сценарий был предложен в 1971 для случая четырех нормальных бифуркаций и обобщен на случай трех бифуркаций в 1978 (см. [1]).

Это был первый из предлагавшихся сценариев перехода к хаосу в динамич. системах, и он привлек широкое внимание к проблеме странных аттракторов. Однако в проводившихся численных экспериментах стохастизация была больше похожа на разрушение двухчастотного движения – биений, вероятно, путем их синхронизации и затем либо бифуркации удвоения периода образующего цикла, либо слияния и исчезновения устойчивого и седлового циклов и образования аттрактора из гомоклинич. структуры седлового цикла или из складок исходного негладкого тора.

Лит.: [1] Монин А. С., Теоретические основы геофизической гидродинамики, Л., 1988. *А. С. Монин.*

С

САМОДУАЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЕ – см. *Инстантон.*

САМОЛЕТНЫЕ УГЛЫ – см. *Ориентации углы.*

САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОТЕНЦИАЛА УРАВНЕНИЕ – уравнение вида

$$\Delta U = \rho(U),$$

где функция $\rho(U)$ обозначает либо плотность числа частиц, либо заряд, либо ток в системе, описываемой гамильтонианом

$$H(x, p) = p^2 + U(x)$$

(см. [1]–[3]). Напр., для сферич. диода возникает уравнение

$$\Delta_r U(r) = \frac{k}{r^2\sqrt{-1-U(r)}},$$

где Δ_r – радиальная часть оператора Лапласа, k – параметр; это уравнение проинтегрировано (см. [4]). К решению этого уравнения сводится также нахождение инвариантного относительно уравнения Власова лагранжева подмногообразия для уравнения Хартри в $\mathbb{R}^3$.

Лит.: [1] Langmuir I., Blodgett K., «Phys. Rev.», 1924, v. 24, № 1, p. 49–59; [2] Поляченко В. Л., Фридман А. М., Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М., 1976; [3] Агекян Т. А., «Вестник ЛГУ», 1962, № 1, с. 152–61; [4] Карасев М. В., Маслов В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 13, М., 1979, с. 145–267. *А. В. Пересковов.*

САМОСОГЛАСОВАННОЕ ПОЛЕ – усредненное поле сил взаимодействия с данной частицей всех других частиц квантовомеханической системы. Задача взаимодействия многих частиц очень сложна, при ее решении пользуются приближенными методами расчета. Один из наиболее распространенных приближенных методов квантовой механики основан на введении С. п., позволяющего свести задачу многих частиц к задаче одной частицы, движущейся в среднем С. п., создаваемом всеми другими частицами. Различные варианты введения С. п. отличаются способом усреднения взаимодействия. Метод С. п. широко применяется для приближенного описания состояний многоэлектронных атомов, молекул, тяжелых ядер, электронов в металле, системы спинов в ферромагнетике и т. д.

В квантовомеханич. системе многих взаимодействующих частиц движение любой частицы сложным образом взаимосвязано (коррелировано) с движением всех остальных частиц системы. Вследствие этого каждая частица не находится в определенном состоянии и не может быть описана своей (одночастичной) *волновой функцией.* Состояние системы в целом описывается волновой функцией, зависящей от координатных и спиновых переменных всех частиц системы. В методе С. п. для приближенного описания системы вводят волновые функции для каждой частицы системы; при этом взаимодействие с другими частицами приближенно учитывается введением поля, усредненного по движениям остальных частиц системы (по их одночастичным волновым функциям). Одночастичные волновые функции, с одной стороны, являются решением *Шредингера уравнения* для одной частицы, движущейся в среднем поле, создаваемом другими частицами, с другой – определяют средний потенциал поля, в к-ром движутся частицы. Термин «С. п.» связан с этим согласованием.

Простейший метод введения С. п. (в к-ром определяются не волновые функции, а плотность распределения частиц в пространстве) – метод Томаса – Ферми, предложенный Л. Томасом (L. Thomas, 1927) и Э. Ферми (E. Fermi, 1928). В многоэлектронных атомах средний потенциал, действующий на данный электрон, изменяется достаточно медленно. Поэтому внутри объема, где относительное изменение потенциала невелико, находится еще много электронов, и электроны, к-рые подчиняются *Ферми – Дирака статистике*, можно рассматривать как вырожденный ферми-газ. При этом действие всех остальных электронов на данный можно заменить действием нек-рого центрально-симметричного С. п., к-рое добавляется к полю атомного ядра. Это поле подбирают так, чтобы оно было согласовано с распределением средней плотности заряда (пропорциональной распределению средней плотности электронов в атоме), так как потенциал электрич. поля связан с распределением заряда *Пуассона уравнением.* Средняя плотность электронов в свою очередь рассматривается как плотность вырожденного идеального ферми-газа, находящегося в этом среднем поле, и связана с ним через *Ферми энергию.* Это означает, что выбор среднего потенциала поля должен быть «самосогласованным». На основе С. п. Томаса – Ферми удалось объяснить порядок заполнения электронных оболочек в атомах, а следовательно, и периодич. систему элементов. Этот метод применим также в теории тяжелых ядер. Он позволяет объяснить порядок заполнения нуклонами ядерных оболочек; при этом, кроме центрально-симметричного С. п., нужно учитывать С. п., вызванное взаимодействием орбитального движения нуклонов с их спином.

Другой, более точный, метод введения С. п.–метод Хартри (предложен в 1927 Д. Хартри, D. Hartree). В этом методе волновую функцию многоэлектронного атома представляют приближенно в виде произведения волновых функций отдельных электронов, соответствующих различным квантовым состояниям электронов в атоме. Такому распределению электронов отвечает нек-рое среднее С. п., к-рое зависит от выбора одноэлектронных функций, а эти функции в свою очередь зависят от среднего поля. Одноэлектронные волновые функции выбирают из условия минимума

средней энергии, что обеспечивает наилучшее приближение для выбранного типа волновых функций. С. п. в этом случае получаются с помощью усреднения по орбитальным движениям всех других электронов и для различных состояний электронов в атоме оказываются различными. Волновые функции электронов определяются теми же средними потенциалами, что и означает их самосогласованность.

В методе Хартри не учитывается *Паули принцип*, из к-рого следует, что полная волновая функция электронов в атоме должна быть антисимметричной. Более совершенный метод введения С. п. дает Хартри – Фока метод (В. А. Фок, 1930), к-рый исходит из волновой функции (электронов в атоме) правильной симметрии в виде определителя из одноэлектронных орбитальных волновых функций, что обеспечивает выполнение принципа Паули. Одноэлектронные функции находят, как и в методе Хартри, из минимума средней энергии. При этом получается С. п. с усреднением, в к-ром учитывается корреляция орбитальных электронов, связанная с их обменом.

Кроме простой обменной корреляции возможна корреляция пар частиц с противоположно направленными спинами; в случае притяжения такая корреляция приводит к образованию коррелированных пар частиц (связанных пар). Обобщение метода Хартри – Фока, учитывающее эту корреляцию, было сделано Н. Н. Боголюбовым (1958); обобщенный метод применяется в теории сверхпроводимости и в теории тяжелых ядер.

Лит.: [1] Хартри Д. Р., Расчеты атомных структур, пер. с англ., М., 1960; [2] Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Новый метод в теории сверхпроводимости, М., 1958, с. 122–26; [3] Харрисон У., Псевдопотенциалы в теории металлов, пер. с англ., М., 1968, гл. 1; [4] Смарт Дж., Эффективное поле в теории магнетизма, пер. с англ., М., 1968, гл. 3; [5] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, 2 изд., М., 1975, гл. 6; [6] Киржниц Д. А., Полевые методы теории многих частиц, М., 1963; [7] Слэтер Дж., Методы самосогласованного поля для молекул и твердых тел, пер. с англ., М., 1978. *Д. Н. Зубарев.*

САМОСОГЛАСОВАННОЕ ПОЛЕ; правила квантования – необходимые условия, при которых существует квазиклассическая асимптотика стационарных уравнений *самосогласованного поля*. Эти правила имеют вид *Бора – Зоммерфельда правил квантования* на лагранжевых подмногообразиях, инвариантных относительно уравнения Власова. Поиск таких подмногообразий сводится к решению уравнений для самосогласованного потенциала (см. [1], [2]). Напр., для уравнения Хартри в $\mathbb{R}^3$

$$\left(h^2\Delta_x + \frac{\mu}{|x|} + (1-\mu)\int\frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|}dy - 1\right)\varphi(x) = 0,$$
$$\|\varphi\|_{L_2} = 1,$$

где h, μ – параметры, в случае радиально-симметричных решений кривая $p_r^2 + U(r) = -1$ является инвариантным лагранжевым подмногообразием в фазовом пространстве $\{(r, p_r)|_{r>0}, -\infty < p_r < \infty\}$. Здесь функция $U(r)$ удовлетворяет *самосогласованного потенциала уравнению.*

Лит.: [1] Карасев М. В., Маслов В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 13, М., 1979, с. 145–267; [2] Черных С. И., «Теоретич. и математич. физика», 1982, т. 52, № 3, с. 491–94. *А. В. Перескоков.*

САМОСОГЛАСОВАННОЕ ПОЛЕ; уравнения в квазиклассическом приближении – уравнения, описывающие такие взаимодействия частиц, при которых потенциал поля зависит от *волновой функции* частицы. Таково, напр., уравнение Шредингера для парного взаимодействия:

$$\left.\begin{aligned} -ih\frac{\partial\psi}{\partial t} - h^2\Delta\psi + \left(\int V(x-y)|\psi(y,t)|^2\,dy\right)\psi = 0,\\ \psi|_{t=0} = e^{\frac{i}{h}S_0}\chi_0, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь V, χ_0, $S_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – вещественные функции, ψ – волновая функция (см. [1], [2]). Параметр h в (1) считается малым.

Задача (1) и целый ряд подобных ей нелинейных задач при достаточно малом t имеют асимптотич. решения вида:

$$\psi(x,t) = e^{\frac{i}{h}S(x,t)}\varphi(x,t,h),$$

где амплитуда φ регулярна при $h \to 0$.

Пусть функция $x^0(g, t)$ является решением задачи

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x^0(g,t)}{\partial t^2} + 2\int\frac{\partial V}{\partial x}(x^0(g,t) - x^0(y,t))\chi_0^2(y)\,dy = 0,\\ x^0(g,0) = g, \quad \frac{\partial x^0}{\partial t}(g,0) = \nabla S_0(g), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

а $\tilde{S}$ определяется формулой

$$\tilde{S}(g,t) = S_0(g) + \int_0^t\left[\frac{1}{4}\left|\frac{\partial x^0(g,\tau)}{\partial\tau}\right|^2 - \right.$$
$$\left. - \int V(x^0(g,\tau) - x^0(y,\tau))\chi_0^2(y)\,dy\right]d\tau.$$

Теорема 1. Решение задачи (1) на отрезке $[0, T_0]$, где якобиан $Dx^0/Dg > 0$, имеет следующую асимптотику

$$\psi(x,t,h) =$$
$$= \left[\exp\left\{\frac{i}{h}\tilde{S}(g,t)\right\}\chi_0^2(g)\Big/\left(\frac{Dx(g,t)}{Dg}\right)^{1/2}\right]_{g=(x^0)^{-1}(x,t)} + O(h), \quad (3)$$

где $\|O(\hbar)\|_{L_2} \leqslant Ch$.

Асимптотич. решение (3) перестает быть справедливым вблизи фокальных точек (то есть в те моменты времени t, когда якобиан $Dx^0(g, t)/Dg = 0$). Глобальные асимптотич. формулы при всех $t \geqslant 0$ строятся с помощью канонич. оператора Маслова $K_\Lambda^{1/h}$.

Пусть Λ – $(n+1)$-мерное многообразие в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+2}\{(x, t, p, p^t)|(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}, t, p^t \in \mathbb{R}\}$, задаваемое формулами

$$x = x^0(g,t), \quad p = \frac{1}{2}\frac{\partial x^0(g,t)}{\partial t},$$
$$p^t = -\frac{1}{4}\left|\frac{\partial x^0(g,t)}{\partial t}\right|^2 - \int V(x^0(g,t) - x^0(y,t))\chi_0^2(y)\,dy,$$

где x^0 – решение задачи (2).

Теорема 2. Функция $\psi = [K_\Lambda^{1/h}\chi_0](x, t)$ является асимптотич. решением задачи Коши (1) по модулю $O(h^2)$.

Аналогичные результаты справедливы для систем нелинейных уравнений (напр., для уравнения Хартри).

Изложенные методы применимы также и к стационарным уравнениям. Так, напр., для уравнений Хартри с кулоновским взаимодействием (см. [3])

$$\left.\begin{aligned} \left(h^2\Delta_x + \frac{\mu}{|x|} + (1-\mu)\int\frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|}dy - 1\right)\varphi(x) = 0,\\ \|\varphi\|_{L_2} = 1, \quad x\in\mathbb{R}^3, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где μ – параметр, $\mu \geqslant 0$, $\mu \neq 1$, вводится функция $\omega_k(r)$ и число k как решение следующей задачи (уравнение для самосогласованного потенциала):

$$\omega''(r) = k/\sqrt{r\omega(r)}, \quad r\in(0,1),$$
$$\omega(0) = \mu, \quad \omega(1) = 0, \quad \omega'(1) = -1,$$

и определяется кривая в фазовом пространстве уравнением

$$p_r^2 = \frac{1}{r}\omega_k(r), \quad 0 < r \leqslant 1. \quad (5)$$

Тогда правило квантования

$$h = \sigma/2n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (6)$$

где

$$\sigma = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{\omega_k(r)}{r}}\,dr$$

выделяет дискретный спектр значений $h=h_n$, при к-рых определен канонич. оператор Маслова. Подстановка найденных значений h в формулу для канонич. оператора приводит к следующей функции:

$$\chi_n(r) = 4\left(\frac{|k|n}{\pi\sigma|\mu-1|}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty dp\,\frac{r(p)}{\sqrt{|J(r(p))|}} \sin\left(\frac{2rpn}{\sigma}\right) \sin\left(\frac{2n}{\sigma}\int_0^p r(p')\,dp'\right),$$

где

$$J(r) = k\int_0^r \frac{\sqrt{r'}\,dr'}{\sqrt{\omega_k(r')}} - \mu,$$

$r=r(p)$ – решение уравнения (5).

Теорема 3. Пусть выполнено правило квантования (6). Тогда функция

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{4\pi}}\chi_n(|x|)$$

является асимптотич. решением задачи (4) с точностью $O(h^{1+1/6})$.

Лит.: [1] Маслов В. П., Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана, М., 1976; [2] его же, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 11, М., 1978, с. 153–234; [3] Карасев М. В., Маслов В. П., там же, т. 13, М., 1979, с. 145–267. *А. В. Пereскоков.*

САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР – *линейный оператор* A с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$ в гильбертовом пространстве H, совпадающий со своим (гильбертово) сопряженным оператором A^*, то есть $(\xi, A\eta) = (A\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in \mathcal{D}(A) (\Leftrightarrow A \subset A^*)$ и $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$. Тем самым A замкнут, не имеет симметрич. расширений; у ограниченного С. о. $\mathcal{D}(A) = H$. Замкнутый линейный оператор A является С. о. тогда и только тогда, когда имеет непустой спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ и допускает спектральное разложение

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,dE(\lambda)$$

с единственной спектральной мерой $E(\cdot)$, носитель к-рой есть $\sigma(A)$ (см. *Спектральная теорема*).

Для С. о. имеется развитое функциональное исчисление. В соответствующем оснащении гильбертова пространства возможно разложение по собственным функциям С. о. При изучении возмущений С. о. (или сумм С. о.) применяются квадратичные формы операторов. Область определения формы С. о. A равна $\mathcal{D}(|A|^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A)$. Для положительного С. о. A его форма $\mathcal{Q}(A) = (A^{1/2}\xi, A^{1/2}\xi)$. С. о. A положителен ($A \geqslant 0$), если $(\xi, A\xi) \geqslant 0$, $\xi \in \mathcal{D}(A)$, что равносильно $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$; A полуограничен снизу ($A \geqslant m > -\infty$), если $A - mI \geqslant 0$; при этом $-A$ полуограничен сверху. Полуограниченность является достаточным условием существования самосопряженных расширений симметрич. оператора. Симметрич. A существенно (или в существенном) С. о., если замыкание $\bar{A} = A^{**}$ есть С. о. Всякий С. о. имеет плотное множество (квази) аналитич. векторов, а симметрич. оператор с таким свойством существенно самосопряжен.

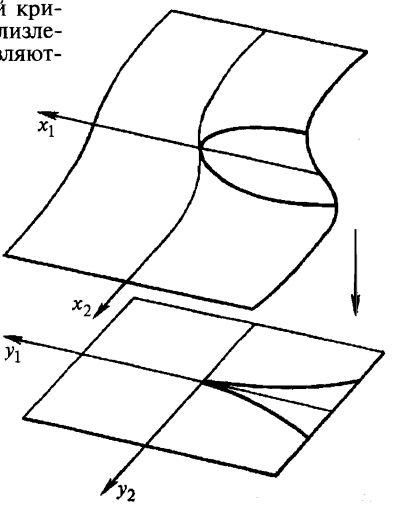
Начиная с работ Дж. Неймана (J. Neumann) и М. Стоуна (M. Stone) развитие теории С. о. в значительной мере связано с математич. проблемами квантовой теории.

Иногда оператор A в банаховом пространстве X называют С. о., если iA есть генератор C_0-полугруппы изометрий (см. *Стоуна теорема*).

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1–2, М., 1962–66; [2] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [3] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., Харьков, 1978; [4] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1–2, М., 1977–78; [5] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [6] Нейман И., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [7] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965; [8] Faris W. G., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 433. *А. В. Булинский.*

САМОУСРЕДНЕНИЕ – см. *Случайное блуждание* в случайной среде.

СБОРКА – особенность гладкого отображения плоскости в плоскость (или поверхности в поверхность), встречающаяся у отображений *общего положения* в изолированных точках и неустранимая малыми шевелениями. В нек-рых локальных координатах может быть записана в виде $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2^3 + x_1x_2$ (см. рис.). В прообразе точка С. лежит на неособой кривой особых точек (близлежащие точки к-рой являются точками *складки*), образ к-рой локально диффеоморфен полукубич. параболе.



Сборка.

См. также *Катастроф теория.* *О. В. Ляшко.*

СВЕРТКА на группе – операция на классе функций определенных на группе Ли. А именно, сверткой функций f_1 и f_2 называют функцию на группе G:

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)\,d_l h,$$

где через $d_l h$ обозначена левоинвариантная *Хаара мера* на G (если группа конечна, то интегрирование по группе заменяется на суммирование). *Ю. А. Неретин.*

СВЕРТКА обобщенных функций – распространение классической *свертки*

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,d^n y$$

суммируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ на *обобщенные функции*. С. обобщенных функций широко применяется в теории обобщенных функций и их приложениях к уравнениям с частными производными и ряду задач математич. физики.

Общая схема построения С. имеет следующий вид. Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ – основные пространства (см. *Обобщенная функция*) функций на $\mathbb{R}^n$ такие, что для всякой функции $\Phi(x) \in \mathcal{H}$ функция двух аргументов $\Psi(x, y) = \Phi(x+y) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, причем индуцированное отображение $\mathcal{H} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ – непрерывное. Тогда для любых обобщенных функций $f \in \mathcal{F}$ и $g \in \mathcal{G}$ равенство

$$(f * g, \Phi) = (f \otimes g, \Psi),\ \Phi \in \mathcal{H},$$

определяет обобщенную функцию – свертку

$$f * g \in \mathcal{H}'.$$

С. обладает свойствами:

(а) $f * g = g * f$;

(б) $D_i(f * g) = (D_i f) * g = f * (D_i g)$, $D_i = \partial/\partial x_i$;

(в) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

В частности, если $\mathscr{F}=\mathscr{G}=\mathscr{H}$, то $\mathscr{F}'$ – сверточная алгебра.

Свертка аналитических функционалов. Пусть $\mathscr{H}(O)$, $\mathscr{H}(P)$ и $\mathscr{H}(O+P)$ – основные пространства функций, аналитических в областях O, P и $O+P\subset\mathbb{C}^n$. Тогда

$$\Psi(x,y)=\Phi(x+y)\in\mathscr{H}(O\times P)=\mathscr{H}(O)\otimes\mathscr{H}(P)$$

для всякой функции $\Phi\in\mathscr{H}(O+P)$, причем индуцированное отображение непрерывное. Поэтому для любых аналитич. функционалов $f\in\mathscr{H}'(O)$ и $g\in\mathscr{H}'(P)$ определена их С. $f*g\in\mathscr{H}'(O+P)$. В случае $O=P=\mathbb{C}^n$, $\mathscr{H}'(\mathbb{C}^n)$ – сверточная алгебра.

Свертка распределений. Пусть $\mathscr{E}=\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{D}=\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ – основные пространства для *финитных распределений* и *Шварца распределений*. Тогда

$$\Psi(x,y)=\Phi(x+y)\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{D}$$

для всякой функции $\Phi\in\mathscr{D}$, причем индуцированное отображение непрерывное. Отсюда, для всех $f\in\mathscr{E}'$ и $g\in\mathscr{D}'$ определена С. $f*g\in\mathscr{D}'$.

Часто тензорное произведение основных пространств, на к-рых определены данные обобщенные функции, не обладает свойством $\Phi(x+y)\in\mathscr{F}\otimes\mathscr{G}$, но сами обобщенные функции однозначно продолжаются на более широкие основные пространства, для к-рых это свойство уже справедливо. В этом случае, по определению, полагают С. данных обобщенных функций равной С. их продолжений.

Свертка умеренных распределений. Пусть $f, g\in\mathscr{S}'_{\Gamma_+}$ – умеренные распределения с носителями, ограниченными со стороны острого замкнутого конуса Г. Здесь,

$$\Psi(x,y)=\Phi(x+y)\notin\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})=\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

для всех ненулевых $\Phi(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Однако f и g однозначно продолжаются на основное пространство $\mathscr{S}(\Gamma_+)$ (см. *Умеренное распределение*), причем теперь

$$\Psi(x,y)\in\mathscr{S}(\Gamma\times\Gamma_+)=\mathscr{S}(\Gamma_+)\otimes\mathscr{S}(\Gamma_+)$$

для всех $\Phi\in\mathscr{S}(\Gamma_+)$, и индуцированное отображение непрерывное. Следовательно, определена С. $f*g\in\mathscr{S}'_{\Gamma_+}$. Таким образом, $\mathscr{S}'_{\Gamma_+}$ – сверточная алгебра, ее единица – дельта-функция Дирака (см. *Обобщенная функция*). Важной подалгеброй этой алгебры является $\mathscr{S}'_{\Gamma}$ – множество умеренных распределений, носители к-рых лежат в конусе Г.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, 2 изд., М., 1959; [3] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974.

В. В. Жаринов.

СВЕРТКА тензора для тензора $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ типа (p, q) по индексам (i_k, j_l), $1\leqslant k\leqslant p$, $1\leqslant l\leqslant q$, – тензор $\tilde{T}^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}}$ типа $(p-1, g-1)$, определяемый равенством

$$\tilde{T}^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}}=\sum_{i=1}^{n}T^{i_1\dots i_{k-1}i i_k\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{l-1}i j_l\dots j_{q-1}}.$$

В. В. Трофимов.

СВЕРТКИ УРАВНЕНИЕ в пространстве обобщенных функций $\mathscr{F}'$ – уравнение вида

$$A*u=f,$$

где A – *свертыватель* на $\mathscr{F}'$, u – неизвестная, а f – известная *обобщенные функции* из $\mathscr{F}'$. В таком виде записываются, напр., линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$P(D)u=f, \text{ здесь } A(x)=P(D)\delta(x),$$

линейные разностные уравнения вида

$$\sum_i a_i u(x-x_i)=f, \text{ здесь } A(x)=\sum_i a_i\delta(x-x_i),$$

и др.

В. В. Жаринов.

СВЕРТОЧНАЯ АЛГЕБРА – см. *Свертка* обобщенных функций.

СВЕРТЫВАТЕЛЬ на пространстве обобщенных функций $\mathscr{F}'$ – *обобщенная функция* g такая, что определена *свертка* обобщенных функций $g*f\in\mathscr{F}'$ для всех $f\in\mathscr{F}'$, и индуцированное отображение $g*:\mathscr{F}'\to\mathscr{F}'$ непрерывно. Напр., *финитные распределения* являются С. на пространствах *Шварца распределений* и *умеренных распределений*.

В. В. Жаринов.

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ – коллективное спонтанное испускание электромагнитного излучения при переходе системы N возбужденных излучателей ($N>1$) в когерентное сфазированное состояние. С. предсказано Р. Дикке (R. Dicke) в 1954, обнаружено экспериментально в 1973 после создания лазеров.

Р. Дикке показал, что система N инвертированных двухуровневых атомов может спонтанно перейти в основное состояние за время, обратно пропорциональное числу атомов $\tau\sim N^{-1}$. Этот эффект обусловлен наведением корреляций между дипольными моментами перехода пространственно разделенных излучателей, взаимодействующих друг с другом через поле излучения. В результате атомы, находящиеся в макроскопически большом объеме, излучают когерентно. Поскольку полная энергия, излучаемая коллективом атомов, равна $N\hbar\omega_0$ (ω_0 – частота перехода), то интенсивность излучения $I\sim N\hbar\omega_0/\tau\sim N^2$. В случае же обычного спонтанного излучения, когда атомы распадаются независимо друг от друга со временем спонтанного распада T_1, не зависящим от числа излучателей, интенсивность $I\sim N\hbar\omega_0/T_1\sim N$.

С. ансамбля излучателей обусловливается воздействием поля, испущенного одним из осцилляторов, на все остальные излучатели ансамбля. Именно это воздействие способно привести к когерентизации процесса испускания излучения ансамблем осцилляторов. Эффективное самонаведение корреляций между дипольными моментами осцилляторов возможно лишь в том случае, когда время этого процесса $\tau_к$ меньше времени релаксации дипольного момента атома T_2, а также меньше T_1 (обычно $T_2<T_1$). Таким образом, С. представляет собой нестационарный процесс, протекающий за время, меньшее T_1 и T_2. Установление корреляций между излучателями происходит самопроизвольно в процессе излучения; этим С. отличается принципиально от нестационарных когерентных процессов, обусловленных внешней когерентной накачкой, таких, как *фотонное эхо*.

По характеристикам и условиям наблюдения С. отличается и от обычного спонтанного излучения, и от стимулированного излучения. Это отличие можно рассмотреть на примере типичного эксперимента по наблюдению С. (рис. 1,*б*). Внутри макроскопически большого, вытянутого и открытого с обоих концов цилиндра длиной L и площадью основания $Z(L\gg\sqrt{Z}$, $V=LZ$, $n=N/V)$ находится N двухуровневых атомов. Сначала атомы переводятся в верхнее состояние (рис. 1,*а*) достаточно коротким ($\tau_н<\tau_к$)

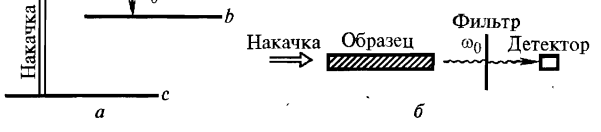


Рис. 1. Схема рабочих уровней (*а*)и экспериментальной установки (*б*) в типичном эксперименте по наблюдению сверхизлучения.

импульсом накачки так, чтобы состояние системы было некогерентным (то есть корреляции между дипольными моментами отсутствуют). Затем начинается свободный распад системы инвертированных атомов, характер к-рого зависит от соотношения временных параметров: T_1, T_2, $\tau_к$, а также от $\tau=L/c$ – времени пролета фотона через среду.

Если плотность атомов настолько мала, что $T_l < \tau_к$, то каждый атом распадается независимо от других и система излучает спонтанно и изотропно по всем направлениям с характерным временем T_l (рис. 2,*б*).

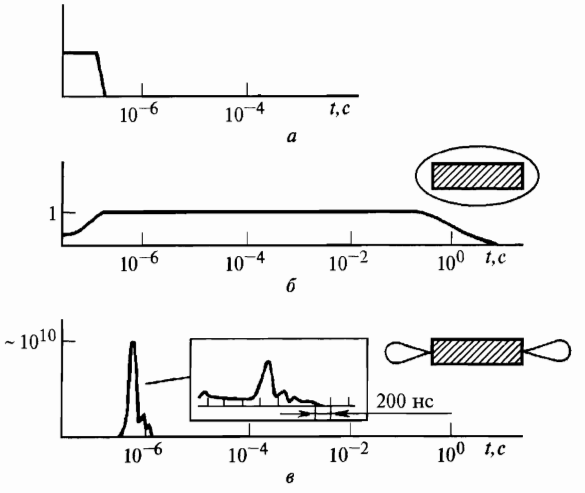


Рис. 2. Сравнение сверхизлучения и некогерентного спонтанного распада: *а* – импульс накачки, инвертирующий рабочий переход; *б* – интенсивность излучения в случае некогерентного спонтанного распада ($T_l \sim$ 1с); *в* – наблюдаемый остронаправленный сигнал сверхизлучения (газ HF), пиковая интенсивность сигнала сверхизлучения примерно в 10^{10} раз превосходит интенсивность спонтанного распада.

Если же выполняется условие

$$\tau \ll \tau_к \ll T_2,\ T_1,$$

то наблюдается С. Правое неравенство означает, что коллективные процессы протекают быстрее, чем релаксационные процессы в каждом атоме. Левое неравенство означает, что фотоны покидают объем за время, меньшее времени наведения межатомных корреляций, так что стимулированными процессами во время развития С. можно пренебречь. При выполнении этих условий система N атомов излучает импульс С., пиковая интенсивность к-рого на несколько порядков превосходит интенсивность спонтанного излучения, причем основная часть излучения направлена вдоль наибольшей вытянутости объема (рис. 2,*в*). При $\tau \sim \tau_к$ часть излученной энергии снова запитывается в атомную подсистему и излучение формируется в виде последовательности импульсов с уменьшающимися амплитудами (рис. 2,*в*) – осцилляторный режим С.

Важной характеристикой С. является время задержки импульса t_0, определяемое по моменту наблюдения максимума импульса, к-рое примерно на порядок превосходит длительность самого импульса С. ($t_0 \sim \tau_к \ln N$). Такая задержка импульса С. объясняется тем, что процесс распада начинается с изотропного спонтанного излучения, и лишь благодаря взаимодействию атомов через поле излучения в системе происходит нарастание корреляций дипольных моментов атомов, к-рые достигают максимального значения как раз в момент t_0.

В случае $T_2 < \tau'_к \ll \tau$ наблюдается режим усиления спонтанного излучения. Левое неравенство означает, что поляризация быстро подстраивается под поле, а правое – то, что фотоны остаются внутри среды на время τ, достаточное для лавинообразного нарастания стимулированного излучения (протекающего за время $\tau'_к$). В литературе процесс усиления спонтанного излучения называют также часто сверхлюминесценцией. С. отличается от него тем, что в формировании С. вынужденные переходы атомов практически не играют роли.

Эффект С. имеет как общефизическое, так и прикладное значение. С физич. точки зрения эффект С. является примером кооперативного поведения системы N частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем. Вопросы о формировании скоррелированного состояния в такой системе, выяснение роли геометрии среды в формировании пространственной когерентности и влиянии формы на скорость указанных процессов представляют общий интерес. С прикладной точки зрения эффект С. имеет значение как один из методов получения когерентного излучения в беззеркальных системах. Особенно это важно для КВ-диапазона (рентгеновского и гамма-излучения), где трудно надеяться на получение высокоотражающих зеркал. Теоретич. оценки показывают, что С. может оказаться возможным механизмом генерации когерентного излучения в этих диапазонах.

Лит.: [1] Dicke R. H., «Phys. Rev.», 1954, v. 93, p. 99; [2] Андреев А. В., «Успехи физич. наук», 1990, т. 160, в. 12, с. 1; [3] Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А., Кооперативные явления в оптике. Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы, М., 1988; [4] Кооперативное излучение и статистика фотонов, Л., 1986. *А. В. Андреев.*

СВЕРХЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ – см. *Сверхизлучение.*

СВЕРХОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – см. *Гейзенберга модель.*

СВЕРХУСТОЙЧИВЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ – *взаимодействия потенциал*, широко используемый в различных задачах статистической механики при доказательстве существования *термодинамического предела* (см. также *Устойчивый потенциал взаимодействия*).

Определение С. п. в. довольно громоздко, поэтому приведем вначале его следствие, представляющее собой удобный критерий для определения того, является ли данный потенциал С. п. в. или нет. Если потенциал Φ представим в виде $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 устойчив, а $\Phi_2 \geqslant 0$ непрерывен и $\Phi_2(0) > 0$, то Φ – С. п. в.

Разобьем пространство $\mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, на кубы со стороной λ ($0 < \lambda \in \mathbb{R}$) следующим образом:

$$\Lambda(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^\nu : \left(r^i - \frac{1}{2}\right)\lambda \leqslant x^i < \left(r^i + \frac{1}{2}\right)\lambda\right\},$$

где $x = (x^1, \ldots, x^\nu)$, $r = (r^1, \ldots, r^\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}^\nu)^m$, а $n(X, r)$ – число точек (частиц) из последовательности X, попадающих в куб $\Lambda(r)$. Пусть также $U(x_1, \ldots, x_m)$ – потенциальная энергия, определяемая парным потенциалом взаимодействия Φ (или набором k-частичных потенциалов взаимодействия Φ^k, $k \geqslant 2$).

Взаимодействие (то есть парный потенциал Φ или набор Φ^k, $k \geqslant 2$) называется сверхустойчивым, если существуют такие $A > 0$ и $B \geqslant 0$, что

$$U(x_1, \ldots, x_m) \geqslant \sum\nolimits_{r \in \mathscr{R}} (An(X,r)^2 - Bn(X,r)), \qquad (*)$$

где $x_1, \ldots, x_m \in \bigcup_{r \in \mathscr{R}} \Lambda(r)$, а $\mathscr{R}$ – конечное подмножество $\mathbb{Z}^\nu$. Условие (*) можно преобразовать к виду:

$$U \geqslant -Bm + \frac{A\lambda^\nu m^2}{V} = -Bm + \frac{Am^2}{V},$$

где V – объем области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$, в к-рой заключена система m частиц.

Условие сверхустойчивости накладывает более сильное ограничение на потенциал, чем условие устойчивости. Оно означает, что удельная потенциальная энергия ограничена снизу, а при возрастании плотности растет по линейному закону (или быстрее). Сумма устойчивого и сверхустойчивого потенциала сверхустойчива. Примером С. п. в. является *Леннард-Джонса потенциал взаимодействия.* Неустойчивые потенциалы взаимодействия не сверхустойчивы. Примером устойчивого, но не сверхустойчивого взаимодействия могут служить непрерывные неотрицательные потен-

циалы, равные нулю в нек-рой окрестности начала координат. Другой пример:

$$\Phi(|x|)=\begin{cases}12, & 0<|x|<R-\delta,\\ -1, & R-\delta\leqslant|x|<R+\delta,\\ 0, & |x|>R+\delta.\end{cases}$$

С использованием С. п. в. удается доказать вероятностную оценку Рюэля, широко используемую при решении различных задач статистич. механики: пусть Φ – регулярный снизу С. п. в. и пусть μ – большое канонич. распределение Гиббса с потенциалом Φ. Тогда для произвольного измеримого по Лебегу множества $\Delta\subset\mathbb{R}^\nu$ диаметром $L\geqslant\lambda$ существуют такие $g>0$ и $d\geqslant 0$, что вероятность обнаружить в Δ более чем m частиц не превышает величины

$$\exp\left\{-g\frac{m^2}{L^\nu}+dm\right\}.$$

Лит.: [1] Ruelle D., «Helv. Phys. Acta», 1963, v. 36, p. 183.

П. В. Малышев.

СВЕТА ОБЛАСТЬ – см. *Стационарный фазы метод.*

СВЕТОВОЙ КОНУС – совокупность точек пространства-времени (четырехмерного псевдоевклидова пространства), отделенных от начала O системы координат нулевым интервалом. Это трехмерная конич. гиперповерхность с вершиной O, уравнение к-рой (в галилеевых координатах t, x, y, z) имеет вид:

$$s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0,$$

здесь c – скорость света. Аналогично определяется С. к. относительно произвольной *мировой точки.* Он образован совокупностью *мировых линий* свободно распространяющихся световых сигналов (или любых частиц с нулевой массой покоя, напр. нейтрино), проходящих через эту точку (вершину конуса).

Мировые точки (события) внутри С. к., когда

$$s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2>0,$$

образуют две области: при $t>0$ – так наз. абсолютное будущее по отношению к событию O; событие O может оказать непосредственное воздействие на любое событие A из области абсолютного будущего, так как они могут быть связаны сигналами, распространяющимися со скоростью, меньшей c; при $t<0$ – так наз. абсолютное прошедшее для события O; на него может оказать влияние любое событие B абсолютного прошедшего, так как сигналы из B могут достичь O со скоростью, меньшей c. Мировые точки (события) вне С. к., когда

$$s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2<0,$$

не могут быть связаны никакими сигналами, поскольку они не распространяются быстрее света.

Таким образом, С. к. отделяет события, к-рые могут находиться в причинно-следственной связи с O, от событий, для к-рых это невозможно; с этим связано фундаментальное значение понятия скорости света.

Понятие С. к. существенно используется при аксиоматич. построении геометрии псевдоевклидова пространства вообще и пространства-времени в частности (см. [3]).

Лит.: [1] Физическая энциклопедия, т. 4, М., 1994, с. 463; [2] Тонелла М.-А., Основы электромагнетизма и теории относительности, пер. с франц., М., 1962; [3] Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю., Геометрия, М., 1990.

И. Ю. Кобзарев.

СВЕТОВОЙ КОНУС; калибровка – *калибровочное условие* вида $(n_\mu, A_\mu)=0$, где n_μ – светоподобный вектор, $n^2=0$. Калибровка С. к. используется в моделях релятивистских струн.

А. А. Славнов.

СВЕТОПОДОБНЫЙ ВЕКТОР – см. *Четырехмерный вектор.*

СВОБОДНАЯ РАЗМЕРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ гироскопа – см. *Гироскопа математическая теория.*

СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ – термодинамический потенциал, однозначная функция состояния термодинамической системы при условии, что в качестве независимых термодинамических параметров выбраны объем V и температура T. С. э. связана с внутренней энергией U соотношением

$$F=U-TS,$$

где S – энтропия системы. С. э. минимальна в состоянии термодинамич. равновесия (при постоянных V и T). При изотермич. процессах изменение С. э. равно работе, совершаемой системой. В статистич. механике С. э. определяется соотношением

$$F=-\frac{1}{kT}\ln Z,$$

где Z – статистич. сумма системы, k – постоянная Больцмана.

См. также *Гиббса распределения, Термодинамические функции.*

А. В. Солдатов.

СВОБОДНОГО ПОЛЯ УРАВНЕНИЯ – см. *Лагранжев формализм.*

СВОБОДНОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ – синусоидальное колебание. Если механич. или физич. величина $x(t)$, где t – время, меняется по закону

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi), \qquad (1)$$

то говорят, что $x(t)$ совершает С. г. к. Здесь A, ω, φ – действительные постоянные, $A>0$, $\omega>0$. Величины A, ω, φ называются соответственно амплитудой, частотой, фазой С. г. к. Период С. г. к. равен $T=2\pi/\omega$. В физике и технике часто употребляется такая терминология: С. г. к. называется гармоническим колебанием, или простым гармоническим колебанием, функция вида (1) – гармоникой, переменная величина $\omega t+\varphi$ – мгновенной фазой, а постоянная φ – начальной фазой. Величина ω называется также круговой, или циклической, частотой, а $f=\omega/2\pi$ – частотой. С. г. к. (1) можно записать в виде

$$x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t,$$

где a, b и A, φ связаны соотношениями

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или в виде

$$x(t)=\mathrm{Re}\,(Ae^{i(\omega t+\varphi)}).$$

Часто фазой называют не φ, а $-\varphi$.

Малые колебания механич. или физич. систем с одной степенью свободы вблизи устойчивого невырожденного положения равновесия представляют собой С. г. к. с большой степенью точности. Таковы, напр., малые колебания маятника; колебания груза, подвешенного на пружинке; колебания камертона; изменение напряжения и силы тока в электрич. колебательном контуре; качка корабля и т. д. Система, совершающая С. г. к., называется линейным гармоническим осциллятором, и ее колебания описываются уравнением

$$\ddot{x}+\omega^2x=0.$$

Для математич. маятника длины l и массы m:

$$\omega^2=g/l,$$

для груза массы m на пружинке с коэффициентом упругости k:

$$\omega^2=k/m;$$

для электрич. колебательного контура, состоящего из емкости C и индуктивности L:

$$\omega^2=1/CL.$$

На фазовой плоскости $(x,\ \dot{x})$ положение равновесия $x=0$, $\dot{x}=0$ для С. г. к. есть центр, а фазовые траектории – окружности.

Сумма двух С. г. к.

$$x_1(t)+x_2(t),$$

где $x_j(t)=A_j\cos(\omega_j t+\varphi_j)$, $j=1,\ 2$,

с соизмеримыми частотами ω_1, ω_2 есть С. г. к. Если же

частоты ω_1, ω_2 несоизмеримы, то $x_1(t)+x_2(t)$ есть почти периодич. функция и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(x_1(t)+x_2(t)) = A_1+A_2 = -\inf_{t\in\mathbb{R}}(x_1(t)+x_2(t)).$$

Сумма n С. г. к. с частотами $\omega_1,\ldots,\omega_n$, к-рые рационально независимы, также есть почти периодич. функция. Для суммы двух С. г. к. величина $\Omega=|\omega_1-\omega_2|$ называется расстройкой. Если расстройка мала: $\Omega/\omega_1 \ll 1$, а ω_1, ω_2 — одного порядка, то

$$x_1(t)+x_2(t)=A(t)\cos(\omega_1 t+\varphi(t)),$$
$$A^2(t)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\psi(t)-\varphi_1),$$
$$\psi(t)=\Omega(t)+\varphi_2.$$

«Амплитуда» $A(t)$ — медленно меняющаяся функция, имеющая период $2\pi/\Omega$, и $A^2(t)$ меняется в пределах от $(A_1-A_2)^2$ до $(A_1+A_2)^2$. Колебание $x_1(t)+x_2(t)$ называется биением: «амплитуда» $A(t)$ поочередно увеличивается и уменьшается. Этот случай важен для анализа приемных устройств.

Пусть имеется система из n уравнений:

$$M\ddot{x}+Kx=0,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

где M, K — действительные симметрич. положительно определенные матрицы с постоянными элементами. С помощью ортогонального преобразования $x=Ty$ эта система приводится к распадающейся системе:

$$\ddot{y}_j+\omega_j^2 y_j=0,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Координаты y_1, ..., y_n называются нормальными. В нормальных координатах $x(t)$ есть векторная сумма С. г. к. вдоль координатных осей.

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1981; [2] Горелик Г. С., Колебания и волны, М., 1959; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, изд., т. 1, М., 1973. *М. В. Федорюк.*

СВОБОДНОЕ КОЛЕБАНИЕ — см. *Собственное колебание.*

СВОБОДНЫЙ ВЕКТОР — см. *Вектор.*

СВОБОДНЫЙ ЛАГРАНЖИАН — см. *Лагранжиан.*

СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ — состояние системы частиц, при котором относительное движение частиц происходит в ограниченной области пространства (является финитным) в течение длительного времени по сравнению с характерными для данной системы периодами. Природа изобилует С. с.: от звездных скоплений и макроскопич. тел до микрообъектов — молекул, атомов, атомных ядер. С. с. являются и многие из так наз. элементарных частиц.

Для образования С. с. необходимо наличие сил притяжения по крайней мере между нек-рыми частицами системы на нек-рых расстояниях между ними. Для С. с. масса системы меньше суммы масс составляющих ее частиц; разность Δm между ними определяет энергию связи системы:

$$\mathcal{E}_{\text{св}}=\Delta mc^2.$$

В классич. механике С. с. описываются финитными решениями уравнений движения системы, траектории всех частиц системы сосредоточены в ограниченной области пространства. Примером может служить задача Кеплера о движении частицы (или планеты) в поле тяготения. В классич. механике система из двух притягивающихся частиц всегда может образовать С. с. Если область расстояний, на к-рых частицы притягиваются, отделена энергетич. барьером (потенциальным барьером) от области, в к-рой они отталкиваются, то частицы также могут образовывать стабильные С. с.

В квантовой механике, в отличие от классической, для образования С. с. частиц необходимо, чтобы потенциальная энергия притяжения и радиус действия сил были достаточно велики. *В. Я. Файнберг.*

СВЯЗАННЫЙ ВЕКТОР — см. *Вектор.*

СВЯЗЕЙ РЕАКЦИИ — см. *Реакции связей.*

СВЯЗИ КОНСТАНТА, константа взаимодействия,— параметр, характеризующий силу взаимодействия частиц или полей. С. к. обычно определяется через *амплитуду рассеяния* двух частиц при данных (выбранных по соглашению) энергии и передаче импульса. При этом одним из наиболее важных требований, накладываемых на теорию, является независимость физич. результатов от изменения такого соглашения — так наз. ренормализационная инвариантность (см. *Перенормировка*). По величине С. к. в физике элементарных частиц различают сильное взаимодействие, характеризуемое безразмерной постоянной $g^2/\hbar c\approx 14$, электромагнитное взаимодействие, характеризуемое величиной $\alpha=e^2/\hbar c\approx 1/137$, а также слабое и гравитационное взаимодействия, характеризуемые, соответственно, величинами $G_F M^2 c/\hbar^3\approx 10^{-5}$ и $GM^2/\hbar c\approx 3{,}5\cdot 10^{-12}$. Здесь g — константа сильного взаимодействия, e — элементарный электрич. заряд (константа электромагнитного взаимодействия), G_F — фермиевская константа слабого взаимодействия, G — гравитационная постоянная, M — масса нуклона.

В объединенной теории электромагнитного и слабого взаимодействий константа G_F выражается через постоянную α и массу промежуточного векторного бозона. Имеется тенденция построения единой теории всех взаимодействий (см. *Великое объединение взаимодействий*), в к-рой С. к. все выражались бы друг через друга. *А. В. Ефремов.*

СВЯЗИ МЕХАНИЧЕСКИЕ — ограничения, налагаемые на положение или движения механической системы. Обычно С. м. осуществляются с помощью каких-нибудь тел. Примеры таких С. м.— поверхность, по к-рой скользит или катится тело; нить, на к-рой подвешен груз; шарниры, соединяющие звенья механизмов, и т. п. Если положения точек механич. системы по отношению к данной системе отсчета определять их декартовыми координатами x_k, y_k, z_k, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, где n — число точек системы, то ограничения, налагаемые С. м., могут быть выражены в виде равенств (или неравенств), связывающих координаты x_k, y_k, z_k, их первые производные по времени $\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, $\dot{z}_k$ (то есть скорости точек системы) и время t.

С. м., налагающие ограничения только на положения (координаты) точек системы и выражающиеся уравнениями вида

$$f(\ldots,x_k,y_k,z_k,\ldots,t)=0, \qquad (1)$$

называются геометрическими. Если же С. м. налагают ограничения еще и на скорости точек системы, то они называются кинематическими (дифференциальными), а их уравнения имеют вид:

$$\varphi(\ldots,x_k,y_k,z_k,\ldots,\dot{x}_k,\dot{y}_k,\dot{z}_k,\ldots,t)=0. \qquad (2)$$

Когда уравнение (2) может быть проинтегрировано по времени, соответствующая кинематич. связь называется интегрируемой и эквивалентна геометрич. связи. Геометрич. и интегрируемые кинематич. связи носят общее название голономных С. м. (см. *Голономная система*). Кинематич. неинтегрируемые С. м. называются неголономными (см. *Неголономная система*).

С. м., не изменяющиеся со временем, называются стационарными (их уравнения не содержат явно время t), а С. м., изменяющиеся со временем, называются нестационарными. Наконец, С. м., при к-рых каждому возможному перемещению точек системы соответствует перемещение, прямо противоположное по направлению, называются удерживающими [их уравнения выражаются равенствами вида (1), (2)], а С. м., не удовлетворяющие этому условию (напр., гибкая нить, допускающая перемещение вдоль нити только в одном направлении), называются неудерживающими и их уравнения выражаются неравенством вида

$$f(\ldots,x_k,y_k,z_k,\ldots)\geqslant 0.$$

Методы решения задач механики существенно зависят от характера С. м., налагаемых на систему. Эффект действия С. м. можно учитывать введением соответствующих сил, называемых *реакциями связей*; при этом для определения реакций (или для их исключения) к уравнениям равновесия или движения системы должны присоединяться уравнения связей вида (1) или (2). С. м., для к-рых сумма элементарных работ всех реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю, называются идеальными (напр., лишенная трения поверхность или гибкая нить). Для механич. систем с идеальными С. м. можно сразу получить уравнения равновесия или движения, не содержащие реакций связей, используя принцип возможных перемещений, принцип Д'Аламбера – Лагранжа или уравнения Лагранжа.

С. М. Тарг.

СВЯЗНАЯ ГРУППА – см. *Топологическая группа.*

СВЯЗНАЯ ЧАСТЬ интегрального оператора K, ядро которого $K(P,P)$ имеет δ-функционные особенности,– оператор $K_с$ с гладким ядром из суммы $K=K_{нс}+K_с$, где $K_{нс}$ – несвязный оператор. Примером несвязного оператора может служить резольвента оператора $H=H_0+V$, где H_0 – оператор умножения на p^2, а V – связный оператор. Для резольвенты $R(z)=(H-z)^{-1}$ и $R_0(z)=(H_0-z)^{-1}$, $z\in\mathbb{C}$, имеет место тождество

$$R(z)=R_0(z)-R_0(z)VR(z),$$

в к-ром первое слагаемое – несвязный оператор с ядром $\delta(p-p')(p^2-z)^{-1}$, а второе слагаемое – связный оператор. Следовательно, в данном случае С. ч. оператора $R(z)$ имеет вид

$$[R(z)]_с=R(z)-R_0(z).$$

Лит.: [1] Березин Ф. А., «Доклады АН СССР», 1964, т. 157, с. 1069–72; [2] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО – *топологическое пространство X*, которое нельзя разбить на объединение двух непересекающихся замкнутых множеств. С. п., представляющие интерес для физики, обычно оказываются линейно связными – такими, что любые две точки из X можно соединить путем, лежащим в X. Линейно связное пространство связно, обратное неверно, но связное многообразие линейно связно. Открытое связное множество называется областью.

М. И. Войцеховский.

СВЯЗНОСТЬ на *расслоении* $p:X\to B$ – геометрическая структура, необходимая для согласованного отождествления (называемого параллельным переносом) слоев вдоль некоторого пути.

В физике обычно используются С. на главном расслоении и на ассоциированном с ним расслоении. При этом слои «пронизаны» семейством кривых, инвариантных относительно действия группы G (они называются горизонтальными путями). Результаты параллельного переноса по двум различным путям, соединяющим точки b_0 и b_1, отличаются нек-рым гомеоморфизмом слоев в точке b_1 – умножением на нек-рый элемент группы. Это можно рассматривать как «сдвиг фазы» (в физике обычно интерпретируемый как результат воздействия внешнего поля), а в геометрич. терминологии как кривизну, «искривление» расслоения.

Переходом к бесконечно малым получается инфинитезимальная связность (или С. в инфинитезимальной форме в точке x) в данном направлении l (инфинитезимальный сдвиг слоя в соседний слой). Инфинитезимальная кривизна зависит от пары направлений в точке x и принимает значения в алгебре Ли группы G. Эту инфинитезимальную С. можно проинтегрировать и получить глобальную картину параллельного переноса вдоль кривых.

С. на многообразиях можно разделить на внутренние и внешние. К первым относятся те С., к-рые определяются структурами, непосредственно связанными с многообразием. К ним относятся, напр., аффинная С. и линейная С. (соответствующие аффинной и линейной группам), определенные в главном расслоении реперов на касательном (или кокасательном) пространстве; к ним же можно отнести С., к-рые сохраняют нек-рые геометрич. величины – объем, конформную структуру (*Вейля связность*), метрику.

Пример. Метрическая связность – это С., при параллельном переносе к-рой сохраняется *метрический тензор*. Эта С. находит применение в представлениях об упругой среде с непрерывным распределением источников внутренних напряжений.

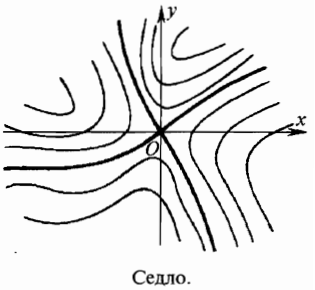
Ко второй группе С. относятся С., определяемые надстроенными над многообразием структурами; напр., вложением многообразия в более обширное пространство, пристройкой к многообразию калибровочных потенциалов, описывающих *внутренние симметрии*, и т. д.

М. И. Войцеховский.

СДВИГА ОПЕРАТОР – см. *Когерентное состояние.*

СДВИГА ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Символическая динамика.*

СЕДЛО – один из видов *особых точек* дифференциального уравнения 1-го порядка. В окрестности С. имеются четыре интегральные кривые (сепаратрисы), к-рые входят в особую точку; между ними располагаются интегральные кривые типа гипербол (рис.). Картина интегральных кривых в окрестности С. напоминает линии уровня гиперболич. параболоида, имеющего форму С.; отсюда название особой точки.



Седло.

В. И. Битюцков.

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА – см. *Перевала метод.*

СЕКУЛЯРНАЯ МАТРИЦА – см. *Секулярный гамильтониан.*

СЕКУЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Возмущений теория.*

СЕКУЛЯРНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН, секулярная матрица,– часть $\underline{L}$ оператора возмущения L, коммутирующая с невозмущенным гамильтонианом H и такая, что полный гамильтониан $H+\varepsilon L$ унитарно эквивалентен усредненному $H+\varepsilon\underline{L}$ по mod $O(\varepsilon^2)$ (см. [1], [2]), причем унитарная эквивалентность осуществляется усредняющим оператором. С. г. $\underline{L}$ входит в правую часть квантового гомологич. уравнения и подбирается так, чтобы обеспечить разрешимость этих уравнений (см. [3]).

Лит.: [1] Weinstein A., «Duke Math. J.», 1977, v. 44, № 4, p. 883–92; [2] Bogaevsky V. N., Povzner A. Ya., Lect. Notes Math., 1983, № 985, p. 431–48; [3] Карасев М. В., Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 6, с. 115–73.

Ю. М. Воробьев.

СЕМИИНВАРИАНТ, полуинвариант, n-го порядка – коэффициент χ_n n-го члена разложения в степенной ряд логарифма *характеристической функции*

$$\varphi(t)=\mathsf{E}e^{it\xi}$$

случайной величины ξ (см. *Куммулянтное разложение*). Более точно, если абсолютный *момент* порядка n случайной величины ξ существует, то производные функции $\ln\varphi(t)$ вплоть до порядка n непрерывны в нек-рой окрестности точки $t=0$ и

$$\chi_n=(-i)^n\frac{d^n}{dt^n}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0}$$

называется семиинвариантом порядка n. Если $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ является случайным k-мерным вектором и

$$\varphi_\xi(t)=\mathsf{E}e^{i(t,\xi)},$$

$$t=(t_1,\ldots,t_k),\quad t_j\in\mathbb{R},\quad (\xi,t)=\sum_{s=1}^k\xi_s t_s,$$

а абсолютные моменты порядка n существуют, $\mathsf{E}|\xi_j|^n<\infty$, $j=1, \ldots, k$, то коэффициенты

$$\chi_n(\xi; l_1, \ldots, l_k) = (-i)^n \frac{\partial^n \ln \varphi_\xi(t)}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_k^{l_k}}\Big|_{t=0} \qquad (1)$$

при $l_j \geqslant 0$, $|l| = l_1 + \ldots + l_k = n$, называются смешанными С. порядка n случайного вектора ξ. Для независимых случайных векторов ξ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$ выполняется свойство

$$\chi_n(\xi+\eta; l_1, \ldots, l_k) = \chi_n(\xi; l_1, \ldots, l_k) + \chi_n(\eta; l_1, \ldots, l_k),$$

к-рое и послужило основанием для термина «семиинвариант».

С. являются многочленами от моментов порядка $m \leqslant n$. Их явный вид может быть найден из уравнений

$$\mathsf{E}\xi_1^{l_1} \ldots \xi_k^{l_k} = \sum\nolimits^* \frac{n!}{s!} \prod_{j=1}^s \frac{1}{l^{(j)}!} \chi_m(l^{(j)}),$$

где Σ^* означает суммирование по всем упорядоченным наборам целочисленных векторов $l^{(j)} = (l_1^{(j)}, \ldots, l_k^{(j)})$, $l_i^{(j)} \geqslant 0$, положительной длины, $|l^{(j)}| > 0$, дающих в сумме вектор l, $l = \sum_j l^{(j)}$ и $l^{(j)}! = l_1^{(j)}! \ldots l_k^{(j)}!$, $\chi_m(l^{(j)}) \equiv \chi_m(\xi; l_1^{(j)}, \ldots, l_k^{(j)})$, $m = |l^{(j)}|$. Тогда

$$\chi_n(l) = \sum\nolimits^* \frac{(-1)^{s-1}}{s} n! \prod_{j=1}^s \frac{1}{l^{(j)}!} \mathsf{E} \prod_{i=1}^k \xi_i^{l_i}.$$

В частности, при $k=1$

$$\chi_1 = \mathsf{E}\xi, \ \chi_2 = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{D}\xi,$$

$$\chi_3 = \mathsf{E}\xi^3 - 3\mathsf{E}\xi\mathsf{E}\xi^2 + 2(\mathsf{E}\xi)^3,$$

$$\chi_4 = \mathsf{E}\xi^4 - 3(\mathsf{E}\xi^2)^2 - 4\mathsf{E}\xi\mathsf{E}\xi^3 + 12\mathsf{E}\xi^2(\mathsf{E}\xi)^2 - 6(\mathsf{E}\xi)^4.$$

Обобщением понятия С. n-го порядка на случай, когда $\xi(t)$ – случайный процесс, $t \in \mathbb{R}$, является понятие *корреляционной функции* $K(t_1, \ldots, t_n)$ n-го порядка, к-рая определяется формулой, аналогичной (1):

$$K(t_1, \ldots, t_n) = (-i)^n \frac{\delta^n \varphi_\xi\{u\}}{\delta u(t_1) \ldots \delta u(t_n)}\Big|_{u(t)\equiv 0},$$

в к-рой обычные производные заменяются на вариационные и роль характеристич. функции выполняет характеристич. функционал

$$\varphi_\xi(u) = \mathsf{E}\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\xi(\tau)\,d\tau\right\}$$

на классе финитных функций достаточной степени гладкости.

Лит.: [1] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

Ю. П. Вирченко.

СЕПАРАБЕЛЬНОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Гильбертово пространство.*

СЕПАРАБЕЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – приближение, используемое при решении уравнения Шредингера, состоящее в замене *короткодействующего потенциала* взаимодействия на *сепарабельный потенциал*. С. п. эффективно при решении задачи на собственные значения для оператора Шредингера.

Лит.: [1] Шмид Э., Цигельман Х., Проблема трех тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1979.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

СЕПАРАБЕЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ – *интегральный оператор* в $L_2(\mathbb{R}^3)$, задаваемый ядром

$$v(x,x') = \sum\nolimits_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j(x) \overline{\varphi}_j(x'), \quad \varphi_j(x) \in L_2(\mathbb{R}^3).$$

Если v – С. п., то задача нахождения резольвенты и *Т-матрицы* для оператора Шредингера $H = -\Delta_x + v$ сводится к алгебраич. задаче. Уравнение теории возмущений для T-матрицы:

$$T(z) = v - v(H_0 - z)^{-1} T(z),$$

$H_0 = -\Delta_x$, с С. п. v является интегральным уравнением с вырожденным ядром и имеет решение вида:

$$T(x,x',z) = \sum\nolimits_{i,j=1}^N \lambda_j \varphi_j(x) \overline{\varphi}_i(x') [\Delta^{-1}(z)]_{ij},$$

где $\Delta^{-1}(z)$ – квадратная $(N \times N)$-матрица, обратная к матрице вида:

$$[\Delta(z)]_{ij} = \frac{1}{\lambda_i}\delta_{ij} + \int dk \frac{\overline{\hat{\varphi}_i(k)}\,\hat{\varphi}_j(k)}{k^2 - z},$$

где $\hat{\varphi}_i(k)$ – преобразование Фурье функции $\varphi_i(x)$. С. п. широко используется в ядерной физике для описания нуклон-нуклонного взаимодействия.

Лит.: [1] Yamaguchi Y., «Phys. Rev.», 1954, v. 95, p. 1628–43; [2] Шмид Э., Цигельман Х., Проблема трех тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1979.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

СЕПАРАТРИСА – см. *Особая точка* дифференциального уравнения, *Седло.*

СЕПАРАТРИСНОЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Центральное многообразие.*

СЕРДЦЕВИНА потенциала взаимодействия – см. *Взаимодействия потенциал* с твердой сердцевиной.

СЕЧЕНИЕ расслоения – см. *Расслоение.*

СЖАТОЕ СОСТОЯНИЕ – обобщение понятия *когерентного состояния*, связанное с *Боголюбова каноническим преобразованием*. В широком смысле – всякое состояние, для которого значение флуктуации одной из физических величин меньше ее значения в вакуумном состоянии. В узком смысле – собственное состояние линейной комбинации бозе-операторов рождения и уничтожения.

Пусть a^+, a – операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие перестановочному соотношению для бозонов: $aa^+ - a^+a = 1$. Канонич. преобразование Боголюбова вводит новые бозе-операторы:

$$b = ua + va^+, \ b^+ = u^*a^+ + v^*a, \ |u|^2 - |v|^2 = 1, \qquad (1)$$

где u, v – комплексные числа. Формально определяемое соотношением $b|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$, когерентное состояние для поля b является С. с. для поля a (в узком смысле). Оно связано с вакуумным состоянием поля a соотношением

$$|\xi\rangle = D(\alpha)S(\zeta)|0\rangle; \ \xi = \xi(\alpha, \zeta),$$

где

$$D(\alpha) = \exp\{\alpha a^+ - \alpha^* a\}$$

– оператор сдвига и

$$S(\zeta) = \exp\{\zeta^* a^2 - \zeta a^{+2}\}$$

– оператор сжатия, обладающий свойствами

$$S^+(\zeta) a S(\zeta) = a \operatorname{ch} r + a^+ e^{i\Phi} \operatorname{sh} r,$$

$$S^+(\zeta) a^+ S(\zeta) = a^+ \operatorname{ch} r - a e^{i\Phi} \operatorname{sh} r.$$

Параметр $\zeta = re^{i\Phi}$ связан с параметрами преобразования (1) соотношениями $r = \ln(|u| + |v|)$, $\Phi = \arg u - \arg v$, а $|\alpha|^2$ – число «частиц a» в данном состоянии.

Нетрудно видеть, что когерентное состояние получается из С. с. в случае $u=1$, $v=0$.

В ряде случаев вместо неэрмитовых операторов a^+, a оказывается удобным рассматривать эрмитовы операторы $X_1 = (a + a^+)/2$, $X_2 = i(a^+ - a)/2$, $X_1X_2 - X_2X_1 = i/2$, имеющие смысл канонич. переменных для квантового гармонич. осциллятора. Соотношение неопределенностей Гейзенберга для них имеет вид:

$$\left\langle (\Delta X_1)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta X_2)^2 \right\rangle \geqslant \frac{1}{4} |\langle X_1X_2 - X_2X_1 \rangle|^2 = \frac{1}{16}, \qquad (2)$$

где $\Delta X \equiv X - \langle X \rangle$. При вычислении средних в (2) по вакуум-

ному или по когерентному состояниям поля a левая часть в (2) достигает минимума, так как в этом случае $Ai\langle(\Delta X_i)^2\rangle = 1/4$. При вычислении средних по С. с. имеют

$$\left\langle(\Delta X_1)^2\right\rangle = \frac{1}{4}e^{-2r}, \quad \left\langle(\Delta X_2)^2\right\rangle = \frac{1}{4}e^{2r}. \qquad (3)$$

Таким образом, С. с. минимизируют левую часть (2), но при этом неопределенность одной из канонич. переменных может стать меньше, чем для вакуумного или когерентного состояний. Смысл процедуры сжатия можно понять, интерпретируя преобразование (1) как переход к новым координатам, содержащий преобразование масштаба.

С. с. тесно связаны с проблемой квантовых измерений. Действительно, если имеется детектор, слабо чувствительный к увеличению флуктуации сопряженной канонич. переменной, обусловленному соотношениями (2), (3), то использование С. с. открывает возможность измерения сигнала, передаваемого другой канонич. переменной, с уровнем, ниже уровня вакуумных флуктуаций поля. Этим обусловлена важность С. с. для создания прецизионных измерительных систем и информационных систем с предельно низким уровнем шумов.

Сжатие флуктуаций может быть определено не только для переменных X_1, X_2, но и для любых других некоммутирующих характеристик поля, напр. для числа квантов и фазы поля.

Лит.: [1] Walls D. F., «Nature», 1983, v. 306, p. 141; [2] Yamamoto Y., Haus H. A., «Rev. Mod. Phys.», 1986, v. 58, p. 1001; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Козеровский М., Чан Куанг, Шумовский А. С., «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1988, т. 19, с. 832. *А. С. Шумовский.*

СЖИМАЕМОСТЬ – термодинамическая величина (интенсивный параметр), характеризующая изменение давления при изменении объема термодинамической системы. Чаще рассматривается изотермическая сжимаемость (при фиксированной температуре):

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$

где V – объем, P – давление, T – температура; $\chi_T \geqslant 0$ для устойчивых состояний. С. связана с парной *корреляционной функцией* ν_2 соотношением

$$kTn\chi_T = 1 + n\int d\boldsymbol{r}\,\nu_2(\boldsymbol{r}).$$

В критич. точке T_c С. обращается в бесконечность. Расходимость С. при подходе к критич. точке со стороны высоких (низких) температур характеризует критич. индекс $\gamma(\gamma')$:

$$\chi_T \sim \theta^{-\gamma}, \ \theta \to 0^+,$$
$$\chi_T \sim \theta^{-\gamma'}, \ \theta \to 0^-,$$

где $\theta = \dfrac{T - T_c}{T_c}$. Для газа Ван-дер-Ваальса, напр., $\gamma = 1$.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., М., 1978. *Д. П. Санкович.*

СЖИМАЮЩЕЕСЯ СЛОЕНИЕ – см. *Слоение.*

СИГАЛА ЛЕММА – см. *Голдена – Томпсона неравенство.*

СИГМА-ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА, σ-функция – см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

СИЛА в механике – мера механического действия на данное материальное тело других тел. Это действие вызывает изменение скоростей точек тела или его деформацию и может иметь место как при непосредственном контакте (давление прижатых друг к другу тел, трение), так и через посредство создаваемых телами полей (поле тяготения, электромагнитное поле). С.– величина векторная и в каждый момент времени она характеризуется численным значением, направлением в пространстве и точкой приложения; сложение сил производится по правилу параллелограмма сил. Прямая, вдоль к-рой направлена С., называется линией действия силы. Если тело можно рассматривать как недеформируемое (абсолютно твердое), то С. можно считать приложенной к любой точке на ее линии действия.

Измерение С. производят статич. или динамич. методами. Статич. метод основан на уравновешивании измеряемой С. другой, ранее известной. Динамич. метод основан на законе динамики $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}$, позволяющем, если известна масса m тела и измерено ускорение $\boldsymbol{w}$ его свободного поступательного движения относительно *инерциальной системы отсчета*, найти силу $\boldsymbol{F}$. *С. М. Тарг.*

СИЛА ИНЕРЦИИ – векторная величина, численно равная произведению массы m материальной точки на ее ускорение $\boldsymbol{w}$ и направленная противоположно ускорению. При криволинейном движении С. и. можно разложить на касательную, или тангенциальную, составляющую $\boldsymbol{J}_\tau$, направленную противоположно касательному ускорению $\boldsymbol{w}_\tau$, и на нормальную составляющую $\boldsymbol{J}_n$, направленную вдоль нормали к траектории от центра кривизны; численно

$$J_\tau = mw_\tau, \ J_n = mv^2/\rho,$$

где v – скорость точки, ρ – радиус кривизны траектории. При изучении движения по отношению к *инерциальной системе отсчета* С. и. вводят для того, чтобы иметь формальную возможность составлять уравнения динамики в форме более простых уравнений статики.

Понятие о С. и. вводится также при изучении относительного движения. В этом случае присоединение к действующим на материальную точку силам взаимодействия с другими телами С. и.– переносной $J_{\text{пер}}$ и *Кориолиса силы* $J_{\text{кор}}$ – позволяет составлять уравнения движения этой точки в подвижной (неинерциальной) системе отсчета так же, как и в инерциальной. *С. М. Тарг.*

СИЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ – см. *Дисперсия.*

СИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ – устойчивость *симплектического оператора* при его малых возмущениях. Оператор G называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|x| < \delta \Rightarrow |G^N x| < \varepsilon \text{ для всех } N > 0.$$

Симплектич. оператор G в линейном симплектич. пространстве называется сильно устойчивым, если всякий достаточно близкий к нему симплектич. оператор G' устойчив.

Если все $2n$ собственных числа симплектич. оператора G различны и лежат на единичной окружности, то оператор G сильно устойчив. *М. Э. Казарян.*

СИЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – см. *Великое объединение взаимодействий.*

СИЛЬНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ – см. *Перемешивание.*

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА – специальный раздел общей теории *динамических систем.* С начала 60-х гг. возникают многочисленные примеры динамич. систем, для адекватного описания к-рых классич. методы (теория устойчивости, асимптотич. ряды теории возмущений и т. п.) оказываются недостаточными. Одним из главных свойств этих систем является наличие сильного разбегания любых траекторий с близкими начальными точками из нек-рой области фазового пространства. Такое поведение траекторий было обнаружено еще в 20-х гг. Ж. Адамаром (J. Hadamard) и М. Морсом (M. Morse) в связи с изучением глобального поведения геодезических на поверхностях отрицательной кривизны. В их работах впервые было использовано кодирование траекторий последовательностями символов из нек-рого алфавита с целью установления различных типов траекторий в фазовом пространстве и их классификации. В частности, было доказано существование счетного множества замкнутых геодезических и существование рекуррентных незамкнутых геодезических. С. д. оформилась как раздел общей теории динамич. систем лишь спустя четыре десятилетия и оказалась адекватным и

эффективным аппаратом исследования важного класса динамич. систем с гиперболич. структурой (см. [1]–[4]).

Моделирование дискретной динамической системы символической динамической системой.

Пусть задан конечный набор (алфавит) символов $G=\{1, 2, ..., N\}$, $N\in\mathbb{Z}^+$, и пусть Ω_N – пространство, состоящее из всевозможных бесконечных в обе стороны последовательностей $\Omega_N=\{\omega=\{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty} \mid \omega_n\in G\}$. Пространство Ω_N как прямое произведение счетного множества экземпляров алфавита G, снабженного дискретной топологией, наделяется топологией прямого произведения. Базу топологии в Ω_N определяют цилиндры, то есть множества вида

$$[i_0, i_1, ..., i_k]_p=\left\{\omega=\{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty}\in\Omega_N\big|_{\omega_p=i_0,...,\omega_{p+k}=i_k}\right\}.$$

Метрика ρ, определяемая

$$\rho(\omega,\omega')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{|\omega_n-\omega'_n|}{2^{|n|}},$$

согласована с этой топологией и превращает Ω_N в компактное метрич. пространство. Задается отображение σ пространства Ω_N на себя как $\sigma(\omega)=\omega'$, где $\omega'_n=\omega_{n+1}$, $n\in\mathbb{Z}$. Отображение σ является гомеоморфизмом пространства Ω_N и называется отображением сдвига (влево). Оно порождает дискретную динамическую систему (каскад) (Ω_N, σ). Пусть Σ – инвариантное множество в Ω_N относительно сдвига σ. Ограничение σ на Σ называется символической динамической системой (Σ, σ). Наряду с пространством Ω_N рассматривают пространство Ω_N^+ бесконечных в одну сторону последовательностей $\omega=\{\omega_n\}_0^{+\infty}$ с отображением сдвига

$$\sigma^+:\Omega_N^+\to\Omega_N^+,\ \sigma^+(\omega)=\omega',$$

где $\omega'_n=\omega_{n+1}$, $n\in\mathbb{Z}^+$. От системы (Σ^+, σ^+), где Σ^+ – инвариантное относительно σ^+ множество в Ω_N^+, с помощью конструкции проективного предела можно перейти к символич. динамич. системе (Σ, σ): пусть π – проекция $\Omega\to\Omega^+$,

$$\pi(\{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty})=\{\omega_n^+\}_0^{+\infty},$$

где $\omega_n^+=\omega_n$ для $n\geqslant 0$, тогда

$$\Sigma=\left\{\omega\in\Omega_N\big|\pi\sigma^k(\omega)\in\Sigma^+\ \text{ для всех }\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Система (Σ, σ) полусопряжена с (Σ^+, σ^+) с помощью проекции π, то есть $\pi\sigma=\sigma^+\pi$. Она наследует все основные динамич. свойства системы (Σ^+, σ^+) и называется ее естественным расширением.

Пусть M – топологич. пространство, на к-ром задана дискретная динамич. система (M, f), где $f: M\to M$ – гомеоморфизм. Произвольному конечному покрытию $L=\{U_1, U_2, ..., U_N\}$ ставится в соответствие, вообще говоря, многозначное отображение $\varphi_L: M\to\Omega_N$, сопоставляющее каждой точке $x\in M$ множество

$$\varphi_L(x)=\left\{\omega=\{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty}\big|f^n(x)\in U_{\omega_n}\right\}.$$

Пусть $\Omega_L=\varphi_L(M)$, тогда элемент $\omega=\{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит Ω_L тогда и только тогда, когда $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}}f^{-n}(U_{\omega_n})\neq\varnothing$. Отображение φ_L обладает свойством $\sigma\varphi_L=\varphi_L f$, к-рое означает, что траектории $\{f^n(x)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x\in M$, переходят под действием φ_L в траектории $\{\sigma^n(\varphi_L(x))\}_{-\infty}^{+\infty}$ множества $\varphi_L(x)$; в частности, множество Ω_L σ-инвариантно. В наиболее интересных случаях покрытие L может быть выбрано таким образом, что отображение φ_L^{-1}, обратное к φ_L, является однозначным и непрерывным, то есть символич. динамич. система (Ω_L, σ) полусопряжена с системой (M, f) и дает большую информацию о ней. Наиболее значительным в этом направлении является следующий результат.

Пусть M компактно и $L=\{U_1, U_2, ..., U_N\}$ – покрытие замкнутыми множествами такое, что для каждого элемента $\omega\in\Omega_N$ пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}}f^{-n}(U_{\omega_n})$ состоит не более чем из одной точки. Тогда Ω_L компактно, отображение $\varphi_L^{-1}:\Omega_L\to M$ однозначно, непрерывно и $\varphi_L^{-1}\sigma=f\varphi_L^{-1}$. Более того, если M нульмерно, то φ_L^{-1} является гомеоморфизмом.

Покрытие с указанным выше свойством называется образующим. Для метрич. пространства M существование образующего покрытия присуще тем и только тем динамич. системам, для к-рых выполняется условие разделения траекторий (экспансивность). Говорят, что динамич. система (M, f) обладает свойством разделения траекторий, если существует $\varepsilon>0$ такое, что для любых $x, y\in M$ $(x\neq y)$ найдется $n\in\mathbb{Z}$ такое, что $d(f^n(x), f^n(y))>\varepsilon$, где d – метрика в M. Число ε называется константой экспансивности. Упомянутую связь между динамикой систем (M, f) и (Ω_L, σ) отражает следующий результат.

Пусть L – образующее покрытие компакта M, для $x\in M$ траектория $\{f^n(x)\}_{-\infty}^{+\infty}$ является неблуждающей, периодической, незамкнутой, устойчивой по Пуассону или рекуррентной траекторией системы (M, f) тогда и только тогда, когда в множестве $\varphi_L(x)$ существует траектория символич. динамич. системы (Ω_L, σ) с соответствующими свойствами.

В теории динамич. систем одним из основополагающих понятий является понятие устойчивого $W^S(x)$ и неустойчивого $W^U(x)$ многообразий точки x. Если M – компакт и L – образующее покрытие, то $x, y\in W^S(x)$ $(x, y\in W^U(x))$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $\omega\in\varphi_L(x)$, $\omega'\in\varphi_L(y)$ и $n_0\in\mathbb{Z}$ такие, что $\omega_n=\omega'_n$ для всех $n>n_0$ $(n<n_0)$.

Наконец отметим, что если отображение $f: M\to M$ не является взаимно однозначным, то соответствующая символич. модель для (M, f) есть система (Ω^+, σ^+), где

$$\Omega_L^+=\left\{\omega=\{\omega_n\}_0^{+\infty}\big|f^n(x)\in U_{\omega_n}\right\}.$$

Топологические марковские цепи (см. [5]–[8]).

Чтобы получить наибольшую информацию о свойствах динамич. системы (M, f), необходимо иметь конструктивное описание множества Ω_L. В общем случае даже при наличии образующего покрытия это сделать не удается. Однако существует ряд важных ситуаций, когда множество описывается весьма просто с помощью матрицы из нулей и единиц. Пусть $A=\|a_{ij}\|$, $a_{ij}\in\{0, 1\}$, $i, j\in\{1, ..., N\}$. Положим

$$\Sigma_A=\left\{\omega\in\Omega_N\big|a_{\omega_n\omega_{n+1}}=1\ \text{ для всех }\ n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Символич. динамич. система (Σ_A, σ) называется топологической марковской цепью, а элементы множества $\{1, ..., N\}$ называются состояниями этой цепи. Естественно предполагается, что каждая строка и каждый столбец матрицы A содержат хотя бы один ненулевой элемент. В частном случае, когда матрица A состоит целиком из единиц, топологич. марковскую цепь называют схемой Бернулли. Наряду с матрицей A для задания цепи используют ориентированный граф G_A, вершины к-рого соответствуют состояниям топологич. марковской цепи, а ребра l_{ij} – переходам из состояния i в состояние j в том и только том случае, когда $a_{ij}=1$. Матрица A индуцирует на множестве состояний транзитивное отношение квазипорядка: $i>j$ тогда и только тогда, когда на графе G_A имеется

ориентированный путь из состояния i в состояние j. Состояние i называется возвратным, если $i>j$. Топологич. марковская цепь (Σ_A, σ) называется неразложимой, если все ее состояния возвратны и для любых $i, j \in L$, $i>j$ и $j>i$. Неразложимость матрицы A эквивалентна условию: для любых i, j существует $k>0$ такое, что элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k положителен. Топологич. марковская цепь называется примитивной, если существует $n>0$ такое, что для любых i, j существует путь в G_A, состоящий из n ребер, соединяющий i и j (это эквивалентно тому, что все элементы матрицы A^n положительны). Если топологич. марковская цепь (Σ_A, σ) неразложима, то периодич. точки гомеоморфизма σ плотны в Σ_A и σ является топологически транзитивным на Σ_A, то есть существует элемент $\omega \in \Sigma_A$ такой, что траектория $\{\sigma^n(\omega)\}_{-\infty}^{+\infty}$ плотна в Σ_A. Если же цепь (Σ_A, σ) примитивна, то σ топологически перемешивает, то есть для любых открытых в Σ_A множеств U и V найдется $n_*>0$ такое, что $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$ для всех $n>n_*$.

Множество всех возвратных состояний топологич. марковской цепи разбивается на непересекающиеся классы L_1, L_2, ..., L_m таким образом, что если состояния i_l, j_l лежат в L_l, то $i_l>j_l$, $j_l>i_l$, $l=1, 2, ..., m$. Классу L_l соответствует подматрица A_l матрицы A, определяющая в пространстве Σ_A инвариантное относительно σ подмножество

$$\Sigma_{A_l} = \left\{\omega = \{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty} \in \Sigma_A \mid \omega_n \in L_l,\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Следующий результат является аналогом теоремы о спектральном разложении неблуждающего множества динамич. системы (M, f), где диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A Смейла (см. [2]).

Неблуждающее множество символич. динамич. системы (Σ_A, σ) представляется в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных подмножеств Ω_1, ..., Ω_m таких, что ограничение $\sigma|_{\Omega_i}$ есть топологич. марковская цепь (Σ_{A_i}, σ), соответствующая неразложимой подматрице A_i матрицы A для класса состояний L_i, $i=1, 2, ..., m$.

Пусть $N(\sigma|_{\Sigma_A})$ – число неподвижных точек отображения $\sigma^n: \Sigma_A \to \Sigma_A$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Так как

$$N_n\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right) = \sum_{i=1}^m N_n\left(\sigma|_{\Sigma_{A_i}}\right),$$

то далее, не уменьшая общности, предполагается, что матрица A неразложима. Для каждого j через k_j обозначается такое число, что $a_{jj}^{(k_j)}$, где $a_{jj}^{(k_j)}$ – элемент матрицы A^{k_j}; пусть ν – наибольший общий делитель k_j, $j \in G$. Число ν называется индексом цикличности матрицы A [и соответственно цепи (Σ_A, σ)]. Имеет место следующая формула:

$$N_n\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right) = \begin{cases} \nu\lambda^n(A) + \sum_{|\lambda_k|<\lambda(A)} \lambda_k^n, & \text{если } n = 0 \pmod{\nu}, \\ 0, & \text{если } n \neq 0 \pmod{\nu}, \end{cases}$$

где $\lambda(A)$ – наибольшее положительное собственное значение матрицы A (существующее в силу теоремы Фробениуса – Перрона).

Дзета-функция Артина – Мазура

$$\zeta(t) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_n(\sigma|_{\Sigma_A}) \cdot t^n}{n}\right)$$

вычисляется по формуле

$$\zeta(t) = 1/\det(E - tA),$$

и определяющий ее ряд сходится в круге $|t| < 1/\lambda(A)$.

Топологич. энтропия $h(\sigma|_{\Sigma_A})$ вычисляется по формуле

$$h\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln N_n\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right)}{n} = \ln\lambda(A).$$

С точки зрения эргодич. теории наиболее важным метрич. свойством (неразложимой) топологич. марковской цепи является существование единственной σ-инвариантной борелевской вероятностной меры μ_*, к-рая максимизирует метрич. энтропию h_{μ_*}, то есть

$$h_{\mu_*} = \sup h_\mu(\sigma|_{\Sigma_A}),$$

где sup вычисляется по всем вероятностным борелевским мерам на Σ_A. При этом

$$h_{\mu_*}\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right) = h\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right).$$

Мера μ_* положительна на открытых множествах и совпадает с распределением вероятностей, отвечающим стационарной цепи Маркова с вероятностями перехода

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}\beta_j}{\lambda(A)\beta_i}$$

и стационарными вероятностями $p_i = \alpha_i\beta_i$, где $\{\beta_i\}_1^N$, $\{\alpha_i\}_1^N$ – соответственно правый и левый собственные векторы матрицы A (положительные в силу теоремы Фробениуса – Перрона) с нормировкой $\sum_{i=1}^N \alpha_i\beta_i = 1$. Мера μ_* определяется конструктивно через асимптотику числа периодич. точек следующим образом: для любого цилиндра $B = [i_0, i_1, ..., i_k]$

$$\mu_*(B) = \lim_{i\to\infty} \frac{N_{i\nu}(B)}{N_{i\nu}},$$

где $N_{i\nu}(B)$ – число неподвижных точек отображения $\sigma^{i\nu}$ в цилиндре B, ν – индекс цикличности цепи (Σ_A, σ).

Марковские разбиения (см. [4]–[9]).

Пусть Ω – замкнутое инвариантное множество динамич. системы (M, f). Динамич. свойства системы (Ω, f), а также метрич. свойства системы (Ω, f, μ), где μ – мера максимальной (метрической) энтропии ограничения $f|_\Omega$, наиболее тесно связаны с нек-рой топологич. марковской цепью (Σ_A, σ), если удается найти такое покрытие L множества Ω замкнутыми множествами U_1, U_2, ..., U_N, что:

1) $\operatorname{int} U_i \cap \operatorname{int} U_j = \varnothing$, $i \neq j$;

2) $\bigcup_{i=1}^n \partial U_i$ нигде не плотно в M;

3) L является образующим покрытием. При наличии такого покрытия система (Ω, f) полусопряжена с цепью (Σ_A, σ), $\sigma\varphi_L|_\Omega = \varphi_L f|_\Omega$, причем отображение φ_L^{-1} является гомеоморфизмом на множестве второй категории, а мера μ индуцируется мерой μ_* с помощью отображения φ_L^{-1}.

Покрытия указанного типа существуют для инвариантных базисных множеств Ω важного класса динамич. систем (M, f), когда f – диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A Смейла. Покрытия, названные для этого класса марковскими, были построены в работах [4], [6]. Их построение основано на существовании у рассмотренных систем инвариантных семейств устойчивых и неустойчивых многообразий. Элементы покрытия являются «параллелограммами» со сторонами, лежащими на устойчивых и неустойчивых многообразиях и удовлетворяют нек-рому условию правильности пересечения образов и прообразов параллелограммов в силу диффеоморфизма f с исходными элементами покрытия. Это условие с учетом сжатия (растяжения) устойчивых (неустойчивых) многообразий гарантирует свойство 3) покрытия L.

Существуют важные для приложений математич. модели, описываемые с помощью систем дифференциальных уравнений (напр., система Лоренца), для к-рых в фазовом пространстве имеется нек-рое притягивающее множество – *странный аттрактор* – со сложной топологич. структурой и обладающее свойством сильного разбегания (хаотич. поведения) траекторий. В ряде случаев в фазовом пространстве таких систем имеется секущая, для к-рой изучение соответствующего отображения последования по траекториям из аттрактора сводится к одномерному, вообще говоря разрывному, необратимому отображению f интервала $I=[0, 1]$. Класс отображений, к-рый здесь возникает, состоит из кусочно монотонных, кусочно непрерывных отображений с конечным числом $0=c_0<c_1<\ldots<c_N=1$ критич. точек и точек разрыва. Естественно возникающее здесь разбиение $L=\{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$, где $U_i=[c_{i-1}, c_i]$, удовлетворяет свойствам 1) и 2) и удовлетворяет свойству 3) в том и только в том случае, когда множество $D=\bigcup_{i,n} f^{-n}(c_i)$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $i=1, 2, \ldots, N$, плотно в I. Последнее свойство имеет место, напр., когда отображение является растягивающим на каждом U_i, то есть

$$|f(x_1)-f(x_2)|>q|x_1-x_2|,\ x_1, x_2\in U_i,\ q>1.$$

На множестве $I\setminus D$ отображение φ_L является однозначным. Пусть $\Omega_L^+=\overline{\varphi_L(I\setminus D)}$. Тогда система (Ω_L^+, σ^+) топологически сопряжена на множестве $\varphi_L(I\setminus D)$ с системой $(I\setminus D, f)$. Пусть символич. динамич. система (Ω_L, σ) – естественное расширение системы (Ω_L^+, σ^+). Существует плотное в пространстве отображений из рассматриваемого класса множество таких отображений, для к-рых система (Ω_L, σ) является топологич. марковской цепью (с возможно большим, чем N, числом состояний). В общем же случае при условии положительности энтропии $h(f)$ существует такая конструкция построения замкнутого σ-инвариантного множества $\hat{\Omega}_L\subset\Omega_L$, что система $(\hat{\Omega}_L, \sigma)$ топологически сопряжена с топологич. марковской цепью со счетным множеством состояний, причем дополнение $H=\Omega_L\setminus\hat{\Omega}_L$ не содержит периодич. точек и $h(\sigma|_{\hat{\Omega}_L})=h(f)$. Для топологич. марковских цепей со счетным множеством состояний имеются обобщения основных понятий, сформулированных для таких же цепей с конечным числом состояний (см. [8]).

Модифицированный способ кодирования траекторий одномерных отображений из рассматриваемого класса предложили Дж. Милнор и У. Терстон [9]. Пусть $\hat{G}=\{-N, -(N-1), \ldots, -1, +1, \ldots, N-1, N\}$; $\varepsilon(x)=1$ (или -1), если $f(x)$ возрастает (убывает) в точке $x\in I\setminus D$; $\varepsilon_n(x)=\prod_{i=1}^{n-1}\varepsilon(f^i(x))$, $\varepsilon_0(x)=1$. Нидинг-последовательностью точки $x\in I\setminus D$ называется элемент $K(x)=\{K_n(x)\}_0^{+\infty}$ пространства Ω_{2N}^+, где $K_n(x)\in\hat{G}$, $K_n(x)=\varepsilon_n(x)\omega_n(x)$, $\omega=\{\omega_n\}_0^{+\infty}=\varphi_L(x)$. В пространстве Ω_{2N}^+ вводится лексикографич. порядок: $\{K_n\}_0^{+\infty}<\{K_n'\}_0^{+\infty}$, если найдется такое i_0, что $K_{i_0}<K_{i_0}'$ и $K_j=K_j'$, $j<i_0$. Устанавливается, что при $x_1<x_2$, $x_1, x_2\in I\setminus D$, $K(x_1)\leqslant K(x_2)$. Пределы

$$K^+(c_i)=\lim_{x\to c_i+0}K(x),\ K^-(c_i)=\lim_{x\to c_i-0}K(x)$$

называются нидинг-инвариантами отображения f. В случае, когда множество D плотно на интервале I, набор $\{K^+(c_i), K^-(c_i)\}_1^N$ является полным топологич. инвариантом отображений из рассматриваемого класса.

Другие объекты исследования, связанные с С. д.: нахождение конструктивных условий топологич. эквивалентности топологич. марковских цепей в терминах задающих их матриц; задачи реализации символич. динамич. систем посредством построения динамич. системы (M, f), неблуждающее множество к-рой содержит такое нульмерное множество Ω, что система (Ω, f) топологически сопряжена с заданной символич. динамич. системой; изучение надстроек над символич. динамич. системами для непосредственного описания инвариантных множеств непрерывных динамич. систем (потоков); вопросы сложности динамич. систем и их индивидуальных траекторий.

Лит.: [1] Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967 («Труды Математич. ин-та АН СССР», т. 90); [2] Смейл С., «Успехи математич. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113–85; [3] Шильников Л. П., «Математич. сб.», 1967, т. 74, № 3, с. 378–97; [4] Синай Я. Г., «Функциональный анализ и его прилож.», 1968, т. 2, № 1, с. 70–80; [5] Алексеев В. М., Символическая динамика, Одиннадцатая математическая школа, Киев, 1976; [6] Боуэн Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [7] Бунимович Л. А., Песин Я. Б., Синай Я. Г., Якобсон М. В., в кн.: Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 113–231; [8] Гуревич Б. М., «Доклады АН СССР», 1970, т. 192, № 5, с. 963–65; [9] Milnor J., Thurston W., On iterated maps of the interval, Princeton, 1977.

В. З. Гринес, М. И. Малкин.

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – см. *Символическая динамика.*

СИММЕТРИЗАЦИИ МЕТОД в теории функций – один из методов решения экстремальных задач геометрической теории функций. В основе метода лежит понятие *симметризации* замкнутых и открытых множеств n-мерного евклидова пространства.

Использование С. м. в теории функций основано на монотонном характере изменения *емкости* конденсатора и внутреннего радиуса области при различных видах симметризаций. Возможность применения С. м. при решении экстремальных задач геометрич. теории функций обусловливается определенной симметрией экстремальных отображений. Опираясь на свойство неубывания внутреннего радиуса области при ее симметризации относительно прямой или луча, с помощью теоремы об изменении внутреннего радиуса области при отображении ее посредством регулярной функции был получен следующий принцип симметризации: если функция $w=f(z)$, $f(0)=w_0$, $f'(0)=a_1$, регулярна в круге E: $|z|<1$, E_f – множество значений функции $w=f(z)$ в E, E_f^* – результат симметризации E_f относительно луча или прямой, проходящих через $w=w_0$, а $r(E_f^*, w_0)$ – внутренний радиус области E_f^* относительно точки $w=w_0$, то

$$r(E_f^*, w_0)\geqslant|a_1|. \qquad (*)$$

Равенство в (*) имеет место тогда и только тогда, когда функция $w=f(z)$ однолистна в E, а область E_f^* совпадает с E_f или получается из E_f в результате поворота вокруг $w=w_0$. Аналогичный результат имеет место и для других видов симметризаций, для к-рых справедливо свойство неубывания внутреннего радиуса. Дополнительное исследование обычно необходимо для выяснения условий достижимости в (*) равенства.

С. м. применяется при изучении свойств пространственных квазиконформных отображений. Это обстоятельство особенно существенно в связи с ограниченными возможностями исследования таких отображений. *И. П. Митюк.*

СИММЕТРИЗАЦИИ ПРИНЦИП – см. *Симметризации метод.*

СИММЕТРИЗАЦИЯ – сопоставление каждому объекту F объекта F^* (того же класса), обладающего некоторой симметрией. Обычно С. подвергают замкнутые множества F в евклидовом пространстве (или в пространстве постоянной кривизны), а также отображения, причем С. строится так, что F^* непрерывно зависит от F. С. сохраняют одни и монотонно изменяют другие характеристики объекта. С. используются в геометрии, математич. физике, теории функций при решении экстремальных задач. *С. Л. Печерский.*

СИММЕТРИЗУЮЩИЙ ОПЕРАТОР – оператор, устанавливающий связь между s-частичной *Вигнера функцией* и несимметризованными корреляционными формами:

$$\tilde{f}_s^w(\xi_1, \ldots, \xi_s) = \sum_{\Gamma_s} P_s(\Gamma_s)\pi_s(\xi_1, \ldots, \xi_s; [\Gamma_s]),$$

где $\xi_n \equiv (k_n, p_n)$ и суммирование производится по всем разбиениям множества (1, 2, ..., s), каждое из которых характеризуется индексом Γ_s. Действие С. о. на несимметризованную корреляционную форму π_s определяется формулой

$$(P\pi)(\xi_1, \ldots, \xi_s; [\Gamma_s]) = \int dk_1' \ldots dk_s' \times$$

$$\times \langle k_1, \ldots, k_s | P_s(\Gamma_s) | k_1', \ldots, k_s' \rangle \pi_s(k_1', p_1; \ldots; k_s', p_s; [\Gamma_s]),$$

где

$$P_s(\Gamma_s) = \sum_{(\Gamma_s)} (-1)^P \delta\left[-k_1' + \frac{1}{\hbar}\left(p_{i_1} - p_1\right) + \frac{1}{2}\left(k_{i_1} + k_1\right)\right] \ldots \times$$

$$\times \delta\left[-k_s' + \frac{1}{\hbar}\left(p_{i_s} - p_s\right) + \frac{1}{2}\left(k_{i_s} + k_s\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[\frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{s} \left(k_n' - k_n\right) \frac{\partial}{\partial p_n}\right],$$

$P \equiv 0$ для бозонов, $P = 0$ для четных перестановок и $P = 1$ для нечетных перестановок фермионов. Суммирование в последнем выражении производится по всем перестановкам s частиц, за исключением перестановок частиц внутри одного и того же подмножества.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, гл. 3, М., 1978. *Д. П. Санкович.*

СИММЕТРИИ ПРИНЦИП – см. *Гармоническая функция, Римана – Шварца принцип.*

СИММЕТРИЙ ГРУППА – см. *Группа, Инвариантность.*

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА – см. *Группа.*

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ – см. *Преобразований группа.*

СИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР – ковариантный либо контравариантный *тензор*, координаты которого не меняются при любой перестановке индексов, то есть

$$a_{P\{i_1 i_2 \ldots i_k\}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

$$b^{Q\{j_1 j_2 \ldots j_m\}} = b^{j_1 j_2 \ldots j_m}$$

для ковариантного или контравариантного тензоров соответственно. *В. В. Трофимов.*

СИММЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО (риманово) – риманово многообразие (M, g), обладающее центральной симметрией с центром в любой точке x, то есть изометрией S_x, сохраняющей точку x и обращающей направление любой геодезической $\gamma(t)$, проходящей через $x = \gamma(0)$: $S_x\gamma(t) = \gamma(-t)$. Если для любого $x \in M$ изометрия S_x определена только локально в окрестности точки x, то риманово многообразие (M, g) называется локально симметрическим.

Простейшими примерами С. п. являются евклидово пространство E^n и, более общо, односвязные пространства постоянной кривизны (то есть E^n, сфера S^n и пространство Лобачевского Λ^n). Другими примерами С. п. служат проективные пространства над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и телом кватернионов $\mathbb{H}$ и проективная плоскость над октавами $\mathbb{O}$, а также двойственные им некомпактные гиперболич. пространства, снабженные естественными римановыми метриками. Всеми этими пространствами исчерпываются все С. п. ранга один. Рангом С. п. называется размерность его максимального вполне геодезич. плоского подмногообразия. С. п. ранга один можно охарактеризовать как римановы многообразия, в к-рых любые два геодезич. отрезка одинаковой длины можно совместить изометрией.

Примерами локально С. п. являются пространственные формы, то есть фактор пространства E^n/Γ евклидова пространства E^n по свободно действующей дискретной группе Γ его изометрий (кристаллографич. группе). Аналогично, любое локально симметрическое геодезически полное пространство получается из нек-рого односвязного С. п. факторизацией по дискретной группе изометрий.

Любое С. п. является однородным, что позволяет их описывать и изучать в рамках теории групп и алгебр Ли. Пусть G – связная компонента группы изометрий С. п., порожденная симметриями S_x. Она действует транзитивно, поэтому С. п. можно отождествить с факторпространством G/H, где H – (компактная) стационарная подгруппа фиксированной точки $x \in M$. Обратно, факторпространство G/H группы Ли G по компактной подгруппе H можно превратить (и, при этом, по существу однозначно) в С. п. в том и только в том случае, когда подгруппа H заключена между множеством G^σ неподвижных точек нек-рого инволютивного автоморфизма σ группы G и его связной компонентой единицы G_0^σ. Этот результат в значительной мере сводит классификацию С. п. к описанию инволютивных автоморфизмов σ групп Ли G (с компактной подгруппой G^σ). Напр., автоморфизм перестановки сомножителей в $G \times G$, где G – компактная группа Ли, определяет С. п. $(G \times G)/G$, к-рое можно отождествить с самой группой G. Риманова метрика в G определяется инвариантной метрикой в соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{G} = \mathrm{Lie}\, G$, а симметрия с центром в единице задается формулой $G \ni a \mapsto a^{-1}$.

С. п. (M, g) называется пространством компактного типа, если многообразие M (или соответствующая группа изометрий G) компактно, и пространством некомпактного типа, если его нельзя представить в виде прямого произведения римановых многообразий, одно из к-рых является С. п. компактного типа или евклидовым пространством. С. п. компактного типа имеет неотрицательную секционную кривизну, а С. п. некомпактного типа – неположительную кривизну. Имеется замечательная двойственность между С. п. компактного и некомпактного типов. Любое односвязное С. п. однозначно разлагается в прямое произведение С. п. компактного типа, С. п. некомпактного типа и евклидова пространства. Полная классификация С. п. была получена Э. Картаном (E. Cartan).

С. п. образуют широкий класс пространств, обладающих богатой геометрией и допускающих детальное изучение в терминах групп и алгебр Ли. Многие классич. результаты и теории математич. физики, относящиеся, по существу, к анализу в евклидовом пространстве (или, более общо, в пространстве постоянной кривизны), допускают обобщение на случай других С. п. Это относится к теории инвариантных дифференциальных операторов, теории инвариантной меры, интегральным преобразованиям, гармонич. анализу, различным теориям квантования, теории сферич. функций и др. Важную роль С. п. играют в современных теориях поля, где функции со значениями в том или ином С. п. интерпретируются как нелинейные физич. поля.

Часто под С. п. понимают аффинное С. п. – многообразие M с линейной связностью ∇ без кручения, допускающее центральную симметрию с центром в произвольной точке x, то есть автоморфизм линейной связности, сохраняющий точку x и обращающий геодезические. Как и С. п., аффинные С. п. допускают групповое описание как факторпространства G/H, где H (не обязательно компактная) – стационарная подгруппа, удовлетворяющая для нек-рого инволютивного автоморфизма σ условию $G_0^\sigma \subset H \subset G^\sigma$. Поскольку любую группу Ли можно превратить в аффинное С. п., классификация всех аффинных С. п. не представляется возможной.

Лит.: [1] Бессе А., Многообразия Эйнштейна, пер. с англ., М., 1990; [2] Ковальский О., Обобщенные симметрические пространства, пер. с англ., М., 1984; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964. *Д. В. Алексеевский.*

СИММЕТРИЧЕСКОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО – см. *Риманова геометрия.*

СИММЕТРИЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО ФОКА – см. *Фока пространство.*

СИММЕТРИЧНЫЙ ВОЛЧОК – см. *Волчок, Гироскопа математическая теория.*

СИММЕТРИЧНЫЙ СПИНОР – см. *Спинор.*

СИММЕТРИЧНЫЙ ЦИКЛ – см. *Обратимая система.*

СИМПЛЕКТИЗАЦИЯ – см. *Контактная геометрия, Симплектическая геометрия.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ – раздел дифференциальной геометрии, изучающий *симплектические многообразия*, то есть многообразия, снабженные *симплектической структурой* – замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой. Диффеоморфизмы, сохраняющие симплектич. структуру, называются симплектическими диффеоморфизмами, или симплектоморфизмами. Основная задача С. г.– классификация симплектич. многообразий с точностью до симплектоморфизма.

Локальная симплектическая геометрия. Согласно *Дарбу теореме*, все симплектич. многообразия одной размерности (а она обязательно четна) локально симплектоморфны стандартному симплектич. пространству с симплектич. структурой

$$dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n.$$

Кроме того, связное симплектич. многообразие является однородным пространством своей группы симплектоморфизмов – симплектич. диффеоморфизмом можно перенести любую точку в любую другую. Это свойство – проявление «принципа гибкости» в С. г.

Другое проявление этого – относительная теорема Дарбу: «внешняя» С. г. подмногообразия симплектич. пространства локально определяется его «внутренней» С. г., то есть ограничением на него симплектич. структуры.

Это ограничение уже может быть вырожденной замкнутой 2-формой, и внутренняя геометрия может быть сложной. Однако если ограничение имеет постоянный ранг, то и внутренняя локальная геометрия оказывается универсальной – она определяется рангом и коразмерностью подмногообразия. Так, изотропные (ранг равен нулю), инволютивные (коранг равен коразмерности) и лагранжевы (и то, и другое) подмногообразия имеют постоянный ранг и, тем самым, в подходящих координатах Дарбу являются линейными подпространствами. Напр., ось q_1 является локальной моделью любой кривой в симплектич. пространстве (кривая всегда изотропна), гиперплоскость $p_1 = 0$ – любой гладкой гиперповерхности (она всегда инволютивна), а подпространство $p = 0$ служит универсальной локальной моделью подмногообразий.

Группа симплектоморфизмов обеспечивает значительную свободу действий по меньшей мере в локальных вопросах. Это отличие С. г. от римановой, где группа автоморфизмов, как правило, тривиальна и всегда конечномерна, показывает, что локальная дифференциальная геометрия симплектич. многообразий едва ли может служить предметом глубокого изучения. Содержательная теория симплектич. многообразий – это их глобальная геометрия, то есть симплектическая топология.

Симплектическая топология. Основные проблемы симплектич. топологии еще не решены, а полученные результаты в большинстве трудны и неэлементарны.

Открытым остается вопрос об условиях существования хотя бы одной симплектич. структуры на данном замкнутом многообразии и о классификации таких структур, если они существуют. Очевидно, старшая внешняя степень ω^n симплектич. структуры ω является формой объема (мера Лиувилля), так что симплектич. многообразие ориентируемо, и из фундаментального класса когомологий извлекается корень n-й степени ($[\omega]^n \neq 0$). Достаточны ли эти условия для существования симплектич. структуры и какие классы в $H^2(M^{2n}, \mathbb{R})$ реализуются симплектич. формами – неизвестно.

При фиксированном когомологич. классе гомотопные симплектич. структуры диффеоморфны, но известны примеры, когда классов гомотопий много и соответствующие структуры недиффеоморфны.

Для открытых многообразий (то есть некомпактных, без края), напротив, вопрос о существовании симплектич. структур решен: каждую невырожденную дифференциальную 2-форму можно продеформировать в замкнутую, сохраняя невырожденность.

В то же время при $n > 1$ существуют симплектич. многообразия, диффеоморфные $\mathbb{R}^{2n}$, но не симплектоморфные никакому подмножеству стандартного $2n$-мерного симплектич. пространства, и классификация подобных нестандартных структур в $\mathbb{R}^{2n}$ неизвестна.

Симплектич. диффеоморфизмы сохраняют меру Лиувилля, но обратное не верно. Следующая теорема показывает, что не только дифференциальное, но и более грубые топологич. свойства симплектич. многообразий могут улавливать эту разницу: группа симплектоморфизмов C^0-замкнута в группе диффеоморфизмов; другими словами, диффеоморфизм, равномерно приближаемый симплектическими (он сохраняет меру), сам является симплектическим. По сути – это утверждение о существовании симплектич. топологии, призванной изучать инвариантные свойства симплектич. многообразий, разрушаемые более общими преобразованиями. Пример результатов такого сорта: пусть $\bigcap_{i=1}^{n} \{p_i^2 + q_i^2 \leqslant 1\}$ – полидиск в стандартном симплектич. пространстве $\mathbb{R}^{2n}$; он содержится в шаре радиуса $\sqrt{n}$ значительно большего объема при $n > 1$; этот полидиск невозможно поместить симплектич. диффеоморфизмом в шар меньшего радиуса.

Эта теорема – одно из проявлений «принципа жесткости» в симплектич. топологии. Другие его известные проявления – теоремы о неподвижных точках симплектоморфизмов и пересечениях лагранжевых многообразий, впервые сформулированные В. И. Арнольдом в 1965 и восходящие к теории Морса и геометрич. теореме Пуанкаре.

Контактная структура. *Контактная структура* на (нечетномерном) многообразии – это «максимально неинтегрируемое» поле касательных гиперповерхностей. *Контактная геометрия* находится примерно в таком же отношении к С. г., как проективная к аффинной. Ее часто рассматривают как младшую сестру С. г.– и не без нек-рых оснований. А именно, имеются операции контактизации и симплектизации, сопоставляющие симплектическому (соответственно контактному) многообразию контактное (соответственно симплектическое) на единицу большей (в обоих случаях) размерности. Первая операция определена при нек-рых условиях квантования и известна также под названием предквантование Сурьо – Костанта. Вторая определена всегда и сводит геометрию контактных многообразий к геометрии симплектических с дополнительной структурой – свободным действием мультипликативной группы $\mathbb{R}^x$ растяжений, относительно к-рых симплектич. структура однородна степени 1. Нек-рые результаты контактной топологии оказываются шире своих симплектич. двойников. Причина, видимо, в некомпактности группы $\mathbb{R}^x$, неудобной в топологич. вопросах, а также в естественности упомянутых условий квантования, имеющих глобально-топологич. характер.

С. г. играет фундаментальную роль в классической, статистической и квантовой механике. Дело в том, что симплектич. структура оказывается естественной геометрич. структурой фазовых пространств гамильтоновых систем. Все атрибуты гамильтонова формализма переносятся на любое симплектич. многообразие, а в координатах Дарбу принимают привычный вид.

Фазовое пространство. Пусть X – конфигурационное пространство механич. системы, $M = T^*X$ – пространство его кокасательного расслоения. Точка из M – это ковектор p (обобщенный импульс), приложенный к какой-либо точке q на X. Симплектич. структура ω на M определяется как дифференциал 1-формы действия: $\omega = d\alpha$. Значение формы действия α на касательном векторе v к M в точке p задается как значение ковектора p на образе вектора v при проекции $T^*X \to X: p \mapsto q$ в координатах $(q_1, ..., q_n)$ на X и двойственных координатах $(p_1, ..., p_n)$ обобщенного импульса.

Картина Шредингера. Гамильтониан H, то есть гладкая функция на симплектич. многообразии (M, ω), задает векторное поле v_H на M по правилу: $\omega(\cdot, v_H) = dH$. Движение фазовой точки со скоростью v_H описывается системой дифференциальных уравнений, к-рая в координатах Дарбу принимает вид уравнений Гамильтона:

$$\dot{p} = -H_q,\ \dot{q} = H_p.$$

Картина Гейзенберга. Формула

$$\{F, G\} = \omega(v_F, v_G)$$

задает скобку Пуассона в пространстве функций на симплектич. многообразии. В координатах Дарбу:

$$\{F,G\} = \sum \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}.$$

Геометрич. интерпретация функции $\{H, F\}$ как производной функции F вдоль потока поля v_H означает, что картина Шредингера эквивалентна картине Гейзенберга: физич. величины (то есть функции на фазовом пространстве) меняются во времени согласно уравнению $\dot{F} = \{H, F\}$. Из этой эквивалентности вытекают основные свойства законов сохранения: сохранение энергии ($\{H, H\} = 0$); теорема Нетер – если поток поля v_F сохраняет функцию Гамильтона H, то F – первый интеграл потока поля

$$v_H(\{F, H\} = 0 \Rightarrow \{H, F\} = 0);$$

теорема Пуассона – скобка Пуассона $\{F, G\}$ первых интегралов – снова первый интеграл, это следует из тождества Якоби

$$\{H, \{F, G\}\} + \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0.$$

Пуассоновы структуры. Если в алгебре функций на многообразии задана скобка Пуассона, то многообразие разбивается в объединение симплектич. многообразий, называемых симплектическими листами. Таким образом, свойства скобки Пуассона, принятые за аксиомы, приводят к обобщению симплектич. многообразий – понятию пуассоновой структуры, может быть более фундаментальному, чем понятие симплектич. структуры. Важный класс пуассоновых структур – линейные, то есть коалгебры Ли. Если $\mathfrak{G}^*$ – двойственное пространство алгебры Ли группы Ли G, то коммутатор в $\mathfrak{G}$ задает скобку Пуассона функций на $\mathfrak{G}^*$ (сперва – линейных, а затем – по формуле Лейбница – гладких). Симплектич. листы в $\mathfrak{G}^*$ – это орбиты коприсоединенного действия G, снабженные симплектич. формой Ли – Березина – Костанта – Кириллова. Она играет существенную роль в теории представлений группы G, а также в теории вполне интегрируемых систем (и вообще, при понижении порядка гамильтоновых систем с помощью группы симметрий – *симплектической редукции*).

Уравнение Эйлера. Пусть гамильтониан – левоинвариантная риманова метрика на группе Ли G, рассматриваемая как послойно квадратичная функция на фазовом пространстве T^*G. Симплектич. редукция сводит изучение такой системы к интегрированию потоков на орбитах, задаваемых квадратичным гамильтонианом в $\mathfrak{G}^*$. Такова, напр., природа уравнения Эйлера, описывающего свободные вращения твердого тела (G – группа вращений $\mathbb{R}^3$), уравнения вихря в гидродинамике идеальной жидкости (G – группа сохраняющих объем диффеоморфизмов), уравнения Кортевега – де Фриса (G – группа Вирасоро, одномерное центральное расширение группы диффеоморфизмов окружности) и многих других уравнений в математич. физике.

Статистическая механика. Поток векторного поля на симплектич. многообразии M^{2n} сохраняет симплектич. структуру ω, если и только если это поле локально гамильтоново. В частности, гамильтоновы потоки сохраняют меру Лиувилля ω^n. Этот факт лежит в основе статистич. механики. Эволюция фазовой плотности $\rho\omega^n$ под действием поля v_H описывается уравнением Лиувилля $\dot{\rho} = \{\rho, H\}$. Отсюда вытекает, напр., стационарность распределения Гиббса $\exp(-\beta H)\,\omega^n$. В координатах Дарбу:

$$\omega^n = n!\, dp_1 \wedge dq_1 \wedge ... \wedge dp_n \wedge dq_n.$$

Более тонкие, нежели мера, инварианты симплектич. областей, сохраняемые гамильтоновыми потоками, еще ждут своего применения в статистич. механике. Так, были сопоставлены области в стандартном $\mathbb{R}^{2n}$ и спектр $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant ...$ симплектич. емкостей – инвариантов размерности симплектич. площади и доказано нелинейное неравенство Куранта: когда область увеличивается, все емкости растут.

Пример: для шара радиуса R спектр $\lambda = (\pi R^2\ n$ раз, $\lambda = 2\pi R^2\ n$ раз, ...), для полидиска $\lambda = (\pi r^2, 2\pi r^2, ...)$, где r – радиус наименьшего диска-сомножителя, откуда вытекает теорема невложимости:

$$\pi R^2 \geqslant n\pi r^2.$$

Вариационные принципы. По-видимому, самым старым вариационным принципом в математич. физике является принцип Ферма, утверждающий, что световые лучи минимизируют время движения от источника. Вместе с принципом Гюйгенса (последний означает эквивалентность лучевого описания языку волновых фронтов – поверхностей уровня функции времени) принцип Ферма составляет основу геометрич. оптики. Функция времени, вообще говоря, многозначна (в одну точку может приходить несколько лучей) и характер ее ветвлений служит предметом глубокого изучения в теории лагранжевых особенностей и лежандровых особенностей, выявившей загадочные связи геометрич. оптики с классификацией простых групп Ли и правильных многогранников. Путь в симплектическую и контактную геометрию проходит здесь через метод характеристик (сводящий задачу Коши для уравнения с частными производными 1-го порядка к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения – поля характеристик на гиперповерхности в контактном пространстве), частным случаем (и прообразом) к-рого является эквивалентность «лучевого» и «фронтального» подходов.

Общая причина появления С. г. в вариационных задачах – наличие универсального вариационного принципа в самой С. г. Пусть двум траекториям с общими концами на симплектич. многообразии (M, ω) сопоставлена симплектич. площадь ($S = \int\omega$) соединяющей их 2-мерной пленки. Эта площадь, по существу, не зависит от пленки ($d\omega = 0$) и определяет поэтому функционал S, называемый действием на пространстве таких траекторий (он определен с точностью до постоянного слагаемого и, вообще говоря, может быть многозначным). Экстремали действия в классе траекторий на фиксированном уровне гамильтониана H суть в точности траектории поля v_H (это следует из косоортогональности поля v_H к уровням $H = \text{const}$:

$$\langle dH, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \omega(v, v_H) = 0).$$

Этот геометрич. принцип наименьшего действия является подоплекой всех вариационных принципов математич. физики.

Имеется и обратная связь – пространство экстремалей (по-видимому, любой) вариационной задачи несет естественную симплектич. структуру. Простейшим подтверждением этого тезиса служит переход от лагранжева формализма к гамильтонову с помощью преобразования Лежандра.

Выигрыш от такого перехода – расширение пространства вариаций (траектории в T^*X вместо траекторий в X) и бо́льшая свобода в преобразованиях.

Пример: биллиардное отображение. Оно сопоставляет единичному вектору скорости биллиардного шара, приложенному в точке отражения от борта, аналогичный вектор в точке следующего отражения. В этой конструкции участвует очень жесткая структура – выпуклая гиперповерхность (борт биллиарда) в евклидовом $\mathbb{R}^n$. Оказывается, однако, что биллиардное отображение может быть определено в терминах лишь симплектич. структуры в $T^*\mathbb{R}^n$ и пары гиперповерхностей: $\|p\| = 1$ (евклидова структура) и $F(q) = 0$ (уравнение борта). На пересечении гиперповерхностей в симплектич. пространстве определены две инволюции – движение по гамильтоновым траекториям на первой гиперповерхности до повторного пересечения со второй, и наоборот. Их композиция – это и есть биллиардное отображение. Оно коммутирует, тем самым, с любым симплектоморфизмом $T^*\mathbb{R}^n$, сохраняющим обе гиперповерхности.

Квантование. В квантовой механике физич. величины изображаются операторами в комплексном гильбертовом «фазовом» пространстве. Задача построения квантовомеханич. системы исходя из ее классич. предела (постоянная Планка $\hbar \to 0$) в математич. постановке означает построение неприводимого унитарного представления алгебры Ли функций Гамильтона (по возможности – всех) на данном симплектич. многообразии в подходящем гильбертовом пространстве. Эта проблема служит мотивировкой многих важных математич. теорий и конструкций. Так, теория унитарных представлений группы Ли G с этой точки зрения сводится к квантованию G-однородных симплектич. многообразий, то есть орбит в коалгебрах Ли. Уже простейший пример группы трансляций стандартного симплектич. пространства (может быть, бесконечномерного) приводит к эквивалентности «координатного» и «импульсного» представлений Фока, к теории индекса Маслова и представлению Шейла – Вейля симплектич. группы, к теории тета-функций и автоморфных форм Зигеля и многому другому.

Изучение плоского случая показывает, что квантование требует введения на симплектич. многообразии дополнительной структуры – поляризации, но результат квантования от нее не зависит (теорема Стоуна – Неймана). В нелинейном случае необходимы также нек-рые дополнительные условия квантования на симплектич. многообразие (M, ω), важнейшее из к-рых – однозначность фейнмановской плотности $\exp(2\pi i S)$ на пространстве петель в M (то есть целочисленность периодов симплектич. формы).

Один из специальных случаев поляризации – комплексная поляризация – задает на M структуру кэлерова многообразия, что вместе с условием квантования превращает M в комплексное алгебраич. многообразие. Вложение алгебраич. многообразия в комплексное проективное пространство на квантовомеханич. языке означает вложение классич. фазового пространства в квантовое. Впрочем, не всякое симплектич. многообразие допускает кэлерову или хотя бы комплексную структуру. Другой крайний случай поляризации – вещественная поляризация – иллюстрируется структурой кокасательного расслоения: $M = T^*X$. Результатом квантования служит алгебра дифференциальных операторов на X. Поэтому С. г. выступает в теории дифференциальных операторов в качестве «коротковолнового предела». Так, главный символ (псевдо) дифференциального оператора – это послойно-однородная функция на T^*X. Интегральные операторы Фурье действуют на главные символы однородными симплектоморфизмами (теорема Егорова) и т. д.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989; [2] Гийемин В., Стернберг С., Геометрические асимптотики, пер. с англ., М., 1981; [3] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 4, М., 1985.

А. Б. Гивенталь.

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППА – *группа* линейных преобразований конечномерного векторного пространства (вещественного или комплексного), сохраняющих кососкалярное произведение, то есть невырожденную кососимметричную (в физических приложениях чаще употребляется термин «антисимметричная») билинейную форму. Пространство, снабженное кососкалярным произведением, называется симплектическим. Роль С. г. в симплектич. пространстве аналогична роли ортогональной группы в евклидовом пространстве.

Примеры. 1) Кососкалярное произведение на плоскости с координатами p, q – это форма площади $p \wedge q$. Паре векторов она сопоставляет ориентированную площадь натянутого на них параллелограмма и меняет знак при перестановке векторов. Напр., кососкалярное произведение $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$ пары векторов с декартовыми координатами u_1, u_2 и w_1, w_2 можно записать в виде: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = u_1 w_2 - u_2 w_1$. С. г. плоскости изоморфна группе (2×2)-матриц с определителем 1.

2) Прямая сумма n симплектич. плоскостей несет кососкалярное произведение $p_1 \wedge q_1 + \ldots + p_n \wedge q_n$, относящее паре векторов сумму площадей проекций на координатные плоскости натянутого на эти векторы параллелограмма. С. г. содержится в группе линейных преобразований, сохраняющих объем $p_1 \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge q_n$.

3) Мнимая часть невырожденной эрмитовой формы в n-мерном комплексном пространстве, рассматриваемом как $2n$-мерное вещественное, является кососкалярным произведением. В координатах $z_k = p_k + iq_k$ эрмитова форма $\sum_{k=1}^n z_k \bar{z}'_k$ имеет мнимую часть $\sum_{k=1}^n p_k \wedge q_k$. С. г. содержит унитарную группу – группу комплексных линейных преобразований, сохраняющих эту эрмитову форму. Унитарная группа – максимальная компактная подгруппа в С. г.

Изучение симплектич. пространства упрощается благодаря теореме Дарбу – Фробениуса, согласно к-рой симплектич. пространство четномерно, а два таких пространства одной размерности симплектически изоморфны.

Два вектора называются косоортогональными, если их кососкалярное произведение равно нулю. Вектор, косоортогональный всему пространству,– нулевой. В этом состоит определение невырожденности кососкалярного произведения. Каждый вектор себе косоортогонален (следствие кососимметричности). Косоортогональное дополнение прямой – гиперплоскость, содержащая эту прямую. Обратно, косоортогональное дополнение гиперплоскости – прямая в ней. Вообще косоортогональное дополнение подпространства имеет дополнительную размерность. Два подпространства одинаковой размерности переводятся друг в друга преобразованием из С. г., если и только если совпадают размерности их пересечений со своими косоортогональными дополнениями. В частности, любая прямая (гиперплоскость) переводится в любую другую. Таким образом, геометрия симплектич. пространства во многом определяется структурой С. г.

С. г. $2n$-мерного симплектич. пространства – это простая связная группа Ли, обозначаемая $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ [в комплексном случае $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$]. Ее размерность $(2n+1)n$. Алгебра Ли этой группы изоморфна алгебре Ли однородных многочленов степени 2 от переменных $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ с *Пуассона скобкой* в качестве коммутатора:

$$[f, g] = f_p g_q - f_q g_p = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right).$$

По этой причине изучение С. г. равносильно до нек-рой степени изучению линейных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений.

А. Б. Гивенталь.

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА – матрица *симплектического оператора*. Ее нормальная форма – простейший вид, к к-рому можно привести С. м. линейной канонич. заменой координат.

В $2N$-мерном (вещественном или комплексном) линейном симплектич. пространстве, в к-ром задан линейный симплектич. оператор G, можно выбрать линейные канонически сопряженные координаты $p_1, \ldots, p_{n_1}, q_1, \ldots, q_{n_1}, p_{n_1+1}, \ldots, p_{n_2}, q_{n_1+1}, \ldots, q_{n_2}, \ldots, p_{n_{s-1}+1}, \ldots, p_{n_s}, q_{n_{s-1}+1}, \ldots, q_{n_s}$, в к-рых матрица оператора G примет блочно-диагональный вид с блоками

$$\pm\exp\begin{Vmatrix} 0 & -LB_k \\ A_k L & 0 \end{Vmatrix}.$$

(Здесь обозначения взяты из ст. *Квадратичный гамильтониан*; нормальная форма.)

Лит.: [1] Williamson J., «Amer. J. Math.», 1937, v. 59, № 3, p. 599–617; 1939, v. 61, № 4, p. 897–911. *М. Б. Севрюк.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ МЕТРИКА – замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$$

на гладком четномерном многообразии M^{2n}. Согласно теореме Дарбу, с помощью замены координат С. м. может быть приведена локально к канонич. виду

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Примерами многообразий, на к-рых имеется естественная С. м., являются: евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с формой

$$\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i;$$

кокасательное расслоение T^*M гладкого многообразия; орбиты коприсоединенного представления групп Ли; кэлеровы многообразия. *А. В. Болсинов.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ – обобщение на некоммутативный случай процедуры понижения порядка гамильтоновой системы при помощи системы инволютивных первых интегралов.

Пусть рассматривается пуассоново действие группы Ли G на симплектич. многообразии (M, ω) и пусть $p \in \mathfrak{G}^*$ – регулярное значение отображения моментов $P: M \to \mathfrak{G}^*$. Стационарная подгруппа G_p точки p действует на многообразии $M_p = P^{-1}(p)$. Пусть фактормногообразие $F_p = M_p/G_p$ орбит группы G_p на M_p определено (напр., если G_p компактна и действует на M_p без неподвижных точек). Тогда многообразие F_p наследует с M симплектич. структуру и называется приведенным фазовым пространством, или симплектической редукцией многообразия M.

G-инвариантный гамильтониан $H: M \to \mathbb{R}$ определяет функцию на F_p, к-рая называется приведенным гамильтонианом. Гамильтоново поле гамильтониана H касается многообразия M_p и G_p-инвариантно и, следовательно, спускается на векторное поле F_p, к-рое является гамильтоновым для приведенного гамильтониана. Таким образом, исходная система с гамильтонианом H, обладающая группой симметрии G, сводится к системе на приведенном пространстве с приведенным гамильтонианом. *М. Э. Казарян.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА – замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма ω на гладком многообразии M. С. с. существует только на многообразиях четной размерности $2n$. Замкнутость формы равносильна равенству нулю интеграла формы ω по границе любого трехмерного подмногообразия. Невырожденность равносильна тому, что старшая внешняя степень ω^n С. с. ω является формой объема, то есть ω^n. Локально С. с. диффеоморфизмом можно привести к стандартной форме

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$$

(*Дарбу теорема*).

Вырождение С. с.– обращение в нуль старшей внешней степени ω^n замкнутой дифференциальной 2-формы ω на $2n$-мерном многообразии M^{2n}. Пример вырождения С. с.– ограничение С. с. на подмногообразие.

Два ростка подмногообразия в симплектич. пространстве переводятся друг в друга симплектоморфизмом объемлющего пространства, если ограничения симплектич. формы на эти подмногообразия эквивалентны.

Пусть $n=2$. Тогда замкнутая 2-форма общего положения имеет вырождение на гладком трехмерном многообразии. Вне этого многообразия ω приводится к нормальной форме Дарбу:

$$dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

В общей точке этого многообразия ω приводится к виду

$$p_1 dp_1 \wedge dq_1 + p_2 dp_2 \wedge dq_2.$$

В общей точке нек-рой кривой этого многообразия ω приводится к одному из двух видов:

$$d(x - z^2/2) \wedge dy + d(xz \pm ty - z^3/3) \wedge dt.$$

В исключительных точках этой кривой форма ω имеет по крайней мере один модуль.

См. также *Симплектическая геометрия, Симплектическое многообразие.* *М. Э. Казарян.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ – см. *Симплектическая геометрия.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ФОРМА – дифференциальная 2-форма, задающая *симплектическую структуру.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЙ АТЛАС *симплектического многообразия* – атлас, карты которого являются областями стандартного симплектического пространства ($\mathbb{R}^{2n}$, $dp \wedge dq$), а отображения перехода от одной карты к другой – *симплектическими диффеоморфизмами.* *М. Э. Казарян.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЙ ДИФФЕОМОРФИЗМ, симплектоморфизм, – *диффеоморфизм* между двумя *симплектическими многообразиями*, сохраняющий *симплектическую структуру.* Поток гамильтонова векторного поля является однопараметрич. семейством С. д. В классич. механике С. д. называют также каноническим преобразованием. *М. Э. Казарян.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЙ КОБОРДИЗМ – отношение эквивалентности между *симплектическими многообразиями.* Симплектич. многообразия (M_1^{2n}, ω_1) и (M_2^{2n}, ω_2) связаны С. к., если существует многообразие N с замкнутой 2-формой Ω, край к-рого – объединение M_1 и M_2; $\Omega|M_1 = \omega_1$, $\Omega|M_2 = \omega_2$ и форма Ω максимально невырождена, то есть $\Omega^n \neq 0$. *С. А. Табачников.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЙ ЛИСТ – см. *Симплектическая геометрия.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР в линейном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ – *оператор*, сохраняющий стандартную *симплектическую структуру*

$$\omega = \sum dp_k \wedge dq_k.$$

Матрица G С. о., записанная в базисе Дарбу, называется симплектической матрицей. Она удовлетворяет определяющему соотношению $G^* JG = J$, где $J = \begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix}$ – матрица симплектич. структуры. Спектр вещественного С. о. симметричен относительно единичной окружности и вещественной оси. Корневые подпространства, соответствующие симметричным собственным числам, имеют одинаковую жорданову структуру. С. о. образует *симплектическую группу* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. *М. Э. Казарян.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ (M, ω) – четномерное многообразие M, снабженное *симплектической структурой* ω – замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой. Локально все С. м. одной размерности симплектоморфны, то есть переводятся друг в друга диффеоморфизмами, сохраняющими симплектич. структуру (*Дарбу теорема*), глобально – нет.

С. м. можно задавать *симплектическим атласом*.

Основные примеры С. м.: кокасательные расслоения (симплектич. структура – дифференциал формы действия); кэлеровы, в частности, проективные комплексные многообразия (симплектич. структура – мнимая часть эрмитовой структуры); орбиты коприсоединенного представления групп Ли (симплектич. структура – *Ли – Березина – Костанта – Кириллова форма*). Другой конструкцией, приводящей к С. м., является так наз. гамильтонова, или *симплектическая редукция*.

См. также *Симплектическая геометрия*. *М. Э. Казарян.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Симплектическая группа*.

СИМПЛЕКТОМОРФИЗМ – см. *Симплектический диффеоморфизм, Симплектическая геометрия*.

СИНАЯ БИЛЛИАРД – *динамическая система*, отвечающая движению по инерции материальной точки в ограниченной замкнутой области Q (лежащей в евклидовом пространстве или на торе с евклидовой метрикой) с кусочно гладкой и строго выпуклой внутрь Q границей, от которой точка отражается по следующему закону: угол падения равен углу отражения. С. б. возникает в нек-рых моделях статистич. механики (см. *Лоренца газ*). С. б. представляет собой пример динамич. системы с сильными стохастич. свойствами. Так, С. б. является *К-системой* (см. [1]) и метрически изоморфен *Бернулли сдвигу* (см. [2]).

См. также *Биллиард*.

Лит.: [1] Синай Я. Г., «Успехи математич. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 141–92; [2] Gallavotti G., Ornstein D., «Comm. Math. Phys.», 1974, v. 38, № 2, p. 83–101. *Л. А. Бунимович.*

СИНГУЛЯРНАЯ ЧАСТЬ оператора – см. *Спектральная теорема*.

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение*.

СИНГУЛЯРНОСТЕЙ ПЛОТНОСТЬ обобщенной функции $\psi \in S'(\mathbb{R}^n_x)$ порядка k – *обобщенная функция* F_ψ на косферическом расслоении $S^*(\mathbb{R}^n_x)$, определяемая как слабый предел $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^{2k}\rho^\lambda_\psi$, где ρ^λ_ψ – ограничение функции плотности ρ_ψ на многообразие

$$\left\{p_1^2 + \ldots + p_n^2 = \lambda^2\right\} \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p,$$

естественно отождествляемое с $S^*(\mathbb{R}^n_x)$. Такое определение С. п. при дополнительных предположениях обобщается на произвольное свободное действие группы $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$.

См. также *Осцилляций плотность*.

Лит.: [1] Карасев М. В., Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1984, т. 39, в. 6, с. 115–73; [2] их же, «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1983, т. 47, № 5, с. 999–1029.

В. Е. Назайкинский.

СИНГУЛЯРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ – аномальные особенности в геометрическом строении пространственно-временного многообразия, характеризующиеся, как правило, бесконечными кривизнами. Однако в ряде случаев С. п.-в. не связаны с особенностью кривизны. Сингулярности являются характерным свойством многих известных решений уравнений общей теории относительности. Аналогия с электродинамикой наводит на мысль, что естественным было бы определение С. п.-в. как точки, в к-рой особенна метрика – характеристика гравитационного поля. Однако такого рода поведение метрики может оказаться свойственным лишь для конкретной координатной сетки. Так, напр., метрика пространства-времени Шварцшильда в «координатах кривизны»

$$ds^2 = (1-2m/r)dt^2 - (1-2m/r)^{-1}dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

обращается в бесконечность, в частности, на горизонте $r=2m$. Тем не менее наблюдатель, двигающийся по времениподобной мировой линии, пересекая горизонт, не замечает никаких аномалий в пространстве-времени. Переход к другим координатам, напр. к координатам Крускала (см. [1]), устраняет особенности метрики на горизонте. В силу того что пространственно-временное многообразие является гладким, сингулярные точки, связанные с особенностями кривизны, должны вырезаться из него. В этом случае факт удаления сингулярных точек может быть установлен по геодезич. неполноте. Пространство-время называется времениподобным или изотропно геодезически неполным, если оно содержит максимально продолженные времениподобные (соответственно нулевые) геодезические, аффинный параметр на к-рых не принимает все значения из интервала $(-\infty, \infty)$. Времениподобная или изотропная неполнота указывает на факт существования свободно движущихся наблюдателей и безмассовых частиц, история к-рых прерывается. Времениподобная геодезич. неполнота не влечет за собой изотропной, и наоборот. Так, напр., максимально продолженное решение Рейсснера – Нордстрема времениподобно геодезически полно, но изотропно геодезически неполно (сингулярность времениподобна). Класс времениподобным и изотропно геодезически неполных пространственно-временных многообразий не исчерпывает всех многообразий, к-рые следует считать сингулярными. Существуют примеры геодезически полного пространства-времени, но содержащего непродолжимую времениподобную негеодезич. кривую конечной длины. Пространство-время называется b-полным, если оно не допускает непродолжимых времениподобных кривых конечной длины, к-рая измерена по обобщенному аффинному параметру, представляющему собой интеграл от суммы квадратов компонент касательного вектора, вычисленных в параллельно переносимом вдоль данной кривой базиса (см. [2]). Пространство-время, являющееся b-полным, не содержит времениподобных негеодезич. кривых конечной длины и тем более изотропно и времениподобно геодезически полно. Пространство-время называется свободным от сингулярностей, если оно b-полно. Как уже упоминалось, С. п.-в. не всегда обусловлены особенностью кривизны. Так, напр., геодезич. неполнота пространства-времени Тауба-Нут связана с нарушением сильной причинности (см. *Пространство-время* теории относительности).

Теоремы о сингулярностях. Является ли наличие сингулярности типичным для пространства-времени в общей теории относительности и каким свойствам должны удовлетворять материальные поля в пространстве-времени, чтобы оно было сингулярно? Ответ на эти вопросы отчасти дают теоремы о сингулярностях Р. Пенроуза [3], [4], С. Хокинга [5] и Р. Героча [6]. Во всех этих теоремах на основе ряда предположений о глобальных свойствах пространства-времени устанавливается геодезич. неполнота. Тензор энергии-импульса всех известных до сих пор классич. материальных полей удовлетворяет так наз. сильному энергетическому условию:

$$(T_{ab} - 1/2Tg_{ab})u_a u_b \geq 0, \qquad (1)$$

где u_a – компоненты 4-скорости, касательной к мировой линии наблюдателя. В случае безмассовых полей ($T=0$) условие (1) переходит в слабое энергетич. условие, выражающее неотрицательность локальной плотности энергии. Таким образом, ограничения (1) на материальные поля, используемые в большинстве теорем о сингулярностях, выглядят вполне естественными. Условие (1) обеспечивает фокусировку геодезических при отрицательности дивергенции $\theta = \nabla_a u^a$ в начальный момент времени (на начальной пространственноподобной гиперповерхности).

Теорема 1. Пусть пространство-время обладает некомпактной гиперповерхностью Коши S. Пусть на S дивергенция ортогональных ей времениподобных геодезических строго отрицательна, а для материальных полей выполняется сильное энергетич. условие. Тогда рассматриваемое пространство-время времениподобно геодезически неполно в будущем.

Пространство-время, свойства к-рого формулируются в теореме, представляет собой сжимающуюся вселенную. Теорема 1 является слабой в том смысле, что пространство-время, к-рое обсуждается в ней, обладает свойствами весьма частного вида. Существование гиперповерхности Коши и отрицательность дивергенции нормальных к ней геодезических являются существенным ограничением.

Теорема 2. Пусть пространство-время допускает компактную пространственноподобную гиперповерхность S. Пусть на S дивергенция ортогональных ей времениподобных геодезических строго меньше нуля, а материальные поля подчиняются сильному энергетич. условию. Тогда рассматриваемое пространство-время времениподобно геодезически неполно в будущем.

Теорема 3. Пусть пространство-время допускает компактное ахрональное множество без границы (множество, никакие две точки к-рого не могут быть соединены времениподобной кривой) и не допускает замкнутых времениподобных кривых, а для каждой нулевой и времениподобной геодезической с касательным вектором u^a существует точка, где величина $u_{[a}R_{b]mn[c}u_{d]}u^m u^n$ не равна нулю (это означает, что рассматривается пространство-время общего вида, без специальных симметрий). Как и в предыдущих теоремах, для материальных полей требуется выполнение сильного энергетич. условия. При выполнении перечисленных требований пространство-время времениподобно и изотропно геодезически неполно.

Теоремы 2 и 3 касаются замкнутых космологич. моделей и гарантируют наличие сингулярностей в замкнутых вселенных с достаточно общими свойствами. В теореме 1 свойство отрицательности дивергенции и в теореме 3 существование компактного ахронального множества могут быть заменены свойством наличия так наз. ловушечных поверхностей, при этом времениподобная геодезич. неполнота в теореме 1 заменяется на изотропную неполноту. Ловушечной поверхностью называется такая замкнутая двумерная пространственноподобная поверхность, что оба семейства направленных в будущее ортогональных к ней геодезических имеют отрицательную дивергенцию, то есть сходятся. Присутствие ловушечных поверхностей является индикатором сильного гравитационного поля, к-рое заставляет сходиться даже нулевые геодезические (напр., лучи света от светящейся поверхности), направленные во внешнюю часть пространства-времени по отношению к ловушечной поверхности. Таким образом, все замкнутые космологич. модели с достаточно общими свойствами обладают сингулярностью, причем сингулярность не является свойством только пространственно-временных многообразий с внутренними симметриями. Наличие сингулярности в открытых вселенных гарантируется только при наличии дополнительных свойств таких, как существование ловушечных поверхностей или гиперповерхности Коши. Ситуация, возникающая при гравитационном коллапсе, описывается теоремой 1 при замене условия отрицательности дивергенции на условие существования ловушечных поверхностей. Таким образом, широкий класс полей тяготения в рамках общей теории относительности моделируется пространством-временем, имеющим сингулярности.

Принцип космической цензуры. Наличие сингулярности в пространстве-времени часто связано с ограничениями на возможность предсказать будущее из настоящего, с наличием неконтролируемых влияний (информацией, поступающей из сингулярности), что является нарушением представлений о непротиворечивой физич. теории, к-рой призвана быть теория, моделирующая нашу Вселенную, процессы в сильных гравитационных полях и т. д. В связи с этим представляется разумным считать необходимым условием для физич. реалистичности конкретного пространства-времени требование минимального нарушения детерминизма, к-рое получило название принципа космической цензуры. Особый интерес представляет собой ряд версий принципа космич. цензуры для космологич. моделей пространства-времени и для гравитационного коллапса.

С. п.-в., наличие к-рой может быть зафиксировано рядом наблюдателей, называется видимой. Версия принципа космич. цензуры, требующая удаления из рассмотрения любого пространства-времени с видимой сингулярностью, является слишком сильным требованием. Замкнутая вселенная Фридмана, напр., является сингулярной (геодезически неполной) и в прошлом (Большой взрыв) и в будущем (коллапс в последующую эпоху), причем наличие сингулярности в прошлом может быть установлено любым наблюдателем, тогда как в будущем — нет. Соответствующая версия принципа космич. цензуры для космологич. моделей не запрещает рассмотрение подобных примеров. Пространство-время Фридмана сингулярно в начальный момент и моделирует Вселенную, образовавшуюся в результате Большого взрыва. Подобный механизм признается справедливым в настоящее время и для образования реальной Вселенной. Пространство-время, имеющее голую сингулярность (видимую любым наблюдателем) в будущем, считается не удовлетворяющим принципу космич. цензуры и в связи с этим объявляется нефизичным. Примерами такого рода могут служить пространство-время Шварцшильда с отрицательной массой и решение Керра с $m^2 < \alpha^2$. Трудно представить себе механизм образования такого рода конфигурации: коллапс пыли с отрицательной массой невозможен, а облако пыли, где момент вращения преобладает над массой, не должно коллапсировать, а наоборот, должно разлетаться. Примером пространства-времени с видимой (не голой) сингулярностью является максимально продолженное решение Керра с $m^2 > \alpha^2$. Для наблюдателей, находящихся в асимптотич. областях решения Керра, сингулярность невидима. Приемлемость такого рода примеров для возможного описания гравитационного коллапса позволяет сформулировать версию принципа космич. цензуры для асимптотически плоских полей: все С. п.-в. должны быть скрыты под горизонтом событий. Существуют примеры, моделирующие реальные физич. процессы и противоречащие упомянутой версии принципа космич. цензуры. Среди прочих можно упомянуть пример, описывающий сжатие звезды, сопровождающееся излучением, уносящим ее массу, причем скорость уноса массы такова, что радиус горизонта остается всегда меньше радиуса звезды, так что сжатие в точку происходит без образования горизонта (см. [7]). Таким образом, в результате данного процесса образуется голая сингулярность. Однако данный пример и ему подобные носят экзотич. характер и выглядят довольно искусственными.

Справедливость принципа космич. цензуры прямо связана с тем, как «много» наблюдателей устанавливают, что соответствующее пространство-время геодезически неполно. Причем, как уже подчеркивалось, существование голой сингулярности в прошлом признается допустимым. Таким образом, принцип космич. цензуры накладывает ограничение на характер С. п.-в. в будущем. Наблюдатель может установить наличие видимой сингулярности при помощи устройства, падающего на эту сингулярность и посылающего сигналы наблюдателю. Прекращение этих сигналов означает достижение устройством сингулярности. Областью N, находясь внутри к-рой наблюдатель может установить наличие геодезич. неполноты пространства-времени, является множество всех точек A, для каждой из к-рых существует точка B, предшествующая A и содержащая в своем прошлом неполную времениподобную или нулевую геодезическую, направленную в будущее. Область N совпадает со своим будущим, ее границей являются изотропные гиперповерхности. Для пространства-времени Шварцшильда с положительной массой N — пусто, а с отрицательной — совпадает со всем пространством-временем. Если пространство-время обладает гиперповерхностью Коши, то N — пустое множество. Требование отсутствия голых сингулярностей позволяет сформулировать версию принципа космич. цензуры, накладывающую ограничения на величину области N. Для асимптотически плоских полей пересе-

чение замыкания N с конформной бесконечностью будущего J^+ должно быть пусто, то есть достаточно удаленные наблюдатели не в состоянии установить наличие сингулярности (сингулярность невидима с J^+). Пространство-время Шварцшильда с отрицательной массой, пространство-время Керра с $m^2<\alpha^2$, пространство Минковского с удаленной точкой нарушают также и эту версию принципа космич. цензуры. В асимптотически плоских полях существование пространственноподобной гиперповерхности S такой, что все нулевые и времениподобные кривые, приходящие в конформную бесконечность будущего, при продолжении в прошлое пересекают S, эквивалентно сформулированным версиям принципа космич. цензуры, то есть отсутствию голой сингулярности. Пространство-время, обладающее такой гиперповерхностью, называется асимптотически предсказуемым. В асимптотически предсказуемом пространстве-времени ловушечные поверхности не могут находиться в области внешних сношений, то есть существует нетривиальный горизонт событий. Все попытки опровергнуть принцип космич. цензуры при помощи построения ловушечных поверхностей вне горизонта закончились неудачей, кроме того, есть ряд соображений, говорящих о том, что подобных примеров нет.

Большой прогресс в изучении С. п.-в. связан с появлением теорем о сингулярностях, позволяющих сделать заключение о том, что наличие сингулярности является характерным свойством многих пространственно-временных многообразий в общей теории относительности. В связи с этим изучение природы С. п.-в. представляет собой важную проблему, решение к-рой, однако, сталкивается с той трудностью, что установление структуры многообразия в сингулярных точках, рассматриваемых как граница многообразия, затруднено по ряду причин (см. [8]). Среди нерешенных проблем, связанных с С. п.-в., можно отметить также отсутствие доказательства какой-либо версии принципа космич. цензуры.

Лит.: [1] Kruskal M., «Phys. Rev.», 1960, v. 119, p. 1743–45; [2] Schmidt B., «J. Gen. Relaf. and Gravit.», 1971, v. 1, № 3, p. 269–80; [3] Penrose R., «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 14, № 3, p. 57–59; [4] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [5] Hawking S.W., Penrose R., «Proc. Roy. Soc. London. Ser. A», 1970, v. 314, № 1519, p. 529–48; [6] Geroch R., в кн.: Relativity, N.Y.– L., 1970, p. 259–91; [7] Steinmuller B., King A., Lasofa J., «Phys. Lett. Ser. A», 1975, v. 51, № 4, p. 191–92; [8] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977. *А. Т. Ильичев.*

СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ в квантовой теории поля – релятивистски-инвариантные функции, тесно связанные с квантованием волновых полей, имеющие сингулярное поведение в окрестности светового конуса и начала координат. В первую очередь к С. ф. относятся *перестановочные функции*, стоящие в правых частях коммутационных соотношений в x-представлении. Простейшей из них является перестановочная функция скалярного поля φ:

$$\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x)=\frac{1}{i}D(x-y)$$

– так наз. функция Паули – Йордана, к-рая явно выражается через функцию Бесселя J_1, *дельта-функцию* Дирака δ и известные разрывные функции

$$\theta(z)=\begin{cases}1 & \text{при } z>0;\\ 0 & \text{при } z<0;\end{cases}\qquad \varepsilon(z)=\begin{cases}1 & \text{при } z>0;\\ -1 & \text{при } z<0;\end{cases}$$

следующим образом:

$$D(x)=\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(s^2)-\frac{m}{4\pi\sqrt{s^2}}\varepsilon(x^0)\theta(s^2)J_1\left(m\sqrt{s^2}\right). \qquad (1)$$

Здесь $s^2=x_0^2-\boldsymbol{x}^2$ – квадрат 4-мерного интервала, $x=(x_0,\boldsymbol{x})$, $y=(y_0,\boldsymbol{y})$ – точки пространства-времени, m – масса кванта поля (используется система единиц, в к-рой $\hbar=c=1$). Как видно, в окрестности светового конуса $D(x)$ имеет особенности $\varepsilon(x^0)\delta(s^2)$ и $\varepsilon(x^0)\theta(s^2)$.

Перестановочные функции полей с ненулевым спином выражаются через линейные комбинации $D(x)$ и ее производных. Напр., перестановочная функция *Дирака поля* $S(x)$ связана с D соотношением

$$S(x)=(i\gamma^\nu\partial_\nu+m)D(x), \qquad (2)$$

где $\partial_\nu=\partial/\partial x^\nu$ и γ^ν, $\nu=0,1,2,3$,– *Дирака матрицы*. Перестановочные функции являются решениями соответствующих полевых уравнений. Функция Паули – Йордана удовлетворяет *Клейна – Гордона уравнению* (а также вытекающему из коммутационных соотношений условию антисимметрии), а функция $S(x)$ – *Дирака уравнению*.

Помимо перестановочных С. ф. важную роль играют *Грина функции*, то есть решения соответствующих неоднородных уравнений, в правой части к-рых стоит 4-мерная δ-функция. К ним принадлежат запаздывающие, опережающие, а также занимающие центральное место в квантовополевых расчетах причинные функции Грина (*пропагаторы*). Напр., причинная С. ф. скалярного поля D^c, определенная через вакуумное среднее от хронологич. произведения операторов

$$D^c(x-y)=i\langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle_0,$$

удовлетворяет неоднородному уравнению

$$(\Box-m^2)D^c(x)=-\delta^4(x),$$

может быть представлена в виде 4-мерного интеграла Фурье

$$D^c(x)=(2\pi)^{-4}\int\frac{\exp ikx}{m^2-k^2-i\varepsilon}d^4k,\quad \varepsilon\to+0,$$

и в явном виде выражена через цилиндрич. функции J_1, N_1, K_1, а также $\theta(s^2)$ и $\delta(s^2)$. В окрестности светового конуса она имеет следующее поведение:

$$D^c(x)\simeq\frac{1}{4\pi}\delta(s^2)+\frac{1}{4\pi^2 is^2}+\frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m\sqrt{s^2}}{2}-\frac{m^2}{16\pi}\theta(s^2). \qquad (3)$$

Причинные функции полей со спином выражаются через D^c и ее производные линейными соотношениями, подобными (2).

В квантовополевых расчетах приходится иметь дело с произведениями и степенями пропагаторов различных полей. Напр., однопетлевой диаграмме поляризации вакуума в x-представлении соответствует произведение двух причинных функций поля Дирака:

$$\gamma^\nu S^c(x-y)\gamma_\mu S^c(y-x),$$

а в окрестности светового конуса при $(x-y)^2\approx 0$ – произведение выражений (3) и их первых производных. С математич. точки зрения входящие в (3) сингулярные объекты представляют собой *обобщенные функции*.

Теория С. ф. квантовой теории поля была разработана Н. Н. Боголюбовым в нач. 1950-х гг. Она явилась основой оригинальной схемы устранения ультрафиолетовых расходимостей, не использующей *контрчленов* и *перенормировок*.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984, гл. 3; [2] их же, Квантовые поля, М., 1980. *Д. В. Ширков.*

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Сохоцкого формулы.*

СИНГУЛЯРНЫЙ СПЕКТР – см. *Спектральная теорема.*

СИНУС-ГОРДОНА УРАВНЕНИЕ, Sine-Gordon уравнение,– релятивистски инвариантное уравнение, в пространственно-временных переменных, имеющее вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m^2\sin u=0; \qquad (A)$$

$$-\infty<x,t<\infty,\quad u\in\mathbb{R},\quad m>0.$$

Название предложено по аналогии с линейным *Клейна – Гордона уравнением* (где вместо $\sin u$ стоит u). В характеристических (светоподобных) переменных С.-Г. у. выглядит так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial\tau}+m^2\sin u=0,\quad \sigma,\tau,u\in\mathbb{R},\quad m>0. \qquad (B)$$

Как в случае (А), так и в случае (В) С.-Г. у. допускает **представление Лакса**

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, M]$$

с линейными операторами L и M, что позволяет применить к нему *обратной задачи рассеяния метод* ($[L, M] = LM - ML$).

Задача Коши для С.-Г. у. формулируется следующим образом.

Случай (А):

$$u|_{t=0} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_2;$$

$$\frac{du_1}{dx}, u_2 \in S(\mathbb{R}); \quad \lim_{|x|\to\infty} u_1(x) \equiv o(\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Случай (В):

$$u|_{\tau=0} = u_0; \quad \frac{du_0}{d\sigma} \in S(\mathbb{R});$$

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} u_0(\sigma) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Здесь $S(\mathbb{R})$ – пространство Шварца быстроубывающих функций. Задачи Коши (А) и (В) при нек-рых дополнительных ограничениях на начальные данные однозначно разрешимы в указанных классах, и множества их решений совпадают. Эволюция данных рассеяния соответствующих L-операторов дается явными формулами, а решения $u(x, t)$ и $u(\sigma, \tau)$ находятся с помощью интегральных уравнений типа Гельфанда – Левитана – Марченко.

Периодич. задача для С.-Г. у. может быть исследована с помощью алгебро-геометрич. метода (подобно тому, как это делается для *Кортевега – де Фриса уравнения*); в частности, получены явные выражения для конечнозонных решений С.-Г. у. через θ-функции на соответствующих абелевых многообразиях.

Гамильтонова формулировка С.-Г. у. заключается в том, что, напр., в случае (А) оно представляет собой гамильтонову систему с гамильтонианом

$$p_0 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + m^2(1-\cos u)\right)dx, \quad \gamma > 0,$$

и симплектич. формой

$$\Omega = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} d\pi(x) \wedge du(x)\, dx, \quad \pi = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Эта система является вполне интегрируемой, и переход от переменных u и π к данным рассеяния соответствующего оператора L является канонич. преобразованием к переменным типа действие-угол. Фазовое пространство параметризуется канонически сопряженными переменными трех типов:

1) $0 \leqslant \rho(p) < \infty$, $0 \leqslant \varphi(p) < 2\pi$, $p \in \mathbb{R}$;

2) $p_a, q_a \in \mathbb{R}$, $a = 1, \ldots, N_1$, $N_1 \geqslant 0, N_1 \in \mathbb{Z}$;

3) $\eta_b, \xi_b \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha_b < \frac{8\pi}{\gamma}$, $0 \leqslant \beta_b < 2\pi$, $b = 1, \ldots, N_2$, $N_2 \geqslant 0, N_2 \in \mathbb{Z}$.

Полная энергия P_0 и полный импульс

$$P_1 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\,dx$$

поля u в новых переменных выглядят следующим образом:

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{p^2+m^2}\,\rho(p)\,dp + \sum_{a=1}^{N_1}\sqrt{p_a^2+M^2} + \sum_{b=1}^{N_2}\sqrt{\eta_b^2 + (2M\sin\theta_b)^2};$$

$$P_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p\rho(p)\,dp + \sum_{a=1}^{N_1} p_a + \sum_{b=1}^{N_2}\eta_b,$$

$$M = \frac{8m}{\gamma}, \quad \theta = \frac{\gamma}{16}\alpha.$$

В случае (В) также получается вполне интегрируемая гамильтонова система.

Одно из приложений к квантовой теории поля. Пусть $u(x, t)$ – скалярное поле с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2m^2(1-\cos u)\right)dx$$

(здесь γ – константа связи). С.-Г. у. является уравнением Эйлера – Лагранжа для этого лагранжиана. При квазиклассич. квантовании поля u основную роль играют приведенные выше выражения для P_0 и P_1. Первые члены в правых частях указанных формул отвечают частицам с массой m – частицам основного поля. Переменным второго и третьего типов соответствуют локализованные решения С.-Г. у. – *солитоны* и двойные солитоны с массами M и $2M\sin\theta$. Система обладает законом сохранения (топологич. заряд):

$$Q = \frac{1}{2\pi}(u(+\infty, t) - u(-\infty, t)), \quad Q \in \mathbb{Z}.$$

Частицы первого и третьего типов имеют заряд, равный 0, а у частиц второго типа заряд равен ± 1. Частицы с одинаковыми зарядами отталкиваются, а с разными зарядами – притягиваются. Наличие бесконечного числа законов сохранения означает, что при рассеянии сохраняются количества частиц каждого типа; n-частичная S-матрица сводится к парным S-матрицам. С помощью интеграла по траекториям можно вычислить квантовые поправки к массам и к квазиклассич. S-матрице солитонов. Одним из нетривиальных свойств указанной модели является появление целого спектра частиц (солитонов), в то время как лагранжиан теории содержит только одно поле. Кроме того, в приближении слабого взаимодействия (то есть когда γ мало) солитоны – тяжелые частицы и сильно взаимодействуют.

Лит.: [1] Ablowitz M. [и др.], «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 30, p. 1262–64; [2] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., «Теоретич. и математич. физика», 1974, т. 21, № 2, с. 160–174; [3] их же, «Труды Математич. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 254–66; [4] Козел В. А., Котляров В. П., «Доклады АН УССР, сер. А.», 1976, № 10, с. 878–81; [5] Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д., «Теоретич. и математич. физика», 1975, т. 25, № 2, с. 147–63; [6] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, v. 2, pt 1–2, Pisa, 1923–24; [7] Фиников С. П., Изгибание на главном основании..., М.– Л., 1937; [8] Пелиновский Е. Н., «Известия вузов. Радиофизика», 1976, т. 19, № 5–6, с. 883–901.

Л. А. Тахтаджян.

СИНУС-ГОРДОНА УРАВНЕНИЕ суперсимметричное – уравнение движения

$$D_+ D_- \Phi = \mathrm{sh}\,\Phi$$

для суперскалярного поля Φ в $2|2$-мерном суперпространстве с операторами супердифференцирования $D_\pm$ в переменных светового конуса. Оно является частным случаем *Тоды суперсимметричной цепочки*, ассоциируемым с супералгеброй $\mathrm{osp}(2|2)^{(2)}$; впервые введено в [1], обладает солитонными решениями.

Лит.: [1] Ferrara S., Girardello L., Sciuto S., «Phys. Lett.», 1978, v. 76B, p. 303–06.

М. В. Савельев.

СИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Фурье преобразование.*

СИНХРОНИЗАЦИЯ часов – см. *Скорость света.*

СИНЬОРИНИ ЗАДАЧА – задача определения равновесия упругого тела, естественная форма которого поддерживается жесткой поверхностью без трения. В случае

$$Lv = -\Delta v - f$$

С. з. записывается в виде *вариационного неравенства* с $K = \{v \in W_2^1(D) \mid v \geqslant 0 \text{ на } \partial D\}$ или в виде односторонней задачи $Lu = 0$ в D, $\min\{\partial u/\partial \boldsymbol{n}, u\} = 0$ на ∂D, где $\boldsymbol{n}$ – внешняя нормаль к ∂D. Решение u С. з. существует (при достаточно гладких f, ∂D) и принадлежит $W_2^2(D) \cap C^{1+\alpha}(\bar{D})$, $\alpha < 1/2$. С. з. представляет собой частный случай *препятствия зада-*

чи (с препятствием на границе области). Множество $\partial\{x\in\partial D | u>0\}$, на к-ром упругое тело «отходит» от жесткой поверхности ∂D, играет роль неизвестной границы.

Лит.: [1] Фикера Г., Теоремы существования в теории упругости, пер. с англ., М., 1974; [2] Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я., Решение вариационных неравенств в механике, пер. со словацк., М., 1986. *Т. Н. Рожковская.*

СИСТЕМА В ИНВОЛЮЦИИ – набор функций $F_1, \ldots, F_s$ на *симплектическом многообразии* (M^{2n}, ω), попарная *Пуассона скобка* которых равна нулю: $\{F_i, F_j\}=0$. Если гамильтонова система с гамильтонианом H имеет s первых интегралов в инволюции, то она сводится к гамильтоновой системе на $2(n-s)$-мерном многообразии. Если $s=n$, то говорят о полной интегрируемости системы (см. *Лиувилля теорема* об интегрируемости). *М. Э. Казарян.*

СИСТЕМА ОТСЧЕТА – совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение (или равновесие) каких-нибудь других материальных точек или тел. Любое движение является относительным, и движение тела следует рассматривать лишь по отношению к какому-либо другому телу (телу отсчета) или системе тел.

Математически движение тела (или материальной точки) по отношению к выбранной С. о. описывается уравнениями, к-рые устанавливают, как изменяются с течением времени координаты, определяющие положение тела (точки) в этой С. о.

Выбор С. о. зависит от целей исследования и, вообще говоря, произволен. При кинематич. исследованиях все С. о. равноправны. В задачах динамики также могут использоваться любые произвольно движущиеся С. о. Однако во многих случаях преимущественную роль играют *инерциальные системы отсчета*, по отношению к к-рым дифференциальные уравнения движения имеют обычно более простой вид. Иногда, напр. при исследовании процессов в какой-либо среде, удобно выбрать С. о., движущуюся вместе со средой. Такая С. о. называется сопутствующей. *С. М. Тарг.*

СИСТЕМА С ВРАЩАЮЩИМИСЯ ФАЗАМИ – см. *Усреднения метод.*

***K*-СИСТЕМА** – *динамическая система* (автоморфизм T, точнее, порождаемая им группа автоморфизмов $\{T^n, n\in\mathbb{Z}\}$, или измеримый *поток*), определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и обладающая *K*-свойством, которое в случае автоморфизма состоит в следующем: найдется такая σ-алгебра $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}$, что:

1) $T\mathcal{F}_0\supset\mathcal{F}_0$;

2) $\bigvee_{n\geqslant 0} T^n\mathcal{F}_0$ порождает $\mathcal{F}$;

3) $\bigwedge_{n<0} T^n\mathcal{F}_0=\mathfrak{N}$,

где $\mathfrak{N}$ есть σ-алгебра, содержащая лишь множества меры 0 и 1 (тривиальная σ-алгебра), а равенства между σ-алгебрами считаются выполненными с точностью до множеств меры 0. В случае потоков *K*-свойство формулируется так же, но с заменой дискретного параметра n на непрерывный.

Понятие *K*-с. было введено А. Н. Колмогоровым [1], назвавшим такие системы квазирегулярными. *K*-с. с дискретным временем называются *K*-автоморфизмами, с непрерывным временем – *K*-потоками.

Примером *K*-с. может служить группа сдвигов в пространстве выборочных функций стационарного в узком смысле случайного процесса X_t, $-\infty<t<\infty$, с дискретным или непрерывным временем, остаточная σ-алгебра к-рого тривиальна (остаточная σ-алгебра определяется как пересечение $\bigwedge_{t>0}\mathcal{B}_{\geqslant t}$, где $\mathcal{B}_{\geqslant t}$ есть σ-алгебра, порожденная случайными величинами X_s при всех $s\geqslant t$). Процессы с тривиальной остаточной σ-алгеброй называются регулярными по Колмогорову или удовлетворяющими закону нуль-единица. Если T^t – сдвиг, переводящий реализацию ω регулярного процесса X_t в реализацию $\tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega}(s)=\omega(s+t)$ (сдвиг влево), то σ-алгебра $\mathcal{B}_{\geqslant 0}$ удовлетворяет условиям, наложенным на $\mathcal{F}_0$ в определении *K*-с. В случае когда время дискретно, а разбиение, порожденное величиной X_0 (то есть разбиение на множества вида $X_0=\mathrm{const}$), имеет конечную энтропию, регулярность процесса X_t не только достаточна, но и необходима для наличия *K*-свойства у системы $\{T^t\}$ (в общем случае это неверно; см. [2]).

Помимо теории вероятностей, *K*-с. встречаются также среди динамич. систем классич. и статистич. механики и в других областях.

В общей теории *K*-с. обычно предполагается, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – пространство Лебега; тогда в определении *K*-с. σ-алгебру $\mathcal{F}_0$ можно заменить отвечающим ей измеримым разбиением (*K*-разбиением), а σ-алгебры $\mathcal{F}$ и $\mathfrak{N}$ – соответственно разбиением на отдельные точки и разбиением, единственный элемент к-рого – все Ω. Впрочем, многие результаты (в особенности касающиеся *K*-автоморфизмов) справедливы для более широкого класса вероятностных пространств.

Любая *K*-с. эргодична, имеет положительную энтропию и счетнократный лебеговский спектр (см. [1], [3]), является перемешиванием любой кратности и, более того, обладает свойством *K*-перемешивания, к-рое эквивалентно *K*-свойству (отсюда термин «*K*-перемешивание»). Класс *K*-с. можно охарактеризовать в чисто энтропийных терминах (см. [5], [6]): динамич. система принадлежит этому классу в том и только в том случае, когда она имеет вполне положительную энтропию. Последнее означает, что любой нетривиальный гомоморфный образ (факторсистема) рассматриваемой системы (см. *Изоморфизм* динамических систем) имеет положительную энтропию. При переходе к такому гомоморфному образу *K*-свойство сохраняется. Оно сохраняется также при смене «направления времени», то есть при переходе от динамич. системы $\{T^t\}$ к динамич. системе $\{S^t\}$, где $S^t=T^{-t}$. Всякий измеримый поток, содержащий хотя бы один *K*-автоморфизм, является *K*-с. (см. [7]–[9]). Класс *K*-с. распадается на подклассы систем с одинаковой энтропией, каждый из к-рых содержит *Бернулли сдвиг* (в случае дискретного времени) или его аналог – поток Бернулли (в случае непрерывного времени, см. [10]). Системы из разных подклассов неизоморфны, но и среди *K*-с. с одинаковой энтропией можно найти несчетное семейство попарно неизоморфных (см. [10], [11]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Доклады АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861–64; [2] Перри В., там же, 1967, т. 173, № 2, с. 264–66; [3] Синай Я. Г., «Известия АН СССР. Сер. математич.», 1961, т. 25, № 6, с. 899–924; [4] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [5] Рохлин В. А., Синай Я. Г., «Доклады АН СССР», 1961, т. 141, № 5, с. 1038–41; [6] Рохлин В. А., «Успехи математич. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–54; [7] Rudolph D., «Math. Z.», 1976, Bd 150, № 3, S. 201–20; [8] Blanchard F., «J. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 36, № 2, S. 129–36; [9] Гуревич Б. М., «Функциональный анализ и его прилож.», 1977, т. 11, № 3, с. 20–23; [10] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [11] Ornstein D., Shields P., «Adv. Math.», 1973, v. 10, № 1, p. 63–88. *Б. М. Гуревич.*

***У*-СИСТЕМА** – гладкая *динамическая система* (*поток* или *каскад*) с компактным фазовым многообразием, которое все является *гиперболическим множеством*. Диффеоморфизм, порождающий *У*-каскад, называется *У*-диффеоморфизмом. *У*-с. были введены Д. В. Аносовым (см. [1], [2]), поэтому иногда их называют системами Аносова.

У-с. являются *грубыми системами*, причем при малом (в смысле C^1) возмущении *У*-с. снова получается *У*-с.; число периодич. траекторий *У*-с. периода не больше T экспоненциально растет с ростом T. *У*-с. обладают сильными эргодич. свойствами по отношению к широкому классу так наз. «гиббсовских» инвариантных мер (см. [4]–[6]). [В частности, если *У*-с. имеет конечную инвариантную меру, «совме-

стимую с гладкостью», то есть задаваемую в терминах локальных координат положительной плотностью (в первых работах только такие меры и рассматривались, см. [1]–[3]), то эта мера – гиббсовская.]

Лит.: [1] Аносов Д. В., «Доклады АН СССР», 1962, т. 145, № 4, с. 707–09; 1963, т. 151, № 6, с. 1250–52; [2] его же, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967; [3] Аносов Д. В., Синай Я. Г., «Успехи математич. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 107–72; [4] Синай Я. Г., там же, 1972, т. 27, в. 4, с. 21–64; [5] Боуэн Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [6] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129–262. *Д. В. Аносов.*

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА – см. *Анализ данных.*

СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА риманова многообразия (M^n, g_{ij}) – след *Риччи тензора*, равный

$$R = g^{lq} R_{ql} = g^{lq} R^i_{q,il},$$

где $R^i_{q,kl}$ – тензор кривизны связности Леви-Чивиты на M^n. Для двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве С. к. совпадает с удвоенной гауссовой кривизной.

См. также *Гравитационного поля уравнения.* *В. В. Трофимов.*

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ – функция точки некоторого пространства, значениями которой являются действительные числа. Примеры С. п.: поле температуры внутри тела, поле плотности.

Свободные (невзаимодействующие) поля подчиняются *Клейна – Гордона уравнению*

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0, \qquad (*)$$

где $x = (x, t)$, $\Box$ – оператор Д'Аламбера, а параметр m называется массой (уравнение записано в системе $\hbar = c = 1$). Общее решение уравнения (*) имеет вид суперпозиции плоских волн с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и частотой $k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ (нулевой компонентой 4-вектора $\boldsymbol{k}$):

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-3/2} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}} [a^+(\boldsymbol{k}) e^{ikx} + a^-(\boldsymbol{k}) e^{-ikx}].$$

В квантовой теории поля функции $a^{\pm}(\boldsymbol{k})$ представляют собой операторы рождения и уничтожения свободных скалярных частиц с импульсом $\boldsymbol{k}$, массой m и нулевым спином, являющихся квантами С. п. В правой части уравнения (*) стоит выражение, нелинейно зависящее от самого поля $\varphi(x)$ (случай самодействия, напр.: $g\varphi^2(x)$, где g – константа взаимодействия) или от других физич. полей. *А. В. Ефремов.*

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ – см. *Векторная алгебра, Гильбертово пространство.*

СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ – см. *Потенциал.*

СКАЧКООБРАЗНЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС – *марковский процесс*, у которого значения изменяются мгновенно (скачки) в отдельные (случайные) моменты времени. В наиболее простом случае, когда марковский процесс $\{\xi_t, t \in \mathbb{R}\}$ может принимать лишь конечное или счетное число значений $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ для любого фиксированного момента времени t_0, условная вероятность того, что в момент времени $t_0 + \Delta t$, $\Delta t > 0$, процесс примет значение $\xi_{t_0+\Delta t} = y\,(= x_k)$ при условии, что его значение в момент времени t_0 совпадает с $x\,(= x_s \neq x_k)$ (вероятность перескока из x_s в x_k), равна:

$$\mathsf{P}\{\xi_{t_0+\Delta t} = y | \xi_{t_0} = x\} = q(y, x, t_0)\Delta t + o(\Delta t). \qquad (1)$$

При этом условная вероятность того, что значение x в течение промежутка времени Δt не изменится, оказывается равной

$$1 - \sum\nolimits_y q(y, x, t_0)\Delta t + o(\Delta t). \qquad (2)$$

Величины $\{q(x, y, t) \geqslant 0, x \neq y\}$ называются инфинитезимальными вероятностями перехода марковского процесса $\{\xi_t, t \in \mathbb{R}\}$. По ним полностью восстанавливается переходная функция $P(x, y, t_1, t_2)$ процесса, то есть условная вероятность принять процессу в момент времени t_2 значение y при условии, что в момент времени t_1 он принял значение x.

В случае, когда множество возможных значений С. м. п. $\{\xi_t, t \in \mathbb{R}\}$ оказывается непрерывным, формула (1) выражает плотность $\mathsf{P}_{\Delta t}\{y | \xi_{t_0} = x\}$ условной вероятности «перескочить» от значения x к значению y за время Δt [при этом в формуле (2) сумму по y следует заменить интегралом].

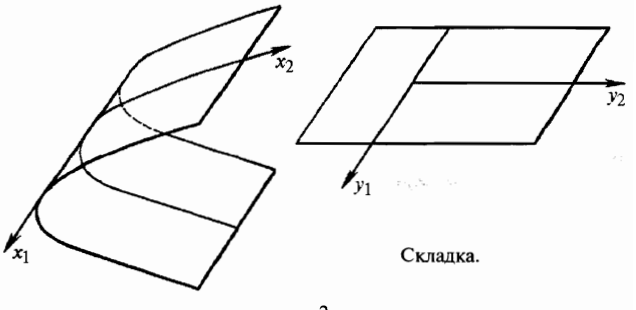
Всякая реализация $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ С. м. п. представляет собой кусочно постоянную функцию, у к-рой скачки (разрывы) происходят лишь в отдельные изолированные моменты времени и число таких скачков за любой конечный интервал времени конечно.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977. *Р. А. Минлос.*

СКЕЙЛИНГ – *масштабная инвариантность*, подобие, автомодельность физических процессов.

КНО-СКЕЙЛИНГ, скейлинг, Кобы (Z. Koba) – Нильсена (M. Nielsen) – Олесена (P. Olesen) – *масштабная инвариантность*, характеризующая распределение по множественности событий множественного рождения адронов. Как известно, средняя множественность адронов $\langle n \rangle$ увеличивается с ростом энергии сталкивающихся адронов. КНО-с. заключается в том, что распределение событий по множественности n зависит только от величины $n/\langle n \rangle$ и не зависит от энергии сталкивающихся частиц. Таким образом, ширина распределения по множественности растет пропорционально средней множественности $\langle n \rangle$, а не пропорционально $\sqrt{\langle n \rangle}$, как было бы, напр., для распределения Пуассона. На опыте КНО-с. осуществляется приближенно. *Л. Б. Окунь.*

СКЛАДКА – простейшая особенность гладкого отображения плоскости в плоскость (или поверхности в поверхность). В нек-рых локальных координатах может быть записана в виде $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2^2$ (см. рис.). У отображений общего положения встречается вдоль неособых кривых.



Складка.

См. также *Катастроф теория.* *О. В. Ляшко.*

СКОЛЬЗЯЩИЙ ВЕКТОР – см. *Вектор.*

СКОРОСТЕЙ ПОЛЕ – см. *Векторное поле.*

СКОРОСТЬ – одна из основных кинематических характеристик движения точки; векторная величина, определяемая равенством:

$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt,$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки, t – время. При равномерном движении С. точки численно равна отношению пройденного пути s к промежутку времени t, за к-рый этот путь пройден, то есть

$$v = s/t,$$

а в общем случае численно

$$v = ds/dt.$$

Вектор С. направлен по касательной к траектории точки. Если движение точки задано уравнениями, выражающими зависимость ее декартовых координат x, y, z от t, то

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

где $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$, а косинусы углов, к-рые вектор С. образует с координатными осями, равны соответственно v_x/v, v_y/v, v_z/v. Размерность С. LT^{-1}.

СКОРОСТЬ СВЕТА – одна из фундаментальных физических постоянных; в свободном пространстве (пустоте) – скорость c распространения любых электромагнитных волн. Она представляет собой предельную скорость распространения любых физич. воздействий и инвариантна при переходе от одной *инерциальной системы отсчета* к другой. Величина c связывает массу и полную энергию (в релятивистской механике):

$$E = mc^2,$$

через нее выражаются преобразования координат, скоростей и времени (см. *Лоренца преобразование*), она входит и в другие соотношения и, естественно, в *Максвелла уравнения*.

Опираясь на постоянство С. с., определяют процедуру синхронизации часов, находящихся в различных точках пространства, путем обмена световыми сигналами (подробнее об этом см. в [1]). Следует заметить, что эта процедура может быть достаточно произвольной, являясь простым следствием того или иного выбора координатной системы; более того, существуют такие координатные системы (напр., ускоренные), в к-рых синхронизация часов не может быть осуществлена. Далее, ни из чего не следует, что С. с. в одном направлении должна быть равна С. с. в противоположном направлении. Экспериментально это проверить нельзя. Таким образом, постулат о постоянстве С. с. [как он определен А. Эйнштейном (A. Einstein)] в общем случае произвольной синхронизации часов не выполняется.

В связи с этим на понятии С. с. можно ярко проиллюстрировать разницу между так наз. координатными и физическими величинами – понятиями теории относительности, смысл к-рых заключен уже в их наименовании. Координатные величины зависят от произвола в выборе координатно-временной сетки или арифметизации, используемой для описания явлений; они задаются определенным способом измерений. Физические величины являются объективными характеристиками пространства-времени и материи; поэтому для их построения, наряду с координатными величинами, надлежит использовать инвариантные объекты, определяющие геометрию пространства-времени (метрич. тензор, тетрады и т. п.).

1) Координатная скорость света. Скорость движения светового сигнала описывается изотропным интервалом

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0;$$

здесь ds^2 выражена в произвольной (криволинейной) системе координат псевдоевклидова пространства-времени. Координатная скорость света равна

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} = ve^\alpha,$$

где

$$v = \frac{c\sqrt{g_{00}}}{1 - \frac{g_{0\alpha}e^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}}$$

(доказывается, что знаменатель не равен нулю). В случае постоянства метрич. коэффициентов скорость v также будет постоянной, но разной для различных направлений движения.

Именно с помощью такого определения скорости света осуществлялась синхронизация часов в разных точках пространства в инерциальной системе отсчета; синхронизация зависит от выбора системы координат и потому не является сколько-нибудь важным физич. фактом. Только в галилеевых координатах эта скорость равна c и не зависит от направления движения: «Об универсальном постоянстве скорости света в пустоте не может быть и речи уже потому, что скорость света постоянна только в галилеевых системах отсчета» (В. Паули; W. Pauli, 1947).

2) Физическая скорость света равна

$$v = \frac{dl}{d\tau},$$

где физическое, а по существу, *собственное время* τ в произвольных координатах имеет вид:

$$d\tau = dt\sqrt{g_{00}} + \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}},$$

а расстояние l определяется формулой

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta.$$

Поскольку для светового сигнала интервал равен нулю, то физич. С. с. в инерциальной системе отсчета в любой системе координат пространства-времени всегда равна c и не зависит от направления:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = c.$$

Этим утверждается истинный смысл постулата о постоянстве С. с. (одного из двух в теории относительности) как частное следствие псевдоевклидовой структуры пространства-времени. В частном случае галилеевых координат физич. С. с. совпадает с координатной, но в любых других координатах в инерциальной системе отсчета физич. С. с. отлична от координатной; последняя, вообще говоря, может быть сколь угодно большой.

Именно использование физич. С. с. (а не координатной) позволяет однозначно осуществить синхронизацию часов в разных точках пространства.

Лит.: [1] Логунов А. А., Лекции по теории относительности. Современный анализ проблемы, М., 1987. *М. И. Войцеховский.*

СКРЕЩЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ группы G и кольца K – ассоциативное кольцо, определяемое следующей конструкцией. Пусть заданы однозначное отображение σ группы G в группу автоморфизмов ассоциативного кольца K с единицей и семейство

$$\rho = \{\rho_{g,h} | g,\ h \in G\}$$

обратимых элементов кольца K, удовлетворяющее условиям

$$\rho_{g_1,g_2,g_3} \cdot \rho_{g_2,g_3} = \rho_{g_1g_2,g_3}\rho_{g_1,g_2}^{g_3\sigma};$$

$$\alpha^{g_1\sigma \cdot g_2\sigma} = \rho_{g_1,g_2}^{-1}\alpha^{(g_1g_2)\sigma}\rho_{g_1,g_2}$$

для всех $\alpha \in K$ и $g_1,\ g_2,\ g_3 \in G$. Семейство ρ называется системой факторов. Элементами С. п. группы G и кольца K при системе факторов ρ и отображении σ будут всевозможные формальные конечные суммы вида

$$\sum_{g \in G} \alpha_g t_g, \quad g \in G, \quad \alpha_g \in K$$

(t_g – символ, однозначно сопоставляемый каждому элементу $g \in G$), а операции определяются формулами

$$\sum_{g \in G}\alpha_g t_g + \sum_{g \in G}\beta_g t_g = \sum_{g \in G}(\alpha_g + \beta_g)t_g;$$

$$\left(\sum_{g \in G}\alpha_g t_g\right)\left(\sum_{g \in G}\beta_g t_g\right) =$$

$$= \sum_{h \in G}\left(\sum_{xy=h, x,y \in G}\left(\alpha_x \beta_y^{x\sigma}\rho_{x,y}\right)\right)t_h.$$

Это кольцо обозначается $K(G, \rho, \sigma)$; элементы t_g образуют K-базис С. п. $K(G, \rho, \sigma)$.

Лит.: [1] Sehgal S. K., Topics in group rings, N. Y., 1978; [2] Бовди А. А., «Сибирский математич. журнал», 1963, т. 4, с. 481–500; [3] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 5–118. *А. А. Бовди.*

СЛАБАЯ ДИСПЕРСИЯ – см. *Дисперсия.*

СЛАБАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ – термин, означающий, что нелинейные члены уравнения (формулы) являются в некотором смысле младшими по сравнению с линейными. Уравнение с параметрами $\delta,\ h \to 0$:

$$L\left(x, u, \delta\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \partial^{|m|}\frac{\partial^{|m|}u}{\partial x^m}, \delta, h\right) = 0, \quad x = (x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

имеет С. н. на функциях вида $u=\gamma f(S(x)/h,\ x)$, если старший член разложения

$$L\left(x,\gamma f(\tau,x),\gamma\frac{\delta}{h}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial f(\tau,x)}{\partial\tau},\ldots,\gamma\left(\frac{\delta}{h}\right)^{|m|}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{m}\frac{\partial^{|m|}f(\tau,x)}{\partial\tau^{|m|}},\delta,h\right)$$

в ряд Лорана по h линеен относительно f, ..., $\partial^{|m|}f/\partial\tau^{|m|}$. В зависимости от соотношения между δ, γ и h одно и то же уравнение может быть нелинейным или С. н. Напр., уравнения теории упругости (см. [1]):

$$\delta^2\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}=\delta^2\frac{\partial}{\partial x_k}\lambda_{iklm}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}+\frac{\partial u_m}{\partial x_l}+\delta\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_m}\right)$$

слабо нелинейны на $u=\gamma f(S(x,\ t)/h,\ x,\ t)$ при $\delta=\gamma=h$ и нелинейны при $\delta=h$, $\gamma=1$ или $\delta=1$, $\gamma=h$.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, М., 1987.

Г. А. Омельянов.

СЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – см. *Великое объединение взаимодействий.*

СЛАБОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ – см. *Перемешивание.*

СЛАБЫЙ ТОК – см. *Ток.*

СЛАВНОВА – ТЕЙЛОРА ТОЖДЕСТВА – соотношения между функциями Грина, обеспечивающие *калибровочную инвариантность* квантовой теории; введены в 1972 А. А. Славновым и Дж. Тейлором (J. Taylor). Для того чтобы практически работать с калибровочными полями, обычно выбирают однозначного представителя в классе эквивалентных конфигураций, что достигается наложением условия калибровки. Наложение условия калибровки нарушает явную инвариантность теории. Тем не менее, в класс. теории все наблюдаемые величины не зависят от конкретного выбора калибровки, что является проявлением принципа относительности в зарядовом пространстве. Однако квантовая теория содержит новый элемент – процедуру перенормировки, к-рая эквивалентна переопределению исходного лагранжиана. Эта процедура должна быть согласована с принципом относительности. Необходимым и достаточным условием независимости наблюдаемых величин от конкретного выбора условия калибровки является выполнение соотношений между функциями Грина, получивших название С.– Т. т. Эти тождества являются обобщением *Уорда тождеств* в электродинамике и играют ключевую роль в доказательстве калибровочной инвариантности и унитарности перенормированной матрицы рассеяния.

С.– Т. т. для функций Грина полей Янга – Миллса в обобщенной лоренцевой калибровке можно записать в виде:

$$\int\exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}_{\text{эф}}+J_\mu^a A_\mu^a\right]dx\right\}\left\{-\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A_\mu^\alpha(J)+\right.$$
$$\left.+\int\bar c^a(y)J_\mu^b(z)[\nabla_\mu c(z)]^b\,dz\right\}\prod dA\,d\bar c\,dc=0,\qquad(1)$$

где эффективный лагранжиан $\mathscr{L}_{\text{эф}}$ дается формулой

$$\mathscr{L}_{\text{эф}}=\operatorname{tr}\left[\frac{1}{8}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{4\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2-\frac{1}{2}\bar c(\Box c-g\partial_\mu(A_\mu,c))\right].\qquad(2)$$

Здесь A_μ – поле Янга – Миллса, $\bar c$, c – *Фаддеева – Попова духи.*

Дифференцируя тождество (1) по внешнему источнику J_μ и полагая затем $J_\mu=0$, можно получить соотношения между функциями Грина, обеспечивающие физич. эквивалентность различных калибровок. Из этих соотношений следуют, в частности, равенства между константами перенормировки

$$\delta m=0;\ z_1z_2^{-1}=\tilde z_1\tilde z_2^{-1};\ z_4=z_1^2z_2^{-1},\qquad(3)$$

где δm – постоянная перенормировки массы поля Янга – Миллса, z_2 и $\tilde z_2$ – постоянные перенормировки волновых функций поля Янга – Миллса и духовых полей c соответственно, z_1 и z_4 – постоянные перенормировки вершинных функций поля Янга – Миллса с тремя и четырьмя внешними линиями, $\tilde z_1$ – перенормировка вершины взаимодействия духовых полей с полем Янга – Миллса. Эти соотношения гарантируют калибровочную инвариантность перенормированной матрицы рассеяния.

С.– Т. т. выражают симметрию эффективного действия относительно одновременных преобразований полей Янга – Миллса и духовых полей, обобщающих калибровочные преобразования классич. теории.

Лит.: [1] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988; [2] Тейлор Дж., Калибровочные теории слабых взаимодействий, пер. с англ., М., 1978; [3] Иниксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

А. А. Славнов.

СЛЕД ОПЕРАТОРА A линейного, в n-мерном унитарном пространстве K – след $\operatorname{tr}(A)$ (или $\operatorname{sp}A$) его матрицы. С. о. не зависит от базиса; $\operatorname{tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha\operatorname{tr}A+\beta\operatorname{tr}B$ для операторов A, B и α, $\beta\in\mathbb{C}$;

$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA),\quad \operatorname{tr}(A^*)=\overline{\operatorname{tr}A},$$
$$\operatorname{tr}(VAV^{-1})=\operatorname{tr}A,\quad \operatorname{tr}A=\sum\nolimits_{k=1}^{n}\lambda_k(A),$$

где $\lambda_k(A)$ – собственные значения оператора A, занумерованные с учетом кратности. В гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $\{e_\alpha\}$ не обязательно определена $\sum_\alpha(e_\alpha,\ Te_\alpha)$ для $T\in\mathscr{B}(H)$ (множество ограниченных линейных операторов). На $\mathscr{B}(H)$ нет ненулевого линейного функционала t со свойством $t(AB)=t(BA)$ при всех A, B (см. *Коммутатор* операторов). Класс операторов со следом (tr-class) $\mathscr{C}_1(H)\subset\mathscr{B}(H)$, для к-рых вводится аналог следа матрицы, совпадает с классом ядерных операторов в H. Пусть $\mathscr{C}_\infty=\mathscr{C}_\infty(H)$ – класс всех компактных операторов в H, $T\in\mathscr{C}_\infty$, $|T|=(T^*T)^{1/2}$, $s_n(T)=\lambda_n(|T|)$ – сингулярные числа (s-числа) T, упорядоченные по невозрастанию и повторяемые в соответствии с их кратностью, тогда $\{s_n(T)\}_{n=1}^\infty\in c_0$. Класс Шаттена

$$\mathscr{C}_p=\mathscr{C}_p(H)=\left\{T\in\mathscr{C}_\infty:\{s_n(T)\}_{n=1}^\infty\in l_p\right\},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

– банахово пространство с нормой

$$\|T\|_p=\left(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}s_n(T)^p\right)^{1/p}$$

и двусторонний *-идеал алгебры $\mathscr{B}(H)$ (то же для $\mathscr{C}_\infty$ с $\|\cdot\|_\infty=\|\cdot\|$ из $\mathscr{B}(H)$); $\mathscr{C}_1$ – класс ядерных операторов, $\mathscr{C}_2$ – класс операторов Гильберта – Шмидта и $TS\in\mathscr{C}_1$ для $T\in\mathscr{C}_p$, $S\in\mathscr{C}_q$ при $p^{-1}+q^{-1}=1$, $1\leqslant p,\ q\leqslant\infty$. Для $T\in\mathscr{C}_1$ С. о. называется число

$$\operatorname{tr}(A)=\sum\nolimits_\alpha(e_\alpha,Te_\alpha),$$

не зависящее от ортонормированного базиса. Линейный функционал $\operatorname{tr}(\cdot)$ на $\mathscr{C}_1$ непрерывен,

$$|\operatorname{tr}(T)|\leqslant\|T\|_1,\ \operatorname{tr}(T^*)=\overline{\operatorname{tr}(T)},\ \operatorname{tr}(UTU^*)=\operatorname{tr}(T),$$

если U – унитарный оператор, $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ для AB и BA из $\mathscr{C}_1$. По теореме Лидского

$$\operatorname{tr}(A)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\lambda_n(A),\quad A\in\mathscr{C}_1.$$

Билинейная форма $\langle T,S\rangle=\operatorname{tr}(TS)$ ставит в двойственность пары банаховых пространств операторов так, что можно отождествить $\mathscr{C}_\infty(H)^*=\mathscr{C}_1(H)$ и $\mathscr{C}_1(H)^*=\mathscr{B}(H)$. Нормальные состояния алгебры Неймана $\mathscr{B}(H)$ имеют вид $A\mapsto\operatorname{tr}(\rho A)$, где $\rho\in\mathscr{C}_1^+$ – положительный оператор с $\operatorname{tr}\rho=1$. Такие «матрицы плотности» ρ в формализме Неймана квантовой механики соответствуют смешанным состояниям (см. также *Гиббса состояние*). Исследования операторов со следом включены в теорию возмущений линейных операторов, в частности, при исследовании волновых операторов в квантовомеханич. теории рассеяния.

Для *тензорного произведения* операторов в $H_1 \otimes H_2$ определяется частичный С. о.:

$$A_1 \otimes A_2 \mapsto \mathrm{tr}_{H_1}(A_1) I \otimes A_2 \quad \text{и} \quad \mathrm{tr}_{H_2}(A_2) A_1 \otimes I.$$

В бесконечномерных локальных выпуклых векторных пространствах важный класс операторов, для к-рых вводится понятие следа, – ядерные операторы.

Лит.: [1] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [2] Schatten R., Norm ideals of completely continuous operators, В.– [а. о.], 1970; [3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 3, М., 1982; [4] Dixmier J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertienne, 2 éd., P., 1969; [5] Браттели У., Робинсон Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, пер. с англ., М., 1982.

А. В. Булинский.

СЛОЕНИЕ на n-мерном многообразии M^n – разбиение M^n на линейно связанные подмножества (именуемые слоями) такое, что M^n можно покрыть координатными окрестностями U_α с локальными координатами x_α^1, ..., x_α^n, в которых локальные слои – компоненты связности пересечения слоев с U_α задаются уравнениями

$$x_\infty^{p+1} = \mathrm{const}, \ldots, x_\alpha^n = \mathrm{const}.$$

При этом слоение принадлежит классу C^r, $0 \leqslant r \leqslant \infty$ или является аналитическим в зависимости от того, снабжено ли M^n структурой класса C^r или аналитической и координаты являются соответственно класса C^r или аналитическими (при $r=0$ слоение называют также топологическим). Число p называется размерностью слоения, а $q=n-p$ – его коразмерностью. Слоения рассматриваются как самостоятельный объект, так и с точки зрения применения их к теории динамич. систем. Проблемы, к-рые здесь возникают, связаны с изучением возможных типов поведения отдельных слоев, а также с изучением разбиения многообразия M^n на области, заполненные слоями с одинаковым поведением. Большое внимание уделяется проблеме топологич. классификации слоений и связи топологич. инвариантов слоений с топологией многообразия M^n.

Наибольшие достижения в этом круге вопросов имеются для слоений коразмерности 1. К таким результатам относится теорема Новикова, доказывающая гипотезу Эресмана: всякое C^r-слоение ($r \geqslant 2$) на трехмерной сфере S^3 обладает компактным слоем.

Имеются результаты по топологич. классификации нек-рых типов слоений на n-мерном торе. Получила развитие теория слоений с особенностями. Содержательные результаты получены для таких слоений на двумерных многообразиях. В гиперболич. динамич. системах естественно появляется пара слоений W^s и W^u, к-рые являются объединением устойчивых и неустойчивых многообразий точек из M^n и определяются следующим образом. Для гиперболич. системы f^t ($t \in \mathbb{Z}$ или $t \in \mathbb{R}$) слой $W^s(x)$ слоения W^s, проходящий через точку $x \in M^n$, состоит из всех точек $y \in M$, для к-рых $\rho(f^t(x), f^t(y)) \to 0$ при $t \to +\infty$, где ρ – нек-рая метрика на M^n. При этом сходимость к 0 происходит, как известно, с экспоненциальной скоростью, показатель к-рой может зависеть от x. Поэтому слоение W^s называют сжимающимся (при $t \to +\infty$), или устойчивым. Это слоение является инвариантным, то есть

$$f^t(W^s(x)) = W(f^t(x)) \text{ для всякого } x \in M^n.$$

Аналогично, устремляя t в $-\infty$, строится сжимающееся (при $t \to -\infty$) слоение W^u, к-рое называется растягивающимся, или неустойчивым. В типичных случаях пара слоений W^s и W^u является трансверсальной и транзитивной. Транзитивность пары слоений W_1, W_2 означает, что для любых точек x, $y \in M^n$ существуют точки $x_0 = x$, x_1, ..., $x_n = y$ такие, что $x_i \in w_j(x_{i-1}) \in W_j$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1$ или 2.

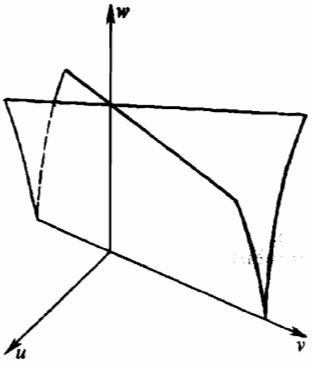
Лит.: [1] Тамура И., Топология слоений, пер. с япон., М., 1979; [2] Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967 («Труды Математич. ин-та АН СССР», т. 90).

В. З. Гринес, Я. Б. Песин.

СЛОЖЕННЫЙ ЗОНТИК УИТНИ – особая алгебраическая гиперповерхность в трехмерном пространстве, заданная в координатах u, v, w уравнением (см. рис.):

$$u^2 = w^3 v^2.$$

С. з. У. впервые описан В. И. Арнольдом [1] как одна из нормальных форм типичных *бикаустик* в $\mathbb{R}^3$. Является фронтом, то есть графиком многозначной функции действия по Лагранжу, простейшего двумерного *лагранжева многообразия* с особенностями – *раскрытого зонтика*. Раскрытый зонтик изоморфен пространству конормального расслоения полукубич. параболы и является единственной устойчивой особенностью двумерных лагранжевых многообразий, полученных как решения задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с гладкой функцией Гамильтона и гладким начальным условием (см. [2]). Поэтому С. з. У. и раскрытый зонтик Уитни встречаются во многих списках особенностей задач теории катастроф. Так, напр., С. з. У. является: а) одной из типичных особенностей семейства траекторий медленного движения в теории релаксационных колебаний с двумя медленными и одной быстрой переменными; б) объединением прямых, касательных к типичной проективной кривой в окрестности точки с нулевым кручением; в) одной из компонент бифуркационной диаграммы простого проектирования типа C_3; г) образом каустики D_4 при специальном отображении складывания.



Сложенный зонтик Уитни.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Теория катастроф, М., 1981; [2] Гивенталь А. Б., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, М., 1988, т. 33, с. 55–112.

В. М. Закалюкин.

СЛОЙ – см. *Расслоение, Слоение.*

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА – одно из основных понятий теории вероятностей; величина, значения которой зависят от случая, причем определены вероятности всех ее значений. Примерами являются число выпадений решки при 10-кратном случайном бросании монеты или расстояние, на к-рое случайно движущаяся броуновская частица отошла от своего начального положения за время t.

В теории вероятностей для описания случайного явления принята следующая схема: вводится подходящее вероятностное пространство (пространство элементарных событий) Ω – множество всех «мыслимых» случаев – реализаций этого явления, и каждому подмножеству $A \subset \Omega$ этих случаев (событию) приписывается неотрицательное число $P(A)$ – вероятность события A. Так, в случае 10 независимых бросаний монеты вероятностное пространство состоит из 2^{10} последовательностей $\omega = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{10})$, где каждое α_i – орел или решка (исход i-го бросания монеты), $i = 1, \ldots, 10$; вероятность каждого события $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, состоящего из N различных последовательностей ω_k равна

$$P(A) = N \cdot 2^{-10}.$$

Вероятностное пространство, описывающее броуновское

движение частицы, состоит из всех мыслимых траекторий этого движения; правило, по к-рому вводятся вероятности событий $P(A)$ из этого пространства, довольно сложно (см., напр., [3]).

Теперь можно более строго определить случайную величину $\xi = \{\xi(\omega), \omega \in \Omega\}$ как числовую функцию на вероятностном пространстве Ω. В наиболее простом случае, когда ξ принимает лишь дискретное множество (конечное или счетное) значений $x_1, ..., x_n$, набор вероятностей

$$p_k = \mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) = x_k\},\ k = 1, 2, ..., n,$$

называется распределением вероятностей значений С. в. ξ (или, короче, распределением ξ). В случае, когда ξ принимает значения из произвольного «непрерывного» числового множества (так, что вероятность каждого отдельного значения $\xi(\omega)$, как правило, равна нулю), распределение ξ задается с помощью так наз. функции распределения

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\},\ -\infty < x < \infty.$$

При этом в случае дискретного множества значений

$$F_\xi(x) = \sum\nolimits_{k;\, x_k \leqslant x} p_k.$$

Если рассматривается одновременно несколько С. в. $\xi_1, ..., \xi_s$ (напр., число всех решек в последовательности $\omega = \{\alpha_1, ..., \alpha_{10}\}$ и число двух последовательных выпадений решки; три координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ броуновской частицы в момент времени t); то вводят их совместную функцию распределения

$$F_{\xi_1, ..., \xi_s}(x_1, ..., x_s) = \mathsf{P}\{\omega : \xi_1(\omega) \leqslant x_1, ..., \xi_s(\omega) \leqslant x_s\}.$$

С. в. $\xi_1, ..., \xi_s$ называются независимыми, когда эта функция распадается на произведение вероятностей отдельных С. в.

Математическое ожидание $\mathsf{E}\xi$ С. в. ξ, принимающей значения из дискретного множества чисел $x_1, ..., x_n$, определяется формулой

$$\mathsf{E}\xi = \sum\nolimits_k x_k p_k.$$

В общем случае, когда С. в. принимает «непрерывное» множество значений, полагают

$$\mathsf{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x),$$

где $\int \cdot\, dF_\xi(x)$ – интеграл Стилтьеса. *Дисперсия* $\mathsf{D}\xi$ С. в. определяется как

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2.$$

Основной рабочий (неформальный) принцип теории вероятностей состоит в том, что все сведения о «статистич. свойствах» С. в. можно целиком извлечь из ее функции распределения (а в случае нескольких С. в.– из их совместной функции распределения), не обращаясь к деталям явной зависимости $\xi(\omega)$ от случая $\omega \in \Omega$.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, пер. с англ., М., 1984; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

Р. А. Минлос.

СЛУЧАЙНАЯ ОШИБКА – см. *Анализ данных.*

СЛУЧАЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ – см. *Случайная функция, Случайный процесс.*

СЛУЧАЙНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ – см. *Случайный процесс.*

СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ – функция произвольного аргумента t (заданная на множестве T его значений и принимающая числовые значения или, более общо́, значения из какого-то векторного пространства) такая, что ее значения определяются с помощью некоторого испытания и в зависимости от его исхода могут быть различными, причем для них существует определенное распределение вероятностей. Более точно, случайная функция на множестве T семейство *случайных величин* $\{\xi_t,\ t \in T\}$, помеченных элементами множества T (называемого областью определения С. ф.) и заданных на одном и том же вероятностном пространстве Ω : $\xi_t = \{\xi_t(\omega),\ \omega \in \Omega\}$. Напр., при n-кратном бросании монеты, когда пространство Ω состоит из 2^n последовательностей $\omega = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, где $\alpha_k = 0$ или 1 [выпадение решки (0) или орла (1) при k-м бросании], можно ввести С. ф. $\{\xi_k,\ k = 1, ..., n\}$ с областью определения $T = \{1, 2, ..., n\}$, где $\xi_k = \alpha_k$ – k-я координата в последовательности ω; при броуновском движении частицы в течение промежутка времени $T = [0, t_0]$, когда пространство Ω образовано всеми возможными ее траекториями

$$\omega = \{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\},$$

в качестве С. ф. можно выбрать семейство $\{\xi_t^x,\ t \in T\}$ значений абсцисс $x(t)$ точек $\boldsymbol{r}(t)$ во все моменты времени t:

$$\xi_t^x(\omega) = x(t).$$

В случаях, когда область определения T совпадает с числовой осью (или отрезком числовой оси) множеством целых чисел, многомерным пространством $\mathbb{R}^d$, $d > 1$ или областью в нем, С. ф. называют соответственно *случайным процессом*, случайной последовательностью (или временным рядом), *случайным полем.* Числовую функцию $\{\xi(t),\ t \in T\}$ на множестве T, получающуюся при фиксировании какого-либо случая $\omega = \omega_0 \in \Omega : \xi(t) = \xi_t(\omega_0)$, называют реализацией С. ф. (или ее выборочной функцией).

Для любого конечного набора элементов $t_1, ..., t_n \in T$ определена совместная функция распределения вероятностей значений набора случайных величин $\xi_{t_1}, ..., \xi_{t_n}$:

$$F_{t_1, ..., t_n}(x_1, ..., x_n) = \mathsf{P}\{\omega : \xi_{t_1}(\omega) \leqslant x_1, ..., \xi_{t_n}(\omega) \leqslant x_n\}.$$

Совокупность всех таких функций $\{F_{t_1, ..., t_n}\}$ для всевозможных наборов $(t_1, ..., t_n \in T,\ n = 1, 2, ...)$ элементов из T называется семейством конечномерных распределений С. ф. $\{\xi_t,\ t \in T\}$. Считается, что вся информация о стохастич. свойствах С. ф. целиком заключена в семействе ее конечномерных распределений, то есть две различные С. ф. $\{\xi_t^{(1)},\ t \in T\}$ и $\{\xi_t^{(2)},\ t \in T\}$ (заданные на одном и том же или на разных вероятностных пространствах), у к-рых семейства конечномерных распределений совпадают для всех наборов $\{t_1, ..., t_n\}$ и значений $\{x_1, ..., x_n\}$, с вероятностной точки зрения эквивалентны.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

Р. А. Минлос.

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ – общее название *случайных процессов* с дискретным временем, моделирующих случайные перемещения пробной частицы в фазовом пространстве при действии на нее как регулярной «силы», так и какого-то случайного механизма. Обычно в качестве фазового пространства X для С. б. используется $\mathbb{R}^d$ или целочисленная решетка $\mathbb{Z}^d$ в нем. Рассматриваются также С. б., когда имеются ограничения на перемещения частицы, то есть когда фазовым пространством является, напр., область в $\mathbb{R}^d$ или подмножество специального типа в $\mathbb{Z}^d$. В этом случае должны быть заданы условия на границе. Таковыми, напр., являются условия остановки процесса при достижении границы или различные условия отражения частицы от границы. См. также *Случайное блуждание* без самопересечений.

Случайные механизмы, вызывающие случайные перемещения частицы, могут быть различными. С. б. в узком смысле называется процесс $\{x_n,\ n \geqslant 0\}$ в фазовом пространстве X, траектории к-рого представимы в виде суммы независимых случайных величин Δ_k, $k = 0, 1, 2, ...$ (скачков),

$$x_n = x_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n. \qquad (1)$$

С. б. (1) представляет собой дискретный аналог случайных процессов с независимыми приращениями. С. б. $\{x_n\}$ называется однородным, если все Δ_k одинаково распределены. Очевидно, что С. б. (1) является *Маркова цепью*, так как

$$\mathsf{P}\{x_n = a | x_{n-1} = b,\ x_{n-2},\ \ldots,\ x_0\} = \mathsf{P}\{x_n = a | x_{n-1} = b\} = \mathsf{P}\{\Delta_n = a - b\}.$$

Важным понятием, характеризующим С. б. (1) в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$, является понятие возвратности. С. б. называется возвратным (невозвратным), если число попаданий траектории в каждую ограниченную область фазового пространства бесконечно (конечно) с вероятностью 1. Имеет место общий критерий возвратности: С. б. в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$ со скачками Δ_k невозвратно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{s \to 1+0} \operatorname{Re} \int_C [1 - s\mathsf{E} \exp(i(t, \Delta_k))]^{-1}\, dt < \infty,$$

где C – куб в $\mathbb{R}^d$, $C = \{t: |t_i| < \pi,\ i = 1,\ \ldots,\ d\}$. Таким образом, при $d = 2$ С. б. возвратно, если $\mathsf{E}\Delta_k = 0$, $\mathsf{E}\Delta_k^2 < \infty$, $\Delta_k = \{\Delta_{k1}, \Delta_{k2}\}$; при $d \geqslant 3$ С. б. всегда невозвратно. При $d = 1$ справедлива альтернатива: либо С. б. возвратно, либо С. б. невозвратно.

Простейшим примером С. б. (1) является случайное блуждание Бернулли по целочисленным точкам в $\mathbb{R}^1$, когда частица на каждом шаге совершает скачок на 1 вправо с вероятностью p_+ и скачок на 1 влево с вероятностью p_-, $p_+ + p_- = 1$. В этом случае распределение вероятностей для x_n определяется биномиальным распределением:

$$\mathsf{P}\{x_n = m + x_0\} = \begin{cases} C_n^{m_+} p_+^{m_+} p_-^{m_-}; & |m| \leqslant n, \\ 0; & |m| > n, \end{cases}$$

где $m_\pm = (n \pm m)/2$ и блуждание является возвратным, если оно симметрично, $p_+ = p_-$; в противном случае – невозвратным.

См. также *Случайное блуждание* в случайной среде.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2 изд., М., 1967; [2] Спитцер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [3] Скороход А. В., Слободянюк Н. П., Предельные теоремы для случайных блужданий, Киев, 1970. *Ю. П. Вирченко.*

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ без самопересечений – *случайное блуждание*, траектории которого посещают каждую точку решетки $\mathbb{Z}$ не более одного раза. С. б. без самопересечений длины n называется последовательность $X_n = \{x(0), x(1), \ldots, x(n)\}$ точек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, $d > 1$, такая, что $x(0) = 0$, $|x(i) - x(i+1)| = 1$, $x(i) \neq x(j)$ при $i \neq j$. Пусть $c(n)$ – число различных таких С. б. длины n. На множестве всех С. б. без самопересечений определена вероятностная мера, если положить, что вероятности всех последовательностей X_n равны $\frac{1}{c(n)}$. Пусть $\langle\cdot\rangle_n$ – усреднение по этой мере и

$$d(n) = \langle x^2(n) \rangle_n,$$

а

$$Y_n(t, X_n) = d_n^{-1/2} x([n, t]),\ t \in (0, 1).$$

Основные задачи теории С. б. без самопересечений – исследование асимптотик функций $c(n)$, $d(n)$ при $n \to \infty$ и изучение предельного распределения для случайного процесса $Y_n(t, X_n)$, $n \to \infty$.

Проблемы, связанные с такими С. б., активно обсуждаются в физич. литературе в связи с задачами физики полимеров. При этом общепринята следующая картина. Считается, что

$$c(n) \sim \text{const}\, \beta(d)^n n^{\gamma(d)-1},$$

$$d(n) \sim \text{const}\, n^{\tau(n)}.$$

При $d > 4$ критич. индексы $\gamma(d) = \tau(d) = 1$ и распределение $Y_n(t, X_n)$ слабо сходится к стандартной мере Винера в $\mathbb{R}^d$. При $d = 4$ также имеется сходимость к мере Винера, однако в асимптотики для $c(n)$ и $d(n)$ входят логарифмич. поправки. При $d = 2, 3$ поведение С. б. негауссовское и сходимости к мере Винера нет. Вычисления дают значения $\tau(2) = 1{,}5$, $\tau(3) = 1{,}17$.

Строгие математич. результаты о С. б. без самопересечений немногочисленны. *К. М. Ханин.*

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ в случайной среде – *случайное блуждание*, в котором вероятности перехода (в случае блуждания с дискретным временем) или интенсивности перехода (для блужданий с непрерывным временем) являются реализациями некоторого *случайного поля*. С физич. точки зрения С. б. в случайной среде отвечает процессу диффузии в неоднородной среде. В простейшем случае блуждания по решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$, с возможными переходами в соседние точки решетки вероятности перехода определяются случайным полем $\{p_{\pm\alpha}(x),\ x \in \mathbb{Z}^d,\ \alpha = 1,\ \ldots,\ d\}$ по формуле

$$p(x,\ x \pm e_\alpha) = p_{\pm\alpha}(x),$$

где e_α – единичный вектор α-го направления. Обычно предполагают, что случайные величины $p_{\pm\alpha}(x)$ являются независимыми для разных x или накладывают определенные условия убывания корреляций. В случае когда $p_{\pm\alpha}(x) = \frac{1}{2d} + \varepsilon q_{\pm\alpha}(x)$ и ε мало, говорят о малом случайном возмущении одного С. б. Обычно С. б. в случайной среде изучают или как общий случайный процесс, определенный на произведении вероятностных пространств, отвечающих среде и блужданию, или изучают условные распределения этого процесса при условии фиксированной реализации вероятностей перехода, то есть при фиксированной среде. Если при почти всех реализациях среды асимптотич. свойства С. б. не меняются, говорят, что С. б. в случайной среде обладает свойством самоусреднения. Для размерностей $d > 1$ общие математически строгие результаты отсутствуют. В физич. литературе считается, что при $d \geqslant 2$ для достаточно малых случайных возмущений однородного С. б. запирающие области не приводят к существенному замедлению диффузии и случайный процесс

$$\frac{1}{\sqrt{n}} X_n([nt]),\quad t \in [0,1],$$

слабо сходится к винеровскому процессу с неслучайной матрицей ковариаций. При $d = 2$ возможны логарифмич. поправки в нормировке $\sqrt{n}$.

Лит.: [1] Синай Я. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, № 2, с. 247–58; [2] Голосов А. О., «Успехи математич. наук», 1986, т. 41, в. 2, с. 189–90. *К. М. Ханин.*

СЛУЧАЙНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ динамической системы – возмущение *динамической системы*, производимое тем или иным *случайным процессом* (как правило, с нулевым средним), например *белым шумом*. Изучение малых С. в. динамич. систем было начато в 30-х гг. (см. [1]). Основные задачи, связанные с поведением возмущенной системы на бесконечном или безгранично возрастающем с уменьшением возмущений отрезке времени: об асимптотике инвариантной меры, о предельном поведении распределений времени и места выхода из области, из к-рой траектории невозмущенной системы не выходят, и т. п. Простейший, но важный результат здесь состоит в том, что предел инвариантной меры возмущенной системы при уменьшении возмущений есть инвариантная мера невозмущенной системы. Для изучения характеристик такого поведения оказывается существенной асимптотика вероятностей больших уклонений траекторий возмущенной системы от невозмущенной на конечных отрезках времени.

Более всего изучалась схема однородных по времени С. в. динамич. систем $x(t) = b(x(t))$ малым белым шумом, приводящих к *диффузионному процессу* с диффузией, пропорциональной малому параметру ε; задачи, о к-рых говорилось выше, естественно переформулируются в терминах

эллиптич. и параболич. уравнений, связанных с оператором 2-го порядка с малым параметром при старших производных:

$$\sum_i b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j}a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}.$$

Вероятности больших уклонений траектории $x^\varepsilon(t)$ возмущенной системы от траекторий $x(t)$ невозмущенной на конечном отрезке $[T_1, T_2]$ характеризуются так наз. функционалом действия:

$$\varepsilon^{-1}S(\varphi)=\varepsilon^{-1}S_{T_1T_2}(\varphi),$$

где

$$S_{T_1T_2}(\varphi)=S_{T_1}^{T_2}\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(\varphi(t))(\varphi^i(t))-$$
$$-b^i(\varphi(t))(\varphi^j(t))-b^j(\varphi(t))$$

(матрица a_{ij} – обратная к a^{ij}). Более точно: вероятность того, что $x^\varepsilon(t)$ будет на отрезке $[T_1, T_2]$ близка к функции $\varphi(t)$ при малых ε, приближенно равна $\exp\{-\varepsilon^{-1}S_{T_1T_2}(\varphi)\}$ (в предположении, что $x^\varepsilon_{T_1}=\varphi_{T_2}$). Для проведения процесса $x^\varepsilon(t)$ с малым ε на больших отрезках времени оказывается существенным отношение эквивалентности между точками пространства, в к-ром действует динамич. система: $x\sim y$, если существуют функции φ и ψ, соединяющие x с y и y с x (то есть $\varphi_0=x$, $\varphi_{T_1}=y$, $\psi_0=y$, $\psi_{T_2}=x_2$) со сколь угодно малыми значениями $S(\varphi)$, $S(\psi)$. Если имеется конечное число компактов K_i, состоящих из эквивалентных друг другу точек и содержащих все ω-предельные множества невозмущенной системы, возмущенная система на больших отрезках времени в определенном смысле похожа на конечную цепь Маркова, зависящую от параметра ε с вероятностями перехода порядка $\exp\{-\varepsilon^{-1}V_{ij}\}$, где V_{ij} – нижняя грань функционала S по функциям, соединяющим i-й компакт с j-м. Это позволяет в случае «общего положения» указать, на каком компакте K_i будет при $\varepsilon\downarrow 0$ сосредоточиваться инвариантная мера, и решать задачи, связанные с выходом траектории возмущенной системы из области (см. [2]). Если на предельном компакте имеется более одной нормированной инвариантной меры невозмущенной системы, возникает вопрос, к какой из них сходится инвариантная мера возмущенной системы. Особенно интересен этот вопрос, когда невозмущенная система обладает сильными свойствами перемешивания и характеризуется сама по себе «стохастическим» поведением. Результаты, относящиеся к предельному поведению инвариантной меры в этом случае (для динамич. систем с дискретным временем), содержатся в [3], имеются такого рода результаты и для схемы непрерывного времени.

Другая схема малых возмущений – возмущения, не зависящие от параметра, но убывающие с течением времени,– рассматривается в [4] с приложениями к процедурам стохастич. аппроксимации.

Лит.: [1] Понтрягин Л., Андронов А., Витт А., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1933, т. 3, № 3, с. 165–80; [2] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [3] Кифер Ю. И., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1974, т. 38, № 5, с. 1091–115; [4] Коростелев А. П., Стохастические рекуррентные процедуры. Локальные свойства, М., 1984.

А. Д. Вентцель.

СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ – *случайная функция* $\{\xi(x),\ x\in D\}$, определенная на подмножестве D многомерного пространства $\mathbb{R}^d$. С. п., используемые в статистич. задачах математич. физики, обычно являются полями со значениями в каком-либо пространстве $\mathbb{R}^m$, так как выборочные функции $\xi(x)$ С. п. являются отображениями $\xi: D\to\mathbb{R}^m$. Ниже под термином «С. п.» подразумеваются именно такие поля.

На основе понятия С. п. возможно адекватное описание физич. полей, распределение к-рых в пространстве зависит от случая, а именно, флуктуирующих скорости, температуры и плотности турбулентного течения жидкости или газа; случайного распределения оптич. показателя преломления в поликристаллич. оптически-прозрачной среде или в оптич. среде, замутненной каким-то инородным материалом; случайное распределение различных макроскопич. характеристик (механических, тепловых, магнитных, электрических) неоднородных материалов, имеющих гетерогенную структуру; систем статистич. механики и т. д.

Исходя из общей математич. конструкции случайной функции, определение случайного поля означает задание вероятностного пространства $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$. Здесь Ω – пространство элементарных событий, то есть всех допустимых реализаций $\xi(x)$ С. п.; $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра случайных событий, порожденная цилиндрическими множествами:

$$A(x_1,\Delta_1;\ldots;x_n,\Delta_n)=\left\{\bigcap_{j=1}^n\{\xi(x_j)\in\Delta_j\}\right\} \qquad (1)$$

при произвольном n, произвольных наборах $(x_1, \ldots, x_n)$ точек из D, произвольных измеримых подмножествах $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ из $\mathbb{R}^m$; P – распределение вероятностей на событиях из $\mathfrak{B}$. Мера P однозначно восстанавливается по конечномерным распределениям:

$$Q_n(x_1,\Delta_1;\ldots;x_n,\Delta_n)=\mathsf{P}\{A(x_1,\Delta_1;\ldots;x_n,\Delta_n)\} \qquad (2)$$

и С. п. по распределениям (1) определяется с точностью до стохастической эквивалентности. Функции Q_n обладают свойствами согласованности:

1) $Q_n(x_{i_1},\Delta_{i_1};\ldots;x_{i_n},\Delta_{i_n})=Q_n(x_1,\Delta_1;\ldots;x_n,\Delta_n)$,

где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – любая перестановка индексов $(1, \ldots, n)$;

2) $Q_n(x_1,\Delta_1;\ldots;x_{n-1},\Delta_{n-1};x_n,\mathbb{R}^m)=Q_{n-1}(x_1,\Delta_1;\ldots;x_{n-1},\Delta_{n-1})$.

Важное значение в теории С. п. играет понятие инвариантности (симметрии) по отношению к преобразованиям нек-рой группы G. С. п. $\{\xi(x)\}$ называется однородным (более точно, однородным в узком смысле), если оно стохастически эквивалентно полям $\{\xi(gx)\}$ при любом g из G. Наиболее важными группами симметрии являются группа трансляций и группа вращений пространства $\mathbb{R}^d$. Это связано с тем, что для С. п., рассматриваемых как модели каких-либо случайных искажений реальных физич. полей, часто нет никаких оснований считать их статистич. свойства различными в разных точках пространства либо отличаться этими свойствами в разных направлениях.

Для С. п. на $\mathbb{R}^d$ при $d>1$ нет естественных аналогов понятиям «прошлого» и «будущего», к-рые имелись для случайного процесса. Поэтому для построения «естественных» С. п., моделирующих реальные физич. поля, необходимы существенно иные методы. Конструктивное определение меры С. п. требует задания бесконечной совокупности согласованных распределений (2), с помощью конечного набора математич. объектов. Если С. п. таково, что существует корреляционная функция:

$$K(x,y)=\mathsf{E}[\xi(x)\xi(y)]-\mathsf{E}\xi(x)\mathsf{E}\xi(y)$$

(для простоты рассматривается случай $m=1$), для к-рой

$$\int_D K(x,x)\,dx<\infty,$$

то задача построения меры может быть упрощена ввиду существования канонического разложения С. п.:

$$\xi(x)=a(x)+\sum_{k=1}^\infty\eta_k\varphi_k(x), \qquad (3)$$

где $\varphi_k(x)$ – собственные функции ядра $K(x, y)$ с неотрицательными собственными числами λ_k,

$$\int_D K(x,y)\varphi_k(y)\,dy=\lambda_k\varphi_k(x),$$
$$a(x)=\mathsf{E}\xi(x),\quad \sum_k\lambda_k<\infty,$$

η_k – последовательность независимых случайных величин, $\mathsf{E}\eta_k = 0$, $\mathsf{D}\eta_k = \lambda_k$. Ряд (3) сходится в следующем смысле:

$$\lim_{N\to\infty} \int_D \mathsf{E} \left| \xi(x) - a(x) - \sum_{k=1}^{N} \eta_k \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Таким образом, вместо определения согласованных распределений Q_n достаточно указать бесконечный набор несвязанных друг с другом распределений для η_k, произвол в выборе к-рых ограничивается фиксацией дисперсий. В частности, для гауссовских полей все η_k гауссовские (см. *Гаусса распределение*).

Примером альтернативного способа построения распределения вероятностей С. п. служит метод, на к-ром основывается статистическая механика. Пусть пространство Ω снабжено σ-конечной мерой μ такой, что для компактной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ мера множества Ω_Λ, состоящего из сужений $\xi_\Lambda(x)$ реализаций $\xi(x)$ из Ω на $\Lambda \cap D$,– конечна. Пусть задан функционал $H\{\xi\}$, определенный на финитных функциях, $H\{\xi\}$ – гамильтониан системы статистич. механики. Распределение вероятностей P_Λ на σ-алгебре $\mathfrak{B}_\Lambda$ – сужении $\mathfrak{B}$ на Ω_Λ определяется формулой

$$d\mathsf{P}_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \exp[-H\{\xi_\Lambda\}]\, d\mu,$$

где

$$Z_\Lambda = \int_{\Omega_\Lambda} d\mu \exp[-H\{\xi_\Lambda\}].$$

Распределение P на Ω есть предел (если он существует) последовательности распределений P_Λ по расширяющейся последовательности компактных областей Λ_n, удовлетворяющих специальным ограничениям. С. п., построенные по изложенному принципу, называются гиббсовскими. Важным частным случаем гиббсовских полей являются точечные С. п., у к-рых выборочные функции $\xi(x)$ отличны от нуля на не более чем счетном множестве точек. Примером такого поля $D = \mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$ является, в частности, пуассоновское точечное поле, для к-рого реализации $\xi(x)$ – точечные и равны 0 или 1, функционал $H\{\xi\} = 0$ и мера μ_Λ множества всех функций $\xi_\Lambda(x)$ таких, что $\sum_{x\in\Lambda} \xi_\Lambda(x) = n$ определяется формулой:

$$\mu_\Lambda = \frac{\rho^n}{n!} |\Lambda|^n,$$

где $|\Lambda|$ – мера области Λ в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$. Величина ρ называется плотностью точек, распределенных по Пуассону. При $D = \mathbb{Z}^d$ пуассоновское поле называется также бернуллиевским решеточным полем. Точечные С. п. помимо своей значимости для статистич. механики могут служить основой для конструирования новых С. п. с более сложной структурой.

Важным классом С. п. являются марковские поля и, в частности, обобщенные марковские поля, к-рые применяются в конструктивной квантовой теории поля. Их определение связано с обобщением понятия о *марковском процессе*. Пусть $\mathfrak{S}$ – система открытых областей $S \subseteq D$, для каждой из к-рых $D \setminus \bar{S} \in \mathfrak{S}$, $\bar{S} = S \cup \partial S$, ∂S – топологич. граница S. Пусть далее $\mathfrak{F}(S)$ – минимальная σ-алгебра, порожденная событиями (1), у к-рых $x_i \in S$, и Γ_ε – любая окрестность ∂S. С. п. называется марковским, если $\mathfrak{F}(\Gamma_\varepsilon)$ расщепляет σ-алгебры $\mathfrak{F}(S)$ и $\mathfrak{F}(D \setminus \bar{S})$, то есть для любых событий $A_1 \in \mathfrak{F}(S)$ и $A_2 \in \mathfrak{F}(D \setminus \bar{S})$ выполняется свойство условной независимости:

$$\mathsf{P}\{A_1 A_2 | \mathfrak{F}(\Gamma_\varepsilon)\} = \mathsf{P}\{A_1 | \mathfrak{F}(\Gamma_\varepsilon)\} \mathsf{P}\{A_2 | \mathfrak{F}(\Gamma_\varepsilon)\}.$$

Лит.: [1] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, Киев, 1980; [2] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [3] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [4] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И., Введение в статистическую радиофизику, ч. II.– Случайные поля, 2 изд., М., 1978; [5] Займан Дж., Модели беспорядка, пер. с англ., М., 1982.

Ю. П. Вирченко.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС – математическое понятие, формализующее представление об эволюции какой-либо системы во времени, у которой случайным образом возникает неопределенность в ее поведении; иными словами: процесс изменения состояния системы зависит от случая и определена вероятность того или иного его течения. Синонимами термина «С. п.» являются стохастический процесс, вероятностный процесс, случайная функция времени. Физич. примерами процессов, к-рые должны описываться на основе математич. понятия С. п., являются: случайные колебания напряжения в электрич. цепи; случайные траектории броуновской частицы; случайное количество фотоотсчетов, зарегистрированных фотодетектором; случайное число распавшихся радиоактивных ядер на отрезке времени $[0, t]$; случайные расстройки радиосигналов, вызванные помехами, как по фазе, так и по частоте; случайное протекание цепной химич. реакции; случайная эволюция биологич. популяции и т. д.

Общая схема теории вероятностей допускает математич. формализацию физич. представления о случайной функции в виде задания специального вероятностного пространства $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$, где множество Ω называется выборочным пространством, или пространством реализаций, элементами к-рого являются выборочные функции, или, другими словами, случайные реализации процесса, исчерпывающие все возможности, к-рые случайно могут реализоваться в опыте; $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра случайных событий, составленных из элементов, принадлежащих Ω, и вероятность к-рых имеет смысл; $\mathsf{P}(A)$ – σ-аддитивная функция на событиях A из $\mathfrak{B}$. Функции, составляющие Ω, могут быть совершенно различной природы и поэтому понятие случайной функции является формализацией общего представления о случайной функциональной зависимости произвольного вида. Термином «С. п.» $\{\xi(t)\}$ обозначают случайную функцию от действительного аргумента t, к-рый интерпретируется как время. Область значений X случайных реализаций $\xi(t)$ называется фазовым пространством процесса. Природа пространства X может быть различной, но обычно рассматриваются процессы с $X = \mathbb{R}^m$ (либо $\mathbb{C}^m$). В этом случае говорят о многомерном, или векторном, С. п.

$$\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_m(t)\}.$$

Изучение многомерных С. п. сводится к изучению совокупности скалярных С. п. $\{\xi_k(t)\}$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому ниже мы будем говорить только об одномерном С. п. Заметим, что часто о случайной последовательности $\{\xi_n\}$ также говорят как о С. п., но с дискретным временем (см. *Маркова цепь, Случайное блуждание*).

Простейшим примером С. п. может служить множество функций $\{\xi(t, \alpha)\}$, зависящих от случайного параметра α, к-рый принимает значения в конечномерном пространстве. Вмешательство случайного механизма, влияющего на эволюцию системы, в этом случае может происходить только конечное число раз. При этом вероятностное пространство процесса определяется вероятностным пространством для параметра α и исследование свойств таких процессов поэтому укладывается в рамки классич. теории вероятностей.

Задание распределения вероятностей в случае, когда нек-рый случайный механизм воздействует на систему неограниченное количество раз (в пределе это происходит в каждый момент времени) уже связано с описанием бесконечномерного вероятностного пространства, так как требует, для указания конкретной траектории процесса, значений бесконечного набора параметров. Исходя из представления о процессе как о наборе траекторий, к-рые реализуются в зависимости от случая, естественно считать, что события

$$A(t_1, \Delta_1; \ldots; t_n, \Delta_n) = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{\xi(t_i) \in \Delta_i \right\}$$

при произвольных n, наборах t_i и Δ_i – борелевских множествах из $\mathbb{R}$, $i=1, ..., n$, имеют определенную вероятность

$$Q_n(t_1, \Delta_1; ...; t_n, \Delta_n) = \mathsf{P}\{A(t_1, \Delta_1; ...; t_n, \Delta_n)\}.$$

Эти события называются цилиндрическими множествами в выборочном пространстве Ω, а случайные величины $\xi(t_i)$ – сечениями С. п. Распределения вероятностей Q_n называются конечномерными распределениями (размерности n) С. п. При этом функции Q_n обладают свойствами согласованности:

1) $Q_n(t_1, \Delta_1; ...; t_n, \Delta_n) = Q_n(t_{i_1}, \Delta_{i_1}; ...; t_{i_n}, \Delta_{i_n})$,

где $(i_1, ..., i_n)$ – любая перестановка чисел $(1, ..., n)$;

2) $Q_n(t_1, \Delta_1; ...; t_{n-1}, \Delta_{n-1}; t_n, \mathbb{R}) = Q_{n-1}(t_1, \Delta_1; ...; t_{n-1}, \Delta_{n-1})$.

В качестве σ-алгебры $\mathfrak{B}$, на к-рой определяется распределение вероятностей P для С. п., достаточно взять минимальную σ-алгебру, порожденную цилиндрич. множествами в Ω либо, что то же самое, в бесконечномерном пространстве сечений С. п. Мера P без указания выборочного пространства, вообще говоря, не характеризуется полностью С. п. Иными словами, различным С. п., в пространстве сечений, может соответствовать одна и та же мера. О С. п., к-рые отвечают одной мере, говорят как о стохастически эквивалентных процессах. Часто различие между стохастически эквивалентными процессами является несущественным при моделировании случайной эволюции системы. Стохастически эквивалентные процессы при этом объединяют в классы эквивалентности, к-рые вместе с распределением вероятностей на пространстве сечений называют С. п. в широком смысле. Тонкие свойства траекторий процесса при этом игнорируются.

Таким образом, для явного определения меры какого-либо С. п. необходимо, вообще говоря, описать бесконечный набор согласованных распределений вероятностей Q_n с помощью конечного набора математич. объектов. Этого можно достигнуть весьма разнообразными способами и в зависимости от метода такого конструктивного построения меры естественно возникает классификация С. п. Напр.,

а) для процессов $\{\xi(t)\}$ с независимыми приращениями достаточно указать распределение вероятностей для случайных приращений процесса, то есть функцию

$$P(s, t; A) = \mathsf{P}\{\xi(t) - \xi(s) \in A\},\ A \subset \mathbb{R},\ s > t;$$

б) для *марковских процессов* достаточно указать стохастич. ядро процесса:

$$\mathsf{P}\{\xi(t) \in A | \xi(s) = x\} = P(s, x; t, A)$$

при $t > s$, на основе к-рого могут быть вычислены вероятности Q_n;

в) для *гауссовских процессов* достаточно определить пару: функцию $\mathsf{E}\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и положительно определенную, симметричную функцию $\mathsf{E}[\xi(t)\xi(s)]$, $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

г) в более общем случае возможно задание меры процесса через определение характеристического функционала:

$$\Phi\{u\} = \mathsf{E}\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\xi(\tau)\,d\tau\right\}$$

для достаточно гладких функций $u(\tau)$;

д) распределение вероятностей для разрывных процессов с целочисленными значениями, связанных с потоками Пальма, в теории массового обслуживания полностью определяется функцией

$$p(A) = \mathsf{P}\{t - s \in A | \xi(s-0) = n-1,\ \xi(s+0) = \xi(t-0) = n,$$
$$\xi(t+0) = n+1\},\ A \subset (0, \infty);$$

е) для гиббсовских процессов (одномерных систем статистич. механики) достаточно определить *гамильтониан* – функционал от реализаций $\xi(t)$, по к-рому на основе *Гиббса распределения* восстанавливаются распределения Q_n.

Источником определения С. п. служат эволюционные уравнения математич. моделей естественных наук в случае, когда какие-либо элементы, определяющие эти уравнения, являются случайными (напр., коэффициенты уравнений в свою очередь являются С. п.). В этом случае распределение вероятностей на множестве реализаций – решений эволюционных уравнений с фиксированными начальными условиями, определяется распределением вероятностей для случайных параметров уравнений.

Эволюция понятия С. п. привела к необходимости отказаться от представления о траекториях процесса, то есть представления о том, что случайные реализации являются функциями в обычном смысле. Это положение оказывается очень стеснительным в приложениях. В связи с этим возникло понятие об обобщенном С. п. $\{\xi(t)\}$, как об идеализированном математич. объекте, случайные реализации к-рого являются, вообще говоря, функциями с какими-то определенными значениями в каждый момент времени. Существуют только случайные «сглаженные реализации» процесса $x(\xi; u)$, к-рые являются линейными функционалами от $\xi(t)$ с достаточно гладкой весовой функцией $u(t)$ и к-рые описывают результаты «измерений» значений процесса $\{\xi(t)\}$. Обобщенные С. п. определяются мерой, являющейся пределом в смысле определенного типа слабой сходимости по системе мер, связанных со С. п., понимаемых в обычном «классическом» смысле. В связи с этим классич. С. п. $\{\xi(t)\}$ также можно рассматривать как обобщенные, для к-рых

$$x(\xi; u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\xi(\tau)\,d\tau.$$

Важнейшим примером обобщенного С. п., к-рый уже не является классическим, служит процесс *белого шума*. Его можно рассматривать как обобщение понятия о последовательности независимых случайных величин на процессы с непрерывным временем. Белый шум $\{\varphi(t)\}$ с единичной интенсивностью определяется как обобщенный гауссовский процесс с $\mathsf{E}\varphi(t) = 0$ и корреляционной функцией $\mathsf{E}[\varphi(t)\varphi(s)] = \delta(t-s)$.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1–3, М., 1971–75; [4] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975.

Ю. П. Вирченко.

СМЕСЬ – см. *Плотности оператор.*

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА, третья краевая задача,– одна из *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть, напр., в ограниченной области Ω, в каждой точке границы Γ к-рой существует нормаль, задано эллиптич. уравнение 2-го порядка

$$Lu = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \qquad (*)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geqslant 2$. Смешанной задачей для уравнения (*) в области Ω называется следующая задача: из множества всех решений $u(x)$ уравнения (*) выделить те, к-рые в каждой граничной точке имеют производные по внутренней конормали N и удовлетворяют условию

$$\frac{\partial u(x)}{\partial N} + \alpha(x)u(x) = \nu(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $\alpha > 0$ и ν – заданные непрерывные на Γ функции.

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ векторов – см. *Векторная алгебра.*

СМЕШАННОЕ СОСТОЯНИЕ в квантовой механике – состояние физической системы, *плотности матрица* которой не является проекционным оператором.

Системе, находящейся в С. с., нельзя сопоставить вектор состояния. Матрица плотности такой системы представима в виде

$$\rho = \sum_n w_n |n\rangle\langle n|, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \qquad (1)$$

причем хотя бы одно из чисел w_n удовлетворяет неравенству $w_n<1$. Числа w_n интерпретируются как вероятности обнаружения системы в чистом состоянии $|n\rangle\langle n|$. Среднее значение произвольной наблюдаемой A в С. с. с матрицей плотности (1) дается формулой

$$\langle A\rangle=\sum_n w_n\langle A\rangle_n,$$

где $\langle A\rangle_n$ – среднее значение наблюдаемой A в состоянии с вектором состояния $|n\rangle$.

О критериях, позволяющих определить, является ли данное состояние чистым или смешанным, см. ст. *Чистое состояние*.

С. с. чаще всего используются при описании систем, являющихся подсистемами нек-рой большой системы. Пусть, напр., имеется система из двух нетождественных бесспиновых частиц, находящихся в чистом состоянии с волновой функцией $\psi(x_1, x_2)$. Тогда матрица плотности подсистемы, состоящей из частицы 1, в координатном представлении дается формулой

$$\rho(x_1', x_1)\equiv\langle x_1'|\rho|x_1\rangle=\int dx_2\,\psi(x_1', x_2)\,\psi^*(x_1, x_2). \qquad (2)$$

Матрица плотности, задаваемая формулой (2), описывает чистые состояния лишь тогда, когда

$$\psi(x_1, x_2)=\psi_1(x_1)\psi_2(x_2).$$

Другим типом систем, для описания к-рых необходимо использовать С. с., являются системы статистич. физики. Напр., всегда является смешанным состоянием любой физич. системы, находящейся в термостате при температуре $T\neq 0$.

С. с. широко используются также при описании процессов рассеяния частиц со спином, поскольку часто условия эксперимента не позволяют полностью определить спиновое состояние падающих частиц или частиц мишени, напр. для рассеяния бесспиновых частиц на частицах со спином 1/2. Матрица плотности, описывающая состояние такой системы до рассеяния, может быть задана формулой

$$\rho(p', q', s', p, q, s)=\varphi(p')\Phi(q')\varphi^*(p)\Phi^*(q)\rho_{ss'},$$

где $\varphi(p)$ и $\Phi(q)$ – волновые функции налетающей частицы и частицы мишени в импульсном представлении, а $\rho_{ss'}$ – (2×2)-матрица, называемая спиновой матрицей плотности ($s, s'=\pm 1/2$). Матрица $\rho_{ss'}$ описывает поляризационное состояние частиц мишени. *Ф. А. Лунев.*

СМЕШАННЫЙ АНСАМБЛЬ – см. *Плотности матрица.*

СМЕШАННЫЙ МОМЕНТ – см. *Момент* случайной величины.

СМЕШАННЫЙ СЕМИИНВАРИАНТ – см. *Кумулянтное разложение, Семиинвариант.*

СМЕШАННЫЙ ТЕНЗОР – см. *Тензор.*

СМИРНОВА КЛАСС – класс функций, состоящий из всех аналитических в единичном круге $|\zeta|<1$ функций $f(\zeta)$, для которых семейство

$$\{\ln^+|f(re^{i\theta})|;\ 0\leq r<1\}$$

равномерно интегрируемо по θ на интервале $(0, 2\pi)$ (см. также *Неванлинны класс*). С. к. в верхней полуплоскости $z=x+iy$, $y>0$, определяется преобразованием Кэли:

$$\zeta\mapsto z=i(1+\zeta)/(1-\zeta). \qquad \textit{В. В. Жаринов.}$$

СМОЛУХОВСКОГО УРАВНЕНИЕ – система бесконечного числа полулинейных уравнений, описывающая процессы коагуляции, слипания частиц (тумана), полимеризации и др. (см. [1]):

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}+v_k\frac{\partial f_k}{\partial x}=\frac{1}{2}\sum_{i+j=k}\varkappa_{ij}f_if_j-f_k\sum_{i=1}^{\infty}\varkappa_{ij}f_i,$$
$$k=1, 2, 3, \ldots,$$

где $f_k(x, t)$ – плотность концентрации частиц характеристики k (массы, скорости), $x\in\mathbb{R}^3$, $v_k\in\mathbb{R}^3$, $\varkappa_{ij}$ – заданные числа. В случае, когда коэффициент k непрерывен, С. у. имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_0^p\Phi(p-y, y)f(p-y)f(y)\,dy-$$
$$-f(x, p, t)\int_0^{\infty}\Phi(p, y)f(p)\,dp.$$

Установлено М. Смолуховским (M. Smoluchowski, 1916). *И. А. Кузин, В. П. Политюков.*

СОБОЛЕВА КЛАСС – см. *Соболева пространство.*

СОБОЛЕВА ОБОБЩЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ по x_j, $j=1, \ldots, n$, локально суммируемой функции $f(x)$ в области $O\subset\mathbb{R}^n$ – локально суммируемая функция $f_j(x)$ в O такая, что $D_jf=f_j$ в пространстве *Шварца распределений* $\mathscr{D}'(O)$ ($D_j=\partial/\partial x_j$, f и f_j рассматриваются как регулярные *обобщенные функции*), то есть такая, что

$$\int_O f_j(x)\Phi(x)\,d^nx=-\int_O f(x)D_j\Phi(x)\,d^nx, \quad \Phi\in\mathscr{D}(O).$$

В. В. Жаринов.

СОБОЛЕВА ПРОСТРАНСТВО – 1) С. п. $\varkappa_s$, $-\infty<s<+\infty$,– множество всех *умеренных распределений* $f\in\mathscr{S}'$ вида $f=F[g]$, где $F[g]$ – *Фурье преобразование* обобщенной функции $g\in L^2(d\mu_s)$, причем

$$d\mu_s=(1+|x|^2)^s\,d^nx.$$

Подробнее, регулярная *обобщенная функция* g задается локально суммируемой функцией $g(x)$ такой, что

$$|g|=\left[\int|g(x)|^2\,d\mu_s\right]^{1/2}<\infty.$$

Имеются плотные непрерывные вложения

$$\mathscr{D}\subset\varkappa_s\subset\varkappa_t\subset\mathscr{S}', \quad t<s,$$

где $\mathscr{D}=\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ – основное пространство для *Шварца распределений.*

2) С. п. $W_p^l(O)$, где $l=1, 2, 3, \ldots$, $1\leq p\leq\infty$, O – область в $\mathbb{R}^n$, есть множество всех функций $f(x)$ на O, имеющих *Соболева обобщенные производные* f_α всех порядков $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leq l$ и таких, что норма

$$|f|=\left[\sum_{|\alpha|=0}^{l}\int_O|f_\alpha(x)|^p\,d^nx\right]^{1/p}<\infty.$$

С. п. широко применяются в теории краевых задач математич. физики; введены С. Л. Соболевым (1938). *В. В. Жаринов.*

СОБСТВЕННАЯ ГРУППА ВРАЩЕНИЙ – см. *Вращений группа.*

СОБСТВЕННАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА – *система отсчета*, связанная с данным телом, то есть система отсчета, в которой тело покоится (см. *Релятивистская механика*). Так как тело может двигаться с ускорением (в частности, вращаться), то С. с. о. в общем случае неинерциальна. *М. И. Войцеховский.*

СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ оператора A, действующего в функциональном пространстве,– ненулевая функция f_λ, переводящаяся оператором A в пропорциональный ему:

$$Af_\lambda=\lambda f_\lambda.$$

Комплексное либо вещественное число λ называется *собственным значением* оператора A. В гильбертовом пространстве $L^2(\Omega, d\mu)$ функций на множестве Ω, интегрируемых с квадратом по мере $d\mu$, в к-ром задано скалярное произведение функций

$$(f, \psi)=\int_\Omega f^*(x)\,\psi(x)\,d\mu(x)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение) и вводится понятие сопряженного оператора, особенно важную роль играют самосопряженные *линейные операторы* (эрмитовы

операторы, в дальнейшем линейность операторов подразумевается). Это такие операторы, для к-рых $(x, Ay) = (Ax, y)$ для всех x и y из $L^2(\Omega, d\mu)$ (и эти скалярные произведения имеют смысл); множества всех допустимых функций x и y должны совпадать; все собственные значения таких операторов вещественны. В квантовой механике с каждой *наблюдаемой* ассоциируется самосопряженный оператор, С. ф. к-рого задают состояние системы с определенным значением оператора наблюдаемой. Напр., для гармонич. осциллятора оператор энергии (*гамильтониан*)

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}x^2,$$

С. ф. к-рого являются функции Эрмита, ортогональные на $(-\infty, +\infty)$. При этом k-й С. ф.

$$\psi_k(x) = (\sqrt{\pi}\, 2kk!)^{-1/2}(x - d/dx)^k \exp(-x^2/2)$$

($k = 0, 1, 2, \ldots$) соответствует собственное значение $\lambda_k = k + 1/2$.

С. ф. f_1 и f_2 самосопряженного оператора A, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2, ортогональны: $(f_1, f_2) = 0$. Множество L_λ всех С. ф., отвечающих одному собственному значению λ, образует линейное подпространство, совпадающее с ядром оператора $A - \lambda I$ (I – единичный оператор), то есть с множеством функций, переводимых этим оператором в 0 (ядром оператора B называется множество функций f, для к-рых $Bf = 0$).

В приложениях (вариационное исчисление, классич. граничные задачи математич. физики) важную роль играют самосопряженные интегральные операторы K:

$$(Kf)(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y)\, d\mu(y),$$

функция $K(x, y) = K^*(y, x)$ называется ядром интегрального оператора (не путать с понятием ядра оператора, определенным выше). Если оператор K ограничен, а его ядро – интегрируемая функция, то K компактен и его С. ф. образуют базис в пространстве $L^2(\Omega, d\mu)$. Ядро $K(x, y)$ такого оператора можно разложить в (конечную либо бесконечную) сумму:

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi^*_{n_\lambda}(x)\, \varphi_{n_\lambda}(y), \qquad (*)$$

где $\varphi_{n_\lambda}(x)$ – набор (всегда конечный при данном n) ортонормированных С. ф., отвечающих одному и тому же собственному значению λ_n, при этом $|\lambda_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Одним из критериев ограниченности является условие $K(x, y) \in L^2(\Omega \otimes \Omega, d\mu \otimes d\mu)$, то есть функция $K(x, y)$ интегрируема с квадратом по своим аргументам.

Класс самосопряженных операторов, действующих на всем гильбертовом пространстве функций $L^2(\Omega, d\mu)$, слишком узок, чтобы охватить все физически интересные величины. Не все, даже ограниченные операторы имеют разложение (*). Напр., унитарный оператор сдвига $\varphi(x) \to \varphi(x + a)$ не имеет С. ф. в пространстве $L^2(-\infty, +\infty)$, то же справедливо и для неограниченных операторов, к к-рым относятся практически все дифференциальные операторы. Для таких операторов понятие С. ф. обобщается в так наз. спектральном разложении. Рассмотрим *спектр* оператора A, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$. Если число $\lambda \in \sigma(A)$, то резольвента оператора A:

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1},$$

сингулярна в пространстве H функций с интегрируемым квадратом. Все собственные значения A окажутся особыми точками $R(\lambda)$ [поскольку в них найдется $f_\lambda(x) \in H$ такая, что $(\lambda I - A) f_\lambda = 0$ и обратного оператора на всем H не существует]. Но помимо таких особенностей у $R(\lambda)$ будут и другие особые точки $\lambda \in \sigma(A)$, в к-рых оператор $R(\lambda)$ определен, но неограничен. Спектральная теорема утверждает, что всякий самосопряженный оператор A допускает спектральное разложение вида

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_\lambda.$$

Здесь E_λ – ортогональное семейство проекционных операторов, проектирующих на подпространство функций f из $L^2(\Omega, d\mu)$ таких, что $(f, Af) \leqslant \lambda(f, f)$. Для самосопряженного оператора A, ядро к-рого допускает разложение (*) по С. ф. $\{\varphi_k(x)\}$, E_λ будут интегральными операторами с ядром (спектральным)

$$E_\lambda(x,y) = \sum_{\lambda_k \in (-\infty, \lambda]} \varphi^*_{n_\lambda}(x)\, \varphi_{n_\lambda}(y).$$

Рассмотрим спектральное разложение оператора импульса $P = (1/i)d/dx$, действующего на прямой. Его С. ф. e^{ikx} не принадлежит пространству $L^2(-\infty, +\infty)$ (хотя могут быть аппроксимированы функциями из L^2 на любом конечном отрезке). Всякий оператор $(P + rI)^{-1}$ будет неограничен для любого вещественного n; таким образом, спектр $\sigma(P) = \mathbb{R}$.

Для того чтобы построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, можно найти унитарное преобразование U пространства функций H и набор мер $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ ($N = 1, 2, \ldots$) (наличие целого набора спектральных мер вместо одной обобщает понятие кратности собственного значения λ) таких, что

$$U: H \to \oplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n),$$

то есть оператор U переводит все пространство функций H в набор подпространств, внутри каждого из к-рых оператор A действует как оператор умножения:

$$(UAU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda \psi_n(\lambda).$$

Для оператора импульса P таким унитарным преобразованием будет *Фурье преобразование*:

$$(Uf)(k) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x) \exp(-ikx)\, dx.$$

Тогда

$$U\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx} f\right)(k) = k(Uf)(k),$$

а фурье-образом проекционного оператора $E_\lambda(x, y)$ будет оператор умножения на функцию $E_\lambda(k) = \theta(\lambda - k)$, $\{\theta(k) = 1,\ k \geqslant 0;\ \theta(k) = 0,\ k < 0\}$:

$$U(E_\lambda f)(k) = \theta(\lambda - k)(Uf)(k).$$

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 4 изд., М., 1989; [2] Рисс Ф., Секельфальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954; [3] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [4] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1 – Функциональный анализ, М., 1977. *Л. О. Чехов.*

СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА – см. *Собственное колебание.*

СОБСТВЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ – см. *Эйлера углы.*

СОБСТВЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ волчка – см. *Твердое тело*; плоское движение.

СОБСТВЕННОЕ ВРЕМЯ – время, измеряемое в *собственной системе отсчета.* Время протекания какого-либо процесса, измеряемое вне тела, в к-ром происходит процесс, зависит от относительной скорости наблюдателя и тела. Если измерения производятся в нек-рой инерциальной системе отсчета, а тело движется относительно нее с постоянной скоростью v, то промежуток С. в. $\Delta\tau$ связан с промежутком времени (внешнего) наблюдателя Δt так:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где c – скорость света. При наличии тяготения С. в. течет тем медленнее с точки зрения наблюдателя вне поля, чем сильнее гравитационное поле. *М. И. Войцеховский.*

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ линейного оператора A, отвечающее *собственному вектору* (*собственной фун-*

кции) f из векторного пространства L,– комплексное либо вещественное число λ такое, что

$$Af=\lambda f.$$

Совокупность всех собственных функций, отвечающих одному и тому же С. з. λ, образует линейное подпространство L_λ пространства L. Размерность L_λ называется кратностью С. з. Если пространство L конечномерно, то С. з. совпадают с корнями характеристич. многочлена, $\det\|A-\lambda I\|$, где A – матрица линейного преобразования A в нек-ром базисе, I – единичная матрица. Если оператор A самосопряжен (эрмитов оператор), то все его С. з. отвечают значениям *наблюдаемых* (измеримых) величин. В частности, у каждой конечномерной эрмитовой $(n\times n)$-матрицы A найдутся (с учетом кратностей) ровно n С. з.

В бесконечномерном случае можно сформулировать аналог этого утверждения для самосопряженных компактных операторов. Оператор A, действующий, напр., в пространстве l^2 бесконечномерных векторов $f=(a_1, a_2, \ldots)$ с конечной нормой

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty$$

и соответствующим скалярным произведением, называется компактным, если он переводит любую ограниченную последовательность векторов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (то есть такую, что для всех n выполнено неравенство $\|x_n\|<M$) в последовательность $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$, из к-рой всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Отсюда, в частности, следует, что если выбрать последовательность $\{x_n\}$ ортонормированной: $(x_n, x_m)=1$ при $n=m$ и $=0$ при $n\neq m$, то последовательность $\{Ax_n\}$ будет сходиться к нулю. Для таких операторов, действующих в пространстве l^2 или в функциональных пространствах, справедлива теорема Рисса – Шаудера, утверждающая, что система собственных функций (собственных векторов) такого оператора образует базис (полную систему из ортонормированных функций) в соответствующем пространстве, а его С. з. λ_n сходятся к нулю при $n\to\infty$, причем каждое С. з. является корнем конечной кратности. К классу компактных операторов относятся все ограниченные интегральные операторы с интегрируемым ядром, к-рые часто встречаются в физике, напр. в задачах с потенциалом.

Класс компактных операторов оказывается слишком узким, чтобы описать все физически интересные случаи. Он не описывает унитарные операторы (то есть операторы, сохраняющие норму; все С. з. таких операторов представляются в виде $e^{i\varphi}$, $\varphi\in\mathbb{R}$), а также дифференциальные операторы, к-рые, как правило, не ограничены. Обобщением понятия С. з. для таких операторов служит понятие спектра $\sigma(A)$ оператора A. Число λ принадлежит *спектру* оператора, если резольвента оператора A:

$$R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1},$$

будет сингулярным оператором. Все С. з. A будут принадлежать $\sigma(A)$ [они будут изолированными (дискретными) точками $\sigma(A)$]. Однако помимо этих точек $\sigma(A)$ обычно содержит непрерывную часть, состоящую из таких точек λ, для к-рых оператор $R(\lambda)$ определен, но не ограничен. В обычном смысле таким λ не соответствует никакая собственная функция, тем не менее аналог разложения по базису собственных функций задается спектральным разложением.

Л. О. Чехов.

СОБСТВЕННОЕ КОЛЕБАНИЕ, свободное колебание,– колебание, совершающееся в *динамической системе* при отсутствии внешнего воздействия при сообщении ей в начальный момент внешнего возмущения, выводящего систему из состояния равновесия. Характер С. к. в основном определяется внутренними силами, обусловленными физич. строением системы. Энергия, необходимая для движения, поступает в систему от внешнего воздействия в начальный момент движения.

Примером С. к. могут служить *малые колебания* консервативной системы с n степенями свободы около устойчивого состояния равновесия. Уравнения движения имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{si}\ddot{q}_i+c_{si}q_i)=0,\quad s=1,\ldots,n, \qquad (1)$$

где q_i – обобщенные координаты, a_{si}, c_{si} – постоянные коэффициенты. Общее решение системы (1) состоит из суммы n гармонич. колебаний:

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}A_j\Delta_i(k_j^2)\sin(k_jt+\beta_j),\quad i=1,\ldots,n,$$

где A_j, β_j – постоянные интегрирования, k_j – собственные частоты – корни уравнения частот

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & \ldots & c_{1n}-a_{1n}k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}-a_{n1}k^2 & \ldots & c_{nn}-a_{nn}k^2 \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

(предполагается, что нет нулевых и кратных частот), $\Delta_i(k_j^2)$ – минор, соответствующий i-му столбцу и последней строке определителя (2). Величины $A_j\Delta_i(k_j^2)$, $k_jt+\beta_j$, β_j – соответственно амплитуда, фаза и начальная фаза j-гармоники. Из рассмотренного примера следует: гармонич. колебания одной и той же частоты для всех координат происходят в фазе или противофазе; распределение амплитуд колебаний данной собственной частоты по координатам определяется физич. устройством системы.

Лит.: [1] Бабаков И. М., Теория колебания, 2 изд., М., 1965; [2] Бутенин Н. В., Теория колебаний, М., 1963; [3] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 2 изд., М., 1964; [4] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959.

Н. В. Бутенин.

СОБСТВЕННОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО – см. *Линейный оператор, Собственный вектор.*

СОБСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Лоренца группа, Лоренца преобразование.*

СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР оператора A – ненулевой вектор из векторного пространства L, который переводится данным оператором в пропорциональный ему вектор, то есть

$$Ax=\lambda x,$$

где вещественное либо комплексное число λ называется *собственным значением* оператора A. С. в. операторов, действующих в функциональном пространстве, называются *собственными функциями.*

Для линейного оператора A множество L_λ всех С. в., отвечающих одному и тому же собственному значению λ, образует линейное подпространство, к-рое называется собственным подпространством оператора A. Если пространство L конечномерно (n-мерно), а матрица преобразования A эрмитова, то у нее имеется ровно n различных С. в., отвечающих вещественным собственным значениям.

Наличие С. в. у операторов в бесконечномерных пространствах – явление довольно редкое, хотя для физич. приложений существенно, что операторы специальных классов (интегральные, дифференциальные и т. п.) часто обладают обширными наборами С. в. Наиболее важным для физики бесконечномерным векторным пространством является пространство l^2 векторов f, g вида $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots)$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_k b_k$$

(черта означает комплексное сопряжение) и соответствующей конечной нормой

$$\|f\|^2=(f,f)<\infty.$$

Это пространство изоморфно пространству квадратично интегрируемых функций $L^2(-\infty, +\infty)$ и обладает всеми свойствами последнего.

В конечномерных пространствах, наоборот, у всякой n-мерной матрицы A имеется хотя бы один С. в., отвечающий, вообще говоря, комплексному собственному значению λ, а если к тому же матрица A невырождена ($\det A \neq 0$, то у такой матрицы найдутся ровно n различных комплексных С. в. Это справедливо, в частности, для унитарных конечномерных матриц A ($A^+ = A^{-1}$). В физич. приложениях часто возникает необходимость разложить произвольный вектор в сумму по С. в. заданной эрмитовой матрицы A [напр., привести к диагональному виду симметричную квадратичную форму (x, Ax)]. Эта задача решается переходом с помощью унитарного преобразования к базису, составленному из С. в. матрицы A. В этом базисе действие оператора A сводится к умножению каждого базисного вектора на соответствующее ему собственное значение λ. В бесконечномерном случае аналогом этой процедуры диагонализации является так наз. спектральное разложение.

Л. О. Чехов.

СОВМЕСТИМЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ – *наблюдаемые*, допускающие совместное измерение. В квантовой механике С. н. являются наблюдаемые $X_1, \ldots, X_n$, к-рые представимы как функции $X_j = \varphi_j(X)$, $j = 1, \ldots, n$, нек-рой наблюдаемой X. Необходимым и достаточным условием совместимости является перестановочность спектральных мер операторов $X_1, \ldots, X_n$:

$$E_j(B)E_k(C) = E_k(C)E_j(B),$$
$$B,\ C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ j, k = 1, \ldots, n,$$

где $E_j(\cdot)$ – спектральная мера оператора X_j, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$. Если $X_1, \ldots, X_n$ ограничены, то это эквивалентно перестановочности самих X_j:

$$X_jX_k = X_kX_j,\ j, k = 1, \ldots, n.$$

С. н. имеют совместную спектральную меру $E(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, такую, что

$$X_j = \int \ldots \int x_j\, E(dx_1 \ldots dx_j \ldots dx_n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Распределение вероятностей точного совместного измерения наблюдаемых $X_1, \ldots, X_n$ в состоянии, описываемом оператором плотности ρ, задается формулой

$$\mu_\rho(B) = \operatorname{Tr} \rho\, E(B);\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Для любой борелевской функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{R}^n$ определена наблюдаемая

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \int \ldots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n) E(dx_1 \ldots dx_n).$$

При этом среднее значение

$$\langle \varphi(X_1, \ldots, X_n) \rangle_\rho = \int \ldots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n) \mu_\rho(dx_1 \ldots dx_n).$$

Соответствие $\varphi \to \varphi(X_1, \ldots, X_n)$ сохраняет алгебраич. операции.

Наблюдаемая $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ совместима с наблюдаемыми $X_1, \ldots, X_n$. Если всякая наблюдаемая, совместимая с $X_1, \ldots, X_n$ является функцией от $X_1, \ldots, X_n$ (или, эквивалентно, абелева алгебра Неймана, порожденная операторами $X_1, \ldots, X_n$, максимальна), то $X_1, \ldots, X_n$ образуют полный набор. С каждым полным набором связано конкретное представление гильбертова пространства в виде пространства функций $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, в к-ром X_j задается оператором умножения на x_j.

Несовместимые наблюдаемые рассматриваются в квантовой механике как дополнительные, то есть принципиально не допускающие точного совместного измерения (см. *Неопределенностей соотношение*).

Лит. см. при ст. *Наблюдаемая.* *А. С. Холево.*

СОВМЕСТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА – см. *Совместимые наблюдаемые.*

СОГЛАСИЯ КРИТЕРИЙ – см. *Анализ данных.*

СОГЛАСОВАННОСТИ УСЛОВИЯ – условия, которым подчиняются частичные (приведенные) функции распределения вероятностей в классической статистической механике и матрицы плотности в квантовой статистической механике. С. у.– это соотношения, связывающие между собой частичные функции распределения вероятностей подсистем, состоящих из различного числа частиц.

Рассмотрим последовательность частичных функций распределения вероятностей классич. равновесного канонич. ансамбля ($\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$):

$$F^{(N)}_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s; p_1, \ldots, p_s) = \frac{N!}{(N-s)!} \int_{\Lambda^{N-s}} dx_{s+1} \ldots dx_{s+N} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{(N-s)\nu}} dp_{s+1} \ldots dp_{s+N}\, f(x_1, \ldots, x_N; p_1, \ldots, p_N),$$

где

$$f(x_1, \ldots, x_N; p_1, \ldots, p_N) =$$
$$= Z^{-1} \exp\left[-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + U(x_1, \ldots, x_N)\right]$$

[Z – статистич. сумма (интеграл), U – потенциальная энергия], функция f нормирована следующим образом ($\hbar$ – постоянная Планка, система состоит из тождественных частиц):

$$\frac{1}{N!\hbar^{\nu N}} \int_{\Lambda^N} dx_1 \ldots dx_N \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{\nu N}} dp_1 \ldots dp_N\, f_N(x_1, \ldots, x_N; p_1, \ldots, p_N) = 1.$$

С. у. в этом случае имеют вид ($F^{(N)}_{\Lambda,0} \equiv 1$):

$$\int_\Lambda dx_s \int_{\mathbb{R}^\nu} dp_s F^{(N)}_{\Lambda,s}(x_1, \ldots, x_s; p_1, \ldots, p_s) =$$
$$= (N - s + 1) F^{(N)}_{\Lambda,s-1}(x_1, \ldots, x_{s-1}; p_1, \ldots, p_{s-1}), \quad s \in \{1, \ldots, N\}.$$

В большом канонич. ансамбле С. у. удовлетворяют не сами частичные функции распределения вероятностей, а так наз. системы плотностей распределений (см. [1]–[3]). Для конфигурационного большого канонич. ансамбля можно определить системы плотностей распределений так (Ξ – большая статистич. сумма, z – активность, частицы тождественны):

$$\mu^m_\Lambda(x_1, \ldots, x_m) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^\nu} F^m_{\Lambda,\Delta}(x_1, \ldots, x_m),$$

где

$$F^m_{\Lambda,\Delta}(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\Xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+m}}{n!} \int_{(\Lambda \setminus \Delta)^{n-m}} dx_{m+1} \ldots dx_{m+n}\, e^{-\beta U(x_1, \ldots, x_{m+n})}, \\ \qquad\qquad x_1, \ldots, x_m \in \Delta^m, \\ 0, \quad x_1, \ldots, x_m \notin \Delta^m, \end{cases}$$

при условии, что предел существует (по поводу его существования см. [1]–[3]). Частичные функции распределения вероятностей, если они существуют (см. *Равновесные функции распределения* при произвольных значениях термодинамических параметров), определяются через систему плотностей распределений согласно формуле [$(x_1, \ldots, x_m) \in \Delta^m$]:

$$F_{\Delta,m}(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Delta^n} dx_{m+1} \ldots dx_{m+n} \mu^{m+n}_\Delta(x_1, \ldots, x_{m+n}).$$

С. у. для системы плотностей распределения μ^m_Λ имеют вид:

$$\mu^m_\Lambda(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\Lambda' \setminus \Lambda)^n} dx_{m+1} \ldots dx_{m+n} \mu^{m+n}_{\Lambda'}(x_1, \ldots, x_{m+n}).$$

В квантовом случае С. у. для системы плотности матриц имеет вид ($\Lambda \subset \Lambda'$):

$$\mu_\Lambda = \mathrm{Sp}_{H(\Lambda' \setminus \Lambda)} \mu_{\Lambda'},$$

где $H(\Lambda' \setminus \Lambda)$ – соответствующее гильбертово пространство состояний. С. у. для частичных функций распределения вероятностей аналогичны по смыслу С. у. для конечномерных распределений случайных полей (см. [4]).

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Ruelle D., «Comm. Math. Phys.», 1970, v. 18, p. 128; [3] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985; [4] Королюк В. С. и др., Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., Киев, 1985. *П. В. Малышев.*

СОКРАЩЕННОЕ ОПИСАНИЕ состояния – описание состояния неравновесных систем, возникающего в результате эволюции в области достаточно больших времен t ($t \gg \tau_0$, τ_0 – время хаотизации), когда для макроскопически полного описания оказывается достаточно некоторого набора параметров (функций), число которых значительно меньше всего набора многочастичных функций распределения.

Математич. формулировка концепции С. о. в рамках статистич. механики введена Н. Н. Боголюбовым (1946) и носит название функциональной гипотезы, согласно к-рой неравновесный статистич. оператор $\rho(t)$, а следовательно, и все корреляционные функции, описывающие такие состояния, зависит от времени t только через посредство набора параметров сокращенного описания ξ:

$$\rho(t) \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \rho(\xi(t)),$$

где параметры ξ являются средними соответствующих операторов $\hat{\xi}$: $\xi = \mathrm{Sp}\,\rho\,(\xi)\hat{\xi}$.

Примеры. 1. Неравновесное состояние газоподобных систем, описываемое кинетич. уравнениями (кинетич. этап эволюции). Параметром С. о. состояния является одночастичная функция распределения (одночастичная матрица плотности).

2. Неравновесное состояние нормальной жидкости, описываемое уравнениями Навье – Стокса (гидродинамич. этап эволюции). Параметрами С. о. состояния являются плотности аддитивных интегралов движения.

Одна из причин сокращения числа параметров, необходимых для описания состояния системы, а также их структура, тесно связана со структурой гамильтониана H, в к-ром можно выделить такую его часть H_0, к-рая обладает относительно сильным влиянием на поведение системы и имеет бóльшую симметрию, чем оставшаяся часть гамильтониана $\hat{V} \equiv \hat{H} - \hat{H}_0$. Возможность разбиения гамильтониана $\hat{H}$ на $\hat{H}_0$ и $\hat{V}$ приводит к иерархии времен релаксации $\tau_0 \ll \tau_r$, где время хаотизации τ_0 определяется гамильтонианом $\hat{H}_0$ и τ_r – время релаксации, определяется относительно слабыми взаимодействиями $\hat{V}$. Для пространственно-однородных состояний, при к-рых $[\rho, \hat{P}_k] = 0$, где $\hat{P}_k$ – оператор импульса системы, эволюция, связанная с гамильтонианом H, завершается при $t \geqslant \tau_r$ формированием равновесного статистич. оператора Гиббса.

Другая причина сокращения числа параметров связана с наличием пространственных неоднородностей, при к-рых $[\rho, \hat{P}_k] \neq 0$. В этом случае при временах $t \geqslant \tau_r$ система успевает подстраиваться к мгновенным значениям плотностей аддитивных интегралов движения (для нормальных систем) ξ, функционалом к-рых и является асимптотич. статистич. оператор. Характерное время изменения этих параметров τ_m обусловлено размерами неоднородностей, к-рые значительно больше среднего расстояния между частицами.

Формулировка функциональной гипотезы и развитие на ее основе метода С. о. дает возможность последовательно выводить необратимые макроскопич. уравнения движения для широкого класса физич. систем, исходя из динамич. законов механики с привлечением *пространственного ослабления корреляций принципа.*

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 2, Киев, 1971; [2] Ахиезер А. И., Пелетминский С. В., Методы статистической физики, М., 1977. *М. Ю. Ковалевский.*

СОЛЕНОИДОЛЬНОЕ ПОЛЕ – см. *Потенциал.*

СОЛИТОН – уединенная волна (локализованное решение нелинейного эволюционного уравнения), которая при взаимодействии с другими локальными возмущениями всегда восстанавливает свою первоначальную форму, то есть взаимодействует упругим образом (подобно частицам). Уединенную волну – солитон – впервые наблюдал в 1834 Дж. Рассел (J. Russell). Он дал ее научное описание в 1838, назвав волной переноса (см. [1]). Спустя 60 лет было дано первое теоретич. описание таких волн. В 1895 Д. Кортевег (D. Korteweg) и де Г. Фрис (G. de Vries) получили приближенное уравнение распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

и его решение в виде:

$$u(x, t) = 2c^2 \mathrm{sch}^2[c(x - 4c^2 t - x_0)].$$

Это и была та уединенная волна, к-рую наблюдал Дж. Рассел.

Существование таких уединенных волн, как весьма частного случая установившихся волновых движений тяжелой жидкости в открытом канале бесконечной длины, в середине 20 в. было получено М. А. Лаврентьевым [2] с помощью вариационных принципов конформных отображений. Термин «С.» был введен в 1965 Н. Забуски (N. Zabusky) и М. Крускалом (M. Kruskal), проводившим численные эксперименты с уравнением Кортевега – де Фриса в связи с задачей Ферми – Пасты – Улама (см. [3]).

После открытия в 1967 К. Гарднером (C. Gardner), Дж. Грином (J. Greene), М. Крускалом (M. Kruskal) и Р. Миурой (R. Miura) метода интегрирования уравнения Кортевега – де Фриса с помощью обратной задачи теории рассеяния (см. [4]) стало ясно, что С. уравнения Кортевега – де Фриса при каждом t – это простейший безотражательный потенциал оператора Шредингера

$$\psi''_{xx} + E\psi = u(x, t)\psi,\ u(x, t) = -2c^2 \mathrm{sch}^2[c(x - 4c^2 t - x_0)]$$

с единственным собственным значением (связанным состоянием с энергией $E = -c^2$). Этот метод позволил построить в явном виде так наз. n-солитонные решения нелинейных эволюционных уравнений, допускающих *Лакса представление.* Такие решения характеризуются тем, что оператор L из представления Лакса, как оператор в $L_2(\mathbb{R})$, при каждом t имеет n собственных значений (связанных состояний) и является безотражательным (коэффициент отражения в задаче рассеяния для оператора L равен нулю).

С. и только они «выживают» (дают неисчезающий вклад) в асимптотике решения задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения с произвольными убывающими начальными данными. Так, напр., решение соответствующей задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриса

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R},$$

при $t \to \pm\infty$ и $x \in \mathbb{R}$ имеет такие асимптотики:

$$u(x,t) = -\sum_{k=1}^{n} 2c_k^2 \,\mathrm{sch}^2\left[c_k(x - 4c_k^2 t - x_k^{\pm})\right] + O(t^{-1/2+\varepsilon}),$$

где

$$x_k^{\pm} = \pm\frac{1}{2c_k} \ln\left[\frac{m_k^{\pm}}{2c_k} \prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{c_j - c_k}{c_j + c_k}\right)^2\right], \quad 0 < \varepsilon < 1/4.$$

Учитывая связь коэффициентов $m_k^{\pm}$, для сдвига фаз солитонов $\Delta x_k = x_k^+ - x_k^-$ получаем:

$$\Delta x_k = \frac{1}{c_k}\left[\ln \prod_{j=1}^{k-1} \frac{c_j - c_k}{c_j + c_k} - \ln \prod_{j=k+1}^{n} \frac{c_j - c_k}{c_j + c_k}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln[1 - |r(\lambda)|^2]}{\lambda^2 + c_k^2}\, d\lambda,$$

где $-c_k^2$ – собственные значения оператора Шредингера с потенциалом $\varphi(x)$, а $r(\lambda)$ – коэффициент отражения в задаче рассеяния для этого оператора. Таким образом, сдвиг фазы данного С. зависит как от наличия других С., так и от возмущений, имеющих ненулевой коэффициент отражения.

Лит.: [1] Russell J. S., Report of the committee on waves, «Report of the 7 th Meeting of British Association for the Advacement of Science», L., 1838, p. 417–96; [2] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., 1977; [3] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х., Солитоны и нелинейные волновые уравнения, пер. с англ., М., 1988; [4] Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980.

В. П. Котляров.

СОЛИТОННАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ – теория уравнений, описывающих *солитоны*; при их выводе часто приходится пренебрегать малыми реальными факторами (возмущениями), которые, тем не менее, могут оказывать заметное влияние на солитоны при достаточно больших значениях времени t. Типичные примеры возмущений – диссипация, неоднородность и нестационарность среды и т. д. Учет последних во многих случаях приводит к уравнениям вида:

$$u_t = \hat{S}u + \varepsilon\hat{R}u, \tag{1}$$

где $\hat{S}$ – нелинейный оператор, действующий на вектор-функцию $u(t, x)$, $\hat{R}$ – оператор возмущения, ε – малый параметр, так что уравнение (1) при $\varepsilon = 0$ описывает «невозмущенные» солитоны. Напр., уравнение

$$v_\tau + \alpha(\varepsilon\tau)v^p v_x + \beta(\varepsilon\tau)v_{xxx} = 0 \tag{2}$$

заменой

$$\left.\begin{aligned} t &= b^{-1}\int_0^\tau \beta(\varepsilon\tau')\,d\tau', \\ u(x,t) &= (\sigma b/a)^{1/p} v(x,t), \quad \sigma = \alpha/\beta, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

приводится к виду

$$u_t + au^p u_x + bu_{xxx} = \varepsilon\gamma(\varepsilon t)u, \tag{4}$$

$$\varepsilon\gamma(\varepsilon t) = \sigma_t/p\sigma. \tag{5}$$

При $p = 1$, 2 это дает возмущенные уравнения Кортевега – де Фриса и Миуры – Кортевега – де Фриса. При $\gamma = \text{const}$ уравнение (4) описывает также солитоны в активной среде ($\gamma < 0$ отвечает диссипации, $\gamma > 0$ – неустойчивости). При $\hat{R} = \partial^2/\partial x^2$ возмущающий член описывает проявления вязкости и теплопроводности.

Аналогично, замена (3) в уравнении

$$iv_\tau + \alpha(\varepsilon\tau)|v|^2 v + \beta(\varepsilon\tau)v_{xx} = 0 \tag{6}$$

при $p = 2$, $a = 2b = 1$ дает возмущенное нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + |u|^2 u + (1/2)u_{xx} = i\varepsilon\gamma(\varepsilon t)u \tag{7}$$

с $\gamma(\varepsilon t)$ из (5). Если в возмущенном нелинейном уравнении Шредингера

$$\varepsilon\hat{R}u = \gamma_0 + \mu\partial^2/\partial x^2,$$

то возмущение описывает неустойчивость вблизи максимального инкремента (в этом случае зависимость инкремента от волнового числа k имеет вид $\gamma(k) = \gamma_0 - \mu k^2$, $\mu k^2 \ll 1$).

В простейшем случае одного солитона решение уравнения (1) можно искать в виде $u = u_s + \delta u$, где u_s имеет вид выражения для невозмущенного солитона с параметрами, зависящими от εt, а $\delta u(x, t)$ – «несолитонная» часть.

Для солитона Кортевега – де Фриса, напр., в первом порядке по ε это дает

$$u_s = 2\varkappa^2(\varepsilon t)\operatorname{sch}^2 z,\ z = \varkappa(\varepsilon t)[x - \xi(t)], \tag{8}$$

$$\varkappa_t = -\frac{\varepsilon}{4\varkappa}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{R}u_s(z)]\operatorname{sch}^2 z\,dz, \tag{9}$$

$$\xi_t = 4\varkappa^2 - \frac{\varepsilon}{4\varkappa^3}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{R}u_s(z)](z\operatorname{sch}^2 z + \operatorname{th} z + \operatorname{th}^2 z)\,dz. \tag{10}$$

Пусть возмущение включается при $t = 0$ и $\xi(0) = 0$. Тогда при $\varkappa\xi(t) \gg 1$ и $|z| \gg 1$ асимптотика $\delta u(x, t)$ за солитоном ($z < 0$) имеет вид:

$$\delta u \approx -\frac{\varepsilon}{4\varkappa^3}\left\{\operatorname{th}^2 z\int_z^\infty[\hat{R}u_s(z')]\operatorname{th}^2 z'\,dz' - \right.$$

$$\left. - z^2 e^{2z}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{R}u_s(z')]\operatorname{sch}^2 z'\right\}dz' + \varepsilon O(ze^{2z}). \tag{11а}$$

Впереди солитона при $z \gg 1$

$$\delta u = -\frac{\varepsilon}{4\varkappa^3}z^2 e^{-2z}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{R}u_s(z')]\operatorname{sch}^2 z'\,dz' + \varepsilon O(ze^{-2z}). \tag{11б}$$

Из (11) следует, что за солитоном образуется «хвост», асимптотика к-рого (в первом порядке по ε) не зависит от z:

$$\delta u \approx -\frac{\varepsilon}{4\varkappa^3}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{R}[u_s(z)]\operatorname{th}^2 z\,dz. \tag{12}$$

Анализ, основанный на методе обратной задачи (см. ниже), показывает, что начало хвоста лежит в окрестности местоположения солитона при $t = 0$. Его длина приблизительно равна $\xi(t)$, то есть пути, пройденному солитоном после включения возмущения. Это приводит к картине непрерывного «излучения» хвоста по мере движения солитона. После образования данный участок хвоста становится независимым от солитона. Отсюда следует, что для нахождения профиля хвоста при данном t нужно учитывать, что участок хвоста в окрестности точки x был излучен в момент $t_x < t$, где t_x определяется из уравнения $\xi(t_x) = x$. Таким образом, в (12) следует подставить t_x вместо t. Это эффект второго порядка по ε. Он приводит к неоднородности хвоста. При дальнейшем увеличении t хвост начинает модулироваться. Характер модуляции зависит от знака величины

$$j = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{R}[u_s(z)]\operatorname{th}^2 z\,dz. \tag{13}$$

При $j < 0$ хвост распадается на солитоны с амплитудами порядка ε. При $j > 0$ образуется расплывающийся волновой пакет. При $j = 0$ хвост не возникает.

Ситуация, качественно близкая к рассмотренной, имеет место и для возмущенного уравнения Миуры – Кортевега – де Фриса. Для ряда возмущенных уравнений подобные хвосты не образуются.

При анализе области применимости С. т. в. имеют значение два масштаба времени:

t_s – временной масштаб невозмущенного солитона (для уравнения Кортевега – де Фриса это время прохождения солитоном его длины $\varkappa^{-1}$);

t_p – время проявления возмущения;

$t_p/t_s \sim \varepsilon^{-1} \gg 1$.

Область справедливости первого приближения по ε ограничена, вообще говоря, условием $t \leqslant t_p$. Формулу (12) можно использовать и при $t \gg t_p$, подставляя вместо t «момент излучения» t_x. Отметим, что для вычисления $\xi(t)$ с точностью до ε при $t \sim t_p$ нужно знать $\varkappa_t$ с точностью до ε^2, то есть добавить к правой части (9) член порядка ε^2. Физич. эффекты высшего порядка по ε становятся существенными при $t \gg t_p$.

Пусть теперь уравнение (1) при $\varepsilon = 0$ интегрируется методом обратной задачи. Тогда теория возмущений может быть построена на основе этого метода, что позволяет продвинуться дальше при решении задач с начальными условиями, исследовании многосолитонных систем, генерации несолитонных излучений и т. д.

Пусть $\mathcal{F}\{u, u^*\}$ – нек-рый функционал от u и u^*. Тогда эволюция $\mathcal{F}$ определяется уравнением

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta u^*(x)}\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial t}\right]dx \tag{14}$$

кции) f из векторного пространства L,– комплексное либо вещественное число λ такое, что

$$Af=\lambda f.$$

Совокупность всех собственных функций, отвечающих одному и тому же С. з. λ, образует линейное подпространство L_λ пространства L. Размерность L_λ называется кратностью С. з. Если пространство L конечномерно, то С. з. совпадают с корнями характеристич. многочлена, $\det\|A-\lambda I\|$, где A – матрица линейного преобразования A в нек-ром базисе, I – единичная матрица. Если оператор A самосопряжен (эрмитов оператор), то все его С. з. отвечают значениям *наблюдаемых* (измеримых) величин. В частности, у каждой конечномерной эрмитовой $(n\times n)$-матрицы A найдутся (с учетом кратностей) ровно n С. з.

В бесконечномерном случае можно сформулировать аналог этого утверждения для самосопряженных компактных операторов. Оператор A, действующий, напр., в пространстве l^2 бесконечномерных векторов $f=(a_1, a_2, ...)$ с конечной нормой

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty$$

и соответствующим скалярным произведением, называется компактным, если он переводит любую ограниченную последовательность векторов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (то есть такую, что для всех n выполнено неравенство $\|x_n\|<M$) в последовательность $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$, из к-рой всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Отсюда, в частности, следует, что если выбрать последовательность $\{x_n\}$ ортонормированной: $(x_n, x_m)=1$ при $n=m$ и $=0$ при $n\neq m$, то последовательность $\{Ax_n\}$ будет сходиться к нулю. Для таких операторов, действующих в пространстве l^2 или в функциональных пространствах, справедлива теорема Рисса – Шаудера, утверждающая, что система собственных функций (собственных векторов) такого оператора образует базис (полную систему из ортонормированных функций) в соответствующем пространстве, а его С. з. λ_n сходятся к нулю при $n\to\infty$, причем каждое С. з. является корнем конечной кратности. К классу компактных операторов относятся все ограниченные интегральные операторы с интегрируемым ядром, к-рые часто встречаются в физике, напр. в задачах с потенциалом.

Класс компактных операторов оказывается слишком узким, чтобы описать все физически интересные случаи. Он не описывает унитарные операторы (то есть операторы, сохраняющие норму; все С. з. таких операторов представляются в виде $e^{i\varphi}$, $\varphi\in\mathbb{R}$), а также дифференциальные операторы, к-рые, как правило, не ограничены. Обобщением понятия С. з. для таких операторов служит понятие спектра $\sigma(A)$ оператора A. Число λ принадлежит *спектру* оператора, если резольвента оператора A:

$$R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1},$$

будет сингулярным оператором. Все С. з. A будут принадлежать $\sigma(A)$ [они будут изолированными (дискретными) точками $\sigma(A)$]. Однако помимо этих точек $\sigma(A)$ обычно содержит непрерывную часть, состоящую из таких точек λ, для к-рых оператор $R(\lambda)$ определен, но не ограничен. В обычном смысле таким λ не соответствует никакая собственная функция, тем не менее аналог разложения по базису собственных функций задается спектральным разложением.

Л. О. Чехов.

СОБСТВЕННОЕ КОЛЕБАНИЕ, свободное колебание,– колебание, совершающееся в *динамической системе* при отсутствии внешнего воздействия при сообщении ей в начальный момент внешнего возмущения, выводящего систему из состояния равновесия. Характер С. к. в основном определяется внутренними силами, обусловленными физич. строением системы. Энергия, необходимая для движения, поступает в систему от внешнего воздействия в начальный момент движения.

Примером С. к. могут служить *малые колебания* консервативной системы с n степенями свободы около устойчивого состояния равновесия. Уравнения движения имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{si}\ddot{q}_i+c_{si}q_i)=0,\quad s=1,\dots,n, \tag{1}$$

где q_i – обобщенные координаты, a_{si}, c_{si} – постоянные коэффициенты. Общее решение системы (1) состоит из суммы n гармонич. колебаний:

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}A_j\Delta_i(k_j^2)\sin(k_jt+\beta_j),\quad i=1,\dots,n,$$

где A_j, β_j – постоянные интегрирования, k_j – собственные частоты – корни уравнения частот

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & \dots & c_{1n}-a_{1n}k^2 \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ c_{n1}-a_{n1}k^2 & \dots & c_{nn}-a_{nn}k^2 \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

(предполагается, что нет нулевых и кратных частот), $\Delta_i(k_j^2)$ – минор, соответствующий i-му столбцу и последней строке определителя (2). Величины $A_j\Delta_i(k_j^2)$, $k_jt+\beta_j$, β_j – соответственно амплитуда, фаза и начальная фаза j-гармоники. Из рассмотренного примера следует: гармонич. колебания одной и той же частоты для всех координат происходят в фазе или противофазе; распределение амплитуд колебаний данной собственной частоты по координатам определяется физич. устройством системы.

Лит.: [1] Бабаков И. М., Теория колебания, 2 изд., М., 1965; [2] Бутенин Н. В., Теория колебаний, М., 1963; [3] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 2 изд., М., 1964; [4] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959.

Н. В. Бутенин.

СОБСТВЕННОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО – см. *Линейный оператор, Собственный вектор.*

СОБСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – см. *Лоренца группа, Лоренца преобразование.*

СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР оператора A – ненулевой вектор из векторного пространства L, который переводится данным оператором в пропорциональный ему вектор, то есть

$$Ax=\lambda x,$$

где вещественное либо комплексное число λ называется *собственным значением* оператора A. С. в. операторов, действующих в функциональном пространстве, называются *собственными функциями.*

Для линейного оператора A множество L_λ всех С. в., отвечающих одному и тому же собственному значению λ, образует линейное подпространство, к-рое называется собственным подпространством оператора A. Если пространство L конечномерно (n-мерно), а матрица преобразования A эрмитова, то у нее имеется ровно n различных С. в., отвечающих вещественным собственным значениям.

Наличие С. в. у операторов в бесконечномерных пространствах – явление довольно редкое, хотя для физич. приложений существенно, что операторы специальных классов (интегральные, дифференциальные и т. п.) часто обладают обширными наборами С. в. Наиболее важным для физики бесконечномерным векторным пространством является пространство l^2 векторов f, g вида $(a_1, a_2, ...)$, $(b_1, b_2, ...)$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_k b_k$$

(черта означает комплексное сопряжение) и соответствующей конечной нормой

$$\|f\|^2=(f,f)<\infty.$$

Это пространство изоморфно пространству квадратично интегрируемых функций $L^2(-\infty, +\infty)$ и обладает всеми свойствами последнего.

В качестве простого примера применим это к односолитонному состоянию возмущенного уравнения Кортевега – де Фриса. Тогда $u = u_s + \delta u$,

$$[\delta I_1/\delta u(x)]_{u=u_s} = 1,$$

$$[\delta I_n/\delta u(x)]_{u=u_s} = (2\varkappa)^{2n-2}\operatorname{sch}^2 z,\ n>1,$$

$$I_n\{u_s\} = 2^{2n}\varkappa^{2n-1}/(2n-1),\ n=1, 2, \ldots$$

Подстановка этих выражений в (23) приводит всего к двум независимым уравнениям. Одно из них – уравнение (9), а второе имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\delta u(z,t)\operatorname{sch}^2 z\,dz = 0. \qquad (26)$$

Это уравнение удовлетворяется тождественно, если подставить в него полное выражение для $\delta u(x, t)$ в первом порядке по ε, найденное методом обратной задачи. Аналогичная ситуация имеет место и для других интегрируемых (при $\varepsilon = 0$) уравнений: бесконечное множество модифицированных законов сохранения (23) приводит к ограниченному числу непротиворечивых уравнений, определяющих эволюцию параметров солитонов, и нек-рым интегральным соотношениям для несолитонной части $\delta u(x, t)$.

Лит.: [1] Ott E., Sudan R. N., «Phys. Fluids», 1970, v. 13, № 6, p. 1432–34; [2] Kaup D. J., «SIAM J. Appl. Math.», 1976, v. 31, p. 121–23; [3] Карпман В. И., Маслов Е. М., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1977, т. 73, № 2, с. 537–59; 1978, т. 75, № 2, с. 504–17; [4] Kaup D. J., Newell A. C., «Proc. Roy. Soc., A», 1978, v. 361, p. 413–46; [5] Karpman V. I., «Physica Scripta», 1979, v. 20, № 3–4, p. 462–78.

В. И. Карпман.

СОЛИТОНОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ в общем случае является неупругим, то есть при столкновении число солитонов может изменяться и, вообще говоря, возникает несолитонный волновой пакет. Если солитоны описываются полностью интегрируемым уравнением, то, как следует из метода обратной задачи, более быстрый солитон проходит через более медленный с сохранением параметров каждого из них. При этом единственным результатом С. в. являются фазовые сдвиги, приобретаемые солитонами при $t = \infty$. Однако при выполнении так наз. резонансных условий, может возникать новый солитон. Если солитоны находятся на больших расстояниях, то С. в. можно описывать с помощью *солитонной теории возмущений*, из к-рой следует, что в первом приближении солитоны ведут себя как частицы, взаимодействующие по законам классич. механики. Притягивающиеся солитоны могут образовывать связанные системы. Напр., бризер – связанное состояние кинка и антикинка. Внешнее возмущение может приводить к его распаду либо, наоборот, образованию.

Лит.: [1] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов, М., 1980; [2] Горшков К. А., Островский Л. А., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1976, т. 71, № 2, с. 585–93; [3] Karpman V. I., Solov'ev V. V., «Physica D», 1981, v. 3, № 3, p. 487–502; [4] Карпман В. И., Маслов Е. М., Соловьев В. В., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1983, т. 84, № 1, с. 289–300.

В. И. Карпман.

СООТВЕТСТВИЯ ПРИНЦИП – постулат квантовой механики, требующий совпадения ее физических следствий в предельном случае больших квантовых чисел с результатами классической теории. Квантовые эффекты существенны лишь при рассмотрении микрообъектов, когда величины размерности действия сравнимы с постоянной Планка $\hbar$. Если квантовые числа, характеризующие состояние физич. системы (напр., орбитальное квантовое число l), велики, то система с высокой точностью подчиняется классич. законам. С формальной точки зрения С. п. означает, что в пределе $\hbar \to 0$ квантовомеханич. описание физич. объектов должно быть эквивалентно классическому.

Часто под С. п. понимают следующее более общее положение. Любая новая теория, претендующая на более глубокое описание физич. реальности и на более широкую область применимости, чем старая, должна включать последнюю как предельный случай. Напр., *релятивистская механика* в пределе малых скоростей v ($v \ll c$) переходит в классическую. Формально переход осуществляется при $c \to \infty$.

Когда основные положения теории уже сформулированы, С. п. представляет в основном иллюстративный интерес и подчеркивает преемственность теоретич. построений. В ряде случаев С. п. помогает развить приближенные методы решения задач. Так, если в данной конкретной физич. проблеме $\hbar$ можно считать малой величиной, то это равносильно так наз. *квазиклассическому приближению* квантовой механики. При этом нерелятивистское волновое *Шредингера уравнение* в пределе $\hbar \to 0$ приводит к классич. уравнению Гамильтона – Якоби. Однако в период возникновения новой теоретич. дисциплины, когда ее принципы во многом еще неясны, С. п. имеют самостоятельное эвристич. значение.

С. п. был выдвинут Н. Бором (N. Bohr) в начале 1920-х гг. в связи с проблемой спектров испускания и поглощения атомов. В созданной позже последовательной квантовой механике особенности атомных спектров были объявлены на более глубокой основе, однако существенные черты ее математич. аппарата определялись С. п. Напр., из С. п. следует, что коммутационные соотношения для различных величин квантовой теории даются классическими *Пуассона скобками*, что *гамильтониан* физич. системы выражается через обобщенные координаты и импульсы так же, как и в классич. механике, и т. п. Значение С. п. далеко выходит за рамки квантовой механики. Им широко пользуются в квантовой теории поля, теории элементарных частиц, и, без сомнения, он войдет составной частью в любую новую квантовую теорию.

Лит.: [1] Бор Н., Три статьи о спектрах и строении атомов, пер. с нем., М.– П., 1923.

О. И. Завьялов.

СОПРЯЖЕННАЯ ТОЧКА – некоторая выделенная точка экстремали в конфигурационном пространстве. На фазовой траектории гамильтоновой системы, выходящей из точки (p_0, q_0), в отдельных точках касательное пространство к слою кокасательного расслоения нетрансверсально образу под воздействием фазового потока касательного пространства слоя в точке (p_0, q_0). Образ этих точек в конфигурационном пространстве и называется сопряженными точками к точке q_0 вдоль экстремали, выходящей из точки q_0 с импульсом p_0. С. т. к точке риманова многообразия вдоль геодезической называется С. т. геодезического потока. Напр., южный полюс сферы – С. т. северного полюса вдоль любого меридиана.

М. Э. Казарян.

СОПРЯЖЕННЫЙ ИНСТРУМЕНТ – см. *Инструмент.*

СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР – см. *Линейный оператор.*

СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИСТЕМА – система излучателей, линейные размеры которой много меньше длины волны испускаемого ею излучения. Синхронность протекания во времени процессов в различных атомах системы приводит к когерентному отклику. Напр., в случае сверхизлучения в С. с. интенсивность излучения возрастает по сравнению с некогерентным спонтанным распадом пропорционально числу излучателей в системе

$$I_{\text{си}} = \frac{N}{4} I_{\text{сп}} = \frac{N^2}{4}\frac{\hbar\omega_0}{T_1},$$

где $I_{\text{си}}$ – интенсивность сверхизлучения, N – число атомов, T_1 – время спонтанного распада атомов с возбужденного уровня, $\hbar\omega_0$ – энергия возбуждения.

А. В. Андреев.

СОСТОЯНИЕ – положительный линейный функционал φ на алгебре $\mathcal{U}$ *наблюдаемых* физической системы. Всякой физич. системе ставится в соответствие тройка $(\mathcal{U}, E, \langle\,;\,\rangle)$, образованная множеством $\mathcal{U}$ всех ее наблюдаемых, множеством E всех ее состояний и отображением $\langle\,;\,\rangle : (\mathcal{U}, E) \to \mathbb{R}$, к-рое каждой паре (A, φ) из $(\mathcal{U}, E)$ ставит в соответствие действительное число $\langle\varphi; A\rangle$, называемое средним значением наблюдаемой A в состоянии φ. Обычно $\mathcal{U}$

есть B^*-алгебра с единицей, E – выпуклое подмножество единичного шара в сопряженном пространстве $\mathcal{U}'$. Понятие С. широко используется в квантовой теории и статистич. механике. С. в равновесной статистич. механике задается системой плотностей распределения для классич. ансамбля Гиббса и системой матриц плотности для квантового ансамбля Гиббса. С. в квантовой теории задается матрицей плотности, действующей в пространстве Фока. Такова, напр., квантовая статистич. система. Среднее по ансамблю такой системы, заключенной в ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu(\mathbb{Z}^\nu)$, определяется матрицей плотности ρ_Λ соответствующего ансамбля Гиббса, действующей в пространстве Фока $\mathcal{F}(\Lambda)$:

$$\langle A\rangle_\Lambda = \langle \rho_\Lambda, A\rangle = \mathrm{Tr}\,\rho_\Lambda A,$$

где наблюдаемая $A \in \mathcal{U}$. Обычно рассматриваются предельные (равновесные) средние $\langle\cdot\rangle$ и соответствующие предельные С. ρ при $|\Lambda| \to \infty$. Если на алгебре $\mathcal{U}$ действует нек-рая группа G как группа автоморфизмов $\mathcal{U}$ (напр., группа всех движений $\mathbb{R}^\nu$), то естественно рассматривать инвариантные равновесные С., то есть равновесные С., не изменяющиеся под действием этой группы: $\langle \tau_g \cdot\rangle = \langle\cdot\rangle$, где $g \in G$, $\tau: G \to \mathrm{aut}\,\mathcal{U}$ – групповой гомоморфизм, а τ_g – автоморфизм $\mathcal{U}$, соответствующий элементу g группы G (при гомоморфизме τ). См. также *Равновесные состояния* статистических систем, *Корреляционная функция, Плотности матрица, Статистической механики математические задачи, Статистический ансамбль.* *Д. П. Санкович.*

СОСТОЯНИЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Статистический интеграл.*

СОСТОЯНИЙ ПРОСТРАНСТВО, фазовое пространство,– см. *Статистический ансамбль, Статистической механики математические задачи.*

СОСТОЯНИЙ СМЕСЬ – см. *Смешанное состояние.*

СОСТОЯНИЯ ВЕКТОР – см. *Вектор состояния.*

СОСТОЯНИЯ ДИАГРАММА – см. *Фазовая диаграмма.*

СОСТОЯНИЯ УРАВНЕНИЕ – уравнение, связывающее между собой температуру, внешние параметры и какой-либо внутренний параметр системы в состоянии термодинамического равновесия. С. у. является математич. отражением второго постулата термодинамики, согласно к-рому все равновесные внутренние параметры системы есть функции внешних параметров и температуры. Калорическое С. у. выражает зависимость внутренней энергии системы от температуры и внешних параметров. Термическое С. у. связывает значения внутреннего параметра системы, являющегося обобщенной силой, сопряженной какому-либо внешнему параметру, со значениями внешних параметров и температуры. Калорич. и каждое термич. С. у. связаны дифференциальным уравнением с частными производными. Общее число С. у. определяется числом степеней свободы системы, то есть числом независимых параметров, характеризующих ее состояние. С. у. либо берутся из опыта, либо выводятся методами статистич. физики. *А. В. Солдатов.*

СОХОЦКОГО ТЕОРЕМА: каково бы ни было комплексное число w (допускается и $w=\infty$), существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к *существенно особой точке* a аналитической функции $w=f(z)$ комплексного переменного z, что

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Эта С. т. явилась первым результатом, характеризующим предельное множество $C(f, a)$ аналитич. функции f в существенно особой точке a: согласно С. т., $C(f, a)$ тотально, то есть совпадает с расширенной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}_w$ переменного w. С. т. доказана Ю. В. Сохоцким (1868). Дополнительная информация о поведении аналитич. функции в окрестности существенно особой точки содержится в *Пикара теореме.*

Е. Д. Соломенцев.

СОХОЦКОГО ФОРМУЛА – формула, связывающая различные регуляризации функции $1/x$:

$$\frac{1}{x\pm i0} = p\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$$

(см. *Обобщенная функция*). Установлена Ю. В. Сохоцким (1873). *В. В. Жаринов.*

СОХОЦКОГО ФОРМУЛЫ – формулы, найденные Ю. В. Сохоцким (1873) и выражающие граничные значения интеграла типа Коши.

Пусть $\Gamma: t = t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, $t(0) = t(l)$,– замкнутая гладкая жорданова кривая на плоскости комплексного переменного z, $\varphi(t)$ – заданная на Γ комплексная плотность интеграла типа Коши, относительно к-рой предполагается, что она удовлетворяет условию Гельдера

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|^\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1;$$

D^+ – область внутри Γ, D^- – внешняя область;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad z \in \Gamma, \tag{1}$$

– интеграл типа Коши. Тогда для любой точки $t_0 \in \Gamma$ существуют пределы

$$\Phi^+(t_0) = \lim_{z\to t_0,\, z\in D^+} \Phi(z),$$

$$\Phi^-(t_0) = \lim_{z\to t_0,\, z\in D^-} \Phi(z),$$

к-рые выражаются формулами Сохоцкого

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{2}\varphi(t_0),\\ \Phi^-(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{1}{2}\varphi(t_0). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

или, иначе,

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},$$

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0).$$

Интеграл вдоль Γ в правых частях С. ф. понимается в смысле главного значения по Коши и называется сингулярным интегралом. Таким образом, принимая при высказанных условиях $\Phi^+(t)$ (или $\Phi^-(t)$) в качестве значений интеграла $\Phi(z)$ на Γ, получают функцию $\Phi(z)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D^+} = D^+ \cup \Gamma$ (соответственно в $\overline{D^-} = D^- \cup \Gamma$); в целом $\Phi(z)$ иногда описывают как кусочно аналитич. функцию.

Если $\alpha < 1$, то $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ также непрерывны по Гельдеру на Γ с тем же показателем α, а если $\alpha = 1$, то с любым показателем $\alpha' < 1$. Для угловых точек t_0 кусочно гладкой кривой Γ С. ф. принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right)\varphi(t_0),\\ \Phi^-(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{\beta}{2\pi}\varphi(t_0), \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В случае разомкнутой кусочно гладкой кривой Γ С. ф. (2) и (3) остаются в силе для внутренних точек дуги Γ.

С. ф. играют основную роль при решении граничных задач теории функций и сингулярных интегральных уравнений, а также при решении различных **прикладных** задач теории функций.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972. *Е. Д. Соломенцев.*

СОХРАНЕНИЯ ЗАКОНЫ – физические закономерности, согласно которым численные значения некоторых физических величин не изменяются со временем в любых процес-

ориентированный путь из состояния i в состояние j. Состояние i называется возвратным, если $i>j$. Топологич. марковская цепь (Σ_A, σ) называется неразложимой, если все ее состояния возвратны и для любых $i, j \in L$, $i>j$ и $j>i$. Неразложимость матрицы A эквивалентна условию: для любых i, j существует $k>0$ такое, что элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k положителен. Топологич. марковская цепь называется примитивной, если существует $n>0$ такое, что для любых i, j существует путь в G_A, состоящий из n ребер, соединяющий i и j (это эквивалентно тому, что все элементы матрицы A^n положительны). Если топологич. марковская цепь (Σ_A, σ) неразложима, то периодич. точки гомеоморфизма σ плотны в Σ_A и σ является топологически транзитивным на Σ_A, то есть существует элемент $\omega \in \Sigma_A$ такой, что траектория $\{\sigma^n(\omega)\}_{-\infty}^{+\infty}$ плотна в Σ_A. Если же цепь (Σ_A, σ) примитивна, то σ топологически перемешивает, то есть для любых открытых в Σ_A множеств U и V найдется $n_*>0$ такое, что $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$ для всех $n>n_*$.

Множество всех возвратных состояний топологич. марковской цепи разбивается на непересекающиеся классы L_1, L_2, ..., L_m таким образом, что если состояния i_l, j_l лежат в L_l, то $i_l>j_l$, $j_l>i_l$, $l=1, 2, ..., m$. Классу L_l соответствует подматрица A_l матрицы A, определяющая в пространстве Σ_A инвариантное относительно σ подмножество

$$\Sigma_{A_l} = \left\{\omega = \{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty} \in \Sigma_A \mid \omega_n \in L_l,\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Следующий результат является аналогом теоремы о спектральном разложении неблуждающего множества динамич. системы (M, f), где диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A Смейла (см. [2]).

Неблуждающее множество символич. динамич. системы (Σ_A, σ) представляется в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных подмножеств Ω_1, ..., Ω_m таких, что ограничение $\sigma|_{\Omega_i}$ есть топологич. марковская цепь (Σ_{A_i}, σ), соответствующая неразложимой подматрице A_i матрицы A для класса состояний L_i, $i=1, 2, ..., m$.

Пусть $N(\sigma|_{\Sigma_A})$ – число неподвижных точек отображения $\sigma^n: \Sigma_A \to \Sigma_A$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Так как

$$N_n\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right) = \sum_{i=1}^{m} N_n\left(\sigma|_{\Sigma_{A_i}}\right),$$

то далее, не уменьшая общности, предполагается, что матрица A неразложима. Для каждого j через k_j обозначается такое число, что $a_{jj}^{(k_j)}$, где $a_{jj}^{(k_j)}$ – элемент матрицы A^{k_j}; пусть ν – наибольший общий делитель k_j, $j \in G$. Число ν называется индексом цикличности матрицы A [и соответственно цепи (Σ_A, σ)]. Имеет место следующая формула:

$$N_n\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right) = \begin{cases} \nu\lambda^n(A) + \sum_{|\lambda_k|<\lambda(A)} \lambda_k^n, & \text{если } n = 0 \pmod{\nu}, \\ 0, & \text{если } n \neq 0 \pmod{\nu}, \end{cases}$$

где $\lambda(A)$ – наибольшее положительное собственное значение матрицы A (существующее в силу теоремы Фробениуса – Перрона).

Дзета-функция Артина – Мазура

$$\zeta(t) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_n(\sigma|_{\Sigma_A}) \cdot t^n}{n}\right)$$

вычисляется по формуле

$$\zeta(t) = 1/\det(E - tA),$$

и определяющий ее ряд сходится в круге $|t| < 1/\lambda(A)$.

Топологич. энтропия $h(\sigma|_{\Sigma_A})$ вычисляется по формуле

$$h\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right)}{n} = \ln\lambda(A).$$

С точки зрения эргодич. теории наиболее важным метрич. свойством (неразложимой) топологич. марковской цепи является существование единственной σ-инвариантной борелевской вероятностной меры μ_*, к-рая максимизирует метрич. энтропию h_{μ_*}, то есть

$$h_{\mu_*} = \sup h_\mu(\sigma|_{\Sigma_A}),$$

где sup вычисляется по всем вероятностным борелевским мерам на Σ_A. При этом

$$h_{\mu_*}\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right) = h\left(\sigma|_{\Sigma_A}\right).$$

Мера μ_* положительна на открытых множествах и совпадает с распределением вероятностей, отвечающим стационарной цепи Маркова с вероятностями перехода

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}\beta_j}{\lambda(A)\beta_i}$$

и стационарными вероятностями $p_i = \alpha_i\beta_i$, где $\{\beta_i\}_1^N$, $\{\alpha_i\}_1^N$ – соответственно правый и левый собственные векторы матрицы A (положительные в силу теоремы Фробениуса – Перрона) с нормировкой $\sum_{i=1}^N \alpha_i\beta_i = 1$. Мера μ_* определяется конструктивно через асимптотику числа периодич. точек следующим образом: для любого цилиндра $B = [i_0, i_1, ..., i_k]$

$$\mu_*(B) = \lim_{i\to\infty} \frac{N_{i\nu}(B)}{N_{i\nu}},$$

где $N_{i\nu}(B)$ – число неподвижных точек отображения $\sigma^{i\nu}$ в цилиндре B, ν – индекс цикличности цепи (Σ_A, σ).

Марковские разбиения (см. [4]–[9]).

Пусть Ω – замкнутое инвариантное множество динамич. системы (M, f). Динамич. свойства системы (Ω, f), а также метрич. свойства системы (Ω, f, μ), где μ – мера максимальной (метрической) энтропии ограничения $f|_\Omega$, наиболее тесно связаны с нек-рой топологич. марковской цепью (Σ_A, σ), если удается найти такое покрытие L множества Ω замкнутыми множествами U_1, U_2, ..., U_N, что:

1) $\operatorname{int} U_i \cap \operatorname{int} U_j = \varnothing$, $i \neq j$;

2) $\bigcup_{i=1}^n \partial U_i$ нигде не плотно в M;

3) L является образующим покрытием. При наличии такого покрытия система (Ω, f) полусопряжена с цепью (Σ_A, σ), $\sigma\varphi_L|_\Omega = \varphi_L f|_\Omega$, причем отображение φ_L^{-1} является гомеоморфизмом на множестве второй категории, а мера μ индуцируется мерой μ_* с помощью отображения φ_L^{-1}.

Покрытия указанного типа существуют для инвариантных базисных множеств Ω важного класса динамич. систем (M, f), когда f – диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A Смейла. Покрытия, названные для этого класса марковскими, были построены в работах [4], [6]. Их построение основано на существовании у рассмотренных систем инвариантных семейств устойчивых и неустойчивых многообразий. Элементы покрытия являются «параллелограммами» со сторонами, лежащими на устойчивых и неустойчивых многообразиях и удовлетворяют нек-рому условию правильности пересечения образов и прообразов параллелограммов в силу диффеоморфизма f с исходными элементами покрытия. Это условие с учетом сжатия (растяжения) устойчивых (неустойчивых) многообразий гарантирует свойство 3) покрытия L.

(для простоты принято, что все λ_i различны). Если положить

$$\Delta(M)=(M-\lambda_i)\Delta_i(M),$$ то оператор $P_i=\Delta_i(M)/\Delta_i(\lambda_i)$

является проектором на собственное подпространство, принадлежащее λ_i: для любого вектора x вектор $P_i(x)$ – собственный и принадлежит λ_i;

$$P_i^2=P_i,\ \sum_i P_i=1.$$

При этом матрица M имеет спектральное разложение:

$$M=\sum_i\lambda_i P_i. \qquad (*)$$

Для эрмитовых M проекторы также эрмитовы, λ_i вещественны, а собственные подпространства ортогональны друг другу. При $\lambda\neq\lambda_i$ матрица $\lambda I-M$ имеет обратную. Вообще, в конечномерном случае есть две возможности: либо (I) λ – регулярная точка и резольвента $(\lambda I-M)^{-1}$ существует как оператор на всем векторном пространстве, либо (II) λ – точка спектра и резольвента не существует.

В бесконечномерном случае речь идет об операторах A, действующих в нормированном линейном пространстве (банаховом пространстве) $\mathcal{B}$, и появляется третья возможность: (III) уравнение $Ax=\lambda x$ имеет лишь нулевые решения в $\mathcal{B}$, но резольвента $(\lambda I-M)^{-1}$ не определена на всем $\mathcal{B}$. Объединяя вторую (точечный, или дискретный, спектр) и третью (непрерывный и остаточный спектры) возможности, спектром оператора называют множество таких λ, для к-рых резольвента не является ограниченным оператором на всем $\mathcal{B}$. При этом λ принадлежит непрерывному С., если область значений оператора $\lambda I-A$ плотна в $\mathcal{B}$, и остаточному – в противном случае. У ограниченных самосопряженных операторов остаточный С. отсутствует.

В квантовой механике наблюдаемым отвечают самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H. Сведения об их С. имеют непосредственный физич. смысл. Так, точечный С. оператора Гамильтона – это уровни энергии связанных состояний, а непрерывному С. отвечают состояния, фигурирующие в теории рассеяния. В соответствии с идеей П. Дирака (см. [2]) в квантовой механике оперируют с формальными решениями уравнения $Ax=\lambda x$, отвечающими непрерывному С.; такие решения не принадлежат H. Напр., для системы с одной степенью свободы, координата к-рой может принимать значения на всей оси $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, H в координатном представлении реализуется как пространство $L^2(\mathbb{R})$ квадратично интегрируемых функций $\varphi(q)$ на $\mathbb{R}$. Оператор импульса $p=-i\hbar d/dq$ имеет непрерывный С., совпадающий с $\mathbb{R}$. Решениями уравнения $p\psi_\lambda(q)=\lambda\psi_\lambda(q)$ являются плоские волны $\psi_\lambda(q)=|\lambda\rangle=\exp(i\lambda q/\hbar)$; поскольку в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ их норма

$$\langle\lambda/\lambda\rangle=(2\pi)^{-1}\int\psi_\lambda^*(q)\,\psi_\lambda(q)\,dq$$

расходится, они не принадлежат $L^2(\mathbb{R})$ и называются обобщенными собственными векторами. Комбинация $|\lambda\rangle\langle\lambda|$ является аналогом проектора на обобщенный собственный вектор $|\lambda\rangle$, а спектральное разложение

$$p=\int d\lambda\lambda|\lambda\rangle\langle\lambda|$$

– аналогом разложения (*) для случая непрерывного С.: для любого вектора $\varphi(q)=|\varphi\rangle$ из $L^2(\mathbb{R})$ имеем:

$$p\varphi(q)=\int d\lambda\lambda|\lambda\rangle\langle\lambda|\varphi\rangle=$$

$$=\int d\lambda\lambda\exp(-i\lambda q/\hbar)(2\pi)^{-1}\int dq'\exp(i\lambda q/\hbar)\varphi(q)=-i\hbar d\varphi(q)/dq.$$

Эта конструкция служит только моделью математически строгого определения спектрального разложения операторов с непрерывным С. В большинстве квантовомеханич. задач дискретный и непрерывный участки С. не пересекаются, а случаи, когда точки дискретного С. погружены в непрерывный, считаются экзотическими. Простейший пример такой ситуации – осциллирующий и медленно убывающий с расстоянием потенциал (так наз. потенциал Вигнера – Неймана).

Лит.: [1] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ., М., 1963; [2] Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 1 – Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1977; [4] Нейман И., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964.

В. П. Павлов.

СПЕКТР представления, носитель представления, для унитарного представления T ручной группы – множество всех представлений, входящих в разложение T на неприводимые представления. *Ю. А. Неретин.*

СПЕКТР турбулентности – спектральная плотность $E(k)$ соленоидального локально однородного и локально изотропного (или, в случае изотропной турбулентности, однородного и изотропного) случайного поля скорости

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\{u_1(\boldsymbol{x},t),\,u_2(\boldsymbol{x},t),\,u_3(\boldsymbol{x},t)\}$$

развитого турбулентного течения несжимаемой жидкости (трехмерный С. турбулентности) или же спектральная плотность $E_1(k)$ однородного (и инвариантного относительно отражений) случайного поля $u_1(x_1,x_2,x_3,t)$ (где u_1 – компонента вектора $\boldsymbol{u}$ в направлении оси x_1) на прямой $x_2=\text{const}$, $x_3=\text{const}$ (одномерный С. турбулентности). В случае изотропной турбулентности трехмерный С. турбулентности $E(k)$ связан с корреляционным тензором турбулентности

$$B_{jl}(\boldsymbol{r},t)=Eu_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)u_l(\boldsymbol{x},t),\ j,\ l=1,2,3,$$

соотношением

$$B_{jl}(\boldsymbol{r},t)=\int_{\mathbb{R}^3}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,\frac{E(k)}{4\pi k^2}\left(\delta_{jl}-\frac{k_jk_l}{k^2}\right)d\boldsymbol{k},\quad k=|\boldsymbol{k}|,$$

а одномерный С. турбулентности выражается через трехмерный С. турбулентности с помощью формулы Гейзенберга ([1], см. также [2])

$$E_1(k)=\int_k^\infty E(k_1)\frac{k_1^2-k^2}{k_1^3}dk_1.$$

В развитой турбулентности с очень большим числом Рейнольдса $\mathrm{Re}=UL/\nu$ (где L и U – характерные масштабы длины и скорости течения, а ν – кинематич. коэффициент вязкости) С. турбулентности $E(k)$ и $E_1(k)$ в инерционном интервале масштабов

$$L^{-1}\ll k\ll(\varepsilon/\nu^3)^{1/4}=\eta^{-1}$$

(где ε – средняя диссипация энергии турбулентности, ν – кинематич. коэффициент вязкости) удовлетворяют указанному А. М. Обуховым [3] закону пяти третей

$$E(k)=C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3},\ E_1(k)=C_1\varepsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

где C и C_1 – универсальные постоянные,

$$C_1=\frac{55C}{27\Gamma(1/3)}\approx 0{,}76C$$

по данным измерений (см. *Колмогорова – Обухова закон пяти третей, Локально изотропная турбулентность*). В интервале диссипации $k>\eta^{-1}$ С. турбулентности $E(k)$ по-видимому затухает с ростом k как $e^{-\alpha(k\eta)^2}$, где α – нек-рая постоянная (см. [2]); впрочем, в прикладных работах для значений $E(k)$ при $k\gg L^{-1}$ иногда используется и полуэмпирич. формула Пао [4]:

$$E(k)=C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}=e^{-\alpha(k\eta)^{4/3}}.$$

В качестве модели одномерного С. турбулентности $E_1(k)$ в области $k\ll\eta^{-1}$, неплохо согласующейся с данными многих измерений, часто используется формула Кармана:

$$E_1(k)=\frac{A}{[1+(kL)^2]^{5/6}},$$

где L – нек-рый масштаб длины, а $A=C_1\varepsilon^{2/3}L^{5/3}$.

Лит.: [1] Heisenberg W., «Z. Phys.», 1948, Bd 124, S. 628–57; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967; [3] Обухов А. М., «Известия АН СССР. Сер. географическая и геофизическая», 1941, № 5, с. 453–66; [4] Rao Y.-H., «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 1063–75; [5] Karman T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1948, v. 34, p. 530–39.
А. М. Яглом.

СПЕКТР элемента *банаховой алгебры* – совокупность чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $a - \lambda e$ необратим (алгебра предполагается комплексной, a – данный элемент, e – единица алгебры). С.– непустое компактное множество (теорема Гельфанда – Мазура). В случае коммутативной алгебры С. совпадает с множеством значений на этом элементе всех характеров алгебры.

На понятии С. основывается построение функционального исчисления от элементов банаховой алгебры: естественное исчисление многочленов от элемента a банаховой алгебры A продолжается до непрерывного гомоморфизма кольца ростков голоморфных в окрестности спектра $\sigma(a)$ функций в A. Необходимость рассматривать функции от нескольких переменных приводит к понятию С. системы элементов банаховой алгебры. Если A коммутативна, то, по определению, С. системы $\{a_i\}_{i=1}^n$ ее элементов – это множество $\sigma(\{a_i\}) \subset \mathbb{C}^n$ всех наборов вида $\{\varphi(a_i)\}_{i=1}^n$, где φ – *характер* алгебры A. В общем случае определяют левый и правый С. системы $\{a_i\}_{i=1}^n$, включая в них те наборы $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, для к-рых система $\{a_i - \lambda_i e\}$ содержится в нетривиальном левом (правом) идеале алгебры; С. системы элементов называется объединение левого и правого С. *В. С. Шульман.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ – см. *Спектральная плотность.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА $E(\cdot)$ на измеримом пространстве (Ω, Σ) – отображение σ-алгебры множеств Σ в проекторы в банаховом пространстве X со свойствами (далее $\Delta, \Delta_k \in \Sigma$):

1) $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2)$,

2) $E(\Delta_1) + E(\Delta_2) - E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cup \Delta_2)$,

3) $E(\Omega) = I$,

4) $E(\Omega \setminus \Delta) = I - E(\Delta)$ (таким образом, $\{E(\Delta),\ \Delta \in \Sigma\}$ – булева алгебра),

5) при всех $x \in X$ и $y \in \Gamma$, где Γ – плотное в X^* линейное подпространство, $\langle E(\cdot)x, y\rangle$ счетно аддитивна (см. [1]–[4], а также *Спектральный оператор*).

Обычно Ω – локально компактное хаусдорфово топологич. пространство M с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ борелевских множеств. Носитель С.м.– дополнение наибольшего открытого Δ с $E(\Delta) = 0$. Спектральное разложение нормальных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, то есть представление их в виде интеграла по С. м. (см. *Спектральная теорема*), вовлекает (ортогональные) С. м. так, что $M = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, $E(\Delta) = E(\Delta)^* = E(\Delta)^2$ – ортогональные проекторы и $E(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k)$ для непересекающихся борелевских Δ_k (сходимость в сильной топологии, совпадающей на положительных непрерывных операторах $\mathcal{B}(H)$ со слабой топологией операторов). При этом $(x, E(\cdot)x)$, $x \in H$,– конечные регулярные меры на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Ортогональные С. м. на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, взаимно однозначно соответствующие самосопряженным операторам в H, ставятся во взаимно однозначное соответствие (ортогональным) *разложениям единицы* $\{E_\lambda\}$ (спектральным семействам, спектральным функциям) в H, если положить

$$E_\lambda = E((-\infty, \lambda)),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$E_\lambda = E_\lambda^* = E_\lambda^2,\ E_\mu \geqslant E_\lambda,$$

при $\mu \geqslant \lambda$;

$$s\text{-}\lim_{\mu \to \lambda + 0} E_\mu = E_\lambda$$

и

$$s\text{-}\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0, \quad s\text{-}\lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = I,$$

а при $\widetilde{E}_\lambda = E((-\infty, \lambda))$ семейство $\{\widetilde{E}_\lambda\}$ непрерывно слева. Обобщенное спектральное семейство $\{F_\lambda\} \subset \mathcal{B}(H)_+$ с теми же свойствами, кроме $F_\lambda = F_\lambda^2$ взаимно однозначно соответствует С. м. $F(\cdot)$ на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ со значениями в $\mathcal{B}(H)_+$. Такие непроекционнозначные С. м. используются для спектрального разложения симметрич. операторов (см. также *Наймарка теорема*) и применяются в ряде математич. моделей квантовых систем (см. [7], [8]).

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2. Спектральная теория, М., 1966; то же, ч. 3 – Спектральные операторы, М., 1974; [2] Dowson H. R., Spectral theory of linear operators, L.– [a. o.], 1978; [3] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [4] Лянце В. Э., «Математич. сб.», 1963, т. 61, с. 80–120; [5] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [6] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [7] Холево А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980; [8] Davies E. B., Quantum theory of open systems, L.–[a. o.], 1976.
А. В. Булинский.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ, спектральная интенсивность, в статистической физике – коэффициенты разложения временных *корреляционных функций* в интеграл Фурье. Для операторов A и B квантовомеханич. системы с гамильтонианом H, химич. потенциалом μ и оператором числа частиц N величина С. п. равна

$$I_{BA}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle B(t)A(t')\rangle \exp\{-i\omega(t-t')\}\, d(t-t'),$$

где $\langle B(t)A(t')\rangle = \mathrm{Sp}\,[\rho B(t)A(t')]$ – зависящая лишь от $(t-t')$ равновесная временна́я корреляционная функция двух операторов в *Гейзенберга представлении*

$$B(t) = \exp(i\mathcal{H}t/\hbar)\, B \exp(-i\mathcal{H}t/\hbar),$$

где $\mathcal{H} = H - \mu N$, $\rho = Z_{\exp}\{-(H-\mu N)/kT\}$ – статистич. оператор для большого *канонич. Гиббса распределения*, $Z = \mathrm{Sp}\exp\{-\mathcal{H}/kT\}$, Sp обозначает суммирование диагональных матричных элементов оператора. С. п. можно получить из спектральных представлений *Грина функции*, что затем позволяет вычислить временные корреляционные функции. В том случае, когда A и B – эрмитово сопряженные операторы ($B = A^+$), величина $I_{A^+A} \geqslant 0$. Перестановочность операторов под знаком Sp определяет условие Кубо – Мартина – Швингера для С.п.:

$$I_{AB}(\omega) = I_{BA}(-\omega)\exp(-\hbar\omega/kT).$$

В более явной форме С.п. можно представить в виде суммы по всем собственным состояниям оператора $\mathcal{H}$ (m и n – квантовые числа):

$$I_{BA}(\omega) = 2\pi \sum_{m,n} B_{mn}A_{nm}\exp(-\mathscr{E}_m/kT)\,\delta(\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n - \hbar\omega).$$

Здесь $\mathscr{E}_m$ и $\mathscr{E}_n$ – собственные значения оператора $\mathcal{H}$, B_{mn} и A_{nm} – матричные элементы операторов A и B по системе собственных функций $\mathcal{H}$, $\delta(\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n - \hbar\omega)$ – дельта-функция. Для систем, изучаемых в статистич. физике, спектр $\mathscr{E}_m$ практически непрерывен из-за больших размеров системы в *термодинамическом пределе*, поэтому суммированию по m, n соответствует интегрирование по плотности состояний. В силу этого С. п. проявляет σ-образный характер лишь для систем с незатухающими элементарными возбуждениями (напр., для идеального газа квазичастиц).

В случае классич. статистич. механики A и B – соответствующие операторам динамич. переменные, а операция Sp переходит в интегрирование по всем координатам и импульсам частиц и суммирование по числу частиц.

С. п. может быть вычислена точно лишь для простейших модельных систем, однако при ее приближенном нахождении для сложных систем должны выполняться нек-рые точные интегральные соотношения – так наз. правила сумм, к-рые служат критерием правильности выполненных аппроксимаций. *Д. Н. Зубарев.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ стационарной *случайной функции* $\{\xi_t,\ t\in T\}$ — *дисперсия* случайной амплитуды той или иной гармоники, входящей в спектральное (гармоническое) разложение ξ_t. Для более точного определения С. п. рассмотрим случаи, когда случайная функция представляет собой: а) стационарную случайную последовательность (T — множество целых чисел), б) *стационарный случайный процесс* ($T=\mathbb{R}^1$), в) стационарное *случайное поле* ($T=\mathbb{R}^\nu$, $\nu>1$). Во всех случаях функция $\{\xi_t,\ t\in T\}$ при довольно общих условиях допускает следующее разложение на гармоники (спектральное представление):

$$\xi_t=\int_\Lambda \exp\{i(t,\lambda)\}\,Z(d\lambda), \tag{1}$$

где $\Lambda=(-\pi,\ \pi)\subset\mathbb{R}^1$ — для случайной последовательности, $\Lambda=\mathbb{R}^1$ — для случайного процесса и $\Lambda=\mathbb{R}^\nu$ — для случайного поля; $Z(d\lambda)$ — случайная мера (вообще говоря, комплекснозначная), определенная на подмножествах из Λ, и ее значения на непересекающихся множествах не коррелированы:

$$\langle Z(A)\bar{Z}(B)\rangle=0,\ A,\ B\subseteq\Lambda;\ A\cap B=0; \tag{2}$$

в формуле (1)

$$(t,\ \lambda)=t\lambda$$

для случаев а) и б) и

$$(t,\lambda)=\sum_{i=2}^{\nu} t^{(i)}\lambda^{(i)}$$

для случая в). Из представления (1) и соотношения (2) вытекает, что *корреляция* $D(t_1,\ t_2)$ значений ξ_t в двух точках $t_1,\ t_2\in T$ равна:

$$D(t_1,t_2)\equiv\left\langle\left(\xi_{t_1}-\left\langle\xi_{t_1}\right\rangle\right)\left(\xi_{t_2}-\left\langle\xi_{t_2}\right\rangle\right)\right\rangle=$$

$$=\int_\Lambda \exp\{i[\lambda,\ (t_1-t_2)]\}\,p(\lambda)\,d\lambda, \tag{3}$$

где функция $p(\lambda)\geqslant 0$, определяемая соотношением

$$\langle|Z(d\lambda)-\langle Z(d\lambda)\rangle|^2\rangle=p(\lambda)\,d\lambda+O(d\lambda),$$

называется спектральной плотностью случайной функции ξ_t. Из формулы (3) следует, что

$$p(\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^\nu}\int_{\mathbb{R}^\nu}\exp\{-i(t,\lambda)\}\,D(t,0)\,dt \tag{4}$$

для случайного процесса ($\nu=1$) или случайного поля ($\nu>1$) и

$$p(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\exp\{-it\lambda\}\,D(t,0) \tag{5}$$

для случайной последовательности.

Заметим, что формулы (4) и (5) дают способ непосредственного нахождения С. п. $p(\lambda)$, не использующего разложение (1).

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

Р. А. Минлос.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве — теорема о спектральном разложении и эквивалентные ей утверждения, которые часто называют формулировками С. т.

Пусть A — вообще говоря, неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $\mathcal{D}(A)$. Тогда существует и единственна самосопряженная ($\Leftrightarrow$ ортогональная) *спектральная мера* $E(\cdot)$ в H, определенная на борелевских множествах в $\mathbb{R}$ и обращающаяся в нуль вне спектра $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$, такая, что

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda E(d\lambda)=\int_{\sigma(A)}\lambda E(d\lambda).$$

Эта формулировка С. т. в терминах спектральной меры означает, что

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{D}(A)&=\left\{x\in H:\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(x,\,E(d\lambda)x)<\infty\right\},\\ (Ax,y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(E(d\lambda)x,\,y)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

для $x\in\mathcal{D}(A)$, $y\in H$. Формулы (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между ортогональными спектральными мерами и самосопряженными операторами в H. Как всякий нормальный оператор, $A=A^*$ не имеет остаточного спектра, точечный спектр:

$$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{R}:E(\{\lambda\})\neq 0\},$$

непрерывный спектр:

$$\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{R}:E(\{\lambda\})=0,\ E(\nu(\lambda))\neq 0\},$$

где $\nu(\lambda)$ — любая окрестность λ в $\mathbb{R}$. Существенный спектр $\sigma_e(A)$ — это $\sigma(A)$ за исключением собственных значений оператора A конечной кратности.

Полезны и другие классификации спектра оператора A, вовлекающие меры

$$\mu_x(\cdot)=(x,\ E(\cdot)x),\ x\in H.$$

Подпространства $H_{ac}(A)=\{x\in H$: мера μ_x абсолютно непрерывна относительно меры Лебега$\}$ и $H_s(A)=\{x\in H$: мера μ_x сингулярна относительно меры Лебега$\}$ замкнуты и приводят A. Сужения $A_{ac}=A|_{H_{ac}}$ и $A_s=A|_{H_s}$ называются соответственно абсолютно непрерывной частью и сингулярной частью оператора A. Абсолютно непрерывным (соответственно сингулярным) спектром A называется $\sigma_{ac}(A):=\sigma(A_{ac})$ (соответственно $\sigma_s(A):=\sigma(A_s)$) и, возможно, $\sigma_{ac}(A)\cap\sigma_s(A)\neq\varnothing$. Для $(a,b)\subset\mathbb{R}$ можно выразить $E(\cdot)$ через резольвенту:

$$E(a,b)=\lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{a+\delta}^{b-\delta}(R(\lambda-i\varepsilon,\,A)-R(\lambda+i\varepsilon,\,A))\,d\lambda$$

в смысле сильной сходимости. С помощью интеграла по спектральной мере вводятся функции оператора A. Если f — комплекснозначная борелевская функция на $\mathbb{R}$, то оператор $f(A)$ в H определяют соотношениями

$$\mathcal{D}(f(A))=\left\{x\in H:\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2(E(d\lambda)x,x)<\infty\right\},$$

$$(f(A)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)(E(d\lambda)x,\,y)$$

для $x\in\mathcal{D}(f(A))$, $y\in H$. Оператор $f(A)$ нормален, он ограничен тогда и только тогда, когда f в существенном ограничена относительно меры $E(\cdot)$ (то есть относительно любой меры $\mu_x(\cdot)=(x,\ E(\cdot)x)$, $x\in H$), что в сепарабельном H равносильно существенной ограниченности относительно нек-рой одной μ_{x_0} на $(\mathbb{R},\ \mathfrak{B})$. Соответствие $f\mapsto f(A)$ (функциональное исчисление) обладает свойствами:

$$\alpha f(A)+\beta g(A)\subset(\alpha f+\beta g)(A),$$

$$f(A)g(A)\subset(fg)(A),\ f(A)^*=\bar{f}(A),$$

где $f,\ g$ — борелевские функции, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$, причем включение заменяется равенством, если $g(A)$ ограничен. Имеет место теорема об отображении спектра:

$$\sigma(f(A))=f(\sigma(A)).$$

Если $f(\lambda)=\bar{f}(\lambda)$ (вещественна), оператор

$$f(A)=f(A)^*=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,E(d\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,E_f(d\lambda),$$

где спектральная мера $E_f(\Delta)=E(f^{-1}(\Delta))$ для $\Delta\in\mathfrak{B}$ — σ-алгебры борелевских множеств. Полагая $f(\lambda)=\chi_{(-\infty,\ \mu]}(\lambda)$ (характеристич. функция интервала), получают спектральную функцию E_μ, $\mu\in\mathbb{R}$ (= разложение единицы) для A, при $f(\lambda)=1/(\mu-\lambda)$, $\mu\notin\sigma(A)$ получают резольвенту $R(\mu,\,A)$, при $f(\lambda)=e^{it\lambda}$, $t\in\mathbb{R}$, — унитарные операторы $\exp\{itA\}$. Для функций, голоморфных в окрестности $\sigma(A)$, для к-рых можно

вычислить контурный интеграл Данфорда

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,R(z,A)\,dz,$$

оба способа задания $f(A)$ совпадают.

Существование функционального исчисления равносильно наличию спектрального представления для A. Свойство $x\in\mathcal{D}(f(A))$ равносильно $f\in L^2(\mathbb{R},\mu_x)$. Подпространство $H_x=\{f(A)x, f\in L^2(\mathbb{R},\mu_x)\}$ замкнуто и приводит A. Отображение $U_x: f(A)x\mapsto f$ унитарно, то есть задает изометрич. изоморфизм, $H_x\simeq L^2(\mathbb{R},\mu_x)$. Для сужения $A_x=A|_{H_x}$ выполняется $(U_xA_xU_x^{-1}f)(\lambda)=(\lambda)f(\lambda)$. Для всякого $A=A^*$ существует такое семейство $\{x_j\}_{j\in J}\subset H$, что $H_{x_j}\perp H_{x_k}$, $j\neq k$, и $H=\sum_{j\in J}^{\infty}\oplus H_{x_j}$, поэтому существует унитарный оператор U, отображающий H на прямую сумму пространств $L^2(\mathbb{R},\mu_{x_j})$, $j\in J$, так, что

$$x\in\mathcal{D}(A)\mapsto Ux=\{f_j\}_{j\in J},\ f_j\in L_2(\mathbb{R},\mu_{x_j})$$

и

$$(UAx)(\lambda)=\{\lambda f_j(\lambda)\}_{j\in J}.$$

Если H сепарабельно, семейство $\{x_j\}$ не более, чем счетно, и можно выбрать такую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$H=\sum_{n=1}^{\infty}\oplus H_{x_n}\simeq\sum_{n=1}^{\infty}L_2(\mathbb{R},\mu_{x_n})$$

и мера $\mu_{x_{n+1}}\prec\mu_{x_n}$ (абсолютно непрерывна относительно μ_{x_n}) при каждом n. Для любой другой последовательности $\{y_n\}$ с теми же свойствами относительно A оказывается $\mu_{x_n}\prec\mu_{y_n}\prec\mu_{x_n}$ (меры эквивалентны) при всех n. Если же $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ соответствует $A=A^*$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сопоставлена $B=B^*$ в H, то A и B унитарно эквивалентны ($A=V^*BV$ с унитарным V) тогда и только тогда, когда μ_{x_n} и μ_{y_n} эквивалентны при всех n. Набор $\{\mu_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ определяет спектральный тип оператора A. Если $\{x_n\}$ сводится к одному вектору x, то есть $H\simeq L_2(\mathbb{R},\mu_x)$, говорят, что оператор A имеет простой спектр, а x – циклический вектор для A.

Широко употребима возникшая позднее формулировка С. т. об унитарной эквивалентности $A=A^*$ оператору умножения в L^2. Точнее, если H сепарабельно, то существуют такое пространство (M,Σ,μ) с конечной мерой μ, вещественная функция a, определенная μ-почти всюду на M, и унитарный оператор $U: H\to L^2(M,\mu)$, что $x\in\mathcal{D}(A)$ тогда и только тогда, когда $aUx\in L^2(M,\mu)$ и если $f\in U\mathcal{D}(A)$, то $(UAU^{-1}f)(\lambda)=a(\lambda)f(\lambda)$. Такая реализация H и A иногда называется спектральным представлением. Функцию $f(A)$ удобно определить как оператор в H, унитарно эквивалентный оператору умножения в $L^2(M,\mu)$ на функцию $f\circ a$. В сепарабельном пространстве H операторы вида $f(A)$ составляют $\{A\}''$, то есть в точности те, к-рые коммутируют с коммутантом $\{A\}'$. Мера μ определена не единственным образом, унитарным инвариантом A является набор множеств μ-меры нуль. Для оператора A с простым спектром можно выбрать (M,Σ,μ) как $(\mathbb{R},\mathfrak{B},\mu_x)$, где x – циклич. вектор, так что $a(\lambda)=\lambda$.

Аналогичные результаты справедливы для любого нормального оператора T в H. Возникающая спектральная мера $E(\cdot)$ с носителем $\sigma(T)$ определена на борелевских множествах в $\mathbb{C}$, а $T=\int_{\mathbb{C}} zE(dz)$ унитарно эквивалентен оператору умножения на комплекснозначную функцию в нек-ром $L^2(M,\mu)\simeq H$.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [3] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., т. 2, Харьков, 1978; [4] Рисс Ф., Секельфальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [5] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [6] Halmos P. R., Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, 2 ed., N.Y., 1972; [7] Nelson E., Topics in dynamics, v. 1, Princeton (N.J.), 1969. *А. В. Булинский.*

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ матричных элементов *рассеяния матрицы* S или *Грина функций* в квантовой теории поля – интегральные представления типа *Коши интеграла*. С. п. играют большую роль в аксиоматич. подходе к квантовой теории поля (см. *Аксиоматическая квантовая теория поля*), в рамках к-рого построение матрицы рассеяния осуществляется без конкретных предположений о взаимодействии, присущих гамильтонову формализму. Особенно важны С. п., к-рые удается получить на основе только самых общих положений квантовой теории поля, таких, как требования микропричинности, унитарности, релятивистской инвариантности и предположения о спектре масс. Так, напр., для функции Грина $G(x-y)$ из уравнения скалярного поля $\varphi(x)$ массы m:

$$G(x-y)=i\langle 0|T(\varphi(x)S\varphi(y))|0\rangle=$$

$$=(2\pi)^{-4}\int\exp[ip(x-y)]\tilde{G}(p)\,d^4p \qquad (1)$$

(T – символ хронологич. упорядочения, p – 4-импульс поля), на этой основе установлено важное спектральное представление Лемана – Келлена:

$$\tilde{G}(p)=(m^2-p^2-i\varepsilon)^{-1}+\int_{4m^2}^{\infty}I(z)\,dz/(z-p^2-i\varepsilon). \qquad (2)$$

Здесь $I(z)$ – неотрицательная функция, описывающая распределение масс возможных состояний поля,– спектральная плотность масс, к-рая выражается через матричные элементы S-матрицы.

В общем случае вся информация о взаимодействии частиц содержится в матричных элементах S-матрицы, относящихся к переходу из состояния i невзаимодействующих начальных частиц в состояние f невзаимодействующих конечных частиц с 4-импульсами $p_1,\dots,p_i$ и $p_{i+1},\dots,p_f$. Приняв во внимание закон сохранения 4-импульса (и другие следствия релятивистской инвариантности), такой матричный элемент можно записать в виде:

$$\langle f|S|i\rangle=\delta_{fi}-2\pi i\delta^4\Big(\sum_{(i)}p_k-\sum_{(f)}p_k\Big)\prod_{(i,f)}(2\varepsilon_k)^{-1/2}T_{fi},$$

где амплитуда T_{fi} перехода $i\to f$ – скалярная функция 4-импульсов p_k и поляризаций λ_k начальных и конечных частиц. Зависимость T_{fi} от поляризаций можно полностью выделить, представив T_{fi} как сумму членов вида:

$$\Lambda_{fi}(p_k,\lambda_k)M_{fi}(p_k),$$

причем Λ_{fi} – определенные матричные элементы лоренц-инвариантных комбинаций, составленных из спиновых операторов. С. п. строятся для скалярных функций M_{fi}, называемых инвариантными амплитудами перехода $i\to f$. Зависимость M_{fi} от своих аргументов носит динамич. характер, и ее существенные черты отражаются в аналитич. свойствах M_{fi}. В частном случае, когда и в начальном, и в конечном состоянии имеется по одной частице, $M_{fi}\equiv M_{11}$ связана с функцией Грина в (2) соотношениями

$$\tilde{G}(p)=(m^2-p^2-i\varepsilon)^{-1}+(m^2-p^2-i\varepsilon)^{-2}M_{11}(p^2),$$

$$I(p^2)=(p^2-m^2)^{-2}\operatorname{Im}M_{11}(p^2).$$

Ряд существенных сведений об аналитич. структуре M_{fi} может быть получен из общих положений квантовой теории поля, не зависящих от конкретной модели взаимодействия.

Прежде всего использование микропричинности и нек-рых предположений о свойствах спектра масс приводит к утверждению, что всякая инвариантная амплитуда является нек-рым граничным значением аналитич. функции, зависящей только от лоренц-инвариантных комбинаций 4-импульсов p_k. Это граничное значение получается, когда квадрат полной энергии

$$s=\left(\sum_{(i)}p_k\right)^2=\left(\sum_{(f)}p_k\right)^2$$

стремится к действительной оси сверху из области аналитичности, где он комплексен и имеет положительную мнимую часть: $s=\mathrm{Re}\,s+i\varepsilon$, $\varepsilon\to+0$. Инвариантные амплитуды обладают, кроме того, свойством перекрестной симметрии. Оно состоит в том, что амплитуды различных каналов процесса взаимодействия $(i+f)$ частиц, то есть амплитуды, описывающие переходы с различным распределением данных $(i+f)$ частиц на начальные и конечные, являются различными граничными значениями одной общей аналитич. функции F. Амплитуда M_α каждого канала (α) получается из F, когда один из аргументов F – квадрат полной энергии в данном канале, s_α устремлен к действительной оси сверху, а остальные аргументы принимают значения в физич. области канала.

Условие унитарности S-матрицы позволяет установить, где $\mathrm{Im}\,F$ заведомо отлична от нуля. В каждом канале (α) инвариантная амплитуда M_α как функция s_α имеет полюсы, соответствующие возможным одночастичным состояниям, и («физический») разрез, соответствующий многочастичным состояниям в этом канале. Характеристики этих особенностей – вычеты в полюсах и скачки на физич. разрезах – могут быть определены через матричные элементы S-матрицы с помощью той же унитарности. Напр., так наз. абсорбционная часть амплитуды (то есть скачок амплитуды на физич. разрезе) равна

$$\Delta M_{fi}\equiv M_{fi}(s+i\varepsilon)-M_{fi}(s-i\varepsilon)=$$
$$=\sum_n\int d\Gamma_n M_{fn}(s+i\varepsilon)M^*_{in}(s-i\varepsilon),$$

где в правой части проводится суммирование по всем возможным промежуточным состояниям (n) и интегрирование по фазовому объему в пространстве импульсов каждого состояния ($d\Gamma_n$ – элемент фазового объема). Если иных особенностей, кроме требуемых унитарностью, у M_{fi} нет, интеграл Коши в комплексной плоскости s_α представляет собой С. п. для M_{fi} (s_α). Такая простая структура особенностей и составляет отличие С. п. от более общих *дисперсионных соотношений*. Как показывают результаты исследований, амплитуды переходов с $i+f\geqslant 3$, в частности примеры из теории возмущений, дисперсионные соотношения для амплитуд этих переходов могут иметь так наз. аномальные разрезы, скачки на к-рых не определяются по условию унитарности. Так, для амплитуды упругого рассеяния M_{22} на основе общих положений теории удалось доказать лишь С. п. по квадрату полной энергии s при существенных ограничениях на остальные аргументы M_{22}, квадраты масс частиц и инвариантную передачу импульса t. Однако ввиду их ясного физич. смысла С. Мандельстам (S. Mandelstam) предложил принять без доказательства двойные С. п. по s и t для M_{22} хотя бы как основу простой теоретич. модели процесса взаимодействия. Если для описания перехода частиц 1, 2 в частицы 3, 4 ввести инвариантные переменные

$$s=(p_1+p_2)^2,\ t=(p_1-p_3)^2,\ u=(p_1-p_4)^2,$$

причем s, t, u связаны соотношением

$$s+t+u=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2$$

и являются квадратами полной энергии в каналах, где в качестве начальных выступают соответственно частицы 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, то так наз. **двойное спектральное представление Мандельстама** приобретает вид:

$$M_{22}=F(s,u,t)=\frac{1}{\pi^2}\int_{s_0}^{\infty}ds'\int_{t_0}^{\infty}dt'\frac{\rho_1(s',t')}{(s'-s-i\varepsilon)(t'-t-i\varepsilon)}+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{t_0}^{\infty}dt'\int_{u_0}^{\infty}du'\frac{\rho_2(t',u')}{(t'-t-i\varepsilon)(u'-u-i\varepsilon)}+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{u_0}^{\infty}du'\int_{s_0}^{\infty}ds'\frac{\rho_3(u',s')}{(u'-u-i\varepsilon)(s'-s-i\varepsilon)}.$$

Интегрирование здесь ведется от физич. порогов – квадрата суммы масс низшего промежуточного состояния в соответствующих каналах. Такое С. п. обнаруживает перекрестную симметрию в самом виде записи. Для описания амплитуд всех трех каналов применяется одна функция $F(s, t, u)$, в частности одни и те же определяющие ее спектральные плотности ρ_k. Переход, напр., от амплитуды s-канала к амплитуде t-канала осуществляется заменой s на t, а t на s. Это соответствует тому, что частица 2 заменена на античастицу 3, а частица 3 на античастицу 2 в самом процессе. С. п. Мандельстама послужило основой многих исследований процессов сильных взаимодействий.

Лит.: [1] Новый метод в теории сильных взаимодействий. Сб. статей, пер. с англ., М., 1960; [2] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [3] Бартон Г., Дисперсионные методы в теории поля, пер. с англ., М., 1968. *В. П. Павлов.*

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ оператора – см. *Линейный оператор.*

СПЕКТРАЛЬНОСТИ АКСИОМА – см. *Аксиоматическая квантовая теория поля.*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР – см. *Нелинейное уравнение Шредингера.*

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ – *Относительности теория.*

СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА – см. *Лоренца преобразование.*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ – классы функций, возникающих во многих теоретических и прикладных задачах, обычно при решении дифференциальных уравнений. В физике чаще всего встречаются *гамма-функция, ортогональные многочлены, сферические функции, цилиндрические функции, гипергеометрические функции, вырожденные гипергеометрические функции, эллиптические функции*, интегральный синус, интегральный косинус, интегральная показательная функция, интегральный логарифм, интеграл вероятности (см. *Интегральные функции*) и др. Все перечисленные функции, за исключением гамма-функции и эллиптич. функций, являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$u''+\frac{\tilde\tau(z)}{\sigma(z)}u'+\frac{\tilde\sigma(z)}{\sigma^2(z)}u=0, \qquad (1)$$

где $\sigma(z)$, $\tilde\sigma(z)$ – многочлены, степень к-рых не выше 2, $\tilde\tau(z)$ – многочлен, степень к-рого не выше 1, z – комплексное переменное.

Напр., **уравнение Бесселя**

$$z^2u''+zu'+(z^2-\nu^2)u=0$$

является частным случаем уравнения (1) при $\sigma(z)=z$, $\tilde\tau(z)=1$, $\tilde\sigma(z)=z^2-\nu^2$. С помощью замены $u=\varphi(z)y$ и выбора функции $\varphi(z)$ уравнение (1) можно привести к виду:

$$\sigma(z)y''+\tau(z)y'+\lambda y=0 \qquad (2)$$

[$\tau(z)$ – многочлен, степень к-рого не выше 1, λ – постоянная]. При

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'-n(n-1)\sigma''/2, \qquad (3)$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots$$

уравнение (2) имеет полиномиальные решения, определяемые формулой Родрига:

$$y = y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n}[\sigma^n(z)\rho(z)] \qquad (4)$$

[B_n – нормировочная постоянная, n – степень многочлена, функция $\rho(z)$ удовлетворяет уравнению $(\sigma\rho)' = \tau\rho$], к-рые после линейной замены переменной переходят в классич. ортогональные многочлены.

Уравнение (2) в зависимости от степени многочлена $\sigma(z)$ можно привести к следующим канонич. видам:

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]y' - \alpha\beta y = 0$$

(гипергеометрическое уравнение Гаусса),

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0$$

(вырожденное гипергеометрическое уравнение),

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0$$

(уравнение Эрмита).

Обобщая формулу Родрига (4), можно получить в явном виде частные решения уравнения (2) при произвольных λ в виде интегрального представления:

$$y = y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds, \qquad (5)$$

где величина ν связана с λ соотношением, аналогичным соотношению (3):

$$\lambda + \nu\tau' + \nu(\nu-1)\sigma''/2 = 0,$$

функция $\rho(s)$ – решение уравнения

$$[\sigma(s)\rho(s)]' = \tau(s)\rho(s),$$

контур C – отрезок прямой (s_1, s_2), на концах к-рого выполнено условие:

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\right|_{s=s_1,\, s_2} = 0.$$

Контуры такого вида можно выбрать лишь при нек-рых ограничениях, наложенных на коэффициенты уравнения (2). Распространение результатов, полученных при таких ограничениях, на более общие случаи можно получить с помощью аналитич. продолжения решений. Из интегрального представления (5) легко вывести все свойства перечисленных С. ф.: разложения в степенные ряды, различные функциональные соотношения, асимптотич. разложения и др.

С. ф. возникают обычно при разделении переменных и отыскании собственных функций дифференциальных операторов в нек-рых системах координат. Такие операторы часто инвариантны относительно какой-либо группы преобразований, к-рые переводят собственные функции оператора в собственные функции, отвечающие тому же собственному значению. Таким образом, каждому элементу группы ставится в соответствие линейное преобразование в пространстве собственных функций, называемое *представлением* группы. Поэтому существует связь между С. ф. и матричными элементами представлений групп. Используя свойства представлений, можно получить различные формулы для С. ф., напр. формулы сложения, интегральные представления, рекуррентные формулы.

Так, представления группы движения евклидовой плоскости связаны с цилиндрич. функциями, представления группы вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка – с гипергеометрич. функциями. Особенно часто в физике используют представления группы вращений трехмерного пространства.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., т. 1–2, М., 1973–74; [2] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, 2 изд., М., 1991; [3] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, 2 изд., М., 1984; [4] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979.

А. Ф. Никифоров.

СПИН – собственный момент количества движения элементарных частиц, имеющий квантовую природу и не связанный с перемещением частицы как целого. Спином называется также собственный момент количества движения атомного ядра или атома; в этом случае С. определяется как векторная сумма (вычисленная по правилам сложения моментов в квантовой механике) С. элементарных частиц, образующих систему, и орбитальных моментов этих частиц, обусловленных их движением внутри системы.

С. измеряется в единицах $\hbar$ и равен $J\hbar$, где J – характерное для каждого типа частиц целое (в том числе нулевое) или полуцелое положительное число – так наз. спиновое *квантовое число*, к-рое обычно называют просто спином; в связи с этим говорят о целом или полуцелом С. частицы. Полуцелым С. обладают, напр., электроны, протоны, нейтрино и их античастицы. С. π- и K-мезонов равен нулю, С. фотона равен 1.

Проекция С. на любое фиксированное направление z в пространстве может принимать значения $-J, -J+1, \ldots, +J$. Таким образом, частица со С. J может находиться в $2J+1$ спиновых состояниях (при $J=1/2$ – в двух состояниях), что эквивалентно наличию у нее дополнительной внутренней степени свободы. Квадрат вектора С., согласно квантовой механике, равен $\hbar J(J+1)$. Со С. частицы, обладающей ненулевой массой покоя, связан спиновый магнитный момент $\mu = \gamma J\hbar$; коэффициент γ называется магнито-механическим (или гиромагнитным) отношением.

Концепция С. введена в физику в 1925 Дж. Уленбеком (G. Uhlenbeck) и С. Гаудсмитом (S. Goudsmit), предложившими (на основе анализа спектроскопич. данных), что электрон можно рассматривать как «вращающийся волчок» с собственным механич. моментом 1/2 и собственным (спиновым) магнитным моментом, равным магнетону Бора $\mu_Б = \hbar e/2mc$ (e и m – заряд и масса электрона). Таким образом, для С. электрона гиромагнитное отношение $\gamma = e/mc$, то есть с точки зрения классич. электродинамики является аномальным: для орбитального движения электрона и для любого движения классич. системы заряженных частиц с данным отношением e/m оно в 2 раза меньше ($e/2mc$).

Учет С. электрона позволил В. Паули (W. Pauli) сформулировать принцип запрета, утверждавший, что в произвольной физич. системе не может быть двух электронов, находящихся в одном и том же квантовом состоянии (см. *Паули принцип*). Наличие у электрона С., равного 1/2, объяснило мультиплетную структуру атомных спектров (тонкую структуру), особенности расщепления спектральных линий в магнитных полях, порядок заполнения электронных оболочек в многоэлектронных атомах (а, следовательно, и закономерности периодич. системы элементов), ферромагнетизм и другие явления.

Существование у протона С., равного 1/2, постулировано на основе опытных данных Д. Деннисоном (D. Dennison, 1927). Экспериментальная проверка этой гипотезы привела к открытию сверхтонкой структуры уровней энергии атома.

С. частиц однозначно связан с характером статистики, к-рой они подчиняются. Как показал В. Паули (1940), из квантовой теории поля следует, что все частицы с целым С. подчиняются *Бозе – Эйнштейна статистике* (являются бозонами), с полуцелым С. – *Ферми – Дирака статистике* (фермионы). Для фермионов (напр., электронов) справедлив принцип Паули, для бозонов он не имеет силы.

В математич. аппарат нерелятивистской квантовой механики С. был введен В. Паули; при этом описание С. носило феноменологич. характер. Наличие у электрона С. и спинового магнитного момента непосредственно вытекает из релятивистского *Дирака уравнения* (к-рое для электрона в электромагнитном поле в пределе малых скоростей переходит в *Паули уравнение* для нерелятивистской частицы со С. 1/2).

Величина С. определяет трансформационные свойства полей, описывающих эти частицы. При преобразованиях Лоренца поле, соответствующее частице со С. $J=0$, преоб-

разуется как скаляр (или псевдоскаляр); поле, описывающее частицу с $J=1/2$,– как спинор, с $J=1$ – как вектор (или псевдовектор) и т. д. *О. И. Завьялов.*

СПИНОВАЯ МАТРИЦА плотности – см. *Смешанное состояние.*

СПИНОВАЯ МАТРИЦА рассеяния – см. *Рассеяния теория.*

СПИНОВОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ УСЛОВИЕ – см. *Дирака уравнение*; асимптотические решения.

СПИНОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД – см. *Ньюмена – Пенроуза формализм.*

СПИНОР – элемент пространства спинорного *представления* группы вращений. *Вращений группа* $SO(n)$ при $n\geqslant 3$ двусвязна. Ее односвязная накрывающая называется спинорной группой $\mathrm{Spin}(n)$. Каждое линейное представление $SO(n)$ порождает представление $\mathrm{Spin}(n)$; однако часть линейных представлений $\mathrm{Spin}(n)$ порождается двузначными (проективными с мультипликатором ± 1) представлениями $SO(n)$ – ее спинорными представлениями. Простейшее спинорное представление имеет размерность $2^{[n/2]}$ (где [...] – символ целой части числа) и реализуется в *Клиффорда алгебре* K_n степени $2^{[n/2]}$. Оно неприводимо для нечетных n и разлагается в сумму двух неэквивалентных представлений одинаковой размерности для четных n.

Существуют два типа спиноров: С., связанные с группой $SO(n)$ – группой вращений n-мерного евклидова пространства, и С., связанные с группой $SO(p, q)(p+q=n)$ – группой «вращений» псевдоевклидова пространства $M^n_{p,q}$, сохраняющих квадратичную форму:

$$x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_n^2.$$

В физике наиболее употребительны С. в пространстве $\mathbb{R}^3$ [С. группы $SO(3)$] (нерелятивистская квантовая механика) и в пространстве Минковского $M^4_{1,3}$ (С. собственной *Лоренца группы* в релятивистской теории).

Спинор в $\mathbb{R}^3$. Простейшее спинорное представление (спинорное представление ранга 1) двумерно [так как $\mathrm{Spin}(1)\sim SU(2)$]. С. ранга 1 характеризуется парой (комплексных) чисел ξ^1, ξ^2. При повороте на угол φ вокруг оси с направляющим единичным вектором $\boldsymbol{n}=(n_1, n_2, n_3)$ С. ранга 1 преобразуется по формуле

$$\xi=\begin{Vmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{Vmatrix}\to\xi'=g(\boldsymbol{n},\varphi)\xi\in SU(2) \qquad (1)$$

с помощью матрицы

$$g(\boldsymbol{n},\varphi)=\cos(\varphi/2)+i\boldsymbol{n}\sigma\sin(\varphi/2), \qquad (2)$$

где $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, σ_j, $j=1, 2, 3$, – *Паули матрицы.* При повороте на угол 2π С. ξ переходит в $-\xi$, что свидетельствует о неопределенности знака С., то есть о двузначности представления. Выражение (2) задает представление $SO(3)$, как следует из коммутационных соотношений для матриц Паули. В этом представлении матрица $(i/2)\sigma_j$ является генератором поворота вокруг оси j.

Преобразование (1) сохраняет билинейную форму $(\xi, \eta)=\xi^1\eta^2-\xi^2\eta^1$, определенную на двумерных векторах (контравариантных) ξ и η. Это позволяет ввести в векторном пространстве таких векторов кососимметрич. «метрику»

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix}0&1\\-1&0\end{Vmatrix},\quad \alpha,\beta=0,1,$$

и ковариантные С. $\xi_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta$, преобразующиеся с помощью эрмитово сопряженной матрицы $g^+(n, \varphi)$. Тогда билинейная форма естественно интерпретируется как скалярное произведение:

$$(\xi, \eta)=\xi^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\eta^\beta=\xi^1\eta_1+\xi^2\eta_2$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

В качестве базиса в пространстве С. ранга 1 можно выбрать собственные векторы

$$\xi^+=\begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix}\ \text{и}\ \xi^-=\begin{Vmatrix}0\\1\end{Vmatrix}$$

матриц $(1/4)\sigma^2$ и $(1/2)\sigma_3$, допускающих естественную интерпретацию квадрата вектора спина и его z-проекции; собственными значениями будут $3/4=1/2(1+1/2)$ и $\pm 1/2$ соответственно. Поэтому С. ранга 1 описывают частицы со спином 1/2.

С. старших рангов строятся по аналогии с теорией *тензоров.* Контравариантным спинором ранга r называется набор 2^r (комплексных) чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, преобразующихся по закону:

$$\xi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}\to\xi'^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}=g^{\alpha_1}_{\beta_1}\ldots g^{\alpha_r}_{\beta_r}\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_r},$$

где g^α_β – элементы матрицы $g(\boldsymbol{n}, \varphi)$. В алгебре С. можно ввести операции, аналогичные операциям в тензорной алгебре: поднятие и опускание индексов, свертка и т. д. С. $\xi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}$ ранга r называется симметрическим, если его компоненты не меняются при любой перестановке индексов. В пространстве симметрич. С. реализуются все неприводимые представления группы вращений веса l, $2l=r$.

Спинор в M^4. Два простейших неприводимых (полуспинорных) представления $SO(3, 1)$ двумерны и обозначаются столбцами ξ^α и $\xi^{\dot\alpha}$ соответственно с непунктирными и с пунктирными индексами. При пространственных поворотах ξ^α преобразуются (как и С. в $\mathbb{R}^3$) с помощью матрицы (2), а при специальных *Лоренца преобразованиях* – гиперболич. поворотах на угол φ в плоскости $(x_0, \boldsymbol{n})$ – с помощью матрицы h:

$$h(\boldsymbol{n}, \varphi)=\mathrm{ch}(\varphi/2)-\boldsymbol{n}(\sigma)\,\mathrm{sh}(\varphi/2).$$

Пунктирные С., $\xi^{\dot\alpha}$, преобразуются с помощью комплексно сопряженных матриц g^* и h^* соответственно.

Кососимметрич. матрица $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$ позволяет определить компоненты пунктирных С. При пространственной инверсии

$$(x_0, \boldsymbol{x})\to(x_0, -\boldsymbol{x})$$

пунктирный и непунктирный С. переходят друг в друга:

$$\xi^\alpha\to i\xi_{\dot\alpha},\quad \xi_{\dot\alpha}\to i\xi^\alpha.$$

Включение инверсий означает переход от собственной группы Лоренца $SO(3, 1)$ к группе Лоренца $O(3, 1)$. Поэтому простейшее спинорное представление $O(3, 1)$ четырехмерно и образовано биспинором $\xi_\alpha\otimes\xi_{\dot\alpha}$ ($\otimes$ – знак тензорного произведения), обычно записываемым в виде столбца:

$$\psi=\begin{Vmatrix}\xi^\alpha\\ \xi_{\dot\alpha}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{Vmatrix}.$$

Инвариантные и ковариантные билинейные формы в пространстве биспиноров строятся с помощью *Дирака матриц* γ^μ, $\mu=0, 1, 2, 3$, $\gamma^5=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ и определения дираковского сопряжения $\bar\psi_д=\psi^+\gamma^0$ («+» означает эрмитово сопряжение). Так, формы $\bar\psi\psi$, $\bar\psi\gamma^5\psi$, $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ – есть соответственно скаляр, псевдоскаляр и 4-вектор относительно преобразований из $O(3, 1)$.

Помимо дираковского вводят майорановское сопряжение

$$\bar\psi_м=\psi^\top C$$

($^\top$ – означает транспонирование), где C – матрица зарядового сопряжения. Майорановским спинором называется С., для к-рого $\bar\psi_м$ пропорционален $\psi_д$ (множитель пропорциональности зависит от представления матриц Дирака); в частности, в майорановском представлении (где γ^μ

и $\sigma^{\mu\nu}=[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$ вещественны) компоненты майорановского С. вещественны.

Вейлевским спинором называется С., удовлетворяющий соотношению

$$\psi_{+}=(1/2)(I+\gamma^{5})\psi_{+}$$

или

$$\psi_{-}=(1/2)(I-\gamma^{5})\varphi_{-},$$

где I – единичная матрица (соответственно правый и левый С.). Число его компонент также вдвое меньше обычного; он используется в теориях с *киральной симметрией*.

В пространстве биспиноров можно задать линейное релятивистски инвариантное уравнение, описывающее частицы со спином 1/2 (спинорные частицы), с ненулевой массой – *Дирака уравнение*, с нулевой массой – *Вейля уравнение*.

С., связанные с многомерными пространствами, находят применение в теории тяготения, теории Калуцы – Клейна, теории суперструн и т. д. Многообещающие применения теории С. связаны с теорией *твисторов*.

Спинорные многообразия. Глобально спинорное поле можно задать не на любом многомерном пространстве. Существование таких пространств (спинорных многообразий) определяется топологич. инвариантами.

Первые упоминания двузначной природы группы вращений восходят к Л. Эйлеру (L. Euler) (параметризации группы вращений углами Эйлера). В работах О. Родригеса (O. Rodrigues), У. Гамильтона (W. Hamilton), А. Кэли (A. Cayley), У. Клиффорда (W. Clifford) и др. были получены важные результаты, нашедшие естественное продолжение в рамках теории С. Построение спинорных представлений в инфинитезимальной форме проведено Э. Картаном (E. Cartan, 1913). Дальнейшее развитие теории С. инициировалось открытием спина электрона (1925) и появлением уравнений П. Дирака (P. Dirac) и Г. Вейля (H. Weyl). Спинорное исчисление было построено в работах Б. Ван-дер-Вардена (B. van der Waerden) и др. Термин «С.» предложен П. Эренфестом (P. Ehrenfest, 1929).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 4 изд., М., 1989; [2] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения, М., 1958; [3] Ван дер Варден Б., Принцип запрета и спин, в кн.: Теоретическая физика 20 века, М., 1962; [4] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Релятивистская квантовая теория, ч. 1, М., 1968; [5] Дирак П., Спиноры в гильбертовом пространстве, пер. с англ., М., 1978; [6] Пенроуз Р., Риндлер В., Спиноры и пространство-время, пер. с англ., [т. 1], М., 1987; [т. 2] – Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени, пер. с англ., М., 1988; [7] Budinich P., Trautman A., The spinorial chessboard, N. Y., 1988.

М. И. Монастырский.

СПИНОРНАЯ АЛГЕБРА – см. *Клиффорда алгебра.*

СПИНОРНАЯ ГРУППА – см. *Спинор.*

СПИНОРНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА – см. *Квантовая электродинамика.*

СПИНОРНОЕ ПОЛЕ – набор физических полей, преобразующихся в каждой точке пространства-времени при пространственных поворотах системы координат по представлениям *вращения группы* с полуцелым индексом. Квантами С. п. в квантовой теории поля являются спинорные частицы.

СПИНОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – см. *Клиффорда алгебра.*

СПИРАЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – случайное течение с отличной от нуля средней спиральностью

$$\mathcal{H}\equiv\langle \boldsymbol{v}, \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\rangle,$$

где $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})$ – случайное поле скорости, а угловые скобки означают усреднение по распределению этого поля. Средняя спиральность представляет собой псевдоскаляр, изменяющий знак при отражении $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$. Поэтому С. т. не обладает отражательной симметрией.

Традиционно изучаемые турбулентные потоки (напр., сеточная турбулентность, турбулентность в пограничном слое, следе, струях, каналах и трубах) протекают в условиях, обеспечивающих отражательную симметрию их статистич. характеристик. Для создания спиральной турбулентности в лабораторных условиях можно генерировать случайный поток во вращающейся среде таким образом, чтобы нарушить эквивалентность статистич. свойств потока вдоль оси вращения и в противоположном направлении. Напр., можно быстро протаскивать сетку в направлении угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ (эксперимент Иббетсона и Триттона, см. [1]).

С. т. естественно возникает в космич. условиях (в недрах планет и звезд, в галактиках) благодаря воздействию кориолисовых сил на течение во вращающейся среде с неоднородной плотностью $\rho(\boldsymbol{r})$. Средняя спиральность оказывается пропорциональной псевдоскаляру $\boldsymbol{\Omega}\nabla\rho$. Такая турбулентность играет решающую роль в генерации среднего магнитного поля движущейся проводящей средой (см. [1]–[3]).

Спиральность локализованного возмущения потока имеет определенный топологич. смысл – она является мерой зацепления связанных вихревых линий и сохраняется в отсутствии вязкости и внешних неконсервативных сил. Простейшим примером течения со спиральностью служит система двух, сцепленных подобно звеньям цепочки для часов, вихревых колец с интенсивностями I_1 и I_2, погруженных в незавихренную жидкость. В этом примере

$$\mathcal{H}=2I_1I_2.$$

Учет средней спиральности развивает представление об энергетич. каскаде в приближении однородной и изотропной турбулентности. Пусть источник турбулентности, действующий в основном масштабе, соответствующем волновому числу k_0, сообщает течению наряду с энергией и среднюю спиральность $\mathcal{H}_0$. Величина генерируемой спиральности ограничена, так как

$$\langle \boldsymbol{v}, \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\rangle^2\leqslant\langle \boldsymbol{v}^2\rangle\langle(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})^2\rangle$$

в силу неравенства Шварца. Инжектирование $\mathcal{H}$ можно представлять себе как появление зацеплений вихревых линий потока. Зацепления выживают в невязком каскадном процессе в инерционной области спектра $k_0\ll k\ll k_i$, где k_i – вязкий обратный масштаб, но уничтожаются в меньших масштабах $k\geqslant k_i$.

Спектр средней спиральности $F(\omega, k)$, в отличие от энергетич. спектра $E(\omega, k)$, может принимать положительные и отрицательные значения. Для всех ω и k

$$|F(\omega, k)|\leqslant 2kE(\omega, k)$$

(условие реализуемости). Из соображений размерности найдено (см., напр., [1]), что в инерционной области спектра

$$F(k)=C_{\mathcal{H}}\mathcal{H}_0^{2/3}k^{-5/3}$$

– универсальная постоянная, аналогичная постоянной C, фигурирующей в *Колмогорова законе двух третей*.

Относительное воздействие спиральности на свойства потока сильнее в больших масштабах, где больше отношение $|F|/2kE$. Изучение спиральных мод (см. [4]) показывает, что их нелинейные взаимодействия слабее для мод с одинаковым знаком спиральности. Напр., если вначале моды обладали одинаковыми спиральностями, то можно ожидать, что перенос энергии к более высоким волновым числам будет заторможен и, таким образом, затянется процесс затухания турбулентности.

Лит.: [1] Моффат К. Г., Возбуждение магнитного поля в проводящей среде, пер. с англ., М., 1980; [2] Краузе Ф., Рэдлер К.-Х., Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо, пер. с англ., М., 1984; [3] Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., «Успехи физич. наук», 1985, т. 145, в. 4, с. 593–628; [4] Kraichnan B., «J. Fluid Mech.», 1973, v. 59, p. 745–52.

А. А. Рузмайкин.

СПЛЕТАЮЩЕЕ МНОГООБРАЗИЕ – *лагранжево подмногообразие* такое, что фронт осцилляций его сплетающего оператора лежит в прямом произведении двух фазовых пространств: исходного $\mathfrak{X}$ и приведенного Ω (Ω – симплектический лист на базе отображения момента). С. м. задает гомоморфизм между алгебрами подмножеств в $\Omega\times\Omega$ и в $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$, то есть фронтов осцилляций волновых пакетов над приведенным и исходным пространствами. *Ю. М. Воробьев.*

СПЛЕТАЮЩИЙ ОПЕРАТОР в квазиклассическом методе редукции – гомоморфизм U по mod $O(\hbar^2)$ из приведенной алгебры наблюдаемых в исходную:

$$\hat{H}U = U\hat{f} + O(h^2),$$

$H = A^*f$, A – отображение момента. С. о. является квазиклассич. аналогом отображения момента и задается канонич. оператором Маслова $U = (2\pi\hbar)K_{\Lambda,\sigma}$ над лагранжевым сплетающим многообразием Λ с подходящей инвариантной мерой σ (см. [1]). Другой вариант С. о. возникает в теории уравнений с операторозначным символом (см. [2]), где приведенная алгебра наблюдаемых заменяется алгеброй медленных переменных.

Лит.: [1] Карасев М. В., «Функциональный анализ и его прилож.», 1986, т. 20, в. 1, с. 21–32; [2] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965. *Ю. М. Воробьев.*

СПЛЕТЕНИЯ ЧИСЛО представлений T_1 и T_2 группы – размерность пространства *сплетающих операторов* из T_1 в T_2. *Ю. А. Неретин.*

СПЛОШНАЯ ИЗМЕНЯЕМАЯ СРЕДА – см. *Механика.*

СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ ЭФФЕКТ калибровочной симметрии – см. *Глэшоу – Вайнберга – Салама модель.*

СПОНТАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, спонтанное испускание,– процесс самопроизвольного испускания электромагнитного излучения атомами и другими квантовыми системами, находящимися на возбужденных уровнях энергии (см. *Квантовый переход*). В отличие от *вынужденного излучения*, С. и. не зависит от воздействия на квантовую систему внешнего излучения, и его закономерности определяются исключительно свойствами самой системы (подобно другим типам спонтанных процессов – радиоактивному распаду, превращению молекул при мономолекулярных реакциях и др.).

С. и. возникает при спонтанном квантовом переходе возбужденной системы с более высокого уровня энергии $\mathscr{E}_i$ на более низкий $\mathscr{E}_k$ и характеризуется частотой ν_{ik} испускаемого фотона с энергией $h\nu_{ik} = \mathscr{E}_i - \mathscr{E}_k$ и вероятностью A_{ik}, равной среднему числу фотонов, испускаемых квантовой системой в единицу времени. Если населенность уровня $\mathscr{E}_i$ равна N_i, то мощность С. и. (энергия фотонов, испускаемых в 1 с) равна $N_iA_{ik}\hbar\nu_{ik}$; она определяет интенсивность С. и., к-рая остается постоянной при постоянстве N_i. Если задана начальная населенность i-го уровня N_{i0}, а дальнейшее возбуждение отсутствует, то вследствие С. и. N_i будет убывать со временем t по закону: $N_i = N_{i0}\exp(-A_it)$, где $A_i = \sum_k A_{ik}$ – полная вероятность С. и. при переходах системы с уровня энергии $\mathscr{E}_i$ на все более низкие уровни энергии $\mathscr{E}_k$. Чем больше A_i, тем быстрее затухает со временем С. и. и тем меньше время жизни $\tau_i = 1/A_i$ на уровне $\mathscr{E}_i$.

Вероятность A_{ik} С. и., являющаяся важнейшей характеристикой квантового перехода, зависит от характеристики уровней, между к-рыми происходит переход. Для дипольного излучения A_{ik} пропорциональна кубу частоты перехода и квадрату дипольного момента перехода; в видимой области спектра она $\sim 10^8$ с$^{-1}$, что соответствует временам жизни возбужденных уровней энергии $\sim 10^{-8}$ с. В спектроскопии часто пользуются вместо вероятностей A_{ik} безразмерными вероятностями $f_{ik} = A_{ik}/A_0$ – так наз. силами *осцилляторов* (A_0 – вероятность, принятая за 1 и дающая такой же закон затухания С. и., как и для дипольного излучения упруго связанного электрона согласно классич. теории). *М. А. Ельяшевич.*

СПОНТАННОЕ ИСПУСКАНИЕ – см. *Спонтанное излучение.*

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ – частичная или полная потеря системой имеющейся в ней симметрии, выражающаяся в том, что энергетически или термодинамически наиболее выгодные состояния системы обладают меньшей симметрией, чем уравнения, ее описывающие, причем преобразования симметрии переводят эти состояния друг в друга. Примером системы со С. н. с. может служить изотропный ферромагнетик, состоящий из локализованных спинов. Такая система инвариантна относительно 3-мерных вращений, то есть преобразования из группы $SU(3)$; вместе с тем ее энергия становится минимальной, когда все спины выстраиваются в одном (произвольном) направлении. Если это происходит, то в системе появляется ненулевой магнитный момент и остается инвариантность относительно вращений лишь в плоскости, ему ортогональной. Таким образом, $SU(3)$-симметрия системы нарушается до $SU(2)$-симметрии.

Идея о возможности С. н. с. восходит к Л. Д. Ландау, к-рый отметил в качестве общей черты фазовых переходов 2-го рода возникновение в точке перехода нового типа симметрии; эту идею можно сформулировать и в другой форме: при фазовом переходе спонтанно нарушается симметрия системы.

Известно большое число примеров С. н. с. В теории конденсированного состояния к ним можно отнести явления ферромагнетизма, сверхтекучести и сверхпроводимости, в теории элементарных частиц – модели электрослабого взаимодействия.

Математически корректный способ описания С. н. с., пригодный как для квантовой теории поля, так и для классич. и квантовой статистик, был предложен Н. Н. Боголюбовым в 1960 и носит название метода *квазисредних.* Идея метода заключается в следующем. Система подвергается воздействию внешнего поля, нарушающего ее симметрию, после чего поле устремляется к нулю. Так как внешнее поле нарушает симметрию системы, в ней может возникнуть ненулевое среднее от величины, неинвариантной относительно группы симметрии невозмущенной системы. Если при стремлении внешнего поля к нулю это среднее не обращается в нуль, то говорят, что в системе имеется спонтанное среднее (или конденсат), нарушающее симметрию. Таким образом, симметрия системы понизилась.

В квантовой теории поля, где все усреднения проводятся по основному состоянию системы, или вакууму, эффект С. н. с. соответствует эффекту вырождения вакуума. Группой, до к-рой нарушается симметрия, является подгруппа группы симметрии, переводящая вакуум в себя, а все вакуумы теории параметризуются элементами факторпространства (дополнительного пространства) группы симметрии по подгруппе, до к-рой нарушается симметрия. Включение внешнего поля, нарушающего симметрию системы до группы инвариантности вакуума, полностью снимает вырождение, и усреднение проводится по единственному основному состоянию, причем при стремлении внешнего поля к нулю это состояние стремится к одному из вакуумов невозмущенной теории. Таким образом, применение метода квазисредних в квантовой теории поля сводится к выбору основного состояния, по к-рому проводятся усреднения, а неинвариантность ненулевых спонтанных средних относительно группы симметрии системы является следствием неинвариантности вакуумов по отношению к этой группе.

В случае, когда нарушается непрерывная симметрия, в системе существуют флуктуации, представляющие собой колебания спонтанного среднего в направлениях, отвечающих его изменениям под действием группы симметрии. Те флуктуации, к-рые при стремлении их характерных разме-

ров к бесконечности происходят без увеличения энергии, называются голдстоуновскими модами. Количество голдстоуновских мод равно размерности факторпространства группы высокой симметрии по подгруппе низкой (остаточной) симметрии. В квантовой теории поля голдстоуновским модам соответствуют элементарные возбуждения, или квазичастицы с бесщелевым спектром – безмассовые голдстоуновские частицы (голдстоуновские бозоны, голдстоуновские фермионы). Утверждение о том, что в квантовой теории поля со спонтанно нарушенной непрерывной симметрией имеются безмассовые частицы, называется *Голдстоуна теоремой* (в нерелятивистской теории многих тел это утверждение доказано Н. Н. Боголюбовым и называется теоремой о $1/q^2$; см. *Боголюбова теорема*). При нарушении дискретной симметрии голдстоуновские моды, естественно, не появляются.

Анализ возможности С. н. с. часто начинают с нахождения классич. решений, минимизирующих гамильтониан. Если для таких решений имеется вырождение, то говорят о нарушении симметрии на классич. уровне. При этом может оказаться, что учет флуктуаций приведет к обращению спонтанных средних в нуль. Поскольку флуктуации уменьшаются с ростом числа степеней свободы, их роль возрастает в системах с низкой размерностью, причем наиболее сильными являются длинноволновые голдстоуновские флуктуации, так как они сопровождаются очень малым увеличением энергии. Все это приводит к тому, что спонтанное нарушение непрерывной симметрии возможно лишь в системах размерности выше двух. В одно- и двумерных системах спонтанное нарушение непрерывной симметрии на классич. уровне сопровождается бесконечно большими голдстоуновскими флуктуациями и симметрия восстанавливается. При этом в двумерных системах дискретная симметрия может нарушаться, как это происходит, напр., в модели Изинга. В одномерных системах даже флуктуации с неисчезающей в ДВ-пределе энергией становятся достаточно сильными для того, чтобы восстановить любую нарушенную симметрию. Механизм восстановления дискретной симметрии в одномерных системах состоит в том, что системе становится термодинамически выгодно разбиться на участки малого размера (домены) со всевозможными допустимыми значениями спонтанного среднего, что приводит к восстановлению симметрии.

В случае, когда непрерывная симметрия в системе из-за взаимодействия с калибровочным полем становится локальной (то есть допускаются преобразования, зависящие от координат), ее нарушение не сопровождается появлением голдстоуновских мод, так как в данной ситуации голдстоуновские моды являются чисто калибровочными, то есть нефизическими. Однако соответствующие компоненты калибровочного поля могут приобретать массу и становятся наблюдаемыми, как, напр., промежуточные векторные бозоны в стандартной теории электрослабого взаимодействия. Этот эффект называется эффектом Хиггса, а механизм, к нему приводящий,– механизмом Хиггса.

Отметим, что С. н. с. в квантовой теории поля не следует связывать с нарушением симметрии из-за возникновения аномалий: аномалии появляются вследствие невозможности инвариантной регуляризации классич. гамильтониана, и поэтому данное нарушение симметрии обусловлено лишь тем, что квантовый гамильтониан обладает более низкой симметрией по сравнению с классическим.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Квазисредние в задачах статистической механики, 2 изд., Дубна, 1963; [2] Паташинский А. З., Покровский В. Л., Флуктуационная теория фазовых переходов, 2 изд., М., 1982; [3] Коулмен С., Тайная симметрия: введение в теорию спонтанного нарушения симметрии и калибровочных полей, в сб.: Квантовая теория калибровочных полей, пер. с англ., М., 1977; [4] Бернстейн Дж., Спонтанное нарушение симметрии, калибровочные теории, механизм Хиггса и т. п., там же; [5] Гриб А. А., Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля, М., 1978; [6] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, М., 1980.

В. П. Шелест.

СПЯЩИЙ ВОЛЧОК – см. *Лагранжа – Пуассона случай.*

СРЕДНЕГО ПОЛЯ ПРЕДЕЛ для равновесных состояний – частный случай предела Лебовица – Пенроуза, состоящий в переходе к пределу $\gamma \to 0$ в d-мерной системе с парным потенциалом

$$\Phi_\gamma(x) = \Phi_0(x) + \gamma^d \Phi(\gamma x),$$

при $\Phi_0 \equiv 0$. В большом канонич. ансамбле этот переход эквивалентен переходу к пределу $\varepsilon \to 0$ в системе с потенциалом $\varepsilon\Phi$ и активностью $\varepsilon^{-1}Z$. Для систем заряженных частиц С. п. п. соответствует пределу Дебая – Хюккеля, где n-частичные корреляционные функции факторизуются, то есть представляются в виде произведения одночастичных корреляционных функций.

См. также *Равновесные состояния*; кинетический предел.

В. И. Скрипник.

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ случайной величины – см. *Математическое ожидание.*

СРЕДНЯЯ СПИРАЛЬНОСТЬ – см. *Спиральная турбулентность.*

СРЫВА ТОЧКА – см. *Релаксационное колебание.*

СТАЙН – СПРИНГА ТЕОРЕМА – см. *Квантовый канал.*

СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ электрослабых взаимодействий – см. *Глэшоу – Вайнберга – Салама модель.*

СТАНДАРТНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ – см. *Объединенные теории поля.*

СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ – см. *Квадратичное отклонение.*

СТАРШЕГО ВЕСА ВЕКТОР конечномерного представления T комплексной группы Ли G – вектор, собственный относительно всех операторов T_b из максимальной разрешимой подгруппы $B \subset G$. В случае $G = SL(n, \mathbb{C})$ в качестве B удобно брать группу всех верхнетреугольных матриц. С. в. в. в неприводимом представлении существует и единствен с точностью до пропорциональности. Он является весовым вектором и соответствующий вес называется старшим весом представления. Неприводимое представление полностью определяется своим старшим весом. Аналогично определяется С. в. в. для линейных представлений T комплексных алгебр Ли $\mathfrak{G}$. В этом случае С. в. в.– вектор, собственный относительно всех операторов $T(X)$, где X лежит в максимальной разрешимой подалгебре в $\mathfrak{G}$.

Ю. А. Неретин.

СТАТИКА – раздел механики, посвященный изучению условий равновесия материальных тел под действием сил. С. разделяют на геометрическую и аналитическую. В основе аналитич. С. лежит *возможных перемещений принцип*, дающий условия равновесия любой механич. системы. Геометрич. С. основывается на так наз. аксиомах С., являющихся следствиями основных законов механики и выражающих свойства сил, действующих на материальную точку и абсолютно твердое тело, то есть тело, расстояния между точками к-рого всегда остаются неизменными. Методами геометрич. С. изучается равновесие твердого тела; при этом рассматриваются решения следующих двух типов задач: 1) приведение систем сил, действующих на твердое тело, к простейшему виду; 2) определение условий равновесия сил, действующих на твердое тело.

Необходимые и достаточные условия равновесия упруго деформируемых тел, а также жидкостей и газов рассматриваются соответственно в математич. теории упругости, гидростатике и аэростатике.

К основным понятиям С. относится понятие о *силе*, о *моменте силы* относительно центра и относительно оси и о *паре сил*. Сложение сил и их моментов относительно центра производится по правилу сложения векторов. Величина $\boldsymbol{R}$, равная геометрич. сумме всех сил $\boldsymbol{F}_k$, действующих на данное тело, называется главным вектором этой системы сил:

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}_k,$$

а величина M_O, равная геометрич. сумме моментов $m_O(F_k)$ этих сил относительно центра O, называется главным моментом системы сил относительно указанного центра:

$$M_O = \sum m_O(F_k).$$

Решение задачи приведения сил дает следующий основной результат: любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной силе, равной главному вектору R системы и приложенной в произвольно выбранном центре O, и одной паре сил с моментом, равным главному моменту M_O системы относительно этого центра. Отсюда следует, что любую систему действующих на твердое тело сил можно задать ее главным вектором и главным моментом. Этим результатом широко пользуются на практике, когда задают, напр., аэродинамич. силы, действующие на самолет или ракету, усилия в сечении балки и др.

Простейший вид, к к-рому можно привести данную систему сил, зависит от значений R и M. Если $R=0$, а $M_O \neq 0$, то данная система сил заменяется одной парой с моментом M_O. Если же $R \neq 0$, а $M_O = 0$ или $M_O \neq 0$, но векторы R и M_O взаимно перпендикулярны (что, напр., всегда имеет место для параллельных сил и сил, лежащих на одной плоскости), то система сил приводится к равнодействующей, равной R. Наконец, когда $R \neq 0$, $M_O \neq 0$ и эти векторы не взаимно перпендикулярны, система сил заменяется совокупным действием силы и пары (или двумя скрещивающимися силами) и равнодействующей не имеет.

Для равновесия любой системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно обращение величин R и M_O в нуль. Отсюда вытекают уравнения, к-рым должны удовлетворять действующие на тело силы при равновесии (см. *Равновесие* механической системы). Равновесие системы тел изучают, составляя уравнения равновесия для каждого тела в отдельности и учитывая закон равенства действия и противодействия. Если общее число реакций связей окажется больше числа уравнений, содержащих эти реакции, то соответствующая система тел является статически неопределимой; для изучения ее равновесия надо учитывать деформации тел.

С. М. Targ.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА — теория *турбулентности*, в которой изучаются вероятностные свойства решений уравнений гидромеханики. Основными уравнениями гидромеханики является система Навье — Стокса

$$\left.\begin{aligned} \partial u(t,x)/\partial t + \sum_{j=1}^{n} u^j \partial u/\partial x^j = \\ = \nu \Delta u - \nabla p(t,x) + f(t,x), \\ \operatorname{div} u = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где u

$$(t, x) = (u^1, \ldots, u^n)$$

— скорость течения жидкости, $p(t, x)$ — давление, $f(t, x)$ — плотность внешних сил, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости. Система (1) задана при

$$t \in [0, T],\ x = (x^1, \ldots, x^n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

где $T > 0$ фиксировано, а Ω — область, заполненная жидкостью, размерности $n = 2$ или $n = 3$. На границе $\partial\Omega$ области Ω обычно задают условие прилипания:

$$u(t, x) = 0,\ x = \partial\Omega, \qquad (2)$$

а при $t = 0$ начальное условие:

$$u(0, x) = u_0(x). \qquad (3)$$

Центральными вопросами С. г. являются вопросы существования и единственности решения задачи (1)—(3) (см. [3], [4]). Пусть

$$\mathscr{H}^0 = \{u(x) = (u^1, \ldots, u^n) \in$$

$$\in (L_2(\Omega))^n : \operatorname{div} u = 0,\ (u, \zeta)|_{\partial\Omega} = 0\},$$

где $\zeta = \zeta(x)$ — нормаль к $\partial\Omega$. Последние два соотношения понимаются в смысле теории обобщенных функций,

$$\|\cdot\|_{\mathscr{H}^0} = \|\cdot\|_{(L_2(\Omega))^n} \equiv \|\cdot\|,$$

$$\mathscr{H}^1 = \{u(x) \in \mathscr{H}^0 : \|u\|_1^2 =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left|\partial u/\partial x^j\right|^2 dx < \infty,\ u|_{\partial\Omega} = D\}.$$

Полагают

$$\pi : (L_2(\Omega))^3 \to \mathscr{H}^0,$$

где π — ортопроектор. Применив к обеим частям (1) оператор π, получают уравнение, не содержащее p. Поэтому решение задачи сводится к нахождению u. Если

$$u_0 \in \mathscr{H}^0 \quad \text{и} \quad \int_0^T \|f(t,\cdot)\|^2 dt < \infty, \qquad (4)$$

то рассматриваются решения $u(t, x)$, удовлетворяющие энергетич. неравенству

$$\|u(t,\cdot)\|^2 + \nu \int_0^t \|u(\tau,\cdot)\|_1^2 d\tau \leqslant \|u_0\|^2 + \int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|^2 d\tau/\nu. \qquad (5)$$

Из (1) и (5) следует, что решение $u(t, x)$ — непрерывная функция по t со значениями в пространстве Соболева H^{-s}, где $s > 1 + n/2$:

$$u(t, x) \in C(0, T; H^{-s}).$$

Через Z обозначают пространство векторных полей

$$u(t, x) \in C(0, T; H^{-s}),$$

у к-рых конечна левая часть энергетич. неравенства (5). В пространстве Z существует решение $u(t, x)$ задачи (1)—(3). При $n = 2$ доказана единственность решения системы Навье — Стокса в Z, а при $n = 3$ единственность в Z до сих пор (1998) не установлена.

В С. г. одним из основных объектов являются статистические решения задачи (1)—(3), дающие вероятностные описания потоков жидкости. Основы вероятностного подхода к решению задач гидромеханики заложены в работах О. Рейнольдса (O. Reynolds), Дж. Тейлора (G. Taylor), А. Н. Колмогорова и др. Уравнение для характеристич. функционала статистич. решения вывел Э. Хопф (E. Hopf). Исследованы вопросы существования и единственности пространственных статистич. решений. Построены пространственно-временные статистич. решения, а также и однородные статистич. решения (см. [2]).

Ниже через $\mathscr{B}(X)$ обозначается борелевская σ-алгебра линейного топологич. пространства X. Пусть $u_0(x)$ — случайное начальное векторное поле (3) с распределением вероятностей $\mu_0(B_0)$, $B_0 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$. Пространственно-временным статистическим решением называется вероятностная мера $\mathsf{P}(B)$, $B \in \mathscr{B}(Z)$, сосредоточенная на решениях $u(t, x)$ задачи (1)—(3) и связанная с мерой μ_0 соотношением

$$\mathsf{P}(\{u(t, x) : u(0, x) \in B_0\}) = \mu_0(B_0)$$

для любого $B_0 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$. В случае $n = 2$, когда определен однозначный оператор S, сопоставляющий начальному условию $u_0(x)$ решение $u(t, x)$ задачи (1)—(3), мера P определяется равенством

$$\mathsf{P}(B) = \mu_0(S^{-1}B) = \mu_0(\gamma_0 B)$$

для любого $B \in \mathscr{B}(Z)$, где γ_0 — оператор сужения функций $u(t, x) \in B$ при $t = 0$:

$$(\gamma_0 u)(x) = u(0, x).$$

Пусть для начальной меры μ_0

$$\int \|u_0\|^2 \mu_0(du_0) < \infty. \qquad (6)$$

В этом случае существует пространственно-временное статистич. решение P, удовлетворяющее энергетич. неравенству

$$\int \sup_{t\in[0;T)} \|u(t,\cdot)\|^2 + \int_0^T \|u\|_1^2\, dt\, \mathsf{P}(du) \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(1 + \int \|u_0\|^2\, \mu_0(du_0)\Big). \qquad (7)$$

При $n=2$ статистич. решение P однозначно определяется по начальной мере μ_0 (см. [2]). Пространственно-временное статистич. решение строится с помощью галеркинских приближений задачи

$$\partial u_m/\partial t + p_m\Big(\sum_{j=1}^n u^j \partial u/\partial x^j\Big) -$$

$$- \nu\, p_m \Delta u_m = 0, \quad \gamma_0 u_m = p_m u_0, \qquad (8)$$

где p_m – оператор ортогонального проектирования в $\mathscr{H}^0$ на m-мерное подпространство, порожденное, напр., первыми m собственными векторами оператора $\pi\Delta$, с нулевыми граничными условиями. У задачи (8) определен оператор S_m, сопоставляющий начальному условию $p_m u_0$ решение

$$u_m : S_m p_m u_m = u_m.$$

Галеркинским приближением статистического решения P называется мера P_m, определяемая соотношением

$$\mathsf{P}_m(B) = \mu_0(p_m^{-1} S_m^{-1} B) \text{ для любого } B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^0), \qquad (9)$$

где μ_0 – начальная мера. Меры P_m удовлетворяют энергетич. неравенству, аналогичному (7). Из множества $\{\mathsf{P}_m\}$ выбирается подпоследовательность, слабо сходящаяся к статистич. решению $\mathsf{P}: \mathsf{P}_m \to \mathsf{P}$.

Пусть γ_τ – оператор сужения функций $u(t, x) \in Z$ при

$$t = \tau : (\gamma_\tau u)(x) = u(\tau, x).$$

И пусть $\mu(t, B_0)$ – семейство вероятностных мер, зависящих от параметра t, получающееся при сужении пространственно-временного статистич. решения в момент времени t:

$$\mu(t, B_0) \equiv \gamma_t^* \mathsf{P}(B_0) = \mathsf{P}(\gamma_t^{-1} B_0) \text{ для любого } B_0 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^0). \qquad (10)$$

Семейство $\mu(t, B_0)$ называется пространственным статистическим решением. Оно удовлетворяет энергетич. неравенству

$$\int \|u\|^2\, \mu(t, du) + \nu \int_0^t \Big(\int \|u\|_1^2 \mu(\tau, du)\Big) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int \|u\|^2\, \mu_0(du) + 1/\nu \int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|^2\, d\tau. \qquad (11)$$

Пусть

$$\chi(t, w) = \int \exp\{i(u, w)\}\, \mu(t, du) \qquad (12)$$

– характеристич. функционал семейства $\mu(t, du)$. Здесь (u, w) – скалярное произведение в $(L_2(\Omega))^n$. Пространственное статистич. решение $\mu(t, du)$ удовлетворяет уравнению Хопфа

$$\partial\chi(t, w)/\partial t = \int \exp\{i(u, w)\}(b(t, u), w)\, \mu(t, du) \qquad (13)$$

при почти всех $t \in [0, T]$ и любых $w \in \mathscr{H}^0 \cap (H^s)^n$, где H^s – пространство Соболева, $s > 1 + n/2$,

$$(b(t, u), w) =$$

$$= i\Big[\sum_{j=1}^n \big(\partial w/\partial x^j, u^j u\big) + \nu(\Delta w, u) + (w, f(t,\cdot))\Big]. \qquad (14)$$

Уравнение (13) можно записать в виде уравнения в вариационных производных для функционала $\chi(t, w)$ (см. *Хопфа уравнение*). При $t=0$ для уравнения Хопфа ставится начальное условие

$$\chi(0, w) = \chi_0(w) \equiv \int \exp\{i(u, w)\}\, \mu_0(t, du). \qquad (15)$$

Установлена разрешимость задачи (13), (15) и ее единственность при $n=2$ (см. [10]).

Если для меры μ из (15) верно

$$\int \|u\|^k\, \mu_0(du) < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (16)$$

то функционал $\chi_0(w)$, $w \in \mathscr{H}^0$, бесконечно дифференцируем по Фреше. Тем же свойством при любом $t \in [0, T]$ обладает и характеристич. функционал $\chi(t, w)$ статистич. решения $\mu(t, du)$. Вариационные производные $\chi(t, w)$ совпадают с моментами меры $\mu(t, du)$:

$$\delta^k \chi(t, w)/\delta w^{j_1}(x_1) \ldots \delta w^{j_k}(x_k)\Big|_{w=0} =$$

$$= M_k^{j_1, \ldots, j_k}(t, x_1, \ldots, x_k) = \int u^{j_1}(x_1) \ldots u^{j_k}(x_k)\, \mu(t, du),$$

где $j_l = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, k$, $u^j(x)$ – компоненты вектора скорости $u(x)$. Моменты являются одним из важнейших объектов С. г., так как их значения

$$M_k(t, x_1, \ldots, x_k) = \big\{M^{j_1, \ldots, j_k}(t, x_1, \ldots, x_k)\big\}$$

можно измерять при экспериментальном исследовании течений. Из уравнения Хопфа с $f=0$ следует, что тензоры

$$M_k(t, \boldsymbol{x}^k), \quad \boldsymbol{x}^k = (x_1, \ldots, x_k),$$

удовлетворяют бесконечной системе моментных уравнений Фридмана – Келлера

$$\partial \boldsymbol{M}_k(t, \boldsymbol{x}^k)/\partial t + A_k M_k(t, \boldsymbol{x}^k) + (B_k M_{k+1})(t, \boldsymbol{x}^k) = 0, \quad (17)$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$A_k = \nu \sum_{j=1}^k \pi \sum_{l=1}^n \partial^2/\partial x_j^l \partial x_j^l,$$

B_k – линейные операторы, определяемые по нелинейным членам системы Навье – Стокса (см. [2]). Наличие в k-м из уравнений (17) кроме M_k также и M_{k+1} является следствием нелинейности системы Навье – Стокса. Уравнения (17) снабжаются начальными условиями

$$M_k(t, \boldsymbol{x}^k)\big|_{t=0} = M_k^0(\boldsymbol{x}^k), \qquad (18)$$

где

$$M_k^0(\boldsymbol{x}^k) = \{M_k^{0; j_1, \ldots, j_k}(x_1, \ldots, x_k)\}$$

– моменты начальной меры μ_0.

Пусть носитель меры μ_0 лежит в шаре $B_\rho = \{u : \|u\|_1 < \rho\}$ пространства $\mathscr{H}^1$, где $\rho = \rho(\nu)$ – достаточно мало (случай малых чисел Рейнольдса). Тогда задача (17), (18) имеет единственное решение в классе тензоров $M_k(t, \boldsymbol{x}^k)$, к-рые при каждом $t \in [0, T]$ являются моментами пространственного статистич. решения $\mu(t, B_0)$, сосредоточенного в шаре B_{ρ_1} пространства $\mathscr{H}^1$, где ρ_1 зависит от ρ. При этом моменты $M_k(t, \boldsymbol{x}^k)$ разлагаются в сходящиеся ряды по моментам $M_k^0(\boldsymbol{x}^k)$ начальной меры:

$$M_k(t, \boldsymbol{x}^k) = \sum_{r=k}^\infty \Phi_{k, r}\big(t, M_r^0\big)(\boldsymbol{x}^k),$$

где $\Phi_{k, r}(t, \cdot)$ – линейные операторы.

Важной проблемой в С. г. является вопрос об аппроксимации бесконечной цепочки (17) с помощью конечной системы уравнений, то есть так наз. проблема замыкания (см. [1]). В случае малых чисел Рейнольдса бесконечную систему (17) можно аппроксимировать первыми N уравнениями этой цепочки, причем в N-м уравнении положить $M_{N+1} = 0$, а в качестве начальных условий взять первые N тензоров M_k^0 из (18). Если через $\{M_k^N,\ k = 1, \ldots, N\}$ обозначить решение этой задачи, то

$$M_k^N(t, \boldsymbol{x}^k) = \sum_{r=k}^N \Phi_{k, r}\big(t, M_r^0\big)(\boldsymbol{x}^k),$$

и поэтому $M_k^N \to M_k$ при $N \to \infty$ при достаточно малом $\rho = \rho(\nu)$, где $\{M_k\}$ – решение задачи (17), (18).

Как следует из приводимого ниже примера, при больших ρ сходимости, вообще говоря, нет. Пусть $u(t, x)$, где $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$, – решение уравнения Бюргерса

$$\partial u(t, x)/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2 - \partial u^2/\partial x = 0,$$
$$u(0, x) = -z \sin x, \; z > 0,$$

$\mu_0(du_0)$ – мера, сосредоточенная в точке $u_0 = -z \sin x$. Тогда моменты M_k статистич. решения $\mu(t, B_0)$, соответствующего мере μ_0, определяются формулой

$$M_k(t, x_1, \ldots, x_k) = \prod_{j=1}^k u(t, x_j).$$

Если $\{M_k^N, \; k = 1, \ldots, N\}$ – решение системы первых N уравнений моментной цепочки, соответствующей уравнению Бюргерса, то $M_k^N \nrightarrow M_k$ при $N \to \infty$ при любом k в $C([0, T] \times [0, 2\pi])$ (см. [2]).

В случае произвольных чисел Рейнольдса при исследовании задачи (17), (18) на начальную меру μ_0 накладывается лишь условие (16), гарантирующее существование всех моментов $M_k^0(x^k)$ из (18). При выполнении (16) для этой задачи установлено существование решения $\{M_k\}$, а при $n = 2$ и при нек-ром условии более жестком, чем (16), и единственность решения. При любых числах Рейнольдса для аппроксимации решения этой задачи можно использовать моменты галеркинских приближений статистич. решения (9).

В ряде случаев удается построить асимптотич. разложение моментов $M_k(t, x^k)$ по моментам M_k^0 начальной меры μ_0. Напр., пусть

$$\int \|u\|_1^k \mu_0(du) < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и семейство мер μ_0^λ, зависящих от параметра λ, определяется формулой

$$\mu_0^\lambda(B_0) = \mu_0(\hat{\lambda}^{-1} B_0) \text{ для любого } B_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1),$$

где $\hat{\lambda} u_0 = \lambda u_0$ – оператор умножения на λ. Мера μ_0^λ получается из μ_0 с помощью сжатия. Пусть $\mu^\lambda(t, B_0)$ – пространственное статистич. решение с начальной мерой μ_0^λ, а $M_k^\lambda(t, x^k)$ – моменты пространственного статистич. решения $\mu^\lambda(t, B_0)$. Тогда при $\lambda \to 0$ имеет место асимптотич. разложение

$$M_k^\lambda(t, x^k) \sim \sum_{r=k}^\infty \lambda^r \Phi_{k,r}\left(t, M_r^0\right)(x^k).$$

Турбулентные потоки, статистические характеристики к-рых не зависят от сдвигов по пространственным переменным, описываются с помощью однородных статистич. решений, как пространственно-временных, так и пространственных. Пусть

$$\mathfrak{H} = \left\{ u(x) = (u^1, \ldots, u^n), \; x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{div} u = 0, \\ \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty, \\ \Omega \text{ – любая ограниченная область} \end{array} \right\}.$$

Мера μ_0, определенная на $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, называется однородной, если

$$\mu_0(B_0) = \mu(\hat{h} B_0) \text{ для любых } \begin{cases} B_0 \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \\ h \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где $\hat{h} u(x) = u(x + h)$, $\hat{h} B_0 = \{\hat{h} u : u \in B_0\}$. Для однородной меры и любой области Ω с объемом $|\Omega| < \infty$ плотность энергии

$$\int_\Omega |u_0(x)|^2 dx / |\Omega| = \bar{e}_0$$

не зависит от Ω и обозначается

$$\bar{e}_0 = \int |u_0(x)|^2 d\mu_0(u_0). \qquad (19)$$

Пусть

$$L_2(0, T; \mathfrak{H}) = \left\{ u(t, x) = (u^1, \ldots, u^n): \; \operatorname{div} u = 0, \right.$$
$$\left. \int_0^T \int_\Omega |u(t, x)|^2 dx dt < \infty \text{ для любой ограниченной области } \Omega \right\}.$$

Пространственно-временное статистич. решение P называется однородным по x, если

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\hat{h} B) \text{ для любых } \begin{cases} B \in \mathcal{B}(L_2(0, T; \mathfrak{H})), \\ h \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где $\hat{h} u(t, x) = u(t, x + h)$. Для однородной начальной меры μ_0 с $\bar{e}_0 < \infty$ существует однородное пространственно-временное статистич. решение P, удовлетворяющее следующему аналогу энергетич. неравенства:

$$\int \left(|u(t,x)|^2 + 2\nu \int_0^t |\nabla u(\tau, x)|^2 d\tau \right) \mathsf{P}(du) \leqslant \bar{e}_0, \qquad (20)$$
$$t \in [0, T],$$

где интеграл имеет тот же смысл, что и в (19).

Однородное пространственно-временное статистич. решение P может быть построено как предел галеркинских приближений P_l, сосредоточенных на l-периодич. по x функциях $u(t, x)$, причем P_l – однородные по x меры, удовлетворяющие оценкам вида (20). При предельном переходе ($l \to \infty$) используется равномерная по l оценка

$$\int \|\partial u(t, \cdot)/\partial t | K_N\|_{-s} \mathsf{P}_l(du) \leqslant C(N),$$
$$s > \max(1 + 3n/2, 3 + n/2),$$

где $\|\cdot | K_N\|_{-s}$ – норма пространства Соболева $H^{-s}(K_N)$, $K_N = \{|x| < N\}$ – шар в $\mathbb{R}^n$ и $C(N)$ не зависит от l.

Пусть задано начальное условие

$$u_0 = \sum c_k e^{i x \zeta_k},$$

где правая часть – почти периодич. полином. Из существования однородного пространственно-временного статистич. решения P вытекает, в частности, разрешимость системы (1), (3) при почти всех (по мере Лебега) значениях коэффициентов c_k. При таких начальных условиях, как правило, энергия системы в $\mathbb{R}^n$ бесконечна: $\|u_0\|_{(L_2(\mathbb{R}^n))^n} = \infty$; поэтому классич. методы доказательств теорем существования здесь не применимы.

Пусть задана стохастич. система Навье – Стокса, то есть в уравнении (1) $f = f_1 + \dot{w}(t, x)$ и f_1 удовлетворяет условию (4), а $\dot{w}(t, x)$ – белый шум по t. В этом случае систему (1) удобно записать в виде

$$Lu(t, x) \equiv u(t, x) - u_0(x) -$$
$$- \int_0^t \left\{ \pi \left(\sum_1^n u^j \partial u / \partial x^j \right) + \pi \Delta u + \pi f_1 \right\} dt = w(t, x). \qquad (21)$$

Здесь $w(t, x)$ – винеровское случайное векторное поле с характеристич. функционалом

$$\left\langle \exp\left\{ i \int_0^T (w(t, \cdot), v(t, \cdot)) dt \right\} \right\rangle = \exp(-B(v, v)/2)$$

для всех $v(t, x) \in [C_0^\infty([0, T] \times \Omega)]^n$, где

$$B(v, v) = \int_0^T \int_0^T \min(s, t) (Q v(t, \cdot), v(s, \cdot)) \, ds \, dt,$$

а Q – самосопряженный, неотрицательный, ядерный в $\mathcal{H}^0$ оператор:

$$Q^* = Q \geqslant 0, \; S = \operatorname{Sp} Q < \infty. \qquad (22)$$

Пусть λ – мера на $\sigma = C(0, T; \mathcal{H}^0)$, задающая распределение вероятностей винеровского процесса $w(t, x)$, и μ_0 – начальная мера, то есть распределение начального условия $u_0(x)$.

Предполагается, что меры λ и μ_0 независимы. Статистическим решением задачи (21), (2) называется мера P на пространстве Z, для к-рой выполнено условие: для любого $B_0 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^0)$ и для любого $E \in \mathscr{B}(\sigma)$

$$\mathsf{P}(\{u(t, x) \in Z: \gamma_0 u \in B_0,\ Lu \in E\}) = \mu_0(B_0)\lambda(E). \qquad (23)$$

Если μ_0 удовлетворяет условию (6), а корреляционный оператор Q – условиям (22), то существует пространственно-временное статистич. решение задачи (21), (2). Для него справедливо энергетич. неравенство, аналогичное (7). Пространственно-временное статистич. решение строится с помощью метода Галеркина (см. [5], [6]).

Сужение меры (23) в момент времени t, определенное в (10), дает пространственное статистич. решение $\mu(t, B_0)$ задачи (21), (2). Оно удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\partial\chi(t,w)/\partial t = \int \exp\{i(u,w)\}[i(b(t,u),w) - (Qw,w)/2]\mu(t,du),$$

где $\chi(t, w)$ – характеристич. функционал (12), а $(b(t, \cdot), w)$ и Q определены в (14) и (22). Это уравнение можно записать также в виде уравнения в вариационных производных параболич. типа относительно $\chi(t, w)$. При выполнении условия (6) эта параболич. задача имеет решение $\chi(t, w)$, причем соответствующая мера $\mu(t, B_0)$ удовлетворяет энергетич. неравенству вида (11).

Обратным уравнением Колмогорова, соответствующим системе Навье – Стокса (21), называется уравнение вида

$$\partial\Phi/\partial t + (b(t, u), D_u\Phi(t, u)) + (Q, D_u^2\Phi(t, u)) = 0, \quad (24)$$
$$0 < t < T.$$

Это уравнение является формально сопряженным к прямому уравнению Колмогорова. В нем $\Phi = \Phi(t, u)$ – функционал. Задается значение этого функционала при $t = T$:

$$\Phi|_{t=T} = \Psi(u),\ u \in \mathscr{H}^1, \qquad (25)$$

и оно решается при $t < T$. Пусть $n = 2$, оператор Q удовлетворяет условиям (22) и при нек-рых $s > 2$, $p \geqslant 0$

$$\Psi(u) \in C(\mathscr{H}^{-s}),\ |\Psi(u)| \leqslant C(1 + \|u\|^p),\ u \in \mathscr{H}^0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение $\Phi(t, u)$ задачи (24), (25), к-рое представляется с помощью винеровского интеграла

$$\Phi(t,u_0) = \int \varphi(S(T,t,u_0,w))\lambda(dw) = \int \Psi(u)\Gamma(t,u_0;T,du).$$

Здесь $S(\tau, t, u_0, w) = u(\tau)$, $\tau \geqslant t$,– решение системы (21) с начальным условием u_0 при $\tau = t$:

$$S(T, t, u_0, w) = u_0,$$

а $\Gamma(t, u_0; T, du)$ – распределение $u(\cdot, T) \equiv S(T, t, u_0, w)$ относительно меры λ. Для аппроксимации решения задачи (24), (25) используется ее галеркинское приближение

$$\partial\Phi_m/\partial t + \sum_{j=1}^m b^j(t,u)\partial\Phi_m/\partial u^j +$$
$$+ (1/2)\sum_{i,\,j=1}^m Q^{ij}\partial^2\Phi/\partial u^i\partial u^j = 0,$$

где $u = (u^1, \ldots, u^m) \in V_m = p_m\mathscr{H}^0$, $\Phi_m|_{t=T} = \Psi(p_m u)$. При $n = 3$ установлено существование обобщенного решения этой задачи (см. [6]).

Как уже отмечалось, пока не решена проблема однозначной разрешимости системы Навье – Стокса при $n = 3$ и произвольных начальных условиях и правых частях из соответствующих функциональных пространств. Эта проблема сводится к вопросу о существовании «в целом» гладких решений системы, так как в классе гладких решений единственность установлена. Если трактовать систему Навье – Стокса как некорректную систему, то возникает вопрос, насколько «велико» множество исходных данных, при к-рых существует нелокальное по времени гладкое решение.

Пусть

$$\|u\|_{L_p^s} = \left(\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_s^p\, dt\right)^{1/p},$$

для $u(t, x)$, $t \in [0, T)$, $x \in \Omega$, где $1 \leqslant p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_s$ – норма пространства Соболева $(H^s(\Omega))^n$. Рассматривается случай $n = 3$. Для любого фиксированного начального условия $u_0 \in \mathscr{H}^1$ через F_{u_0} обозначается множество таких правых частей $f(t, x) \in L^2([0, T); \mathscr{H}^0)$, для к-рых задача (1)–(3) имеет решение $u(t, x)$ из $C([0, T); \mathscr{H}^1)$. (В $C([0, T); \mathscr{H}^1)$ это решение единственно.) Тогда F_{u_0} открыто в $L_2([0, T); \mathscr{H}^0)$ и всюду плотно в этом пространстве относительно топологии, порождаемой нормой $\|\cdot\|_{L_p^{-l}}$, где при $1/2 < l < 3/2$ имеет место $1 \leqslant p < 4/(5 - 2l)$, а при $l > 3/2$ будет $p = 2$ (см. [7]).

Пусть теперь фиксирована правая часть f в (1), причем f не зависит от t и $f \in \mathscr{H}^0$. Говорят, что мера $\mu(B_0)$ (где $B_0 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1)$) принадлежит классу E, если для μ-почти всех начальных значениях u_0 задача (1)–(3) имеет решение $u(t, x) \in C(0, T; \mathscr{H}^1)$. Пусть $\mu_0(B_0)$, $B_0 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1)$,– произвольная мера, удовлетворяющая (16), а m_k^0 – моменты меры μ_0. По μ_0 строится мера μ из класса E. Через $\mathscr{P}_+$ обозначается класс мер $\mathsf{P}(B)$, $B \in \mathscr{B}(C(0, T; \mathscr{H}^1))$, сосредоточенных на решениях задачи (1), (2). Ставится экстремальная задача

$$J(\mathsf{P}) = \int \exp\|u\|_{L_2}^2\, \mathsf{P}(du) + \lambda\sum_{k=1}^\infty \|m_k - m_k^0\|_k^2/k! \to \inf,$$
$$\mathsf{P} \in \mathscr{P}_+,$$

где m_k – моменты меры $\gamma_0^*\mathsf{P}$, определенной в (10), а $\|\cdot\|_k$ – норма в $(L^2(\Omega^k))^{3^k}$, где $\Omega^k = \Omega \times \ldots \times \Omega$ (k раз). Для любого $\lambda > 0$ эта задача имеет единственное решение $\hat{\mathsf{P}}$. Тогда мера $\mu = \gamma_0^*\hat{\mathsf{P}}$ принадлежит E (см. [8]).

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1–2, М., 1965–67; [2] Вишик М. И., Фурсиков А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980; [3] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [4] Темам Р., Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ, пер. с англ., М., 1981; [5] Вишик М. И., Комеч А. И., Фурсиков А. В., «Успехи математич. наук», 1979, т. 34, в. 5, с. 135–210; [6] Вишик М. И., Комеч А. И., «Успехи механики», 1982, т. 5, № 1/2, с. 65–120; [7] Фурсиков А. В., «Математич. сб.», 1981, т. 115, № 2, с. 281–306; [8] его же, «Прикладная математика и механика», 1982, т. 46, № 5, с. 797–805; [9] Hopf E., «J. Rational Mech. Analys», 1952, v. 1, p. 87–123; [10] Foiaş C., «Rend. Semin. Mat. Univ. Padova», 1972, v. 48, p. 219–348; 1973, v. 49, p. 9–123. *М. И. Вишик, А. В. Фурсиков.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА – см. *Анализ данных.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ – см. *Анализ данных.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА – общая мера фазового пространства классической системы или след ненормированной матрицы плотности, которой задается квантовый ансамбль. Напр., в случае равновесного большого канонич. ансамбля С. с. (большая С. с.) непрерывной системы классич. частиц имеет вид:

$$\Xi(\Lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\int_{\Lambda^n} dq_1 \ldots dq_n \exp\{-\beta U(q_1, \ldots, q_n)\},$$

где z – активность, $U(q_1, \ldots, q_n)$ – потенциал взаимодействия частиц, $\beta > 0$ – параметр, имеющий смысл обратной температуры, $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$. Предел $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu$ логарифма С. с. $\Xi(\Lambda)$, деленный на объем области Λ, в статистич. механике отождествляется с термодинамич. функцией – давлением.

Для частичных функций распределения вероятностей С. с. является нормирующим множителем. *В. И. Герасименко.*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОТСЧЕТОВ – раздел квантовой оптики и статистической радиофизики. Матема-

тич. задачи С. т. о. возникают при интерпретации экспериментов, чувствительных к квантовым особенностям регистрируемого низкоинтенсивного излучения, в частности явления фотоэффекта. В силу случайной природы фотоэффекта, а также стохастич. свойств полей излучения наблюдаемое за интервал регистрации T число отсчетов N является случайной величиной. Типичной задачей С. т. о. является: по известным статистич. свойствам случайного процесса $\{\alpha(t)\}$ – комплексной амплитуды поля излучения – осуществить вычисление как плотности распределения $p(U)$ поглощенной детектором энергии

$$U = \int_0^T |\alpha(t)|^2 dt,$$

так и распределение вероятностей $P(n) = \mathrm{P}\{N = n\}$ случайного числа отсчетов N (см. *Мандела распределение*). При модельном описании процесса $\{\alpha(t)\}$ используется представление, в к-ром траектории $\alpha(t)$ являются решениями стохастич. дифференциального уравнения. Напр., для уравнения

$$d\alpha(t) = -\nu\alpha(t)dt + \sqrt{\sigma}\, dw(t),$$

$\nu, \sigma = \mathrm{const}$, $w(t)$ – стандартный комплекснозначный винеровский процесс, производящая функция отсчетов равна

$$Q(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{-\lambda n} = 4r\nu e^{\nu T}[(r+\nu)^2 e^{rT} - (r-\nu)^2 e^{-rT}]^{-1},$$

$$r = (\nu^2 + 2\lambda\sigma)^{1/2}.$$

Лит.: [1] Лэкс М., Флуктуации и когерентные явления, пер. с англ., М., 1974.

А. З. Мазманишвили.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ – см. *Анализ данных.*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ – принятое в статистической физике название фазового пространства (пространства состояний) какой-нибудь физической системы вместе с некоторым способом усреднения физических величин (так наз. наблюдаемых), связанных с этой системой. В случае классич. системы с фазовым пространством Ω наблюдаемые – действительные функции, определенные на Ω, а их усреднение происходит с помощью интегрирования по нек-рой вероятностной мере μ на пространстве Ω. В случае квантовой системы, описываемой векторами гильбертова пространства $\mathcal{H}$, наблюдаемые задаются самосопряженными операторами, действующими в $\mathcal{H}$, и усреднение вводится с помощью нек-рого положительного и нормированного функционала ρ, определенного на алгебре $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$ операторов, действующих в $\mathcal{H}$ [такие функционалы на $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$ называются состояниями]. Обычно состояние задается в виде

$$\rho(A) = \mathrm{Tr}\hat{\rho}(A),\ A \in \mathfrak{U}(\mathcal{H}), \qquad (1)$$

где $\hat{\rho}$ – положительный оператор в $\mathcal{H}$ такой, что $\mathrm{Tr}\hat{\rho} = 1$ (оператор $\hat{\rho}$ называется матрицей плотности состояния ρ).

Если задана эволюция физич. системы во времени (динамика системы), то есть (в классич. случае) – группа $\Gamma_t: \Omega \to \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, взаимно однозначных преобразований фазового пространства в себя, порождаемая гамильтоновыми уравнениями движения с нек-рой функцией Гамильтона $H(\omega)$, $\omega \in \Omega$ (энергия системы), или (в квантовом случае) – группа унитарных преобразований $U_t: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, гильбертова пространства в себя, порождаемая оператором Гамильтона $\hat{H}$ (оператором энергии системы), то естественно определяется эволюция во времени любого С. а., определенного для этой системы:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_t(C) = \mu(\Gamma_t^{-1}C),\ C \subset \Omega \quad \text{(классический случай)},\\ &\rho_t(A) = \rho(U_t A U_t^{-1}) \qquad \text{(квантовый случай)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Для описания стационарного поведения системы рассматриваются равновесные ансамбли, то есть меры или состояния, неизменные относительно эволюции (2). Хотя равновесных С. а., вообще говоря, много, в статистич. физике рассматривают только специальные – так наз. канонические ансамбли Гиббса (распределения).

Классические ансамбли Гиббса. Пусть кроме гамильтониана $H = H_0(\omega)$ имеется нек-рый функционально независимый вместе с H_0 набор $H_1(\omega), \ldots, H_k(\omega)$, $k = 0, 1, \ldots$, функций на Ω, инвариантных относительно динамики Γ_t (в случае систем, состоящих из конечного, но произвольного числа частиц одного или нескольких видов, $H_i(\omega)$ равно, напр., числу частиц какого-нибудь вида в конфигурации $\omega \in \Omega$; в случае системы магнитных диполей $H_i(\omega)$ равно какой-нибудь составляющей их суммарного магнитного момента и т. д.). Большим каноническим ансамблем Гиббса называется мера

$$d\mu_{\beta, \nu_1, \ldots, \nu_k} = (\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(H_0 + \nu_1 H_1 + \ldots + \nu_k)\}d\omega, \qquad (3)$$

где $d\omega$ – мера, порождаемая симплектич. структурой на Ω, $\beta > 0$ и $\nu_1, \ldots, \nu_k$ – действительные параметры, а Ξ – нормировочный множитель, называемый большой статистической суммой:

$$\Xi = \int_\Omega \exp\{-\beta(H_0 + \nu_1 H_1 + \ldots + \nu_k H_k)\}d\omega. \qquad (4)$$

Мера $\mu_{h_0, h_1, \ldots, h_k}$, сосредоточенная на множестве $\{\omega | H_i(\omega) = h_i,\ i = 0, 1, \ldots, k\}$, $h_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, и совпадающая с условным распределением на этом множестве, порожденным мерой (3), называется микроканоническим ансамблем Гиббса. Рассматриваются также и «промежуточные» ансамбли – так наз. малые канонические ансамбли Гиббса, получающиеся аналогичным образом из ансамбля (3) фиксированием значений всех или части функций $H_i(\omega)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Квантовые ансамбли Гиббса. Пусть $\hat{H}_1, \ldots, \hat{H}_k$ (k – произвольно) – попарно коммутирующие операторы, коммутирующие с оператором $\hat{H} = \hat{H}_0$ («сохраняющиеся величины»). Состояние на $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$, задаваемое матрицей плотности

$$\hat{\rho}_{\beta, \nu_1, \ldots, \nu_k} = (\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(\hat{H}_0 + \nu_1\hat{H}_1 + \ldots + \nu_k\hat{H}_k)\},$$

где

$$(\Xi) = \mathrm{Tr}(\exp\{-\beta(\hat{H}_0 + \nu_1\hat{H}_1 + \nu_k\hat{H}_k)\}$$

– большая статистическая сумма, а $\beta > 0$, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ – параметры, называется большим каноническим ансамблем Гиббса. Пусть $P_{\hat{H}_i}^{h_i}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, – проекторы в $\mathcal{H}$ на собственное подпространство оператора $\hat{H}_i$ с собственным значением h_i. Микроканоническим ансамблем Гиббса называется состояние с матрицей плотности

$$\hat{\rho}_{h_0, h_1, \ldots, h_k} = (Q)^{-1} P_{\hat{H}_0}^{h_0} P_{\hat{H}_1}^{h_1} \ldots P_{\hat{H}_k}^{h_k},$$

где $Q = \dim(\mathrm{Im}\hat{\rho}_{h_0, h_1, \ldots, h_k})$. Аналогично вводятся и малые канонические ансамбли Гиббса, напр. С. а. с матрицей плотности

$$\hat{\rho}_{\beta, h_1, \ldots, h_k} = (Z)^{-1}\exp\{-\beta\hat{H}_0\}\prod_{i=1}^{k} P_{\hat{H}_i}^{h_i},$$

где Z – нормирующий множитель (малая статистическая сумма).

Иногда рассматриваются нек-рые модельные модификации описанных С. а. (напр., ансамбли Гиббса в конфигурационных или решетчатых системах), а также так наз. предельные ансамбли Гиббса, то есть распределения вероятностей (или состояния) на фазовом пространстве бесконечной системы (напр., системы с бесконечным числом частиц, движущихся во всем пространстве). Эти С. а. возни-

кают с помощью термодинамич. предельного перехода из описанных выше ансамблей для конечных систем (см. [3]).

Существует гипотеза – так наз. принцип предельной эквивалентности ансамблей – о том, что при выполнении нек-рых естественных условий (грубо говоря, в отсутствии фазового перехода) предельные гиббсовские С. а., получающиеся с помощью разных допредельных гиббсовских ансамблей (большого канонического, малого канонического, микроканонического), совпадают при определенном соответствии между задающими эти ансамбли параметрами. Эта гипотеза подтверждена (см. [3]) для нек-рых частных ситуаций.

Лит.: [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964; [2] Минлос Р.А., «Успехи математич. наук», 1968, т. 23, в. 1, с. 133–90; [3] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1970; [4] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977.

Р. А. Минлос.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ВЕС – 1) С. в. в квантовой механике – кратность вырождения уровня энергии.

2) С. в. в термодинамике и статистической физике – число способов, которыми может быть реализовано данное макроскопич. состояние системы. Термодинамически равновесное макроскопич. состояние системы характеризуется определенными значениями полной энергии $\mathscr{E}$, полного числа частиц N и объема системы. Микроскопич. состояние системы соответствует заданному распределению ее частиц по возможным классич. или квантовым состояниям. С. в. Γ равен числу микроскопич. состояний, реализующих данное макроскопич. состояние, поэтому $\Gamma \geqslant 1$. Иногда С. в. называют термодинамической вероятностью.

В случае непрерывного спектра энергии под С. в. понимают число квантовых состояний в данном интервале значений энергии. При переходе от квантовой к классич. теории (квазиклассич. приближение) устанавливают связь между Γ и величиной фазового объема системы, соответствующего данному интервалу энергии. С. в. называют величину фазового объема в единицах h^s, где s – число степеней свободы данной системы. Величине h соответствует минимальный фазовый объем для системы с одной степенью свободы в квазиклассич. приближении. Аналитически С. в. можно найти лишь для модельных систем, для реальных систем его можно оценить по величине *статистической суммы*.

С. в. связан с *энтропией* S системы соотношением Больцмана

$$S = k \ln \Gamma.$$

При фиксированных значениях $\mathscr{E}$ и N С. в. имеет максимальную величину для равновесного состояния. При расчете С. в. существенно, считаются ли одинаковые частицы различимыми или нет, поэтому в квантовой и классич. теориях получаются различные значения С. в. Из условия максимума С. в. впервые были получены квантовые распределения Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна. *Д. Н. Зубарев.*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ – величина, обратная нормирующему множителю в канонич. *Гиббса распределении* в статистической физике классических систем и равная интегралу по всем фазовым переменным p, q системы:

$$Z = (N! h^{3N})^{-1} \int dpdq \exp[-H(p,q)/kT],$$

где $H(p, q)$ – *Гамильтона функция* системы, N – число частиц, T – абсолютная температура. Для системы N частиц (без внутренних степеней свободы), взаимодействующих с парным потенциалом $\Phi(|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|)$, функция Гамильтона (полная энергия как функция координат и импульсов всех частиц):

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2/2m + \sum_{i<j} \Phi(|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j|),$$

$dpdq = d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{q}_1 \ldots d\boldsymbol{p}_N d\boldsymbol{q}_N$ – элемент объема фазового пространства, множитель $1/N!$ связан с тождественностью частиц, множитель h^{-3N} – с тем, что наименьший размер ячейки в фазовом пространстве равен h, если рассматривать С. и. как предел *статистической суммы* при переходе от квантовой механики к классической. С. и. называют также интегралом состояний.

С. и. связан со свободной энергией системы соотношением

$$F = -kT \ln Z,$$

к-рое является одним из основных в статистич. физике, так как позволяет вычислить F как функцию температуры, объема и числа частиц в зависимости от закона взаимодействия между частицами, а следовательно, вычислить и другие *термодинамические потенциалы*.

Интегрирование по импульсам в С. и. легко выполняется, в результате С. и. сводится к конфигурационному интегралу по $3N$ координатам:

$$Z = (V^N/N!\Lambda^{3N}) \int dq \exp\left\{-\sum_{i<j} \Phi(|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j|)/kT\right\},$$

где $\Lambda = h(2\pi mkT)^{-1/2}$ – длина волны де Бройля, соответствующая энергии kT. Для идеального газа $Z = V^N/N!\Lambda^{3N}$. В квантовой механике координаты и импульсы являются некоммутирующими операторами и подобное упрощение статистич. суммы невозможно. Вычисление С. и.– одна из основных задач статистич. физики классич. систем (см., напр., *Вириальное разложение*).

Лит.: [1] Майер Дж., Гепперт - Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980, гл. 8; [2] Хилл Т., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1960, гл. 5; [3] Леонтович М. А., Введение в термодинамику. Статистическая физика, М., 1983.

Д. Н. Зубарев.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР, матрица плотности Неймана,– самосопряженный положительно определенный линейный оператор с единичным следом в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Каждый квантовый ансамбль задается соответствующим С. о. $\hat{\rho}$. Среднее значение наблюдаемой $\hat{A}$ в состоянии $\hat{\rho}$ вычисляется по формуле

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}\, \hat{A}\hat{\rho}, \quad \mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1.$$

Любому нормированному вектору Φ из $\mathscr{H}$ отвечает среднее

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}\, \hat{A}\, \hat{P}_\Phi = (\Phi, \hat{A}\Phi),$$

где $\hat{P}_\Phi$ – оператор проектирования на одномерное подпространство $\{\lambda\Phi | \lambda \in \mathbb{C}\}$, порожденное вектором Φ. (Φ, Ψ) – скалярное произведение в $\mathscr{H}$. В обозначениях Дирака $\hat{P}_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$. Любой С. о. можно представить в виде:

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \hat{P}_{\varphi_n},$$

где $0 \leqslant p_n \leqslant 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, $\{\varphi_n\}$ – ортонормированный базис в $\mathscr{H}$, p_n – вероятность того, что система находится в состоянии с вектором $\varphi_n \in \mathscr{H}$. Во всех тех случаях, когда $\hat{\rho} = \hat{P}_\Phi$, состояние называется чистым, в остальных случаях – смешанным. С. о. удовлетворяет квантовому *Лиувилля уравнению*. Для равновесных систем С. о. коммутирует с гамильтонианом.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984; [2] Ландау Л. Д., «Z. Phys.», 1927, Bd 45, № 2, S. 430.

Д. П. Санкович.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР – см. *Плотности матрица*, *Термодинамический предел* равновесных состояний.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ уравнений гидромеханики – см. *Статистическая гидромеханика*, *Турбулентности проблема*, *Гидродинамики уравнения*.

СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ – совокупность общих проблем математической физики, возникших из стремления четко осмыслить основные концепции и факты статистической механики. Эти проблемы можно условно разделить на следующие группы:

1) обоснование основных принципов статистич. механики,

2) равновесные ансамбли в термодинамич. пределе, вывод термодинамич. соотношений,

3) фазовые переходы,

4) эволюция ансамблей, проблема релаксации, исследование кинетич. и гидродинамич. уравнений,

5) основные состояния, элементарные возбуждения (в случае квантовых систем).

Статистич. механика изучает системы, состоящие из большого числа (микроскопических) частиц, заключенных внутри большой (сравнительно с характерными размерами частиц) области V пространства $\mathbb{R}^3$. Статистич. механика – в зависимости от способа описания системы – разделяется на классическую и квантовую.

Описание классич. системы, заключенной в области V, включает указание пространства X возможных состояний каждой отдельной частицы (одночастичное пространство), а также совокупности

$$\Omega_V = \cup_{N\geqslant 0} X^N$$

допустимых конфигураций

$$\omega = \{x_1, \ldots, x_N\};\ x \in X^N;\ i = 1, \ldots, N;\ N = 1, 2, \ldots,$$

конечного числа частиц внутри V, задание энергии $H = H_V(\omega)$ для каждой конфигурации $\omega \in \Omega_V$ и закона эволюции системы во времени (называемого иначе д и н а м и к о й), то есть полугруппы (чаще всего группы) преобразований U_t^V, $t \geqslant 0$, пространства Ω_V в себя, сохраняющих энергию H_V:

$$H_V(U_t^V \omega) = H_V(\omega)$$

для любой $\omega \in \Omega_V$ и любого t. Во многих случаях пространство Ω_V бывает естественно наделено симплектич. структурой и преобразования U_t^V строятся с помощью решений так наз. гамильтоновых уравнений движения, порождаемых функцией Гамильтона $H = H_V$ (см. [1]). Кроме того, обычно в пространстве X существует нек-рая естественная мера dx такая, что мера

$$d^V x = \oplus_N d^N x \text{ в } \Omega_V$$

($d^N x = dx \times \ldots \times dx$ – мера в X^N) инвариантна относительно эволюции U_t^V. Однако для макроскопич. систем, состоящих из большого числа частиц, столь детальное описание их состояний и динамики этих состояний (то есть описание траекторий каждой отдельной частицы) оказывается малообозримым, да и бесполезным с точки зрения изучения макроскопич. свойств всей системы. Эти свойства определяются лишь нек-рыми средними характеристиками конфигурации ω, а также ее эволюции $\omega(t)$, $t > 0$, во времени: напр., долей $\rho_1(S;\ t)$, $S \subset X$, частиц в конфигурации $\omega(t)$, состояния к-рых принадлежат заданному множеству S одночастичного пространства X, или долей $\rho_2(S_1, S_2;\ t_1, t_2)$ частиц, состояния к-рых в момент времени t_1 принадлежат множеству $S_1 \subset X$, а в момент t_2 – множеству $S_2 \subset X$ и т. д.

Эти соображения привели к следующей радикальной идее: состояние макроскопич. системы следует задавать каким-либо вероятностным распределением P на фазовом пространстве Ω_V, причем эволюция p_t, $t > 0$, этого распределения во времени порождается исходной эволюцией самой системы:

$$p_t(A) = \mathsf{P}\{(U_t^V)^{-1} A\},\ A \subset \Omega_V, \qquad (1)$$

где $(U_t^V)^{-1} A$ – полный прообраз множеств $A \subset \Omega_V$ при отображении U_t^V. Это соглашение дополняется следующим постулатом: для всякого «хорошего» распределения вероятностей P на фазовом пространстве Ω_V и подходящей физич. величины f (то есть действительной функции на Ω_V) принимаемые ею значения с вероятностью, близкой к единице (вычисленной с помощью распределения P), близки к ее среднему значению $\langle f \rangle_{\mathsf{P}}$. Одна из проблем, относящаяся к обоснованию статистич. механики, состоит в том, чтобы придать этому утверждению точную форму. Один из возможных результатов такого рода: пусть распределение P на Ω_V обладает свойством быстрого убывания зависимости (то есть порождаемые им распределения вероятностей конфигураций для двух далеко отстоящих друг от друга подсистем почти независимы), а физич. величина сумматорна, то есть

$$f(\omega) = \sum \varphi(\omega|_S)\, S \subset (1, \ldots, N],\ |S| = n, \qquad (2)$$

где $n \leqslant \infty$ произвольно, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – нек-рая симметрич. «хорошо локализованная» функция на пространстве X^n (то есть φ быстро стремится к нулю при взаимном удалении точек $x_1, \ldots, x_n$ друг от друга), а $\omega|_S = \{x_i,\ i \in S\}$, если конфигурация $\omega = \{x_i,\ i = 1, \ldots, N\}$. В этом случае $\langle f \rangle_{\mathsf{P}} \sim |V|$, а флуктуации $\Delta f \simeq f - \langle f \rangle_{\mathsf{P}} \sim |V|^{1/2}$ (с вероятностью, близкой к единице при больших $|V|$), причем распределение величины $\Delta f / |V|^{1/2}$ близко к нормальному (по-прежнему при $|V| \to \infty$, см. [2]).

Распределение вероятностей P на фазовом пространстве называется р а в н о в е с н ы м, если оно инвариантно относительно динамики U_t^V. Пусть кроме энергии $H_V = H_V^0$ существует еще несколько так наз. интегралов движения $H_V^1, \ldots, H_V^k$, то есть функций на Ω_V, инвариантных относительно динамики U_t^V (напр., число частиц в системе, суммарный импульс частиц, суммарный спин и т. д.). Всякое распределение на Ω_V вида

$$d\mathsf{P} = f(H_V^0, H_V^1, \ldots, H_V^k)\, d^V x,$$

где $d^V x$ – инвариантная мера на Ω_V, а $f > 0$ – нек-рая функция (возможно и обобщенная), является равновесным распределением. Равновесное распределение, задаваемое плотностью вида

$$f(\xi^0, \ldots, \xi^k) = Q^{-1} \prod_{i=0}^k \delta(\xi^i - \bar{\xi}^i), \quad \bar{\xi}^i \in \mathbb{R}, \qquad (3)$$
$$i = 0, \ldots, k$$

(Q^{-1} – нормировочный множитель), называется м и к р о к а н о н и ч е с к и м р а с п р е д е л е н и е м (или м и к р о к а н о н и ч е с к и м а н с а м б л е м), сосредоточенным на поверхности

$$S_{\bar{\xi}^0, \ldots, \bar{\xi}^k} = \left\{\omega \in \Omega_V : H^i(\omega) = \bar{\xi}^i,\quad i = 0, \ldots, k\right\} \qquad (4)$$

постоянства первых интегралов.

В статистич. механике постулируется, что микроканонич. распределение (3) является равновесным распределением (то есть вычисляемые с его помощью средние значения физич. величин с большой точностью совпадают с экспериментально измеряемыми значениями). Долгое время полагали, что для обоснования этого постулата нужно доказать известную эргодич. гипотезу: в случае когда $H_V^0, H_V^1, \ldots, H_V^k$ – полный набор (гладких) интегралов движения, единственным (гладким) равновесным распределением на любой поверхности $S_{\bar{\xi}^0, \ldots, \bar{\xi}^k}$ является микроканонич. распределение. Попытки доказательства этой гипотезы породили современную эргодич. теорию (см. [3], [4]). Ныне, однако, стало ясным, что эргодичность конечных систем является излишне жестким предположением: для обоснования постулата о микроканонич. распределении достаточно установить эргодичность системы в термодинамич. пределе $V \nearrow \mathbb{R}^3$. Кроме микроканонич. распределения часто рассматривают г и б б с о в с к о е р а в н о в е с н о е р а с п р е д е л е н и е (на-

зываемое иначе большим каноническим ансамблем), определяемое плотностью

$$f = Z^{-1}\exp\left\{-\beta\left(H_V^0 + \mu_1 H_V^1 + \ldots + \mu_k H_V^k\right)\right\}, \qquad (5)$$

где Z^{-1} – нормирующий множитель, $\beta > 0$, μ_1, ..., μ_k – произвольные действительные параметры (параметр $\beta = 1/k_Б T$, где T – абсолютная температура, $k_Б$ – абсолютная константа, называемая постоянной Больцмана). Рассматривают иногда и промежуточные распределения (малые канонические ансамбли) с плотностью вида:

$$f = \tilde{Z}^{-1}\exp\left\{-\beta\left(H_V^0 + \mu_{i_1} H_V^{i_1} + \ldots + \mu_{i_s} H_V^{i_s}\right)\right\} \times$$
$$\times \prod_{p=1}^{k-s} \delta(H_{j_p} - \bar{\xi}_{j_p}), \qquad (6)$$

где i_1, ..., i_s и j_1, ..., j_p – два дополняющих друг друга подмножества индексов (1, 2, ..., k). Гиббсовское распределение (5), а также распределение (6) во многом удобнее микроканонич. распределения (3), а их использование оправдывается следующей гипотезой – так наз. принципом эквивалентности ансамблей: для «подходящей» физич. величины на Ω_V (напр., для сумматорной величины вида (2)) при значениях параметров β, μ_1, ..., μ_k, при к-рых существует только одна равновесная фаза, среднее $\langle f\rangle_{\beta,\,\mu_1,\,\ldots,\,\mu_k}$, вычисленное по гиббсовскому распределению (5) при больших V, близко к среднему $\langle f\rangle_{\bar{\xi}^0,\,\ldots,\,\bar{\xi}^k}$, вычисленному по микроканонич. ансамблю на поверхности $S_{\bar{\xi}^0,\,\ldots,\,\bar{\xi}^k}$, где

$$\langle\bar{\xi}^i\rangle = \langle H_V^i\rangle_{\beta,\,\mu_1,\,\ldots,\,\mu_k}.$$

Доказательство этой эквивалентности также составляет одну из общих математич. проблем статистич. механики и термодинамики (см. [5]–[7]).

Принятый в статистич. механике способ описания систем оправдан при достаточно большом объеме области V, иначе говоря, статистич. механика изучает асимптотич. свойства систем в предельном переходе $V \nearrow \mathbb{R}^3$ (то есть рассматривается нек-рая последовательность систем из одних и тех же частиц, заключенных соответственно в объемах $V_1 \subset V_2 \subset$, ..., причем $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \mathbb{R}^3$). Этот предельный переход называют обычно термодинамическим предельным переходом. Одна из первых задач, связанных с термодинамич. пределом, состоит в том, чтобы, исходя из равновесных ансамблей, определить так наз. термодинамические потенциалы и соотношения термодинамики. Оказывается, все термодинамич. потенциалы могут быть найдены из асимптотики при $V \nearrow \mathbb{R}^3$ нормировочных множителей Q^{-1}, Z^{-1}, $\tilde{Z}^{-1}$ и т. д. в ансамблях (3), (5), (6); так, напр., термодинамический потенциал Гиббса равен

$$p(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k) = \lim_{V \nearrow \mathbb{R}^3} \frac{\ln Z}{|V|}, \qquad (7)$$

где Z^{-1} – нормирующий множитель в гиббсовском ансамбле (5). Аналогично вводятся и другие термодинамич. функции, а также устанавливаются связывающие их соотношения. Большинство возникающих здесь математич. задач (существование предела, свойства термодинамич. потенциалов и т. д.) исследовано довольно полно, хотя и имеется ряд нерешенных вопросов (см. [7]).

С конца 60-х гг. 20 в. в математич. статистич. механике утвердился следующий общий подход: вместо изучения асимптотич. свойств конечных систем в термодинамич. предельном переходе следует рассматривать определенным образом построенные идеализированные *бесконечные системы*, характеристики к-рых совпадают с исследуемой асимптотикой (неявно такая точка зрения встречалась и в более ранних работах). Рассмотрение бесконечных систем придает наглядный смысл несколько формальной процедуре термодинамич. предельного перехода и позволяет вообще обойтись без нее. Фазовое пространство Ω_∞ бесконечной системы состоит из бесконечных конфигураций частиц $\omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_i \in X^V$, $i = 1, 2, \ldots$, располагающихся во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, а их динамика $U_t^\infty : \Omega_\infty \to \Omega_\infty$, $t \in \mathbb{R}$, строится как предел динамик U_t^V конечных систем при $V \nearrow \mathbb{R}^3$. Макроскопич. состояния бесконечной системы задаются по-прежнему вероятностными распределениями на пространстве Ω_∞, к-рые эволюционируют в соответствии с динамикой U_t^∞ в Ω_∞ (см. (1)). На пространстве Ω_∞ можно ввести предельные гиббсовские распределения $p^\infty_{\beta,\,\mu_1,\,\ldots,\,\mu_k}$, к-рые строятся определенным образом с помощью гиббсовских распределений (5) $p^V_{\beta,\,\mu_1,\,\ldots,\,\mu_k}$ в конечных системах (см. [5], [9]). Хотя введение бесконечных систем является общепринятым и плодотворным приемом, оно приводит к сложным и во многом нерешенным еще математич. задачам.

Одна из главных проблем статистич. механики состоит в изучении так наз. *фазовых переходов*, то есть резкого изменения состояния макроскопич. системы, находящейся в состоянии равновесия, при небольшом изменении описывающих это равновесие параметров – температуры, плотности частиц, давления и т. д. При современном математич. подходе в терминах предельных гиббсовских распределений задачу о фазовых переходах можно описать следующим образом: при нек-рых значениях параметров β, μ_1, ..., μ_k можно построить, вообще говоря, несколько гиббсовских распределений на Ω_∞, инвариантных относительно действия группы T^3 сдвигов в пространстве $\mathbb{R}^3$ (или нек-рой ее подгруппы $G \subset T^3$ такой, что факторгруппа T^3/G компактна) и эргодичных относительно этой группы (так наз. чистые фазы). Точка $(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ пространства параметров называется регулярной, если существует достаточно малая ее окрестность, внутри к-рой структура множества чистых фаз, а также основные их качественные свойства (напр., характер убывания корреляций) остаются неизменными. При этом предполагается, что все числовые характеристики этих распределений (корреляционные функции, семиинварианты и т. д.) в окрестности регулярных точек зависят от параметров β, μ_1, ..., μ_k аналитически. Все остальные (не регулярные) точки в пространстве параметров β, μ_1, ..., μ_k и являются точками фазового перехода. Таким образом, в точках фазового перехода происходит резкое изменение либо в структуре гиббсовских распределений (скажем, исчезает или возникает новая фаза) или в их свойствах (напр., убывание корреляций из экспоненциального становится степенным). При этом считается, что какие-нибудь из характеристик распределения как функции параметров β, μ_1, ..., μ_k имеют в точке фазового перехода особенность. Описать для каждой конкретной системы структуру фаз, их свойства, определить точки фазового перехода, характер особенностей в этих точках и т. д. – этот круг вопросов и составляет проблему фазовых переходов. Хотя существует большой класс модельных систем, для к-рых (при малых значениях температуры) разработаны нек-рые общие методы решения этой задачи (см. [9]), теория фазовых переходов еще далека от окончательного завершения. Особенно сложным является изучение так наз. критич. точек (в к-рых, грубо говоря, происходит слияние разных фаз; см. [10]), поскольку в этих точках гиббсовское распределение имеет очень медленное убывание корреляций.

Большой круг проблем статистич. механики связан с изучением эволюций распределений на фазовом пространстве, в частности с проблемой релаксации, то есть приближения к равновесию. Считается, что по прошествии

большого времени всякое распределение на фазовом пространстве приближается к равновесному (гиббсовскому) распределению. Несмотря на то что выработано много общих представлений о механизме этого процесса, а также исследован ряд упрощенных его моделей, законченной теории пока не существует. Основные представления о процессе релаксации (во многом еще гипотетичные) сводятся к тому, что этот процесс проходит три стадии. На первой из них (за время столкновений нескольких частиц) распределение p_t приходит к такому режиму эволюции, к-рый целиком определяется изменением первой корреляционной функции (то есть распределением в одночастичном пространстве X). Затем, во второй – кинетич. стадии, протекающей за промежуток времени порядка продолжительности «свободного пробега» частицы, изменение первой корреляционной функции переходит в такой режим эволюции, при к-ром все зависит лишь от средних значений плотности частиц, их скорости, плотности, энергии и т. д. Наконец, наступает последняя (гидродинамическая) стадия, во время к-рой (сравнимое с макроскопич. временем) эти средние значения плотности, скорости и т. д. приближаются к равновесным значениям (см. [11], [12]). Обоснование этой картины в целом или в отдельных ее частях представляет сложную математич. проблему, и до ее полного решения сейчас еще далеко. Основным средством исследования являются различные системы так наз. кинетич. уравнений – как точных, то есть непосредственно вытекающих из определения уравнения Лиувилля (иерархич. цепочка ББГКИ), так и приближенных (уравнения Больцмана, Чепмена – Энскога, Власова – Ландау, гидродинамич. уравнения и т. д.). Сами эти уравнения и их соотношение с истинной картиной эволюции также являются предметом пристального математич. изучения.

Квантовая статистич. механика основана на тех же принципах, что и классическая. Квантовое описание системы частиц, находящихся внутри области V, включает указание гильбертова пространства $\mathcal{H}_V$ – пространства состояний системы и самосопряженного оператора H_V, действующего в $\mathcal{H}_V$, – оператора энергии системы. При этом динамика системы задается группой $U_t^V = \exp\{iH_V\}$, $t \in \mathbb{R}$, унитарных операторов, действующих в $\mathcal{H}_V$, причем динамика $\{U_t^V,\ t \in \mathbb{R}\}$ порождает группу автоморфизмов в W_t^V алгебры $\mathfrak{U}(\mathcal{H}_V)$ ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}_V$ (наблюдаемых):

$$W_t^V A = U_t^V A \left(U_t^V\right)^{-1}.$$

Переход к статистич. описанию в квантовом случае состоит в задании нек-рого «среднего» $\langle A \rangle$ на алгебре $\mathfrak{U}(\mathcal{H}_V)$, то есть линейного положительного функционала $\rho(A) = \langle A \rangle$ на этой алгебре, называемого обычно состоянием. Всякое состояние на $\mathfrak{U}(\mathcal{H}_V)$ может быть записано в виде

$$\rho(A) = \operatorname{Tr} A\tilde{\rho},$$

где ρ – положительный ядерный оператор из $\mathfrak{U}(\mathcal{H}_V)$, причем $\operatorname{Tr}\tilde{\rho} = 1$. Оператор $\tilde{\rho}$ обычно называют матрицей плотности состояний ρ. Эволюция состояния ρ во времени задается эволюцией W_t^V самой алгебры:

$$\rho_+(A) = \rho((W_t^V)^{-1}A).$$

Состояния, инвариантные относительно этой эволюции, по-прежнему называются равновесными. Для системы, в к-рой кроме энергии $H_V = H_V^0$ имеется еще несколько попарно коммутирующих интегралов движения $H_V^1, \ldots, H_V^k$, равновесное состояние с матрицей плотности

$$\tilde{\rho} = Z^{-1} \exp\left\{-\beta\left(H_V^0 + \mu_1 H_V^1 + \ldots + \mu_k H_V^k\right)\right\}$$

называется гиббсовским состоянием ($\beta > 0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ – параметры, Z^{-1} – нормирующий множитель). Аналогично классич. случаю при переходе к термодинамич. пределу $V \nearrow \mathbb{R}^3$ вводится бесконечная квантовая система (см. [5]). При этом задача о фазовых переходах в квантовых системах в терминах предельных гиббсовских состояний формулируется аналогично классич. случаю.

Наконец, в квантовой статистич. механике также существует весь круг кинетич. проблем, хотя, конечно, механизмы процесса релаксации в квантовой механике сложнее классических и изучены еще меньше.

Существует специфическая для квантового случая задача о так наз. основном состоянии системы (соответствующем нулевой температуре) и о возбуждениях этого основного состояния, имеющих конечную энергию. С этой проблемой связано изучение ряда интересных явлений (сверхтекучесть, сверхпроводимость), происходящих при очень низких температурах (см. [13]). Проблема построения и изучения квантовых полей может быть исследована с помощью развитых в статистич. механике методов теории гиббсовских полей (см. [14], [15]).

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989; [2] Нахапетян Б. С., в кн.: Многокомпонентные случайные системы, М., 1978, с. 276–88; [3] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [4] Крылов Н. С., Работы по обоснованию статистической физики, М.–Л., 1950; [5] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [6] Халфина А. М., «Математич. сб.», 1969, т. 80, № 1, с. 3–51; [7] Минлос Р. А., Хаитов А., «Труды Моск. математич. об-ва», 1975, т. 32, с. 147–86; [8] Ланфорд III О. Э., в кн.: Гиббсовские состояния в статистической физике, пер. с англ., М., 1978, с. 159–218; [9] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов. Строгие результаты, М., 1980; [10] Стенли Г., Фазовые переходы и критические явления, пер. с англ., М., 1973; [11] Либов Р., Введение в теорию кинетических уравнений, пер. с англ., М., 1974; [12] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, т. 1–2, пер. с англ., М., 1978; [13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964; [14] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [15] Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. Сб. статей, пер. с англ., М., 1978.

Р. А. Минлос.

СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ – задачи, возникающие при применении математического аппарата в статистической физике. Они в основном связаны с двумя направлениями статистич. теории: с равновесной статистич. механикой, основные математич. проблемы к-рой связаны с разработкой методов расчета средних по равновесному *Гиббса распределению* (см. *Статистической механики математические задачи*) и с неравновесной статистич. физикой, основные трудности к-рой составляют проблемы получения эволюционных уравнений для функций распределения, характеризующих систему на разных этапах ее эволюции, с последующим их решением.

В задачу методов равновесной статистич. механики входит расчет средних следующих типов (в случае использования канонич. распределения Гиббса):

$$Z = \operatorname{Tr} e^{-H/\theta}; \quad \langle A \rangle = \frac{1}{Z} \operatorname{Tr} A e^{-H/A};$$

$$\langle BA(t) \rangle = -\frac{1}{Z} \operatorname{Tr} BA(t) e^{-H/A}$$

и т. д., где H – гамильтониан системы, $\theta = kT$ – температура, $A(t)$ – оператор в гейзенберговском временно́м представлении, Z – статистич. сумма, связанная со свободной энергией системы соотношением

$$F = -\theta \ln Z$$

(в случае использования большого канонич. распределения вместо оператора H фигурирует оператор $H - \mu N$, где μ – химич. потенциал, N – число частиц, вместо Z – большая статистич. сумма, вместо F – термодинамич. потенциал $\Omega = F - \mu N$, и т. д.).

Расчет безвременных средних Z и $\langle A \rangle$ решает проблемы равновесной теории (все равновесные характеристики, такие, как внутренняя энергия, теплоемкость, уравнения со-

стояния, статич. восприимчивости и т. д., определяются методами термодинамики, исходя из свободной энергии F), а также теории флуктуаций; расчет величин типа $\langle BA(t)\rangle$ позволяет исследовать целый ряд динамич. (зависящих от частоты) восприимчивостей системы, коэффициентов переноса и т. д., а также исследовать особенности простейших возбуждений системы (в общем случае при $\theta \neq 0$), их энергию, затухание и т. д.

Указанные средние рассчитываются до конца только в исключительных случаях: для идеальных систем и для нек-рых специальных моделей. Эти расчеты в дальнейших исследованиях могут служить нулевым приближением. Наиболее часто рассматриваемыми моделями неидеальных статистич. систем являются системы с прямым взаимодействием частиц друг с другом (взаимодействием конечного радиуса, кулоновским взаимодействием и др.), с взаимодействием частиц с полем типа фотонного (в твердом теле описывающего тепловое движение кристаллич. решетки), дискретные системы типа Изинга и гейзенберговского магнетика с взаимодействием узлов конечного радиуса действия, а также сочетания взаимодействий подобных типов. В представлении вторичного квантования гамильтониан $H = H_0 + H_1$ в этих случаях выражается через квадратичные комбинации операторов рождения и уничтожения (в части H_0 без взаимодействия), четвертную форму (если H_1 включает прямое взаимодействие частиц), тройную форму типа используемой в квантовой электродинамике (электронфотонное взаимодействие в H_1) и т. д.

Приближенные методы расчета указанных средних в большинстве случаев основываются на добавлении поправок к результатам, полученным для случая $H = H_0$ (если нулевое приближение в физич. отношении действительно является таковым), имеющих вид явного или модифицированного разложения по степеням параметра, определяющего интенсивность взаимодействия, включенного в гамильтониан H_1. При сопоставлении рассматриваемой формальной модели с реальными системами в целом ряде случаев, имеющих прикладной интерес, параметр взаимодействия, по к-рому производится «разложение», не оказывается малым. Такие трудности существуют в проблеме электронного газа в металлах, в теории неидеального бозе-газа, в теории жидкостей, при рассмотрении ситуаций в области фазовых переходов или вблизи критич. точек и т. д.

Если отвлечься от этих проблем постановочного характера и считать, что малый параметр для каких-то частных случаев все же имеется, то при развитии теории возмущений по нему появляются специфические для многотельных систем трудности, формально проявляющиеся в появлении расходимостей в членах, учитывающих многочастичные корреляции. Их появление связано с тем, что простой ряд по целым степеням используемого «малого» параметра начиная с нек-рой степени уже не отражает действительной зависимости исследуемой характеристики системы от этого параметра. Эти трудности, как чисто математические, в принципе преодолимы. Для выявления этих «неаналитически» зависящих от малого параметра поправок разработаны методы, в основе своей связанные с учетом определенных классов наиболее существенных для каждого конкретного случая формального ряда теории возмущений по параметру взаимодействия.

В задачах статистич. механики классич. систем с прямым взаимодействием частиц исследование в большинстве случаев строится на основе развития метода Боголюбова (см. [1]) или метода Майера (см. [2]). В первом случае, связанном с исследованием цепочки интегро-дифференциальных уравнений для одно-, двух- и т. д. частичных функций распределения, основой аппроксимационной процедуры является обрыв этой цепочки. При этом входящая в интегральную часть последнего из рассматриваемых уравнений цепочки функция распределения более высокого ранга выражается с помощью какой-либо комбинации функций распределения низшего порядка. Процедура такого расцепления исходит из анализа физич. особенностей системы и характерного для данной ситуации малого параметра. Так, в системах с короткодействующими силами взаимодействия — это куб отношения радиуса взаимодействия к среднему расстоянию между частицами (основа так наз. вириального разложения, или разложения по обратным степеням удельного объема $v = V/N$); в системах с кулоновским взаимодействием такой параметр связан с отношением средней энергии кулоновского взаимодействия частиц к средней их кинетич. энергии и т. д. После расцепления цепочки математич. проблема сводится к решению системы нелинейных в своей интегральной части уравнений (или одного нелинейного интегрального уравнения) относительно функций распределения, подчиненных условиям нормировки и ослабления корреляций (распадение многочастичных функций при «раздвигании» пространственных их аргументов на произведение функций более низкой частичности), играющих роль своеобразных граничных условий.

Метод Майера (см. [2]) для систем с короткодействующим потенциалом взаимодействия

$$\Phi_{ij} = \Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|),$$

включающим бесконечное отталкивание на малых расстояниях, исходит из представления классич. интеграла состояний Z в виде:

$$\frac{Z}{Z_{\text{ид}}} = \frac{1}{V^N}\int_{(V)} d\boldsymbol{r}_1 \dots d\boldsymbol{r}_N \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N}(1 + f_{ij}),$$

где функция Майера

$$f_{ij} = \exp(-\Phi_{ij}/\theta) - 1,$$

и получения для удельной свободной энергии

$$F/N = -\theta \ln Z^{1/N}$$

и других характеристик системы вириальных разложений с коэффициентами, выражающимися через интегралы от произведений все возрастающего числа функций f_{ij}, связанных попарно одним из двух своих аргументов $\boldsymbol{r}_j$ или $\boldsymbol{r}_i$ (для реальных моделей потенциала Φ_{ij} эти интегралы вычисляются с помощью численных методов). Математич. проблемы, возникающие в связи с использованием вириального разложения,— это проблемы разработки методов суммирования этих рядов (хотя бы частичного) с целью подойти к области фазового перехода газ — жидкость или критич. области, а также общие проблемы сходимости самого разложения и т. д.

В задачах статистич. механики неидеальных квантовых систем, связанной с представлением операторов динамич. величин через квантовые операторы рождения или уничтожения, эффективными оказались методы, развитые первоначально в квантовой теории поля. Наиболее распространенными являются бестемпературная многовременная техника функций Грина причинного типа, безвременная температурная техника и метод двухвременных температурных функций Грина. В первых двух подходах (см. [3]) формальный ряд теории возмущений по интенсивности взаимодействия частиц друг с другом или каким-либо полем в известном смысле аналогичен соответствующим разложениям в квантовой теории поля (в чисто температурной технике роль «времени» играет мнимая обратная температура). Поэтому значительное развитие в этих формализмах получили диаграммные представления ряда теории возмущений, сводящиеся к рассмотрению вместо исходных частиц, и взаимодействия — квазичастиц с перенормированной энергией и конечным затуханием, перенормированного эффективного взаимодействия (вершинных частей) и т. д. Система интегральных уравнений для функции Грина квазичастиц и вершинных частей или эффективного взаимодействия составляется, как правило, с таким расчетом, чтобы ее решение было бы эквивалентно учету бесконечной последовательности членов формального ряда теории воз-

мущений, отобранных по определенному принципу (напр., для данной конкретной системы наиболее сильных в каждом из порядков теории возмущений).

В двухвременном температурном формализме (см. [1], [4]) аналогичные задачи связаны с исследованием боголюбовского типа цепочки зацепляющихся уравнений для функций Грина возрастающей «частичности» и составлением замкнутой системы интегральных уравнений (как правило, нелинейных), являющейся следствием реализации процедуры расцепления. Математич. проблемы, связанные с исследованием этих уравнений, ограничиваются в основном отысканием определенных асимптотик их решений, гарантированных в смысле приближения, или классом суммированных диаграмм, или способом расцепления.

Такими методами исследуются такие системы, как электронный газ с кулоновским взаимодействием (учет только наиболее сильных вкладов в каждом порядке по теории возмущений эквивалентен учету экранировки исходного взаимодействия), системы низкой плотности с короткодействующими силами взаимодействия (первый этап суммирования или эквивалентной ему операции приводит к замене исходного взаимодействия на эффективное, определяемое в результате решения уравнения, аналогичного квантовомеханич. уравнению для t-матрицы рассеяния), электронфотонная система, гейзенберговская магнитная система и т. д.

Ряд задач статистич. механики допускает асимптотически точное (в предельном статистич. смысле $N\to\infty$, $N/V=\text{const}$) рассмотрение: это — системы с факторизующимся четверным взаимодействием, обобщающим модельную сверхпроводящую систему типа Бардина — Купера — Шриффера и др. Эта методика (см. [5]) связана с построением аппроксимирующего гамильтониана, допускающего точное решение, с последующим доказательством асимптотич. близости результатов, полученных с его помощью, к тем, к-рые соответствуют исходной системе.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 1, Киев, 1969; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей, пер. с англ., М., 1961; [4] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962; [5] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, М., 1965; [6] Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В., Метод функций Грина в статистической механике, М., 1961; [7] Зубарев Д. Н., «Успехи физич. наук», 1960, т. 71, № 1, с. 71–116; [8] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974.

И. А. Квасников.

СТАТИЧНОСТИ ПРЕДЕЛ — см. *Керра — Ньюмена черная дыра.*

СТАЦИОНАРНАЯ СВЯЗЬ — *связь механическая*, не изменяющаяся со временем.

СТАЦИОНАРНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА — см. *Маркова цепь, Маркова цепь* с непрерывным временем.

СТАЦИОНАРНОГО ДЕЙСТВИЯ ПРИНЦИП — то же, что *наименьшего действия принцип.*

СТАЦИОНАРНОГО ДЕЙСТВИЯ ПРИНЦИП Гамильтона — Остроградского — один из *вариационных принципов классической механики.* См. *Гамильтона — Остроградского принцип* стационарного действия.

СТАЦИОНАРНОГО ДЕЙСТВИЯ ПРИНЦИП Лагранжа — один из *вариационных принципов классической механики.* См. *Лагранжа принцип* стационарного действия.

СТАЦИОНАРНОГО ДЕЙСТВИЯ ПРИНЦИП Якоби — один из *вариационных принципов классической механики.* См. *Якоби принцип* стационарного действия.

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ — движение в динамике твердого тела, отвечающее той фазовой траектории, на которой функционально зависимы имеющиеся первые интегралы. Напр., интегралы площадей и энергии зависимы на перманентных вращениях, нетривиальные интегралы в случае Лагранжа — Пуассона зависимы на регулярных прецессиях, минимум интеграла Ковалевской дает решения Делоне.

В. А. Самсонов.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Маркова цепь* с непрерывным временем.

СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ квантовомеханической системы — состояние физической системы, в котором ее энергия имеет определенное, не меняющееся со временем значение. В С. с. средние значения всех физич. величин, характеризующих систему, также не меняются с течением времени.

СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА — см. *Шредингера уравнение.*

СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ МЕТОД — метод вычисления асимптотики при $\tau\to+\infty$ *осциллирующего интеграла*

$$I(\tau,\lambda)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau F(x,\lambda)}\,\Phi(x,\lambda)\,dx_1\ldots dx_n$$

в окрестности *критических точек* фазовой функции (фазы) $F(x,\lambda)$ (см. *Перевала метод*).

Пусть фаза $F(x,\lambda)$, рассматриваемая как семейство функций $F(\cdot,\lambda)$, является семейством *общего положения.* Тогда (для почти всех λ) функция $F(\cdot,\lambda)$ имеет только невырожденные критич. точки. Те значения параметра λ, для к-рых фаза имеет вырожденные критич. точки, образуют гиперповерхность, называемую *каустикой.*

Рассматривается произвольное значение λ параметров вне каустики. Фаза $F(\cdot,\lambda)$, отвечающая этому значению параметра, имеет только невырожденные критич. точки либо вообще не имеет вещественных критич. точек. В первом случае осциллирующий интеграл является интегралом Френеля и имеет порядок $\tau^{-n/2}$ (главный член асимптотики, см. *Коротковолновые асимптотики*). Во втором случае интеграл стремится к нулю быстрее любой степени τ. В соответствии с этим в первом случае область вне каустики называется областью света, а во втором — областью тени.

В точках λ общего положения на каустике фаза $F(\cdot,\lambda)$ имеет критич. точки типа A_2; в окрестности таких точек осциллирующий интеграл является интегралом Эйри. Каждая точка типа A_2 дает в интеграл вклад $\tau^{-n/2+1/6}$. Простейшие особые точки каустики — это ребра возврата. В таких λ фаза $F(\cdot,\lambda)$ имеет критич. точки A_3; осциллирующий интеграл — интеграл Пирси. Каждая точка типа A_3 дает в интеграл вклад $\tau^{-n/2+1/4}$. (Главные члены асимптотики см. в [1].) Критич. точки типа A_3 могут встречаться в семействах $F(\cdot,\lambda)$ фаз, зависящих (по крайней мере) от двух параметров.

Каждая вырожденная критич. точка дает в интеграл $I(\tau,\lambda)$ вклад $\tau^{-n/2+\beta}$. Число β называется показателем особости. Для простых критич. точек A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 $\beta=1/2-1/N$, где N равно $k+1$, $2k-2$, 12, 18, 30 соответственно; N — это число Коксетера соответствующей группы, порожденной отражениями (группы Вейля). Показатель особости β критич. точек типов P_8, X_9, J_{10} равен 1/2.

Теорема (см. [2]). Пусть f — аналитич. функция в окрестности своей критич. точки, главная часть f $\mathbb{R}$-невырождена, точка пересечения биссектрисы положительного октанта в $\mathbb{R}^n$ с многогранником Ньютона f имеет координаты $(t,\ldots,t)$, причем $t>1$. Тогда показатель осцилляции f равен $-1/t$. (Определение $\mathbb{R}$-невырожденности см. в [2].)

Осциллирующий интеграл является частным случаем интеграла метода перевала. Асимптотич. разложение интегралов метода перевала влечет следующее асимптотич. разложение осциллирующего интеграла. Пусть $f(\cdot)=F(\cdot,\lambda)$ — аналитич. функция в окрестности своей критич. точки x_0. Носитель амплитуды $\varphi(\cdot)=\Phi(\cdot,\lambda)$ сосредоточен в достаточно малой окрестности x_0. Тогда осциллирующий интеграл разлагается в асимптотич. ряд:

$$\exp(i\tau f(x_0))\sum_\alpha\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi)\,\tau^\alpha(\ln\tau)^k \quad \text{при } t\to+\infty.$$

При этом параметр α пробегает конечное множество арифметич. прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. Напр., асимптотич. ряд для *Френеля интеграла* с фазой, имеющей критич. точку в 0, выглядит так:

$$\exp(i\tau f(0))\,\tau^{-n/2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j \tau^{-j},$$

где число a_j равно линейной комбинации $2j$-х смешанных производных амплитуды в нуле.

Аналогично исследуются осциллирующие интегралы по полупространству. В этом случае вклад в асимптотику дают также критич. точки ограничения фазы на границу полупространства. Пусть амплитуда $\Phi(\cdot, \lambda)$ имеет компактный носитель, а фаза $F(\cdot, \lambda)$ и ее ограничение на границу полупространства не имеют критич. точек на носителе $\Phi(\cdot, \lambda)$. Тогда осциллирующий интеграл стремится к нулю быстрее любой степени τ при $t \to +\infty$ (область *тени*). Кроме областей света и тени в этом случае может появиться еще область *полутени*. Для λ из этой области фаза $F(\cdot, \lambda)$ не имеет критич. точек, а ее ограничение на границу имеет невырожденные критич. точки 0. В этом случае интеграл называется интегралом Френеля по полупространству и имеет порядок $\tau^{-(n+1)/2}$. Если носитель амплитуды содержит только одну такую критич. точку, то главный член асимптотики имеет вид:

$$\varphi(0)\,(i\tau)^{-1}(2\pi/\tau)^{(n-1)/2}\exp(i\tau f(0) +$$

$$+ (i\pi/4)\operatorname{sign}\tilde{f}''_{x'x'}(0)) + |\det \tilde{f}''_{x'x'}(0)|^{-1/2},$$

где $\operatorname{sign}\tilde{f}''_{x'x'}(0)$ — сигнатура матрицы вторых частных производных ограничения f на границу, а $\det \tilde{f}''_{x'x'}(0)$ — ее определитель.

Лит.: [1] Гийемин В., Стернберг С., Геометрические асимптотики, пер. с англ., М., 1981; [2] Варченко А. Н., «Функциональный анализ и его прилож.», 1976, т. 10, № 3, с. 13–38; [3] Федорюк М. В., Асимптотика. Интегралы и ряды, М., 1987; [4] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений. Монодромии и асимптотики интегралов, М., 1984. *С. В. Чмутов.*

СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — *случайный процесс* $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}\}$, определенный для всех моментов времени $-\infty < t < \infty$, стохастические характеристики которого не зависят от выбора начального момента отсчета (то есть не меняются при замене $t \to t+s$, $s \in \mathbb{R}$). Более точно это означает, что для любого набора моментов времени $t_1, \ldots, t_n$ совместная функция распределения вероятностей значений С. с. п. $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ в эти моменты времени

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = \mathsf{P}\{\omega : \xi_{t_1}(\omega) \leqslant x_1, \ldots, \xi_{t_n}(\omega) \leqslant x_n\},\ \omega \in \Omega$$

(где Ω — вероятностное пространство, на к-ром определены все случайные величины ξ_t) совпадает с функцией распределения $F_{t_1+s,\ldots,t_n+s}$ для значений процесса в моменты $t_1+s, \ldots, t_n+s$ (стационарность в узком смысле). Иногда стационарность процесса $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ понимают более широко, а именно: процесс называется стационарным в широком смысле, если его среднее значение $\langle \xi_t \rangle$ не зависит от t, а ковариация $\langle \xi_{t_1}, \xi_{t_2} \rangle$ имеет вид:

$$\langle \xi_{t_1}, \xi_{t_2} \rangle \equiv \langle \xi_{t_1} \xi_{t_2} \rangle - \langle \xi_{t_1} \rangle \langle \xi_{t_2} \rangle = B(t_1 - t_2),$$

где $B(\tau)$ — положительно определенная функция.

Гауссовский случайный процесс, стационарный в широком смысле, стационарен и в обычном (узком) смысле. *Марковский процесс* $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ с переходной функцией

$$P_{t_1 t_2}(x_1, x_2) = \mathsf{P}\{\xi_{t_1}(\omega) < x_1 \,|\, \xi_{t_2}(\omega) = x_2\}$$

(где $P(A/B)$ — условная вероятность события A при условии, что произошло событие B) является стационарным в том, и только в том случае, когда распределения F_t значений процесса ξ_t в моменты времени t одинаковы для всех t и для всех t_1 и t_2 переходная функция

$$P_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P_{t_1 - t_2}(x_1, x_2),$$

то есть зависит лишь от длительности промежутка времени между t_1 и t_2.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977. *Р. Л. Минлос.*

СТЕЙНЕПРИНГА ТЕОРЕМА — см. *Вполне положительное отображение.*

СТЕКЛОВА СЛУЧАЙ — см. *Твердое тело*; движение в идеальной жидкости.

СТЕЛЛАРАТОР — см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ЧИСЛО в механике — число независимых между собой *возможных перемещений* механической системы. С. с. ч. зависит от числа материальных точек, образующих систему, а также от числа и характера наложенных на систему *связей механических*. Для свободной материальной точки С. с. ч. равно 3, для свободного твердого тела 6, для тела, имеющего неподвижную ось вращения, С. с. ч. равно 1 и т. д. Для любой *голономной системы* (системы с геометрич. связями) С. с. ч. равно числу s независимых между собой координат, определяющих положение системы, и дается равенством

$$s = 3n - k,$$

где n — число точек системы, k — число геометрич. связей. Для *неголономной системы* С. с. ч. меньше числа координат, определяющих положение системы, на число кинематич. связей, не сводящихся к геометрическим (неинтегрируемым). От С. с. ч. зависит число уравнений движения и условий равновесия механич. системы.

СТЕПЕНИ СВОБОДЫ — независимые возможные изменения состояния (в частности, положения) физической системы, обусловленные вариациями ее параметров. В механике С. с. соответствуют независимым перемещениям механич. системы, число к-рых определяется числом образующих систему частиц и наложенных на нее механич. связей (см. *Степеней свободы число* в механике).

В статистич. физике С. с. соответствуют независимым *обобщенным координатам*, определяющим полную энергию или *Гамильтона функцию* системы. Число С. с. позволяет оценить теплоемкость многоатомных газов и твердых тел при высоких температурах, когда применима классич. статистич. механика и энергия равномерно распределена по С. с. Однако при обычных (комнатных) температурах не все С. с. вносят вклад в теплоемкость многоатомного газа, нек-рые из них «выключены», так как могут возбуждаться лишь при достаточно высоких температурах.

В квантовой механике С. с. соответствуют независимым координатам, к-рые определяют *гамильтониан* системы. Непрерывные поля нельзя охарактеризовать конечным числом С. с.

В термодинамике С. с.— независимые термодинамич. параметры, определяющие состояние термодинамич. равновесия системы. Число С. с. f равновесной термодинамич. системы определяется правилом фаз Гиббса:

$$f = k - \varphi + 2,$$

где k — число компонентов, φ — число фаз. *Д. Н. Зубарев.*

СТЕПЕННОЙ РЯД — 1) С. р. по одному комплексному переменному z — функциональный ряд вида:

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k, \qquad (1)$$

где a — центр ряда, b_k — его коэффициенты, $b_k(z-a)^k$ — члены ряда. Существует число r, $0 \leqslant r \leqslant \infty$,

называемое радиусом сходимости С. р. (1) и определяемое по формуле Коши – Адамара:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|}}, \qquad (2)$$

такое, что при $|z-a|<r$ ряд (1) абсолютно сходится, а при $|z-a|>r$ – расходится (теорема Коши – Адамара). В связи с этим круг $D=\{z\in\mathbb{C}: |z-a|<r\}$ на плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z называется кругом сходимости С. р. В случае $r=0$ круг сходимости вырождается в единственную точку $z=a$, напр. для С. р.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!(z-a)^k$$

(этот случай интереса не представляет, и всюду в дальнейшем предполагается, что $r>0$). В случае $r=\infty$ круг сходимости совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$, напр. для С. р.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z-a)^k.$$

Множество сходимости, то есть совокупность всех точек сходимости С. р. (1), в случае $0<r<\infty$, кроме точек круга сходимости D может включать все или нек-рые точки, или ни одной точки окружности сходимости $S=\{z\in\mathbb{C}: |z-a|=r\}$. Круг сходимости в этом случае есть внутренность множества точек абсолютной сходимости С. р.

Внутри круга D, то есть на любом компакте $K\subset D$, С. р. (1) сходится абсолютно и равномерно. Таким образом, сумма ряда $s(z)$ определена и является регулярной аналитич. функцией по крайней мере в круге D. При этом на окружности S она имеет по меньшей мере одну особую точку, *аналитическое продолжение* в к-рую суммы $s(z)$ невозможно. Существуют С. р., имеющие на S в точности одну особую точку, равно как и С. р., у к-рых вся окружность S состоит из особых точек.

В случае $r=\infty$ ряд (1) либо обрывается, то есть представляет собой многочлен

$$s(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k(z-a)^k,$$

либо его сумма $s(z)$ есть целая трансцендентная функция, регулярная во всей плоскости $\mathbb{C}$ и имеющая в бесконечности *существенно особую точку*.

Обратно, само понятие аналитичности функции $f(z)$ в точке a состоит в том, что $f(z)$ в нек-рой окрестности a разлагается в С. р.:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k,$$

к-рый является для $f(z)$ рядом Тейлора, то есть его коэффициенты определяются формулами

$$b_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

В связи с этим важно свойство единственности С. р.: если сумма $s(z)$ ряда (1) обращается в нуль на бесконечном множестве $E\subset D$, имеющем предельную точку внутри D, то $s(z)\equiv 0$ и все $b_k=0$, $k=0, 1, \ldots$ В частности, если $s(z)=0$ в окрестности нек-рой точки $z_0\in D$, то $s(z)\equiv 0$ и все $b_k=0$. Таким образом, всякий С. р. есть ряд Тейлора для своей суммы.

2) С. р. по многим комплексным переменным $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n>1$, или кратный С. р. – функциональный ряд вида:

$$s(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} b_k(z-a)^k =$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} b_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}, \qquad (3)$$

где $b_k=b_{k_1\ldots k_n}$, $(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}\ \ldots\ (z_n-a_n)^{k_n}$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$, $a=(a_1, \ldots, a_n)$ – центр ряда, точка комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Областью сходимости D С. р. (3) называется внутренность множества точек абсолютной сходимости, но при $n>1$ она не имеет столь простого вида, как при $n=1$.

Лит.: [1] Бицадзе А. Б., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1–2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

СТЕФАНА ЗАДАЧА – задача, возникающая при исследовании физических процессов, связанных с фазовым превращением вещества. Простейшая двухфазная С. з. в теплофизич. терминах формулируется следующим образом: найти распределение температуры $u(x, t)$ и закон движения границы раздела фаз $\xi=\xi(t)$ (напр., границы «лед – вода» внутри замерзающей воды) из уравнения теплопроводности:

$$c_1\rho_1\frac{\partial u}{\partial t}=k_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad 0<x<\xi(t),\ t>0,$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial u}{\partial t}=k_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad \xi(t)<x<+\infty,\ t>0,$$

граничного условия

$$u(0, t)=u_1=\text{const}<T,\ t>0,$$

начального условия

$$u(x, 0)=u_2=\text{const}>T,\ t\geqslant 0,$$

и условия на границе замерзания

$$u(\xi(t)-0,t)=u(\xi(t)+0,t),\ t>0,$$

$$\lambda\rho_1\frac{d\xi(t)}{dt}=k_1\frac{\partial u(\xi(t)-0,t)}{\partial x}-k_2\frac{\partial u(\xi(t)+0,t)}{\partial x},\ t>0,\ \xi(0)=0,$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты теплопроводности, c_1 и c_2 – удельные теплоемкости, ρ_1 и ρ_2 – плотности твердой и соответственно жидкой фаз, λ – скрытая теплота плавления, отнесенная к единице массы, T – температура замерзания. Эта задача имеет автомодельное решение

$$u=u(xt^{-1/2}),\ \xi(t)=\alpha t^{1/2},\ \alpha=\text{const}>0.$$

Достаточно общая постановка С. з. в пространственно трехмерном случае сводится к краевой задаче для квазилинейного параболич. уравнения 2-го порядка с кусочно непрерывными коэффициентами, терпящими разрывы 1-го рода на заранее неизвестных и подлежащих определению поверхностях, на к-рых задается значение искомой функции и, кроме того, удовлетворяющих нек-рому дифференциальному условию.

Такого типа задачу одним из первых исследовал Й. Стефан (J. Stefan, 1890).

Обратная задача Стефана заключается в том, чтобы по заданному закону движения границы раздела фаз восстановить закон изменения граничных условий или коэффициентов уравнения. Напр., найти поток

$$q(t)=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$$

из условий:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<\xi(t),\ 0<t\leqslant T,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant\xi_0;\ u(\xi(t)-0,t)=\mu(t),$$

$$\gamma(t)\frac{d\xi(t)}{dt}=-\frac{\partial u(\xi(t)-0,t)}{\partial x};\ \xi(0)=\xi_0>0,$$

где $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $\gamma(t)\geqslant\gamma_0>0$, $\xi(t)$ – заданные функции.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Будак Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б., Численные методы в газовой динамике, М., 1965, с. 139–83. *Ф. П. Васильев.*

СТЕФАНА – БОЛЬЦМАНА ЗАКОН ИЗЛУЧЕНИЯ – см. *Планка закон излучения.*

СТОКСА ТЕОРЕМА – см. *Дифференциальная форма*.

СТОКСА ФОРМУЛА – формула, выражающая связь между *потоком* векторного поля через двумерное ориентированное многообразие и *циркуляцию* этого поля по соответствующим образом ориентированному краю этого многообразия. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая поверхность, $\nu=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичная нормаль к поверхности S (в тех точках, конечно, где она существует), задающая ориентацию S, и пусть край поверхности S состоит из конечного числа кусочно гладких контуров. Через ∂S обозначен край поверхности S, ориентированный с помощью единичного касательного к нему вектора τ так, чтобы получающаяся ориентация края ∂S была согласована с ориентацией ν поверхности S.

Если $\boldsymbol{a}=(P, Q, R)$ – непрерывно дифференцируемое в окрестности поверхности S векторное поле, то

$$\iint_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \nu)\, dS = \int_{\partial S} (\boldsymbol{a}, \tau)\, ds \qquad (*)$$

(dS – элемент площади поверхности S, ds – дифференциал длины дуги края ∂S поверхности S) или, в координатном виде:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Предложена Дж. Стоксом (G. Stokes, 1854).

С. ф. называют также обобщение формулы (*), представляющее собой равенство интеграла от внешнего дифференциала *дифференциальной формы* ω по ориентированному компактному многообразию M и интеграла от самой формы ω по ориентированному согласованно с ориентацией многообразия M краю ∂M многообразия M:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Частными случаями этой формулы являются *Грина формула, Остроградского формула*. *Л. Д. Кудрявцев.*

СТОУНА ТЕОРЕМА: пусть $\{U(t),\ t\in\mathbb{R}\}$ – сильно (слабо) непрерывная группа унитарных операторов на гильбертовом пространстве H; тогда существует и единствен такой самосопряженный оператор B в H, что $U(t)=\exp(itB)$. Таким образом, возможно спектральное представление

$$U(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dE_\lambda$$

с единственным спектральным семейством $\{E_\lambda\}$, причем все $E_\lambda\in\{U(t)\}''$, то есть коммутируют с коммутантом $\{U(t)\}'$, и

$$B=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda.$$

Верно и обратное утверждение: для любого самосопряженного оператора B в гильбертовом пространстве H его функции $U(t)=\exp(itB)$ образуют непрерывную однопараметрич. унитарную группу (см. *Спектральная теорема*).

Итак, A – генератор однопараметрич. унитарной (полу)группы класса C_0 в $H \Leftrightarrow A=iB$, где $B=B^*$. Напр., в квантовой механике B – гамильтониан, а $U(t)$ – оператор эволюции состояний в картине Шредингера.

Обобщение С. т. на случай локально компактных абелевых групп G: если $g\mapsto U(g)$ – непрерывное унитарное представление G в H, то на двойственной группе $\hat G$ характеров $\chi(\cdot)$ группы G существует и единственна такая спектральная мера $E(\cdot)$, что

$$U(g)=\int_{\hat G} \chi(g)\, E(d\chi).$$

Часто встречается случай $G=\mathbb{R}^n$, $\hat G=\hat{\mathbb{R}}^n\simeq\mathbb{R}^n$, когда носитель меры E лежит в конусе.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1979; [3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 1, пер. с англ., М., 1977. *А. В. Булинский.*

СТОУНА – НЕЙМАНА ТЕОРЕМА единственности: неприводимое представление канонических коммутационных соотношений в форме Вейля для систем с конечным числом степеней свободы унитарно эквивалентно представлению Шредингера, а любое приводимое представление эквивалентно прямой сумме копий шредингеровского (см. [1]).

Эта теорема позволила установить равноправие картин Шредингера и Гейзенберга в квантовой механике и способствовала выяснению связей между классич. и квантовой механикой.

Имеется обобщение С.– Н. т. единственности, следующее из теоремы импримитивности Макки (см. [2]). Пусть G – локально компактная абелева группа с мерой Хаара μ, $\hat G$ – группа непрерывных унитарных характеров на G, то есть гомоморфизмов

$$\chi: G\to\Pi_1=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\},$$

а $\chi(g):=(\chi, g)$, $\chi\in\hat G$, $g\in G$. Пусть $V_1(\cdot)$ (соответственно $V_2(\cdot)$) – непрерывное унитарное представление G (соответственно $\hat G$) на сепарабельном гильбертовом пространстве H, причем выполняются вейлевские коммутационные соотношения

$$V_1(g)V_2(\chi)=(\chi, g)V_2(\chi)V_1(g).$$

Если пара $V_1(\cdot)$, $V_2(\cdot)$ неприводима, то есть в H нет нетривиальных замкнутых подпространств, инвариантных относительно $V_1(\cdot)$, $V_2(\cdot)$, то она эквивалентна обобщенному представлению Шредингера U, для к-рого

$$H=L^2(G,\mu),\ U_1(g)f(h)=f(g+h),\ f\in L^2,\ g, h\in G,$$

и

$$U_2(\chi)f(g)=(\chi, g)f(g),\ f\in L^2,\ \chi\in\hat G,\ g\in G,$$

то есть найдется такой унитарный оператор $T: H\to L^2(G,\mu)$, что $TV_k(\cdot)=U_k(\cdot)T$, $k=1, 2$. Всякая пара $V_1(\cdot)$, $V_2(\cdot)$ эквивалентна прямой сумме $U_1(\cdot)$, $U_2(\cdot)$. При $G=\mathbb{R}^n\simeq\hat G$ получается теорема единственности. При этом

$$V_1(a)=\exp\Big\{i\textstyle\sum_{k=1}^n a_k P_k\Big\},\ \ a\in\mathbb{R}^n,$$

$$V_2(b)=\exp\Big\{i\textstyle\sum_{k=1}^n b_k Q_k\Big\},\ \ b\in\mathbb{R}^n,$$

и самосопряженные генераторы P_k, Q_k однопараметрич. унитарных подгрупп удовлетворяют на общей плотной инвариантной области $\mathcal{D}\in H$ канонич. коммутационным соотношениям в форме Гейзенберга

$$[Q_k, P_l]=i\hbar\,\delta_{kl}I,\ 1\leqslant k, l, \leqslant n.$$

В шредингеровском представлении Q_k – оператор умножения на k-ю координату x_k, действующий на функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а P_k действует как $-i\hbar\partial/\partial x_k$ и можно взять $\mathcal{D}=C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ или $S(\mathbb{R}^n)$.

Вопрос о единственности неприводимых представлений канонич. коммутационных соотношений в форме Гейзенберга удовлетворительно решается только при дополнительных условиях, напр., условия Реллиха и Диксмье ($\sum_{k=1}^n P_k^2+Q_k^2$ существенно самосопряжен на $\mathcal{D}$) позволяют от инфинитезимальной формы канонич. коммутационных соотношений, имеющей непосредственное физич. истолкование, перейти к форме Вейля для унитарных групп, свободной от трудностей с областями определения неограниченных операторов. Для канонич. антикоммутационных соотношений (в форме Гейзенберга реализуемых ограниченными операторами) при конечном числе степеней свободы также существует единственное с точностью до унитарной

эквивалентности неприводимое представление (теорема Йордана и Вигнера).

Теорему единственности можно переформулировать для представлений канонич. коммутационных соотношений в общей форме Вейля – Сигала; эта форма удобна и для систем с бесконечным числом степеней свободы, когда теорема единственности несправедлива. Отсутствие единственности характерно для представления алгебр, применяемых в квантовой теории поля и статистич. механике.

См. *Симплектическая геометрия.*

Лит.: [1] Neuman J., «Math. Ann.», 1931, Bd 104, № 3, S. 570–78; [2] Mackey G. W., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1949, v. 35, № 4, p. 537–45; [3] Jauch J. M., Foundations of quantum mechanics, Reading (Mass.), 1968; [4] Putnam C. R., Commutation properties of Hilbert space operators and related topics, B.– [a. o.], 1967; [5] Jørgensen P. E. T., Operators and representation theory, Amst.– [a. o.], 1988; [6] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [7] Широков Ю. М., «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1979, т. 10, в. 1, с. 5–50.

А. В. Булинский.

СТОХАСТИЗАЦИИ СЦЕНАРИЙ – см. *Ландау – Хопфа сценарий* стохастизации, *Помо – Манневиля сценарий* стохастизации, *Рюэлля – Тэкенса сценарий* стохастизации, *Фейгенбаума сценарий* стохастизации.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИОНИЗАЦИЯ – см. *Хаос.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ СИСТЕМА – см. *Квантовая стохастическая система.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ – см. *Марковский процесс, Случайный процесс, Случайное поле.*

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР – замкнутое инвариантное относительно *динамической системы* $\{S^t\}$, представляющей собой однопараметрическую группу диффеоморфизмов гладкого многообразия, множество A, обладающее следующими свойствами (см. [1]):

1) существует окрестность $U_0 \supset A$ такая, что $U_{t_1} = S^{t_1} U_0 \supset U_t$ при $t > t_1$ и $\bigcap_t U_t = A$;

2) для любой абсолютно непрерывной меры μ_0 на U_0 семейство мер $\mu_t = S_x^t \mu_0$ сходится к инвариантной мере λ (не зависящей от μ_0), сосредоточенной на A;

3) динамическая система $(A, \lambda, \{S^t\})$ является перемешивающей (см. *Перемешивание*).

Статистика типичных (по отношению к мере Лебега) траекторий в области притяжения С. а. определяется предельной мерой λ.

Лит.: [1] Синай Я. Г., в кн.: Нелинейные волны, М., 1979, с. 192–212.

Л. А. Бунимович.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС – см. *Случайный процесс.*

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – дифференциальное уравнение для функций ξ, явный вид которого зависит от случая, так как определяется случайным элементом ω из некоторого вероятностного пространства $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$. Напр., если $\xi : T \to \mathbb{R}$, T – отрезок, интервал, полуинтервал в $\mathbb{R}$, и при почти всех $\omega \in \Omega$ уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = f(\xi(t), t; \omega), \quad t \in T, \qquad (1)$$

где $\{f(x, t; \omega)\}$ – случайная функция $f : D \times T \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, при каждом ω, то (1) называется обыкновенным С. д. у. 1-го порядка. Точно так же, в соответствии со своими неслучайными аналогами, можно определить и другие классы С. д. у. (многомерные, с частными производными, с запаздывающим аргументом и т. д.).

С. д. у. играют важную роль в статистич. задачах математич. физики – квантовой механики электронов в неупорядоченных структурах, электродинамики гетерофазных сред и т. д. Решениями С. д. у. являются *случайные процессы* (*случайные поля*), вероятностное пространство к-рых полностью определяется пространством $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$ и начальными (граничными) условиями, если уравнение однозначно разрешимо при этих условиях с вероятностью 1.

Развитие теории случайных процессов потребовало придания смысла С. д. у. для процессов $\{\xi(t)\}$, траектории к-рых не являются дифференцируемыми с вероятностью 1 и поэтому производную от $\xi(t)$ в этих уравнениях уже нельзя понимать буквально. При употреблении термина «С. д. у.» часто имеют в виду именно такие уравнения, понимаемые в обобщенном смысле. Точное математич. определение С. д. у. в этом случае потребовало создания теории стохастич. интеграла и стохастич. дифференциала. «Разумное» определение этих понятий неоднозначно и для этого существуют два наиболее употребительных способа; соответствующие этим способам стохастич. интегралы (дифференциалы) называются интегралом Ито и интегралом Стратоновича. С. д. у. будет определено однозначно, если указано, какой стохастич. интеграл (дифференциал) имеется в виду. Выбор того или иного стохастич. интеграла для интерпретации С. д. у. связан с физич. существом задачи. Рассмотрим, напр., обыкновенное С. д. у. 1-го порядка для процесса $\{\xi(t)\}$, $t \geqslant 0$, по *винеровскому процессу* $\{w(t)\}$, $t \geqslant 0$, аналогичное (1):

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\, dt + b(t, \xi(t))\, dw(t), \ \xi(0) = \xi_0, \qquad (2)$$

где $a(t, x)$, $b(t, x)$ – функции (t, x). Так как траектории $w(t)$ с вероятностью 1 всюду непрерывны и недифференцируемы, то $d\xi(t)$ и $dw(t)$ необходимо понимать как стохастич. дифференциалы. Случайная величина ξ_0 играет роль начального значения. По определению, уравнение (2) эквивалентно интегральному уравнению

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t ds\, a(s, \xi(s)) + \int_0^t b(s, \xi(s))\, dw(s).$$

Последний интеграл в этой формуле является стохастическим по винеровскому процессу. Его нельзя понимать в смысле интеграла Стилтьеса, так как вариация траектории $w(t)$ винеровского процесса с вероятностью 1 бесконечна на каждом промежутке. По аналогии с (2) определяются С. д. у. более общего вида. При этом стохастич. интеграл можно рассматривать не только по винеровскому процессу.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, Киев, 1982; [2] Пугачев В. С., Синицын И. Н., Стохастические дифференциальные системы, М., 1985.

Ю. П. Вирченко.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ЯДРО – см. *Маркова цепь* с непрерывным временем, *Марковский процесс.*

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ – см. *Звуковые волны.*

СТРАННОСТЬ квантового числа – см. *Аромат.*

СТРАННЫЙ АТТРАКТОР – инвариантное относительно *динамической системы* притягивающее множество со сложной структурой. С. а. может быть неоднородным, то есть содержать собственные притягивающие инвариантные подмножества. В численных экспериментах С. а. проявляется как носитель инвариантной меры μ, предельной для δ-мер, сосредоточенных на траекториях $\{f^t x\}$, $t \in [0, T]$, где x принадлежит подмножеству положительного фазового объема. Однородности соответствует эргодичность μ. Важнейшие характеристики С. а.– размерность и показатели Ляпунова меры μ.

Лит.: [1] Странные аттракторы, пер. с англ., М., 1981; [2] Современные проблемы математики, т. 2, М., 1985.

М. В. Якобсон.

СТРАННЫЙ ТОК – см. *Ток.*

СТРАТИФИКАЦИЯ СРЕДЫ – изменение плотности среды по вертикали (направлению силы тяжести). См. *Геофизическая турбулентность.*

СТРУКТУРНАЯ КОНСТАНТА – см. *Перестановочные соотношения, Пуассона скобки.*

СТРУКТУРНАЯ МАТРИЦА – см. *Структурная функция.*

СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ – см. *Рюэлля – Тэкенса сценарий* стохастизации.

СТРУКТУРНАЯ ФУНКЦИЯ действительного *случайного процесса* или *случайного поля* $X(t)$ – средний квадрат разности значений $X(t)$ в двух точках, то есть функция

$$D(t, s) = \mathsf{E}[X(t) - X(s)]^2$$

($t \in \mathbb{R}^1$ или $t \in \mathbb{R}^k$, $k > 1$). Если $\mathsf{E}[X(t)]^2 < \infty$ при всех t, то

$$D(t, s) = B(t, t) + B(s, s) - 2B(t, s),$$

где $B(t, s) = \mathsf{E}X(t)X(s)$ – корреляционная функция $X(t)$. С. ф. часто используются при изучении случайных процессов со стационарными приращениями первого порядка и локально однородных случайных полей (то есть случайных полей с однородными приращениями), для к-рых $D(t, s) = D(t-s)$. В корреляционной теории случайных процессов со стационарными в широком смысле приращениями и локально однородных в широком смысле случайных полей основной статистич. характеристикой случайной функции $X(t)$ является корреляционная функция ее приращений $\Delta_u X(t) = X(t+u) - X(t)$:

$$\mathsf{E}\Delta_u X(t)\Delta_v X(s) = D(t-s, u, v)$$

(иногда называемая общей структурной функцией функции $X(t)$). Она может быть представлена в виде:

$$D(t; u, v) = 1/2[D(t+u) + D(t-v) - D(t+u-v) - D(t), \quad (1)$$

так что здесь достаточно рассматривать лишь простейшую С. ф. $D(t)$.

Класс С. ф. $D(t)$ процессов со стационарными приращениями совпадает с классом функций, допускающих спектральное разложение вида

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos t\lambda)\, dF(\lambda) + at^2, \qquad (2)$$

где $a \geqslant 0$, а $F(\lambda)$ – монотонно неубывающая функция от λ такая, что

$$\int_{-\infty}^{-\lambda_0} dF(\lambda) + \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \lambda^2 dF(\lambda) + \int_{\lambda_0}^{\infty} dF(\lambda) < \infty \qquad (3)$$

при любом $\lambda_0 > 0$. Воспользовавшись теоремой Карунена об ортогональном представлении случайных функций, из (1) и (2) легко вывести спектральное разложение самого процесса со стационарными приращениями. Аналогичные (2) и (3) формулы (но с заменой интегрирования по скалярной переменной λ интегрированием по векторной переменной $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$) справедливы и для С. ф. локально однородных случайных полей в пространстве $\mathbb{R}^k$ (см. [6], [7]).

В применении к многомерному процессу со стационарными приращениями или к локально однородному полю $X(t) = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ роль С. ф. $D(t)$ играет матрица взаимных структурных функций (иначе, структурная матрица)

$$D(t) = \|D_{jk}(t)\|_1^n = \|\mathsf{E}[X_j(t+s) - X_j(s)][X_k(t+s) - X_k(t)]\|_1^n.$$

Взаимные С. ф. $D_{jk}(t)$ также допускают спектральное разложение, родственное разложению (2). Однако в многомерном случае общая взаимная структурная функция

$$D_{jk}(t; u, v) = \mathsf{E}[X_j(t+s+u) - X_j(t+s)][X_k(s+v) - X_k(s)]$$

уже может быть выражена через более простые функции $D_{jk}(t)$ лишь при дополнительном условии:

$$D_{jk}(t; u, v) = D_{kj}(t; u, v),$$

часто выполняющемся в приложениях (см., напр., [6], [7]).

Понятие С. ф. было введено А. Н. Колмогоровым в 1940 (см. [1]); им же получено спектральное разложение С. ф. случайного процесса со стационарными приращениями – формулы (2)–(3). В другой связи этот результат был найден в 1941 Дж. Нейманом и И. Шенбергом (см. [3]). В 1941 А. Н. Колмогоров (см. [2]) широко использовал С. ф. векторных локально однородных случайных полей в развитой им теории *локально изотропной турбулентности*. Термин «С. ф.» был введен А. М. Обуховым (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Математика и механика. Избранные труды, М., 1985, с. 269–73, 274–77; [2] его же, там же, с. 281–87, 290–93; [3] Neumann J., Schoenberg I. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 50, № 2, p. 226–51; [4] Обухов А. М., «Известия АН СССР. Сер. географическая и геофизическая», 1949, т. 13, № 1, с. 58–69; [5] его же, «Доклады АН СССР», 1949, т. 67, № 4, с. 643–46; [6] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, № 3, с. 292–337; [7] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967, § 13. *А. М. Яглом.*

СТРУНЫ УРАВНЕНИЕ – см. *Волновое уравнение.*

СТРУЯ – см. *Расслоение струй.*

СУБАДДИТИВНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА – утверждение об асимптотическом поведении семейства $\{X_{ij}\}$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$, действительнозначных случайных величин, составляющих субаддитивный случайный процесс с дискретным временем, то есть таких (см. [1]), что

1) $X_{ij} \leqslant X_{ik} + X_{kj}$, $i \leqslant k \leqslant j$;

2) совместное распределение любого конечного набора случайных величин $\{X_{ij}\}$ совпадает с распределением набора $\{X'_{ij}\}$, где $X'_{ij} = X_{i+1,\, j+1}$;

3) математич. ожидания

$$m_j = \mathsf{E}(X_{ij})$$

существуют и

$$\inf j^{-1} m_j = C > -\infty.$$

Тогда почти наверное существует предел

$$X = \lim_{j \to \infty} j^{-1} X_{0j},$$

причем

$$\mathsf{E}X = C.$$

Эта теорема, доказанная Дж. Кингманом [2], обобщает, в частности, индивидуальную эргодич. теорему (Биркгофа – Хинчина). Субаддитивные процессы встречаются в различных задачах теории просачивания, в комбинаторике, при изучении асимптотич. поведения произведений случайных операторов. Имеются обобщения С. э. т., относящиеся к процессам с непрерывным временем, к случайным полям и т. д. (см. [5]). См. также [3], [4].

Лит.: [1] Hammersley J., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, № 4, p. 652–80; [2] Kingman J., там же, 1973, v. 1, № 6, p. 883–909; [3] Derriennic G., «C. r. Acad. sci.», 1975, t. 281, p. 985–88; [4] Katznelson G., Weiss B., «Isr. J. Math.», 1982, v. 42, № 4, p. 291–96; [5] Akcoglu M., Krengel U., «J. reine und angew. Math.», 1981, Bd 323, S. 53–67; [6] Krengel U., Ergodic theorems, B.– N. Y., 1985. *И. П. Корнфельд.*

СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – функция $u = u(x) : D \to [-\infty, \infty)$ точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и обладающая следующими свойствами: 1) $u(x)$ полунепрерывна сверху в D; 2) если G – относительно компактная подобласть D, а $v(x)$ – *гармоническая функция* в G, непрерывная на замыкании $\overline{G}$ и такая, что

$$u(x) \leqslant v(x) \qquad (1)$$

на границе ∂G, то неравенство (1) выполняется всюду в $\overline{G}$ [$v(x)$ называется гармонической мажорантой С. ф. $u(x)$ в $\overline{G}$]; 3) $u(x) \not\equiv -\infty$ (это условие иногда опускается). Если $u(x) \in C^2(D)$, то для того чтобы она была С. ф., необходимо и достаточно, чтобы оператор Лапласа $\Delta u(x)$ в D был неотрицателен. Если $f(z)$ – аналитич. функция одного или нескольких комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$, то модуль $|f(z)|$ и логарифм модуля $\ln |f(z)|$ являются С. ф. Субгармонич. функцию можно рассматривать как аналог выпуклых функций одного действительного переменного. Функция $u^*(x)$ называется супергармонической, если функция $-u^*(x)$ есть С. ф.

Простейшие свойства С. ф.:

1) Если $u_1, \ldots, u_m$ – С. ф. в D и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – неотрицательные числа, то линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k u_k$$

– С. ф. в D.

2) Верхняя огибающая $\sup\{u_k(x);\ 1\leqslant k\leqslant m\}$ конечного семейства С. ф. $\{u_k\}_{k=1}^m$ есть С. ф. Если верхняя огибающая бесконечного семейства С. ф. $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ полунепрерывна сверху, то она также есть С. ф.

3) Равномерно сходящаяся и монотонно убывающая последовательности С. ф. сходятся к С. ф.

4) Если $u(x)$ – С. ф. в D, $\varphi(u)$ – выпуклая неубывающая функция на области значений E функции $u(x)$ в D, или если $u(x)$ – гармонич. функция в D, а $\varphi(u)$ – выпуклая функция на E, то $\varphi(u(x))$ – С. ф. в D. В частности, если $u(x)$ – С. ф. в D, то $e^{\lambda u(x)}$, $\lambda>0$ и $[u^+(x)]^k$, $k\geqslant 1$, где $u^+(x)=\sup\{u(x),\ 0\}$ суть С. ф. в D; если $u(x)$ – гармонич. функция в D, то $|u(x)|^k$, $k\geqslant 1$,– С. ф. в D.

5) Принцип максимума: если $u(x)$ – С. ф. в D и для любой граничной точки $\xi\in\partial D$ и любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $V=V(\xi)$ такая, что $u(x)<\varepsilon$ в $D\cap V$, то либо $u(x)<0$ в D, либо $u(x)\equiv 0$. Для неограниченной области D свойство 5) остается в силе, причем если $\xi=\infty\in\partial D$, то

$$V=V(\infty)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|>R\}.$$

6) Если $u(z)$ – С. ф. в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, и $z=z(w)$ голоморфное отображение области $D'\subset\mathbb{C}^n$ в D, то $u(z(w))$ – С. ф. в D.

7) Функция $u(x)$ – гармоническая в D тогда и только тогда, если $u(x)$ и $-u(x)$ – С. ф. в D.

8) Если $u(x)$ – С. ф. во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограничена сверху, то $u(x)=\text{const}$.

Важное значение имеют свойства средних

$$I(u;a,r)=\frac{1}{s_n r^{n-1}}\int_{S(a,r)}u(x)\,d\sigma(x)$$

и

$$J(u;a,r)=\frac{1}{v_n r^n}\int_{B(a,r)}u(x)\,dv(x),$$

$s_n=2\pi^{n/2}\frac{1}{\Gamma(n/2)}$, $v_n=s_n/n$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Если $u(x)$ – С. ф. в кольце $r_1\leqslant r=|x-a|\leqslant r_2$, $0<r_1<r_2$, то средние $I(u;\ a,\ r)$, $J(u;\ a,\ r)$ и максимум $M(u;\ a,\ r)=\max\{u(x):\ v(-a)=r\}$ являются выпуклыми функциями относительно $\ln r$ при $n=2$, или относительно r^{2-n} при $n\geqslant 3$ на отрезке $r_1\leqslant r\leqslant r_2$. Если $u(x)$ – С. ф. в шаре $0\leqslant r=|x-a|\leqslant r_2$, то, кроме того, I и J – непрерывные неубывающие функции от r на отрезке $0\leqslant r\leqslant r_2$, причем $u(a)=J(u;\ a,\ 0)=I(u;\ a,\ 0)$. В этом последнем случае

$$u(a)\leqslant J(u;\ a,\ r)\leqslant I(u;\ a,\ r),\ 0\leqslant r\leqslant r_2.$$

Средние $I(u;\ a,\ r)$ и $J(u;\ a,\ r)$ как функции точки a при фиксированных u и r – С. ф. в соответствующих областях $D'\subset D$, причем $J(u;\ a,\ r)$ непрерывна.

Итерации достаточно высокого порядка k

$$u_m^{(k)}(x)=J\left(u_m^{(k-1)};x,\frac{1}{m}\right),\quad u_m^{(0)}(x)=u(x),$$

образуют убывающую последовательность сколь угодно гладких С. ф. $\{u_m^{(k)}(x)\}_{m=m_0}^\infty$, сходящуюся при $m\to\infty$ к произвольно заданной С. ф.

Ньютонов потенциал (при $n\geqslant 3$) и *логарифмический потенциал* (при $n=2$) неотрицательных масс, взятые со знаком минус, являются С. ф. во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, справедлива теорема Рисса: если $u(x)$ – С. ф. в области $D\subset\mathbb{R}^n$, то существует единственная неотрицательная борелевская мера μ на D (мера Рисса) такая, что для любого компакта $E\subset D$ справедливо представление

$$u(x)=\int_E k(x-\xi)\,d\mu(\xi)+h(x),\qquad(2)$$

где $k(x-\xi)=\ln|x-\xi|$ при $n=2$, $k(x-\xi)=-|x-\xi|^{2-n}$ при $n\geqslant 3$ – гармонич. функция во внутренности E. Если E – регулярная замкнутая область $E=\overline{G}$ с достаточно гладкой границей, допускающая функцию Грина $g(x,\xi)$, то наряду с (2) справедливо также

$$u(x)=-\int_{\overline{G}}g(x,\xi)\,d\mu(\xi)+w(x),\qquad(3)$$

где $w(x)$ – наименьшая гармонич. мажоранта С. ф. $u(x)$ в области $\overline{G}$.

Представление (3), вообще говоря, не имеет места во всей области определения С. ф. $u(x)$. В связи с этим важное значение имеет вопрос о выделении С. ф. $u(x)$, имеющих гармонич. мажоранту во всей области D. Напр., если $D=B(0,\ r)$ – шар и существует число $c>0$ такое, что

$$\int_{S(0,r)}u^+(r\xi)\,d\sigma(\xi)<c,\qquad(4)$$

то $u(x)$ допускает представление (3) в D, причем $w(x)$ в свою очередь представима интегралом Пуассона – Стилтьеса по граничной мере произвольного знака $\nu=\nu^+-\nu^-$. Кроме того, если $u(x)$ – логарифмически субгармоническая функция, то есть $u(x)\geqslant 0$ и $\ln u(x)$ – С. ф., и выполняется условие (4), то сингулярная составляющая $\nu^+=0$.

Лит.: [1] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.–Л., 1937; [2] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., М., 1980; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

СУБГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ – см. *Вынужденное колебание.*

СУБЛИМАЦИИ КРИВАЯ – см. *Фазовая диаграмма.*

СУБМАРКОВСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Марковское отображение.*

СУБПЛОТНОСТЬ ОСЦИЛЛЯЦИЙ – см. *Осцилляций субплотность.*

СУБПУАССОНОВСКАЯ СТАТИСТИКА ИЗЛУЧЕНИЯ – см. *Излучения статистика.*

СУЖЕНИЕ оператора – см. *Расширение* оператора.

СУММА векторов – см. *Векторная алгебра.*

СУММА представлений – см. *Прямая сумма* представлений.

СУПЕРАЛГЕБРА – см. *Суперсимметрия.*

СУПЕРГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Субгармоническая функция.*

СУПЕРГРАВИТАЦИЯ – суперсимметризованная теория тяготения, то есть теория тяготения Эйнштейна для такой системы материальных полей, для которой имеет место инвариантность относительно преобразований простой или расширенной *суперсимметрии.* В соответствии с числом N майорановских спинорных генераторов С. называют простой ($N=1$) или расширенной ($N>1$). В этом смысле обычная теория тяготения есть $N=0$ С. Первые работы по С. выполнены в 1976–77. Следует отметить, что расширение теории гравитации, обладающее спонтанно нарушенной суперсимметрией, обсуждалось еще раньше.

Интерес к С. объясняется прежде всего тем, что в ее рамках возникают новые возможности объединения фундаментальных частиц в *супермультиплеты* и объединения всех взаимодействий, включая гравитационное (такое объединение было невозможным в рамках симметрий, не содержащих спинорных генераторов). Кроме того, в теориях С. наблюдается значительное сокращение числа квантовых *ультрафиолетовых расходимостей* по сравнению с теорией тяготения, хотя они все же остаются, по-видимому, неперенормируемыми. Популярные в физике высоких энергий суперсимметричные феноменологич. модели содержат С. в качестве важного ингредиента, помогающего, в частности, осуществлять спонтанное нарушение суперсимметрии. Наконец, теория С. тесно связана с теорией *суперструн.*

Лит.: [1] van Nieuwenhuizen P., «Phys. Repts», 1981, v. 68, p. 189; [2] Nilles H. P., там же, 1984, v. 110, p. 1; [3] Fradkin E. S.,

Tscytlin A.A., там же, 1985, v. 119, p. 233; [4] Gates S.J. [et al.], Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry, Reading (Mass.), 1983; [5] Весс Ю., Беггер Дж., Суперсимметрия и супергравитация, пер. с англ., М., 1986.

Е. А. Иванов, В. И. Огиевецкий.

СУПЕРГРУППА – см. *Суперсимметрия.*

СУПЕРДЕТЕРМИНАНТ – характеристика блочной матрицы; то же, что *березиниан.*

СУПЕРКОММУТАТОР – см. *Суперсимметрия.*

СУПЕРМАТЕМАТИКА – понятие теории функций от антикоммутирующих переменных. См. *Суперсимметрия, Березиниан.*

СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТЫ – неприводимые представления *суперсимметрии*, содержащие *фермионы* и *бозоны.* В любом С. число бозонных степеней свободы равно числу фермионных. В простой $N=1$ суперсимметрии при отличной от нуля массе покоя С. характеризуется значением суперспина. При данном суперспине S С. содержит частицы ненулевой массы со спинами $S-1/2$, S, S, $S+1/2$. Киральный С. имеет суперспин $S=0$ и содержит соответственно два скалярных поля (спин 0) и одно спинорное (спин 1/2). Векторный С. обладает суперспином 1/2 и включает одну скалярную частицу (спин 0), две спинорные (спин 1/2) и одну векторную (спин 1).

Лит.: [1] Огиевецкий В., Мезинческу Л., «Успехи физич. наук», 1975, т. 117, в. 4, с. 637 (цикл статей).

Е. А. Иванов, В. И. Огиевецкий.

СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИНЦИП в квантовой механике – утверждение о том, что всякая линейная комбинация *векторов состояния* с произвольными коэффициентами является вектором состояния. Следствием С. п. является линейность уравнения Шредингера, описывающего временную эволюцию вектора состояния (в представлении Шредингера). С. п. сыграл важную роль на раннем этапе развития квантовой теории (см. [1]).

С. п. является тривиальным следствием основных принципов квантовой теории. Более того, справедливость этого принципа ограничена правилами суперотбора (см. [2]), согласно к-рым линейная комбинация векторов состояния ψ_1 и ψ_2 является вектором состояния лишь в том случае, если ψ_1 и ψ_2 принадлежат одному когерентному сектору в пространстве состояний.

Необходимость введения правил суперотбора иллюстрируется на следующем примере. Пусть ψ_B и ψ_F – векторы состояния бозона и фермиона соответственно. Тогда при повороте системы на 360° $\psi_B \to \psi_B$, $\psi_F \to -\psi_F$ (см. [2]). Поэтому вектор состояния $\psi_+ = \psi_B + \psi_F$ переходит в вектор $\psi_- = \psi_B - \psi_F$. Но при повороте системы на 360° вектор состояния может изменяться лишь на фазовый множитель, по модулю равный единице. Поэтому вектор ψ_+ не может описывать реального состояния физич. системы. Когерентными секторами в данном примере являются подпространства бозонных и фермионных состояний.

Лит.: [1] Дирак П., Принципы квантовой теории, пер. с англ., М., 1979; [2] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987.

Ф. А. Лунев.

СУПЕРПОЗИЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – феноменологическое предположение, используемое при обрыве цепочки уравнений для частичных функций распределения равновесной классической статистической системы. С. п. состоит в том, что трехчастичную конфигурационную функцию распределения выражают через двухчастичную по формуле $n_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) n_2(\vec{r}_2, \vec{r}_3) n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_3)$. Пока не удалось обосновать С. п. или определить область его применимости. С. п. приводит к *Борна – Грина – Ивона уравнению.* С. п. введено Дж. Кирквудом [1].

Лит.: [1] Kirkwood J.G., «J. Chem. Phys.», 1935, v. 3, p. 300; [2] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978.

Д. П. Санкович.

СУПЕРПОЛЕ – см. *Суперсимметрия, Суперпространство.*

СУПЕРПРОСТРАНСТВО – расширенное пространство в теории *суперсимметрии*, которое кроме обычных пространственно-временных координат включает также спинорные координаты. Для простой суперсимметрии известны вещественное суперпространство

$$\mathbb{R}^{4|4} = \{x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\},$$

содержащее наряду с векторной координатой x^μ дополнительные спинорные координаты θ^α, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ ($\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$), объединяемые в вещественный майорановский спинор $\theta = (\theta^\alpha / \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$, и киральное суперпространство $\mathbb{C}^{4|2} = \{z_L\} \equiv \{x_L^\mu, \theta_L^\alpha\}$, к-рое является комплексным и его спинорные координаты образуют двухкомпонентный (левый, L) вейлевский спинор (см. *Вейля уравнение*). В отсутствие гравитации вещественное С. $\mathbb{R}^{4|4}$ есть гиперповерхность в комплексном С. $\mathbb{C}^{4|2}$, определяемая уравнениями

$$x_L^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \quad \theta_L^\alpha = \theta^\alpha, \quad \left(\theta_L^\alpha\right) = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}.$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение, $\sigma^\mu = (1, \sigma)$, σ – *Паули матрицы.* Группой простой суперсимметрии является группа общих преобразований координат кирального С. $\mathbb{C}^{4|2}$:

$$x_L^{\mu\prime} = x_L^\mu + \lambda^\mu(x_L, \theta_L), \quad \theta_L^{\dot{\alpha}} = \theta_L^\alpha + \lambda^\alpha(x_L, \theta_L),$$

ограниченных условием, что их супердетерминант (березиниан) равен единице:

$$\mathrm{Ber}\frac{\partial(x'_L, \theta'_L)}{\partial(x_L, \theta_L)} = 1,$$

то есть условием сохранения суперобъема $\mathbb{C}^{4|2}$. Инфинитезимально оно имеет вид:

$$\frac{\partial\lambda^\mu}{\partial x_L^\mu} - \frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial\theta^\alpha} = 0.$$

Общие преобразования координат x_L^μ даются первым членом разложения по θ_L суперпараметра $\lambda^\mu(x_L, \theta_L)$, локальная суперсимметрия – первым членом разложения суперпараметра $\lambda^\alpha(x_L, \theta_L)$; локальным преобразованиям Лоренца отвечает линейный по θ_L член этого разложения. Остальные члены разложений λ^μ и λ^α либо соответствуют локальной конформной суперсимметрии и обращаются в нуль, либо описывают чисто калибровочные степени свободы.

Концепция С. играет ключевую роль в суперсимметрии: группа преобразований суперсимметрии имеет естественную реализацию в С. как группа его движений, а соответствующие *супермультиплеты* компактно представляются суперполями – функциями, заданными на С.

Е. А. Иванов, В. И. Огиевецкий.

СУПЕРРИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Риманова поверхность.*

СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ – *суперсимметричное уравнение* (или система уравнений), общее решение которого представимо бесконечным абсолютно сходящимся рядом по соответствующим произвольным функциям задачи Коши и допускает подкласс солитонных решений. При этом алгебра Ли – Беклунда внутренней симметрии, допускаемая вполне интегрируемой системой, является бесконечномерной разрешимой супералгеброй Ли конечного роста. Простейший пример такой системы дает *синус-Гордона уравнение* суперсимметричное.

М. В. Савельев.

СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ – *суперсимметричное уравнение* (или система

уравнений), общее решение которого представимо квадратурами в виде конечного многочлена и определяется произвольными функциями, число которых достаточно для постановки задач Коши и Гурса. При этом алгебра Ли – Беклунда внутренней симметрии, допускаемая точно интегрируемой системой, является конечномерной разрешимой супералгеброй Ли. Простейший пример такой системы дает *классическое (квантовое) суперсимметричное уравнение Лиувилля*.

М. В. Савельев.

СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ – уравнение (или система уравнений), порождаемое представлением типа нулевой кривизны в суперпространстве, связности которого принимают значения в подпространствах супералгебры Ли и не могут быть сведены к чистой калибровке посредством калибровочного преобразования, сохраняющего градуированный спектр связностей (см. *Суперсимметричное вполне (точно) интегрируемое уравнение*). Супералгебраич. уравнения содержат в качестве подкласса С. у., выделяемые соответствующими условиями инвариантности.

М. В. Савельев.

СУПЕРСИММЕТРИЯ – симметрия физической системы, объединяющая состояния, подчиняющиеся разным статистикам – *Бозе – Эйнштейна статистике* (бозоны) и *Ферми – Дирака статистике* (фермионы). Принципиальные основы С. сформулированы в нач. 1970-х гг. В последующие годы происходило бурное развитие различных физич. теорий, основанных на С. Применение методов С. относится главным образом к квантовой теории поля, включая теорию квантованного гравитационного поля (см. *Супергравитация*) и теорию струн (см. *Суперструны*). Помимо квантовой теории поля рассматривалось применение методов С. к нерелятивистской квантовой механике, а также к нек-рым другим разделам теоретич. физики.

Подобно другим типам симметрий, рассматриваемых в физике, С. формулируется в терминах нек-рой группы преобразований, действующих на состояния системы. В данном случае преобразования должны переводить фермионные состояния в бозонные и наоборот. Это придает С. своеобразные черты, не свойственные другим типам физич. симметрий, поскольку фермионные состояния отличаются от бозонных характером перестановочной симметрии (см. *Перестановочные соотношения*). Наиболее ясно это различие выявляется при *вторичном квантовании*, когда для построения полного набора состояний используются операторы рождения фермионов и бозонов. Отличие фермионов от бозонов проявляется в том, что операторы рождения бозонов коммутируют друг с другом, а также с операторами рождения фермионов, тогда как операторы рождения фермионов друг с другом антикоммутируют, то есть при перестановке двух операторов их произведение меняет знак. Это формальное различие свойств операторов рождения влечет за собой чрезвычайно глубокое различие в физич. свойствах систем, состоящих из бозонов, и систем, состоящих из фермионов.

Все известные физич. симметрии, кроме С., переводят фермионы в фермионы, а бозоны в бозоны, то есть преобразования, описывающие эти симметрии, сохраняют характер перестановочной симметрии состояний. Преобразования С. меняют характер перестановочной симметрии – переводят коммутирующие величины в антикоммутирующие и наоборот. Для построения таких преобразований аппарат классич. групп Ли оказался недостаточным. Задача решается введением в теорию нового объекта – с у п е р г р у п п ы, представляющей собой обобщение *Ли группы*.

Вторым важным моментом, определившим структуру С., является связь спина и статистики (см. *Паули теорема*). Отсюда следует, что спиновые характеристики состояний существенным образом включаются в структуру суперсимметричных теорий. Тем самым С. связывается с основными пространственно-временными симметриями физич. теорий.

Адекватным математич. аппаратом суперсимметричных теорий являются алгебра и анализ с коммутирующими и антикоммутирующими переменными. Этот раздел математики получил название с у п е р м а т е м а т и к и. Отсюда же возник термин «С.».

Следует подчеркнуть, что приставка «супер» имеет чисто терминологич. характер и не несет специальной смысловой нагрузки.

Супералгебры. Вместо группы Ли, описывающей симметрию физич. системы, в большинстве случаев достаточно рассмотреть более простой объект – соответствующую *Ли алгебру*, описывающую бесконечно малые преобразования симметрии. Элементы алгебры являются линейными комбинациями базисных элементов – г е н е р а т о р о в. Обычно число генераторов конечно. Генераторы алгебры Ли образуют набор основных физич. величин для системы, обладающей определенной симметрией.

В случае С. бесконечно малые преобразования образуют с у п е р а л г е б р у Л и. Прежде чем дать определение супералгебры, необходимо ввести нек-рые общие математич. понятия, характерные для суперматематики. Основную роль играет понятие четности. Не давая общего аксиоматич. определения этого понятия, введем его в той форме, к-рая наилучшим образом приспособлена для построения адекватного языка в теории С. Рассмотрим ассоциативную *алгебру A*, порожденную образующими $a_1, a_2, ..., a_n$, $n=p+q$. Первые p образующих $a_1, ..., a_p$, по определению, являются четными элементами алгебры, остальные q образующих $a_{p+1}, ..., a_{p+q}$ – нечетными. Таким образом, первоначально четность определяется только для образующих алгебры. На элементы общего вида четность переносится с помощью следующих правил. Умножение элемента алгебры на число не меняет четности. Сумма двух четных элементов является четным элементом алгебры, а сумма двух нечетных элементов – нечетным. Произведение двух четных элементов, а также произведение двух нечетных элементов является четным, а произведение четного и нечетного элементов – нечетным элементом алгебры. С помощью этих правил в алгебре A определяется класс четных и класс нечетных элементов. Любой элемент алгебры A может быть единственным образом представлен в виде суммы четного и нечетного элементов. Алгебра A, в к-рой определено понятие четности, называется г р а д у и р о в а н н о й а л г е б р о й (точнее, Z_2-градуированной).

Определим теперь понятие супералгебры Ли. Основной операцией является *коммутатор* $[x, y]$, соответствующим образом обобщенный на случай градуированной алгебры. Он определяется следующим образом. Если элементы x и y алгебры имеют определенную четность, то в случае, когда хотя бы один из элементов x, y четный, коммутатор $[x, y]=xy-yx$. Если же оба элемента x и y нечетные, то коммутатор $[x, y]=xy+yx$. Для элементов общего вида, равных сумме четного и нечетного элементов, коммутатор $[x, y]$ определяется из условия билинейности. Определенный так о б о б щ е н н ы й к о м м у т а т о р (с у п е р к о м м у т а т о р) объединяет понятия коммутатора и антикоммутатора в обычном смысле.

Рассмотренная конструкция устанавливает связь супералгебры с градуированной алгеброй A, к-рая является обобщением связи обычной алгебры Ли с ассоциативной алгеброй. Обобщенные коммутаторы удовлетворяют определенным тождествам. Все необходимые соотношения легко выводятся с помощью основных определений.

Практически важный класс супералгебр образуют супералгебры с конечным числом образующих $B_1, ..., B_N$. Обычно образующие B_k называются г е н е р а т о р а м и. Заметим, что система генераторов B_k отнюдь не совпадает с системой образующих a_i ассоциативной алгебры A. В силу билинейности коммутатора достаточно определить значения коммутаторов для генераторов с помощью соотношений типа

$$[B_k, B_l]=C_{kl}^m B_m. \qquad (1)$$

В этом случае супералгебра определена заданием структурных констант C_{kl}^m.

Алгебра супертрансляций. Супералгеброй, лежащей в основе физич. суперсимметричных теорий, является так наз. алгебра супертрансляций, она порождается конечным числом четных и нечетных генераторов. Нечетные генераторы, действуя на состояния системы, переводят бозоны в фермионы и наоборот. Убедиться в этом можно следующим образом. Операторы рождения бозонов и фермионов можно рассматривать как систему образующих нек-рой (бесконечномерной) градуированной алгебры. При этом бозонные операторы считаются четными элементами алгебры, а фермионные – нечетными. Установив четность одночастичных состояний, можно определить четность любых состояний. Справедливо общее утверждение: четные состояния подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна, нечетные – статистике Ферми – Дирака. Отсюда легко вывести утверждение относительно нечетных генераторов алгебры супертрансляций.

Из условия релятивистской инвариантности теории следует, что генераторы супертрансляций должны преобразовываться по нек-рому представлению группы Лоренца. Учитывая связь спина и статистики, получаем дальнейшее уточнение этого требования: нечетные генераторы преобразуются по представлениям с полуцелым спином, четные – по представлениям с целым спином. Простейшее допущение, согласующееся с этим требованием, состоит в том, что нечетные генераторы являются *спинорами*. Это допущение и лежит в основе построения алгебры супертрансляций.

Спиноры – это величины, преобразующиеся по фундаментальным представлениям группы комплексных матриц второго порядка с детерминантом, равным единице. Эта группа обозначается символом $SL(2, \mathbb{C})$. Существует два фундаментальных представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, к-рые комплексно сопряжены друг другу. Соответствующие спиноры обычно обозначаются символами типа Q_α и $\overline{Q}_{\dot\alpha}$. Индексы α и $\dot\alpha$ принимают два значения.

Более детальное рассмотрение приводит к тому, что для построения нетривиальной алгебры супертрансляций четные генераторы должны образовывать 4-вектор P_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Таким образом, наиболее простая алгебра супертрансляций

$$\tilde{t} = \{P_\mu, Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} \qquad (2)$$

порождается четырьмя четными генераторами P_μ и четырьмя нечетными генераторами Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$. Перестановочные соотношения типа (1) между генераторами всегда могут быть приведены к форме

$$[Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}]_+ = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu. \qquad (3)$$

Все остальные коммутаторы обращаются в нуль. Индекс «+» в левой части соотношения (3) означает антикоммутатор (это соответствует рассмотренным выше правилам построения операции коммутирования в супералгебре); σ^μ – матрицы второго порядка: $\sigma^0 = I$, σ^i, $i = 1, 2, 3$, – спиновые *Паули матрицы*, I – единичная матрица.

Важнейшее физич. предположение относительно супералгебры (2) состоит в том, что четные генераторы P_μ являются 4-вектором энергии–импульса системы. Операторы энергии и импульса – это генераторы трансляций времени и пространства. Алгебра супертрансляций (2) представляет собой расширение алгебры трансляций путем введения четырех новых генераторов «спиновых трансляций» Q_α и $\overline{Q}_{\dot\alpha}$. Генераторы обычных трансляций связаны с генераторами спинорных трансляций нетривиальными соотношениями (3). Перестановочные соотношения между операторами моментов – генераторами преобразований Лоренца – и генераторами алгебры супертрансляций (2) однозначно определяются ковариантными свойствами этих генераторов.

Условие теории С. сводится к тому, чтобы алгебра супертрансляций была представлена линейными операторами в пространстве состояний. Для этого достаточно, чтобы операторы, соответствующие генераторам (2), удовлетворяли перестановочным соотношениям (3). Из этих соотношений видно, что для суперсимметричных теорий операторы энергии и импульса выражаются в виде произведений спинорных операторов. В частности, для гамильтониана системы получается выражение

$$H = \tfrac{1}{4}([Q_1, \overline{Q}_1]_+ + [Q_2, \overline{Q}_2]_+), \qquad (4)$$

из к-рого следует, что энергия суперсимметричной системы не может принимать отрицательных значений.

Алгебра супертрансляций (2) – самая простая среди семейства аналогичных супералгебр. Члены этого семейства характеризуются целым числом N, обозначающим количество спинорных генераторов.

Супермультиплеты частиц. Неприводимые представления алгебры супертрансляций (2) объединяют несколько неприводимых представлений *Пуанкаре группы* с одной и той же массой и различными значениями спина. Проще всего это проиллюстрировать для одночастичных состояний. В этом случае получаются *супермультиплеты* частиц. Если масса частиц не равна нулю, структура супермультиплета определяется числом j, принимающим целые и полуцелые значения. При данном j супермультиплет имеет спиновый состав $(j-1/2, j, j, j+1/2)$, то есть он содержит две частицы спина j, частицу спина $j-1/2$ и частицу спина $j+1/2$. В случае нулевой массы супермультиплеты объединяют частицы, имеющие спиральность λ, $\lambda+1/2$. Число λ принимает целые и полуцелые значения. В отличие от спина j, принимающего неотрицательные значения, λ может принимать значения любого знака. Супермультиплеты $(\lambda, \lambda+1/2)$ и $(-\lambda, -\lambda-1/2)$ переходят друг в друга при пространственной инверсии. В каждом супермультиплете число бозонных состояний равно числу фермионных состояний; с этим связано сокращение расходимостей в суперсимметричных теориях. Как известно, в квантовой теории поля нек-рые физич. величины оказываются бесконечными за счет расходящихся интегралов. В суперсимметричных теориях многие из этих величин оказываются конечными, поскольку расходимости, связанные с бозонами, компенсируются соответствующими расходимостями, связанными с фермионами.

Суперполя. Основным конструктивным элементом при построении суперсимметричных теорий являются суперполя, представляющие собой элементы *Грассмана алгебры* с образующими θ, коэффициентами при к-рых служат физич. поля (см. также *Суперпространство*). Каждое суперполе объединяет несколько физич. полей с целыми и полуцелыми спинами. Благодаря суперполям удалось придать суперсимметричным теориям простую форму. Те же теории, выраженные через компонентные поля, выглядят значительно сложнее.

Суперполя наиболее простого вида – это скалярные киральные суперполя. Они характеризуются тем, что содержат либо только произведения образующих θ, либо только образующие $\bar\theta$. Соответственно существуют два типа киральных суперполей – левое и правое:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_L &= A(x) + \theta\varphi(x) + \theta\theta F(x), \\ \Phi_R &= B(x) + \bar\theta\bar\varphi(x) + \bar\theta\bar\theta G(x), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $A(x)$, $F(x)$ и $\varphi_\alpha(x)$ – компонентные поля левого суперполя $\Phi_L(x)$ (x – точка пространства-времени). Поля A и F скалярные, двухкомпонентный спинор φ – левое киральное поле. Аналогичными свойствами обладают компонентные поля правого кирального суперполя $\Phi_R(x)$, содержащего правое киральное поле $\bar\varphi(x)$. Оба суперполя являются лоренцовыми скалярами. При пространственной инверсии левое киральное суперполе переходит в правое и наоборот. Весьма важно следующее соглашение: скалярные поля $A(x)$ и $F(x)$ (и вообще поля целого спина) коммутируют друг с другом и со всеми остальными полями, тогда как спинор-

ные поля $\varphi_\alpha(x)$ (поля полуцелого спина) являются нечетными элементами алгебры Грассмана, а θ_φ – четными. Благодаря этому суперполя (5) коммутируют друг с другом.

Киральные суперполя (5) хорошо иллюстрируют принцип построения суперполей. Примером суперполя общего типа, содержащего все образующие θ, является векторное суперполе

$$V(x) = a(x) + \theta\varphi(x) + \bar\theta\bar\varphi(x) + \theta\sigma^\mu\bar\theta v_\mu(x) +$$
$$+ \theta\theta b(x) + \bar\theta\bar\theta\bar b(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\Psi(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\Psi(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta c(x). \quad (6)$$

Его компонентные поля: четыре скалярных поля a, $b, \bar b$ и c, четыре спинорных $\varphi, \bar\varphi$, Ψ, $\bar\Psi$ и одно векторное v_μ. С наличием векторной компоненты и связано название суперполя (6). Помимо рассмотренных скалярных суперполей, существуют суперполя с различными лоренцовыми индексами, а также с индексами, относящимися к внутренним симметриям.

Суперсимметричная квантовая механика. Алгебра супертрансляций и основанная на ней С. отражают специфику релятивистской квантовой теории. К этой области относится основная масса работ и важнейшие результаты, связанные с С. Однако и в нек-рых других областях науки методы С. также нашли плодотворное применение. Помимо алгебры супертрансляций (2), существует ряд других супералгебр, на основе к-рых можно развивать суперсимметричные теории. Рассмотрим кратко простейшую из таких супералгебр:

$$\tilde S = \{H,\ Q,\ Q^+\}, \quad (7)$$

к-рая порождена одним четным генератором H и двумя нечетными генераторами Q, Q^+. Генераторы связаны перестановочным соотношением

$$[Q,\ Q^+]_+ = H. \quad (8)$$

Все остальные коммутаторы равны нулю.

На базе супералгебры (7) строятся различные варианты суперсимметричной квантовой механики. Общая схема построения такова. Пространство *векторов состояний* системы разбивается в прямую сумму пространства бозонных и фермионных состояний. Удобно записывать вектор состояния в двухкомпонентной форме

$$\psi = \begin{Vmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{Vmatrix}, \quad (9)$$

где верхняя компонента представляет собой фермионное состояние, а нижняя – бозонное. Следует подчеркнуть, что разделение состояний на базонные и фермионные носит условный характер и не связано с присутствием реальных бозонов и фермионов. Более того, нет какого-либо регулярного метода определения разбиения (9). Явный вид этого разбиения связан с конкретной задачей. Генераторы Q, действующие на векторы (9), задаются в матричной форме:

$$Q = \begin{Vmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{Vmatrix}, \quad Q^+ = \begin{Vmatrix}0 & 0\\ B^+ & 0\end{Vmatrix}.$$

Здесь B – оператор, действующий на «бозонные» переменные, B^+ – сопряженный оператор. Генератор H отождествляется с гамильтонианом системы, определяемым с помощью соотношения (8):

$$H = \tfrac{1}{2}[B, B^+]_+ + \tfrac{1}{2}[B, B^+]_-\sigma_3,$$

где σ_3 – матрица Паули, действующая на вектор (9).

Конкретная суперсимметричная квантовомеханич. задача сводится к определению вида оператора B. Для одномерной системы оператор B удобно принять в форме

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}(ip + W(x)),$$

где $W(x)$ – произвольная функция координаты x, а $p = -i\partial/\partial x$ – оператор импульса. Гамильтониан принимает обычный вид:

$$H = \tfrac{1}{2}(p^2 + W^2(x) + W'(x)\sigma_3). \quad (10)$$

Этот гамильтониан соответствует суперсимметричной квантовой механике Виттена (E. Witten, 1981); его спектр обладает характерными особенностями. Все уровни с энергией $\varepsilon > 0$ двукратно вырождены. Основное состояние не вырождено только в том случае, если его энергия равна нулю. Опираясь на эти два свойства, в отдельных случаях удается полностью определить дискретный спектр гамильтониана (10).

Для нек-рых конкретных задач С. рассмотренного типа является реальной физич. симметрией. Наиболее важный случай – электрон в магнитном поле. В этой задаче С. возникает для следующих типов магнитных полей: «двумерное поле», то есть поле, направленное по оси z и произвольным образом зависящее от координат x и y: $B_x = B_y = 0$, $B_z = B_z(x, y)$; трехмерное поле с определенной четностью: $B(-x) = \pm B(x)$. В этих двух случаях можно определить генераторы Q с нужными свойствами, причем в каждом случае построение проводится по-разному. Так, в первом случае компоненты вектора (9) характеризуются значениями проекции спина на ось z, а во втором случае – четностью волновой функции. Из этого примера виден условный характер введения бозонных и фермионных степеней свободы.

Интересный пример С. обнаруживается в задаче о движении системы под действием случайной силы. Эта задача из теории случайных процессов оказывается формально аналогичной суперсимметричной квантовой механике.

Лит.: [1] Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П., «Письма в ЖЭТФ», 1971, т. 13, в. 8, с. 452; [2] Волков Д. В., Акулов В. П., там же, 1972, т. 16, в. 11, с. 621; [3] Wess J., Zumino B., «Phys. Lett.», 1974, v. 49B, p. 52; [4] Березин Ф. А., Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными, М., 1983; [5] Огиевецкий В. И., Мезинческу Л., «Успехи физич. наук», 1975, т. 117, в. 4, с. 637; [6] Генденштейн Л. Э., Криве И. В., там же, 1985, т. 146, в. 4, с. 553; [7] Высоцкий М. И., там же, с. 591; [8] Арефьева И. Я., Волович И. В., там же, с. 655; [9] Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Шифман М. А., там же, с. 683; [10] Весс Ю., Беггер Дж., Суперсимметрия и супергравитация, пер. с англ., М., 1986; [11] Ахиезер А. И., Пелетминский С. В., Поля и фундаментальные взаимодействия, Киев, 1986; [12] Уэст П., Введение в суперсимметрию и супергравитацию, пер. с англ., М., 1989; [13] Суперсимметрия, калибровочные поля и квантование, сб. статей, М., 1993.

Ю. А. Гольфанд.

СУПЕРСПИН – см. *Супермультиплет.*

СУПЕРСТРУНЫ – релятивистские суперсимметричные (см. *Суперсимметрия*) протяженные объекты. С. являются обобщением понятия бозонной релятивистской струны с включением фермионных степеней свободы.

При квантовании С. представляет собой бесконечную последовательность нормальных мод – последовательность массивных состояний в квантовой теории поля. Расщепление масс Δm^2 пропорционально натяжению струны T. В теории С. $T \sim (10^{19}\ \text{ГэВ})^2$ (в системе единиц $\hbar = c = 1$). Спектр масс начинается с нуля и, в отличие от теории бозонной струны, не содержит тахиона (то есть состояния с мнимой массой). Последовательное квантование в плоском пространстве-времени оказывается возможным только в критич. размерности. Для бозонной струны $D_{\text{кр}} = 26$, для фермионной $D_{\text{кр}} = 10$.

Струны бывают открытыми и замкнутыми. Открытые струны в качестве низших безмассовых состояний содержат частицы спина 1 – кванты *Янга – Миллса поля*, замкнутые – частицы спина 2 – *гравитоны*, а в случае С. содержат и их суперпартнеры спина 3/2 – *гравитино*. На этом пути в теории С. возникает локальная квантовая теория поля, объединяющая гравитацию и поля Янга – Миллса – переносчики всех взаимодействий.

На расстояниях, много больших планковской длины ($\sim 10^{-33}$ см), или при энергиях, много меньших планковской массы ($\sim 10^{19}$ ГэВ), массивные состояния отщепляются и возникает эффективная локальная теория поля (*супер-*

гравитация и суперсимметричная янг-миллсовская теория с фиксированными параметрами и составом частиц). При этом наблюдаемые частицы (кварки, лептоны, калибровочные векторные бозоны и т. д.) должны быть среди безмассовых возбуждений ($m \ll 10^{19}$ ГэВ).

Лит.: [1] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э., Теория суперструн, пер. с англ., М., 1990; «Успехи физич. наук», 1986, т. 150, в. 4.

Д. И. Казаков.

СУСЛОВА ЗАДАЧА о движении твердого тела с неголономными связями – см. *Динамика твердого тела*; неголономные связи.

СУЩЕСТВЕННО ОСОБАЯ ТОЧКА – изолированная *особая точка a* однозначного характера аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного z, для которой не существует никакого, конечного или бесконечного, предела

$$\lim_{z \to a} f(z).$$

В достаточно малой проколотой окрестности

$$V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$$

С. о. т. $a \neq \infty$ или в

$$V' = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \infty\}$$

в случае $a = \infty$ функция $f(z)$ разлагается в Лорана ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad a \neq \infty, \quad z \in V,$$

или, соответственно,

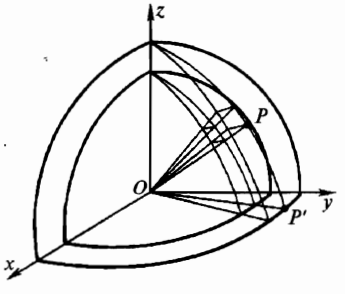
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \quad a = \infty, \quad z \in V',$$

причем в главной части этих рядов имеется бесконечно много отличных от нуля коэффициентов c_k с отрицательными индексами k.

Е. Д. Соломенцев.

СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ – см. *Отбора правило.*

СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ – числа ρ, θ и φ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами



Координатные поверхности системы сферических координат.

$$x = \rho \cos\varphi \sin\theta,$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta,$$
$$z = \rho \cos\theta,$$

где $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Координатные поверхности (см. рис.): концентрич. сферы с центром $O(\rho = OP = \text{const})$; полуплоскости, проходящие через ось Oz ($\varphi = \angle xOP' = \text{const}$); круговые конусы с вершиной O и осью Oz ($\theta = \angle zOP = \text{const}$). Система С. к.– ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho = 1, \; L_\varphi = \rho \sin\theta, \; L_\theta = \rho.$$

Элемент площади поверхности:

$$d\sigma = \sqrt{\rho^2 \sin^2\theta (d\rho\, d\varphi)^2 + \rho^2 (d\rho\, d\theta)^2 + \rho^4 \sin^2\theta (d\varphi\, d\theta)^2}.$$

Элемент объема:

$$dV = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_\rho f = \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad \operatorname{grad}_\varphi f = \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad \operatorname{grad}_\theta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho} a_\rho + \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \operatorname{tg}\theta} a_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta};$$

$$\operatorname{rot}_\rho \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho \operatorname{tg}\theta} a_\varphi;$$

$$\operatorname{rot}_\theta \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \rho} - \frac{a_\theta}{\rho};$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} a_\varphi - \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi};$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Обобщенными С. к. называются числа u, v и w, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами

$$x = au \cos v \sin w,$$
$$y = bu \sin v \sin w,$$
$$z = cu \cos w,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $0 \leqslant w \leqslant \pi$, $a > b$, $b > 0$. Координатные поверхности: эллипсоиды ($u = \text{const}$), полуплоскости ($v = \text{const}$) и эллиптич. конусы ($w = \text{const}$).

Д. Д. Соколов.

СФЕРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ – см. *Лежандра многочлены.*

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, шаровые функции, присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода,– два линейно независимых решения $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ дифференциального уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2y}{dz^2} - 2z \frac{dy}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] = 0,$$

где μ, ν – комплексные постоянные, которое возникает при решении некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными методом разделения переменных. С. ф.– специальные функции, применяемые для изучения физич. явлений в пространственных областях, ограниченных сферич. поверхностями, и для решения физич. задач, обладающих сферич. симметрией.

Точки $z = \pm 1, \infty$ являются в общем случае точками ветвления решений. С. ф. являются частными случаями гипергеометрич. функции:

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2} \right),$$

$$\arg \frac{z+1}{z-1} = 0 \text{ при } \operatorname{Im} z = 0, \; z > 1;$$

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi}\, \Gamma(\mu+\nu+1)}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+3/2)} \frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{z^{\mu+\nu+1}} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2} \right),$$

$$\arg z = 0 \text{ при } \operatorname{Im} z = 0, \; z > 0;$$

$$\arg (z^2-1) = 0 \text{ при } \operatorname{Im} z = 0, \; z > 1.$$

С. ф. $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ определены и однозначны соответственно в областях $|1-z| < 2$ и $|z| > 1$ комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+1$.

Если $\operatorname{Im} z = 0$, $z = x$, $-1 < x < 1$, то обычно в качестве решений рассматриваются функции

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2} \left[e^{\mu\pi i/2} P_\nu^\mu(x+i0) + e^{-\mu\pi i/2} P_\nu^\mu(x-i0) \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2} \right),$$

$$Q_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2} e^{\mu\pi i} \left[e^{-\mu\pi i/2} Q_\nu^\mu(x+i0) + e^{\mu\pi i/2} Q_\nu^\mu(x-i0) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2 \sin\mu\pi} \left[\cos\mu\pi P_\nu^\mu(x) - \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} P_\nu^{-\mu}(x) \right],$$

где $f(x+i0)(f(x-i0))$ – значения функции $f(z)$ на верхней (нижней) границе разреза.

При $\mu=0$, $\nu=n=0, 1, 2, \ldots$ многочлены $P_n(z)\equiv P_n^0(z)$ – многочлены Лежандра.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1974; [2] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математич. таблицами, пер. с англ., М., 1979; [3] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [5] Гобсон Е.В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК – см. *Лагранжа – Пуассона случай.*

СФЕРИЧЕСКИЙ ПОЛЯРНЫЙ РАДИУС – см. *Координаты.*

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Вращательное движение.*

СХОДИМОСТИ КРУГ – см. *Степенной ряд.*

СХОДИМОСТИ РАДИУС – см. *Степенной ряд.*

СХОУТЕНА СКОБКА – дифференциальное выражение, определяющее поле 3-форм на кокасательном расслоении гладкого многообразия:

$$[V, W](\alpha, \beta, \gamma) = V(\alpha, dW(\beta, \gamma)) + W(\alpha, dV(\beta, \gamma)) + \ldots,$$

где V и W – внешние 2-формы в кокасательном расслоении; многоточием обозначены члены с циклически переставленными 1-формами α, β, γ.

Гладкое поле W внешних 2-форм на кокасательном расслоении задает пуассонову структуру по формуле

$$\{F, G\} = W(dF, dG)$$

тогда и только тогда, когда $[W, W]=0$. *М. Э. Казарян.*

Т

ТАЙХМЮЛЛЕРА ПРОСТРАНСТВО, пространство Тейхмюллера,– метрическое пространство (M_g, d), точками которого являются абстрактные римановы поверхности (то есть классы $\overline{X}$ конформно эквивалентных римановых поверхностей X рода g с выделенными эквивалентными относительно тождественного отображения системами Σ-образующих фундаментальной группы $\pi_1(X)$), а расстояние d между $\overline{X}$ и $\overline{X'}$ равно $\ln K$, где постоянная K – отклонение отображения Тайхмюллера (квазиконформного отображения $\overline{X} \to \overline{X'}$, дающего наименьшее максимальное отклонение среди всех таких отображений). Введено О. Тайхмюллером (O. Teichmüller, 1939). *М. И. Войцеховский.*

ТАНГАЖА УГОЛ – см. *Ориентации углы.*

ТАНГЕНЦИАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Разрыва поверхности.*

ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ – см. *Ускорение.*

ТАХИОН – гипотетический объект, движущийся быстрее света. Обычные объекты, движущиеся медленнее света, называются брадионами, а объекты, к-рые подобно фотонам и нейтрино движутся точно со скоростью света, называются люксонами.

В 1905 вместе с теорией относительности распространилось убеждение, что скорость света в вакууме представляет собой верхний предел для любой скорости, и физики того времени были введены в заблуждение очевидностью этого факта. В 50-х и даже в 60-х гг. проблема Т. была подвергнута повторному исследованию.

Расширенное понимание теории относительности явилось следствием того факта, что она обеспечивает лучшее понимание обычной специальной теории относительности, даже если Т. окажутся не существующими в космосе как асимптотич. объекты. Тем не менее никаких существенных возражений против их существования, по-видимому, не возникнет.

Лит.: [1] Астрофизика, кванты и теория относительности, пер. с итал., М., 1982, с. 63–87.

ТВЕРДАЯ СЕРДЦЕВИНА – см. *Взаимодействия потенциал* с твердой сердцевиной.

ТВЕРДОЕ ТЕЛО – совокупность материальных точек, попарные расстояния между которыми неизменны. См. *Движение твердого тела, Твердое тело*; движение в идеальной жидкости; *Твердое тело*; движение около неподвижной точки; *Твердое тело*; плоское движение.

ТВЕРДОЕ ТЕЛО; движение в идеальной жидкости – механическая система, состоящая из *твердого тела* и покоящейся на бесконечности идеальной жидкости без свободной поверхности, ограниченной телом S. Несмотря на то, что полная масса этой системы бесконечна, и бесконечно число измерений пространства конфигураций, естественно рассматривать ее как обычную лагранжеву систему с шестью степенями свободы и считать, что конфигурация жидкости определяется ее границей, движущейся при наличии «идеальной связи» – несжимаемости. При этом достаточно рассматривать случай нулевой потенциальной энергии, поскольку действие тяготения состоит в том, что к системе инерциальных сил без учета силы тяжести добавляется постоянная гидростатич. подъемная сила (см. [1]). Заметим, что задача об обтекании идеальной жидкостью Т. т., закрепленного в нек-рой точке, по существу равносильна рассматриваемой.

Пусть движение самой жидкости потенциально, H – энергия (равная, согласно вышесказанному, кинетич. энергии T), $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{p}$ – соответственно полный кинетич. момент и импульс системы тело – жидкость в подвижной системе координат, жестко связанной с телом S. Обозначив компоненты линейной и угловой скорости тела через

$$u^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ и } \omega^i = \frac{\partial H}{\partial M_i}$$

соответственно, получаем следующие уравнения Кирхгофа

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= [\boldsymbol{p}, \omega], \\ \dot{\boldsymbol{M}} &= [\boldsymbol{M}, \omega] + [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}]. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Энергия $H(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p})$, квадратичная по $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{p}$ и положительно определенная, может быть задана в виде

$$H(=T) = \frac{1}{2}\Big\{\sum a_i M_i^2 + \sum b_{ij}(p_i M_j + p_j M_i) + \sum c_{ij} p_i p_j\Big\}.$$

Простейший случай интегрирования уравнений (1) – случай шара (массы m и радиуса a). Если начало координат

в центре шара, то

$$a_1 = a_2 = a_3 = m^*,\ b_{ij} = 0,\ c_{11} = c_{22} = c_{33} = \frac{2ma^2}{5},$$

где $m^* = m + m'$ – кажущаяся масса шара, равная сумме действительной массы m и так наз. присоединенной массы m', равной половине массы вытесненной шаром жидкости. Эта ситуация была рассмотрена в сер. 19 в. Дж. Грином (J. Grin) и Дж. Стоксом (G. Stokes) (см. [2]).

В общем случае уравнения (1) имеют три классич. интеграла, поэтому для их полной интегрируемости нужно иметь еще один дополнительный функционально независимый от них интеграл. Первое общее решение уравнений движения Т. т. в идеальной жидкости было дано Г. Кирхгофом [3] для тела вращения. В 1870 Р. Клебш [4] указал два новых вида функции H, при к-рых можно найти к трем интегралам Кирхгофа четвертый и, следовательно, привести задачу к квадратурам. Третий вид кинетич. энергии, для к-рого уравнения (1) интегрируются в явном виде, был открыт В. А. Стекловым [5], а четвертый – С. А. Чаплыгиным в 1903 (см. [7]). Приведем эти случаи.

1) Случай Кирхгофа:

$$a_1 = a_2,\ b_{ij} = 0,\ c_{11} = c_{22},\ c_{ij} = 0,\ i \neq j;$$

дополнительный интеграл M_3.

2) Случай Клебша первый:

$$a_1 = a_2,\ b_{11} = b_{22},\ c_{11} = c_{22},\ b_{ij},\ c_{ij} = 0,\ i \neq j;$$

дополнительный интеграл – линейный по $p_0 M_i$, при $b_{ij} = 0$ получается тело вращения.

2′) Случай Клебша второй:

$$b_{ij} = 0,\ c_{ij} = c_i \delta_{ij},\ \frac{c_2 - c_3}{a_1} + \frac{c_3 - c_1}{a_2} + \frac{c_1 - c_2}{a_3} = 0;$$

дополнительный интеграл $M_1^2 + M_2^2 + M_2^3 - (a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2)$.

3) Случай Стеклова (– Ляпунова – Колосова):

$$b_{ij} = b_i \delta_{ij},\ c_{ij} = c_i \delta_{ij},$$

$$b_j = \mu \frac{a_1 a_2 a_3}{a_j} + \nu,\ c_1 = \mu^2 a_1 (a_2 - a_3)^2 + \nu', \ldots,$$

$$\mu, \nu, \nu' = \text{const};$$

дополнительный интеграл

$$\sum (\mu_j^2 - 2\mu (a_j + \nu) M_j p_j) + \mu^2 \left((a_2 - a_3)^2 + \nu''\right) p_1^2 + \ldots.$$

4) Случай Чаплыгина:

$$a_1 = a_2 = \frac{a_3}{2},\ b_{ij} = 0,\ c_{11} + c_{22} = 2c_{33},\ c_{ij} = 0,\ i \neq j;$$

дополнительный интеграл имеет место при условии $\sum p_i M_i = 0$:

$$\left(M_1^2 - M_2^2 c p_3^2\right)^2 + 4 M_1^2 M_2^2.$$

Имеется любопытная геометрич. интерпретация рассматриваемой задачи (см. [1]): сила, действующая на Т. т. при его стационарном движении в идеальной жидкости, пропорциональна вектору геодезич. кривизны соответствующей однопараметрич. подгруппы группы евклидовых движений при надлежащей левоинвариантной метрике.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Гидродинамика, пер. с англ., 2 изд., М., 1993; [2] Ламб Г., Гидродинамика, пер. с англ., М., 1947; [3] Kirchhoff G., «J. reine u. angew. Math.», 1869, Bd 70; [4] Clebsch R., «Math. Ann.», 1870, Bd 3; [5] Стеклов В. А., «Труды отделения физич. наук Общества любителей естествознания», 1899, т. 10, вып. 1; [6] его же, О движении твердого тела в жидкости, Харьков, 1893; [7] Чаплыгин С. А., Собрание сочинений, т. 1, М., 1948, с. 21–25; [8] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 4, М., 1985, с. 178–284.

М. И. Войцеховский.

ТВЕРДОЕ ТЕЛО; движение около неподвижной точки. «Задача об исследовании движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки является, наряду с другой классической задачей механики, так называемой задачей трех тел; одной из самых замечательных задач теоретической механики. Обе эти задачи замечательны тем, что являются непосредственным обобщением задач, решаемых до конца и притом весьма просто классическими средствами математического анализа, и обе они представляют столь большие трудности, что, несмотря на замечательные результаты, полученные при их решении крупнейшими математиками трех последних столетий, еще далеки от полного разрешения» (из введения к книге [1]).

Первые результаты, касающиеся движения тяжелого *твердого тела* около неподвижной точки, относятся к 50 гг. 18 в.; Л. Эйлер (L. Euler) вывел уравнения, носящие его имя, и отметил простейший случай, когда неподвижной точкой является центр тяжести тела; но только через 80 лет Л. Пуансо (L. Poinsot) дал геометрич. истолкование движения в случае, указанном Л. Эйлером (см. *Эйлера – Пуансо случай*). В это же время К. Якоби (C. Jakobi) дал полное интегрирование уравнений движения в случае Эйлера при помощи созданной им теории эллиптич. функций, а Ж. Лагранж (J. Lagrange) указал еще один частный случай решения этой задачи, к-рый затем был исследован С. Пуассоном (S. Poisson) (см. *Лагранжа – Пуассона случай*).

После указанных работ долгое время никаких существенных результатов в этой области получено не было (хотя внимание математиков неоднократно обращалось на эту задачу и при Парижской академии наук была даже учреждена специальная премия, к-рая выдавалась за существенное продолжение теории). Решительный шаг вперед был сделан только в 1881, когда в Парижскую академию наук был представлен мемуар С. В. Ковалевской, к-рым отмечен замечательный прогресс поставленной задачи (см. *Ковалевской случай*).

Задача о движении тяжелого Т. т. около неподвижной точки представляет собой естественное обобщение задачи о качании *маятника*. Для описания этого движения обычно рассматривают неподвижную прямоугольную систему координат $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, начало к-рой находится в неподвижной точке тела, причем ее ось $\bar{z}$ направлена вертикально вверх, и подвижную систему координат (x, y, z) с тем же началом, неизменно связанную с телом и имеющую оси, направленные по главным осям инерции для неподвижной точки O. Далее обозначают: через $\boldsymbol{P} = -Mg\boldsymbol{k}$ силу тяжести (направленную вертикально вниз и приложенную в центре тяжести G тела); через $\boldsymbol{k}$ единичный орт, направленный по оси $\bar{z}$ с проекциями $\gamma, \gamma', \gamma''$ на оси подвижной системы координат; через $\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ радиус-вектор центра тяжести G с проекциями x_0, y_0, z_0 на оси подвижной системы координат.

Тогда скорость изменения кинетич. момента $\boldsymbol{K}$ в подвижных осях (x, y, z) подчиняется векторному уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + [\omega \boldsymbol{K}] = [\boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{P}],$$

где ω – вектор мгновенной угловой скорости с проекциями p, q, r; при этом кинетич. момент $\boldsymbol{K}$ (при сделанных предположениях) записывается в следующем виде:

$$\boldsymbol{K} = Ap\boldsymbol{i} + Bq\boldsymbol{j} + Cr\boldsymbol{k},$$

где постоянные A, B, C – главные моменты инерции тела для точки O. Отсюда для составляющих по осям получаются следующие три основных уравнения, данные Л. Эйлером в 1765; они называются динамическими уравнениями Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= Mg(z_0\gamma' - y_0\gamma''), \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= Mg(x_0\gamma'' - z_0\gamma), \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= Mg(y_0\gamma - x_0\gamma'). \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Далее, из того, что скорость единичного вектора $\boldsymbol{K}$ в неподвижной системе координат равна нулю, получают векторное уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{K}] = 0;$$

проектируя это уравнение на подвижные оси, получают три скалярных уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\ \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

эти уравнения называются уравнениями Пуассона.

Таким образом, получается замкнутая система шести нелинейных дифференциальных уравнений (I) и (II) относительно шести неизвестных p, q, r, γ, γ', γ''; они называются уравнениями Эйлера – Пуассона. Отметим, что в задаче о движении тяжелого Т. т. около неподвижной точки, кроме этих уравнений, используют и другие формы уравнений движения, получающиеся в иной системе координат и в других переменных (см., напр., [2]).

Для полного интегрирования системы уравнений (I) и (II) достаточно найти шесть независимых интегралов. Из механич. соображений легко получаются два интеграла; еще один – из соображений геометрических.

1) Теорема живых сил:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Mg(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = C_1 = \text{const}; \qquad \text{(III)}$$

здесь $\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = T$ – кинетич. энергия.

2) Момент тела относительно неподвижной оси $\bar{z}$:

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C_2 = \text{const}. \qquad \text{(IV)}$$

3) Тривиальный интеграл ($\boldsymbol{k}$ – орт):

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1. \qquad \text{(V)}$$

Однако в силу особенностей уравнений (I) и (II) и первых интегралов достаточно найти не еще три первых интеграла, независимых от (III), (IV), (V), а только один, 4-й интеграл. Отсюда понятна важность нахождения 4-го интеграла уравнений движения тяжелого Т. т. около неподвижной точки; с решения этой задачи и начиналось большинство исследований. Оказалось, что 4-й однозначный интеграл существует только в двух классич. случаях: в случае Эйлера – Пуансо, в случае Лагранжа – Пуассона, а также в случае Ковалевской; этот возникший в связи с исследованиями С. В. Ковалевской принципиально важный вопрос: при каких условиях уравнения движения тяжелого Т. т. около неподвижной точки имеют добавочный интеграл, к-рый просто выражается (представляет собой алгебраич. функцию или однозначную функцию переменных), был поставлен и решен в исследованиях А. Пуанкаре (H. Poincaré) и др.

Дальнейшие исследования в этом направлении велись в изыскании частных случаев движения тяжелого Т. т. около неподвижной точки при условиях ограничения начальных данных, когда система уравнений движения допускает первый интеграл, отличный от трех классических. Ниже указывается несколько наиболее интересных частных случаев по этому поводу.

1) Случай Гесса – Аппельрота (см. [7], [8]). При условиях $y_0 = 0$, $x_0\sqrt{A(B-C)} + z_0\sqrt{C(A-B)} = 0$ уравнения Эйлера – Пуассона (I)–(II) имеют частный интеграл

$$Ax_0p + Cz_0r = 0.$$

Этот интеграл существенно отличается от 4-го интеграла в классич. случаях, так как налагается добавочное условие на начальную скорость движения, в то время как в классич. случаях добавочные условия налагались только на распределение массы в теле. Этот случай представляет интерес потому, что он обобщает в нек-ром смысле все классич. случаи.

2) Случай Горячева – Чаплыгина (см. [9], [10]). Здесь предполагается, что $r_0 = z_0 = 0$, $A = B = 4C$, то есть центр масс лежит в экваториальной плоскости. К трем основным интегралам (III)–(V) в случае, когда $C_2 = 0$, то есть когда главный момент количества движения лежит в горизонтальной плоскости, существует еще один интеграл уравнений движения

$$r(p^2 + q^2) - \frac{Mg}{c}x_0p\gamma'' = g.$$

Этот случай интегрирования имеет ту особенность, что известен один из первых интегралов, не содержащий произвольной постоянной и по своему виду аналогичный классическим в общем случае, то есть алгебраический и не содержащий времени.

3) Случай Бобылева – Стеклова (см. [11], [12]). На этот раз предполагается, что $x_0 = r_0 = 0$, $B = 2A$, то есть центр масс лежит на оси Oy. Уравнения движения имеют частное решение

$$p = \frac{Mgy_0}{Aq}\gamma, \quad q = \text{const}, \quad r = 0,$$

с помощью к-рого уравнения (I)–(II) упрощаются, и дело сводится к обращению нек-рого эллиптич. интеграла 2-го рода.

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953; [2] Архангельский Ю. А., Аналитическая динамика твердого тела, М., 1977; [3] Четаев Н. Г., Теоретическая механика, М., 1987; [4] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989; [5] Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А., Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние, Киев, 1977; [6] Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, М.–Л., 1940; [7] Hess W., «Math. Ann.», 1898, Bd 37, № 2; [8] Аппельрот Г. Г., «Труды отд. физич. наук об-ва любителей естествознания», 1893, т. 6; [9] Горячев Д. Н., там же, 1898, т. 9; [10] Чаплыгин С. А., там же, 1901, т. 10, вып. 2; [11] Бобылев Д. К., там же, 1896, т. 8, вып. 2; [12] Стеклов В. А., там же, 1896, т. 8; [13] Фоменко А. Т., Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы, М., 1983.

М. И. Войцеховский.

ТВЕРДОЕ ТЕЛО; плоское движение – движение *твердого тела*, оставляющее инвариантной некоторую неподвижную плоскость (и сохраняющее ориентацию этой плоскости). Пространство конфигураций такого тела есть трехмерное многообразие $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$. Плоское движение по существу связано с группой движений $E(2) = \mathbb{R}^2 \times SO(2)$ плоскости и, поскольку все точки тела, лежащие на прямой, перпендикулярны плоскости, движутся совершенно одинаково, достаточно рассматривать движение подвижной плоскости П относительно неподвижной плоскости π.

Точка C подвижной плоскости П, скорость Ω к-рой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей. Соответствующая точка неподвижной плоскости π, с к-рой в данный момент совпадает точка C, именуется и обозначается так же. Из формулы Эйлера (см. *Динамика твердого тела*) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0]$ вытекает, что в каждый момент времени t, в к-рый $\omega \neq 0$, мгновенный центр скоростей C в неподвижной плоскости – точка с радиус-вектором

$$\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{r}_0 + \frac{[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_0]}{|\boldsymbol{\omega}|^2},$$

а в подвижной плоскости –

$$\boldsymbol{R}_C = \frac{[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{V}_0]}{|\boldsymbol{\omega}|^2},$$

где вследствие параллельности плоскостей П и π можно отождествить Ω с ω.

Совокупность мгновенных центров скоростей в неподвижной плоскости π и в подвижной плоскости П называется соответственно неподвижной и подвижной

центроидами $\mathcal{U}_\pi$ и $\mathcal{U}_\Pi$. Это – плоские кривые принятого класса гладкости всюду, за исключением нигде не плотных на них множеств, в к-рых ускорение равно нулю. При плоском движении образ $\mathcal{U}_\Pi$ подвижной центроиды без проскальзывания движется по неподвижной центроиде $\mathcal{U}_\pi$.

М. И. Войцеховский.

ТВИСТОР – точка трехмерного комплексного проективного пространства T, которое используется для реализации пространства Минковского M в виде некоторого многообразия комплексных прямых в нем. Теория Т. предложена Р. Пенроузом (R. Penrose) в конце 60-х гг.; достаточно неожиданным в его твисторной программе (см. [1]) явилось привлечение комплексной геометрии для работы с вещественным пространством-временем.

Множество $\mathbb{C}M$ всех прямых зависит от четырех комплексных параметров и в T интерпретируется как комплексифицированное и (конформно) компактифицированное пространство Минковского. Оно представляет самостоятельный интерес в связи с аналитич. продолжением тех или иных физич. величин, первоначально заданных на пространстве Минковского, в комплексную область (напр., в трубу будущего). При этом точкам (компактифицированного) пространства Минковского отвечает нек-рое подмножество прямых, зависящее от четырех вещественных параметров. Евклидово 4-мерное пространство также естественно реализуется как нек-рое подмножество прямых в твисторном пространстве, в результате чего на языке Т. удобно говорить о переходе от лоренцовых теорий к евклидовым. На языке прямых инвариантный геометрич. смысл имеет конформная структура на пространстве Минковского: точки находятся на нулевом расстоянии (их соединяет световой луч) тогда и только тогда, когда соответствующие им прямые в твисторном пространстве пересекаются.

Фундаментальная идея Р. Пенроуза заключается в том, что первичной физич. структурой является не структура 4-мерного пространства-времени, но твисторное (комплексное) пространство T. Соответственно твисторные эквиваленты физич. величин должны допускать более простое описание, чем сами эти величины. По этой идеологии нек-рые физич. уравнения имеют чисто аналитич. природу: объекты, первоначально заданные на Т., путем какого-либо варианта интегрирования по прямым переносятся на пространство M. При интегральном преобразовании аналитич. объектов от трех переменных в аналитич. объекты от четырех должно возникнуть одно уравнение на образ преобразования. Такую интерпретацию должны допускать нек-рые физич. уравнения.

В качестве первого пункта реализации своей твисторной программы Р. Пенроуз рассмотрел безмассовые уравнения (в зависимости от спина это или волновое уравнение, или система Максвелла, или уравнение Дирака – Вейля, или линеаризованное уравнение Эйнштейна и т. д.). Безмассовым полям на твисторном пространстве отвечают решения нек-рых обобщений системы Коши – Римана ($\bar\partial$-когомологии). Хотя этот объект и не является элементарным, для его изучения имеется развитый аппарат в комплексном анализе и возникает поучительный и нетривиальный пример применения комплексного анализа к изучению вещественных дифференциальных уравнений. Эти результаты носят скорее характер иллюстрации общей идеи Р. Пенроуза, поскольку они не выходят за пределы новых представлений решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Однако Т. оказались полезны и при изучении нелинейных физич. уравнений. Так, язык Т. был применен к построению инстантонов – автодуальных решений уравнения Янга – Миллса. Инстантоны (решения уравнения дуальности) рассматриваются на евклидовом пространстве, на твисторном многообразии им отвечают комплексные векторные расслоения. Эта связь позволила в конечном счете дать описание инстантонов (теорема Атьи – Хитчина – Дринфельда – Манина). Язык Т. оказался удобным также для изучения другого класса решений уравнения Янга – Миллса – монополей (решений уравнения Богомольного).

Еще одно направление применения Т. связано с рассмотрением искривленного пространства-времени. В то время как плоское пространство-время интерпретируется как многообразие прямых, естественно ожидать, что какие-то его искривленные версии могут быть реализованы как нек-рые многообразия кривых на 3-мерных комплексных многообразиях. Р. Пенроуз показал, что 4-мерные многообразия с римановой метрикой, удовлетворяющей вакуумному уравнению Эйнштейна и дополнительному (конформному) условию автодуальности, канонически реализуются как многообразия кривых на искривленном твисторном 3-мерном многообразии. Условие автодуальности состоит в том, что автодуальная часть тензора Вейля равна нулю. (Р. Пенроуз явно описал геометрич. структуры на T_0, не пересекающих l_∞.) Прямые, лежащие в областях $T_\pm$, соответственно образуют на $\mathbb{C}M$ трубы будущего (прошлого), а $\overline{M}$ является общей частью их границ.

Чтобы вложить в $\mathbb{C}M$ евклидово компактифицированное (конформно) 4-мерное пространство – сферу S^4,– рассматривают в T множество прямых, соединяющих точки вида (z_0, z_1, z_2, z_3) и $(-\bar z_1, \bar z_0, -\bar z_3, \bar z_2)$. Такие прямые не пересекаются или совпадают. Таким образом, возникает разбиение (расслоение) $T=\mathbb{C}P^3$ на пересекающиеся прямые.

Легко прослеживается действие групп на все определенные геометрич. объекты. На многообразие прямых $\mathbb{C}M$ переносится действие группы $SL(4, \mathbb{C})$ проективных преобразований пространства $T=\mathbb{C}P^3$. Они являются автоморфизмами конформной структуры, определенной на $\mathbb{C}M$. Подгруппа $SU(2, 2)$ проективных преобразований, сохраняющих квадрику T_0, индуцирует группу конформных преобразований пространства Минковского. Подгруппа в $SU(2, 2)$, сохраняющая прямую l_∞, порождает группу Пуанкаре движений пространства Минковского M. Если рассмотреть в $SU(2, 2)$ подгруппу, сохраняющую не только прямую l_∞, но и еще одну прямую l_0, не пересекающую l_∞ и лежащую на T_0 (напр., $z_0=-z_2$, $z_1=-z_3$), то на M получается классич. представление группы Лоренца.

Если в $\mathbb{C}P^3$ вместо 4-параметрич. семейства прямых рассмотреть 8-параметрич. семейство кривых 2-го порядка, то в нем можно описать подсемейства, зависящие от четырех вещественных параметров, на к-рых реализуются автодуальные решения уравнения Эйнштейна и для этих метрик можно дать явные выражения.

Р. Пенроуз явно описал геометрич. структуры на искривленном твисторном многообразии, эквивалентные автодуальным решениям уравнения Эйнштейна (право-плоским метрикам). Основной момент состоит в том, что семейство кривых в окрестности каждой кривой эквивалентно семейству прямых с точностью до малых 3-го порядка малости. Твисторное описание позволило построить большое число явных (автодуальных) решений уравнения Эйнштейна.

Пусть $T=\mathbb{C}P^3$ – 3-мерное комплексное проективное пространство с однородными координатами $z=(z_0, z_1, z_2, z_3)$, то есть $z\neq(0, 0, 0, 0)$ и координаты $z=(z_0, z_1, z_2, z_3)$ и $\lambda z=(\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$ отвечают одной и той же точке пространства T. Прямые l в T можно задавать парой их точек (z, w), $z\neq\lambda w$; их множество $\mathbb{C}M$ зависит от четырех комплексных параметров. На $\mathbb{C}M$ возникает комплексная конформная структура из условия, что прямые, пересекающие прямую l, находятся от нее на нулевом расстоянии (образуют комплексный световой конус $\mathbb{C}V(l)$ с вершиной в l).

Пусть T_0 – вещественная гиперповерхность (эрмитова квадрика) в T, задаваемая уравнением:

$$H(z)=|z_0|^2+|z_1|^2-|z_2|^2-|z_3|^2=0.$$

Она делит T на две области $T_{\pm}$, где форма H соответственно положительна (отрицательна). Тогда множество $\overline{M}$ прямых, целиком лежащих на T_0, зависит от четырех вещественных параметров и относительно указанной конформной структуры является конформной компактификацией пространства Минковского. Для $l \in \overline{M}$ конусы $V(l) = \overline{M} \cap \mathbb{C}V(l)$ прямых из $\overline{M}$, пересекающих l, являются световыми конусами. Чтобы получить обычное пространство Минковского M, надо фиксировать нек-рую прямую l_∞ на T_0 (напр., задаваемую уравнениями $z_0 = z_2$, $z_1 = z_3$) и выбросить $V(l_\infty)$ из $\overline{M}$ (то есть M состоит из прямых на T_0, не пересекающих l_∞). Теория Т. не только позволила применить новый математич. аппарат к различным задачам теоретич. и математич. физики, но и имела серьезное обратное влияние на математику, прежде всего в 4-мерной топологии.

Лит.: [1] Твисторы и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1983; [2] Гиндикин С. Г., Комплексный мир Роджера Пенроуза. Математика сегодня, Киев, 1983, с. 16–33. *С. Г. Гиндикин.*

ТЕЙЛОРА РЯД – см. *Степенной ряд.*

ТЕЙХМЮЛЛЕРА ПРОСТРАНСТВО – см. *Тайхмюллера пространство.*

ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ – дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (\alpha + \beta)\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0. \qquad (1)$$

Этому уравнению удовлетворяет напряжение тока в проводе, рассматриваемое как функция времени t и расстояния s от нек-рой фиксированной точки провода. Здесь c – скорость света, α – емкостный, β – индуктивный коэффициенты.

Преобразованием

$$e^{1/2(\alpha+\beta)t}\, u(s, t) = v(x, y),\ x = s + ct,\ y = s - ct,$$

уравнение (1) приводится к виду

$$v_{xy} + \lambda v = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\alpha-\beta}{4c}\right)^2. \qquad (2)$$

Это уравнение принадлежит к классу гиперболич. уравнений 2-го порядка

$$v_{xy} + av_x + bv_y + cv = f,$$

в теории к-рых важную роль играет функция Римана $R(x, y; \xi, \eta)$. Для уравнения (2) эта функция выписывается в явном виде:

$$R(x, y; \xi, \eta) = J_0\left(\sqrt{4\lambda(x-\xi)(y-\eta)}\right),$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964. *А. П. Солдатов.*

ТЕЛЕГРАФНЫЙ ПРОЦЕСС – см. *Дихотомический процесс, Пуассоновский процесс.*

ТЕМПЕРАТУРА – физическая величина, характеризующая равновесное состояние термодинамической системы. В термодинамике под эмпирической температурой подразумевается любая функция, к-рая каждому термодинамически равновесному состоянию системы ставит в соответствие действительное число, причем два состояния двух различных систем находятся в тепловом равновесии тогда и только тогда, когда для обеих систем это число одинаково. При тепловом контакте равновесных систем с различными значениями эмпирич. Т. между ними происходит теплообмен, в результате к-рого эмпирич. Т. систем становятся одинаковыми. Из вышеприведенного определения не следует, что эмпирич. Т. системы единственна. В принципе процесс установления теплового равновесия мог бы описываться в терминах выравнивания не одного, а нескольких параметров или «температур». Единственность эмпирич. Т.– независимый постулат, неявно принимаемый в класс. формулировках термодинамики. Теоретически Т. определяется на основе второго начала термодинамики как производная от внутренней энергии системы по энтропии. Эта Т. называется абсолютной температурой, она не изменяет знак при квазистатич. переходе обычной системы из одного состояния в другое и принимается положительной. За единицу абсолютной Т. в СИ принят кельвин (К). Значения Т. t по шкале Цельсия ($t°$, С) связаны с абсолютной Т. T соотношением

$$t = T - 273{,}15\ \text{K}\ \ (1\ °\text{C} = 1\ \text{K}).$$

Единственность эмпирич. Т. и положительность абсолютной Т. для обычных систем получает обоснование в рамках статистич. физики, где Т. определяется соотношением

$$\frac{1}{kT} \equiv \left(\frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E}\right),$$

$\Omega(E)$ – число доступных при данной внутренней энергии E микроскопич. состояний системы, k – постоянная Больцмана. *А. В. Солдатов.*

ТЕНЗОР – многокомпонентная величина, характеризующаяся своим поведением при преобразованиях системы координат.

В физике чаще всего имеют дело с преобразованиями координат либо в обычном 3-мерном пространстве, либо в 4-мерном *Минковского пространстве-времени.* Трансформационные свойства физич. величин могут быть различны в этих двух случаях. Напр., энергия – скаляр относительно преобразований обычных координат и представляет собой четвертую компоненту 4-вектора относительно преобразований в пространстве Минковского. Вообще, указание тензорного характера физич. величины (то есть ее трансформационных свойств) имеет смысл только по отношению к определенной группе преобразований координат в данном пространстве.

Обозначим координаты точки n-мерного пространства $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Общее преобразование координат выражает новые (штрихованные) координаты точки $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$ через старые (нештрихованные).

$$x'^j = f^j(x^1, \ldots, x^n),\ j = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

(все величины в новой системе координат будем обозначать штрихованными, а в старой – нештрихованными).

Простейший пример вектора в n-мерном пространстве – совокупность дифференциалов координат. Дифференциалы штрихованных координат выражаются в виде линейных комбинаций дифференциалов нештрихованных:

$$dx'^j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} dx^k. \qquad (2)$$

Далее везде знак суммирования по дважды повторяющемуся индексу будет опускаться; тогда (2) можно записать короче:

$$dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} dx^k. \qquad (2')$$

Контравариантным вектором T^j (индекс j вверху) относительно преобразования (1) называется n-компонентная величина, $j = 1, \ldots, n$, преобразующаяся по закону (2'):

$$T'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} T^k. \qquad (3)$$

Таким образом, совокупность дифференциалов координат образует контравариантный вектор. Закон преобразования ковариантного вектора T_j (индекс j внизу) имеет вид:

$$T'_j = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} T_k. \qquad (4)$$

Пример ковариантного вектора – градиент скаляра $d\varphi/dx^j$. Вектор называют также Т. 1-го ранга (один индекс), а скаляр – Т. нулевого ранга (нет индексов). Т. r-го ранга имеет r индексов и n^r компонент. При преобразовании (1) контравариантные компоненты Т. (нумеруемые верхними

индексами) преобразуются по закону (3), а ковариантные (нижние индексы) – по закону (4). Напр., закон преобразования Т. 3-го ранга с 1 контравариантным и 2 ковариантными индексами выглядит так:

$$T'^{i}_{jk} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{m}} \frac{\partial x^{n}}{\partial x'^{j}} \frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{k}} T^{m}_{nl}. \qquad (5)$$

Т., имеющий и верхние и нижние индексы, называется смешанным, только верхние индексы – контравариантным, а только нижние – ковариантным.

Ряд соотношений между компонентами Т. не нарушается при преобразованиях координат. Таковы условия симметрии и антисимметрии Т. Напр., ковариантный Т. 2-го ранга называется симметрическим, если его компоненты удовлетворяют соотношениям $T_{ij} = T_{ji}$, и антисимметрическим, если выполняются соотношения $T_{ij} = -T_{ji}$. Симметрич. T_{ij} имеет $n(n+1)/2$, а антисимметрич. $n(n-1)/2$ независимых компонент в любой системе координат. Простейший пример Т. 2-го ранга – символ Кронекера, компоненты к-рого определяются равенствами

$$\delta^{i}_{j} = 0,\ i \neq j;\ \delta^{i}_{i} = 1.$$

Легко видеть, что компоненты δ^{i}_{j} одинаковы в любой системе координат:

$$\delta'^{i}_{j} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{j}} \delta^{k}_{l} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{j}} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x'^{j}} = \delta^{i}_{j}.$$

Над Т. можно совершать действия, не нарушающие их трансформационных свойств: 1. Сумма двух Т. одинакового ранга и вариантности является Т. того же ранга и вариантности. 2. Произведение двух Т. есть новый Т. 3. Свертка смешанного Т. по одному ковариантному и одному контравариантному индексам состоит в приравнивании этих индексов и последующем суммировании по всем значениям получившегося повторяющегося индекса. Эта операция снижает ранг Т. на 2:

$$S'^{i}_{j} \equiv T'^{ik}_{jk} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{l}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{j}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{n}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{k}} T^{ln}_{mp} =$$

$$= \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{l}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{j}} T^{ln}_{mp} \delta^{p}_{n} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{l}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{j}} S^{l}_{m}.$$

В частности, свертка смешанного Т. 2-го ранга дает скаляр.

Для установления тензорного характера нек-рой многокомпонентной величины полезна теорема: если свертка нек-рой величины A ($j, i, k, l, m, \ldots$) с любым Т. $T^{ik\ldots}_{m\ldots}$ приводит к Т.

$$A(j, i, k, l, m, \ldots) T^{ik\ldots}_{m\ldots} = S^{l\ldots}_{j\ldots}, \qquad (6)$$

то A ($j, i, k, l, m, \ldots$) $A^{lm\ldots}_{jik\ldots}$ – Т., вариантность и вес к-рого определяются формулой (6).

Геометрич. структуру пространства определяет его *метрический тензор* g_{ik}. Элемент расстояния ds выражается через метрич. Т. по формуле:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

В нерелятивистской механике имеют дело с преобразованиями координат, оставляющими инвариантной евклидову метрику:

$$g_{ik} = \delta_{ik},\ i, k = 1, 2, 3.$$

Такие преобразования называются ортогональными и имеют вид:

$$x'^{j} = \sum_i a_{ij} x^i, \quad \det \|a_{ij}\| = \pm 1,$$

причем a_{ij} не зависят от координат. При ортогональных преобразованиях ковариантные и контравариантные компоненты Т. преобразуются одинаково, и нет необходимости их различать. Очевидно, что при собственных ортогональных преобразованиях ($\det \|a_{ij}\| = +1$) Т. преобразуются одинаково.

Преобразования специальной теории относительности сохраняют псевдоевклидову метрику:

$$g_{ij} = -\delta_{ij},\ (i, j) \neq (0, 0);\ g_{00} = 1.$$

В этом случае появляется разница в законах преобразования ковариантных и контравариантных компонент Т. В общей теории относительности допустимы уже любые преобразования координат, сохраняющие лишь тензорный характер g_{ij}. К этому случаю в полной мере относятся все свойства и различия ко- и контравариантных законов преобразования. Однако в физике считают, что, напр., контравариантный вектор T^j и полученный из него сверткой с ковариантным метрич. Т. ковариантный вектор

$$T_k = g_{jk} T^j \qquad (7)$$

представляют одну и ту же физич. величину. В связи с этим вводятся операции опускания индекса (7) и поднимания индекса

$$T^l = g^{lk} T_k, \qquad (8)$$

причем контравариантный метрич. Т. g^{kl} определяется уравнением

$$g^{kl} g_{lj} = \delta^{k}_{j}.$$

Операции (7) и (8) применяются к Т. любого ранга.

Большинство физич. величин является функциями координат, задаваемыми в каждой точке пространства, то есть полями в математич. смысле. При этом выгодно ввести понятие тензорных полей, то есть Т., компоненты к-рых зависят явно от координат. Для тензорных полей возникает проблема определения операций анализа (дифференцирования, интегрирования и т. п.), причем таких, к-рые не нарушают тензорного характера величины. Для Т. в пространстве с евклидовой метрикой обычная частная производная по координатам просто повышает ранг Т. на 1, а обычный дифференциал Т. является Т. Однако в кривом пространстве, метрич. Т. g_{ik} к-рого зависит от координат, закон преобразования обычного дифференциала – не тензорный; здесь приходится вводить понятие ковариантного дифференцирования.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 4 изд., М., 1962.

В. П. Павлов.

ТЕНЗОР деформаций – см. *Деформаций тензор.*

ТЕНЗОР кривизны – см. *Римана тензор.*

ТЕНЗОР метрический – см. *Метрический тензор.*

ТЕНЗОР напряжений – см. *Напряжений тензор.*

ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ на многообразии M^n – функция на M^n, которая каждой точке многообразия ставит в соответствие тензор одного и того же строения. Т. п. называется гладким, если в каждой карте (согласованной с гладкой структурой многообразия M^n) координаты тензора являются гладкими функциями точки. Более подробно это означает следующее. Говорят, что на многообразии M^n задано гладкое Т. п. k раз контравариантное и m раз ковариантное [поле типа (k, m)], если в каждой карте, отвечающей данной гладкой структуре, задана система гладких функций, занумерованная k индексами вверху в определенном порядке и m индексами внизу:

$$a^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_m},$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_m = 1, 2, \ldots, n$$

(то есть задано n^{k+m} функций в каждой системе координат, где $n = \dim M^n$), преобразующихся при переходе от карты к карте по следующему закону (тензорный закон преобразования):

$$a'^{i'_1 \ldots i'_k}_{j'_1 \ldots j'_m} = \frac{\partial x'^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x'^{i'_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_m}}{\partial x'^{j'_m}} a^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_m}.$$

Число $k+m$ называется рангом, или валентностью, тензора. Т. п. нулевой валентности (без индексов), по опре-

делению, является скалярным полем или гладкой функцией на M^n.

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, М., 1986.

В. В. Трофимов.

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ гильбертовых пространств H_k, $k=1, ..., n$, – гильбертово пространство, пополнение предгильбертова, состоящего из алгебраического тензорного произведения векторных пространств H_k (то есть линейных комбинаций векторов $\bigotimes_k \xi_k = \xi_1 \otimes ... \otimes \xi_n$, $\xi_k \in H_k$, $k=1, ..., n$) с таким скалярным произведением, что

$$\left(\bigotimes_k \xi_k, \bigotimes_k \eta_k\right) = \prod_{k=1}^n (\xi_k, \eta_k)_{H_k}.$$

Обозначения для Т. п. гильбертовых пространств:

$$H_1 \otimes ... \otimes H_n = \bigotimes_{k=1}^n H_k \quad \text{или} \quad \overline{\bigotimes}_{k=1}^n H_k,$$

когда $\bigotimes_{k=1}^n H_k$ – символ алгебраич. Т. п. (см. [1]–[3]).

Операция Т. п. ассоциативна. Если $\{e_j^{(k)}, j \in J_k\}$ – ортонормированный базис в H_k, то $\{\bigotimes_{k=1}^n e_{jk}^{(k)},\ j_k \in J_k,\ k=1, ..., n\}$ – ортонормированный базис в $\bigotimes_{k=1}^n H_k$. Пространство операторов Гильберта – Шмидта A: $H_1 \to H_2$, где скалярное произведение $(A, B) = \mathrm{tr}(A^* B)$ – след ядерного оператора $A^* B$ в H_1, изоморфно $H_1 \otimes H_2$. Если $H_1 = L_2(M, \mu)$, то пространство квадратично интегрируемых H_2-значных функций

$$L_2((M, \mu); H_2) \simeq H_1 \otimes H_2.$$

Для $H = L_2(\mathbb{R}^m)$ с мерой Лебега n-кратное Т. п. гильбертовых пространств:

$$H^n = \underbrace{H \otimes ... \otimes H}_{n \text{ раз}} \simeq L_2(\mathbb{R}^{nm}).$$

Если H_k^n – пространства состояний разных квантовых систем s_k, то составной системе $s = \bigcup_{k=1}^n s_k$ отвечает пространство $\bigotimes_{k=1}^n H_k$, но для n тождественных частиц, подчиняющихся Бозе – Эйнштейна (соответственно, Ферми – Дирака) статистике, пространство состояний – симметричное (соответственно, антисимметричное) n-кратное Т. п. одночастичного гильбертова пространства H, обозначаемое H_{sym}^n (соответственно, H_{asym}^n); это – область значений ортогонального проектора

$$P_s = (n!)^{-1} \sum_{\pi \in \mathscr{P}_n} P_\pi$$

$$\left(\text{соответственно } P_a = (n!)^{-1} \sum_{\pi \in \mathscr{P}_n} \varepsilon(\pi) P_\pi\right)$$

в H^n. Здесь $\mathscr{P}_n$ – группа перестановок n элементов, π: $(1, ..., n) \to (\pi(1), ..., \pi(n))$, $\varepsilon(\pi) = -1$ для нечетной перестановки и $+1$ для четной, а

$$P_\pi\left(e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_n}\right) = e_{j_{\pi(1)}} \otimes ... \otimes e_{j_{\pi(n)}},$$

где $\{e_j\}$ – ортонормированный базис в H. Таким образом, H_{sym}^n при $H = L_2(\mathbb{R})$ – подпространство функций в $L_2(\mathbb{R}^n)$, инвариантных относительно перестановок аргументов, а функции из H_{asym}^n меняют знак при перестановке любых двух аргументов (см. *Фока пространство*).

Рассматривались бесконечные Т. п. гильбертовых пространств (см. [4]), непрерывные Т. п. (см. [5]).

В Т. п. гильбертовых пространств действуют операторы Т. п. представлений групп и алгебр.

Лит.: [1] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [2] Морен К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; [3] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [4] Guichardet A., «Ann. sci. École Norm. super.», 1966, v. 83, p. 1–56; [5] Guichardet A., Wulfsohn A., «J. Funct. Anal.», 1968, v. 2, p. 371–77.

А. В. Булинский.

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ представлений групп – см. *Произведение* представлений групп.

ТЕНИ ОБЛАСТЬ – см. *Стационарной фазы метод.*

ТЕНЬ – область вне *каустики* в пространстве дополнительных параметров λ фазы F *осциллирующего интеграла* такая, что для любого λ из этой области $F(\cdot, \lambda)$ не имеет вещественных *критических точек*. В этом случае интеграл стремится к нулю быстрее любой степени параметра τ при $\tau \to +\infty$.

С. В. Чмутов.

***CPT*-ТЕОРЕМА:** релятивистски инвариантная квантовая теория поля с обычной связью спина частиц с их статистикой автоматически инвариантна относительно преобразований отражения пространственных координат $r \to -r$ (*P*-преобразование), обращения времени $t \to -t$ (*T*-преобразование) и зарядового сопряжения – замены частиц античастицами (*C*-преобразование). Эта теорема называется также теоремой Людерса – Паули. Таким образом, для любого движения частицы существует симметричное движение античастиц, являющееся зеркальным отражением первого и обращенным относительно него по времени.

Имеется принципиальная разница между требованием инвариантности относительно каждого из этих дискретных преобразований в отдельности и требованием *CPT*-инвариантности. Инвариантность относительно *C*-, *P*- и *T*-преобразований накладывает ограничения на значения констант взаимодействия в лагранжиане. Напр., *P*-инвариантность требует равенства констант взаимодействия фермионов с противоположными киральностями, а *CP*-инвариантность – вещественности констант взаимодействия. Из экспериментов известно, что дискретные *C*-, *P*- и *T*-симметрии нарушены. Лагранжиан стандартной $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)$-модели не обладает соответствующими симметриями и с точки зрения современной теории скорее нуждается в объяснении факт сравнительно слабого нарушения дискретных симметрий.

Статус *CPT*-инвариантности совершенно иной, поскольку основой *CPT*-т. служат требования специальной (частной) теории относительности. Действительно, четное число отражений координат пространства Минковского (*PT*) формально сводится к повороту в нем (на мнимый угол). Поэтому существующие физич. теории, инвариантные относительно преобразований Лоренца (то есть поворотов в пространстве Минковского), оказываются автоматически *CPT*-инвариантными. Пример локальной квантовой теории поля, не обладающей *CPT*-инвариантностью, построить достаточно трудно. Таким образом, экспериментальная проверка *CPT*-т. по существу является проверкой релятивистской инвариантности и локальности взаимодействия.

CPT-инвариантность приводит к следующему равенству для матричных элементов *S*-матрицы: $\langle a|S'|b\rangle = \langle \bar{b}\ |S|\ \bar{a}\rangle$, где $|\bar{a}\rangle$, $|\bar{b}\rangle$ – состояния, *CP*-сопряженные по отношению к состояниям $|a\rangle$, $|b\rangle$. Отсюда получаются предсказания равенства времен жизни и абсолютных значений магнитных моментов частиц и античастиц. Из *CPT*-т. также следует равенство масс частиц и античастиц. Все следствия *CPT*-инвариантности подтверждаются с огромной точностью. Наилучшая точность в измерении разности масс частиц и античастиц достигнута для нейтральных *K*-мезонов:

$$\frac{|m_{K^0} - m_{\bar{K}^0}|}{m_{K^0}} < 6 \cdot 10^{-19}.$$

Равенство аномальных магнитных моментов электрона и позитрона проверено с точностью $\sim 10^{-12}$. Равенство времен жизни τ-частиц и античастиц с наибольшей точностью проверено для мюонов

$$|\Gamma_{\mu^+} - \Gamma_{\mu^-}|/\Gamma_\mu < (3 \pm 8) \cdot 10^{-5}$$

($\tau \approx h/\Gamma$), Γ – соответствующая ширина распада).

Лит.: [1] Мэтьюс П., Релятивистская теория взаимодействия элементарных частиц, пер. с англ., М., 1959; [2] Берестецкий Р. Б., Лифшиц Б. М., Питаевский Л. П., Релятивистская квантовая теория, ч. 1, М., 1968; [3] Стритер Р., Вайтман А., PCT, спин и статистика и все такое, пер. с англ., М., 1966.

Б. И. Высоцкий.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА – см. *Механика.*

ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА УРАВНЕНИЯ – см. *Брагинского уравнения.*

ТЕПЛОЕМКОСТЬ – количество теплоты, которое необходимо передать системе, чтобы повысить ее температуру на 1° С или К, то есть

$$C = \frac{\delta Q}{dT},$$

где δQ – бесконечно малое количество тепла, воспринятое системой в ходе какого-либо процесса при бесконечно малом изменении своего состояния, dT – бесконечно малое приращение температуры системы, вызванное поглощением этого количества тепла. Одна и та же система обладает многими различными Т. в зависимости от испытываемого ею процесса. Величина C может изменяться в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Наибольшее значение имеют Т., измеряемые при постоянном давлении C_P и постоянном объеме C_V.

А. В. Солдатов.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ УРАВНЕНИЕ – уравнение, описывающее процесс распространения теплоты в сплошной среде (газе, жидкости или твердом теле); основное уравнение математической теории теплопроводности. Т. у. выражает тепловой баланс для малого элемента объема среды с учетом поступления теплоты от источников и тепловых потерь через поверхность элементарного объема вследствие теплопроводности. Для изотропной неоднородной среды Т. у. имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_V T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + F,$$

где ρ – плотность среды, c_V – теплоемкость среды при постоянном объеме V, t – время, x, y, z – координаты, $T = T(x, y, z)$ – температура, к-рая вычисляется при помощи Т. у., λ – коэффициент теплопроводности, $F = F(x, y, z)$ – заданная плотность тепловых источников. Величины ρ, c_V, λ зависят от координат и, вообще говоря, от T.

В случае изотропной однородной среды Т. у. принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f,$$

где Δ – оператор Лапласа, $a^2 = \lambda/\rho c_V$ – коэффициент температуропроводности, $f = F/\rho c_V$. В стационарном состоянии, когда T не меняется со временем, Т. у. переходит в *Пуассона уравнение*:

$$\Delta T = -f/a^2,$$

а в отсутствие источников теплоты – в *Лапласа уравнение*

$$\Delta T = 0.$$

Процессы диффузии также описываются уравнениями типа Т. у.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Карслоу Г., Егер Д., Теплопроводность твердых тел, пер. с англ., М., 1964; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988.

Д. Н. Зубарев.

ТЕРМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ – см. *Состояния уравнение.*

ТЕРМОДИНАМИКИ ЗАКОНЫ – совокупность утверждений, обобщающих огромное число экспериментальных данных по изучению наиболее общих свойств макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, процессов перехода между этими состояниями, а также свойств энергии в процессах ее превращений. Насчитывается четыре закона, или начала, термодинамики, к к-рым иногда добавляют еще один, называемый общим началом. В нем постулируется существование состояния термодинамич. равновесия. Предполагается, что изолированная система со временем приходит в состояние термодинамич. равновесия и никогда самопроизвольно выйти из него не может. Постулирование общего начала в известной степени ограничивает область приложения методов термодинамики физич. явлениями, для к-рых нехарактерно самопроизвольное значительное отклонение от равновесного состояния. Общее начало находит оправдание с точки зрения принципов статистич. физики, согласно к-рым постулат неограниченно долгого пребывания системы в термодинамически равновесном состоянии отражает наиболее вероятное поведение системы.

Нулевое начало термодинамики постулирует существование и единственность температуры как особой функции состояния термодинамически равновесной системы. Согласно нулевому началу, все внутренние равновесные параметры системы являются функциями внешних параметров и температуры.

Первое начало термодинамики является количественной формулировкой закона сохранения и превращения энергии применительно к термодинамич. системам. Оно устанавливает, что внутренняя энергия системы является однозначной функцией состояния и может изменяться только благодаря внешним воздействиям. Для элементарного процесса первое начало имеет вид:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где δQ – бесконечно малое количество теплоты, полученное системой, δA – работа, произведенная системой, dU – изменение внутренней энергии системы.

Второе начало термодинамики состоит из двух независимых постулатов:

1) при циклич. процессе невозможно превращение тепла в работу без того, чтобы нек-рое его количество не перешло от более нагретого тела к более холодному;

2) при циклич. процессе невозможен переход тепла от более холодного тела к более нагретому без превращения нек-рого количества работы в тепло.

Второе начало устанавливает наличие у термодинамич. системы однозначной функции состояния – *энтропии.* Эта функция не изменяется при квазистатич. и возрастает при нестатич. процессах в изолированной системе. Второе начало позволяет подразделить все процессы на два типа: обратимые и необратимые. Оно устанавливает наличие в природе асимметрии, проявляющейся в однонаправленности самопроизвольных процессов в сторону возрастания энтропии.

Третье начало термодинамики касается свойств систем при очень низких температурах. Его содержание совпадает с содержанием теоремы Нернста, хотя часто под третьим началом подразумевают лишь следствие теоремы Нернста о недостижимости абсолютного нуля температуры.

А. В. Солдатов.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ – см. *Статистический вес.*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ – свойство выпуклости (вогнутости) *термодинамической функции* на своей области определения. Напр., предельная плотность свободной энергии $f(\rho, \beta)$, где ρ – предельная плотность числа частиц, β – обратная температура, является вогнутой функцией β^{-1} и выпуклой функцией ρ при $\beta > 0$ и $0 \leqslant \rho < \rho_0$. Функция $\rho^{-1} f(\rho, \beta)$ является выпуклой функцией ρ^{-1}, откуда следует известное условие термодинамич. устойчивости (убывание давления с ростом удельного объема $v = \rho^{-1}$):

$$\frac{\partial p}{\partial v} \leqslant 0.$$

Функция $\beta p(z, \beta)$, где $p(z, \beta)$ – предельное давление, z – активность, является выпуклой функцией $\ln z$ и β при $z > 0$, $\beta > 0$.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

Д. П. Санкович.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ – совпадение в *термодинамическом пределе* плотностей *термодинамических функций*, порождаемых двумя гамильтонианами. Понятие Т. э. введено Г. Венцелем [1]. Т. э. строго доказывается в методе аппроксимирующего гамильтониана для так наз. модельного и аппроксимирующего гамильтонианов. Если, наряду с плотностями термодинамич. функций, совпадают в термодинамич. пределе и *корреляционные функции*, построенные на двух различных гамильтонианах, то говорят, что имеет место сильная Т. э.

Лит.: [1] Wentzel G., «Phys. Rev.», 1960, v. 120, p. 1572; [2] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974.

Д. П. Санкович.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ – основные объекты изучения равновесной статистической механики; действительные функции, пропорциональные логарифму статистической суммы для каждого классического (квантового) ансамбля. К Т. ф. относятся энтропия (микроканонический ансамбль), свободная энергия (или энергия Гельмгольца) (канонический ансамбль) и давление (большой канонический ансамбль).

Пусть рассматриваемая система (классич. или квантовая, непрерывная или решеточная) заключена в ограниченной области Λ пространства $\mathbb{R}^\nu$ (непрерывный случай), или $\mathbb{Z}^\nu$ (решеточный случай). В непрерывном случае предполагается измеримость по Лебегу множества Λ. Пусть $V(\Lambda)$ – объем (число точек) Λ. В случае микроканонич. ансамбля $\Omega(\Lambda, N, E)$ – микроканонич. статистич. сумма. В случае канонич. ансамбля $Q(\Lambda, n, \beta)$ – канонич. статистич. сумма. В случае большого канонич. ансамбля $\Xi(\Lambda, z, \beta)$ – большая статистич. сумма. Здесь параметры, задающие соответствующие состояния системы: N – число частиц, $n \equiv N/V(\Lambda)$ – плотность числа частиц, E – энергия, β – обратная температура, z – активность (фугитивность). Тогда Т. ф. (плотности Т. ф.) определяются следующим образом.

Энтропия:

$$s(\Lambda, N, E) = \frac{1}{V(\Lambda)} \ln \Omega(\Lambda, N, E).$$

Свободная энергия:

$$f(\Lambda, n, \beta) = -\frac{1}{\beta V(\Lambda)} \ln Q(\Lambda, n, \beta).$$

Давление:

$$p(\Lambda, z, \beta) = \frac{1}{\beta V(\Lambda)} \ln \Xi(\Lambda, z, \beta).$$

В современной теории равновесных термодинамич. систем в соответствии с принципом макроскопич. эквивалентности рассматриваются предельные Т. ф. (в термодинамич. пределе):

$$s(\rho, \varepsilon) = \lim_{V(\Lambda)\to\infty} s(\Lambda, N, E),$$

$$f(\rho, \beta) = \lim_{V(\Lambda)\to\infty} f(\Lambda, n, \beta),$$

$$p(z, \beta) = \lim_{V(\Lambda)\to\infty} p(\Lambda, z, \beta),$$

где

$$\rho = \lim_{V(\Lambda)\to\infty} \frac{N}{V(\Lambda)}, \quad \varepsilon = \lim_{V(\Lambda)\to\infty} \frac{E}{V(\Lambda)}.$$

Обычно объем $V(\Lambda) \to \infty$ понимают в смысле Фишера. Т. ф., получаемые с помощью различных ансамблей, подчиняются обычным термодинамич. соотношениям при определенном соответствии между термодинамич. параметрами, определяющими ансамбли (эквивалентность ансамблей).

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

Д. П. Санкович.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ Гиббса – см. *Статистической механики математические задачи.*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ, термодинамический предельный переход,– основной прием статистической физики, заключающийся в том, что в состоянии конечных систем статистической механики число частиц (среднее число) N и объем V области Λ, в которой расположена система, устремляют к бесконечности при постоянной плотности $\frac{N}{V} = \frac{1}{\nu}$, при этом область Λ заполняет все евклидово пространство $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$.

В рамках большого канонич. ансамбля часто только объем устремляется к бесконечности, а плотность фиксируется после Т. п. Состояния *бесконечных систем* получаются в результате выполнения Т. п. Математич. обоснование существования Т. п. является трудной задачей, удовлетворительно решенной только при малых плотностях.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

Д. Я. Петрина.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ для неравновесных состояний систем классической статистической механики.

Состояния $F_\Lambda(t)$ конечных систем частиц, распределенных в области Λ и зависящих от времени, называются неравновесными. Они определяются как нестационарные решения *Боголюбова уравнений*. Состояния конечных систем $F_\Lambda(t)$ строго определены в пространстве B_Λ последовательностей суммируемых функций, сосредоточенных по координатам в Λ, и задаются формулой

$$F_\Lambda(t) = U_\Lambda(t) F_\Lambda(0) =$$

$$= e^{\int_\Lambda dx} S_\Lambda(-t) e^{-\int_\Lambda dx} F_\Lambda(0), \quad F_\Lambda(0) \in B_\Lambda, \qquad (1)$$

при этом и $F_\Lambda(t) \in B_\Lambda$, а $S_\Lambda(-t)$ – прямая сумма операторов эволюции конечного числа частиц в области Λ. Формула (1) покомпонентно выглядит так

$$F_\Lambda(t, X) = \sum_{N(Y)=0}^{\infty} \frac{1}{N(Y)!} \int_{\Lambda^{N(Y)}} dY \times$$

$$\times \sum_{Z \subset Y} (-1)^{N(Y-Z)} S_\Lambda(t, Z) S_\Lambda(-t, X \cup Z) F_\Lambda^0(X \cup Y), \qquad (2)$$

$$X = (x_1, \ldots, x_s), \quad Y = (y_1, \ldots, y_N);$$

здесь была использована изометричность оператора $S_\Lambda(t, Z)$. Ряды в (2) сходятся в смысле метрики $L_s(\Lambda)$ (суммируемых функций от s переменных, сосредоточенных по координатам в Λ), а все состояния $F_\Lambda(t) \subset L(\Lambda)$, если $F_\Lambda(0) \subset L(\Lambda)$. Состояния $F_\Lambda(t) \subset L(\Lambda)$ описывают конечные системы, ибо среднее число частиц системы, пропорциональное

$$\int F_{1,\Lambda}(t, x_1)\, dx_1,$$

конечно.

Для того чтобы получить состояния бесконечных систем, необходимо построить решения уравнений Боголюбова в пространствах, отличных от $L(\Lambda)$, и таких, что в них среднее число частиц и другие характеристики системы бесконечны. Естественно поэтому решения уравнений Боголюбова рассматривать в пространстве, к-рое содержит равновесные состояния бесконечных систем, считая что начальные состояния для неравновесных состояний являются возмущением равновесных. Таким пространством является E_ξ. Оно состоит из последовательностей $f = (f_1(x_1), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ симметричных ограниченных функций, заданных на фазовых пространствах с нормой

$$\|f\| = \sup_s \frac{1}{\xi^s} \sup_{x_1, \ldots, x_s} e^{\beta \sum_{i=1}^s \frac{p_i^2}{2m}} |f_s(x_1, \ldots, x_s)|. \qquad (3)$$

Равновесные состояния бесконечных систем принадлежат E_ξ и получаются из состояний конечных в результате *термодинамического предела*. Будем считать, что и начальные условия F_Λ^0 бесконечных систем получаются в результате термодинамич. предела из начальных данных F_Λ^0 конечных сис-

тем. Это означает, что $F^0_\Lambda \in L(\Lambda)\cap E_\xi$, $F_0 \in E_\xi$ и все функции распределения $F^0_{s,\Lambda}(X)$ сходятся равномерно по X на компактах в термодинамич. пределе ($V\to\infty$) к $F^0(X)$. Функция распределения $F_\Lambda(t, X)\in L_s(\Lambda)$ и ряд (2) сходится в $L_s(\Lambda)$, ибо $F^0_\Lambda \in L(\Lambda)\cap E_\xi$. Если и последовательность $F_\Lambda(t, X)$ при $V\to\infty$ сходится по X равномерно на компактах к функции распределения $F(t, X)$, то предельную функцию распределения $F(t, X)$ называют термодинамическим пределом последовательности $F_\Lambda(t, X)$, а состояние $F(t)$ – термодинамическим пределом состояния $F_\Lambda(t)$. Состояние $F(t)$ описывает бесконечные неравновесные системы.

Если в формуле (2) устремить формально $V\to\infty$, то получают формулу

$$F(t,X)=\sum_{N(Y)=0}^{\infty}\frac{1}{N(Y)!}\int dY\times$$

$$\times\sum_{Z\subset Y}(-1)^{N(Y-Z)}S(t,Z)S(-t,X\cup Z)F^0(X\cup Y), \qquad (4)$$

к-рая на первый взгляд бессмысленна, ибо $F^0(X\cup Y)\in E_\xi$ и ограничены по координатам, а интегрирование в (2) ведется по всему фазовому пространству. Для доказательства существования Т. п. и придания строгого математич. смысла формуле (4) используется новое в теории гамильтоновых систем понятие *взаимодействия области*.

Область взаимодействия определяется следующим образом. Рассматриваются $s+n$ частиц с начальным состоянием X и Y соответственно. Положения и импульсы s-х и импульсы n-х частиц фиксируются, а положения n-х произвольны. Областью взаимодействия $\Omega_n(t)$ n-х частиц называется то множество их координат, вне к-рого оператор

$$\sum_{Z\subset Y}(-1)^{N(Y-Z)}S_\Lambda(t,Z)S_\Lambda(-t,X\cup Z)=0 \qquad (5)$$

на промежутке времени $[0, t]$ при всех Λ. Для начальных данных из области взаимодействия n-е частицы на промежутке времени $[0, t]$ не распадаются на группы (кластеры), не взаимодействующие между собой и с s-ми. Объем области взаимодействия $V_n(t)$ зависит от импульсов n-х и начальных данных s-х частиц. Для доказательства существования Т. п. $F(t)$ важную роль играет средний по распределению Максвелла объем области взаимодействия $\overline{V}_n(t)$. Для одномерных систем с короткодействующим дважды непрерывно дифференцируемым потенциалом с твердой сердцевиной получены оценки $\overline{V}_n(t)\leqslant n^n c^n t^n$, где постоянная c определяется параметрами системы.

Для начальных данных $F^0_\Lambda\in E_\xi\cap L$ и X из компакта справедлива оценка

$$|F_\Lambda(t,X)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_1^n}{n!}\overline{V}_n(t), \quad c_1<\infty, \qquad (6)$$

из к-рой следует, что ряды (2), определяющие $F_\Lambda(t, X)$, сходятся при произвольном Λ равномерно по X на компактах при $0<t<t_0$, где $t_0<\infty$ определяется параметрами задачи.

Так как область интегрирования по $q_{s+1}, \ldots, q_{s+n}$ в каждом слагаемом при $F^0(X\cup Y)$ тоже конечна и содержится в $\Omega_n(t)$, то и ряды (4) для $F(t, X)$ имеют смысл, сходятся равномерно на компактах по X при $0<t<t_0$ и справедлива оценка (6). Оператор $U(t)$ определен при $0\leqslant t\leqslant t_0$ в пространстве E_ξ в том смысле, что ряды (4) для $F(t, X)=(U(t)F_0)_s(X)$ сходятся равномерно на компактах по X. Последовательность $F_\Lambda(t, X)$ при $V\to\infty$ сходится равномерно на компактах к $F(t, X)$. Для определенного множества начальных данных из E_ξ – так наз. локальных возмущений равновесных состояний, эти результаты справедливы при всех $-\infty<t<\infty$. Предельные функции распределения $F(t, X)$ являются слабыми (обобщенными) решениями уравнений Боголюбова. Таким образом, с помощью процедуры термодинамич. предельного перехода определено неравновесное состояние $F(t)$ одномерных систем. Для одного класса начальных данных, описывающих состояния, когда частицы не сталкиваются упруго на конечном промежутке времени, доказано существование Т. п. для неравновесного состояния двух- и трехмерных систем на этом же промежутке времени.

Для системы чистых упругих шаров доказано существование неравновесного состояния бесконечных систем с той же полнотой, что и для одномерных систем. Состояния существуют на конечном промежутке времени для произвольных начальных данных из E_ξ и на бесконечном промежутке для локальных возмущений равновесных состояний в качестве начальных данных.

Если рассматривать состояния конечных неравновесных систем $F_\Lambda(t, X)$ в рамках канонич. ансамбля, то обоснование термодинамич. предельного перехода осуществляется по той же схеме, что и в рамках большого канонич. ансамбля, изложенного выше, только следует учесть, что при конечном объеме V последовательности F^0_Λ и $F_\Lambda(t)$ конечны, $F^0_{s,\Lambda}=F_{s,\Lambda}(t)=0$ при $s>N$, $\frac{N}{V}=\frac{1}{\nu}$ и что последовательности функций распределения $F^0_{s,\Lambda}(X)$ сходятся равномерно на компактах при $V\to\infty$, $N\to\infty$, $\frac{N}{V}=\frac{1}{\nu}$, а вместе с ними сходятся в том же смысле $F_{s,\Lambda}(t, X)$.

Существует и другой подход к построению неравновесных состояний, когда сразу рассматриваются решения бесконечного числа уравнений Гамильтона, к-рые существуют почти для всех (по равновесной мере) начальных данных. С помощью их задается эволюция мер, определяющих состояние бесконечных систем и являющихся возмущением равновесного состояния. По этой мере строятся функции распределения, к-рые являются слабыми решениями уравнения Боголюбова. Этот подход в основном проходит для одномерных систем.

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985.

Д. Я. Петрина.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ для равновесных состояний непрерывных систем квантовой статистической механики – процедура образования состояния *бесконечных систем* из конечных, состоящая в том, что число частиц N и объем системы V устремляются к бесконечности при постоянной плотности. Равновесное состояние конечной системы частиц, расположенных в области $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$, $d=1, 2, 3$ с объемом V при обратной температуре $\beta=\frac{1}{kT}>0$ и активности $z>0$ описывается в рамках *большого канонического ансамбля* последовательностью статистических операторов, или приведенных матриц плотности:

$$\left.\begin{aligned} F_{s,\Lambda}((q)_s;(q')_s)&=\\ &=\Xi^{-1}(z,\beta,V)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{s+n}}{n!}\times\\ \times\int_{\Lambda^n}e^{-\beta H^\Lambda_{s+n}}((q)_s;(u)_n;(q')_s;(u)_n)\,d(u)_n;&\\ \Xi(z,\beta,V)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{\Lambda^n}e^{-\beta H^\Lambda_n}((u)_n;(u)_n)\,d(u)_n,&\\ (q)_s=(q_1,\ldots,q_s),\quad (q')_s=(q'_1,\ldots,q'_s).& \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Нормирующий множитель $\Xi(z, \beta, V)$ называется большой статистической суммой, $e^{-\beta H^\Lambda_n}((q)_n;(q')_n)$ – ядро оператора $e^{-\beta H^\Lambda_n}$, гамильтониан H^Λ_n задается выражением

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i}{2m}+\sum_{i<j=1}^{n}\Phi(q_i-q_j)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n(\Lambda)$ функций, интегрируемых по модулю в квадрате с нулевыми граничными условиями. На потенциал накладываются условия, обеспечивающие существенную самосопряженность H_n^Λ. Рассматривается статистика Больцмана. Ядра $e^{-\beta H_n^\Lambda}((q)_n; (q')_n)$ можно представить интегралом по условной мере Винера или интегралом Винера с помощью формулы Фейнмана – Каца:

$$e^{-\beta H_n^\Lambda}((q)_n; (q')_n) =$$

$$= \int \mathsf{P}_{(q)_n, (q')_n}(d(\omega)_n)\,\alpha_\Lambda((\omega)_n)\,e^{-U((\omega)_n)}, \qquad (2)$$

где $(\omega)_n = (\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))$, $\omega_i(t)$ – траектория в $\mathbb{R}^d$, $0 \leqslant t \leqslant \beta$, с началом в q_i и концом в q_i', $\omega_i(0) = q_i$, $\omega_i(\beta) = q_i'$, $U((\omega)_n)$ – функционал

$$U((\omega)_n) = \int_0^\beta \sum_{i<j=1}^n \Phi(\omega_i(t) - \omega_j(t))\,dt,$$

$\alpha_\Lambda((\omega)_n)$ – характеристич. функция траекторий, полностью расположенных в Λ, $\mathsf{P}_{(q)_n, (q')_n}(d(\omega)_n)$ – условная мера Винера на траекториях $(\omega)_n$. На потенциал Φ наложены условия непрерывности и устойчивости

$$\sum_{i<j=1}^n \Phi(\omega_i(t) - \omega_j(t)) \geqslant -Bn.$$

Оператор $e^{-\beta H_n^\Lambda}$ является ядерным:

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_n^\Lambda} = \int_{\Lambda^n} e^{-\beta H_n^\Lambda}((q)_n; (q)_n)\,d(q)_n \leqslant$$

$$\leqslant e^{\beta B} V^n \lambda^n, \quad \lambda = \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{\frac{V}{2}}.$$

Статистич. операторы при конечном V являются ядерными:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, F_{s,\Lambda} = \int_{\Lambda^s} F_{s,\Lambda}((q)_s; (q)_s)\,d(q)_s \leqslant \\ \leqslant \Xi^{-1}(z,\beta,V) z^s \lambda^{-s} e^{\beta B s}\, e^{e^{z\beta} B \lambda^{-1} V}, \\ \Xi(z,\beta,V) \leqslant e^{e^{z\beta} B \lambda^{-1} V}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Оценки (3) остаются справедливыми и при комплексных z, следует только в (3) положить $|z|$ вместо $z > 0$, поэтому числитель и знаменатель выражения (1) для статистич. операторов являются целыми функциями z и расходятся как экспоненты при $V \to \infty$. Сущность обоснования Т. п. состоит в том, чтобы доказать, что в определенном смысле существует предел

$$\lim F_{s,\Lambda}((q)_s; (q')_s) = F_s((q)_s; (q')_s),$$

и исследовать характер зависимости предельных статистич. операторов от активности. Для этой цели используют *Кирквуда – Зальцбурга уравнение*.

Из (1), (2) следует представление статистич. операторов $F_{s,\Lambda}((q)_s; (q')_s)$ через функционалы:

$$F_{s,\Lambda}((q)_s; (q')_s) = \int \mathsf{P}_{(q)_s, (q')_s}(d(\omega)_s)\,\rho_{s,\Lambda}((\omega)_s),$$

где

$$\rho_{s,\Lambda}((\omega)_s) = \Xi^{-1}(z,\beta,V) \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{s+n}}{n!} \int_{\Lambda^n} d(u)_n \times$$

$$\times\, \mathsf{P}_{(u)_n, (u)_n}(d(\omega)_n)\,\alpha_\Lambda((\omega)_s, (\omega)_n)\, e^{-U((\omega)_s, (\bar\omega)_n)},$$

траектории $((\omega)_n)$ замкнутые, $\bar\omega_i(0) = \bar\omega_i(\beta) = u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Последовательность функционалов $\rho_\Lambda = (\rho_{s,\Lambda}(\omega)_s)$, $s \geqslant 1$, удовлетворяет уравнению Кирквуда – Зальцбурга:

$$\rho_{s,\Lambda}((\omega)_s) = z e^{-F_1((\omega)_{s-1}^1)}(\rho_{s-1,\Lambda}((\omega)_{s-1}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m!} \int_{\Lambda^m} \mathsf{P}_{(u)_m, (u)_m}(d(\bar\omega)_m) \times$$

$$\times\, K(\omega_1, (\bar\omega)_m)\,\rho_{s-1+m}((\omega)_{s-1}, (\bar\omega)_m)\,\rho_{0,\Lambda} = 1, \quad s \geqslant 1, \qquad (4)$$

$$F_1((\omega)_{s-1}^1) = \int_0^\beta \sum_{j=2}^s \Phi(\omega_1(t) - \omega_j(t))\,dt,$$

$$K(\omega_1, (\omega)_m) = \prod_{j=1}^m (e^{-\int_0^\beta \Phi(\omega_1(t) - \omega_j(t))\,dt} - 1),$$

$$(\omega)_{s-1} = (\omega_2, \ldots, \omega_s).$$

Функционалы $\rho_{s,\Lambda}((\omega)_s)$ симметричны, поэтому уравнение Кирквуда – Зальцбурга можно симметризовать и представить их как одно операторное уравнение для последовательности:

$$\rho_\Lambda = z K_\Lambda \rho_\Lambda + \rho_\Lambda^0, \ \rho_\Lambda^0 = (z\alpha_\Lambda(\omega_1), 0, \ldots), \qquad (5)$$

где оператор K_Λ определяется симметричным уравнением Кирквуда – Зальцбурга. Уравнения (5) рассматриваются в банаховом пространстве E_ξ последовательностей интегрируемых по мере Винера ограниченных функционалов $\varphi = (\varphi_s((\omega)_s))_{s \geqslant 1}$ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{m \geqslant 1} \xi^{-m} \sup_{(\omega)_m} |\varphi((\omega)_m)| < \infty, \quad \xi = C^{-1}(\beta),$$

$$C(\beta) = e^{2\beta B} \beta\lambda \int |\Phi(q)|\,dq < \infty, \quad \lambda = \left(\frac{2\pi m}{B}\right)^{\frac{3}{2}} V;$$

такой потенциал регулярен. Вводится симметричное уравнение Кирквуда – Зальцбурга при $\Lambda = \mathbb{R}^d$:

$$\rho = zK\rho + \rho_0. \qquad (6)$$

Теорема. Для устойчивого и регулярного потенциала симметричные уравнения Кирквуда – Зальцбурга (5), (6) имеют единственные решения, которые при $|z| < e^{-2\beta B - 1} C^{-1}(\beta)$ представляются сходящимися по норме E_ξ рядами

$$\rho_\Lambda = \sum_{n=0}^\infty (z K_\Lambda)^n \rho_\Lambda^0, \quad \rho = \sum_{n=0}^\infty (zK)^n \rho^0, \qquad (7)$$

$$\|zK\| = k < 1.$$

Последовательность ρ_Λ сходится при $V \to \infty$ к ρ в том смысле, что функционалы $\rho_{s,\Lambda}((\omega)_s)$ сходятся при $V \to \infty$ равномерно на компактах к $\rho_s((\omega)_s)$. Из представлений статистич. операторов $F_{s,\Lambda}$ и F_s через функционалы ρ_Λ и ρ следуют оценки для их ядер

$$F_{s,\Lambda}((q)_s; (q')_s) \leqslant (1-k)^{-1} \xi^s \lambda^s e^{-((q)_s - (q')_s)^2 \frac{m}{2\beta}},$$

из к-рых вытекает, что операторы $F_{s,\Lambda}$ ограничены в $\mathcal{H}_s(\Lambda)$, а F_s – в $\mathcal{H}_s$ и их нормы не превосходят $(1-k)^{-1}\xi^s$. Последовательность операторов $F_{s,\Lambda}$ при $V \to \infty$ сходится сильно к оператору F_s, более того, ядра $F_{s,\Lambda}((q)_s; (q')_s)$ сходятся к $F_s((q)_s; (q')_s)$ равномерно на компактах.

Статистич. операторы обладают важным групповым свойством, из к-рого следует *ослабления корреляций принцип*. Групповое свойство состоит в следующем. При

$$|z| < e^{-2\beta B - 1}\, C^{-1}(\beta)$$

существует последовательность трансляционно-инвариантных ядер $\chi = (\chi_s((q_s); (q')_s))$, $s \geqslant 1$, к-рые обладают свойствами

$$\int |\chi_s((q)_s; (q+a)_s)|\,d(q)_s \leqslant C\lambda^{s-1} e^{-\frac{(a^2)_{s-1} m}{4\beta}},$$

$$\int |\chi_s((q)_s; (q')_s)|\,d(q)_s\,d(q')_s < C.$$

Ядра статистич. операторов F_s представляются через ядра χ таким образом:

$$F_s((q)_s; (q')_s) = \sum \chi_{i_1}((q)_{i_1}; (q')_{i_1}) \ldots \chi_{i_r}((q)_{i_r}; (q')_{i_r}),$$

где суммирование ведется по всем числам $i_1, \ldots, i_r$ таким, что $i_1 + \ldots + i_r = s$. Отсюда следует принцип ослабле-

ния корреляций: если данную совокупность частиц разбить на достаточно удаленные друг от друга множества, то их статистич. оператор равен произведению статистич. операторов этих множеств.

Все вышеприведенные результаты для статистики Больцмана остаются справедливыми и для статистики Бозе – Эйнштейна и статистики Ферми – Дирака.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Genibre J., «J. Math. Phys.», 1965, v. 6, № 2, p. 238–62.

Д. Я. Петрина.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ для равновесных состояний непрерывных систем классической статистической механики – процедура, в результате которой из состояний конечных систем получаются состояния *бесконечных систем*. Она состоит в том, что число частиц N и объем системы V устремляются к бесконечности при постоянной плотности $\frac{1}{\nu}=\frac{N}{V}$.

1. Канонический ансамбль. Равновесное состояние в рамках канонич. ансамбля для N частиц, расположенных в конечной области $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$, $d=1, 2, 3$, при обратной температуре β, задается *Гиббса распределением* на фазовом пространстве:

$$\left.\begin{aligned} Z^{-1}_{(N,\Lambda)}\, e^{-\beta H^{\Lambda}_N((x)_N)},\\ Z_{(N,\Lambda)}=\int_{\Lambda^N} e^{-\beta H^{\Lambda}_N((x)_N)}d(x)_N,\\ \int_{\Lambda}dx=\int_{\Lambda}dq\int_{\mathbb{R}^d}dp,\quad (x)_N=(x_1,\ldots,x_N).\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь

$$H^{\Lambda}_N((x)_N)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}+\sum_{i<j=1}^{N}\Phi(q_i-q_j)$$

– гамильтониан N частиц в области Λ, p – импульс, q – координата, а если $q_i\notin\Lambda$, хотя бы для одного $i=1, \ldots, N$, то $H^{\Lambda}_N=+\infty$, $\beta=\frac{1}{kT}$, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, $Z_{(N,\Lambda)}$ – статистич. сумма. Средняя скорость предполагается равной нулю. Равновесные функции распределения $F^{(N)}_{s,\Lambda}((x)_s)$ определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} F^{(N)}_{s,\Lambda}((x)_s)=\frac{N!}{(N-s)!}Z^{-1}_{(N,\Lambda)}\int_{\Lambda^{N-s}}e^{-\beta H^{\Lambda}_N((x)_s,(x)^s_N)}d(x)^s_N,\\ (x)^s_N=(x_{s+1},\ldots,x_N),\quad s=1,2,\ldots,N.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Они равны произведению функции, зависящей от импульсов как распределение Максвелла, и функции, зависящей от координат. Общепринято рассматривать функции распределения, зависящие только от координат:

$$F^{(N)}_{s,\Lambda}((q)_s)=\int_{\mathbb{R}^{ds}}F^{\Lambda}_{s,N}((x)_s)\,d(p)_s=$$

$$=\frac{N!}{(N-s)!}Q^{-1}(N,V)\int_{\Lambda^{N-s}}e^{-\beta U^{\Lambda}_N((q)_s,(q)^s_N)}d(q)^s_N, \qquad (3)$$

где

$$U^{\Lambda}_N((q)_N)=\sum_{i<j=1}\Phi(q_i-q_j)$$

– потенциальная энергия N частиц в области Λ, $Q(N,\Lambda)$ – конфигурационный интеграл

$$Q(N,\Lambda)=\int_{\Lambda^N}e^{-\beta U^{\Lambda}_N((q)_N)}d(q)_N. \qquad (4)$$

Парный потенциал предполагается устойчивым и регулярным

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i<j=1}^{N}\Phi(q_i-q_j)\geqslant -BN,\quad B>0,\\ \int|e^{-\beta\Phi(q)}-1|dq=C(\beta)<\infty.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Если в выражении для функций распределения перейти к Т. п. и устремить объем $V(\Lambda)=V$ области Λ и число частиц N к бесконечности при постоянной плотности $\frac{N}{V}=\frac{1}{\nu}$, то возникает трудность, связанная с тем, что функции распределения равны отношению двух выражений, к-рые расходятся как V^N. Сущность обоснования Т. п. состоит в том, чтобы доказать, что в определенном смысле существует предел

$$\lim_{N\to\infty,\,V\to\infty,\,\frac{N}{V}=\frac{1}{\nu}}F^{(N)}_{s,\Lambda}((q)_s)=F_s((q)_s), \qquad (6)$$

и исследовать характер зависимости предельных функций от плотности.

Для этой цели используются уравнения для функций распределения. Последовательность

$$(F^{(N)}_{s,\Lambda}((q)_s))_{1\leqslant s\leqslant N}=F^{(N)}_{\Lambda}$$

удовлетворяет соотношениям

$$F^{(N)}_{s,\Lambda}((q)_s)=a_N(V)\,e^{-\beta\sum_{i=2}^{s}\Phi(q_i-q_1)}\Big[F^{(N-1)}_{s-1,\Lambda}((q)^1_s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-s}\frac{1}{k!}\int_{\Lambda^k}\prod_{i=1}^{k}\varphi_{q_1}(y_i)F^{(N-1)}_{s-1+k,\Lambda}((q)^1_s,(y)_k)\,d(y)_k\Big], \qquad (7)$$

$$F^{(N-1)}_{0,\Lambda}=1,\quad a_N(V)=N\frac{Q(N-1,V)}{Q(N,V)},$$

$$\varphi_{q_1}(y_i)=e^{-\beta\Phi(q_1-y_i)}-1,\quad 1\leqslant s\leqslant N,\quad (q)^1_s=(q_2,\ldots,q_s).$$

В свою очередь, последовательность $F^{(N-1)}_{\Lambda}$ удовлетворяет аналогичному соотношению и выражается через $F^{(N-2)}_{\Lambda}$ и т. д. Если перейти в этих соотношениях к Т. п., считая, что последовательность $F^{(N-l)}_{\Lambda}$ сходится к $F=(F_s((q)_s))_{s\geqslant 1}$, а $a_{N-l}(V)$ – к $a(v)$, то получают предельное соотношение

$$F_s((q)_s)=a(v)\,e^{-\beta\sum_{i=2}^{s}\Phi(q_i-q_1)}\Big[F_{s-1}((q)^1_s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{\Lambda^k}\prod_{i=1}^{k}\varphi_{q_1}(y_i)F_{s-1+k}((q)^1_s,(y)_k)\,d(y)_k\Big], \qquad (8)$$

$$F_0=1,\quad s\geqslant 1.$$

В статистич. механике соотношения (8) рассматриваются как уравнения относительно последовательности. Их называют уравнениями Кирквуда – Зальцбурга. Существуют и другие уравнения для последовательности F: *Майера – Монтролла уравнение, Боголюбова уравнение* и т. д. Задачу обоснования Т. п. удобнее решать с помощью уравнения (8). В уравнениях (8) и соотношениях (7) выделенную роль играет переменная q_1, можно вывести уравнения, выделяя q_i, $i=1, \ldots, s$, в той области, где

$$\sum_{i\neq j}\Phi(q_i-q_j)>2B,$$

и симметризуя их. В дальнейшем под уравнениями Кирквуда – Зальцбурга понимают симметризованные уравнения Кирквуда – Зальцбурга, к-рые естественно рассматривать как одно операторное уравнение для F вида:

$$F=KF+F^0, \qquad (9)$$

где оператор K определяется правой частью симметризованного уравнения Кирквуда – Зальцбурга, а $F^0=(a(v), 0, \ldots)$. Аналогично соотношения для $F^{(N)}_{\Lambda}$ можно представить в виде

$$F^{(N)}_{\Lambda}=K^{(N)}_{\Lambda}F^{(N-1)}_{\Lambda}+F^{0\,(N)}_{\Lambda}, \qquad (10)$$

где оператор $K^{(N)}_{\Lambda}$ определяется правой частью соотношения (7), а $F^{0\,(N)}_{\Lambda}=(a_N(V), 0, \ldots)$. Уравнения Кирквуда – Зальцбурга (9) и соотношения (10) рассматриваются в банаховом пространстве E_{ξ} последовательностей ограниченных

функций $f=(f_s((q)_s))_{s\geqslant 1}$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{s\geqslant 1}\frac{1}{\xi^s}\sup_{q_s}|f_s((q)_s)|, \quad \xi = C^{-1}(\beta).$$

Теорема. Для устойчивого и регулярного потенциала Φ и достаточно малой плотности $\frac{1}{v}$ существует единственное решение уравнения Кирквуда – Зальцбурга и его можно представить сходящимся по норме пространства E_ξ рядом

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} K^n F^0.$$

Из соотношений (7) для $F_\Lambda^{(N)}$ также следует, что $F_\Lambda^{(N)} \in E_\xi$ и что последовательность $F_{s,\Lambda}^{(N)}((q)_s)$ в Т. п. сходится равномерно на компактах к $F_s((q)_s)$. Предельная последовательность F описывает равновесное состояние бесконечной системы, она является голоморфной функцией плотности в нек-рой окрестности нуля.

2. Большой канонический ансамбль. В рамках большого канонич. ансамбля последовательность равновесных функций распределения в конечной области Λ определяется следующим образом через распределение Гиббса:

$$F_{s,\Lambda}((x)_s) = \Xi^{-1}(V,\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\times$$
$$\times\int_{\Lambda^n} e^{-\beta(H^\Lambda_{s+n}((x)_s,(x)^s_N)-\mu(s+n))}d(x)^s_N, \qquad (11)$$

где Ξ – большая статистич. сумма

$$\Xi(V,\beta,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n} e^{-\beta(H^\Lambda_n((x)_n),-\mu(n))}d(x)_n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{\Lambda^n} e^{-\beta U^\Lambda_n((q)_n)}d(q)_n, \qquad (12)$$

z – активность, $z=\left(\frac{2\pi}{m}\right)^{d/2}e^{\beta\mu}$, μ – химич. потенциал, с помощью к-рого фиксируется среднее число частиц $\overline{N}$ (V). Функция распределения $F_{s,\Lambda}((x)_s)$ равна произведению функции, зависящей от импульсов как распределение Максвелла, и функции, зависящей только от координат. Общепринято рассматривать функции распределения, зависящие только от координат

$$F_{s,\Lambda}((q)_s) = \Xi^{-1}(V,\beta,z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+s}}{n!}\times$$
$$\times\int_{\Lambda^n} e^{-\beta U^\Lambda_{s+n}((q)_s,(q)^s_N)}d(q)^s_N, \qquad (13)$$
$$F_{s,\Lambda}((q)_s) = 0, \quad q_i\notin\Lambda, \quad i=1,\dots,s.$$

Из условия устойчивости следует, что числитель и знаменатель выражения (13) при конечном V существуют, являются целыми функциями, ограничены сверху величинами

$$e^{\beta Bs}|z|^s e^{e^{\beta B}V|z|},\ e^{e^{\beta B}V|z|}$$

соответственно и расходятся при $V\to\infty$ как экспоненты. Обоснование существования Т. п. состоит в том, чтобы доказать, что в каком-то смысле существует предел

$$\lim_{V\to\infty} F_{s,\Lambda}((q)_s) = F_s((q)_s), \quad s\geqslant 1,$$

и установить характер зависимости предельных функций от активности. Для этой цели, как и в случае канонич. ансамбля, используются уравнения для функций распределения, к-рые для большого канонич. ансамбля выглядят таким образом:

$$F_{s,\Lambda}((q)_s) = ze^{-\beta\sum_{i=2}^{s}\Phi(q_1-q_i)}\Big[F_{s-1,\Lambda}((q)^1_s)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{\Lambda^k}\prod_{i=1}^{k}\varphi_{q_1}(y_i)\times$$
$$\times F_{s-1+k,\Lambda}((q)^1_s,(y)_k)d(y)_k\Big], \quad s\geqslant 1, \quad F_{0\Lambda}=1. \qquad (14)$$

Если совершить в них Т. п., то получим уравнения Кирквуда – Зальцбурга для F_s, к-рые отличаются от (14) только тем, что интегралы берутся по всему $\mathbb{R}^d$. Симметризуя их, получают окончательные уравнения Кирквуда – Зальцбурга, к-рые можно представить в виде операторных уравнений для последовательностей

$$\left.\begin{aligned} F_\Lambda &= (F_{s,\Lambda}((q)_s)),\ s\geqslant 1,\ F=(F_s((q)_s)),\ s\geqslant 1,\\ F_\Lambda &= zK_\Lambda F_\Lambda + F^0_\Lambda,\ F = zKF+F^0,\ F^0=(z,0,\dots),\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

где оператор K_Λ определен правой частью (14), а K получается из K_Λ, если в нем положить $\Lambda=\mathbb{R}^d$.

Теорема. Для устойчивого и регулярного потенциала существуют единственные решения уравнения Кирквуда – Зальцбурга (15) и при

$$|z| < e^{-2B\beta-1}C^{-1}(\beta)$$

они представляются сходящимися по норме E_ξ рядами

$$F^\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty}(zK_\Lambda)^n F^0_\Lambda, \quad F=\sum_{n=0}^{\infty}(zK)^nF^0. \qquad (16)$$

Последовательность F_Λ сходится при $V\to\infty$ к F в том смысле, что функции $F_{s,\Lambda}((q)_s)$ сходятся к $F_s((q)_s)$ равномерно на компактах. Последовательность F описывает равновесное состояние бесконечной системы в рамках больших канонич. ансамблей. Канонич. ансамбли и большие канонич. ансамбли эквивалентны в том смысле, что если в канонич. ансамбле в уравнении Кирквуда – Зальцбурга для состояния F положить $a(v)=z$, то получают уравнение Кирквуда – Зальцбурга для состояния в большом канонич. ансамбле. Активность является голоморфной функцией плотности в окрестности нуля и, наоборот, плотность является голоморфной функцией активности в окрестности нуля.

3. Существование состояния F при произвольных z и β. Решение уравнения Кирквуда – Зальцбурга при $|z|<\|K\|^{-1}$ можно представить в компактной форме через резольвенту оператора K: $F=(I-zK)^{-1}F^0$, I – единичный оператор. Для того чтобы решить уравнение Кирквуда – Зальцбурга при произвольной активности z (плотности $\frac{1}{v}$), нужно знать спектр оператора K и его свойства. Эта задача не решена. Только для оператора K_Λ в конечной области Λ доказано, что его собственные значения определяются нулями $\Xi(V,z,\beta)$ и полностью охарактеризован его спектр.

Для регулярного, сверхустойчивого и регулярного снизу потенциала Φ доказано, что при произвольных $z>0$, $\beta>0$ из последовательности $F_\Lambda=(F_{s,\Lambda}((q)_s))$, $s\geqslant 1$, можно выделить подпоследовательности $F_{\Lambda_j}=(F_{s,\Lambda_j}((q)_s))$, $s\geqslant 1$, такие, что $F_{s,\Lambda_j}((q)_s)$ сходятся при $V_j(\Lambda)\to V_j\to\infty$ к предельным функциям распределения $F_s((q)_s)$ равномерно на компактах. Предельные функции распределения удовлетворяют уравнению Кирквуда – Зальцбурга и описывают состояния бесконечной системы. Предельное состояние можно еще описывать с помощью меры, к-рая удовлетворяет *ДЛР-уравнению*.

Если рассматривать состояния на фазовом пространстве

$$F=(F_s((x)_s))_{s\geqslant 1},$$
$$F_s((x)_s) = F_s((q)_s)e^{-\beta\sum_{i=1}^{s}(\frac{p_i^2}{2m}-\mu)}z^{-s},$$

то они принадлежат банаховому пространству последовательностей $f=(f((x)_s))_{s\geqslant 1}$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{s\geqslant 1}\xi^{-s}\sup_{(x)_s}e^{\beta\sum_{i=1}^{N}(\frac{p_i^2}{2m}-\mu)}|f_s((x)_s)| < \infty.$$

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985; [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971. *Д. Я. Петрина.*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД – см. *Статистической механики математические задачи, Термодинамический предел.*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ – совокупность макроскопических наблюдаемых свойств статистических систем. Т. п. обычно описывается следующим образом (см. [1]). Существуют *равновесные состояния* статистич. систем. При неограниченном возрастании времени состояние изолированной системы стремится к равновесному состоянию. Равновесные состояния можно описать с помощью аппарата термодинамики. Система в состоянии равновесия состоит из одной или нескольких макроскопически однородных частей (фаз). Особенности термодинамич. функций, зависящих от термодинамич. параметров, соответствуют изменениям фазовой структуры системы (*фазовым переходам*).

Термин «Т. п.» может пониматься и в более широком смысле, как макроскопич. свойства систем в *неравновесном состоянии.*

Задача статистич. механики состоит в математич. обосновании Т. п. для систем взаимодействующих частиц.

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

В. И. Герасименко.

ТЕСТ-ФУНКЦИЯ – то же, что основная функция (см. *Обобщенная функция*).

ТЕТА-ВАКУУМ, θ-вакуум,– истинное вакуумное состояние, представляющее собой суперпозицию вакуумных состояний $|n\rangle$, соответствующих различным *топологическим зарядам.* Они разделены барьерами конечной энергии, и между ними происходят туннельные переходы. При калибровочном преобразовании T_1, соответствующем топологич. индексу, равному 1, топологич. индекс состояния увеличивается на 1, то есть

$$T_1|n\rangle = |n+1\rangle,$$

а калибровочная инвариантность означает, что оператор T_1 коммутирует с гамильтонианом

$$[T_1, H] = 0.$$

Эта ситуация аналогична известной задаче о периодич. потенциале, где роль T играет оператор трансляций, истинным состоянием является блоховская волна и, кроме того, существует сохраняющийся квазиимпульс. Т.-в. может быть построен следующим образом:

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{-in\theta}|n\rangle;$$

он является собственным вектором оператора калибровочного преобразования

$$T_1|\theta\rangle = e^{in}|\theta\rangle.$$

Так же, как и квазиимпульс в случае периодич. потенциала, θ отмечает физически неэквивалентные секторы: внутри каждого сектора можно исследовать распространение калибровочно-инвариантных возмущений. Так как секторы, соответствующие различным значениям θ, никак не связаны друг с другом, то не существует никакого метода для определения значения θ.

Лит.: [1] Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф., Калибровочные теории в физике элементарных частиц, пер. с англ., М., 1987; [2] Хуанг К., Кварки, лептоны и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1985.

М. И. Войцеховский.

ТЕТА-КОНСТАНТА – см. *Якоби эллиптические функции.*

ТЕТА-РЯД, θ-ряд,– функциональный ряд, применяемый для представления *автоморфных форм* и *автоморфных функций.*

Пусть D – область комплексного пространства $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$; Γ – дискретная группа автоморфизмов области D. Если группа Γ конечна, то из любой мероморфной в D функции $H(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_p)$, можно получить автоморфную функцию

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} H(\gamma(z)).$$

Для бесконечных групп необходимы множители сходимости, что и приводит к Т.-р. Тета-рядом Пуанкаре, или просто рядом Пуанкаре, ассоциированным с группой Γ, называется ряд вида

$$\theta_m(z) = \sum\nolimits^{*}_{\gamma \in \Gamma} J^m_\gamma(z) H(\gamma(z)),$$

где $J_\gamma(z) = d\gamma(z)/dz$ – якобиан отображения $z \to \gamma(z)$, m – целое действительное число, называемое весом или порядком; звездочка означает, что суммирование выполняется только по тем $\gamma \in \Gamma$, к-рые доставляют различные члены ряда. При отображении $z \to \alpha(z)$, $\alpha \in \Gamma$, функция $\theta_m(z)$ преобразуется по закону

$$\theta_m(\alpha(z)) = J_\alpha^{-m}(z)\theta_m(z)$$

и, следовательно, представляет собой автоморфную функцию веса m, ассоциированную с группой Γ. Отношение двух Т.-р. одинакового веса дает автоморфную функцию.

Т.-р. частного вида

$$E_m(z) = \sum\nolimits^{*}_{\gamma \in \Gamma} J^m_\gamma(z)$$

называются тета-рядами Эйзенштейна или просто рядами Эйзенштейна, ассоциированными с группой Γ.

Название «тета-ряды» употребляется и применительно к разложениям в ряды *тета-функций*, служащих для представления эллиптич. функций (см. *Якоби эллиптические функции*) и *абелевых функций.*

Лит.: [1] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.–Л., 1936, гл. 5; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 9; [3] Fricke R., Klein F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, Lpz., 1897–1912.

Е. Д. Соломенцев.

ТЕТА-ФУНКЦИЯ, θ-функция, одного комплексного переменного – квазидвоякопериодическая *целая функция* комплексного переменного z, то есть функция $\theta(z)$, имеющая кроме периода ω еще квазипериод ωτ, $\operatorname{Im}\tau > 0$, при прибавлении которого к значению аргумента значение функции умножается на некоторый мультипликатор. Иначе говоря, имеют место тождества по z:

$$\theta(z+\omega) = \theta(z),\ \theta(z+\omega\tau) = \varphi(z)\theta(z).$$

Как периодич. целая функция, Т.-ф. всегда представима рядом

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n}{\omega} z\right), \qquad (1)$$

в к-ром подбор коэффициентов c_n должен обеспечивать сходимость. Ряды (1) называются *тета-рядами* (по причине первоначальных обозначений). Возможны и иные представления Т.-ф., напр. в виде бесконечного произведения.

В приложениях обычно ограничиваются мультипликаторами вида

$$\varphi(z) = q\exp(-2\pi i k z),$$

где k – натуральное число, называемое порядком или весом Т.-ф., q – числовой множитель. Сходимость обеспечивается, напр., коэффициентами вида:

$$c_n = \exp(an^2 + 2bn + c),\ \operatorname{Re} a < 0.$$

Во многих вопросах удобны Т.-ф., удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned}\theta(z+1) &= \theta(z),\\ \theta(z+\tau) &= \exp(-2\pi i k z)\theta(z).\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Все Т.-ф. вида (2) одного и того же порядка k составляют векторное пространство размерности k. Базис этого пространства можно записать в виде

$$\theta_r(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \exp[\pi i \tau s(k(s-1)+2r) + 2\pi i(ks+r)z],$$

$$r = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Отдельные примеры Т.-ф. встречаются уже в работах Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1713), Л. Эйлера (L. Euler), в теории теплопроводности Ж. Фурье (J. Fourier). К. Якоби

(C. Jacobi) подверг Т.-ф. систематич. исследованию, выделил четыре специальные Т.-ф., к-рые и положил в основу своей теории эллиптич. функций (см. *Якоби эллиптические функции*). *Е. Д. Соломенцев.*

ТЕТРАДНЫЙ ФОРМАЛИЗМ – метод описания свойств пространственно-временного многообразия посредством ортонормированных реперов (тетрад). Поле тетрад e_a^α (здесь и далее латинские индексы обозначают номер вектора, а греческие – номер компоненты и изменяются от 0 до 3) подчиняется условию

$$e_a^\alpha\, e_{b\alpha} = \eta_{ab},\ e_{a\alpha}\, e_\beta^a = g_{\alpha\beta},$$

где $\eta_{ab} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$, а $g_{\alpha\beta}$ – компоненты метрики пространства-времени. Поднятие и опускание латинских индексов производятся при помощи постоянного метрич. тензора с компонентами η_{ab}. Свойства преобразований тетрад e_α^a отражают принципы общей ковариантности относительно преобразований координат и локальной лоренцевой инвариантности в общей теории относительности. Так, при общем преобразовании координат

$$dx^\alpha \to d_\beta^\alpha dx^\beta$$

и преобразовании Лоренца L_a^b в касательном пространстве в данной точке величины e_a^α подвергаются преобразованию

$$e_a^\alpha \to d_\beta^\alpha L_a^b\, e_b^\beta.$$

Соотношения между символами Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ и коэффициентами связности ω_α^{ab} в тетраде e_α^a дают условия

$$0 = e^\alpha_{a,\,\beta} = \partial e_a^\alpha/\partial x^\beta + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha e_a^\gamma - \omega_a^b\, e_b^\alpha.$$

Из этого равенства следует выражение для величин

$$\omega_{abc} = \omega_{ab\alpha}\, e_c^\alpha,$$

называемых коэффициентами вращения Риччи:

$$\omega_{abc} = e_{c\alpha}\, e_b^\beta\, \nabla_\beta e_a^\alpha,$$

где ∇_β – обычная ковариантная производная. Коэффициенты неголономной связности ω_α^{ab} определяются при помощи 1-форм

$$\omega^a = e_\alpha^a dx^\alpha$$

из соотношений

$$d\omega^a + \omega^a{}_b \wedge \omega^b = 0,$$

где $\omega^{ab} = \omega_\alpha^{ab} dx^\alpha$. Тензор Римана определяется из соотношений

$$\theta^a{}_b = d\,\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b,$$

где $2\theta^{ab} = R^{ab}{}_{cd}\omega^c \wedge \omega^d$, R_{abcd} – компоненты тензора Римана в тетраде e_a^α. Разновидность Т. ф.– формализм световых реперов или *Ньюмена – Пенроуза формализм* – особенно удобен при исследовании алгебраически специальных типов пространства-времени.

Лит.: [1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [2] Алексеев Г.А., Хлебников В. И., «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1978, т. 9, в. 5, с. 790–870. *А. Т. Ильичев.*

ТИП группы – см. *Риманова поверхность.*

ТИП кривой – см. *Клейнова поверхность.*

ТИП поверхности – см. *Риманова поверхность.*

ТОДЫ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ЦЕПОЧКА – суперсимметричное расширение двумерной обобщенной цепочки Тоды (экспоненциальной модели кристаллической решетки), связанное с суперглавным вложением подсупералгебры $\mathrm{osp}\,(1/2)$ в простые супералгебры Ли конечного, в том числе нулевого, роста, допускающие такое вложение.

Цепочки с закрепленными концами (конечные непериодические) посредством представления типа нулевой кривизны ассоциируются с классич. конечномерными супералгебрами Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{sl}\,(n|n\pm1),\ \mathrm{osp}\,(2n\pm1|2n),\ \mathrm{osp}\,(2n|2m),\ n=m,\ m+1,$$
$$\mathrm{osp}\,(1|2),\ D(2,1|\alpha)$$

при соответствующем суперглавному вложению в них подсупералгебры $\mathrm{osp}\,(1|2)$ выборе системы простых нечетных корней. Уравнения, описывающие такие цепочки, имеют вид (см. [1], [2]):

$$D_+D_-\Phi_i = \exp\sum\nolimits_j k_{ij}\Phi_j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}, \qquad (1)$$

где k – матрица Картана одной из указанных супералгебр при соответствующем выборе системы простых корней. Функции $\Phi_i(z_\pm, \theta_\pm)$ образуют мультиплет бозонных суперполей со значениями в алгебре Грассмана, $D_\pm = \mp\dfrac{\partial}{\partial\theta_\pm} + \theta_\pm\dfrac{\partial}{\partial z_\pm}$ – операторы супердифференцирования в 2|2-мерном пространстве с четными $z_\pm$ и нечетными $\theta_\pm$ координатами. В простейшем случае супералгебры $\mathrm{osp}\,(1|2)$ система (1) сводится к *классическому (квантовому) суперсимметричному уравнению Лиувилля*. В компактной форме уравнения (1) записываются через скалярные функции $x_i(z_\pm)$ и майорановские спиноры $\omega_i(z_\pm)$, определяющие мультиплет

$$\Phi_i = x_i + i\bar\theta\omega_i + \frac{1}{2}\bar\theta\theta\exp(kx),$$

где

$$\theta = \begin{Vmatrix}\theta_+\\ \theta_-\end{Vmatrix},\quad \bar\theta = \|-\theta_-,\ \theta_+\|.$$

Периодические цепочки связаны с суперглавным вложением $\mathrm{osp}\,(1|2)$ в бесконечномерные простые супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ конечного ненулевого роста, допускающие такие вложения, и описываются уравнениями (см. [2]):

$$D_+D_-\Phi_i = \exp\sum\nolimits_j k_{ij}\Phi_j - \frac{m_i}{s_i}\exp\Big(-\sum\nolimits_{j,\,l} m_j k_{jl}\Phi_l\Big). \qquad (2)$$

Здесь k – матрица Картана конечномерной простой супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, обладающей суперглавной $\mathrm{osp}\,(1|2)$ суперподалгеброй, схема Дынкина к-рой получается из соответствующей схемы супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ при вычеркивании из нее вершины, отвечающей минимальному корню $\mathfrak{g}$. Коэффициенты разложения последнего по простым корням $\mathfrak{g}$ обозначены через $-m_i$, s_i – элементы диагональной матрицы, симметризующей k. В простейшем случае супералгебры $\mathrm{osp}\,(2|2)^{(2)}$ система (2) сводится к *синус-Гордона суперсимметричному уравнению*.

Уравнения (1) и (2) являются, соответственно, *суперсимметричным точно интегрируемым уравнением* и *суперсимметричным вполне интегрируемым уравнением* и при тривиализации нечетных компонент суперполей Φ_i сводятся к уравнениям двумерной конечной непериодич. и периодич. цепочки Тоды, ассоциируемой с четной частью супералгебры. Для других матриц Картана (даже тех же супералгебр Ли) эти уравнения перестают быть суперсимметричными и становятся, вообще говоря, неинтегрируемыми в указанном смысле.

Лит.: [1] Saveliev M. V., «Comm. Math. Phys.», 1984, v. 95, p. 199–216; [2] Leites D. A., Saveliev M. V., Serganova V. V., в сб.: «Group theoretical methods in physics», Utrecht, 1986, v. 1, p. 255–97. *М. В. Савельев.*

ТОДЫ УРАВНЕНИЯ, цепочка Тоды,– система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} = e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n-u_{n-1}},\quad n \in \mathbb{Z},$$

предложенная М. Тодой (M. Toda, 1967) как модель нелинейно связанных одномерных осцилляторов. Т. у. интегри-

руются методом обратной задачи рассеяния. Для широкого класса граничных условий (периодических по n, с фиксированными или свободными концами для конечных цепочек, быстроубывающих $u_n \in l_1$ для бесконечной цепочки и т. д.) построены точные решения типа солитонов, дано описание непрерывного спектра возбуждений, а также предъявлены канонич. переменные типа действие – угол (см. [1], [2]). Теоретико-групповой анализ Т. у. и его квантовое обобщение см. в [3].

Лит.: [1] Абловиц М., Сихур Х., Солитоны и метод обратной задачи, пер. с англ., М., 1987; [2] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., Гамильтонов подход в теории солитонов, М., 1986; [3] Переломов А. М., Ольшанецкий М. А., Семенов-Тян-Шанский М. А., Интегрируемые системы. II, в кн.: «Итоги науки и техники», т. 16, М., 1987.

В. Ю. Новокшенов.

ТОДЫ ЦЕПОЧКА – см. *Лакса представление, Тоды уравнения.*

ТОЖДЕСТВЕННОСТИ ПРИНЦИП – фундаментальный принцип квантовой механики, согласно которому состояния системы частиц, получающиеся друг из друга перестановкой тождественных частиц местами, нельзя различить ни в каком эксперименте и такие состояния должны рассматриваться как одно физическое состояние. Т. п. является одним из основных различий между классич. и квантовой механикой. В классич. механике в принципе всегда можно проследить за движением отдельных частиц по траекториям и таким образом отличить частицы друг от друга. В квантовой механике тождественные частицы полностью лишены индивидуальности. Состояние частицы в квантовой механике описывается с помощью *волновой функции* (ψ), к-рая позволяет определить лишь вероятность ($|\psi|^2$) нахождения частицы в данной точке пространства. В случае перекрытия в пространстве волновых функций двух (или более) тождественных частиц, то есть возможных областей обнаружения тождественных частиц, нет смысла говорить о том, какая из частиц находится в данной точке; имеет смысл говорить лишь о вероятности нахождения в этой точке одной из тождественных частиц.

Эмпирич. фактом, к-рый и составляет существо Т. п., является то, что в природе реализуются лишь два класса волновых функций для систем тождественных частиц: симметричные волновые функции, обладающие тем свойством, что при перестановке пространственных и спиновых координат любой пары тождественных частиц волновая функция не изменяется, и антисимметричные волновые функции, определяемые тем, что при аналогичной перестановке волновая функция изменяет знак. В квантовой теории поля устанавливается теорема, согласно к-рой симметричные волновые функции описывают частицы с целым *спином* (фотоны, π-мезоны и т. п.), а антисимметричные – частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны и т. п.), для к-рых справедлив *Паули принцип*. В 1-м случае частицы подчиняются *Бозе – Эйнштейна статистике*, во 2-м – *Ферми – Дирака статистике.*

Т. п. и вытекающие из него требования симметрии волновых функций для системы тождественных частиц приводят к важнейшему квантовому эффекту, не имеющему аналога в классич. теории,– существованию *обменного взаимодействия.*

А. Б. Говорков.

ТОК в квантовой теории поля – математическое выражение, описывающее превращение одной частицы в другую или рождение частицы и античастицы; представляет собой оператор плотности четырехмерного тока, преобразующийся как 4-мерный вектор при *Лоренца преобразованиях.* Различают: 1) векторный (V) и аксиальный (A) токи, отвечающие превращениям (переходам) соответственно с изменением и без изменения внутренней четности (и зарядовой четности); 2) электромагнитный и слабый токи, описывающие переходы за счет электромагнитного и слабого взаимодействия; 3) адронный и лептонный токи, описывающие переходы адронов и лептонов; 4) заряженный и нейтральный токи, описывающие переходы с изменением электрич. заряда (или рождение заряженной пары) и без изменения заряда (или рождение нейтральной пары); 5) странный и нестранный токи, описывающие переходы с изменением странности и без изменения ее, и др. Так, в процессе β-распада нейтрона $n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e$ переход $n \to p$ и рождение пары e^- и $\tilde{\nu}_e$ описываются слабыми заряженными нестранными векторным и аксиальным, соответственно, адронным и лептонным Т., а рассеяние электрона – электромагнитным нейтральным лептонным Т. Обычный 4-мерный электромагнитный Т. в принятой терминологии является суммой нейтральных векторных Т. заряженных частиц, умноженной на величину их заряда e. Для электрона, напр., он имеет вид:

$$j(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x),$$

где ψ и $\bar{\psi}$ – соответственно операторы уничтожения начального электрона и рождения конечного электрона в пространственно-временной точке x, γ_μ – *Дирака матрицы.* В нерелятивистском пределе нулевая компонента ($\mu = 0$) этого Т. превращается в плотность заряда

$$\rho(r, t) = e\psi^*(r, t)\psi(r, t) = e|\psi(r, t)|^2,$$

где $\psi(r, t)$ – волновая функция электрона (r – точка пространства, t – время, звездочка означает комплексное сопряжение), а остальные три компоненты ($\mu = 1, 2, 3$) образуют вектор плотности электрич. Т.

$$j(r, t) = e\psi^* v \psi,$$

где v – оператор скорости электрона.

А. В. Ефремов.

ТОКАМАК – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ТОКОВ АЛГЕБРА – система *перестановочных соотношений* между компонентами различных локальных *токов* в один и тот же момент времени. В частности, для временных компонент $SU(3)$-октетов токов эта алгебра замкнута (то есть коммутатор токов выражается через сами токи):

$$\left.\begin{aligned} \left[j^k_{0\pm}(x), j^l_{0\pm}(x')\right]_{x_0 \neq x'_0} &= i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') f^{klm} j^m_0(x), \\ \left[j^k_{0\pm}(x), j^l_{0\pm}(x')\right]_{x_0 = x'_0} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ – дельта-функция Дирака, f^{klm} – так наз. структурные константы группы $SU(3)$, $\lambda^k\lambda^l - \lambda^l\lambda^k = 2if^{klm}\lambda^m$, λ^k – матрицы Гелл-Мана, действующие в пространстве u-, d-, s-кварков, $k, l, m = 1, 2, \ldots, 8$, а значки $\pm$ означают «плюс» и «минус» компоненты векторных (V_μ) и аксиальных (A_μ) токов: $V_\mu \pm A_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ (используется система единиц $\hbar = c = 1$). В пределе нулевой массы π-мезона токи $j^k_{0\pm}(x)$ являются плотностями сохраняющихся зарядов и Т. а. описывает *киральную симметрию.*

Аналогичные соотношения для пространственных компонент токов содержат в правой части производные от δ-функции – так наз. швингеровские члены.

Перестановочные соотношения (1) имеют такой же вид, как и для токов, составленных из полей свободных кварков. В квантовой хромодинамике это объясняется свойством *асимптотической свободы*: на малых расстояниях *эффективная константа связи* мала и сильным взаимодействием можно пренебречь.

Т. а. сформулирована как эвристич. утверждение М. Гелл-Маном (M. Gell-Mann) в начале 1960-х гг. до появления современных кварковых теорий (квантовой хронодинамики, теории электрослабых взаимодействий). Она дала возможность получить ряд соотношений, допускающих непосредственное сравнение с опытом. Эти соотношения носят характер правил сумм (то есть предсказаний для интегралов от наблюдаемых сечений) или низкоэнергетических теорем, то есть предсказаний для амплитуд процессов в пределе нулевых 4-импульсов одной или нескольких частиц. Используя дисперсионные соотношения (см. *Диспер-*

сионных соотношений метод), значение амплитуды при нулевых 4-импульсах иногда (напр., для πN-рассеяния) удается переписать в виде интеграла от сечений, так что одно и то же предсказание может фигурировать и как правило сумм, и как низкоэнергетич. теорема.

Одно из наиболее известных следствий Т. а.– соотношение Адлера – Вайсбергера, сформулированное в 1965 С. Адлером и У. Вайсбергером [1], для так наз. аксиальной константы β-распада нуклона g_A, определяющей матричный элемент аксиального тока для перехода $n \leftrightarrow p$ (экспериментальное значение $g_A \approx 1{,}2$):

$$\frac{1}{g_A^2} = 1 + \frac{2m_N^2}{\pi g_{\pi N}^2}\int_{m_\pi}^{\infty}\frac{q\,d\nu}{\nu^2}\left[\sigma_{\pi^- p}(\nu) - \sigma_{\pi^+ p}(\nu)\right]. \qquad (2)$$

Здесь m_N – масса нуклона, $g_{\pi N}$ – константа связи π-мезона с нуклоном ($g_{\pi N}^2 \approx 14{,}6$), $\sigma_{\pi^\pm p}$ – полное сечение взаимодействия $\pi^\pm$-мезонов с протоном, m_π – масса π-мезона, ν и q – его энергия и величина импульса в лабораторной системе. Правило сумм (2) может быть представлено в виде низкоэнергетич. теоремы – предсказания для разности *длин рассеяния* π^+- и π^--мезонов на нуклоне. Соотношение (2) хорошо (в пределах 10%) согласуется с опытом. Остающееся расхождение связано не с нарушением перестановочных соотношений (1), а с тем, что при выводе (2) приходится пренебрегать массой π-мезона, поскольку точка нулевого 4-импульса π-мезона является нефизической.

Сочетание Т. а. с гипотезой частичного сохранения аксиального тока, учитывающей конечную массу π-мезона, оказалось особенно плодотворным для слабых и электромагнитных процессов (поскольку многие распады частиц связаны с испусканием π-мезонов). В общем виде амплитуда испускания π-мезона с 4-импульсом $q \to 0$ сводится к матричному элементу одновременного коммутатора гамильтониана взаимодействия $H(0) \equiv H(x_0 = 0, \boldsymbol{x} = 0)$ с аксиальным током:

$$\left\langle \mathrm{B}\pi^\alpha \middle| H(0) \middle| \mathrm{A}\right\rangle_{q\to 0} \to$$

$$\to i f_\pi^{-1}\left\langle \mathrm{B}\middle|\left[H(0), \int A_0^\alpha(x)\,d^3x\right]_{x_0=0}\middle|\mathrm{A}\right\rangle, \qquad (3)$$

где π^α – пионное состояние, $\alpha = 1, 2, 3$ – изотопич. индекс, A, B – адронные состояния, f_π – константа $\pi \to \mu\nu_\mu$-распада ($f_\pi \approx 93$ МэВ). Гамильтониан слабого и электромагнитного взаимодействия $H(0)$ строится из токов V_μ и A_μ, так что Т. а. позволяет найти одновременной коммутатор в правой части соотношения (3). В результате возникают соотношения между амплитудами процессов с разным числом π-мезонов, напр.:

$$A(\mathrm{K}_S^0 \to \pi^+\pi^-) = \sqrt{2}\, f_\pi A(\mathrm{K}_L^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0),$$

$$q(\pi^0) = 0,$$

где $A(\mathrm{K}_S^0 \to 2\pi)$, $A(\mathrm{K}_L^0 \to 3\pi)$ – амплитуды соответствующих слабых нелептонных распадов нейтральных короткоживущих (K_S^0) и долгоживущих (K_L^0) К-мезонов; значение амплитуды при $q(\pi^0) = 0$ получают экстраполяцией экспериментальных данных из физич. области. Сравнение этого и других подобных соотношений с опытом позволило проверить правильность как самой Т. а. (1), так и различных предположений о структуре слабого взаимодействия.

Т. а. и после создания современных кварковых теорий остается наиболее надежным способом описания взаимодействия адронов при низких энергиях, исходя непосредственно из вида лагранжиана квантовой хромодинамики (в тех случаях, когда применение Т. а. возможно).

Лит.: [1] Адлер С., Дашен Р., Алгебры токов и их применение в физике частиц, пер. с англ., М., 1970.

В. И. Захаров.

ТОЛЛМИЕНА – ШЛИХТИНГА ВОЛНА – см. *Турбулентности возникновение.*

ТОМАСА ПРЕЦЕССИЯ – см. *Буст.*

ТОМАСА – ФЕРМИ МЕТОД – см. *Самосогласованное поле.*

ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПОСТОЯННАЯ (α) – безразмерная величина, образованная из универсальных физич. постоянных:

$$\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137,$$

где e – заряд электрона. Согласно наиболее точным измерениям,

$$\alpha^{-1} = 137{,}0359895(61).$$

Т. с. п. определяет тонкое расщепление уровней энергии атома (а следовательно, и спектральных линий), величина к-рого пропорциональна α^2; с этим связано название константы α. В квантовой электродинамике α – естественный параметр, характеризующий «силу» электромагнитного взаимодействия.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА – *алгебра A* над топологическим полем или коммутативным кольцом R, являющаяся топологическим пространством, операции сложения и умножения в котором, а также отображение

$$R \times A \to A((r, a) \to ra)$$

непрерывны. Пример Т. а. над полем комплексных чисел – *банаховы алгебры.*

А. В. Михалев.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА – *группа G*, на которой введена структура топологического пространства так, что: 1) отображение $\pi: G \times G \to G$, заданное формулой $\pi(g_1, g_2) = g_1 g_2$, непрерывно; 2) отображение $g \to g^{-1}$ из G в себя также непрерывно.

Т. г. G называется компактной (соответственно, связной), если соответствующее пространство компактно (соответственно, связно). Т. г. локально компактна, если в ней существует открытая окрестность единицы, замыкание к-рой компактно. Т. г. называется дискретной, если все подмножества в G открыты. Наиболее интересный пример Т. г.– *Ли группы.* Если говорят о подгруппе в Т. г., то обычно подразумевается замкнутая подгруппа.

Топология групп Ли. У любой связной группы Ли существует единственная односвязная накрывающая группа Ли. Любая односвязная разрешимая группа Ли стягиваема. Любая группа Ли содержит максимальную компактную подгруппу (то есть не содержащуюся ни в какой другой компактной подгруппе). Если $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ – две максимальные компактные подгруппы, то они сопряжены, то есть существует $x \in G$ такой, что $x\mathcal{K}_1 x^{-1} = \mathcal{K}_2$. Любая группа Ли стягивается на свою максимальную компактную подгруппу. Максимальные компактные подгруппы классич. групп дает следующая таблица:

Группа	Ее максимальная подгруппа	Группа	Ее максимальная подгруппа
$SL(n, \mathbb{R})$	$SO(n, \mathbb{R})$	$Sp(2n, \mathbb{R})$	$U(n)$
$SL(n, \mathbb{C})$	$SU(n)$	$O(p, q)$	$O(p) \times O(q)$
$SL(n, \mathbb{H})$	$Sp(n)$	$U(p, q)$	$U(p) \times U(q)$
$SO(n, \mathbb{C})$	$SO(n, \mathbb{R})$	$Sp(p, q)$	$Sp(p) \times Sp(q)$
$Sp(2n, \mathbb{C})$	$Sp(n)$	$SO^*(2n)$	$U(n)$

Вторая гомотопич. группа любой группы Ли тривиальна.

Топология компактных групп Ли. Пусть ω – замкнутая дифференциальная форма на компактной группе. Тогда существует инвариантная (то есть не меняющаяся при левых и правых сдвигах) замкнутая форма ω′, гомологичная ω [то есть $d(\omega - \omega') = 0$]. Таким образом, любой класс когомологий де Рама может быть реализован инвариантной формой. Для таких форм известны простые явные формулы.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 4 изд., М., 1984; [2] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962.

Ю. А. Неретин.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА – см. *Динамическая система.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ МАРКОВСКАЯ ЦЕПЬ – см. *Символическая динамика.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ – см. *Гомеоморфизм.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ – *энтропия* $h(f)$ для отображения f метрического компакта X с метрикой ρ, определяемая по формуле

$$h(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log N(n,\varepsilon)}{n} = \lim_{\varepsilon\to 0}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log N(n,\varepsilon)}{n},$$

где $N(n, \varepsilon)$ – наименьшее число шаров радиуса ε в метрике

$$\rho_n(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n}\rho(f^i(x), f^i(y)),$$

необходимых для того, чтобы покрыть X. Т. э. измеряет скорость асимптотически экспоненциального роста числа различных траекторий отображения f, различимых при фиксированной, но произвольно высокой точности ε их задания. Для Т. э. справедлив вариационный принцип

$$h(f) = \sup h_\mu(f),$$

где $h_\mu(f)$ – метрич. энтропия f и верхняя грань берется по всем f-инвариантным нормированным борелевским мерам μ в X. *Я. Б. Песин.*

ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы G в топологическом пространстве V – *представление*, для которого любое замкнутое подпространство в V, инвариантное относительно всех операторов T_g, есть либо V, либо нулевое подпространство. *Ю. А. Неретин.*

ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНОЕ ПОЛЕ – см. *Инстантон.*

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД, топологический индекс,– одно из топологических квантовых чисел, характеризующее (и классифицирующее) *инстантоны* – нетривиальные решения уравнений Янга – Миллса (и аналогичные им). А именно, Т. з.– это целое число, являющееся значением второго класса Чженя $c_2(\eta)$ на фундаментальном классе $[M]$ компактного ориентированного 4-мерного многообразия M:

$$c_2(\eta)[M] = \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{tr}(F\wedge F);$$

здесь η – $SU(2)$-расслоение на M, F – кривизна (калибровочное поле) соответствующей связности. Иногда вместо $c_2(\eta)$ используют первый класс Понтрягина $p_1(\eta) = -c_2(\eta)$, значение к-рого на фундаментальном классе $[M]$ называется индексом Понтрягина.

См. также *Алгебро-геометрические методы* в теории поля.

Лит.: [1] Хуанг К., Кварки, лептоны и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1985; [2] Соколов А. А. и др., Калибровочные поля, М., 1986; [3] Фрид Д., Уленбек К., Инстантоны и четырехмерные многообразия, пер. с англ., М., 1988.

М. И. Войцеховский.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ – см. *Гомеоморфизм.*

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНДЕКС – см. *Топологический заряд.*

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Многообразие.*

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО – множество X, в котором выделено семейство подмножеств τ (топология) со следующими свойствами:

1) для всяких двух различных точек a и b из X существует такое $U\subset\tau$, что $a\in U$, но $b\notin U$ [в физике используется более сильное условие (аксиома Хаусдорфа): любые две различные точки a и b имеют непересекающиеся окрестности];

2) для всяких двух различных множеств U, $V\subset\tau$, содержащих точку $c\in X$, существует такое $W\subset\tau$, что $c\in W\subset U\cup V$.

Множества $U\ni a$ из τ называются окрестностями точки a.

Множество $G\subset X$ открыто, если для всякой точки $a\in G$ существует ее окрестность U, содержащаяся в G. Множество F замкнуто, если для всякой точки $b\in F$ любая ее окрестность U содержит точки из F. Открытое связное множество называется областью. *М. И. Войцеховский.*

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЕНИЕ – см. *Слоение.*

ТОПОЛОГИЯ в пространстве представлений – топология, определяемая следующим понятием сходимости. Последовательность неприводимых унитарных представлений T^1, T^2, ... группы G сходится к унитарному представлению T группы G, если для любого матричного элемента $t_{\xi,\eta}(g)$ представления T существуют матричные элементы $t^k_{\xi_k\eta_k}(g)$ представлений T^k такие, что последовательность функций t_{ξ_k,η_k} сходится к $t_{\xi,\eta}$ при $k\to\infty$ равномерно на любом компактном множестве, содержащемся в G. *Ю. А. Неретин.*

ТОПОЛОГИЯ горизонтов – см. *Горизонтов топология.*

ТОТАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО – см. *Расслоение.*

ТОЧЕЧНОЕ СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ – см. *Случайное поле.*

ТОЧЕЧНОЕ СОБЫТИЕ – см. *Пространство-время* теории относительности.

ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР – см. *Спектр* оператора.

ТОЧНОЕ ЛАГРАНЖЕВО МНОГООБРАЗИЕ – лагранжево подмногообразие L точного симплектического многообразия $(M, \omega = d\alpha)$, обладающее следующим свойством точности: ограничение формы α на L является точной формой, то есть является дифференциалом некоторой гладкой функции на L. Локально любое лагранжево многообразие – точное, глобально – нет. Пример Т. л. м. – сечение кокасательного расслоения, являющееся графиком дифференциала гладкой функции на базе расслоения. Поток гамильтонового векторного поля с однозначным гамильтонианом переводит Т. л. м. в Т. л. м. *М. Э. Казарян.*

ТОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы – см. *Представление* группы.

ТОЧНОЕ УСЛОВНОЕ ОЖИДАНИЕ – см. *Условное ожидание.*

ТРАЕКТОРИЯ – непрерывная линия, которую описывает точка при своем движении. Если Т.– прямая линия, движение точки называется прямолинейным, в противном случае – криволинейным. Вид Т. свободной материальной точки зависит от действующих на точку сил, начальных условий движения и от того, по отношению к какой системе отсчета движение рассматривается; для несвободной точки вид Т. зависит еще от наложенных связей.

Напр., по отношению к Земле (если пренебречь ее суточным вращением) Т. свободной материальной точки, отпущенной без начальной скорости и движущейся под действием силы тяжести, будет прямая линия (вертикаль), а если точке сообщить начальную скорость v_0, не направленную вдоль вертикали, то при отсутствии сопротивления воздуха ее Т. будет парабола.

Т. точки, движущейся в центральном поле тяготения, в зависимости от величины начальной скорости может быть эллипс, парабола или гипербола (в частных случаях – прямая линия или окружность).

Т. точек твердого тела зависят от закона движения тела. При поступательном движении тела Т. всех его точек одинаковы, а во всех других случаях движения эти Т. будут вообще разными для разных точек тела.

См. также *Динамическая система.* *С. М. Targ.*

ТРАНСЛЯЦИЯ – см. *Пуанкаре преобразование.*

ТРАНСФЕР-МАТРИЦА в евклидовой квантовой теории поля – сжимающая полугруппа операторов $\mathcal{T}_t$, действующая в гильбертовом пространстве $H_{\text{физ}}$ состояний поля, генератор которого совпадает с его гамильтонианом.

Обычная конструкция Т.-м., восходящая к К. Остервальдеру и Р. Шрадеру (см. [1]), состоит в следующем. Пусть на полевой алгебре ε определена антилинейная инволюция θ, задаваемая обращением времени, и квазисостояние $\langle\cdot\rangle$, положительное при отражениях:

$$\langle\theta A\rangle=\overline{\langle A\rangle},\ \langle A\theta A\rangle\geqslant 0,\ A\in\varepsilon_+,$$

где $\varepsilon_+\subset\varepsilon$ – подалгебра «будущего». Тогда физич. гильбертово пространство $H_{\text{физ}}\subset\bar{\varepsilon}_+/N$, где $N=\{F\in\varepsilon_+,\langle F\theta F\rangle=0\}$, а в факторпространстве ε_+/N определяется скалярное произведение $(f,g)=\langle F\theta G\rangle$, где $F,G\in\varepsilon_+$ – представители классов $f,g\in\varepsilon_+/N$. Пополнение $\bar{\varepsilon}_+/N$ берется по этому скалярному произведению. «Временной сдвиг» τ_t, $\varepsilon_t\to\varepsilon_+$, $t>0$, алгебры ε_+ порождает в $H_{\text{физ}}$ самосопряженный сжимающий оператор $\mathscr{T}_t$, а семейство таких операторов образует полугруппу. Ее представлением в виде

$$\mathscr{T}_t=\exp\{-tH_{\text{физ}}\}$$

вводится самосопряженный генератор $H_{\text{физ}}$, к-рый, по определению, и полагается гамильтонианом поля.

В случае, когда евклидово поле является обычным случайным (быть может, обобщенным) марковским полем в пространстве-времени $\mathbb{R}^{\nu+1}$, к-рое можно рассматривать как марковский процесс вдоль направления времени, Т.-м. $\mathscr{T}_t$ совпадает с полугруппой стохастич. операторов этого процесса (состояниями процесса служат конфигурации поля в $\mathbb{R}^{\nu}$). В случае решетчатых моделей евклидова поля, когда время t дискретно, $t=0,1,2,\ldots$, Т.-м. обычно называется образующая $\mathscr{T}=\mathscr{T}_{t=1}$ полугруппы $\mathscr{T}_t$, а гамильтонианом – оператор $H_{\text{физ}}=\frac{1}{2}\ln\mathscr{T}^2$.

Лит.: [1] Osterwalder K., Schrader R., «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 31, p. 83–112; 1975, v. 42, p. 281–304; [2] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984.
Р. А. Минлос.

ТРАНСФЕР-МАТРИЦА одномерной равновесной непрерывной системы – ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве, у которого собственное значение с наибольшей действительной частью действительно и пропорционально логарифму одного из термодинамич. параметров. Наибольшее собственное значение Т.-м. большого канонич. ансамбля пропорционально логарифму давления.
В. И. Скрипник.

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ – см. *Особая точка* аналитической функции, *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ – в узком смысле слова *мероморфная функция* в плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, отличная от *рациональной функции*. В частности, сюда относятся целые Т. ф., то есть *целые функции*, отличные от многочленов, напр. показательная функция e^z, тригонометрич. функции $\sin z$, $\cos z$, гиперболич. функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, функция $1/\Gamma(z)$, где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Целые Т. ф. имеют единственную существенно особую точку в бесконечности. Собственно мероморфные Т. ф. характеризуются наличием конечного или бесконечного множества полюсов в конечной плоскости $\mathbb{C}$ и соответственно наличием существенно особой точки или предельной точки полюсов в бесконечности; к ним, напр., относятся тригонометрич. функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, гиперболич. функции $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, гамма-функция $\Gamma(z)$. Приведенное определение Т. ф. распространяется на мероморфные функции $f(z)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, многих комплексных переменных $z=(z_1,\ldots,z_n)$.

В широком смысле слова под Т. ф. понимается всякая аналитич. функция (однозначная или многозначная), отличная от алгебраич. функции, для вычисления значений к-рой помимо алгебраич. операций над аргументом необходимо применить предельный переход в той или иной форме. Для Т. ф. характерно наличие у нее хотя бы одной особенности, не являющейся полюсом или алгебраич. точкой ветвления; напр., логарифмич. функция $\ln z$ имеет две трансцендентные точки ветвления $z=0$ и $z=\infty$. Аналитич. функция трансцендентна тогда и только тогда, когда ее риманова поверхность не компактна.

Важный класс Т. ф. составляют часто встречающиеся специальные функции: *гамма-функция* и *бета-функция* Эйлера, *гипергеометрическая функция* и *вырожденная гипергеометрическая функция*, особенно ее частные случаи – *сферические функции, цилиндрические функции.*

Лит.: [1] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963.
В. И. Битюцков.

ТРЕСКА – СЕН-ВЕНАНА УСЛОВИЕ – см. *Пластичности математическая теория.*

ТРЕТИЙ ЗАКОН МЕХАНИКИ ЧЕРНЫХ ДЫР – см. *Черная дыра*; законы механики.

ТРЕТЬЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ – см. *Термодинамики законы.*

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА – см. *Смешанная задача.*

ТРЕХ СИГМ ПРАВИЛО – см. *Квадратичное отклонение.*

ТРЕХЧАСТИЧНОЕ РАССЕЯНИЕ – частный случай *многочастичного рассеяния.* См. также *Многоканальное рассеяние, Фаддеева уравнения.*

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА – см. *Ортогональная система функций.*

ТРИКОМИ УРАВНЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение* с частными производными второго порядка.

ТРИКРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА – см. *Фазовый переход.*

ТРОЙНАЯ ТОЧКА – см. *Фазовая диаграмма.*

ТРОТТЕРА ФОРМУЛА – формула (для) произведения однопараметрических полугрупп операторов. Пусть A, B и замыкание суммы $\overline{A+B}$ есть генераторы C_0-полугрупп сжатий $U(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ в банаховом пространстве X. Тогда:

1) $W(t)f=\lim\limits_{n\to\infty}(U(t/n)V(t/n))^n f$

для всех $f\in X$ равномерно по t на конечных промежутках из $\mathbb{R}_+$;

2) $W(t)f=\lim\limits_{n\to\infty}((I-tA/n)^{-1}(I-tB/n)^{-1})^n f,\ f\in X.$

Так, если A и B – положительные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H и $A+B$ существенно самосопряжен, то

$$\exp(-t\overline{(A+B)})=s\text{-}\lim_{n\to\infty}(\exp(-tA/n)\exp(-tB/n))^n,$$

$t\in\mathbb{R}_+$, и если A, B, $\overline{A+B}$ самосопряжены, то

$$\exp(it\overline{(A+B)})=s\text{-}\lim_{n\to\infty}(\exp(itA/n)\exp(itB/n))^n,\ t\in\mathbb{R}.$$

С помощью Т. ф. 1) можно вывести *Фейнмана – Каца формулу* в квантовой механике.

Т. ф. применена для определения обобщенной суммы неограниченных операторов.

Т. ф. установлена Г. Троттером (H. Trotter, 1959), формулу обобщает *Чернова формула*, из к-рой следуют 1) и 2).
А. В. Булинский.

ТРОТТЕРА – КАТО ТЕОРЕМА – теорема о сходимости последовательности однопараметрических полугрупп $\{T_n(t)\}$ класса C_0 в банаховом пространстве X. (В частном случае теорема доказана в [1], общий случай рассмотрен в [2], доказательство завершено в [3].) Пусть A_n, $n\in\mathbb{N}$, – генераторы C_0-полугрупп, для к-рых $\|T_n(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ при всех $n\in\mathbb{N}$, $t\geqslant 0$, M и ω – константы. Для существования C_0-полугруппы $\{T(t)\}$ с генератором A такой, что

$$\lim_{n\to\infty}T_n(t)f=T(t)f$$

при всех $f \in X$ равномерно по t на компактах в $\mathbb{R}_+$, необходимо и достаточно, чтобы существовал

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_0 I - A)^{-1} f = Rf$$

при нек-ром λ_0 с $\mathrm{Re}\,\lambda_0 > \omega$ и всех $f \in X$, где $R \in \mathscr{B}(X)$ – инъективный оператор с плотным множеством значений. Тогда $R = (\lambda_0 I - A)^{-1}$. Возможны обобщения для равностепенно непрерывных полугрупп линейных операторов в локально выпуклых топологич. линейных пространствах.

Лит.: [1] Neveu J., «Univ. Calif. Publ. Statist.», 1958, v. 2, p. 319–94; [2] Trotter H., «Pacif. J. Math.», 1958, v. 8, p. 887–919; [3] Kato T., «Proc. Jap. Acad.», 1959, v. 35, p. 467–68.

А. В. Булинский.

ТРУБА БУДУЩЕГО – неограниченная область в $\mathbb{C}^{n+1}$ следующего вида:

$$\tau^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^{n+1} \mid y_0^2 > y_1^2 + \ldots + y_n^2,\ y_0 > 0\},$$

то есть трубчатая область $\mathbb{R}^{n+1} + iV^+$ над световым конусом будущего

$$V^+ = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_0^2 > y_1^2 + \ldots + y_n^2,\ y_0 > 0\}.$$

Аналогично определяется труба прошлого τ^-, то есть трубчатая область $\mathbb{R}^{n+1} + iV^-$ над световым конусом прошлого

$$V^- = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_0^2 > y_1^2 + \ldots + y_n^2,\ y_0 < 0\}.$$

При $n = 0$ область τ^+ есть верхняя полуплоскость, при $n = 1$ область τ^+ (линейно)изоморфна произведению верхних полуплоскостей в $\mathbb{C}^2$, то есть области $\{z \in \mathbb{C}^2 \mid y_0 > 0,\ y_1 > 0\}$. При $n \geqslant 2$ область τ^+ биголоморфно эквивалентна шару Ли или классич. области Картана 4-го типа, то есть ограниченной области в $\mathbb{C}^{n+1}$, однородной относительно аналитич. автоморфизмов и обладающей в каждой точке аналитич. симметрией. Шар Ли задается формулой

$$\{w \in \mathbb{C}^{n+1} : |w_0^2 + \ldots + w_n^2|^2 + 1 > 2|w_0|^2 + \ldots + 2|w_n|^2,$$

$$|w_0^2 + \ldots + w_n^2| < 1\}.$$

Основной физич. интерес представляет Т. б. в $\mathbb{C}^4$. Она является естественной областью определения голоморфных безмассовых полей. Более точно, решение линейных безмассовых уравнений на *Минковского пространстве-времени* можно представить в виде скачка (то есть разности граничных значений на пространстве Минковского) голоморфных решений комплексных безмассовых уравнений в Т. б. и трубе прошлого. Помимо реализации τ^+ в виде шара Ли, Т. б. в $\mathbb{C}^4$ обладает еще одной реализацией в виде ограниченной однородной области, а именно, классич. области Картана 1-го типа или обобщенного единичного круга, состоящего из комплексных (2×2)-матриц Z, для к-рых симметричная матрица $I - Z^*Z$ положительно определена.

С Т. б. (и трубчатыми областями более общего вида) связаны известные теоремы многомерного комплексного анализа – *Боголюбова теорема* «острие клина» и *Владимирова теорема* о C-выпуклой оболочке, а также знаменитая гипотеза «о расширенной световой Т. б.», состоящая в следующем. Вводится N-точечная труба будущего

$$\tau_N^+ = \tau^+ \times \ldots \times \tau^+ \ (n \text{ раз})$$

в $\mathbb{C}^{4N}$ и определяется расширенная Т. б. τ_N' как множество точек вида $(\Lambda z_1^{(4)}, \ldots, \Lambda z_N^{(4)})$, где $(z_1^{(4)}, \ldots, z_N^{(4)}) \in \tau_N^+$, а Λ – произвольное преобразование из собственной комплексной группы Лоренца. Гипотеза «о расширенной трубе», утверждающая, что τ_N' есть область голоморфности, доказана пока только при $N = 1, 2$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Владимиров В. С., Сергеев А. Г., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 8, М., 1985; [3] Владимиров В. С., Жаринов В. В., Аналитические методы в математической физике («Труды Математич. ин-та АН СССР», т. 175), М., 1986.

А. Г. Сергеев.

ТРУБА ПРОШЛОГО – см. *Труба будущего.*

ТРУБКА ТРАЕКТОРИЙ – см. *Интегральный инвариант.*

ТУБОИД – область из $\mathbb{C}^n$, представимая в виде объединения семейства клиновых областей. См. *Граничное значение* обобщенное.

ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ – преодоление микрочастицей потенциального барьера в случае, когда ее полная энергия (остающаяся при Т. э. большей частью неизменной) меньше высоты барьера. Т. э.– явление существенно квантовой природы, невозможное в классич. механике; аналогом Т. э. в волновой оптике может служить проникновение световой волны внутрь отражающей среды (на расстояния порядка длины световой волны) в условиях, когда с точки зрения геометрич. оптики происходит полное внутреннее отражение. Т. э. лежит в основе многих важных процессов в атомной и молекулярной физике, в физике атомного ядра, твердого тела и т. д.

Т. э. интерпретируется на основе *неопределенностей соотношения.* Классич. частица не может находиться внутри потенциального барьера высоты V, если ее энергия $\mathscr{E} < V$, так как кинетич. энергия частицы $p^2/2m = \mathscr{E} - V$ становится при этом отрицательной, а ее импульс p – мнимой величиной (m – масса частицы). Однако для микрочастицы этот вывод несправедлив: вследствие соотношения неопределенностей фиксация частицы в пространственной области внутри барьера делает неопределенным ее импульс. Поэтому имеется отличная от нуля вероятность обнаружить микрочастицу внутри запрещенной с точки зрения классич. механики области. Соответственно появляется определенная вероятность прохождения частицы сквозь потенциальный барьер, что и отвечает Т. э. Эта вероятность тем больше, чем меньше масса частицы, чем уже потенциальный барьер и чем меньше энергии недостает частице, чтобы достичь высоты барьера (чем меньше разность $V - \mathscr{E}$). Вероятность прохождения сквозь барьер – главный фактор, определяющий физич. характеристики Т. э. В случае одномерного потенциального барьера такой характеристикой служит коэффициент прозрачности барьера, равный отношению потока прошедших сквозь него частиц к падающему на барьер потоку. В случае трехмерного барьера, ограничивающего замкнутую область пространства с пониженной потенциальной энергией (потенциальную яму), Т. э. характеризуется вероятностью w выхода частицы из этой области в единицу времени; величина w равна произведению частоты колебаний частицы внутри потенциальной ямы на вероятность прохождения сквозь барьер. Возможность «просачивания» наружу частицы, первоначально находившейся в потенциальной яме, приводит к тому, что соответствующие уровни энергии частиц приобретают конечную ширину порядка $\hbar w$, а сами эти состояния становятся квазистационарными.

Лит.: [1] Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, 5 изд., М., 1976; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 3 изд., М., 1974.

Д. А. Киржниц.

ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ (в простейшем случае, когда осредненное турбулентное течение плоскопараллельно) – отношение $\rho K(z)$ турбулентного напряжения трения $\tau = -\rho\langle u'w'\rangle$ к градиенту скорости осредненного течения $\partial\langle u\rangle/\partial z$. При более сложной геометрии имеются соответствующие тензорные обобщения.

В отличие от молекулярной вязкости, Т. в. характеризует не жидкость (или газ), а состояние ее турбулентного движения и может изменяться в пространстве и времени, в том числе принимать отрицательные значения. *А. С. Монин.*

ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ – перенос вещества (примеси) хаотическими турбулентными флуктуациями движу-

щейся жидкости. Т. д. обычно во много раз интенсивнее молекулярной диффузии. В так наз. полуэмпирической теории Т. д. поток вещества считается пропорциональным градиенту средней концентрации вещества с коэффициентом пропорциональности K_{ij}, носящим название тензора коэффициентов турбулентной диффузии. Коэффициенты Т. д. не являются физич. константами, а зависят от масштаба явления, плотностной стратификации среды, характеристик потока, в связи с чем они могут варьироваться в очень широких пределах. Статистико-вероятностное рассмотрение движения частичек примеси в турбулентных средах позволяет выразить коэффициенты диффузии через лагранжеву корреляционную функцию или через дисперсии смещений частичек примеси в потоке. Первый подход к описанию Т. д. приводит к полуэмпирич. параболич. дифференциальному уравнению диффузии, второй – к интегральному уравнению Эйнштейна – Колмогорова.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1–2, М., 1965–67.

Р. В. Озмидов.

ТУРБУЛЕНТНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ – тензор валентности 2 из коэффициентов $c\rho K_{ij}$ линейной зависимости турбулентного потока тепла $q_i = c\rho\langle\theta' u_j'\rangle$ от градиента осредненного температурного поля $\partial\langle\theta\rangle/\partial x_j$ (c – теплоемкость, ρ – плотность). Даже в простейшем случае, когда осредненное турбулентное течение плоскопараллельно, тензор K_{ij} не диагонален. Тем не менее нередко учитывают лишь его вертикальную K_{ZZ} и горизонтальные компоненты $K_{XX} \approx K_{YY}$.

А. С. Монин.

ТУРБУЛЕНТНОЕ СОСТОЯНИЕ – см. *Магнитной гидродинамики уравнения.*

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ – см. *Турбулентности возникновение, Турбулентность.*

ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЕ – процесс стохастизации начально ламинарного течения жидкости или газа при возрастании параметра его неравновесности (в простейшем случае несжимаемой жидкости – числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \nu^{-1} LU$, где L и U – типичные масштабы длины и скорости течения в целом, ν – кинематическая вязкость) в результате появления в фазовом пространстве течения после некоторых бифуркаций (изменений топологии фазового потока) так наз. странного аттрактора Λ (то есть минимального замкнутого инвариантного предельного притягивающего множества неблуждающих точек, отличающегося от неподвижных точек и замкнутых траекторий).

Завихренное течение (вязкой) жидкости, эволюционирующее на странном аттракторе Λ в соответствующем фазовом пространстве, называется турбулентным, если оно обладает следующими свойствами стохастичности: 1) чувствительной зависимостью от начальных условий (создаваемой экспоненциальной расходимостью начально близких фазовых траекторий); 2) многодомовостью (и, значит, хаотичностью пространственной структуры в фиксированные моменты времени); 3) всюду плотностью в фазовом пространстве почти всех траекторий, причем любое начальное неравновесное распределение вероятности в фазовом пространстве (точнее, в области притяжения Λ) стремится к предельному равновесному распределению (инвариантной мере) на Λ; 4) перемешиванием в фазовом пространстве (то есть для любых измеримых A, $B \subset \Lambda$ должно быть

$$\mathsf{P}\{(F^t A) \cap B\} \to \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$

при $t \to \infty$) и, как следствие, эргодичностью, быстрым затуханием корреляций и непрерывностью спектров.

Оставляя в стороне возможные бифуркации «смены устойчивости», в качестве первой укажем так наз. нормальную бифуркацию Андронова – Хопфа – переход от стационарного к периодич. движению [по теореме Э. Хопфа (E. Hopf, 1942) о наличии при $\mathrm{Re} \sim \mathrm{Re}_{1cr}$ однопараметрич. семейства замкнутых траекторий в фазовом пространстве; применимость этой теоремы в гидродинамике доказана Н. Н. Брушлинской, 1965]. В пограничном слое такое движение, появляющееся при $\mathrm{Re}_\delta{}^* = 420$, называется волной Толлмиена – Шлихтинга. Странный аттрактор появляется после трех таких бифуркаций, то есть вследствие разрешения трехчастотного движения из-за резонансов его старших гармоник. Предлагались и другие «сценарии стохастизации».

Лит.: [1] Монин А. С., Теоретические основы геофизической гидродинамики, Л., 1988.

А. С. Монин.

ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРОБЛЕМА (функциональная формулировка) – проблема, состоящая в исследовании статистического решения и, в частности, в изучении таких его характеристик, как моменты.

Статистическое решение – это математич. понятие, с помощью к-рого описывается течение жидкости при изучении турбулентности статистич. методами. Поток вязкой несжимаемой жидкости обычно можно задать с помощью смешанной краевой задачи для уравнений Навье – Стокса:

$$\partial u(t,x)/\partial t = L(t, u(t,x)) - \mathrm{grad}\, p(t,x),\ \mathrm{div}\, u = 0, \quad (1)$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(t,x') = 0,\ x' \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где время $t \in [0, T]$, $T > 0$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область пространства, заполненная жидкостью, размерности $n = 2$ или $n = 3$, $\partial\Omega$ – граница Ω, $u(t,x) = (u^1, \ldots, u^n)$ – векторное поле скорости жидкости, p – давление, $u_0(x)$ – начальное значение скорости,

$$L(t,u) = \Delta u - \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial u}{\partial x^j} + f(t,x), \quad (4)$$

$f(t,x)$ – плотность внешних сил.

Пусть

$$H^0 = \{u(x) \in (L_2(\Omega))^n : \mathrm{div}\, u = 0,\ u_\gamma(x') = 0,\ x' \in \partial\Omega\},$$

(где u_γ – нормальная к $\partial\Omega$ компонента вектора u) – пространство с нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{(L_2(\Omega))^n}$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{(L_2(\Omega))^n}$. При статистич. описании потока жидкости вместо начального поля u_0 в (2) задается статистич. распределение этих полей, то есть вероятностная мера $\mu_0(\omega)$, где ω – борелевское множество из H^0 ($\omega \in \mathcal{B}(H^0)$). Тогда поток жидкости при $t \in (0, T)$ будет описываться не индивидуальным решением $u(t,x)$, а статистич. решением.

Статистическим решением задачи (1)–(3) называется однопараметрич. семейство мер $\mu(t,\omega)$, $\omega \in H^0$, удовлетворяющих энергетич. неравенству

$$\int_\Lambda \|v\|^2 \mu(t,dv) + \int_0^t \int_\Lambda \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x^j} \right\|^2 \mu(\tau,dv)\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant c \int_\Lambda (\|v\|^2 + 1)\, \mu_0(dv), \quad (5)$$

где $\Lambda = H^0$, и уравнению Хопфа

$$\int e^{i(v,w)} \mu(t,dv) - \int e^{i(v,w)} \mu_0(dv) =$$
$$= \int_0^t \int e^{i(v,w)}\, i(L(\tau,v)w)\mu(\tau,dv)\, d\tau, \quad (6)$$

справедливому при $t \in [0, T]$, $w \in H^0 \cap (W_2^s(\Omega))^n$, $s > 1 + n/2$ ($W_2^s(\Omega)$ – пространство Соболева), где h – выражение (4), а интеграл в (6) берется по H^0.

Пусть начальная мера $\mu_0(\omega)$ удовлетворяет условию

$$\int \|v\|^2 \mu_0(dv) < \infty; \quad (7)$$

тогда существует статистич. решение (см. [1]). Исследован и вопрос о единственности статистич. решения. Наиболее точный результат об однозначной разрешимости состоит в

следующем (см. [3]). Пусть $n=2$ и выполнено (7). Рассмотрим класс статистич. решений, удовлетворяющих (5) с $\Lambda=\{v\in H^0,\ \|v\|>\rho\}$, где $\rho>0$ любое, и с константой c, не зависящей от ρ. В этом классе статистич. решение существует и единственно.

Важными объектами статистич. гидромеханики, к-рые можно измерять при экспериментальном изучении течений, являются моменты статистич. решений

$$M^{j_1,\ldots,j_k}(t,x^k)=\int u^{j_1}(x_1)\ldots u^{j_k}(x_k)\mu(t,du),$$

где $x^k=(x_1,\ldots,x_k)$. Пусть в (4) $f\equiv 0$. Из уравнения (6) выводится бесконечная цепочка уравнений Фридмана – Келлера для $M_k\equiv\{M_k^{j_1,\ldots,j_k}\}$:

$$\partial M_k(t,x^k)/\partial t+A_kM_k+B_kM_{k+1}=0,\ k=1,2,\ldots, \qquad (8)$$

где

$$A_k=\sum_{j=1}^{k}\pi\sum_{l=1}^{n}\partial^2/\partial x_j^l,$$

π – ортопроектор в $(L_2(\Omega))^n$ на H^0, B_k – линейный оператор, определяемый по нелинейным членам уравнения (1), (4) (см. [1]). При $t=0$

$$M_k(0,x^k)=m_k(x^k),\ k=1,2,\ldots, \qquad (9)$$

где m_k – моменты начальной меры $\mu_0(dv)$. Из результатов о существовании статистич. решения и его единственности следует существование решения задачи (8), (9) при $n=2,3$ и его единственность при $n=2$ (см. [1]).

Рассмотрим случай $n=3$, где вместо (3) заданы периодич. краевые условия

$$u^j(t,\ldots,x^k,\ldots)=u^j(t,\ldots,x^k+2\pi,\ldots),\ k=1,\ldots,n,$$

то есть Ω – это n-мерный тор. И пусть

$$H^\alpha=\Big\{v(x)=(v^1,\ldots,v^n):\operatorname{div}v=0,\ \int_\Omega v\,dx=0,$$

$$\|v\|_\alpha^2=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}|\xi|^{2\alpha}|\hat v(\xi)|^2<\infty\Big\},$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $\hat v(\xi)$ – ξ-й коэффициент Фурье функции $v(x)$. Пусть

$$H^\alpha(k)=H^\alpha\otimes\ldots\otimes H^\alpha\ (k\text{ раз}),$$

$$H_q^\alpha(k)=\{w:A_k^{q/2}w\in H^\alpha(k)\},$$

$SH_q^\alpha(k)$ – подпространство симметрич. элементов в $H_q^\alpha(k)$ (см. определение в [1], с. 180). Положим

$$N_{q,R}^\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}SH_q^\alpha(k),\ \|m\|^2_{N_{q,R}^\alpha}=\sum_{k=1}^{\infty}R^{-2k}\|m_k\|^2_{H_q^\alpha(k)},$$

$$Y_R^\alpha=\prod_{k=1}^{\infty}Y^\alpha(k),\ \|M\|^2_{Y_R^\alpha}=\sum_{k=1}^{\infty}R^{-2k}\|M_k\|^2_{Y^\alpha(k)},$$

$$Y^\alpha(k)=\Big\{u(t)\in L_2(0,T;SH_1^\alpha(k)):\frac{\partial u}{\partial t}\in SH_{-1}^\alpha(k)\Big\},$$

где $R>0$ имеет смысл числа Рейнольдса: при больших R пространства $N_{q,R}^\alpha$, Y_R^α содержат моменты, соответствующие турбулентным потокам. При $n=3$, $\alpha>2$, $R>0$ решение $\{M_k\}$ задачи (8), (9) единственно в пространстве Y_R^α, а множество V_R^α начальных данных $\{m_k\}\in N_{0,R}^\alpha$, для к-рых существует решение $\{M_k\}\in Y_R^\alpha$ задачи (8), (9) плотно в $N_{0,R}^\alpha$. Здесь не предполагается положительная определенность моментов $\{M_k\}$, поэтому при $n=3$ имеет место однозначная разрешимость уравнения Хопфа для плотного множества начальных условий в классе аналитич. функционалов, а не в классе мер.

Важной для приложений является проблема аппроксимации решения $M=\{M_k\}$ задачи (8), (9) решением $M^N=\{M_1^N,\ldots,M_N^N,0,\ldots,0,\ldots\}$ нек-рой конечной системы, к-рая называется проблемой замыкания системы (8). Для малых чисел Рейнольдса проблема решена [1]: в качестве M^N взято решение системы

$$\left.\begin{aligned}\partial M_k^N(t,x^k)/\partial t+A_kM_k^N+B_kM_{k+1}^N=0,\\ \partial M_N^N(\partial t+A_NM_N^N)=0\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

с начальными условиями

$$M_k^N(0,x^k)=m_k(x^k),\ k=1,\ldots,N,$$

доказано, что (при $\alpha\geqslant 1$) $\|M-M^N\|_{Y_R^\alpha}\to 0$ при $N\to\infty$.

Для больших R и $n=2$ проблема замыкания решена в [4]. При этом в качестве M^N взято решение экстремальной задачи

$$\|M^N(0,\cdot)-m\|_{N_{0,R_1}^{\alpha-1}}\to\inf\|M^N\|_{L_2\left(0,T;\,N_{1,R_1}^\alpha\right)}\leqslant\gamma,$$

M^N удовлетворяет системе (10), где γ – константа, оценивающая сверху норму в $L_2(0,T;N_{1,R}^\alpha)$ решения M задачи (9), (10), к-рое подлежит аппроксимации. Доказано, что

$$\|M-M^N\|_{L_2\left(0,T;\,N_{1,\rho}^\beta\right)}\to 0$$

при $N\to\infty$, где $1<\beta<\alpha-1$, $\rho>R_1>R$, ρ достаточно велико.

Помимо указанных статистич. решений важное значение имеют пространственно-временные статистич. решения и трансляционно-однородные. Большой интерес представляют оценки асимптотики моментов статистич. решений. В статистич. гидромеханике накоплено большое количество результатов, полученных на физич. уровне строгости (см., напр., [5]).

Лит.: [1] Вишик М. И., Фурсиков А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980; [2] Гишларкаев В. И., «Вестник Моск. ун-та. Сер. математика и механика», 1990, № 2, с. 77–80; [3] Фурсиков А. В., «Математич. сб.», 1987, т. 137(176), № 4(12), с. 472–95; [4] его же, в сб.: Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа, М., 1990, с. 228–47; [5] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, М., ч. 1–2, 1965–67. *А. В. Фурсиков.*

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ – явление, наблюдаемое в турбулентных течениях жидкостей и газов, то есть таких завихренных течениях, термодинамические и гидродинамические характеристики которых испытывают хаотические флуктуации из-за наличия многочисленных вихрей различных размеров и потому изменяются в пространстве и времени весьма нерегулярно. Этим турбулентные течения отличаются от так наз. ламинарных течений.

Индивидуальные реализации турбулентных течений описываются обычными уравнениями гидромеханики вязкой жидкости. Единственность решения задачи Коши для них не доказана (доказательство удается лишь для двумерных течений и при специальных предположениях об изменчивости кинематич. вязкости ν). Стационарные решения, отвечающие ламинарным течениям, формально существуют при любых числах Рейнольдса $\mathrm{Re}=UL/\nu$ (L и U – масштабы длины и скорости), но при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$ они неустойчивы. Гидродинамич. неустойчивость относительно малых возмущений поля скорости вида:

$$u'(x,t)=a(x)\exp(\lambda t)$$

исследуется как задача о собственных значениях соответствующего линеаризованного уравнения для $a(x)$ (так наз. *Орра – Зоммерфельда уравнение*).

При значениях числа Рейнольдса Re в некоторой окрестности $\mathrm{Re}_{кр}$ в фазовом пространстве течения существует однопараметрич. семейство замкнутых траекторий. Если оно появляется лишь при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$, то бифуркация называется нормальной, и замкнутые траектории суть предельные циклы, которым соответствуют периодические по t решения

с конечными амплитудами порядка $(\mathrm{Re}-\mathrm{Re}_{кр})^{1/2}$ и произвольными фазами. По предположению Л. Д. Ландау (1944), Т. образуется в результате последовательности нормальных бифуркаций и представляет собой квазипериодич. эргодич. течение с очень большим числом несоизмеримых частот колебаний и соответствующих степеней свободы – фаз колебаний.

Если семейство замкнутых фазовых траекторий появляется еще при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, то бифуркация называется о б р а т н о й, предельные циклы неустойчивы (то есть траектории с них сматываются); при $\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}_{кр} \to 0$ они сжимаются и в пределе исчезают, а при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ возмущения разрастаются со временем и, по-видимому, быстро приобретают непериодич. характер. Возможно, что в этом случае в фазовом пространстве имеется *странный аттрактор*, то есть множество Λ неблуждающих точек (у к-рых каждая окрестность пересекается с нек-рой траекторией по меньшей мере дважды), отличающихся от неподвижных точек и замкнутых траекторий и имеющих окрестности, в к-рых появляющиеся траектории все асимптотически приближаются к Λ.

Существует гипотеза, что после четырех бифуркаций в фазовом пространстве течений жидкости появляется странный аттрактор, являющийся локально канторовым множеством двумерных поверхностей, попадание на к-рый и создает хаотичность течения, то есть Т. Однако доказательной теории бифуркаций для гидродинамич. систем еще не построено (см. [3]).

Наиболее полным статистич. описанием турбулентного течения несжимаемой жидкости является задание вероятностной меры $P(\omega)$ на функциональном пространстве возможных полей скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ или ее функционального преобразования Фурье – характеристич. функционала, напр. в спектральном представлении $\Psi[z(\boldsymbol{k}, t)]$ (см. [1]). Для него из уравнений Навье – Стокса выводится линейное уравнение в вариационных производных (так что статистич. динамика Т. оказывается линейной), к-рое надлежит решать при заданном

$$\Psi_0[z(\boldsymbol{k})] = \Psi[z(\boldsymbol{k})\delta(t-t_0)].$$

В частности, для пространственного характеристич. функционала $\Psi[z(\boldsymbol{k}), t]$, дающего полное статистич. описание поля скорости в фиксированный момент времени t, получается уравнение Хопфа:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (H_0 + H_1)\Psi; \quad H_0 = -i\nu\int d\boldsymbol{k}k^2 z_\alpha(\boldsymbol{k})D_\alpha(\boldsymbol{k});$$

$$H_1 = \iint d\boldsymbol{k}'d\boldsymbol{k}'' B_{\alpha,\beta\gamma}(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'')z_\beta(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'')D_\alpha(\boldsymbol{k}')D_\gamma(\boldsymbol{k}''),$$

где

$$B_{\alpha,\beta\gamma}(\boldsymbol{k}) = ik_\alpha(\delta_{\beta\gamma} - k_\beta k_\gamma k^{-2}),$$

а $D_\alpha(\boldsymbol{k})$ – оператор вариационного дифференцирования по $z_\alpha(\boldsymbol{k})$. Это уравнение аналогично уравнению для вектора состояния Ψ в представлении Шредингера квантового бозе-поля с сильным взаимодействием специального вида (слияние двух бозонов в один): $z_\alpha(\boldsymbol{k})$ и $D_\alpha(\boldsymbol{k})$ суть операторы рождения и уничтожения квантов с импульсом $\boldsymbol{k}$, а константой взаимодействия служит Re. Общих методов решения линейных уравнений в вариационных производных еще не создано. При $\mathrm{Re} \gg 1$ теория возмущений не действует, хотя частичное суммирование диаграмм Фейнмана возможно (см. [2]). Решение Ψ можно записать в виде континуального интеграла, но общих методов для вычисления таких интегралов еще нет. Зато общим методом нахождения вероятностных мер $\mathsf{P}(\omega)$ для описания турбулентных течений может служить построение таких мер $\mathsf{P}_e(\omega)$ для галеркинских аппроксимаций уравнений Навье – Стокса: для семейства мер $\{\mathsf{P}_e\}$ доказывается слабая компактность (см. [6]); этим методом, в частности, доказываются нек-рые теоремы существования и единственности решений Ψ.

Эквивалентная формулировка полного статистич. описания турбулентного течения заключается в задании всех конечномерных плотностей вероятности

$$f_n = P_{M_1 \dots M_n}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$$

для значений $\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{u}(M_m)$ поля скорости на всевозможных конечных наборах точек $M_m = (\boldsymbol{x}_m, t_m)$ пространства-времени. Для них из уравнений Навье – Стокса выводятся (см. [5]) линейные уравнения

$$\frac{\partial f_n}{\partial t_k} = -\left(\frac{\partial u_{k\alpha} f_n}{\partial x_{k\alpha}} + \frac{\partial w_{k\alpha} f_n}{\partial u_{k\alpha}}\right),$$

где w_k – перенесенное в точку M_k условное математич. ожидание ускорения в точке $(\boldsymbol{x}, t_k)$ при условии, что значения $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}(M_1), \dots, \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}(M_n)$ фиксированы. Величины $w_{k\alpha}f_n$ содержат интегралы по $f_{n+1}\,d\boldsymbol{u}_{n+1}$, так что уравнения для f_n образуют бесконечную цепочку. Интегрируя уравнение для $\partial f_n/\partial t_k$ по

$$F(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)d\boldsymbol{u}_1 \dots d\boldsymbol{u}_k,$$

получают о б о б щ е н н ы е у р а в н е н и я Ф р и д м а н а – К е л л е р а:

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial t_k} = -\frac{\partial \overline{u_{k\alpha} F}}{\partial x_{k\alpha}} + \overline{w_{k\alpha}\frac{\partial F}{\partial u_{k\alpha}}},$$

где черточка – математич. ожидание. Это уравнение было выведено при $F = u_{1\alpha_1}^{m_1} \dots u_{n\alpha_n}^{m_n}$, так что $\overline{F}$ – это n-точечный статистич. момент поля скорости порядка $N = m_1 + \dots + m_n$. Уравнения для моментов образуют бесконечную цепочку (разрешимость к-рой доказывается с помощью галеркинских аппроксимаций уравнений Навье – Стокса).

При $N = 1$ эти уравнения (у р а в н е н и я Р е й н о л ь д с а) получаются непосредственным осреднением уравнений Навье – Стокса и отличаются от таковых для осредненного поля скорости $\overline{\boldsymbol{u}}$ появлением дополнительных неизвестных – одноточечных вторых моментов $\tau_{jl} = -\rho\overline{u_j' u_l'}$ (ρ – плотность жидкости, штрихи обозначают отклонения от математич. ожиданий), называемых н а п р я ж е н и я м и Р е й н о л ь д с а. Простейшим способом замыкания системы уравнений Фридмана – Келлера является представление τ_{jl} в виде функций от $\partial\overline{u}_i/\partial x_k$. В *полуэмпирической теории турбулентности* эти функции берутся линейными, и для их коэффициентов (имеющих смысл коэффициентов турбулентной вязкости) принимаются те или иные дополнительные предположения (напр., пропорциональность $l\sqrt{b}$, где l и b – масштаб и кинетич. энергия Т. в единице массы, для к-рых конструируются дополнительные уравнения – это делает реологию осредненного течения нелинейной и создает специфич. эффекты).

При $N = 2$ получаются уравнения для двухточечных корреляционных функций поля скорости $\overline{u_{1\alpha}' u_{2\beta}'}$ (или их преобразований Фурье по $(M_1 - M_2)$-спектральных функций). Для их замыкания необходимы дополнительные предположения о входящих в них третьих моментах (см. [1], [5]). Наиболее естественные методы построения замкнутых уравнений для спектров турбулентности получаются обрезанием частично просуммированных диаграмм Фейнмана.

Существенные геометрич. упрощения получаются в случае однородной и изотропной Т. Эта модель важна, потому что всякая реальная Т. с очень большим числом Рейнольдса оказывается локально-стационарной, локально-однородной и локально-изотропной. При этом при фиксированной скорости диссипации кинетич. энергии ε статистич. структура трехмерного турбулентного течения с очень большим числом Рейнольдса в достаточно малых масштабах полностью определяется двумя параметрами ε и ν, так что, напр., структурная функция скоростей при $r \ll L$ должна иметь вид:

$$\overline{[u_\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}, t) - u_\alpha(\boldsymbol{x}, t)]^2} = (\varepsilon r)^{2/3}\varphi(r/\lambda),$$

где L – масштаб течения в целом, а $\lambda = \varepsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$ – колмогоровский внутренний масштаб; в так наз. инерционном

интервале масштабов $L \gg r \gg \lambda$ параметр ν выпадает, и функция φ обращается в константу. Если же учитывать флуктуации поля ε, то колмогоровская автомодельность становится неполной, и структурная функция приобретает поправочный множитель $(r/L)^m$ с небольшим показателем.

В двумерных течениях, кроме энергии, адиабатич. интегралом движения является еще средний квадрат вихря — *энстрофия* (так что вихревые нити не растягиваются) и, кроме параметров ε и ν, появляется еще скорость вырождения энстрофии ε_ω. При этом от масштабов энергоснабжения энергия передается в сторону больших масштабов по колмогоровскому закону, а энстрофия — в сторону малых масштабов по нелокальному спектральному закону (см. [4]):

$$E(k) = C_\omega \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3} \left(\ln \frac{k}{k_0} \right)^{-1/3}.$$

Такими свойствами обладает крупномасштабная квазидвумерная Т. в атмосфере и в океане, образуемая синоптич. вихрями и волнами Россби — Блиновой. Роль вихря двумерного течения здесь играет так наз. потенциальный вихрь — скалярное произведение вихря абсолютной скорости на градиент энтропии. Уравнение для него в квазигеострофич. приближении получается в виде:

$$\frac{\partial \mathcal{P}\psi}{\partial t} + J(\psi, \mathcal{P}\psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = F; \quad \mathcal{P} = \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \frac{H^2}{L_R^2} \frac{\partial}{\partial z},$$

где ψ, Δ, J — горизонтальные функция тока, лапласиан и якобиан, z — вертикальная координата, H и $L_R = HN/f$ — толщина слоя и «радиус деформации» Россби (N — частота Вайссала — Брента, f — параметр Кориолиса), x — дуга круга широты, β — производная от f по дуге меридиана, F — неадиабатич. факторы. В масштабах $L \ll L_R$ получается обычное уравнение двумерной Т. Волновое число $k_\beta = (\beta/2U)^{1/2}$ (где U — типичная скорость) разделяет вихри ($k > k_\beta$) и волны Россби — Блиновой ($k < k_\beta$). Малые начальные вихри имеют тенденцию со временем расти, выравниваться по вертикали («баротропизация»), смещаться на запад и вытягиваться вдоль кругов широты.

Важными обобщениями Т. в несжимаемой жидкости являются Т. в стратифицированной жидкости с архимедовыми силами и гидромагнитная Т.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–67; [2] Гледзер Е. Б., Монин А. С., «Успехи математич. наук», 1974, т. 29, в. 3, с. 111–59; [3] Монин А. С., «Успехи физич. наук», 1978, т. 125, в. 1, с. 97–122; [4] Мирабель А. П., Монин А. С., «Успехи механики», 1979, т. 2, в. 3, с. 47–95; [5] Монин А. С., Озмидов Р. В., Океанская турбулентность, Л., 1981; [6] Вишик М. И., Фурсиков А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980.

А. С. Монин.

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ в стратифицированных средах — *турбулентность* при изменениях плотности среды ρ по вертикали z (направлению силы тяжести g). Отличается от Т. в несжимаемой жидкости или в средах с безразличной стратификацией существенным действием архимедовых сил $\rho' g$ на объемы с отклонениями ρ' плотности от ее гидростатич. значения $\rho_0(z)$ (в земной атмосфере, конвективном слое Солнца и во многих технич. устройствах флуктуации $\rho' \approx -\rho\theta'/\theta$ создаются флуктуациями температуры θ', и существенна термич. стратификация, в Мировом океане сравнимую роль играют флуктуации S' солености и $\rho'/\rho \approx -\alpha\theta' + \beta S'$, в потоках со взвесью могут быть существенными флуктуации ее концентрации).

Если $\partial\rho_0/\partial z < -g\rho_0/C^2$ (где C — адиабатич. скорость звука), то стратификация гидростатически устойчива, Т. затрачивает энергию на работу против архимедовых сил и поэтому развивается слабо, нередко сохраняясь лишь в отдельных тонких слоях или «блинах» (повсеместно встречающихся, напр., в Мировом океане, где они образуются вследствие горизонтального расплывания вертикально коллапсирующих перемешанных пятен, остающихся после опрокидывания внутренних волн). Если же, наоборот, $\partial\rho_0/\partial z > -g\rho_0/C^2$, то стратификация неустойчива, и за счет ее потенциальной энергии развивается бурная турбулентная конвекция (напр., кучевая конвекция в прогреваемых снизу холодных воздушных массах в земной атмосфере или ячеистая конвекция во внешних слоях Солнца). Наличие вертикального сдвига $\partial U/\partial z$ скорости осредненного течения обычно усиливает гидродинамич. неустойчивость и развитие Т. (см. *Ричардсона число*).

В описании Т. в стратифицированных средах существенную роль играет параметр «плавучести» αg, где α — коэффициент расширения (у идеального газа $\alpha = \theta^{-1}$). В случае развитой Т. возникает «масштаб плавучести» $L = (\alpha g)^{-3/2} \varepsilon^{5/4} \varepsilon_\theta^{3/4}$, где ε, ε_θ — скорости спектрального переноса кинетич. энергии и меры температурных неоднородностей (А. М. Обухов, 1949), и в так наз. инерционно-конвективном интервале волновых чисел k спектры Т. при устойчивой стратификации принимают вид:

$$E(k) \sim (\alpha g)^{4/5} \varepsilon_\theta^{2/5} k^{-11/5}$$

и

$$E_\theta(k) \sim (\alpha g)^{-2/5} \varepsilon_\theta^{4/5} k^{-7/5}.$$

В *Монина — Обухова теории подобия* для описания энергонесущих компонент Т. в стратифицированных средах к αg добавляются вертикальные турбулентные потоки количества движения и массы (или тепла).

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1–2, М., 1965–67; [2] Монин А. С., Озмидов Р. В., Океанская турбулентность, Л., 1981.

А. С. Монин.

ТЯГОТЕНИЯ ПОЛЕ — см. *Векторное поле.*

ТЯГОТЕНИЯ ТЕОРИЯ — см. *Относительности теория.*

ТЯЖЕЛЫЙ ГИРОСКОП — см. *Гироскоп.*

У

УАЙТМЕНА АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД в квантовой теории поля – см. *Аксиоматическая квантовая теория поля.*

УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ – векторная величина, характеризующая быстроту вращения твердого тела. При равномерном вращении тела вокруг неподвижной оси численно его У. с.

$$\omega = \Delta\varphi/\Delta t,$$

где $\Delta\varphi$ – приращение угла поворота φ за промежуток времени Δt, а в общем случае

$$\omega = d\varphi/dt.$$

Вектор У. с. направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда поворот тела виден происходящим против хода часовой стрелки (в правой системе координат). Размерность У. с. T^{-1}.

См. также *Динамика твердого тела.*

УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ – величина, характеризующая быстроту изменения *угловой скорости* твердого тела. При вращении тела вокруг неподвижной оси, когда его угловая скорость ω растет (или убывает) равномерно, численно У. у.

$$\varepsilon = \Delta\omega/\Delta t,$$

где $\Delta\omega$ – приращение, к-рое получает ω за промежуток времени Δt, а в общем случае

$$\varepsilon = d\omega/dt.$$

Вектор У. у. ε направлен при этом вдоль оси вращения (в ту же сторону, что и ω при ускоренном вращении и противоположно ω – при замедленном). При вращении вокруг неподвижной точки вектор У. у. $\varepsilon = d\omega/dt$ и направлен по касательной к *годографу* вектора ω в соответствующей его точке. Размерность У. у. T^{-2}.

УГЛОВОЙ МОМЕНТ – см. *Момент количества движения.*

УГОЛ РАССЕЯНИЯ – см. *Рассеяния теория.*

УДАР твердых тел – совокупность явлений, возникающих при столкновении движущихся твердых тел, а также при некоторых видах взаимодействия твердого тела с жидкостью или газом (У. струи о тело, У. тела с поверхностью жидкости, гидравлич. У., действие взрывной или ударной волны на твердое тело и др.). Промежуток времени, в течение к-рого длится У., обычно очень мал (на практике $\sim 10^{-4} - 10^{-5}$ с), а развивающиеся на площадках контакта соударяющихся тел силы (так наз. ударные или мгновенные) очень велики. За время У. они изменяются в широких пределах и достигают значений, при к-рых средние величины давления (напряжений) на площадках контакта имеют порядок 10^4 и даже 10^5 атм. Действие ударных сил приводит к значительному изменению за время У. скоростей точек тела. Следствиями У. могут быть также остаточные деформации, звуковые колебания, нагревание тел, изменение механич. свойств их материалов (в частности, их упрочнение), полиморфные и химич. превращения и др., а при скоростях соударения, превышающих критические,– разрушение тел в месте У. Критич. скорости для металлов имеют порядок 15 м/с (медь) – 150 м/с и более (высококачественные стали).

Изменение скоростей точек тела за время У. определяется методами общей теории У., где в качестве меры механич. взаимодействия тел при У. вместо самой ударной силы $\boldsymbol{P}$ вводится ее импульс за время У. τ, то есть величина

$$\boldsymbol{S} = \int_0^\tau \boldsymbol{P}\,dt = \boldsymbol{P}_{\text{ср}}\tau,$$

называемая ударным импульсом. Одновременно, ввиду малости τ, импульсами всех неударных сил, таких, напр., как сила тяжести, а также перемещениями точек тела за время У. пренебрегают. Основные уравнения общей теории У. вытекают из теорем об изменении количества движения и кинетич. момента системы при У. С помощью этих теорем, зная приложенный ударный импульс и скорости в начале У., определяют скорости в конце У., а если тело является несвободным, то и импульсивные реакции связей.

Процесс соударения двух тел можно разделить на две фазы. 1-я фаза начинается с момента соприкосновения точек A и B тел, имеющих в этот момент скорость сближения $v_{A_n} - v_{B_n}$, где v_{A_n} и v_{B_n} – проекции скоростей $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ на общую нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности тел в точках A и B, называемую линией удара. К концу 1-й фазы сближение тел прекращается, а часть их кинетич. энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Во 2-й фазе происходит обратный переход потенциальной энергии упругой деформации в кинетич. энергию тел; при этом тела начинают расходиться и к концу 2-й фазы точки A и B будут иметь скорость расхождения $V_{A_n} - V_{B_n}$. Для совершенно упругих тел механич. энергия к концу У. восстановилась бы полностью и было бы

$$\left|V_{A_n} - V_{B_n}\right| = \left|v_{A_n} - v_{B_n}\right|;$$

наоборот, У. совершенно неупругих тел закончился бы на 1-й фазе ($V_{A_n} - V_{B_n} = 0$). При У. реальных тел механич. энергия к концу У. восстанавливается лишь частично вследствие потерь на образование остаточных деформаций, нагревание тел и др.:

$$\left|V_{A_n} - V_{B_n}\right| < \left|v_{A_n} - v_{B_n}\right|.$$

Для учета этих потерь вводится так наз. коэффициент восстановления k, к-рый считается зависящим только от физич. свойств материалов тел:

$$k = \frac{\left|V_{A_n} - V_{B_n}\right|}{\left|v_{A_n} - v_{B_n}\right|} = -\frac{\left(V_{A_n} - V_{B_n}\right)}{\left(v_{A_n} - v_{B_n}\right)}.$$

В случае У. по неподвижному телу

$$V_{B_n} = v_{B_n} = 0 \text{ и } k = -V_{A_n}/v_{A_n}.$$

Значение k определяется экспериментально, напр. измерением высоты h, на к-рую отскакивает шарик, свободно падающий на горизонтальную плиту из того же материала, что и шарик, с высоты H; в этом случае

$$k = \sqrt{h/H}.$$

По данным опытов, при соударении тел из дерева $k \approx 0{,}5$, из стали – 0,55, из слоновой кости – 0,89, из стекла – 0,94. В

предельных случаях при совершенно упругом У. $k=1$, а при совершенно неупругом $k=0$. Зная скорости в начале У. и коэффициент k, можно найти скорости в конце У. и действующий в точках соударения ударный импульс S.

Если центры масс тел C_1 и C_2 лежат на линии У., то У. называется центральным (У. шаров); в противном случае – нецентральным. Если скорости v_1 и v_2 центров масс в начале У. направлены параллельно линии У., то У. называется прямым; в противном случае – косым. При прямом центральном У. двух гладких тел (шаров) 1 и 2

$$V_1 = v_1 - \frac{(1+k)M_2}{M_1+M_2}(v_1 - v_2),$$

$$V_2 = v_2 + \frac{(1+k)M_1}{M_1+M_2}(v_1 - v_2),$$

$$\dot{S} = (1+k)\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(v_1 - v_2),$$

$$\Delta T = \frac{(1-k^2)}{2}\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(v_1 - v_2)^2,$$

где ΔT – потерянная за время У. кинетич. энергия системы, M_1 и M_2 – массы шаров. В частном случае при $k=1$ и $M_1=M_2$ получается $V_1=v_2$ и $V_2=v_1$, то есть шары одинаковой массы при совершенно упругом У. обмениваются скоростями; при этом $\Delta T=0$.

Для определения времени У., ударных сил и вызванных ими в телах напряжений и деформаций необходимо учесть механич. свойства материалов тел и изменения этих свойств за время У., а также характер начальных и граничных условий. Решение проблемы существенно усложняется не только из-за трудностей чисто математич. характера, но и ввиду отсутствия достаточных данных о параметрах, определяющих поведение материалов тел при ударных нагрузках, что заставляет делать при расчетах ряд существенных упрощающих предположений. Наиболее разработана теория У. совершенно упругих тел, в к-рой предполагается, что тела за время У. подчиняются законам упругого деформирования (см. *Упругости математическая теория*) и в них не появляется остаточных деформаций. Деформация, возникшая в месте контакта, распространяется в таком теле в виде упругих волн со скоростью, зависящей от физич. свойств материала. Если время прохождения этих волн через все тело много меньше времени У., то влиянием упругих колебаний можно пренебречь и считать характер контактных взаимодействий при У. таким же, как в статич. состоянии. Если же время прохождения упругих волн через тело сравнимо со временем У., то для расчетов пользуются волновой теорией У.

Изучение У. не вполне упругих тел – задача значительно более сложная, требующая учета как упругих, так и пластич. свойств материалов. При решении этой задачи и связанных с ней проблем определения механич. свойств материалов тел при У., изучения изменений их структуры и процессов разрушения широко опираются на анализ и обобщение результатов многочисленных экспериментальных исследований. Экспериментально исследуются также специфич. особенности У. тел при больших скоростях (~ сотен м/с) и при воздействии взрыва, к-рый в случае непосредственного контакта заряда с телом можно считать эквивалентным соударению со скоростью до 1000 м/с.

Кроме У. твердых тел, в физике изучают столкновения молекул, атомов и элементарных частиц.

Лит.: [1] Кильчевский Н. А., Теория соударений твердых тел, Киев, 1969; [2] Динник А. Н., Удар и сжатие упругих тел, Киев, 1952 (Избранные труды, т. 1); [3] Давиденков Н. Н., Динамические испытания металлов, 2 изд., Л.–М., 1936; [4] Ильюшин А. А., Ленский В. С., Сопротивление материалов, М., 1959, гл. 6; [5] Райнхарт Дж., Пирсон Дж., Поведение металлов при импульсивных нагрузках, пер. с англ., М., 1958. *С. М. Таре.*

УДАРНАЯ СХЕМА теории возмущений – метод приближенного решения нестационарного уравнения Шредингера при достаточно быстром (в предельном случае – мгновенном) включении возмущения; применима в случае, противоположном по отношению к *адиабатической теории возмущений*. Чаще всего используется при расчетах сечений процессов, в к-рых скорость относительного движения взаимодействующих систем велика по сравнению с характерными скоростями движения частиц внутри этих систем, так что волновую функцию каждой системы можно считать неизменной в течение времени взаимодействия и совпадающей с волновой функцией начального состояния. Существенно, что область применимости У. с. определяется не величиной возмущения, а скоростью его изменения.

Временное уравнение Шредингера с безразмерной переменной s имеет вид:

$$\frac{i\hbar}{T}\frac{\partial}{\partial s}|\Psi(s)\rangle = \hat{H}(s)|\Psi(s)\rangle,$$

где $s=(t-t_0)/T$; $T=t_1-t_0$ – промежуток времени, в течение к-рого гамильтониан изменяется от начального $\hat{H}_0 \equiv \hat{H}(0)$ в момент времени t_0 до конечного $\hat{H}_1 \equiv \hat{H}(1)$ в момент t_1. В частности, случаю мгновенного включения взаимодействия соответствует предел $T \to 0$.

Временное уравнение Шредингера эквивалентно интегральному уравнению

$$|\Psi(s)\rangle = |\Psi(0)\rangle - \frac{iT}{\hbar}\int_0^s \hat{H}(u)|\Psi(u)\rangle\, du$$

с вектором состояния $|\Psi(0)\rangle$, определяющим начальное положение системы. Итерационное решение этого уравнения позволяет найти функцию $|\Psi(s)\rangle$ в произвольный момент времени в виде ряда по степеням T, к-рый и определяет У. с.:

$$|\Psi(s)\rangle = \left[1 - \frac{iT}{\hbar}\int_0^s \hat{H}(u)\,du - \right.$$

$$\left. - \frac{T^2}{\hbar^2}\int_0^s\int_0^u \hat{H}(u)H(v)\,du dv + \ldots\right]|\Psi(0)\rangle.$$

Пусть в начальный момент времени система находилась в одном из стационарных состояний исходного гамильтониана, то есть

$$|\Psi(0)\rangle = |\varphi_i\rangle,$$

где

$$\hat{H}(0)|\varphi_i\rangle = \varepsilon_i|\varphi_i\rangle.$$

Если после мгновенного ($T \to 0$) включения взаимодействия гамильтониан изменяется к виду $\hat{H}(1)$ с новым набором стационарных состояний

$$\hat{H}(1)|\chi_k\rangle = \nu_k|\chi_k\rangle,$$

то в нулевом приближении У. с. просто решается задача об определении вероятности перехода системы в одно из этих состояний

$$w_{ki} = |\langle\chi_k|\varphi_i\rangle|^2.$$

Ошибка нулевого приближения У. с. определяется вероятностью обнаружить при $s=1$ систему в состоянии, отличном от начального. Амплитуду этой вероятности можно найти по формуле

$$\delta = \langle\Psi(1)|(1-\hat{P}_0)|\Psi(1)\rangle,$$

где $\hat{P}_0 = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi_0|$ – оператор проектирования на начальное состояние. Подстановка разложения для $|\Psi(1)\rangle$ с точностью до второго порядка по T приводит к

$$\delta = \frac{T^2}{\hbar^2}\left[\langle\Psi(0)|\hat{\bar{H}}^2|\Psi(0)\rangle - (\langle\Psi(0)|\hat{\bar{H}}|\Psi(0)\rangle)^2\right],$$

где

$$\hat{\bar{H}} = \int_0^1 \hat{H}(s)\,ds.$$

Таким образом, точность У. с. теории возмущений определяется не величиной гамильтониана, а его среднеквадратичным отклонением за время взаимодействия. *И. Д. Ферапчук.*

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ – тонкие переходные области, в которых происходит резкое изменение плотности, давления и скорости среды. В У. в. происходит переход части кинетич. энергии газа в тепло на расстоянии порядка длин свободного пробега молекулы; поэтому толщина У. в. имеет порядок длины свободного пробега. При макроскопич. рассмотрении толщиной У. в. пренебрегают, то есть считают У. в. *разрыва поверхностью.*

Зачастую У. в. образуются при взрыве. При этом продукты взрыва, обладающие большой плотностью, находящиеся под высоким давлением и имеющие большую температуру, движутся в невозмущенный газ, от к-рого они отделены У. в. В У. в. невозмущенный газ нагревается и увлекается У. в., а продукты взрыва остывают и уменьшают свою скорость. При теоретич. исследовании У. в. пользуются идеализированной картиной стационарного течения, полагая, что скорость среды позади волны остается постоянной благодаря вдвигаемому поршню.

На поверхности У. в. выполняются граничные условия: закон сохранения массы

$$\Delta \rho v_n = 0,$$

закон сохранения импульса

$$\Delta (p + \rho v_n^2) = 0,$$

$$\Delta \rho v_n \boldsymbol{v}_t = 0$$

и закон сохранения энергии

$$\Delta\left[\rho v_n\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right] = 0.$$

Здесь ρ, p – плотность и давление среды, v_n и $\boldsymbol{v}_t$ – нормальная и тангенциальная скорости среды (по отношению к поверхности разрыва), $v^2 = v_n^2 + v_t^2$, w – тепловая функция единицы массы. Символ Δ означает разность соответствующих величин по обе стороны У. в. Число граничных условий, равное пяти, совпадает с числом гидродинамич. величин v_n, $\boldsymbol{v}_t$, p, ρ. Это совпадение (имеющее место не для всех моделей сплошной среды) является счастливым обстоятельством, значительно упрощающим исследование У. в. А именно, для определения скачков гидродинамич. величин Δv_n, $\Delta \boldsymbol{v}_t$, Δp, $\Delta \rho$ нет необходимости исследовать структуру переходного слоя, описываемую дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями, а достаточно рассмотреть систему граничных условий, имеющих алгебраический, то есть более простой, характер.

В обычных веществах имеет место теорема Цемплена: в У. в. плотность и давление возрастают. Поэтому У. в. часто называют скачками уплотнения.

Устойчивость и эволюционность У. в. Выполнение граничных условий на разрыве недостаточно для существования У. в. Кроме этого, необходимо, чтобы У. в. были устойчивыми, то есть чтобы возникшие при $t=0$ в окрестности поверхности разрыва $z=0$ бесконечно малые возмущения гидродинамич. величин $\delta\rho(z)$, $\delta p(z)$, $\delta v(z)$ оставались бесконечно малыми и при $t>0$. Начальные возмущения можно разложить в интеграл Фурье и исследовать эволюцию одной k-компоненты, зависящей от z по закону $\exp ikz$. При этом зависимость возмущения от времени будет иметь вид $\exp(-i\omega t)$. При наличии возмущения граничные условия на поверхности разрыва нарушаются, в результате чего возникают волны бесконечно малой амплитуды, расходящиеся в обе стороны от поверхности разрыва. После отхождения этих волн гидродинамич. величины должны стать такими, чтобы выполнялись граничные условия. Именно из этих равенств определяются амплитуды образовавшихся (расходящихся) волн. Если число неизвестных возмущений (расходящихся волн; напомним, что каждая волна определяется одним независимым параметром) равно числу уравнений (независимых граничных условий на поверхности У. в.), то определитель этой системы равен нулю:

$$D(k, \omega) = 0;$$

в этом случае разрыв называется эволюционным. Это уравнение, называемое дисперсионным, определяет ω как функцию k. Если при любом значении k величина ω вещественна, то ударная волна устойчива. Если же при нек-рых значениях k величина ω комплексна, причем $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, то амплитуды возмущений экспоненциально нарастают. В этом случае У. в. существуют лишь в течение малого промежутка времени порядка $(\mathrm{Im}\,\omega)^{-1}$. При $t > (\mathrm{Im}\,\omega)^{-1}$ происходит разрушение данного режима движения. Возможен, однако, случай, когда число расходящихся волн (число неизвестных) больше или меньше числа уравнений (граничных условий). Такие У. в. называются неэволюционными. При этом задача о малом возмущении разрыва либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решения вовсе. Но подобная ситуация невозможна, и такой вариант означал бы, что неправомерно исходное предположение о малости возмущений, то есть У. в. мгновенно (в модели идеальной среды) расщепляются. При этом возмущение сразу же делается конечным, то есть не малым, хотя при малом t (когда оба разрыва не разошлись еще на большое расстояние) оно и занимает лишь небольшой интервал расстояний δz.

Из условий эволюционности следует, что У. в. движется со сверхзвуковой скоростью по отношению к среде впереди нее и с дозвуковой скоростью по отношению к среде позади нее:

$$v_{n1} > a_1,\ v_{n2} < a_2.$$

Здесь v_{n1} и v_{n2} – нормальные компоненты скорости среды относительно У. в. перед и за фронтом У. в. (равные по абсолютной величине скорости У. в. по отношению к среде); a_1 и a_2 – скорости звука в среде впереди и позади У. в. Скорость У. в. v_{n1} возрастает с ростом p_2/p_1 начиная от скорости звука a_1 в У. в. бесконечно малой интенсивности $[(p_2/p_1) \to 1]$ и стремится к бесконечности вместе с p_2/p_1. При этом в идеальном газе сжатие ρ_2/ρ_1 в У. в. не может превысить конечного значения $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$, где γ – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, $\gamma = c_p/c_v$.

Замедленная релаксация. В У. в. достаточно большой интенсивности температура газа повышается настолько, что происходит возбуждение внутренних степеней свободы – молекулярные колебания, диссоциация молекул, химич. реакции и ионизация. Для этих процессов требуется много столкновений молекул. Поэтому непосредственно в У. в. происходит нагрев газа при «замороженных» внутренних степенях свободы. В дальнейшем за фронтом У. в. происходит релаксация – энергия молекул перераспределяется между всеми степенями свободы в соответствии с новой температурой. В У. в., за фронтом к-рых газ сильно ионизован или к-рые распространяются по плазме, происходит нагрев только ионов, температура же электронов не изменяется. Выравнивание температур электронов и ионов происходит медленно вследствие большого различия их масс. Такая плазма, в к-рой температура электронов отлична от температуры ионов, называется неизотермической. Теплопроводность электронов значительно выше теплопроводности ионов, поэтому электроны частично нагреваются перед У. в.

Если рассматриваются расстояния, превосходящие длину релаксации, то за фронтом У. в. устанавливается равновесие между всеми степенями свободы. У. в., в к-рых температура повышается настолько, что происходит химич. реакция, называются волнами детонации. Условия эволюционности волн детонации обычно имеют вид:

$$v_{n1} > a_1,\ v_{n2} = a_2.$$

Второе из этих соотношений называется условием Чепмена – Жуге.

Магнитогидродинамические У. в. В электропроводной среде при наличии внешнего магнитного поля $\boldsymbol{B}$ распространяются магнитогидродинамич. У. в. На поверхности магнитогидродинамич. У. в. выполняется закон сохранения массы. Что же касается законов сохранения импульса и энергии, то в них следует учесть импульс и энергию магнитного поля:

$$\Delta\left(p+\rho v_n^2+\frac{B_t^2}{8\pi}\right)=0,$$

$$\Delta\left(\rho v_n \boldsymbol{v}_t-\frac{B_n \boldsymbol{B}_t}{4\pi}\right)=0,$$

$$\Delta\left[\rho v_n\left(\frac{v^2}{2}+w\right)+\frac{B^2 v_n-B_n(\boldsymbol{vB})}{4\pi}\right]=0$$

(B_n и $\boldsymbol{B}_t$ – нормальная и тангенциальная компоненты магнитного поля). Кроме того, на поверхности магнитогидродинамич. У. в. сохраняется поток магнитного поля:

$$\Delta\,(B_n \boldsymbol{v}_t - v_n \boldsymbol{B}_t)=0,$$

а также выполняется закон отсутствия магнитных зарядов:

$$\Delta\, B_n=0.$$

Как и в обычной гидродинамике, число граничных условий на поверхности магнитогидродинамич. У. в. (равное восьми) совпадает с числом магнитогидродинамич. переменных v_n, $\boldsymbol{v}_t$, B_n, $\boldsymbol{B}_t$, p, ρ.

Возможны следующие типы магнитогидродинамич. разрывов.

1) Разрывы, покоящиеся относительно среды:

$$v_{n1}=v_{n2}=0.$$

На таких разрывах непрерывны скорость среды, напряженность магнитного поля и давление:

$$\Delta \boldsymbol{v}=\Delta \boldsymbol{B}=\Delta p=0;\ \Delta\rho\neq 0.$$

Эти разрывы называют контактными.

Разрывы, движущиеся относительно среды, разделяются на два различных типа в зависимости от того, изменяется плотность среды на разрыве или нет.

2) Разрывы, движущиеся относительно среды, на к-рых плотность среды не меняется:

$$v_n\neq 0;\ \Delta\rho=0.$$

Такой разрыв движется относительно среды впереди и позади него с альфвеновской скоростью

$$v_{n1}=v_{n2}=B_n/\sqrt{4\pi\rho}\,.$$

Этот разрыв называют альфвеновским. На альфвеновском разрыве модуль вектора напряженности магнитного поля $\boldsymbol{B}$ не изменяется:

$$\Delta\,|\boldsymbol{B}|=0,$$

а сам вектор только поворачивается вокруг нормали к поверхности разрыва на нек-рый угол. Поэтому альфвеновский разрыв называют также вращательным. На этом разрыве нормальная компонента скорости среды v_n остается неизменной, а тангенциальная компонента $\boldsymbol{v}_t$, то есть поперечная, изменяется. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, альфвеновский разрыв называют также поперечным. На альфвеновском разрыве непрерывны все термодинамич. величины:

$$\Delta S=\Delta p=0$$

(S – удельная энтропия). Обычно альфвеновский разрыв не является плоскополяризованным, то есть векторы $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ и нормаль к поверхности разрыва не лежат в одной плоскости, за исключением случая, когда вектор магнитной индукции поворачивается на разрыве вокруг нормали на 180 °.

3) Разрывы, движущиеся относительно среды, на к-рых плотность среды изменяется:

$$v_n\neq 0,\ \Delta\rho\neq 0.$$

На этих разрывах энтропия возрастает

$$\Delta S>0.$$

В обычных веществах эти разрывы являются волнами сжатия

$$\Delta\rho>0,\ \Delta p>0.$$

Их называют ударными волнами. У. в. плоскополяризованы.

Согласно условиям эволюционности существуют два типа магнитогидродинамич. У. в.:

быстрые ударные волны, для к-рых

$$v_{n1}>V_{F1};\ V_{A2}<v_{n2}<V_{F2};$$

медленные ударные волны, для к-рых

$$V_{S1}<v_{n1}<V_{A1};\ v_{n2}<V_{S2}.$$

Здесь V_F, V_S и V_A – фазовые скорости быстрой, медленной и альфвеновской волн бесконечно малой амплитуды, распространяющихся в направлении нормали к поверхности разрыва. В предельном случае слабой интенсивности У. в. (малые скачки всех величин) быстрые У. в. распространяются со скоростью V_F, а медленные – со скоростью V_S.

На магнитогидродинамич. У. в. тангенциальное магнитное поле $\boldsymbol{B}_t$ не изменяет направления (на противоположное); на быстрых У. в. $|\boldsymbol{B}_t|$ увеличивается, а на медленных уменьшается. В случае идеального газа максимальное сжатие ρ_2/ρ_1, как и в обычной гидродинамике, не может превысить значение $(\gamma+1)/(\gamma-1)$.

Лит.: [1] Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковые течения и ударные волны, пер. с англ., М., 1950; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Гидродинамика, 3 изд., М., 1986; [3] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М., 1966.

В. П. Демуцкий, Р. В. Половин.

УДАРНЫЙ ИМПУЛЬС – см. *Импульс силы, Удар.*

УДЕРЖАНИЕ кварков – см. *Конфайнмент* кварков.

УДЕРЖАНИЯ ГИПОТЕЗА – см. *Калибровочное поле.*

УДЕРЖИВАЮЩАЯ СВЯЗЬ – см. *Связи механические.*

УЕДИНЕННАЯ ВОЛНА – см. *Кортевега – де Фриса уравнение.*

УЗЕЛ – один из видов *особых точек* дифференциального уравнения. Все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности такой особой точки, входят в нее. Рассматривают различные типы У.: а) обычный узел – все интегральные кривые входят в особую точку, касаясь (кроме одной кривой) одного направления (рис. 1); б) вырожденный узел – все без исключения интегральные кривые проходят через особую точку, касаясь одного направления (рис. 2); в) особый узел (дикритический) – всякое направление является направлением входа в начало координат (рис. 3).

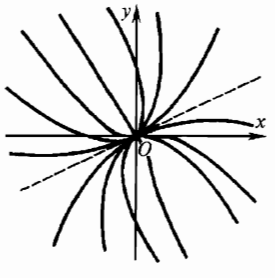


Рис. 1. Обычный узел.

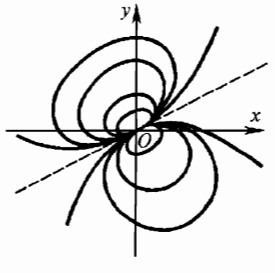


Рис. 2. Вырожденный узел.

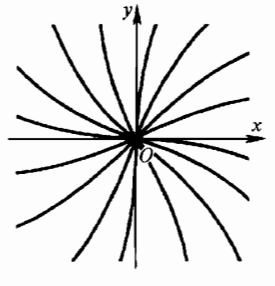


Рис. 3. Особый узел.

В. И. Битюцков.

УЗЛОВ ЛИНИЯ – см. *Эйлера углы.*

УИЗЕМА МЕТОД усреднения, нелинейный метод ВКБ,– метод построения быстроосциллирующих асимптотических решений вида

$$u = f\left(\frac{S(x,t)}{h}, x, t, h\right)$$

(волновых пакетов), нелинейных уравнений с частными производными с малым параметром h. Фаза $S(x, t)$ и $f(\tau, x, t, h)$ – гладкие функции,

$$f = f_0(\tau, x, t) + hf_1(\tau, x, t) + \ldots,$$

f_k – 2π-периодичны по аргументу τ. Функции $S, f_0, f_1, \ldots$ определяются в результате подстановки u в соответствующее уравнение, приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях h к нулю и учета требования 2π-периодичности f_k. Напр., для нелинейного волнового уравнения (см. [2]–[6])

$$h^2(u_{tt} - \nabla^2 u) + \mathscr{F}_u'(u, x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

соотношения, связывающие $S, f_0, f_1, \ldots$, имеют вид системы обыкновенных по τ дифференциальных уравнений, содержащей x и t как параметры

$$m\frac{\partial^2 f_0}{\partial \tau^2} + \mathscr{F}_u'(f_0, x) = 0, \quad m = S_t^2 - (\nabla S)^2, \tag{1}$$

$$Lf_k \stackrel{\text{def}}{\equiv} m\frac{\partial^2 f_k}{\partial \tau^2} + \mathscr{F}_{uu}''(f_0, x) f_k = R_k. \tag{2}$$

Здесь x, t и τ считаются независимыми переменными, R_k – функции от $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$, S_t, ∇S и их производных. Решение уравнения (2) представляется в виде

$$f_0 = g(\tau + P(x, t), E(x, t), x),$$

где P, $E \equiv mg_\tau^2 + \mathscr{F}(g, x)$ – константы интегрирования.

Пусть при каждых $(x, E) \in \mathbb{R} \times [E_0, E_1]$ $g(\tau, E, x)$ – периодич. функция τ; ее период

$$T(S_t, \nabla S, E, x) = 2\sqrt{m}\int_{g_-}^{g_+} \frac{dg}{\sqrt{E - \mathscr{F}(g, x)}},$$

$g_\pm(E, x)$ – нули $E - \mathscr{F}(g, x)$. Требование

$$T(S_t, \nabla S, E, x) = 2\pi \tag{3}$$

приводит к соотношению, связывающему S и E (уравнению Гамильтона – Якоби для S в линейной теории). Требование существования у (2) при $k = 1$ 2π-периодич. решения, эквивалентное условию ортогональности в $L_2[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} R_0 f_{0\tau}\, d\tau$$

функции $f_{0\tau}$, принадлежащей ядру самосопряженного оператора L, вместе с (3) образуют замкнутую систему уравнений, связывающую S и E. Требование 2π-периодичности функций f_k при $k = 2$ приводит к уравнению для поправки к фазе P и при $k > 2$ – констант интегрирования, возникающих при нахождении f_{k-2}. Другие способы получения уравнений для S и E основываются на осреднении законов сохранения и вариационных принципах (см. [2], [4], [5]). Часто бывает удобно вместо S и E использовать другие функции, параметризующие главный член асимптотич. решения $f_0(S/h, x, t)$. Система (1), (2) описывает динамику одноатомного газа (см. [6]), для этой и подобных систем, возникающих при определении, имеется гамильтонов формализм (см. [7]); в ряде случаев они оказываются интегрируемыми (см. [8]). Для нек-рых нелинейных уравнений могут быть получены многофазовые асимптотики (тогда $S = (S_1(x, t), \ldots, S_l(x, t))$ – векторнозначна (см. [2], [4], [9], [10]), теория возмущений существенно усложняется из-за резонансов (см. [10]).

Лит.: [1] Whitham G. B., «Proc. Roy. Soc.», 1965, A283, № 1393, p. 238–61; [2] его же, Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; [3] Luke J. C., «Proc. Roy. Soc.», 1966, A292, № 1430, p. 403–12; [4] Доброхотов С. Ю., Маслов В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 15, М., 1980, с. 3–94; [5] Скотт Э., Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике, пер. с англ., М., 1977; [6] Маслов В. П.,«Теоретич. и математич. физика», 1969, № 3, с. 378–83; [7] Дубровин Б. А., Новиков С. П., «Доклады АН СССР», 1983, т. 270, № 4, с. 781–85; [8] Царев С. П., там же, 1985, т. 282, № 3, с. 534–37; [9] Flaschka H., Forest M., McLaughlin D., «Comm. Pure and Appl. Math.», 1980, v. 33, № 6, p. 739–78; [10] Доброхотов С. Ю., «Математич. заметки», 1988, т. 44, № 4, с. 551–55.

С. Ю. Доброхотов.

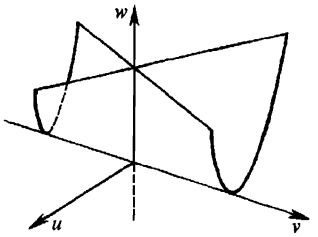
УИЛЛЕРА – ДЕ ВИТТА УРАВНЕНИЕ – см. *Квантовая теория гравитации.*

УИТНИ ЗОНТИК, зонтик Кэли,– особая алгебраическая поверхность в трехмерном пространстве, заданная в координатах (u, v, w) уравнением (см. рис.):

$$u^2 = wv^2.$$

Является единственной, если не считать точек двух- и трехкратного трансверсального самопересечения, устойчивой особенностью образа отображения плоскости в трехмерное пространство. Задается параметрически отображением:

$$(x, y) \mapsto (xy, y, x^2).$$



Зонтик Уитни.

С У. з. начинается серия устойчивых особенностей отображений, имеющих в прообразе коранг 1 (особенности Морена). Он используется в алгебраич. геометрии, дифференциальной топологии, теории ветвящихся интегралов при описании малых устойчивых шевелений сложных особенностей поверхностей. У. з. встречается во многих классификационных задачах. Напр., он является: одной из нормальных форм типичных бикаустик в $\mathbb{R}^3$; одной из компонент каустики простой краевой особенности F_4; одной из компонент нек-рых бифуркационных диаграмм трехпараметрич. уплощений проективных кривых и т. д. (см. [1]). С помощью специальных гладких отображений устанавливается гомеоморфизм У. з. и *ласточкина хвоста, сложенного зонтика Уитни.*

См. также *Катастроф теория.*

Лит.: [1] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Лящко О. В., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, тт. 6, 39, М., 1988–89.

В. М. Закалюкин.

УИТНИ СБОРКА – см. *Катастроф теория.*

УИТНИ СЛОЖЕННЫЙ ЗОНТИК – см. *Сложенный зонтик Уитни.*

УКЛАДКА графа – см. *Граф.*

УКОРОЧЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ – функционал на пространстве кривых в конфигурационном пространстве. При фиксированном значении $H = h$ не зависящего от времени гамильтониана $H: T^*X \to \mathbb{R}$ движение возможно лишь в области $B_h \subset X$, состоящей из точек $q \in X$, для к-рых T_q^*X пересекает поверхность уровня гамильтониана $H = h$. Пусть $\gamma \subset B_h \setminus \partial B_h$ – гладкая (непараметризованная) кривая. Формула $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P}$ отождествляет касательное и кокасательное пространства T_qX и T_q^*X в каждой точке $q \in X$. Пусть в точке $q \in \gamma$ задан ковектор $p_h(q) \in T_q^*M$, соответствующий точке пересечения касательной прямой $T_q\gamma \subset T_qX$ к кривой γ с поверхностью уровня $H = h$. Значение У. д. на кривой γ определяется как

$$S^* = \int_\gamma p_h(q)\, dq.$$

Согласно принципу Мопертюи, экстремали функционала У. д. являются проекциями на X траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H. Принцип определяет форму траектории, но не время: для определения времени нужно воспользоваться постоянной энергии.

Пример. Для натуральной системы с $H=T+U$, где T – риманова метрика на X (кинетич. энергия), а U – функция на X (потенциальная энергия), У. д. имеет вид:

$$S^*=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(h-U)\,T}\,dt$$

и не зависит от параметризации $[t_1, t_2]\to\gamma$ кривой γ.

См. также *Гамильтона – Якоби уравнение.* *М. Э. Казарян.*

УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение* с частными производными второго порядка.

УЛЬТРАЗВУК – см. *Звуковые волны.*

УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЕ – *обобщенная функция* класса, введенного в конце 50-х – начале 60-х гг. 20 в. У., как и *Шварца распределения*, допускают локальное описание (их основные пространства обладают *разложением единицы*), но, в отличие от них, могут иметь сингулярности бесконечного порядка. На пространствах У. непрерывно действуют дифференциальные операторы бесконечного порядка (ультрадифференциальные операторы), что обусловило их активное применение при изучении дифференциальных уравнений бесконечного порядка. У. также применяются в локализуемой квантовой теории поля (см. *Локальное взаимодействие*).

Основные пространства У. бывают двух типов – Берлинга (иначе, класса (M_p)) и Румье (иначе, класса $\{M_p\}$), где определяющая последовательность положительных чисел M_p, $p=0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условиям:

(M1) $M_p^2\leqslant M_{p-1}M_{p+1}$ – логарифмич. выпуклость;

(M2) существуют постоянные A и B такие, что

$$M_p\leqslant AB^p\min_{0\leqslant q\leqslant p}M_qM_{p-q},\quad p=0,1,2,\ldots,$$

– ультрадифференцируемость;

(M3) существует постоянная C такая, что

$$\sum_{q=p+1}^{\infty}\frac{M_{q-1}}{M_q}\leqslant Cp\frac{M_p}{M_{p+1}}$$

– сильная неквазианалитичность.

Функция $\Phi(x)$, определенная и имеющая непрерывные производные всех порядков в области $\omega\subset\mathbb{R}^n$, называется ультрадифференцируемой класса (M_p) [класса $\{M_p\}$], если она при всех $h>0$ [соответственно, при нек-ром $h>0$] удовлетворяет оценке: для всякого компакта $K\subset\omega$ существует постоянная C такая, что

$$|D^\alpha\Phi(x)|\leqslant Ch^{|\alpha|}M_{|\alpha|},\ x\in K,\ |\alpha|=0,1,2,\ldots,$$

где мультииндекс $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_i=\partial/\partial x_i$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Через $\mathscr{E}^{(M_p)}(\omega)$ [через $\mathscr{E}^{\{M_p\}}(\omega)$] обозначается пространство всех ультрадифференцируемых функций класса (M_p) [соответственно, класса $\{M_p\}$] в области ω, а через $\mathscr{D}^{(M_p)}(\omega)$ [через $\mathscr{D}^{\{M_p\}}(\omega)$] обозначается пространство всех функций из $\mathscr{E}^{(M_p)}(\omega)$ [соответственно, из $\mathscr{E}^{\{M_p\}}(\omega)$], имеющих компактный носитель. Все введенные пространства наделяются естественными локально выпуклыми топологиями. Линейные непрерывные функционалы на $\mathscr{D}^{(M_p)}(\omega)$ [на $\mathscr{D}^{\{M_p\}}(\omega)$] называются ультрараспределениями Берлинга (соответственно, ультрараспределениями Румье) класса M_p.

Для всякой области ω в пространстве $\mathscr{D}^{(M_p)}(\omega)$, а значит и во всех остальных [заметим, что $\mathscr{D}^{(M_p)}(\omega)\subset\mathscr{D}^{\{M_p\}}(\omega)$], есть разложение единицы. Это позволяет развить для У. теорию, аналогичную теории распределений Шварца. На пространствах У. действуют ультрадифференциальные операторы класса (M_p) [класса $\{M_p\}$], имеющие вид:

$$P(D)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha D^\alpha,$$

где коэффициенты a_α удовлетворяют оценке

$$|a_\alpha|\leqslant CL^{|\alpha|}/M_{|\alpha|},\ |\alpha|=0,1,2,\ldots,$$

с нек-рыми L, $C>0$ [соответственно, для всех L, $C>0$]. Пусть область $O\Subset\omega$ (то есть O ограничена и замыкание $\overline{O}\subset\omega$), тогда всякое У. $g\in\mathscr{D}^{(M_p)'}(\omega)$ [У. $g\in\mathscr{D}^{\{M_p\}'}(\omega)$] имеет представление

$$(g,\varphi)=\int G(x)P(D)\varphi(x)\,d^nx,\ \varphi\in\mathscr{D}^{(M_p)}(O)\ \left[\varphi\in\mathscr{D}^{\{M_p\}}(O)\right],$$

где $G(x)$ – непрерывная в O функция, $P(D)$ – ультрадифференциальный оператор класса (M_p) [соответственно, класса $\{M_p\}$].

Лит.: [1] Komatsu H., «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.», 1973, v. 20, p. 25–105. *В. В. Жаринов.*

УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены Гегенбауэра,– многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x)=(1-x^2)^{\lambda-1/2};$$

частный случай *Якоби многочленов* при $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$ $(\lambda>-1/2)$; *Лежандра многочлены* $P_n(x)$ – частный случай У. м.: $P_n(x)=P_n(x,1/2)$.

Для У. м. принята стандартизация

$$P_n(x,\lambda)\equiv C_n^{(\lambda)}(x)=\frac{(-2)^n}{n!}\frac{\Gamma(n+\lambda)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2n+2\lambda)}(1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]$$

и имеет место представление

$$C_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{\Gamma(n-k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

У. м. являются коэффициентами разложения в степенной ряд производящей функции

$$\frac{1}{(1-2xw+w^2)^\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(\lambda)}(x)\,w^n.$$

У. м. $C_n^{(\lambda)}(x)=y$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$(1-x^2)\,y''-(2\lambda+1)\,xy'+n(n+2\lambda)\,y=0.$$

Наиболее употребительны формулы

$$(n+1)C_{n+1}^{(\lambda)}(x)=2(n+\lambda)xC_n^{(\lambda)}(x)-(n+2\lambda-1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

$$C_n^{(\lambda)}(-x)=(-1)^nC_n^{(\lambda)}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[C_n^{(\lambda)}(x)\right]=2\lambda C_{n-1}^{(\lambda+1)}(x),$$

$$C_n^{(\lambda)}(\pm1)=(\pm1)^n\frac{2\lambda(2\lambda+1)\ldots(2\lambda+n-1)}{n!}.$$

П. К. Суетин.

УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ РАСХОДИМОСТЬ – термин, указывающий на некорректность определения квантовополевых величин в рамках формального применения метода теории возмущений. Если выразить фейнмановскую диаграмму через фейнмановский интеграл по петлевым 4-мерным импульсам (см. *Фейнмана диаграмма*), то У. р. проявятся в виде его *расходимости* в области больших импульсов.

У. р. обусловлены локальным характером взаимодействия квантовых полей. В качестве математич. причины У. р. можно назвать некорректность перемножения пропагаторов (причинных функций свободных полей), из к-рых «строятся» фейнмановские амплитуды (диаграммы) и к-рые представляют собой обобщенные функции. Ведущая особенность скалярного пропагатора в координатном пространстве (то есть фурье-образа от пропагатора $\frac{1}{(m^2-k^2-i0)}$ в импульсном пространстве) имеет вид: $\frac{1}{x^2-i0}$, где $x^2=(x^0)^2-\boldsymbol{x}^2$, $x=(x^0, \boldsymbol{x})$.

Для характеристики У. р. используется индекс расходимости – величина, отрицательность к-рой обеспечивает их отсутствие. Напр., для связных диаграмм он равен

$$\omega = 4\mathfrak{R} - 2L + \sum_l n_l,$$

где $\mathfrak{R}=L-V+1$ – число независимых циклов (петель), L и V – соответственно, число линий и вершин диаграммы, а n_l – степень полинома, к-рый стоит в числителе пропагатора, соответствующего l-й линии. Аналогично он определяется для поддиаграмм исходной диаграммы:

$$\omega_\gamma = 4\mathfrak{R}_\gamma - 2L_\gamma + \sum_{l\in\gamma} n_l$$

(поддиаграмма γ состоит из нек-рого подмножества линий исходной диаграммы Γ и вершин, им инцидентных). Если в фейнмановской диаграмме $\omega_\gamma<0$ для всех поддиаграмм γ, включая саму диаграмму, то У. р. отсутствуют, то есть диаграмма ультрафиолетово конечна. У. р. могут порождаться только одночастично неприводимыми (сильно связными) подграфами, то есть такими, к-рые нельзя разбить на несвязные части удалением какой-либо линии. Поэтому условие $\omega_\gamma<0$ достаточно проверить лишь для поддиаграмм этого класса.

Чтобы придать смысл ультрафиолетово расходящимся фейнмановским амплитудам (диаграммам), используется стандартный прием, основанный на введении регуляризации. Вместо (бессмысленной) расходящейся величины рассматривается регуляризованная, к-рая при стремлении параметра регуляризации к своему предельному «физическому» значению превращается в исходную фейнмановскую амплитуду. В результате информация об У. р. выражается в сингулярных свойствах регуляризованных величин по параметрам регуляризации. Напр., аналитическая регуляризация состоит в замене скалярного пропагатора

$$\frac{1}{m^2-p^2-i0} \quad \text{на} \quad \frac{1}{(m^2-p^2-i0)^{\lambda+1}},$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ – регуляризующий параметр. Другим примером регуляризации с комплексным параметром является размерная регуляризация, основанная на использовании комплексной размерности пространства-времени. При вычислениях фейнмановских диаграмм она сводится рецептурно к замене в используемых формулах размерности пространства-времени $d=4$ на $d\in\mathbb{C}$. Аналитически или размерно регуляризованные фейнмановские диаграммы представляют собой мероморфные функции регуляризующих параметров, а наличие У. р. отражается в полюсах по параметрам λ и $\varepsilon=(4-d)/2$, характеризующим отклонение параметров регуляризации от физич. значений (соответственно, $\lambda=0$ и $d=4$). Регуляризация У. р. достигается также с помощью обрезания на верхнем пределе фейнмановских интегралов по 4-мерным петлевым импульсам. Кроме того, применяется регуляризация Паули – Вилларса, состоящая в замене

$$\frac{1}{m^2-p^2-i0} \quad \text{на} \quad \frac{1}{m^2-p^2-i0}-\frac{1}{M^2-p^2-i0}.$$

У. р. устраняются *перенормировкой* (R-операцией). Конкретный выбор процедуры перенормировки фиксирует перенормировочную схему (схему вычитаний). Физич. требование, предъявляемое к любой перенормировочной схеме, состоит в том, что устранение У. р. должно быть эквивалентным переопределению (перенормировке) параметров лагранжиана: констант взаимодействия, масс и констант перенормировки волновой функции.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979; [3] Иксон К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., М., 1984; [4] Коллинз Дж., Перенормировка, пер. с англ., М., 1988; [5] Смирнов В. А., Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд, М., 1990. *В. А. Смирнов.*

УМЕРЕННОГО РОСТА МЕРА – см. *ДЛР-уравнения.*

УМЕРЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, обобщенная функция медленного роста,– линейный непрерывный функционал на основном пространстве (см. *Обобщенная функция*) $\mathcal{S}$, состоящем из всех функций $\Phi(x)$, имеющих непрерывные производные $D^\alpha\Phi(x)$ всех порядков, с конечными нормами

$$|\Phi| = \sup\{|D^\alpha\Phi(x)|(1+|x|)^p;\ |\alpha|\leqslant p,\ x\in\mathbb{R}^n\},$$

$p=0, 1, 2, \ldots$, с топологией пространства Фреше, задаваемой этими нормами. Здесь мультииндекс $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $D_j=\partial/\partial x_j$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$. Основное пространство $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (см. *Шварца распределение*) плотно и непрерывно вложено в $\mathcal{S}$, так что $\mathcal{S}'\subset\mathcal{D}'$, то есть каждое У. р. есть распределение Шварца.

У. р. были введены Л. Шварцем (L. Schwartz) в конце 40-х гг. 20 в. Они широко применяются в теории линейных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами, в аксиоматической квантовой теории поля и в ряде областей математич. физики.

Каждое У. р. имеет конечный порядок, то есть для всякого $g\in\mathcal{S}'$ существуют мультииндекс α и непрерывная функция $G(x)$ медленного роста (последнее означает, что

$$\int\frac{|G(x)|}{(1+|x|)^p}d^nx<\infty$$

для нек-рого числа p) такие, что

$$(g,\Phi)=\int G(x)D^\alpha\Phi(x)\,d^nx,\quad \Phi\in\mathcal{S}.$$

У. р. с носителем, ограниченным со стороны конуса. Пусть Γ – острый замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле. И пусть $\mathcal{S}'_{\Gamma_+}$ – множество всех У. р. $g\in\mathcal{S}'$, носители $\operatorname{supp} g$ к-рых ограничены со стороны Γ, то есть $\operatorname{supp} g\subset\Gamma+K$, где $K=K(g)$ – компакт в $\mathbb{R}^n$. Каждое У. р. $g\in\mathcal{S}'_{\Gamma_+}$ однозначно продолжается до линейного непрерывного функционала на основном пространстве $\mathcal{S}(\Gamma_+)$, состоящем из всех функций $\Phi(x)$, имеющих непрерывные производные всех порядков в $\mathbb{R}^n$ и конечные нормы

$$|\Phi| = \sup\{|D^\alpha\Phi(x)|(1+|x|)^p;\ |\alpha|\leqslant p,\ x\in\Gamma+K\},$$

для всех $p=0, 1, 2, \ldots$, и компактов $K\subset\mathbb{R}^n$, с топологией пространства Фреше, задаваемой этими нормами. Более того, можно положить $\mathcal{S}'_{\Gamma_+}=\mathcal{S}'(\Gamma_+)$. Пространство $\mathcal{S}'_{\Gamma_+}$ содержит подпространство $\mathcal{S}'_\Gamma$, состоящее из У. р., носители к-рых лежат в конусе Γ.

На $\mathcal{S}'$ определено *Фурье преобразование* обобщенной функции, на нем действуют линейные дифференциальные операторы конечного порядка.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, 2 изд., М., 1959; [3] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1–2, P., 1950–51 (nouv. éd., P., 1978). *В. В. Жаринов.*

УМНОЖЕНИЕ обобщенных функций – операция над *обобщенными функциями*, сохраняющая основные свойства поточечного умножения функций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и т. д.) и в случае регулярных обобщенных функций совпадающая с поточечным

умножением. Такое У. противоречит определению обобщенной функции как линейного функционала и в большинстве стандартных пространств невозможно.

Пример Л. Шварца (L. Schwartz):

$$0 = 0 \cdot p\frac{1}{x} = (x \cdot \delta(x)) \cdot p\frac{1}{x} \neq \delta(x) \cdot \left(x \cdot p\frac{1}{x}\right) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x)$$

показывает, что У. обобщенных функций не определено в пространстве распределений Шварца $\mathscr{D}'$. Многочисленные попытки построения У. обобщенных функций мотивируются нуждами приложений в квантовой теории поля, в теории нелинейных дифференциальных уравнений, при описании ударных волн и т. д. Основной способ определения У. обобщенных функций – использование *регуляризации* обобщенной функции, когда произведение $f \cdot g$ обобщенных функций f и g определяется как предел произведений их регуляризаций f_ν и g_ν, то есть полагают, по определению,

$$(f \cdot g, \Phi) = \lim_{\nu \to \infty} (f_\nu g_\nu, \Phi), \quad \Phi \in \mathscr{F}.$$

В специальных классах обобщенных функций такой предел существует и приводит к корректной операции умножения (наиболее известный пример – одночастотные функции в квантовой теории поля, и его развитие – граничные значения аналитич. функций из *Владимирова алгебр*). В большинстве случаев такой предел существует лишь на нек-ром подпространстве из $\mathscr{F}$ и требует доопределения на всем $\mathscr{F}$. Такое доопределение целиком диктуется решаемой прикладной задачей и может быть далеко нетривиальным.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984.

В. В. Жаринов.

УНИМОДУЛЯРНАЯ ГРУППА – локально компактная группа G, на которой существует двусторонне инвариантная *Хаара мера*. Группа Ли унимодулярна тогда и только тогда, когда все операторы присоединенного представления этой группы имеют определитель 1. В частности, унимодулярны все полупростые и все нильпотентные группы Ли.

См. также *Инвариантное интегрирование.* *Ю. А. Неретин.*

УНИТАРНАЯ КАЛИБРОВКА – см. *Кулоновская калибровка.*

УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ – приближенная симметрия, присущая сильному взаимодействию элементарных частиц, являющаяся обобщением изотопической симметрии (см. *Изотопическая инвариантность*), и, как последняя, нарушающаяся электромагнитными и слабыми взаимодействиями. У. с. отражает приближенную симметрию *адронов* относительно изменения изотопич. спина и странности и математически описывается группой $SU(3)$. У. с. объединяет в унитарные мультиплеты частицы, принадлежащие к различным изотопич. мультиплетам и обладающие разными значениями странности, но одинаковым спином J и внутренней четностью P и не сильно различающимися массами. Напр., изотопич. дублет нуклонов, изотриплет Σ-гиперонов, изосинглет Λ^0 и изодублет Ξ-гиперонов объединяются в унитарный декуплет $J = 1/2$, $P = +1$.

В основе $SU(3)$-симметрии лежат независимость энергии взаимодействия от типа образующих адроны *кварков* (u, d, s, ...) и малые значения эффективных масс этих кварков по сравнению с массами адронов.

Учет дополнительных квантовых чисел («очарования», «красоты» и т. п.) приводит к дальнейшему повышению размерности n матриц, составляющих унитарную группу $SU(n)$. *Д. В. Ширков.*

УНИТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ перестановочных соотношений – см. *Перестановочных соотношений представления, Перестановочных соотношений представления унитарно эквивалентные.*

УНИТАРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы Ли G в гильбертовом пространстве – *представление* T такое, что все операторы T_g унитарны и матричные элементы представления T непрерывны (последнее во всех интересных случаях выполнено автоматически). Полная классификация У. п. групп получена для нильпотентных, ручных, разрешимых и многих классич. групп, в частности для $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{H})$, $O(n, 1)$, $U(n, 1)$, $Sp(n, 1)$ и др.

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Штерн А. И., Представления групп Ли, М., 1982.

Ю. А. Неретин.

УНИТАРНОСТИ УСЛОВИЕ матрицы рассеяния – одно из ограничений, налагаемых на *рассеяния матрицу*, заключающееся в том, что она должна представлять собой *унитарный оператор*. В физич. смысле У. у. есть условие равенства единице суммы вероятностей всех возможных процессов, происходящих в системе. Напр., два сталкивающихся протона могут либо упруго рассеяться друг на друге, либо породить один или несколько π-мезонов или пару протон-антипротон и т. д.; сумма вероятностей всех таких процессов, допустимых законами сохранения энергии, импульса, электрич. и барионного зарядов и т. д., согласно У. у., равна единице. У. у. – одно из основных составляющих элементов теории рассеяния и *дисперсионных соотношений метода*. Частным случаем У. у. является *оптическая теорема*, связывающая мнимую часть амплитуды упругого рассеяния на нулевой угол с полным сечением рассеяния.

А. В. Ефремов.

УНИТАРНЫЙ АНСАМБЛЬ – см. *Дайсона распределение.*

УНИТАРНЫЙ ОПЕРАТОР – *линейный оператор* $U: H \to H'$, осуществляющий изоморфизм гильбертовых пространств H и H'; иногда У. о. называют линейное изометрическое отображение банахова пространства X на банахово пространство X'. У. о. U в гильбертовом пространстве H имеет $\mathscr{D}(U) = \mathscr{R}(U) = H$ и $(Ux, Uy) = (x, y)$ для всех $x, y \in H \Leftrightarrow U$ – нормальный обратимый элемент в $\mathscr{B}(H)$ с характеристич. свойством

$$U^* = U^{-1} \Leftrightarrow \text{спектр } \sigma(U) \subset \mathbb{T} = \{e^{i\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

и имеет место спектральное разложение

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} E(d\lambda) \Leftrightarrow U = \exp\{iA\}$$

с единственным самосопряженным A. Множество $\mathscr{U}(H)$ У. о. в H – группа по умножению, на ней совпадают сильная и слабая топологии операторов. Любой $B \in \mathscr{B}(H)$ с $\|B\| < 1$ является выпуклой комбинацией У. о.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., Харьков, 1978; [2] Рисс Ф., Секефальви-Надь В., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [3] Dixmier J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2 éd., P., 1969.

А. В. Булинский.

УНИЧТОЖЕНИЯ ОПЕРАТОР – см. *Вторичное квантование.*

УОРДА ТОЖДЕСТВА – соотношения между *Грина функциями* в квантовой электродинамике, следующие из калибровочной инвариантности действия. Впервые получены Дж. Уордом (J. Ward, 1950), затем в более общей форме Е. С. Фрадкиным (1955) и Я. Такахаши (Y. Takahashi, 1957).

А. А. Славнов.

УПОРЯДОЧЕННАЯ ФАЗА – см. *Дальний и ближний порядок.*

УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Основное кинетическое уравнение.*

УПРАВЛЯЮЩИЙ КВАНТОВЫЙ КАНАЛ – см. *Квантовый канал.*

УПРУГИЕ ВОЛНЫ – волны в газах, жидкостях и твердых телах, обусловленные упругими свойствами этих сред, то есть способностью восстанавливать объем (газы, жидкости, твердые тела) и форму (твердые тела) при прекращении внешних воздействий.

У. в. в жидкостях и газах анализируются на основе системы *гидродинамики уравнений*, включающей уравнение Эйлера, уравнение непрерывности и уравнение термодинамич.

состояния. При этом принимается, что движение жидкости является адиабатическим, так как не учитываются процессы диссипации и теплопроводности. В случае малых отклонений давления p' и плотности ρ' от равновесных значений p_0 и ρ_0 соответственно и если скорость жидкости $\boldsymbol{v}$ мала, система имеет вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{2}$$

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_S \rho'. \tag{3}$$

В уравнении (3) производная $(\partial p/\partial \rho_0)_S$ берется при постоянной энтропии S.

В терминах потенциала скорости ($\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$) система (1)–(3) сводится к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \tag{4}$$

где $c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho_0)_S}$ – скорость У. в., связанная с локальным изменением объема жидкости.

У. в. в твердых телах исследуются на основе уравнения движения для компонент вектора смещения элемента среды из равновесного состояния u_i:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + X_i, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где σ_{ik} – тензор напряжений, X_i – компонента вектора внешних сил (напр., сил тяжести), x_k – эйлеровы координаты среды, ρ – плотность вещества.

Если ограничиться случаем применимости закона Гука и отсутствием внешних сил, то уравнение (5) может быть представлено в виде:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda_{ijlm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l}, \tag{6}$$

где λ_{ijlm} – тензор модулей упругости, определяющий упругие свойства кристалла.

Для изотропного неограниченного твердого тела уравнение (6) распадается на три уравнения для компонент вектора смещения:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_1^2} = 0, \quad \alpha = 2, 3. \tag{8}$$

Уравнение (7) описывает так наз. продольные У. в., для к-рых волновой вектор $\boldsymbol{k}$ параллелен смещению $\boldsymbol{u}$, уравнение (8) – поперечные У. в., для к-рых вектор $\boldsymbol{k}$ перпендикулярен смещению $\boldsymbol{u}$; c_l и c_t – продольная и поперечная скорости звука соответственно.

В случае анизотропного твердого тела (напр., кристалла) имеет место более сложная связь между направлением вектора смещения $\boldsymbol{u}$ в волне (направлением поляризации) и ее волновым вектором. При этом собственные частоты и направления поляризации определяются из уравнения

$$(\rho \omega^2 \delta_{im} - \lambda_{ijlm} k_j k_l) u_m = 0. \tag{9}$$

При анализе У. в. в ограниченных твердых телах и жидкостях уравнения (1)–(3) и (6) необходимо дополнить следующими граничными условиями:

а) на границе жидкость – жидкость:

$$p^{\mathrm{I}} = p^{\mathrm{II}},$$
$$(\boldsymbol{v}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{v}^{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{n}); \tag{10}$$

б) на границе жидкость – твердое тело:

$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) = 0,$$
$$p n_i = \sigma_{ik} n_k; \tag{11}$$

в) на границе твердое тело – твердое тело:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{II}},$$
$$\sigma_{ik}^{\mathrm{I}} n_k = \sigma_{ik}^{\mathrm{II}} n_k. \tag{12}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ – вектор нормали к границе раздела.

Уравнения (1)–(3) и (6) с граничными условиями (10)–(12) описывают отражение и преломление У. в. Если отсутствуют внешние силы, приложенные к поверхности твердого тела, то граничное условие (12) приобретает вид:

$$\sigma_{ik} n_k = 0. \tag{13}$$

Уравнение упругости (6) с граничным условием (13) описывает поверхностные волны в твердом теле (волны Рэлея).

Уравнения макроскопич. теории упругости описывают У. в., длина волны λ к-рых значительно больше межатомных расстояний a. В случае кристаллич. твердых тел, когда $\lambda \geqslant a$, У. в. описываются системой дифференциально-разностных уравнений

$$m \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_n}{\partial t^2} + \Lambda(\boldsymbol{u}_{n+1} + \boldsymbol{u}_{n-1} - 2\boldsymbol{u}_n) = 0, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{u}_n$ – смещение n-го атома из положения равновесия, m – масса атома, Λ – упругая постоянная [уравнение (14) выписано в приближении взаимодействия только между ближайшими соседями].

В силу трансляционной симметрии твердого тела уравнение (14) для кристалла с простой кубич. решеткой имеет решение

$$\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}_0 e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_n},$$

где $\boldsymbol{r}_n$ – радиус вектор n-го атома. Частота У. в. связана с волновым вектором соотношением:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_0^2 \sin^2(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{k}_i),$$

где $\boldsymbol{a}_i$ – векторы прямой решетки. Периодич. зависимость частоты от волнового вектора является общим свойством волн в средах с периодич. структурой.

Благодаря диссипативным процессам У. в. как в жидкостях, так и в твердых телах затухают. Процессы затухания можно описать, введя силы трения в уравнения (1)–(3), (6) или с помощью диссипативной функции. В силу изотропии и однородности пространства диссипативная функция строится из градиентов поля скоростей (если не учитывать теплопроводность):

$$q = -\frac{dE}{dt} = \eta_{iklm} v_{ik} v_{lm}, \tag{15}$$

где E – плотность энергии среды,

$$v_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right),$$

η_{iklm} – тензор вязкости (коэффициентов трения).

Сила трения $\boldsymbol{f}$ связана с q соотношением

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial (\partial v_i / \partial x_k)} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma'_{ik}.$$

Здесь σ'_{ik} – тензор вязких напряжений. В случае жидкости

$$\boldsymbol{f}_{\text{ж}} = \eta \Delta \boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

η и ζ – коэффициенты первой и второй вязкости.

В случае изотропного твердого тела сила трения имеет тот же вид, что и для жидкости. Число независимых коэффициентов трения кристалла определяется точечной группой симметрии этого кристалла.

При рассмотрении волн с немалой амплитудой необходимо учитывать нелинейные члены в уравнениях движения. С ними связано образование *ударных волн* и других типов нелинейных волн.

Лит.: [1] Лайтхилл Дж., Волны в жидкостях, пер. с англ., М., 1981; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Гидродинамика, 3 изд., М., 1986; [3] их же, Теория упругости, 4 изд., М., 1987; [4] Федоров Ф. И., Теория упругих волн в кристаллах, М., 1965.

И. В. Барьяхтар.

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ – см. *Рассеяния теория.*

УПРУГОСТИ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ – система дифференциальных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния упругого тела. Существуют две классич. формы таких уравнений: в перемещениях и напряжениях.

В перемещениях для описания равновесия изотропной линейной упругой среды они представляют собой систему трех дифференциальных уравнений относительно трех компонент u_i, $i=1, 2, 3$, вектора перемещений $\boldsymbol{u}$:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i+X_i=0, \qquad (1)$$

где θ – относительное изменение объема:

$$\left(\theta=\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right),$$

x_i – компоненты вектора заданных объемных сил (напр., сил тяжести).

Уравнения (1) установил Г. Ламе (G. Lamé, 1852); «упругие постоянные» λ, μ называются постоянными Ламе. Впервые уравнения (1) получил Л. Навье (L. Navier, 1821), к-рый полагал, что в изотропном теле существует только одна постоянная ($\lambda=\mu$).

Если на границе $\partial\Omega$ (представляющей собой поверхность Ляпунова) компакта $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ заданы перемещения

$$u_i|_{\partial\Omega}=u_i^0, \qquad (2)$$

то первая краевая задача теории упругости (1), (2) при

$$-1<\nu<\frac{1}{2}, \quad \nu\equiv\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \qquad (3)$$

имеет единственное решение $u_i\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, $\{X_i\in C(\overline{\Omega})$, $u_i^0\in C(\partial\Omega)\}$, причем У. т. у. (1) образуют эллиптич. систему уравнений при условии (3).

По найденному вектору перемещений $\boldsymbol{u}$ находятся компоненты тензора деформаций ε_{ij} из соотношений Коши:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

а затем и напряжения σ_{ij} по закону Гука:

$$\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}.$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

Если на границе $\partial\Omega$ с единичным вектором внешней нормали, имеющим компоненты n_i, заданы нагрузки

$$S_i^0\in C(\partial\Omega),$$

$$\sigma_{ij}n_j=S_i^0,\ \lambda\theta n_i+(\mu u_{ij}+\mu u_{ji})n_j=S_i^0,\ j=1, 2, 3, \qquad (4)$$

то вторая краевая задача (1), (4) разрешима при условиях

$$\int_\Omega \boldsymbol{X}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{S}^0\,d\Sigma=0; \quad \int_\Omega[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{X}]\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{S}^0]\,d\Sigma=0,$$

причем имеет единственное решение только при дополнительных условиях

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\,d\Omega=0, \quad \int_\Omega[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}]\,d\Omega=0,$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точек области Ω. Если на части поверхности $\partial\Omega$ заданы условия (2), а на остальной части – условия (3), краевая задача называется смешанной.

У. т. у. в напряжениях для односвязной области Ω состоят из трех уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_3}+X_i=0 \qquad (5)$$

и шести уравнений совместности в напряжениях

$$\Delta\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_j}=$$

$$=-\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}+\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right), \qquad (6)$$

к чему добавляются три граничные условия, напр. (4); здесь $\Theta\equiv\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$.

Если уравнения (5) выполняются на границе тела $\partial\Omega$, то они удовлетворяются и внутри него. Это позволяет сформулировать У. т. у. в виде шести обобщенных уравнений совместности относительно шести независимых компонент σ_{ij} симметрич. тензора напряжений при удовлетворении шести граничным условиям, в число к-рых входят уравнения (5), снесенные на границу $\partial\Omega$.

Лит.: [1] Новацкий В., Теория упругости, пер. с польск., М., 1975; [2] Тимошенко С. П., История науки о сопротивлении материалов, пер. с англ., М., 1957; [3] Победря Б. Е., Численные методы в теории упругости и пластичности, М., 1981.

Б. Е. Победря.

УРАВНОВЕШЕННЫЙ ГИРОСКОП – см. *Гироскоп.*

УРОВЕНЬ ЭНЕРГИИ – см. *Операторы.*

УРОВНЯ ЛИНИЯ – см. *Линделёфа принцип.*

УРОВНЯ ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Потенциал.*

УРСЕЛЛА ФУНКЦИИ – усеченные *Больцмана функции* $\varphi(X_n)$, определяемые из соотношения

$$\exp\{-\beta U(X_n)\}=\sum_{k=1}^n\sum_{\cup_1^k X_j=X_n}\prod_{j=1}^k\varphi(X_j),$$

где $U(X_n)$ – потенциальная энергия непрерывной n-частичной системы ($X_n=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^{dn}$). Если эта энергия выражается через парный потенциал взаимодействия $\Phi(x)$, то

$$\varphi(X_n)=\sum_\gamma\prod_{i<j}^\gamma(\exp\{-\beta\Phi(x_i-x_j)\}-1),$$

где сумма берется по всем связным графам γ с вершинами $x_1, \ldots, x_n$, а произведение – по всем ребрам графа γ.

В. И. Скрипник.

УРЫСОНА ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

УСКОРЕНИЕ – векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки по численному значению и по направлению. При прямолинейном движении точки, когда ее скорость v возрастает (или убывает) равномерно, численно У. равно

$$w=\Delta v/\Delta t,$$

где Δv – приращение скорости за промежуток времени Δt. В общем случае вектор У.

$$\boldsymbol{w}=d\boldsymbol{v}/dt=\dot{\boldsymbol{v}};$$

он направлен в сторону вогнутости траектории точки и лежит в соприкасающейся плоскости (если траектория точки – плоская кривая, то в плоскости этой кривой).

Проекции У. на прямоугольные декартовы координатные оси $Oxyz$ равны:

$$w_x=\dot{v}_x,\ w_y=\dot{v}_y,\ w_z=\dot{v}_z;$$

при этом модуль У.

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}.$$

Проекции У. на касательную и главную нормаль к траектории называют соответственно касательным (тангенциальным) w_τ и нормальным (центростремительным) w_n У.; они определяются равенствами:

$$w_\tau=dv/dt=\dot{v} \text{ и } w_n=v^2/\rho,$$

где v – численная величина скорости, ρ – радиус кривизны траектории в соответствующей ее точке. При этом

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}.$$

Касательное У. характеризует изменение скорости точки по ее численной величине, а нормальное У.– по направлению.

У. свободной материальной точки при движении по отношению к инерциальной системе отсчета связано с массой m точки и с действующей силой $\boldsymbol{F}$ равенством:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} \text{ (второй закон Ньютона).}$$

Размерность У. LT^{-2}.

Об У. вращающегося тела см. *Угловое ускорение.* *С. М. Таре.*

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ события A при условии B – вероятность того, что произойдет событие A при условии, что произошло событие B. Более подробно: пусть на вероятностном пространстве Ω (пространстве случаев или всех мыслимых исходов каких-нибудь испытаний) задано распределение вероятностей $\{\mathsf{P}(A),\ A\subset\Omega\}$. Это означает, что каждому событию (множеству) $A\subset\Omega$ приписана его вероятность $\mathsf{P}(A)$, причем так, что

$$\mathsf{P}(\Omega)=1,\ \mathsf{P}(A\cup B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B),$$

если два множества A и B не пересекаются (то есть события A и B несовместны); $A\cup B$ означает объединение множеств A и B, то есть событие, включающее и A и B. Любое фиксированное множество B такое, что $\mathsf{P}(B)>0$, можно рассматривать как новое вероятностное пространство (состоящее лишь из тех случаев, к-рые принадлежат B), и на нем можно задать новое вероятностное распределение:

$$\mathsf{P}_B(A)=\mathsf{P}(A)/\mathsf{P}(B),\ A\subseteq B.$$

Вероятность $\mathsf{P}_B(A)$ называется условной вероятностью A при условии B [часто пишут $\mathsf{P}(A|B)$]. В случае, когда множество A целиком не лежит в B, полагают

$$\mathsf{P}_A(B)=\mathsf{P}_B(A\cap B)=\frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)},$$

где $A\cap B$ – пересечение множеств A и B (то есть событие, означающее, что A и B произошли одновременно).

В случае, когда $\Omega=G\subseteq\mathbb{R}^{\nu}$ – область ν-мерного пространства, $\nu=1, 2, \ldots$, $B\subset G$ – гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^{\nu}$, а распределение $\{\mathsf{P}(A),\ A\subseteq G\}$ имеет плотность $p(x)$, условное распределение $\mathsf{P}(A|B)$ определяется формулой

$$\mathsf{P}(A|B)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\mathsf{P}(A\cap B_{\varepsilon})}{\mathsf{P}(B_{\varepsilon})}\right], \qquad (*)$$

где B_{ε} – ε-окрестность B [предел (*) существует].

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984. *Р. А. Минлос.*

УСЛОВНОЕ ГИББСОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Гиббсовские состояния.*

УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ – см. *Корреляция.*

УСЛОВНОЕ ОЖИДАНИЕ в теории операторных алгебр – проектор C^*-алгебры $\mathcal{A}$ на ее C^*-подалгебру $\mathcal{B}$, положительный и $\mathcal{B}$-линейный, то есть линейное отображение $\varepsilon\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ такое, что:

1) $\varepsilon(b)=b,\ b\in\mathcal{B}$,

2) $\varepsilon(\mathcal{A}_+)\subset\mathcal{B}_+$, где $\mathcal{A}_+=\{a\in\mathcal{A}: a=c^*c,\ c\in\mathcal{A}\}$

– конус положительных элементов *-алгебры $\mathcal{A}$,

3) $\varepsilon(ab)=\varepsilon(a)\,b,\ \varepsilon(ba)=b\varepsilon(a)$ для $a\in\mathcal{A},\ b\in\mathcal{B}$.

У. о.– вполне положительный проектор нормы 1 и если $\mathcal{A}$ имеет единицу $\mathbb{1}$, то $\varepsilon(\mathbb{1})$ – единица для $\mathcal{B}$ (см. [1]). Каждый проектор (ε) с $\|\varepsilon\|=1$ C^*-алгебры $\mathcal{A}$ на C^*-подалгебру $\mathcal{B}$ есть У. о. (см. [2]). У. о. называется точным, если $\varepsilon(a^*a)=0$ влечет $a=0$. Пусть далее $\mathcal{A}\supset\mathcal{B}$ – алгебры Неймана. У. о. $\varepsilon\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, непрерывное в w^*-топологии, называется нормальным. Для абелевой $\mathcal{A}$ с точным нормальным состоянием φ и ее подалгебры $\mathcal{B}$ существует единственное такое точное нормальное У. о. $\varepsilon\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, что φ инвариантно $(\varphi\circ\varepsilon=\varphi)$. Для неабелевой $\mathcal{A}$ такое ε, оставляющее φ инвариантным, существует тогда и только тогда, когда модулярные автоморфизмы σ_t^{φ}, ассоциированные с φ, переводят подалгебру $\mathcal{B}$ в себя (см. [3], [4]). Эта неполная аналогия с коммутативным случаем (с теорией вероятностей) мотивировала модификацию понятия У. о. (см. [5]).

Лит.: [1] Stratila Ş., Modular theory in operator algebras, Buc., 1981; [2] Tomiyama J., «Proc. Japan Acad.», 1957, v. 33, p. 608–12; [3] Takesaki M., «J. Funct. Anal.», 1972, v. 9, p. 306–21; [4] Голодец В. Я., «Функциональный анализ и его прилож.», 1972, т. 6, с. 68–69; [5] Accardi L., Cecchini C., «J. Funct. Anal.», 1982, v. 45, p. 245–73. *А. В. Булинский.*

УСЛОВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Распределение.*

УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов n-мерного тора T^n, которая в некоторой системе координат $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ на T^n $(\varphi_i\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\ i=1, \ldots, n)$ задается дифференциальными уравнениями

$$\dot{\varphi}_i=\omega_i=\text{const},\ i=1, \ldots, n.$$

Числа ω_i называются частотами У.-п. д. Вектор частот $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ определен однозначно с точностью до умножения на целочисленную $(n\times n)$-матрицу с определителем ± 1.

Если частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ У.-п. д. на торе T^n рационально независимы (часто это требование включают в определение У.-п. д.), то каждая траектория $\varphi(t)=\varphi_0+\omega t$ всюду плотна, а само движение эргодично на T^n (см. [1]). Вектор частот ω в этом случае называется частотным базисом.

Существует аналог понятия У.-п. д. для дискретных групп диффеоморфизмов тора T^n. Диффеоморфизм $A\colon T^n\to T^n$ задает У.-п. д. на T^n с дискретным временем, если в нек-рой системе координат φ

$$A\colon\varphi\mapsto\varphi+\omega.$$

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989. *М. Б. Севрюк.*

УСРЕДНЕНИЕ на непрерывном спектре – см. *Короткие волны* в быстроменяющихся средах.

УСРЕДНЕНИЯ МЕТОД, осреднения метод, – общее название для методов *возмущений теории*, основанных на принципе усреднения и идее о разделении движений на плавный дрейф и быстрые осцилляции. У. м. применяется для исследования поведения динамич. систем, отличающихся от интегрируемых малыми возмущениями.

1) Принцип усреднения. Уравнения движения систем, отличающихся от интегрируемых малыми возмущениями, часто могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{I}=\varepsilon g(I,\varphi,\varepsilon),\quad \dot{\varphi}=\omega(I)+\varepsilon f(I,\varphi,\varepsilon),\\ &I=(I_1,\ldots,I_n)\in\mathbb{R}^n,\\ &\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\ \mathrm{mod}2\pi\in T^m,\ \ 0<\varepsilon\ll 1.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Малый параметр ε характеризует величину возмущения. При $\varepsilon=0$ получают невозмущенную систему, движение в к-рой условно-периодично и происходит по торам $I=\text{const}$ с частотами $\omega(I)$. Компоненты вектора I называются медленными переменными, а компоненты φ – быстрыми переменными, или фазами. Правые части (1) 2π-периодичны по всем φ_i и предполагаются достаточно гладкими функциями всех аргументов. Предполагается, что компоненты вектора частот $\omega(I)$ не являются целочисленно линейно зависимыми тождественно по I. Систему (1) называют системой с вращающимися фазами.

Принцип (или метод) усреднения в простейшем варианте состоит в том, что для приближенного описания поведения медленных переменных I на временах порядка $1/\varepsilon$ или бо́льших систему (1) заменяют на усредненную систему

$$\dot{J}=\varepsilon G(J),\quad G(J)=(2\pi)^{-m}\oint_{T^m} g(J,\varphi,0)\,d\varphi \qquad (2)$$

(здесь $d\varphi=d\varphi_1, \ldots, d\varphi_m$). Система (2) содержит только медленно изменяющиеся переменные и потому гораздо проще

для исследования, чем (1). Принцип усреднения основан на представлении, что отброшенные при переходе от (1) к (2) члены $\varepsilon[g(I, \varphi, 0) - G(I)]$ в правой части (1) быстро осциллируют и не дают существенного вклада в эволюцию переменных I. Вопросы установления связи между поведением систем (1) и (2), то есть обоснования принципа усреднения, решены далеко не полностью.

Другой вариант принципа усреднения используется для описания движения в случаях, когда частоты приближенно удовлетворяют одному или нескольким заданным резонансным соотношениям, то есть равенствам вида $(k, \omega) = 0$ с целочисленными векторами коэффициентов $k \neq 0$; здесь (k, ω) – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Пусть Γ – подгруппа целочисленной решетки $\mathbb{Z}^m$, состоящая из принадлежащих $\mathbb{Z}^m$ линейных комбинаций (над полем рациональных чисел) векторов коэффициентов заданных резонансных соотношений, r – ранг Γ, $k^1, \ldots, k^{(m)}$ – базис в $\mathbb{Z}^m$, первые r векторов к-рого принадлежат Γ. Вместо φ_i вводят новые переменные

$$\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r) \bmod 2\pi \in T^r,$$
$$\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_{m-r}) \bmod 2\pi \in T^{m-r},$$
$$\vartheta_i = (k^{(i)}, \varphi),\ \chi_j = (k^{r+j}, \varphi).$$

Пусть R – $(r \times m)$-матрица, строками к-рой являются векторы $k^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Для приближенного описания изменения переменных I, ϑ, систему (1) заменяют на следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} &\dot J = \varepsilon G_\Gamma(J,\gamma), \quad \dot\gamma = R\omega(J) + \varepsilon R F_\Gamma(J,\gamma),\\ &G_\Gamma(J,\vartheta) = (2\pi)^{-(m-r)} \oint_{T^{m-r}} g(J,\varphi,0)\,d\chi,\\ &F_\Gamma(J,\vartheta) = (2\pi)^{-(m-r)} \oint_{T^{m-r}} f(J,\varphi,0)\,d\chi \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(надо выразить g, f через ϑ, χ и затем проинтегрировать по χ; $d\chi = d\chi_1 \ldots d\chi_{m-r}$). Система (3) называется частично усредненной с учетом резонансов из Γ. Функции G_Γ, F_Γ получаются из разложений Фурье функций g, f при $\varepsilon = 0$ отбрасыванием гармоник $\exp(i(k, \varphi))$, $k \neq \Gamma$ (нерезонансных гармоник). Переход от (1) к (3) основан на представлении, что отброшенные члены быстро осциллируют и не дают существенного вклада в эволюцию медленных переменных.

Пусть система (1) гамильтонова, близкая к интегрируемой. Гамильтониан имеет вид:

$$H = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, \varphi, y, x),$$

где φ, x – координаты, p, y – сопряженные им импульсы. Уравнения движения имеют вид (1) с $I = (p, y, x)$:

$$\dot p = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi},\ \dot y = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x},\ \dot x = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial y},\ \dot\varphi = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}. \qquad (4)$$

Применение принципа усреднения, когда нет резонансных соотношений, приводит к системе

$$\left.\begin{aligned} &\dot p = 0, \quad \dot y = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x}, \quad \dot x = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y},\\ &\mathcal{H}_1(p,y,x) = (2\pi)^{-m} \oint_{T^m} H_1(p,\varphi,y,x)\,d\varphi; \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

то есть в этом приближении эволюция p отсутствует, а для y, x получается гамильтонова система, зависящая от p как от параметра. К виду (4) приводятся уравнения движения планет вокруг Солнца, а вывод об отсутствии эволюции импульсов p известен в этой задаче как теорема Лагранжа – Лапласа об отсутствии эволюции больших полуосей планет.

2) Исключение быстрых переменных, разделение движений. В У. м. важную роль играет идея, что точную систему можно в главном приближении привести к усредненной с помощью близкой к тождественной замены переменных, и что такие замены переменных позволяют в высших приближениях с любой заданной точностью исключить из правых частей уравнений быстрые переменные и таким образом разделить быстрое и медленное движения. Процедуры исключения быстрых переменных таковы. Для системы (1), если нет резонансных соотношений, исключение быстрых переменных проводится следующим образом. Нужная замена переменных I, $\varphi \mapsto J$, ψ ищется в виде формальных рядов

$$\left.\begin{aligned} I &= J + \varepsilon u_1(J,\psi) + \varepsilon^2 u_2(J,\psi) + \ldots,\\ \varphi &= \psi + \varepsilon v_1(J,\psi) + \varepsilon^2 v_2(J,\psi) + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где u_j, v_j имеют по ψ период 2π. Замена (6) подбирается так, чтобы правые части уравнений для новых переменных не содержали быстрых фаз, то есть уравнения имели вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot J &= \varepsilon G_0(J) + \varepsilon^2 G_1(J) + \ldots,\\ \dot\psi &= \omega(J) + \varepsilon F_0(J) + \varepsilon^2 F_1(J) + \ldots. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Подстановка (6) в (7) с учетом (1) после приравнивания членов одинаковых степеней по ε дает:

$$\left.\begin{aligned} G_0(J) &= g(J,\psi,0) - \frac{\partial u_1}{\partial \psi}\omega,\\ F_0(J) &= f(J,\psi,0) + \frac{\partial \omega}{\partial J}u_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \psi}\omega,\\ G_i(J) &= X_i(J,\psi) - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \psi}\omega, \quad i \geqslant 1,\\ F_i(J) &= Y_i(J,\psi) + \frac{\partial \omega}{\partial J}u_{i+1} - \frac{\partial v_{i+1}}{\partial \psi}\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Функции X_i, Y_i определяются членами u_1, v_1, ..., u_i, v_i в разложении (6). Из первого уравнения (8) следует, что

$$\left.\begin{aligned} G_0(J) &= g_0(J) \equiv G(J),\\ u_1(J,\psi) &= \sum\nolimits_{k \neq 0} \frac{g_k(J)}{i(k,\omega(J))} \exp(i(k,\psi)) + u_1^0(J), \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где g_k, $k \in \mathbb{Z}^m$, – коэффициенты Фурье функции g при $\varepsilon = 0$, а u_1^0 – произвольная функция J. Предполагается, что знаменатели в (9) не обращаются в 0, и что ряд в (9) сходится и определяет гладкую функцию. Аналогично, из остальных уравнений (8) последовательно определяются F_0, v_1, G_i, u_{i+1}, F_i, v_{i+1}, $i \geqslant 1$.

Если оборвать ряды в (6), (7) на членах порядка ε^l, то получится укороченная система l-го приближения. В ней уравнения для J отщепляются и решаются отдельно. После этого изменение ψ определяется квадратурой. Изменение исходной переменной I в этом приближении сводится к медленному дрейфу, описываемому уравнением для J, на к-рый накладываются малые осцилляции, описываемые заменой переменных. Изменение φ представляется как вращение с медленно изменяющейся частотой, на к-рое также накладываются осцилляции. При $l = 1$ укороченная система для J совпадает с усредненной системой (2).

Если задана подгруппа Γ целочисленной решетки, определяющая возможные резонансные соотношения, то аналогично строится формальная замена переменных I, $\varphi \mapsto J$, ψ такая, что правые части дифференциальных уравнений для новых переменных зависят от ψ только через комбинации (k, ψ), $k \in \Gamma$ (см. [3]). Так полученные уравнения приближения для J, (k, ψ) совпадают с частично усредненной системой (3) при определенном выборе произвольных функций, входящих в формулы замены переменных.

Если исходная система гамильтонова, то замену переменных, исключающую зависимость правых частей от фаз, можно выбрать симплектической. Соответствующие процедуры носят название методов Линдштейна и Ньюкома (в нерезонансном случае при $n = m$), Делоне (в резонансном случае при $n = m$) и Цейпеля (в резонансном случае при $n \geqslant m$) (см. [9], [3]).

Процедуры исключения быстрых переменных в высших приближениях весьма громоздки. Разработаны варианты этих процедур, допускающие удобную реализацию при символьных вычислениях на ЭВМ (см. [7]), особенно для гамильтоновского случая (Депри – Хори метод и др.). У. м. состоит в том, что в первом приближении для описания движения используется усредненная система, а в следующих приближениях – укороченные системы, полученные с помощью процедуры исключения быстрых переменных, вместе с соответствующими заменами переменных.

3) Обоснование метода усреднения. Для обоснования У. м. устанавливаются условия, при к-рых отклонение решений точной системы от решений усредненной системы с подходящими начальными данными стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$ на интервалах времени длины порядка $1/\varepsilon$ или бóльших. Желательно также иметь оценки сверху для этих отклонений. Важны и оценки для отклонений решений точной системы от решений укороченных систем, получающихся в результате применения процедур исключения быстрых переменных. Могут иметься «плохие» начальные данные, при к-рых решение точной системы отклоняется от решения усредненной системы на величину порядка 1 за время порядка $1/\varepsilon$. В этом случае надо иметь оценки сверху для меры множества «плохих» начальных данных, а на дополнительном множестве – оценки сверху расхождения решений точной и усредненной систем. Эти задачи в настоящее время далеки от полного решения. Ниже приводятся нек-рые общие результаты в указанных направлениях.

Пусть функции ω, g, f в правых частях системы (1) определены и ограничены вместе с достаточным количеством производных в области $D\{I\} \times T^m\{\varphi\} \times [0, \varepsilon_0]$; $J(t)$ – решение усредненной системы (2) с начальным условием $I_0 \in D_0 \subset D$; $(I(t), \varphi(t))$ – решение точной системы (1) с начальным условием $(I_0, \varphi_0) \in D_0 \times T^m$. Таким образом, $I(0) = J(0)$. Предполагается, что решение $J(t)$ определено и остается на положительном расстоянии от границы области D при $0 \leqslant t \leqslant K/\varepsilon$, $K = \text{const} > 0$.

Если система (1) одночастотна ($m = 1$) и частота ω не обращается в 0 в D, то при $0 \leqslant t \leqslant K/\varepsilon$ решение $(I(t), \varphi(t))$ определено и выполнено: $|I(t) - J(t)| < c\varepsilon$, $c = \text{const} > 0$. Для $\omega = 1$ это утверждение было доказано П. Фату (P. Fatou, 1928), а также Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси (1934) и явилось исторически первым результатом по обоснованию У. м. (см. [8]). Имеется подробное доказательство, основанное на исключении быстрой переменной (см. [2]). Для одночастотных систем высшие приближения процедуры исключения быстрых переменных позволяют описать движение с любой степенной по ε точностью на временах порядка $1/\varepsilon$ (см. [5]).

Если система (1) многочастотна ($m \geqslant 2$), но вектор частот постоянный ($\omega = \text{const}$) и нерезонансный, то для любого $\rho > 0$ будет $|I(t) - J(t)| < \rho$ при достаточно малом $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$ и при $0 \leqslant t \leqslant K/\varepsilon$ (см. [4], [5]). Если же частоты здесь удовлетворяют диофантову условию $|(k, \omega)| > \text{const}\,|k|^{-\nu}$ при всех $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ и нек-ром $\nu > 0$, то можно выбрать $\rho = O(\varepsilon)$, а высшие приближения процедуры п. 2) позволяют получить любую степенную по ε точность.

Если система многочастотна, и частоты непостоянны (зависят от медленных переменных I), то из-за эволюции I частоты сами медленно изменяются и в различные моменты времени могут удовлетворять различным резонансным соотношениям. Возможен захват в резонанс, приводящий к большому расхождению решений точной и усредненной систем. Однако из общей теоремы Аносова об усреднении (см. [1]) вытекает, что если частоты $\omega(I)$ нерезонансны при почти всех I, то для любого $\rho > 0$ выполнено неравенство $|I(t) - J(t)| < \rho$ при $0 \leqslant t \leqslant K/\varepsilon$ для всех начальных данных, не принадлежащих множеству $E(\rho, \varepsilon)$, мера к-рого стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. В ряде случаев оказывается (см. [3]), что мера $E(\rho, \varepsilon)$ есть $O(\sqrt{\varepsilon}/\rho)$ (для справедливости этой оценки достаточно, напр., выполнения условия $\operatorname{rank}(\partial\omega/\partial I) = m$).

Сравнительно полно исследованы двухчастотные системы ($m = 2$) (см. [2], [3], [10]). Для гамильтоновых систем и для обратимых систем обоснование У. м. далеко продвинуто в рамках теории Колмогорова – Арнольда – Мозера (*КАМ-теория*), доставляющей оценки отличия решений точной и усредненной систем для большинства начальных данных на бесконечных временах. Для оставшихся начальных данных в гамильтоновых системах это отличие может расти из-за *Арнольда диффузии*, но, вообще говоря, лишь очень медленно. Согласно *Нехорошева теореме*, это отличие остается малым на интервале времени, длина к-рого растет экспоненциально при линейном убывании возмущения (в случае общего положения).

Другой аспект обоснования У. м. – установление связи между интегральными многообразиями точной и усредненной систем. Так, для одночастотных систем и для систем с постоянными нерезонансными частотами, если усредненная система имеет положение равновесия (или предельный цикл), для к-рого вéщественные части характеристич. показателей отличны от нуля (для цикла – всех показателей, кроме одного, равного нулю), то точная система имеет близкий к этому равновесию (циклу) по медленным переменным инвариантный тор, соответственно m- или $(m+1)$-мерный. Этот тор будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, устойчиво или неустойчиво равновесие (цикл) усредненной системы (см. [5]). Для гамильтоновых и обратимых систем вопрос об интегральных многообразиях решается в КАМ-теории.

4) Усреднение в системах Боголюбова. Системами в стандартной форме Боголюбова (см. [4]) называются системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon),\ x \in D \subset \mathbb{R}^p,\ 0 < \varepsilon \ll 1. \qquad (10)$$

Предполагается, что функция X удовлетворяет, кроме обычных условий гладкости, следующему условию равномерного среднего: равномерно по x в области D существует предел (временное среднее)

$$X_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t, 0)\, dt. \qquad (11)$$

Принцип усреднения Боголюбова состоит в том, что для приближенного описания поведения x исходную систему заменяют на усредненную систему

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi).$$

Этот подход обобщает подход для случая постоянных частот ($\omega = \text{const}$). При $\omega = \text{const}$ уравнения движения системы с вращающимися фазами (1) приводятся к стандартной форме (7): достаточно обозначить через x пару I, $\varphi - \omega t$. Усредненная система (1) совпадает при нерезонансных частотах с усредненной системой (2), а при резонансных частотах – с частично усредненной системой (3) (только к системам (2), (3) дописываются еще уравнения для изменения нек-рых фаз $\varphi - \omega t$, не входящих в правую часть усредненной системы). Обоснование сформулированному принципу усреднения дают три теоремы Боголюбова (см. [4], [5]). Согласно первой теореме, если $\xi(t)$ – решение усредненной системы, лежащее строго внутри D при $0 \leqslant t \leqslant K/\varepsilon$, а $x(t)$ – решение точной системы с начальным условием $x(0) = \xi(0)$, то для любого $\rho > 0$ будет $|x(t) - \xi(t)| < \rho$ при достаточно малом $\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$ и $0 \leqslant t \leqslant K/\varepsilon$. Вторая и третья теоремы Боголюбова описывают движение в окрестности положения равновесия и предельного цикла усредненной системы. В частности, если для равновесия вещественные части всех его характеристич. показателей отличны от нуля (а для цикла – всех кроме одного), то точная система имеет решение, вечно остающееся вблизи этого равновесия (цикла). Свойства устойчивости указанного решения – такие же, как у равновесия (цикла) усредненной системы.

Для систем вида (10), аналогично п. 2), построена процедура, позволяющая с помощью замены переменных исклю-

чить время t из правой части с любой степенной по ε точностью (проведение процедуры требует дополнительных условий типа условия равномерного среднего для функций, возникающих при построении высших приближений, см. [5]). В первом приближении замена переменных приводит исходную систему к усредненной.

Условие равномерного среднего очень важно для всей теории. Если предел в (11) существует, но сходимость не равномерная по x, то временное среднее X_0 может, напр., разрывно зависеть от x и усредненная система не будет определена.

Результаты об усреднении для систем в стандартной форме обобщены на уравнения с запаздывающим аргументом, конечно-разностные уравнения, бесконечномерные системы, уравнения с частными производными и др. (см. [8]).

5) Усреднение в быстро-медленных системах. Рассмотренные выше системы (1) и (7) являются частным случаем систем вида

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon),\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \qquad (12)$$

называемых быстро-медленными системами (или системами с быстрыми и медленными движениями, с быстрыми и медленными переменными). Обобщением подхода п. 1) является для этих систем следующий принцип усреднения Аносова (см. [1]). Пусть в системе (12) $x \in M$, $y \in \mathbb{R}^n$, где M – гладкое компактное m-мерное многообразие. Пусть при $\varepsilon = 0$ система для быстрых переменных x, зависящая от медленных переменных y, как от параметров, обладает конечной гладкой инвариантной мерой μ_y и при почти всех y эргодична. Вводится усредненная система

$$\dot{Y} = \varepsilon G(Y), \quad G(Y) = \int_M G(x, Y, 0)\, d\mu_Y / \mu_Y(M).$$

Принцип усреднения предлагает для приближенного описания медленного движения $y(t)$ в исходной системе использовать решение $Y(t)$ усредненной системы с начальным условием $Y(0) = y(0)$. Обоснование этому принципу дает теорема Аносова (см. [1]): для любого положительного числа ρ мера множества $E(\rho, \varepsilon)$ начальных данных (из компакта в фазовом пространстве), для к-рых

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon} |y(t) - Y(t)| > \rho,$$

стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$.

Частный случай, когда исходная система – гамильтонова, зависящая от плавно изменяющегося параметра $\lambda = \varepsilon t$, и при почти всех значениях λ движение системы с $\lambda = \text{const}$ на почти всех поверхностях уровня энергии эргодично (см. [10]). На быстро-медленные системы (12) обобщен также подход п. 4), использующий усреднение по времени и условие равномерного среднего (см. [6]).

6) Приложения метода усреднений. Рассмотренный У. м.– один из самых продуктивных в теории возмущений, и его приложения ныне необозримы. Он широко используется в небесной механике и динамике космич. полетов для описания эволюции движения небесных тел, в физике плазмы и теории ускорителей при исследовании движения заряженных частиц в полях, в радиотехнике при расчете нелинейных колебательных режимов. Имеются приложения У. м. в гидродинамике, физике лазеров, оптике, акустике и др. (см. [3], [5], [6], [8]).

Лит.: [1] Аносов Д. В., «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1960, т. 24, № 5, с. 721–42; [2] Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978; [3] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, М., 1985; [4] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Львов, 1945; [5] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [6] Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., 1971; [7] Джакалья Г. Е. О., Методы теории возмущений для нелинейных систем, пер. с англ., М., 1979; [8] Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, Киев, 1971; [9] Пуанкаре А., Избранные труды, тт. 1–3, М., 1971–74; [10] Lochak P., Meunier P., Multiphaze averaging for classical systems, N. Y., 1988.

А. И. Нейштадт.

УСРЕДНЕНИЯ МЕТОД Уизема – см. *Уизема метод.*

УСРЕДНЕНИЯ ПРИНЦИП – см. *Усреднения метод.*

УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ – см. *Вынужденные колебания.*

УСТОЙЧИВАЯ ОСОБЕННОСТЬ – особенность отображения многообразия, определяемая следующим образом. Пусть задано отображение многообразия M в многообразие N; особенность отображения $M \to N$ в точке $x \in M$ называется устойчивой относительно того или иного отношения эквивалентности, если любое близкое (в подходящей топологии) отображение $M \to N$ имеет эквивалентную ей особенность в точке, близкой к x. Напр., У. о. гладких функций (то есть отображений $M^m \to \mathbb{R}^1$) относительно группы локальных диффеоморфизмов M^m исчерпываются морсовскими особенностями: в подходящих криволинейных координатах они задаются формулой вида:

$$f = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_m^2 + c.$$

У. о. отображений двумерных многообразий (относительно диффеоморфизмов M и N) исчерпываются *складками* и *сборками*, У. о. отображений двумерных многообразий в трехмерные – *Уитни зонтиками*, У. о. векторных полей на плоскости (относительно орбитальной эквивалентности) – узлами, фокусами и седлами.

Лит.: [1] Арнольд В. И., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 5, М., 1985, с. 219–77.

В. А. Васильев.

УСТОЙЧИВО ПРИЧИННОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ – см. *Пространство-время* теории относительности.

УСТОЙЧИВОГО ТИПА ТОЧКА – см. *Особая точка* дифференциального уравнения, *Седло.*

УСТОЙЧИВОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Устойчивость движения.*

УСТОЙЧИВОЕ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Центральное многообразие.*

УСТОЙЧИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – распределение вероятностей

$$F(x) = \mathsf{P}\{\zeta < x\}$$

случайной величины $\zeta \in \mathbb{R}$, обладающее свойством

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b), \qquad (1)$$

где $*$ – символ операции свертки распределений, b_1, b_2 – произвольные действительные числа, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и a, b являются некоторыми функциями a_1, a_2, b_1, b_2. Класс У. р. полностью описывается следующей формулой для характеристич. функции:

$$\varphi(t) = \mathsf{E} \exp\{it\zeta\} = \exp\{i\gamma t - C|t|^{\alpha}(1 + i\beta\omega(t, \alpha))\},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $C > 0$, $|\beta| \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ и $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha \operatorname{sign} t$ при $\alpha \neq 1$, $\omega(t, 1) = \frac{2}{\pi}\ln|t|$. Число α называется показателем У. р. Если $\alpha = 2$, У. р. является нормальным (см. *Гаусса распределение*). Особая роль У. р. связана со следующим их свойством.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых, одинаково распределенных, случайных величин $\xi_n \in \mathbb{R}^1$ и

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - A_n\right),$$

где $B_n > 0$ и A_n – нормирующие и центрирующие константы соответственно. Если с вероятностью 1 при $n \to \infty$ существует случайный предел

$$\zeta = \lim_{n \to \infty} \zeta_n,$$

то величина ζ подчинена У. р. Обратно, для любого У. р. $F(x)$ существует последовательность ξ_n такая, что ζ_n

сходится с вероятностью 1 к ζ, распределенной согласно $F(x)$.

Таким образом, сформулированное основное свойство У. р. является характеристическим и может быть взято в качестве их определения. На основе этого свойства понятие У. р. естественно обобщается для последовательностей случайных, независимых, одинаково распределенных векторов из $\mathbb{R}^m$, а также для сумм слабо зависимых величин, когда корреляции между различными ξ_n для далеко отстоящих друг от друга значений n достаточно быстро убывают. В последнем случае сходимость к пределу должна пониматься уже в обобщенном смысле и предельное распределение вероятностей описывает нек-рый, вообще говоря, обобщенный случайный процесс (случайное поле), в частности гауссовский процесс с равномерным спектром (белый шум). По отношению к этим предельным случайным процессам (полям) употребление термина «У. р.» уже неестественно и поэтому в литературе для их обозначения принят термин автомодельные процессы (поля). Автомодельные случайные обобщенные поля находят свое применение в статистич. механике и конструктивной квантовой теории поля для описания крупномасштабного поведения физич. системы. Распределения вероятностей автомодельных процессов (полей) являются неподвижными точками так наз. ренормализационного преобразования, то есть удовлетворяют нек-рому уравнению в пространстве распределений вероятностей, к-рое, по своему смыслу, аналогично (1).

Одной из основных задач теории У. р. является описание их областей притяжения, то есть того множества распределений для величин ξ_n, для к-рых распределения $F_n(x)$ величин ζ_n сходятся к фиксированному У. р. $F(x)$.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.– Л., 1949; [2] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983; [3] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [4] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.

Ю. П. Вирченко.

УСТОЙЧИВОЕ СЛОЕНИЕ – см. *Слоение.*

УСТОЙЧИВОСТИ КРИТЕРИЙ – см. *Устойчивость движения.*

УСТОЙЧИВОСТИ ПОТЕРЯ при изменении параметров изучаемой системы – плавная смена стационарного режима малыми колебаниями (возможно, нерегулярными) – мягкая потеря устойчивости, или переход к резко отличному (стационарному или нестационарному) режиму – жесткая потеря устойчивости. При возвращении параметров к исходным значениям в первом случае восстанавливается стационарный режим, во втором случае – может не восстановиться. Детально вопрос исследован для системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\alpha); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

Пусть положение равновесия $\bar{x}$ экспоненциально устойчиво при значениях параметра $\alpha < \alpha_*$.

Сценарий мягкой У. п.:

1а) при $\alpha = \alpha_* - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$ существует область притяжения G положения равновесия $\bar{x}(\alpha)$, не зависящая от α;

1б) при $\alpha = \alpha_*$ положение равновесия $x_* = \bar{x}(\alpha_*)$ асимптотически устойчиво;

1в) при $\alpha = \alpha_* + \varepsilon$ все решения $x(t)$ (с $x(0) \in G$) для $t \geqslant T_\varepsilon$ удовлетворяют неравенству $|x(t) - x_*| \leqslant d(\varepsilon)$, $d(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из 1б) следует 1а) и 1в).

Сценарий жесткой У. п.:

2а) при $|\alpha - \alpha_*| < \varepsilon$ есть решения $x(t)$ такие, что $|x(t) - x_*| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $\sup\limits_{t>0} |x(t) - x_*| > r$; $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, r не зависит от ε;

2б) положение равновесия x_* – неустойчиво по Ляпунову.

Из 2б) следует 2а).

Особый случай: положение равновесия x_* устойчиво, но не асимптотически. Как правило, $d(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{\varkappa_+}$, $\delta(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{\varkappa_-}$. Максимальное (для данного уравнения) значение $\varkappa_+$ ($\varkappa_-$) называется показателем потери устойчивости. Обычно $\varkappa_+ = \varkappa_- = 1/2$; при $\alpha \in \mathbb{R}^k$ в аналогичных оценках ε – расстояние до границы области экспоненциальной устойчивости в пределах параметров.

Понятия У. п. переносятся на предельные циклы и другие аттракторы (см. *Устойчивость*).

Лит.: [1] Арнольд В. И. и др., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 5, М., 1986.

Э. Э. Шноль.

УСТОЙЧИВОСТЬ (в наиболее широком толковании) – сохранение целостности системы или общего характера ее поведения в течение длительного времени. В физике У. обычно понимают более узко: система устойчива, если малые внешние воздействия приводят к малым изменениям ее поведения.

При математич. изучении У. используются два основных принципа. Первый из них общеизвестен, а второй обычно не формулируют явно. Первый – принцип линеаризации: для изучения У. относительно малых возмущений можно рассматривать линейные уравнения (полученные линеаризацией исходных на изучаемом решении). Второй – принцип замены воздействий любой длительности на импульсные (мгновенные). Логически второй предшествует первому, так как позволяет рассматривать только исходные (невозмущенные) уравнения: после возмущения система «предоставлена сама себе».

Принцип – «состояние устойчиво, если энергия в нем минимальна» не столь универсален. Он применим к состояниям покоя систем, к-рые можно рассматривать как совокупность частиц, связанных силовым взаимодействием.

Развитая математич. теория У. существует для систем, имеющих конечномерное фазовое пространство; ее основы были заложены А. М. Ляпуновым в конце 19 в. А. М. Ляпунов указывал (см. [1], а также [3], [4], [6]), что на его размышления наибольшее влияние оказали работы А. Пуанкаре (H. Poincaré). Большей частью конечномерная теория применяется к изучению стационарных состояний, реже – нестационарных (обычно, периодических) режимов. При математич. идеализации рассматривается поведение системы за бесконечное время и, в частности, доказывается, что:

1) утверждениям линейной теории об У. можно доверять, если она предсказывает экспоненциально быстрое убывание всех возмущений или экспоненциальный рост нек-рых из них; в других случаях необходим учет нелинейных членов;

2) при изучении У. можно ограничиться импульсными возмущениями, если эффект возмущения затухает. В консервативных системах это не так; вопросы о постоянно действующих возмущениях для них намного сложнее.

Ниже в качестве «эталона» приводятся конечномерные теоремы. (Нек-рые обобщения см. [5], [22].)

Линейное приближение для стационарных режимов. Пусть вещественные дифференциальные уравнения

$$\dot{X} = f(X) \tag{1}$$

(X – вектор фазового пространства $\mathbb{R}^n$, $\dot{X} = dX/dt$) описывают поведение физич. системы, $\bar{X}$ – положение равновесия, то есть $f(\bar{X}) = 0$. Пусть

$$\dot{\xi} = A\xi \tag{2}$$

– линеаризованные уравнения, матрица $A = f'(\bar{X})$, то есть $A_{jk} = \partial f_j / \partial X_k(\bar{X})$. В зависимости от собственных значений $\lambda_k(A)$ возможны случаи: а) для всех k $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant -\gamma < 0$; б) хотя бы для одного k $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$; в) для всех k $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant 0$ и для нек-рых j $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$. Линейного приближения достаточно в

случаях а) и б), недостаточно в случае в); см. [3], [4], [8], [10], [23].

Теорема 1. При условии а) положение равновесия $\overline{X}$ устойчиво (точнее – экспоненциально притягивающее); при $|Y(0)|<r$ для решений системы (1):

$$|Y(t)|\leqslant K|Y(0)|\exp(-\sigma t),\ Y(t)=X(t)-\overline{X},$$
$$0\leqslant t<\infty;$$

здесь $\sigma>0$ любое, меньшее γ (если среди λ_j с $\operatorname{Re}\lambda_j=-\gamma$ нет кратных, то $\sigma=\gamma$).

Теорема 2. При условии б) положение равновесия $\overline{X}$ неустойчиво. Точнее, имеются решения, экспоненциально быстро уходящие от $\overline{X}$: для любого $\delta>0$ есть решение $X_\delta(t)$ такое, что $|Y_\delta(0)|\leqslant\delta$, $|Y_\delta(T_\delta)|\geqslant r$, $T_\delta\leqslant K\ln(1/\delta)$ (r не зависит от δ).

В случае а) всегда можно ввести в $\mathbb{R}^n$ такую метрику (длину вектора $|X|$), что приближение всех решений к $\overline{X}$ (в нек-рой окрестности $\overline{X}$) будет монотонным (см. теорему 4). Вычислять λ_k не обязательно, если не требуется находить γ (см. *Рауса – Гурвица критерий*). Часто в качестве модельных используются динамич. системы с дискретным временем: отображения $X_{k+1}=F(X_k)$. Для неподвижных точек этих отображений ($\overline{X}=F(\overline{X})$) имеются аналоги теорем 1 и 2, в них условие $\operatorname{Re}\lambda<0$ заменяется на $|\lambda(A)|<1$, $A=F'(\overline{X})$. Для консервативных (гамильтоновых) систем λ_k расположены симметрично относительно мнимой оси. Здесь линейное приближение обнаруживает сильную неустойчивость – теорема 2 остается в силе; добавляется необходимое условие «нейтральной» устойчивости – все $\operatorname{Re}\lambda_k=0$. Если система (1) зависит от параметра α, то при изменении α положение равновесия $\overline{X}(\alpha)$ может терять У. двумя путями: 1) при $\alpha=\alpha_*$ одно из λ обращается в 0; 2) при $\alpha=\alpha_*$ пара комплексно сопряженных собственных значений λ становится чисто мнимой. В случае 1) при дальнейшем изменении положение равновесия «нормально» исчезает, сливаясь с другим положением равновесия. При наличии симметрий обычно от положения равновесия, к-рое потеряло У. (но сохранилось), отщепляются другие положения равновесия, устойчивые или неустойчивые. В случае 2) могут возникать автоколебания.

Теоремы 1 и 2 обобщаются на периодич. решения. Речь при этом идет о стремлении к траектории, а не к решению.

Общие определения и теоремы конечномерной теории.

Определение 1. Положение равновесия (стационарное решение) $\overline{X}$ системы (1) устойчиво (по Ляпунову) при $t\to+\infty$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что из $|Y(0)|<\delta$ следует $|Y(t)|<\varepsilon$ при всех $t>0$; $Y(t)=X(t)-\overline{X}$ (или $\sup\limits_{t>0}|Y(t)|\to0$ при $|Y(0)|\to0$).

Определение 2. Положение равновесия $\overline{X}$ асимптотически устойчиво, если: (а) оно устойчиво, (б) $|Y(t)|\to0$ при $t\to+\infty$ (для $|Y(0)|<r$).

Определение 3. Положение равновесия $\overline{X}$ экспоненциально устойчиво, если в определении 2

$$|Y(t)|\leqslant C\exp(-\gamma t).$$

Прямое определение неустойчивости: для всякого $\delta>0$ существует решение $X_\delta(t)$ такое, что

$$|Y_\delta(0)|<\delta \text{ и } \sup_{t>0}|Y_\delta(t)|\geqslant r;$$

r не зависит от δ (и служит некой «мерой неустойчивости»). Для нестационарных решений уравнения (1) и для неавтономных систем $\dot X=f(X,t)$ в первоначальных определениях участвует момент возмущения.

Определение 1′. Решение $X=\psi(t)$ устойчиво, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon,t_*)$ такое, что из $|X(t_*)-\psi(t_*)|<\delta$ следует $|X(t)-\psi(t)|<\varepsilon$ при $t>t_*$.

У. и асимптотическая У. не зависят от выбора метрики $|X|$. На промежутке $0\leqslant t\leqslant T$ требования определения 1 выполнены автоматически – в силу непрерывной зависимости решения $X(t)$ от t и начальной точки $X(0)$. Для линейной системы $\dot\xi=A\xi$ асимптотическая и экспоненциальная У. эквивалентны требованию: все $\operatorname{Re}\lambda_j(A)<0$. Если $A=f'(\overline{X})$, то при $\operatorname{Re}\lambda_j<0$ и только тогда положение равновесия $\overline{X}$ системы (1) экспоненциально устойчиво. При этом $\delta\leqslant C\varepsilon$ в определении 1. При неравноправности компонент X имеет смысл изучение У. относительно части переменных X_j (см. [6]). Периодич. решения системы (1) не бывают асимптотически устойчивы: малое возмущение порождает неисчезающий сдвиг фазы. Для неавтономной системы $\dot X=f(X,t)$ асимптотич. У. периодич. решений возможна – внешнее воздействие «навязывает» не только период, но и фазу колебаний.

Непрерывная дифференцируемая функция $L(X)$ называется функцией Ляпунова для положения равновесия $\overline{X}$ системы (1), если (для X из окрестности точки $\overline{X}$):

1) $L(X)\geqslant0$, $L(X)>0$ при $X\neq\overline{X}$;

2) для любого решения $X(t)$ $l(t)=L(X(t))$ не возрастает с ростом t.

Если $\psi(t_0)=b$, то $\dot l(t_0)=L'(b)f(b)$ и вместо условия 2) появляется условие:

2′) для любой точки $X\in G$ $L'(X)f(X)\leqslant0$.

Теорема 3. Если функция $L(X)$ удовлетворяет условиям 1) и 2′), то положение равновесия $\overline{X}$ устойчиво. Если в 2′) выполняется строгое неравенство, то $\overline{X}$ – асимптотически устойчиво.

Теорема 4. Если положение равновесия $\xi=0$ линейной системы (2) асимптотически устойчиво, то существует функция Ляпунова $\Phi(\xi)$ в виде квадратичной формы. Если положение равновесия $\overline{X}$ системы (1) асимптотически устойчиво, то существует (какая-нибудь) функция Ляпунова $L(X)$ (см. [4], [8]).

Если система (2) получена линеаризацией системы (1) в окрестности $\overline{X}$ (и все $\operatorname{Re}\lambda_j(A)<0$), то можно положить $L(X)=\Phi(X-\overline{X})$. Отсюда вытекает теорема 1.

Пусть $F(\overline{X})=0$ и F принимает положительные значения в любой окрестности $\overline{X}$, а также $F'(X)f(X)>0$ там, где $F(X)>0$. Тогда положение равновесия $\overline{X}$ неустойчиво, а F называется функцией Четаева (см. [3], [4]). В ряде задач полезны векторные аналоги функции Ляпунова (см. [7]).

Устойчивость равновесий в гамильтоновых системах. Асимптотич. У. здесь невозможна. Для У. по Ляпунову необходимо, чтобы все собственные значения λ_j линеаризованной системы были чисто мнимыми или равны 0; окончательный ответ зависит от нелинейных членов. Равенство $\lambda_k=0$ обычно приводит к неустойчивости; она может вызываться также резонансными соотношениями между частотами ω_k (см. [10], [23]). Если У. есть, то она симметрична по времени: имеется при $t\to+\infty$ и при $t\to-\infty$; если при этом существует функция Ляпунова L, то она обязана быть первым интегралом. Иногда роль функции L играет функция Гамильтона H; при наличии других (независимых) интегралов I_k можно пытаться строить функцию Ляпунова, комбинируя H и I_k. Этот прием полезен и для распределительных консервативных систем (см. [3], [17], [24]).

Натуральные (механические) гамильтоновы системы. Пусть

$$H(p,q)=E(p,q)+U(q), \qquad (1_H)$$

где E – положительно определенная квадратичная форма от

p_j; положения равновесия соответствующей гамильтоновой системы (1_H) имеют вид $\overline{X}=(0, \overline{q})$, $U'(\overline{q})=0$.

Теорема 5. Если $U(q)$ имеет при $q=\overline{q}$ строгий минимум, то положение равновесия $(0, \overline{q})$ системы (1_H) устойчиво по Ляпунову. Если $U(q)$ не имеет минимума в экстремальной точке $\overline{q}$ $(U'(\overline{q})=0)$ и при этом d^2U не вырожден (неминимальность обеспечивается квадратичными членами), то положение равновесия $(0, \overline{q})$ неустойчиво. Другая формулировка последнего утверждения: если все $\lambda_j \neq 0$, то для У. положения равновесия $\overline{X}$ необходимо и достаточно, чтобы все λ_j были чисто мнимыми.

При введении в систему сил трения условие минимума $U(q)$ становится необходимым и достаточным для (асимптотической) У. изолированного положения равновесия $\overline{X}$ (см. [3], [9]).

Теорема 5 восходит к Ж. Лагранжу (J. Lagrange, 1788), П. Дирихле (P. Dirichlet, 1846) и А. М. Ляпунову (1897). Она является математич. основанием «принципа минимума энергии».

Постоянно действующие возмущения. Пусть изучаемый объект подвержен слабым воздействиям (возможно, не известным точно). Тогда, наряду с системой (1), рассматриваются возмущенные системы

$$\dot{X}=f(X)+h(X, t). \qquad (1_h)$$

Теорема 6. Пусть $\overline{X}$ – асимптотически устойчивое положение равновесия системы (1) и ε – допустимая величина уклонения от равновесия. Существует уровень возмущений $\eta(\varepsilon)$ такой, что при $|h|<\eta$ любое решение $X(t)$ системы (1_h) (если $|X(0)-\overline{X}|<r$) при $t>T_\varepsilon$ удовлетворяет неравенству $|X(t)-\overline{X}|<\varepsilon$. Для экспоненциальной устойчивости $\overline{X}$

$$\eta \leqslant C\varepsilon,\ T_\varepsilon \leqslant K\ln(1/\varepsilon).$$

Положение равновесия $\overline{X}$ системы (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если для каждого $\varepsilon>0$ существует δ и η такие, что при $|X(0)-\overline{X}|<\delta$ и $|h(X, t)|<\eta$

$$|X(t)-\overline{X}|<\varepsilon$$

для всех $t>0$. Здесь $X(t)$ – решение любой из систем (1_h).

Асимптотически устойчивое положение равновесия $\overline{X}$ системы (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Все введенные определения и теоремы 3, 4, 6 переносятся на случай циклов и более сложных инвариантных множеств. Изложенное выше без существенных изменений переносится также на системы, фазовое пространство к-рых – многообразие конечной размерности.

Замечания о распределенных системах. Задачи об У. занимают важное место в теории упругости ([11], [19]), гидродинамике ([15]–[17]), физике плазмы ([12], [13], [18], [20]), астрофизике ([12]–[14]). Ниже перечислены нек-рые особенности этих (бесконечномерных) задач.

Изучение У., строго говоря, требует определения понятия «малые уклонения». Математически это выбор метрики (нормы) в фазовом пространстве (формально: выяснение того, какое именно семейство функций считать фазовым пространством системы). В отличие от конечномерного случая ответ может зависеть от выбора нормы; однако сильная (экспоненциальная) неустойчивость обычно не зависит.

Два основных подхода к изучению У. те же: линеаризация и «энергетический принцип». Однако здесь их роль другая – не чисто «инструментальная». Строгое определение У. используется сравнительно редко. Обычно У. понимается как отсутствие экспоненциально растущих решений линеаризованных уравнений или как минимальность энергии (речь идет при этом не об абсолютном минимуме, а о невозможности уменьшения энергии при малых адиабатич. возмущениях).

Полное определение спектра собственных значений λ линеаризованной задачи возможно лишь в простейших случаях. Обычно же спектр дискретен ($|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$) для ограниченных объемов и непрерывен для задач, неограниченных в пространстве. Однако может быть: а) дискретный спектр, накапливающийся не только к ∞, но и к 0 (гравитирующий газовый шар, см. [14]); б) непрерывный спектр для задачи в ограниченной области (идеальная жидкость, см. [17]); в) смешанный (непрерывный и дискретный) спектр. Теорем, позволяющих определить, будут ли все $\mathrm{Re}\,\lambda_j<0$, не находя λ_j, в общем случае нет.

Проблемы математич. физики часто имеют некую симметрию (трансляционную, вращательную и т. д.). Это, с одной стороны, облегчает дело, позволяя «разделить переменные» в линеаризованных уравнениях, однако, с другой стороны, усложняет явления, связанные с потерей У. при изменении параметров.

При наличии чисто мнимого непрерывного спектра возникает явление, не имеющее конечномерного аналога: возмущения могут затухать со временем. Более точно, если u – вектор (бесконечномерного) фазового пространства, то линейные функционалы $l(u(t))$ могут стремиться к нулю. Иногда это уход возмущений на бесконечность в виде волн (как для уравнения $u_{tt}=c^2u_{xx}$) или их вынос течением за пределы области наблюдения. В других (менее очевидных) случаях функция $u(\boldsymbol{r}, t)$, описывающая состояние системы, становится все более осциллирующей и потому $\int u(\boldsymbol{r}, t)l(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r} \to 0$ при $|t| \to \infty$. Наиболее известный пример этого – затухание Ландау в теории плазмы (см. [20], [21]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.–Л., 1950; [2] его же, Собрание сочинений, т. 2–3, М., 1956–59; [3] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 3 изд., М., 1965; [4] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966; [5] Зубов В. И., Устойчивость движения, 2 изд., М., 1984; [6] Румянцев В. В., Озиранер А. С., Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных, М., 1987; [7] Матросов В. М., в кн.: Труды 2-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, М., 1965; [8] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1984; [9] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., Математические аспекты классической и небесной механики, М., 1986; [10] Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, пер. с англ., М., 1973; [11] Математическая энциклопедия, т. 5, М., 1985; [12] Физический энциклопедический словарь, М., 1983; [13] Физика космоса (маленькая энциклопедия), 2 изд., М., 1986; [14] Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М., 1975; [15] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Гидродинамика, 3 изд., М., 1986; [16] Джозеф Д., Устойчивость движений жидкости, пер. с англ., М., 1981; [17] Дикий Л. А., Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы, Л., 1976; [18] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., Физическая кинетика, М., 1979; [19] Болотин В. В., Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961; [20] Кадомцев Б. Б., Коллективные явления в плазме, 2 изд., М., 1988; [21] Ландау Л. Д., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1946, т. 16, с. 574; [22] Марсден Дж., Мак-Кракен М., Бифуркация рождения цикла и ее приложение, пер. с англ., М., 1980; [23] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э., Устойчивость критических положений равновесия, Пущино, 1985; [24] Holm D. D., «Phys. Rep.», 1985, v. 123, № 1–2.

Э. Э. Шноль.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ – свойство механической системы мало отличаться при малых возмущениях от своего начального состояния. Движение любой механич. системы, напр. машины, гироскопич. устройства, самолета, снаряда, зависит от действующих сил и так наз. начальных условий, то есть от положений и скоростей точек системы в момент начала движения. Зная действующие силы и начальные условия, можно теоретически рассчитать, как будет двигаться система; это движение называется невозмущенным. Но поскольку все измерения производятся с той или иной степенью точности, то на практике истинные значе-

ния начальных условий обычно несколько отличаются от расчетных. Кроме того, механич. система может во время движения подвергнуться незначительным случайным воздействиям, не учтенным при расчете, что тоже эквивалентно изменению начальных условий. Возникающие по разным причинам отклонения начальных условий от их расчетных значений называются начальными возмущениями, а движение, к-рое система совершает при наличии этих возмущений,— возмущенным движением.

Если при достаточно малых начальных возмущениях какая-нибудь из характеристик движения во все последующее время мало отличается от своего значения в невозмущенном движении, то движение системы по отношению к этой характеристике называется устойчивым. Если же при сколь угодно малых, но не равных нулю начальных возмущениях данная характеристика со временем будет все более и более отличаться от своего значения в невозмущенном движении, то движение системы по отношению к этой характеристике называется неустойчивым. Эти определения соответствуют определению У. д. по А. М. Ляпунову. Условия, при к-рых движение механич. системы является устойчивым, называются критериями устойчивости.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.— Л., 1950; [2] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 3 изд., М., 1965; [3] Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, М., 1952; [4] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959; [5] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966; [6] Меркин Д. Р., Введение в теорию устойчивости движения, 3 изд., М., 1987.

С. М. Targ.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛАГРАНЖУ — свойство системы гравитированных тел. В узком (первоначальном) смысле система гравитированных тел устойчива по Лагранжу, если (за неограниченное время) никакие тела не уходят на бесконечность и не сталкиваются — все координаты и импульсы ограничены при $t \geqslant t_0$. В широком смысле — система, состояние к-рой задается вектором $x \in \mathbb{R}^n$, устойчива по Лагранжу, если $|x(t)| \leqslant C$ при всех $t \geqslant t_0$. У. по Л. зависит от начального состояния системы.

О дальнейших обобщениях понятия см. [1].

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 5, М., 1985, кол. 567.

Э. Э. Шноль.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ решения обыкновенного дифференциального уравнения — введенная А. М. Ляпуновым в 1892 (см. [1]) характеристика зависимости решений уравнений от начальных условий на бесконечном промежутке времени. Точнее, пусть $U(a, r)$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$,— множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < r$. Решение $x_0(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = V(x, t)$$

в $\mathbb{R}^n$, определенное при $t \geqslant t_0$, называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что все решения $x(t)$ этого уравнения с начальными условиями $x(t_0) \in U(x_0(t_0), \delta)$ также определены при $t \geqslant t_0$, причем $x(t) \in U(x_0(t), \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$. Если, сверх того, существует такое $\delta_0 > 0$, что все решения $x(t)$ данного уравнения с начальными условиями $x(t_0) \in U(x_0(t_0), \delta_0)$ определены при $t \geqslant t_0$ и удовлетворяют условию $|x(t) - x_0(t)| \to 0$ $(t \to +\infty)$, то решение $x_0(t)$ называется асимптотически устойчивым решением.

Аналогично определяется У. по Л. решений дифференциальных уравнений на многообразиях и в бесконечномерных пространствах, неподвижных точек отображений, решений операторных уравнений и т. п.

Решение $x \equiv 0$ автономного уравнения $dx/dt = V(x)$ (где $V(0) = 0$) асимптотически устойчиво, если все собственные числа линеаризации векторного поля V в точке 0 имеют отрицательные вещественные части (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению), и неустойчиво, если вещественная часть хотя бы одного собственного числа положительна.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собрание сочинений, т. 2, М.— Л., 1956; [2] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [4] Руш Н., Абетс П., Лалуа М., Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости, пер. с англ., М., 1980; [5] Меркин Д. Р., Введение в теорию устойчивости движения, 3 изд., М., 1987.

М. Б. Севрюк.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ — свойство состояния равновесия механической системы, характеризующееся тем, что при малом возмущении (смещении, толчке) точки системы во все последующее время мало отклоняются от равновесных положений; в противном случае равновесие неустойчиво. Обычно при малых возмущениях точки системы, находящейся в положении устойчивого равновесия, совершают около их равновесных положений малые колебания, к-рые вследствие сопротивлений со временем затухают, и равновесие восстанавливается. Более строго У. р. определяется и исследуется так же, как и *устойчивость движения*. В случае механич. консервативной системы достаточное условие У. р. дается теоремой Лагранжа — Дирихле, согласно к-рой равновесие устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы минимальна.

УСТОЙЧИВЫЙ МНОГОЧЛЕН — см. *Рауса — Гурвица критерий*.

УСТОЙЧИВЫЙ ОПЕРАТОР — см. *Сильная устойчивость*.

УСТОЙЧИВЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ — парный *взаимодействия потенциал* Φ, для которого существует такое число $B \geqslant 0$, что при всех $n \geqslant 2$ и $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, потенциальная энергия парного взаимодействия n частиц

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Phi(q_i - q_j)$$

удовлетворяет неравенству

$$U(x_1, \ldots, x_n) \geqslant -Bn. \qquad (*)$$

Постоянная B имеет смысл минимальной удельной потенциальной энергии.

Если потенциальная энергия U определяется через набор k-частичных потенциалов взаимодействия $(\Phi^k)_{k \geqslant 2}$, то взаимодействие, задаваемое этим набором, называется устойчивым, если для U выполняется неравенство (*).

В квантовом случае взаимодействие называется устойчивым, если для всех n и $B > 0$ гамильтониан H_n системы n частиц удовлетворяет неравенству

$$H_n \geqslant -nBI,$$

где I — тождественный оператор.

Условие устойчивости означает, что удельная потенциальная энергия ограничена снизу. Парный У. п. в. также ограничен снизу, так как при $n = 2$

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 - x_2) \geqslant -2B.$$

Отрицательные в нек-рой окрестности начала координат потенциалы не являются устойчивыми (см. *Неустойчивый потенциал взаимодействия*). Неотрицательные (отталкивательные) потенциалы устойчивы. Сумма двух У. п. в. устойчива.

Если парный потенциал представим в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

где $\Phi_1 \geqslant 0$, а Φ_2 — действительная непрерывная положительно определенная функция, то потенциал Φ устойчив (положительно определенной функцией является, в частности, преобразование Фурье неотрицательной суммируемой функции).

Пусть $x \in \mathbb{R}^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, $0 < a_1 < a_2 < \infty$, $A_1, A_2, A_3 > 0$.

Парный потенциал Φ является У. п. в., если он удовлетворяет условию

$$\Phi(x) \geqslant \begin{cases} \varphi_1(|x|), & |x| \leqslant a_1, \\ -A_3, & a_1 \leqslant |x| < \infty, \\ -\varphi_2(|x|), & |x| \geqslant a_2, \end{cases}$$

причем

$$\int_0^{a_1} dr\, r^{\nu-1}\, \varphi_1(r) = \infty, \quad \int_{a_2}^{\infty} dr\, r^{\nu-1}\, \varphi_2(r) < \infty,$$

где φ_1 и φ_2 – положительно убывающие функции на $(0, a_1)$ и (a_2, ∞) соответственно. Отсюда следует, что *Леннард-Джонса потенциалы взаимодействия* устойчивы. Быстро убывающие *взаимодействия потенциалы* с твердой сердцевиной также устойчивы.

Для системы частиц s видов потенциальная энергия такова:

$$U_N\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{N_1}^{(1)}; x_1^{(2)}, \ldots, x_{N_2}^{(2)}; \ldots; x_1^{(s)}, \ldots, x_{N_s}^{(s)}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{1 < i_\alpha < j_\alpha = N_\alpha} \Phi_{\alpha\alpha}(x_{i_\alpha} - x_{j_\alpha}) +$$

$$+ \sum_{1 = \alpha < \beta = s} \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{i_\beta=1}^{N_\beta} \Phi_{\alpha\beta}(x_{i_\alpha} - x_{i_\beta}).$$

В этом случае взаимодействие устойчиво, если матрица, составленная из фурье-образов минорант потенциалов $\Phi_{\alpha\beta}$, не имеет отрицательных собственных значений. Отсюда следует, что *кулоновский потенциал взаимодействия* и *Юкавы потенциал взаимодействия* в системах точечных частиц неустойчивы, но становятся У. п. в., если ввести твердые сердцевины или рассматривать заряды, распределенные в нек-рой области пространства.

Устойчивость потенциала взаимодействия влечет сходимость большой статистич. суммы для любой ограниченной измеримой области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$. Обратное справедливо, если Φ – действительная полунепрерывная сверху функция на $\mathbb{R}^\nu$ такая, что $\Phi(-x) = \Phi(x)$. Таким образом, невыполнение условия устойчивости для широкого класса потенциалов означает расходимость большой статистич. суммы, то есть система не может быть описана термодинамически. Это одна из причин широкого использования У. п. в. в статистич. механике. В частности, оно существенно используется при обосновании термодинамич. предельного перехода наряду с условиями сверхустойчивости и регулярности (см. *Сверхустойчивый потенциал взаимодействия, Регулярный потенциал взаимодействия*).

Понятие У. п. в. восходит к работе Л. Онзагера (L. Onsager, 1939).

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985; [3] Onsager L., «J. Phys. Chem.», 1939, v. 43, p. 189; [4] Fisher M. E., Ruelle D., «J. Math. Phys.», 1966, v. 7, p. 67; [5] Ruelle D., «Comm. Math. Phys.», 1970, v. 18, p. 127.

П. В. Малышев.

УСТОЙЧИВЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ – см. *Предельный цикл.*

УСТРАНИМАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА – см. *Аналитическая функция.*

Ф

ФАДДЕЕВА УРАВНЕНИЯ – интегральные уравнения для компонент *Т-матрицы* оператора энергии системы трех частиц. T-матрица $T(z)$ определяется через резольвенту

$$R(z) = (H - z)^{-1}$$

оператора энергии системы трех частиц

$$H = H_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha(x_\alpha),$$

$$H_0 = -\Delta_{x_\alpha} - \Delta_{y_\alpha},$$

где x_α, y_α – набор приведенных *Якоби координат*, v_α – короткодействующие потенциалы взаимодействия частиц пары α, формулой

$$T(z) = V - VR(z)V, \quad V = \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha.$$

Оператор $T(z)$ удовлетворяет уравнению теории возмущений

$$T(z) = V - VR_0(z)\, T(z), \qquad (1)$$

где

$$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}.$$

Ядро интегрального уравнения (1) является несвязным [рассмотрим, напр., оператор $V_1 R_0(z)$; после преобразования Фурье он имеет ядро $v_1(k_1 - k_1')\, \delta(p_1 - p_1')\, (k_1'^2 + p_1'^2 - z)^{-1}$, содержащее δ-функцию, причем эта особенность не пропадает при итерациях уравнения (1)]. По этой причине уравнение (1) является нефредгольмовым. Перестройка уравнения (1), приводящая к фредгольмовым уравнениям, была предложена Л. Д. Фаддеевым в 1960.

Рассматриваются компоненты T-матрицы

$$M_{\alpha\beta}(z) = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} - V_\alpha R(z)\, V_\beta.$$

T-матрица выражается через операторы $M_{\alpha\beta}$ формулой

$$T(z) = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} M_{\alpha\beta}(z).$$

Операторы $M_{\alpha\beta}(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$M_{\alpha\beta}(z) = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} - V_\alpha R_0(z) \sum_\gamma M_{\gamma\beta}(z), \qquad (2)$$

ядро к-рой по-прежнему является несвязным. Чтобы получить фредгольмовы уравнения, преобразуем (2) к виду:

$$[I + V_\alpha R_0(z)] M_{\alpha\beta}(z) = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} - V_\alpha R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z). \qquad (3)$$

Обращая оператор $I + V_\alpha R_0(z)$, получим уравнения

$$M_{\alpha\beta}(z) = T_\alpha(z)\delta_{\alpha\beta} - T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z), \qquad (4)$$

где через $T_\alpha(z)$ обозначен оператор $[I + V_\alpha R_0(z)]^{-1} V_\alpha$. Оператор $T_\alpha(z)$ тесно связан с T-матрицей двухчастичного оператора энергии для пары частиц α:

$$h_\alpha = -\Delta_{x_\alpha} + v_\alpha(x_\alpha).$$

Ядро оператора $T_\alpha(z)$ после перехода к преобразованию

Фурье представляется в виде

$$T_\alpha(k_\alpha, p_\alpha, k'_\alpha, p'_\alpha, z) = t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - p_\alpha^2)\,\delta(p_\alpha - p'_\alpha),$$

где $t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, \lambda)$ – ядро T-матрицы оператора h_α.

Система уравнений (4) и представляет собой уравнения Фаддеева, к-рые свободны от недостатков уравнения (1), так как уже квадрат ядра системы (4), содержащий операторы вида:

$$T_\alpha(z)\,R_0(z)\,T_\beta(z)\,R_0(z)$$

при $\alpha \neq \beta$, является связным оператором. Это свойство в конечном итоге обеспечивает фредгольмовость уравнений (4). Кроме фредгольмовости, система уравнений Фаддеева обладает еще одним свойством, выделяющим ее из других возможных модификаций уравнения теории возмущений (1). А именно, однородная система уравнений (4) эквивалентна уравнению Шредингера: если Φ_α – решение уравнений

$$\Phi_\alpha = -T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} \Phi_\gamma, \qquad (5)$$

то функция

$$\Psi = R_0(z) \sum_\gamma \Phi_\gamma$$

удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\left(H_0 + \sum_\alpha v_\alpha\right)\Psi = z\Psi,$$

к-рое в силу самосопряженности оператора

$$H = H_0 + \sum_\alpha v_\alpha$$

может иметь решения только при действительных z, то есть однородные уравнения (5) имеют решения только при действительных z, совпадающих с точками дискретного спектра оператора H, а неоднородные уравнения (4) однозначно разрешимы при всех z, не совпадающих с точками дискретного спектра.

Лит.: [1] Фаддеев Л. Д., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1960, т. 39, с. 1459–67; [2] его же, Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, М.– Л., 1963; [3] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

ФАДДЕЕВА – ПОПОВА ДЕТЕРМИНАНТ – функциональный определитель, обеспечивающий правильную нормировку меры в *функциональном интеграле* при квантовании калибровочных полей с неабелевой калибровочной группой. Введен Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым в 1967 [1]. В [1] показано, что при квантовании калибровочных полей в формализме функционального интеграла интегрирование необходимо вести не по всем полям, а лишь по классам калибровочно эквивалентных. Этого можно достичь, вводя в функциональный интеграл множитель $\Delta_f(A)\prod_x \delta(f(A))$. При этом функция $f(A)$ выбирается из условия, что уравнение $f(A^\Omega) = 0$, где A^Ω – результат действия элемента калибровочной группы Ω на поле A, имеет единственное решение относительно Ω при любом $A(x)$. Калибровочно-инвариантный функционал $\Delta_f(A)$ определяется из уравнения

$$\Delta_f(A) \int \prod_x \delta(f(A^\Omega(x)))\; d\Omega(x) = 1,$$

где $\delta(f(A(x)))$ – бесконечномерная δ-функция, а $\prod_x d\Omega(x)$ – инвариантная мера на калибровочной группе. Для вычисления функционального интеграла по калибровочным полям достаточно найти $\Delta_f(A)$ на поверхности $f(A) = 0$. На данной поверхности $\Delta_f(A)$ можно представить в виде:

$$\Delta_f(A)\big|_{f(A)=0} = \det M_f(A).$$

Функциональный определитель $\det M_f(A)$ и называется детерминантом Фаддеева – Попова. В отличие от $\Delta_f(A)$ Ф.– П. д., вообще говоря, не является калибровочно-инвариантным.

В качестве примера найдем выражение для $M_f(A)$ в случае, когда $A = A_\mu(x)$, ($\mu = 0, k$; $k = 1, 2, 3$) является *Янга – Миллса полем*. Для наиболее удобных при квантовании функций $f(A) = \partial_k A_k(x)$ (кулоновская калибровка) и $f(A) = \partial_\mu A_\mu(x)$ (лоренцева калибровка) имеем

$$\Delta_f(A)\big|_{\partial_\mu A_\mu = 0} = \det M_L(A),$$

$$\Delta_f(A)\big|_{\partial_k A_k = 0} = \det M_C(A),$$

где операторы $M_L(A)$ и $M_C(A)$ определяются формулами

$$M_C(A)\,\alpha = \Delta\alpha - g A_k(x)\,\partial_k \alpha,$$

$$M_L(A)\,\alpha = \Box\alpha - g\partial_\mu [A_\mu, \alpha] = \Box\alpha + W(A)\,\alpha.$$

Для определения детерминанта можно использовать формулу

$$\det M_L(A) = \exp\{\mathrm{tr} \ln M_L(A)\} =$$

$$= \det \Box \exp\{\mathrm{tr} \ln (1 + \Box^{-1} W(A))\}$$

(здесь символом tr обозначена операция взятия следа, включающая и интегрирование по координатам). Первый множитель в этом выражении представляет собой несущественную константу, к-рая лишь меняет нормировочный множитель перед функциональным интегралом.

Для калибровочных полей с абелевой группой, с точностью до множителя, не зависящего от A_μ:

$$\det M_L = \det M_C = 1.$$

Лит.: [1] Faddeev L. D., Popov V. N., «Phys. Lett.», 1967, v. 25B, p. 29–30; [2] Попов В. Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, М., 1976; [3] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, 2 изд., М., 1988.

С. А. Федотов.

ФАДДЕЕВА – ПОПОВА ДУХИ – вспомогательные поля, позволяющие записать производящий функционал функций Грина калибровочно-инвариантной теории в виде функционального интеграла от локального эффективного действия. В теории Янга – Миллса эффективное действие можно представить в виде:

$$S = \int \mathrm{tr}\left[\frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}\bar{c}(\Box c - g\partial_\mu [A_\mu, c])\right] dx. \quad (1)$$

Скалярные поля $\bar{c}(x)$, $c(x)$, принимающие значения в алгебре Ли калибровочной группы, называют духами Фаддеева – Попова. По отношению к базису генераторов t^a поля $\bar{c}(x)$, $c(x)$ определяются своими коэффициентами $\bar{c}^a(x)$, $c^a(x)$:

$$\bar{c}(x) = \bar{c}^a(x)\,t^a,\; c(x) = c^a(x)\,t^a. \qquad (2)$$

Ф.– П. д. подчиняются статистике Ферми – Дирака и соответственно описываются антикоммутирующими функциями. Ф.– П. д. отсутствуют в наблюдаемых асимптотич. состояниях. Их роль состоит в компенсации вкладов нефизич. продольных и временных компонент калибровочного поля и тем самым обеспечении условия унитарности в физич. пространстве.

А. А. Славнов.

ФАЗА – см. *Быстро-медленная система, Осциллирующий интеграл, Усреднения метод, Фазовый переход.*

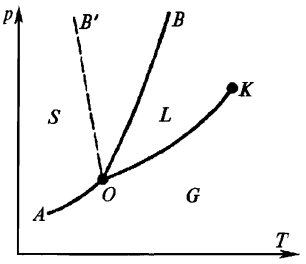
ФАЗА волны – см. *Звуковые волны.*

ФАЗА рассеяния – см. *Рассеяния теория.*

ФАЗА свободного гармонического колебания – см. *Свободное гармоническое колебание.*

ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА, диаграмма состояния, диаграмма равновесия,– геометрическое изображение равновесных состояний термодинамической системы при разных значениях параметров, определяющих эти состояния: температуры T, давления p, состава системы (концентраций компонентов x_i), мольного объема v, напряженностей электрического и магнитного полей и др. Ф. д. дает информацию о фазовом составе системы в зависимости от T, p, x_i и других параметров. В простейшем случае, когда

система состоит только из одного компонента, Ф. д. представляет собой трехмерную пространственную фигуру (см. рис.), построенную в трех прямоугольных координатных осях, по к-рым откладывают значения T, p и v (или других параметров). Обычно рассматривают проекции трехмерной Ф. д. на одну из координатных плоскостей (чаще на плоскость p, T). Любая точка Ф. д. (фигуративная точка) изображает равновесное состояние вещества при данных значениях p и T. Точка O (тройная точка) соответствует равновесию трех фаз вещества: твердой, жидкой и газообразной. В точке O пересекаются три кривые: OA (кривая возгонки, или сублимации), каждая точка к-рой соответствует равновесию твердой и газообразной фаз вещества; OK (кривая испарения) – жидкой и газообразной фазам; кривая плавления OB (или OB') – твердой и жидкой фазам (OB для веществ, у к-рых температура плавления $T_{пл}$ растет с давлением, OB' для веществ с уменьшающейся $T_{пл}$ с ростом p). Эти кривые делят плоскость Ф. д. на области существования каждой из трех фаз: твердой (S), жидкой (L) и газообразной (G). В точке K – критической точке исчезает различие между свойствами жидкости и газа. Согласно правилу фаз Гиббса, точке O соответствует безвариантное равновесие, точкам на кривых OA, OB (OB') и OK – моновариантное равновесие, а точкам в каждой из областей S, L и G – дивариантное (двухвариантное) равновесие. При существовании у вещества полиморфных модификаций Ф. д. усложняется (число тройных точек равно числу полиморфных превращений).



Фазовая диаграмма равновесного состояния вещества при данных значениях температуры T и давления p.

Для построения Ф. д. используют данные термич. анализа, рентгеновского структурного анализа, оптич. и электронной микроскопии, нейтронографии, дилатометрии, измерений твердости и других методов.

Лит.: [1] Аносов В. Я., Краткое введение в физико-химический анализ, М., 1959; [2] Вол А. Е., Строение и свойства двойных металлических систем, т. 1–2, М., 1959–62; [3] Вол А. Е., Каган И. К., Строение и свойства двойных металлических систем, т. 3, М., 1976; [4] Петров Д. А., Тройные системы, М., 1953; [5] Воловик Б. Е., Захаров М. В., Тройные и четверные системы, М., 1948; [6] Палатник Л. С., Ландау А. И., Фазовые равновесия в многокомпонентных системах, Харьков, 1961. *С. А. Погодин.*

ФАЗОВАЯ КРИВАЯ, фазовая траектория,– кривая в *фазовом пространстве* некоторой системы, изображающая изменение состояния этой системы с течением времени. В частности, Ф. к. обыкновенного дифференциального уравнения $dx/dt = V(x, t)$ – множество значений функции $t \mapsto x(t)$, являющейся решением этого уравнения. Термин «Ф. к.» обычно употребляют только в отношении автономных систем, когда закон, определяющий эволюцию системы, не зависит явно от времени. В этом случае никакие две различные Ф. к. не имеют общих точек, и все фазовое пространство представляется в виде объединения непересекающихся Ф. к. Под Ф. к. векторного поля V понимают Ф. к. соответствующего автономного уравнения $dx/dt = V(x)$.

См. также *Фазовый поток.* *М. Б. Севрюк.*

ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ – скорость перемещения фазы волны в определенном направлении. В случае монохроматич. плоской волны вида

$$u(x, t) = A\cos\varphi = A\cos(\omega t - kx)$$

(где A – амплитуда, φ – фаза, ω – круговая частота, k – волновое число, t – время, x – расстояние, отсчитываемое в направлении распространения волны) фазовые фронты или плоскости постоянной фазы $\varphi = \text{const}$ перемещаются в пространстве вдоль x с Ф. с.

$$v_\varphi = v_x = \omega/k.$$

Однако в любом ином направлении ξ, составляющем с x угол α ($\xi = x\cos\alpha$), скорость перемещения фазы превышает v_x, поскольку

$$v_\xi = v_x/\cos\alpha.$$

Таким образом, в отличие от *волнового вектора* $\boldsymbol{k}$, Ф. с. не является векторной величиной в обычном смысле и может даже произвольно превышать скорость распространения света c. Волны с $v_\varphi > c$ называются быстрыми, а с $v_\varphi < c$ – медленными. Различают также прямые волны, фазовые и групповые скорости в к-рых направлены в одну сторону, и обратные волны, в к-рых эти скорости направлены противоположно друг другу.

Зависимость Ф. с. от частоты ω определяет дисперсию волн, что приводит к искажению формы передаваемого сигнала конечной длительности, за исключением нек-рых особых случаев, когда эти искажения компенсируются нелинейными эффектами. *М. А. Миллер.*

ФАЗОВАЯ ТОЧКА – элемент *фазового пространства*, то есть одно из возможных состояний эволюционирующей системы. См. также *Динамическая система.* *М. Б. Севрюк.*

ФАЗОВАЯ ТРАЕКТОРИЯ – см. *Фазовая кривая, Фазовое пространство, Динамическая система.*

ФАЗОВОЕ КОЛЕБАНИЕ – см. *Нелинейный резонанс.*

ФАЗОВОЕ МНОГООБРАЗИЕ – *фазовое пространство*, наделенное естественной структурой дифференцируемого многообразия (может быть, с особенностями или краем). К конечномерным дифференцируемым многообразиям относятся фазовые пространства большинства систем, рассматриваемых в аналитич. механике и классич. статистич. физике. *М. Б. Севрюк.*

ФАЗОВОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ – см. *Фазовый переход.*

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО – множество всевозможных мгновенных состояний некоторой системы, эволюционирующей во времени. При этом обычно предполагается, что эволюционный процесс детерминирован, то есть состояние системы в начальный момент времени однозначно определяет ее будущее (а иногда и прошлое). Напр., Ф. п. механич. системы есть совокупность всех наборов (обобщенных) координат и импульсов. Если $dx/dt = V(x, t)$ – обыкновенное дифференциальное уравнение, заданное на многообразии M, то под Ф. п. этого уравнения понимается многообразие M. Аналогично, если эволюция системы задана отображением $A: M \to M$ множества M, то оно является Ф. п. этой системы. Ф. п. уравнения

$$x^{(n)} = V(x^{(n-1)}, \ldots, x', x, t),$$

где $x \in \mathbb{R}$, есть mn-мерное пространство наборов $(x^{(n-1)}, \ldots, x', x)$.

Элементы Ф. п. называются фазовыми точками.

В зависимости от рассматриваемой задачи Ф. п. может быть наделено структурой топологич. или метрич. пространства, дифференцируемого или симплектич. многообразия, пространства с мерой, группы Ли и т. д.

См. также *Динамическая система, Случайный процесс.*

Лит.: [1] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1984; [2] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 1, М., 1985, с. 7–149; [3] Аносов Д. В. [и др.], там же, с. 151–242. *М. Б. Севрюк.*

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО в статистической физике – многомерное пространство, осями к-рого служат все обобщенные координаты q_i и импульсы p_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, механической системы с N степенями свободы. Таким образом, Ф. п. имеет размерность $2N$. Состояние системы изображается в Ф. п. точкой с координатами $q_1, p_1; \ldots; q_N, p_N$, а изменение состояния системы во времени – движением точки вдоль линии, называемой фазовой траекторией. Точки, соответствующие определенному зна-

чению энергии $\mathscr{E}$ системы, образуют в Ф. п. $(2N-1)$-мерную поверхность, делящую пространство на две части — более высоких и более низких значений энергии. Поверхности различных значений энергии не пересекаются. Траектории замкнутой системы (с постоянным значением $\mathscr{E}$) лежат на этих поверхностях. В принципе траектория может быть рассчитана на основе законов механики; такой расчет можно осуществить практически, если число частиц системы не слишком велико. Для статистич. описания состояния системы из многих частиц вводится понятие *фазового объема* (элемента объема Ф. п.) и *распределения функции* системы — вероятности пребывания точки, изображающей состояние системы, в любом элементе фазового объема. Понятие Ф. п.— основное для классич. статистич. физики (механики), изучающей функции распределения системы из многих частиц. *Д. Н. Зубарев.*

ФАЗОВОЕ РАССЛОЕНИЕ — см. *Фазовый переход.*

ФАЗОВОЕ СРЕДНЕЕ — см. *Эргодическая теорема.*

ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ВЕКТОР — см. *Динамическая система.*

ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ — см. *Рассеяния теория.*

ФАЗОВЫЙ ОБЪЕМ — элемент объема *фазового пространства.* Для механич. системы с N степенями свободы элементарный Ф. о. равен

$$dpdq = dp_1 dq_1 \ldots dp_N dq_N,$$

где $q_1, \ldots, q_N$ — обобщенные координаты, а $p_1, \ldots, p_N$ — обобщенные импульсы системы. Ф. о. конечной фазовой области G равен $2N$-мерному интегралу

$$\int_G dp\,dq.$$

Если система описывается *Гамильтона уравнениями*, то при движении частиц Ф. о. остается неизменным (*Лиувилля теорема*). Это позволяет ввести нормированные *распределения функции* в фазовом пространстве.

См. также *Интегральный инвариант.* *Д. Н. Зубарев.*

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД, фазовое превращение, — переход между различными макроскопическими состояниями (фазами) многочастичной системы, происходящий при определенных значениях внешних параметров (температуры T, давления P, магнитного поля H и т. п.) в так наз. точке перехода. Ф. п. следует отличать от постепенных превращений одного состояния в другое (напр., ионизация атомарного или молекулярного газа и превращение его в плазму), происходящих в целом интервале параметров; иногда такие превращения называются фазовыми переходами в широком смысле. Ф. п.— кооперативные явления, происходящие в системах, состоящих из большого (строго говоря, бесконечного) числа частиц. Ф. п. происходят как в равновесных термодинамич. системах (напр., Ф. п. из парамагнитного в ферромагнитное состояние при понижении температуры), так и в системах, далеких от термодинамич. равновесия (напр., переход лазера в состояние когерентной генерации при увеличении уровня накачки). Далее (если не оговорено особо) обсуждаются Ф. п. в равновесных системах.

Обычно различают Ф. п. 1-го рода, происходящие с выделением или поглощением теплоты и сопровождающиеся скачками удельного объема, и Ф. п. 2-го рода, происходящие непрерывным образом, но сопровождающиеся аномальным возрастанием флуктуационных явлений.

Точка Ф. п. 1-го рода характеризуется равенством удельных энергий Гиббса (термодинамич. потенциалов) двух фаз, между к-рыми происходит переход:

$$\Phi_1(T, P, H) = \Phi_2(T, P, H).$$

При этом производные термодинамич. потенциалов $\Phi_{1,2}$ по параметрам T, P, ... (то есть энтропия, удельный объем и т. п.), вообще говоря, не совпадают. Поэтому Ф. п. 1-го рода связаны со скачкообразными изменениями этих величин. В нек-рой окрестности точки Ф. п. 1-го рода в обеих фазах реализуются локальные минимумы термодинамич. потенциалов: одна из фаз является абсолютно устойчивой, а другая — метастабильной. Для каждой из фаз, рассматриваемых по отдельности, точка Ф. п. 1-го рода ничем не выделена, в частности процессы установления термодинамич. равновесия не испытывают замедления в окрестности этой точки, в то время как процесс превращения одной фазы в другую резко замедляется. Поэтому для Ф. п. 1-го рода характерны явления гистерезиса (напр., переохлаждение и перегрев), когда первоначально стабильная фаза при прохождении точки равновесия фаз сохраняется как метастабильная в нек-ром интервале параметров. В точке равновесия обе фазы могут сосуществовать бесконечно долго, в этом случае имеет место так наз. фазовое расслоение.

Ф. п. 1-го рода широко распространены в природе. К ним относятся испарение и конденсация, плавление и кристаллизация, структурный переход графита в алмаз при высоком давлении, опрокидывание подрешеток антиферромагнетиков во внешнем магнитном поле и др. Примером низкотемпературных Ф. п. 1-го рода может служить разрушение сверхпроводимости чистых сверхпроводников сильным магнитным полем.

Точка Ф. п. 2-го рода является особой для термодинамич. величин системы; при прохождении этой точки первоначально устойчивая фаза более не соответствует никакому (даже метастабильному) минимуму свободной энергии и потому не может существовать. Явления перегрева и переохлаждения при Ф. п. 2-го рода отсутствуют. Особым видом Ф. п. 2-го рода являются критич. точки системы жидкость — пар или аналогичные им критич. точки растворов. Ф. п. 2-го рода характеризуются аномальным возрастанием величин, характеризующих отклик системы на внешние воздействия,— обобщенных восприимчивостей.

Вблизи точек Ф. п. 2-го рода наблюдается также аномальный рост флуктуаций.

Изменение состояния системы при Ф. п. 2-го рода можно описать как изменение ее симметрии (напр., переход кристалла из фазы с кубич. симметрией в тетрагональную). Связь между Ф. п. 2-го рода и изменением симметрии системы лежит в основе общей теории Ф. п.

В точке Ф. п. 2-го рода аномально усиливаются флуктуации не только параметра порядка, но и ряда других величин (к ним относятся, в частности, плотность энергии, тензор напряжений и нек-рые другие). Все вместе они образуют набор аномально флуктуирующих величин A_i. Задача теории — вычисление *корреляционных функций* величин $A_i(x)$, через к-рые выражаются аномальные вклады в термодинамич. величины. Центральным для флуктуационной теории является представление о *масштабной инвариантности* (так наз. скейлинге) флуктуаций в точке Ф. п. Масштабная инвариантность означает отсутствие в системе какого-либо характерного пространственного масштаба, превышающего масштаб постоянной решетки: иначе говоря, на всех пространственных масштабах флуктуации ведут себя подобным образом. Это означает, что подобное изменение всех расстояний $|x_i - x_j|$, больших по сравнению с постоянной решетки и входящих в какую-либо корреляционную функцию

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle A_1(x_1) A_2(x_2) \ldots A_n(x_n) \rangle,$$

сводится к изменению единицы длины, причем одновременно изменяются и единицы измерения полей $A_i(x)$. Каждая величина $A_i(x)$ характеризуется своим размерным показателем (индексом) Δ_A в преобразовании подобия:

$$A(\lambda x) \to \lambda^{-\Delta_A} A(x).$$

Это соотношение является математич. выражением гипотезы подобия (масштабной инвариантности) флуктуаций в точке Ф. п. 2-го рода. Подчеркнем, что размерные показатели Δ_A не совпадают с обычными физич. размерностями величин A_i, поскольку в их определение входят размерные микроскопич. параметры, не влияющие на свойства ано-

мальных флуктуаций и не меняющиеся при масштабных преобразованиях.

Масштабная инвариантность позволяет определить вид парных корреляционных функций с точностью до констант:

$$\langle A(x)B(x')\rangle = Z_{AB}|x-x'|^{-(\Delta_A+\Delta_B)}.$$

В окрестности Ф. п. 2-го рода флуктуации характеризуются единственным размерным параметром – радиусом корреляции R_c. Все термодинамич. величины, характеризующие Ф. п. 2-го рода (точнее, их аномальные части), оказываются степенными функциями R_c. Из соотношений подобия можно найти общий вид корреляционных функций вблизи T_c:

$$\langle A(x)B(x')\rangle = |x-x'|^{-(\Delta_A+\Delta_B)} g(|x-x'|/R_c).$$

В ряде двумерных систем Ф. п. 2-го рода не связан с появлением макроскопич. параметра порядка, но приводит к качественному изменению свойств системы. Это относится, в частности, к переходам в сверхтекучее и сверхпроводящее состояния в тонких пленках, где появляется ненулевая сверхтекучая плотность в отсутствие бозе-конденсата. Отсутствие макроскопич. параметра порядка связано в этих случаях с аномально сильными флуктуациями в упорядоченной фазе.

Различие между Ф. п. 1-го рода и 2-го рода является несколько условным, так как нередко наблюдаются Ф. п. 1-го рода с малой теплотой перехода и сильными флуктуациями, характерными для Ф. п. 2-го рода.

В ряде случаев движение вдоль кривой Ф. п. 1-го рода при изменении внешних параметров приводит к уменьшению теплоты перехода и скачка удельного объема вплоть до полного их исчезновения, после чего Ф. п. между теми же фазами происходит как Ф. п. 2-го рода. Соответствующая точка на кривой перехода называется трикритической точкой, она характеризуется резкой аномалией теплоемкости в упорядоченной фазе. Вблизи трикритич. точки флуктуации столь же сильны, как вблизи любой точки Ф. п. 2-го рода, однако их взаимодействие между собой аномально слабое.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976; [2] Паташинский А. З., Покровский В. Л., Флуктуационная теория фазовых переходов, 2 изд., М., 1982.

М. В. Фейгельман.

ФАЗОВЫЙ ПОТОК – однопараметрическая группа преобразований, то есть набор занумерованных вещественными числами t взаимно однозначных отображений $g^t: M \to M$ некоторого множества M (фазового пространства) на себя, удовлетворяющих групповому тождеству $g^{t+\tau} = g^t g^\tau$. Другими словами, Ф. п. есть действие аддитивной группы вещественных чисел на M, орбиты этого действия называются *фазовыми кривыми*. Основной пример – Ф. п. g^t векторного поля V на гладком многообразии: в этом случае $x(t) = g^t(x_0)$ – решение автономного обыкновенного дифференциального уравнения $dx/dt = V(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Если не все решения указанного уравнения неограниченно продолжаются в обе стороны, то $g^t(x)$ определено не при всех t и x, чтобы это подчеркнуть, иногда говорят о локальном Ф. п.

М. Б. Севрюк.

ФАЗОВЫЙ СДВИГ – см. *Набег фазы.*

ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОД – метод перехода от *радиального уравнения Шредингера* для решения задачи рассеяния к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка относительно фазовой функции $\delta_l(k, r)$:

$$\frac{d}{dr}\delta_l = -\frac{1}{k}V(r)[\cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)]^2$$

с граничным условием $\delta_l(k, 0) = 0$, где j_l и n_l – сферические функции Бесселя. Величина $\delta_l(k, R)$ определяет фазу рассеяния на «обрезанном» потенциале $V_R(r)$:

$$V_R(r) = V(r), \text{ при } r < R,$$
$$V_R(r) = 0 \text{ при } r \geqslant R.$$

Предел

$$\delta_l(k) = \lim_{R\to\infty} \delta_l(k, R)$$

равен фазе рассеяния на потенциале $V(r)$. Ф. ф. м.– эффективное средство для численного расчета и качественного анализа рассеяния.

Лит.: [1] Бабиков В. В., Метод фазовых функций в квантовой механике, 3 изд., М., 1988; [2] Калоджеро Ф., Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния, пер. с англ., М., 1972.

С. П. Меркурьев, А. А. Квицинский.

ФАКТОРПРОСТРАНСТВО – см. *Векторное пространство.*

ФАКТОРСИСТЕМА динамической системы – см. *Изоморфизм* динамических систем.

ФАМА ОСОБЕННОСТЬ – *критическая точка* функции $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, заданная формулой

$$f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^{k_1} + \ldots + z_n^{k_n}$$

для некоторых $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.

С. В. Чмутов.

ФЕЙГЕНБАУМА СЦЕНАРИЙ стохастизации – появление *странного аттрактора* в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода. М. Фейгенбаумом (M. Feigenbaum, 1978) доказано, что последовательности бифуркаций удвоения периода у конечномерных диссипативных фазовых потоков удовлетворяют нек-рым универсальным законам подобия, связывающим последовательные бифуркационные значения параметра неравновесности, а также конфигурации соответствующих периодич. точек в фазовом пространстве динамич. системы.

А. С. Монин.

ФЕЙНМАНА ДИАГРАММА – граф, набор которого строится по правилам Фейнмана, характерным для рассматриваемой квантовополевой модели, в произвольном порядке теории возмущений. В соответствии с этими правилами каждому графу сопоставляется фейнмановская амплитуда, представляющая собой вклад в какую-либо квантовополевую величину: матрицу рассеяния, составные операторы (поля) и их произведения, функции Грина, матричные элементы различных операторов и т. д. На распространенном «физическом» жаргоне термином «Ф. д.» принято называть не только сам граф, но и сопоставленную ему фейнмановскую амплитуду.

Граф – это упорядоченная совокупность $\{\mathcal{V}, \mathcal{L}, \pi_+, \pi_-\}$, где $\mathcal{V}$ – непустое конечное множество, к-рое состоит из V элементов, называемых вершинами, $\mathcal{L}$ – конечное множество L элементов, называемых внутренними линиями, а $\pi_\pm: \mathcal{L} \to \mathcal{V}$ – отображения, к-рые каждой линии $l \in \mathcal{L}$ ставят в соответствие ее начало $\pi_+(l) \in \mathcal{V}$ и конец $\pi_-(l) \in \mathcal{V}$. Вершина i и линия l инцидентны друг другу, если $\pi_+(l) = i$ или (и) $\pi_-(l) = i$. Для графа можно определить $(V \times L)$-матрицу инцидентности e с матричными элементами $e_{il} = \pm 1$, если $i = \pi_\pm(l)$, $\pi_+(l) \neq \pi_-(l)$ и $e_{il} = 0$ в остальных случаях. В Ф. д. (графе) выделяют подмножество вершин, называемых внешними. С ними связаны аргументы (4-мерные импульсы или – после перехода к преобразованию Фурье – координаты), от к-рых зависит фейнмановская амплитуда.

Таким образом, Ф. д. (граф) – это упорядоченная совокупность $\{\mathcal{V}, \mathcal{L}, \pi_\pm; \mathcal{E}, \pi, \varphi\}$, где $\{\mathcal{V}, \mathcal{L}, \pi_\pm\}$ – граф, $\mathcal{E}$ – множество E внешних линий, $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ – отображение, сопоставляющее внешней линии l инцидентную ей вершину $\pi(l)$, а $\varphi: \mathcal{E} \to \{+1, -1\}$ – отображение, определяющее направление внешней линии. При $E = 0$ Ф. д. называется вакуумной, при $E = 2$ – собственно-энергетической, при $E = 3$ или 4 – вершинной, а при $E = 1$ ее называют головастиком. Для Ф. д. матрица инцидентности e естественным образом расширяется до $(V \times (L + E))$-матрицы, причем при $l \in \mathcal{E}$ выполняются соот-

ношения $e_{il}=\varphi(l)$, если $\varphi(l)=i$, и $e_{il}=0$, если $\varphi(l)\neq i$.

Правила построения Ф. д., дающих вклад в матрицу рассеяния, определяются лагранжианом взаимодействия $\mathscr{L}_{\text{int}}(x)$. Так, в скалярной φ^4-теории с

$$\mathscr{L}_{\text{int}}=g\varphi^4/4!$$

(здесь g – константа взаимодействия) в S-матричных графах в каждой вершине соединяются четыре линии (если в графе отсутствуют линии, у к-рых начало совпадает с концом). Для других квантовополевых операторов – составных полей и их произведений – встречаются специальные вершины с произвольным числом инцидентных им линий. Согласно правилам Фейнмана, в скалярной φ^4-теории каждой линии сопоставляется пропагатор (причинная функция свободного поля)

$$\mathscr{D}^c(p)=\frac{1}{m^2-p^2-i0}$$

(здесь m – масса), а вершине – фактор, пропорциональный константе взаимодействия и δ-функции от суммы втекающих в эту вершину 4-мерных импульсов $p=(p^0, \boldsymbol{p})$. В результате фейнмановская амплитуда (диаграмма) представляется в виде:

$$G_\Gamma(q_1,\ldots,q_n)=(2\pi)^4\delta\Big(\sum_i q_i\Big)F_\Gamma(q_1,\ldots,q_n), \qquad (1)$$

где

$$F_\Gamma(q_1,\ldots,q_n)=(2\pi)^{-4N}i^{-L}\int dk_1\ldots dk_N\, I_\Gamma(p_1,\ldots,p_L) \qquad (2)$$

– фейнмановский интеграл по 4-мерным петлевым импульсам $(k_1,\ldots,k_N)$, а $dk_i=dk_1^0d\boldsymbol{k}_i$. Подинтегральное выражение I_Γ представляет собой произведение

$$\prod_{l\in\mathscr{L}}\mathscr{D}_l(p_l)$$

пропагаторов, в к-ром внутренние импульсы p_l линейно выражены через внешние импульсы q_i и петлевые импульсы k_i. Число независимых петлевых импульсов определяется по формуле $N=L-V+1$; оно равно числу независимых циклов (петель) графа. Тогда фейнмановский интеграл (2) приобретет вид:

$$(2\pi)^{-8}\int dk_1dk_2\frac{1}{A},$$

где

$$A=(m^2-k_1^2-i0)(m^2-(k_1-k_2)^2-i0)\times$$
$$\times(m^2-(q_1+k_2)^2-i0)(m^2-(q_2-k_2)^2-i0).$$

С вершиной Ф. д. связывают акт взаимодействия частиц, а с линией – распространение свободной частицы. Частицы, соответствующие внутренним линиям Ф. д., называют виртуальными; для них не выполняется соотношение между энергией и импульсом, присущее реальным частицам. Метод Ф. д. применяется не только в квантовой теории поля, но и в теории твердого тела и статистич. механике.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979; [3] Иц икс он К., Зюбер Ж.-Б., Квантовая теория поля, т. 1–2, пер. с англ., М., 1984; [4] Коллинз Дж., Перенормировка, пер. с англ., М., 1988; [5] Смирнов В. А., Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд, М., 1990. *В. А. Смирнов.*

ФЕЙНМАНА МЕРА – комплексная гауссова мера в пространстве непрерывных функций. Ф. м. непосредственно связана с представлением решения уравнения Шредингера

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{h^2}{2m}\Delta\psi-U(x)\psi$$

в виде интеграла по траекториям, полученным Р. Фейнманом [1]. Построение Ф. м. можно провести, исходя из меры Винера (см. *Винера мера*), связанной с уравнением

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2\sigma^2}\Delta\psi,$$

путем перехода $\sigma^2\to -i\frac{m}{h}$ (см. [3]). Основной трудностью, возникающей при построении строгой теории Ф. м., является то, что даже конечномерные распределения, соответствующие данной мере, не являются абсолютно интегрируемыми [2].

Лит.: [1] Feynmann R., «Rev. Mod. Phys.», 1948, v. 20, p. 367–87; [2] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983; [3] Гельфанд И. М., Яглом А. М., «Успехи математич. наук», 1956, т. 11, в. 1, с. 77–114. *С. А. Федотов.*

ФЕЙНМАНА ПРАВИЛА – см. *Квантовая электродинамика.*

ФЕЙНМАНА СКЕЙЛИНГ – *масштабная инвариантность*, характеризующая спектры частиц в процессах множественного рождения при столкновении адронов высокой энергии и заключающаяся в том, что при высокой энергии первичной частицы форма спектра рожденных частиц не зависит от энергии первичной частицы. Она зависит лишь от безразмерной переменной x, равной продольному импульсу рожденной частицы p_l, деленному на максимальную энергию спектра, и от поперечного импульса частицы p_t. Проявления этой закономерности были обнаружены при исследовании космич. лучей. С конца 60-х гг., когда начал работать серпуховской ускоритель, это явление было изучено на существенно более высоком уровне точности. Тогда же его анализ на языке партонной модели был дан Р. Фейнманом (R. Feynman) и само явление получило название «Ф. с.». *Л. Б. Окунь.*

ФЕЙНМАНА – КАЦА ФОРМУЛА – собирательное название формул, выражающих те или иные средние (функции Грина, корреляционные функции) для квантовой системы в виде некоторого функционального интеграла по «классическим траекториям» этой системы.

Ф.– К. ф. применительно к бозонному евклидову квантовому полю $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^{\nu+1}$, в пространстве $\mathbb{R}^{\nu+1}$ приводит к следующему рецепту построения *марковского поля* в $\mathbb{R}^{\nu+1}$, описывающего бозонное поле. Классич. евклидово действие поля имеет вид

$$S_{\text{евкл}}(\varphi)=S^{\text{своб}}_{\text{евкл}}(\varphi)+S^{\text{inf}}_{\text{евкл}},$$

где $S^{\text{своб}}_{\text{евкл}}$ – евклидово действие для «свободного поля», имеющее вид положительно определенной квадратичной формы от полевой переменной φ, а $S^{\text{inf}}_{\text{евкл}}$ – часть действия, соответствующая взаимодействию (самодействию) поля и имеющая обычно полиномиальный вид.

С помощью квадратичной формы $S^{\text{своб}}_{\text{евкл}}$ строится «свободная гауссова мера» μ_0, а истинная мера μ_Λ в конечном объеме $\Lambda\subset\mathbb{R}^{\nu+1}$ задается как гиббсовская «перестройка» меры μ_0 вида:

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_0}=\frac{1}{Z_\Lambda}\exp\Big\{-S^{\text{inf},\Lambda}_{\text{евкл пер}}(\varphi)\Big\},$$

где $S^{\text{inf},\Lambda}_{\text{евкл пер}}$ – определенным образом перенормированное взаимодействие, ограниченное на конечный объем Λ. Затем рассматривается предельная мера

$$\mu=\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^{\nu+1}}\mu_\lambda.$$

Эта программа в настоящее время полностью выполнена для полей в $\mathbb{R}^2$ (и нек-рых полей в $\mathbb{R}^3$), но наталкивается на значительные трудности для случая полей в $\mathbb{R}^4$.

См. также *Термодинамический предел* для равновесных состояний.

Лит.: [1] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984. *Р. А. Минлос.*

ФЕРМИ ПОВЕРХНОСТЬ – см. *Перколяция.*

ФЕРМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ в теории многократного рассеяния – функция, описывающая пространственное и угловое распределение быстрых заряженных частиц после прохождения ими слоя рассеивающего вещества; получено Э. Ферми (E. Fermi, 1940). Ф. р. является плотностью вероятности $f(z, \rho, \vartheta)$ того, что быстрая заряженная частица с энергией E, проникшая в вещество на глубину z, имеет поперечное смещение ρ и движется под углом ϑ по отношению к первоначальному (при влете в вещество) направлению движения. Векторы $\rho=(x, y)$ и $\vartheta=(\vartheta_x, \vartheta_y)$ – двумерные векторы в плоскости, ортогональной оси z. Система координат выбрана таким образом, что начало ее находится в точке влета частицы в вещество, а ось z направлена вдоль вектора скорости влета. Глубину проникновения частицы в вещество принято измерять в единицах радиационной длины L или в t единицах $t=z/L$,

$$L^{-1}=\frac{4Z^2r_0^2n}{137}\ln 183Z^{-1/3},$$

где Z – атомный номер вещества, n – плотность вещества, $r_0=e^2/mc^2$ – классич. радиус электрона. Ф. р. при этом есть функция $f(t, \rho, \vartheta)$.

Многократное рассеяние движущейся заряженной частицы на атомах вещества приводит, в основном, к малым в каждом отдельном акте рассеяния отклонениям, $|\vartheta| \ll 1$. В этом приближении процесс многократного рассеяния описывается кинетич. уравнением следующего вида:

$$\frac{\partial f(t,\rho,\nu)}{\partial t}+\nu\frac{\partial f}{\partial \rho}=\frac{E_k^2}{4E^2}\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}f,$$

где $E_k^2\simeq(4\pi\cdot137)^{1/2}mc^2=21$ МэВ. Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $f(t, \rho, \vartheta)|_{t=0}=\delta(\rho)\delta(\vartheta)$ и условию нормировки $\int d\rho\, d\vartheta\, f(t, \rho, \vartheta)=1$, и носит название Ф. р. в теории многократного рассеяния:

$$f(t,\rho,\nu)=\frac{12}{\pi^2t^2\langle\nu^2\rangle^2}\exp\left\{-\frac{4}{\nu^2}\left(\nu^2+\frac{3\rho^2}{t^2}-\frac{3\nu\rho}{t}\right)\right\},$$

где $\vartheta^2=\frac{E_k^2}{E^2}t$ – среднеквадратичный угол отклонения быстрой заряженной частицы, движущейся в веществе, обусловленный эффектом многократного рассеяния.

Лит.: [1] Росси Б., Грейзен К., Взаимодействие космических лучей с веществом, пер. с англ., М., 1948; [2] Тер-Микаэлян М. Л., Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, Ереван, 1969.

Н. В. Ласкин.

ФЕРМИ СТАТИСТИКА – см. *Ферми – Дирака статистика.*

ФЕРМИ – ДИРАКА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – среднее число заполнения квантового уровня с импульсом p и спином σ для идеального ферми-газа. Такая система описывается в рамках *большого канонического ансамбля* в представлении *вторичного квантования* гамильтонианом

$$H=\sum\nolimits_{p,\sigma}(\varepsilon_p-\mu)a_{p\sigma}^+a_{p\sigma},$$

где $a_{p\sigma}^+$, $a_{p\sigma}$ – операторы рождения и уничтожения фермионов в состоянии с импульсом p и спином σ, ε_p – полуограниченный снизу энергетич. спектр фермионов, μ – химич. потенциал. Система в целом описывается матрицей плотности большого канонич. ансамбля

$$\rho=\Xi^{-1}\exp\left[\beta\sum\nolimits_{p,\sigma}(\mu-\varepsilon_p)a_{p\sigma}^+a_{p\sigma}\right],$$

где Ξ – большая статистич. сумма, β – обратная температура. Среднее число заполнения уровня (p, σ):

$$\langle n_{p,\sigma}\rangle=\mathrm{Tr}\left[a_{p\sigma}^+a_{p\sigma}\rho\right]$$

для идеального ферми-газа дает Ф.– Д. р.:

$$\langle n_{p,\sigma}\rangle=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p-\mu)}+1}.$$

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984.

Д. П. Санкович.

ФЕРМИ – ДИРАКА СТАТИСТИКА, статистика Ферми,– статистика, при которой волновые функции, описывающие состояния частиц, антисимметричны относительно перестановок аргументов:

$$\psi(x_1, \ldots, x_n)=(-1)^\sigma\psi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}),$$

σ – четность перестановок. Операторы рождения $\psi^+(x)$ и уничтожения $\psi(x)$ удовлетворяют канонич. антикоммутационным соотношениям, к-рые в скалярном случае имеют вид:

$$\{\psi(x), \psi^+(x')\}=\delta(x-x'),$$

$$\{\psi(x), \psi(x')\}=0,\ \{\psi^+(x), \psi^+(x')\}=0.$$

В любом состоянии может находиться не больше одной частицы. В квантовой статистич. механике в случае Ф.–Д. с. гамильтонианы рассматриваются в гильбертовом пространстве состояний, состоящем из антисимметричных функций и статистич. средние берутся по антисимметричным состояниям.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Лекции по квантовой статистике, в кн.: Избранные труды, т. 2, Киев, 1970, с. 287–493.

Д. Я. Петрина.

ФЕРМИ-ЖИДКОСТЬ – вырожденная система взаимодействующих *фермионов*, обладающая спектром фермиевского типа. Низколежащие возбужденные состояния (квазичастицы) Ф.-ж. соответствуют состояниям идеального ферми-газа. В основе теории Ф.-ж. лежат понятие энергии квантовой системы как функционала от функции распределения квазичастиц $f: E=E\{f\}$ и комбинаторное выражение энтропии, экстремум к-рой при фиксированной энергии определяет равновесную функцию распределения квазичастиц. Теория Ф.-ж. была развита Л. Д. Ландау (см. [1]) для жидкого ^{3}He в нормальном состоянии, а для электронов нормальных металлов – В. П. Силиным [2]. Вторая вариационная производная от E по f, описывающая взаимодействие квазичастиц и называемая амплитудой Ландау, является феноменологич. параметром теории Ф.-ж.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1956, т. 30, в. 6, с. 1058; [2] Силин В. П., там же, 1957, т. 33, в. 2, с. 495.

В. В. Красильников.

ФЕРМИОН – квантовая частица или квазичастица, подчиняющаяся *Ферми – Дирака статистике*. Ф.– частица с полуцелым спином. Пространством состояний Ф. является антисимметричное *Фока пространство*. Для систем с переменным числом частиц (большой канонич. ансамбль) используется представление *вторичного квантования*.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1986; [2] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984.

Д. П. Санкович.

ФЕРМИОННОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ – см. *Квантовое стохастическое исчисление.*

ФЕРМИ-ЭНЕРГИЯ – значение граничной энергии ε_F идеального ферми-газа при нулевой температуре. В этом случае среднее число заполнения квантового уровня с импульсом p и спином σ следует из *Ферми – Дирака распределения* и имеет вид:

$$\langle n_{p\sigma}\rangle=\theta(\varepsilon_F-\varepsilon_p),$$

где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда: $\theta(x)=0$ при $x<0$ и $\theta(x)=1$ при $x>0$. Ф. э. определяется выражением

$$\varepsilon_F=\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)n^{2/3},$$

где n – средняя плотность фермионов массы m, $g=2\sigma+1$ – кратность вырождения уровня, $\hbar$ – постоянная Планка. Ф. э. совпадает со значением химич. потенциала идеального ферми-газа при нулевой температуре. Через Ф. э. выражаются другие термодинамич. функции идеального ферми-газа при нулевой температуре. Удельная внутренняя энергия:

$$\varepsilon = \frac{3}{5} n \varepsilon_F,$$

давление:

$$P = \frac{2}{5} n \varepsilon_F.$$

Для неидеальных фермиевских систем понятие Ф. э. носит феноменологич. характер.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.), Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984; [2] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978. *Д. П. Санкович.*

ФИГУРАТИВНАЯ ТОЧКА – см. *Фазовая диаграмма.*

ФИЗИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ СВЕТА – см. *Скорость света.*

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ – см. *Скорость света.*

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК – см. *Маятник.*

ФИЗИЧЕСКОЕ ПОЛЕ – физическая система, обладающая бесконечно большим числом степеней свободы. Относящиеся к такой системе физич. величины не локализованы на каких-либо отдельных материальных частицах с конечным числом степеней свободы, а непрерывно распределены по нек-рой области пространства. Примерами таких систем могут служить гравитационное и электромагнитное поля и волновые поля частиц в квантовой физике (электрон-позитронное, мезонное и т. п.). Для описания Ф. п. в каждый момент времени необходимо задать одну или несколько физич. величин в каждой точке области, где имеется поле, то есть задать полевую функцию. Пока речь идет о нерелятивистских процессах, понятие поля можно не вводить. Напр., при рассмотрении гравитационного поля или кулоновского взаимодействия двух частиц можно считать, что сила взаимодействия возникает лишь при наличии обеих частиц, полагая, что пространство вокруг частиц не играет особой роли в передаче взаимодействия. Такое представление соответствует концепции дальнодействия, или действия на расстоянии. Понятие дальнодействия, однако, является приближенным, только в нерелятивистском случае физически эквивалентным представлению о том, что действие заряда проявляется лишь при помещении второй, пробной частицы в область пространства, свойства к-рого уже изменены из-за наличия первой частицы. Взаимодействие при этом передается постепенно, от точки к точке, в таком измененном пространстве. Это и означает, что первая частица создает вокруг себя силовое гравитационное или электрич. поле. Эта концепция близкодействия находит подтверждение при рассмотрении релятивистских процессов. В этом случае, то есть при движении источников со скоростью, сравнимой со скоростью передачи взаимодействия, говорить о дальнодействии уже нельзя. Именно, изменение состояния одной частицы сопровождается, вообще говоря, изменением ее энергии и импульса, а изменение силы, действующей на другую частицу, наступает лишь через конечный промежуток времени. Доли энергии и импульса, отданные одной частицей и еще не принятые другой, принадлежат в течение этого времени их переносящему полю. Поле, переносящее взаимодействие, является, таким образом, само по себе физич. реальностью.

Понятие Ф. п. применимо при описании свойств всякой сплошной среды. Если сопоставить с каждой точкой среды определяющие ее состояние физич. величины (температуру, давление, натяжения и т. п.), то получится поле этих величин. В этом случае роль упругой среды для передачи взаимодействия очевидна. Первоначальная трудность представить себе немеханич. среду, способную переносить энергию и импульс, породила различные механич. модели эфира как среды, переносящей электромагнитные взаимодействия. Однако все механич. модели эфира противоречат принципу относительности Эйнштейна, и от них пришлось отказаться.

Простейший тип движения поля – волновое, для к-рого полевая функция периодически меняется во времени и от точки к точке. Вообще, любое состояние поля удобно представить в виде суперпозиции волн. Для волнового движения характерны явления дифракции и интерференции, невозможные в классич. механике частиц. С другой стороны, динамич. характеристики (энергия, импульс и т. д.) волн «размазаны» в пространстве, а не локализованы, как у классич. частиц.

Такое противопоставление волновых и корпускулярных свойств, присущее классич. механике, указывает на качественное различие в ней между Ф. п. и частицами. Однако опыт показывает, что на малых расстояниях, в атомных масштабах, это различие исчезает: у поля появляются корпускулярные свойства, а у частиц – волновые.

Квантовая механика ставит в соответствие каждой частице поле ее волновой функции, дающее распределение различных относящихся к частице физич. величин. Концепция поля является основной для описания свойств элементарных частиц и их взаимодействий. Конечная цель в этом случае – получение свойств частиц из уравнений поля и *перестановочных соотношений*, определяющих квантовые свойства материи. Возможный вид уравнений поля ограничен принципами симметрии и инвариантности, являющимися обобщением экспериментальных данных. Лоренц-ковариантность, напр., требует, чтобы волновые функции частиц преобразовывались по неприводимым представлениям группы Лоренца. Таких представлений бесконечно много, однако только часть из них реализована в природе и соответствует тем или иным элементарным частицам. Реально используются наиболее простые уравнения полей, являющиеся локальными и перенормируемыми. Попытки построения теорий, не удовлетворяющих этим требованиям (нелинейной, нелокальной и т. п. теорий поля), влекут за собой пересмотр ряда важнейших принципов, существенных при физич. интерпретации теории (принцип суперпозиции, положительность нормы волновой функции и т. д.).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 4 изд., М., 1963; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [3] Медведев Б. В., Начала теоретической физики, М., 1977; [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Квантовые поля, 2 изд., М., 1990. *В. П. Павлов.*

ФИКСИРОВАННАЯ ТОЧКА – точка в *фазовом пространстве* параметров (зарядов), в которой правые части системы дифференциальных уравнений *ренормализационной группы*, то есть *бета-функции*, обращаются в нуль. В этой точке эффективный заряд не эволюционирует и равен константе. В соответствии с общей классификацией устойчивости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений по Ляпунову различают устойчивые, неустойчивые и (в случае нескольких зарядов) седловые Ф. т. Примером Ф. т. является начало координат фазового пространства. В асимптотически свободных теориях (см. *Асимптотическая свобода*) нуль является ультрафиолетово-устойчивой и инфракрасно-неустойчивой Ф. т. Напротив, в нуль-зарядных теориях (см. *Нуль-заряд*) нуль является ультрафиолетово-неустойчивой и инфракрасно-устойчивой Ф. т. Нетривиальные Ф. т. играют важную роль в приложениях. Так, напр., в теории критич. явлений инфракрасно-устойчивые Ф. т. соответствуют точкам фазового перехода второго рода. Значения *аномальных размерностей* в этих точках дают значения критич. показателей, универсальных характеристик фазовых переходов, измеряемых в эксперименте.

В Ф. т. теория обладает масштабной (конформной) инвариантностью, что в ряде случаев, напр. в двумерных теориях, позволяет найти точное решение задачи. При этом каждая Ф. т. отвечает конформному классу универсальности.

Лит.: [1] Zinn-Justin J., Quantum field theory and the theory of critical phenomena, N. Y., 1989. *Д. И. Казаков.*

ФИНАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ – см. *Маркова цепь* с непрерывным временем.

ФИНИТНАЯ ФУНКЦИЯ – функция с компактным *носителем*.

ФИНИТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, обобщенная функция с компактным носителем,– *Шварца распределение* $g \in \mathcal{D}'(\omega)$, имеющее компактный *носитель* $\operatorname{supp} g$, где ω – область в $\mathbb{R}^n$. Всякое Ф. р. $g \in \mathcal{D}'(\omega)$ однозначно продолжается до линейного непрерывного функционала на более широком основном пространстве $\mathcal{E}(\omega)$, состоящем из всех функций $\Phi(x)$, имеющих непрерывные производные $D^{\alpha}\Phi(x)$ всех порядков $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в области ω, с топологией пространства Фреше, задаваемой полунормами

$$|\Phi| = \sup\{|D^{\alpha}\Phi(x)|;\ |\alpha| = p,\ x \in K\},$$

для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$, и компактов $K \subset \omega$. Здесь $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Более того, множество всех Ф.р. из $\mathcal{D}'(\omega)$ отождествляется с сопряженным пространством $\mathcal{E}'(\omega)$. Каждое Ф. р. $g \in \mathcal{E}'(\omega)$ имеет конечный порядок, то есть существуют мультииндекс α и мера $\mu(x)$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu \subset \omega$ такие, что

$$(g, \Phi) = \int D^{\alpha}\Phi(x)\, d\mu(x), \quad \Phi \in \mathcal{E}(\omega).$$

Лит.: [1] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1–2, P., 1950–51 (nouv. éd., P., 1978). *В. В. Жаринов.*

ФИНСЛЕРОВА МЕТРИКА, финслерова метрическая функция,– функция $F(x, y)$, где x^i – локальные координаты точек дифференцируемого многообразия, а y^i – координаты касательных векторов, опирающихся на эти точки. Ф. м. дает обобщение риманова определения длины вектора. F может быть любой достаточно гладкой скалярной функцией, положительно однородной степени 1 по y, то есть

$$F(x, ky) = kF(x, y),\ k > 0,$$

и подчиненной условиям $F > 0$ и $\det(g_{ij}) \neq 0$, где

$$g_{ij}(x, y) = (1/2)\partial^2 F^2/\partial y^i \partial y^j$$

называется финслеровым метрическим тензором. Финслеровы методы позволяют систематич. образом обобщать риманову геометрию и уравнения фундаментальных физич. полей.

Лит.: [1] Рунд Х., Дифференциальная геометрия финслеровых пространств, пер. с англ., М., 1981; [2] Асанов Г. С., Пономаренко С. Ф., Финслерово расслоение над пространством-временем, ассоциируемые калибровочные поля и связности, Кишинев, 1989; [3] Асанов Г. С., Расслоенное обобщение теории калибровочных полей, М., 1989; [4] его же, Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories, Dordrecht, 1985. *Г. С. Асанов.*

ФИТТИНГА РАЗЛОЖЕНИЕ – см. *Вес.*

ФЛОКЕ – БЛОХА ТЕОРЕМА – см. *Электроны в периодических полях.*

ФЛУКТУАЦИИ – отклонения значений физических величин (зависящих от случайных факторов) от их средних значений. Количественной характеристикой Ф. величины X является дисперсия:

$$\sigma_X^2 = \overline{(X - \bar{X})^2},$$

где $\bar{X}$ – среднее значение величины X, а черта сверху означает статистич. усреднение; среднеквадратич. отклонение:

$$\sigma_X = \sqrt{\overline{(X - \bar{X})^2}},$$

его относительная величина

$$\delta_X = \sigma_X / \bar{X}.$$

Существует связь между Ф. физич. величины в равновесном состоянии (к-рая при этом выражается через равновесные термодинамич. параметры) и неравновесными свойствами статистич. системы при внешних возмущениях. Она определяется флуктуационно-диссипативной теоремой.

Лит.: [1] Зубарев Д. Н., Неравновесная статистическая термодинамика, М., 1971. *М. А. Сташенко.*

ФЛЮКСОН – см. *Кинк.*

ФОКА ПРОСТРАНСТВО – пространство, представляющее собой тензорную алгебру над гильбертовым пространством $\mathcal{H}$. Пространство Фока $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^n,$$

где $\mathcal{H}^n = \bigotimes_{m=1}^{n} \mathcal{H}$, $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$. Если $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu})$, то элементы $\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ – такие последовательности функций $(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$, $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$, что

$$(\psi, \psi) \equiv |\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, \psi_n) < \infty,$$

где

$$(\psi_n, \chi_n) = \int d^{\nu}k_1 \ldots d^{\nu}k_n\, \overline{\psi}_n(k_1, \ldots, k_n)\, \chi_n(k_1, \ldots, k_n).$$

В квантовой теории используют два подпространства Ф. п.: симметричное (бозонное) Ф. п. над $\mathcal{H}$ и антисимметричное (фермионное) Ф. п. над $\mathcal{H}$. Симметричное пространство Фока:

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \mathcal{H}^n,$$

где

$$S_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \sigma,$$

$\mathcal{P}_n$ – группа перестановок n элементов, а оператор σ действует на базисных элементах из $\mathcal{H}^n$ по формуле

$$\sigma\left(\varphi_{k_1} \otimes \varphi_{k_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_n}\right) = \varphi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \varphi_{k_{\sigma(2)}} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_{\sigma(n)}},$$

где $\{\varphi_k\}$ – базис в $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu})$, то $S_n \mathcal{H}^n$ есть подпространство симметричных функций в $L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$. Антисимметричное пространство Фока

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n \mathcal{H}^n,$$

где

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(\sigma)\sigma,$$

$\varepsilon(\cdot)$ – функция из $\mathcal{P}_n$ в $\{1, -1\}$, равная 1 на четных и -1 на нечетных перестановках. Если $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu})$, то $A_n \mathcal{H}^n$ есть подпространство в $L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$, состоящее из функций, нечетных относительно перестановки двух аргументов.

См. также *Вторичное квантование.*

Лит.: [1] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977. *Д. П. Санкович.*

ФОКАЛЬНАЯ ТОЧКА лагранжевого многообразия в фазовом пространстве гамильтоновой системы – точка образа этого многообразия под воздействием *фазового потока*, в которой этот образ вырожденно проектируется на конфигурационное многообразие. В частном случае, когда исходное лагранжево многообразие является слоем кокасательного расслоения, Ф. т. (точнее, ее проекция в конфигурационное многообразие) называется *сопряженной точкой.* *М. Э. Казарян.*

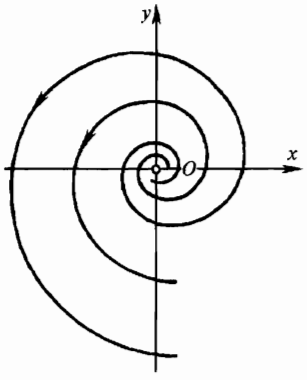
ФОКАЛЬНАЯ ТОЧКА семейства кривых – точка вырождения этого семейства. Пусть M – многообразие размерности $n-1$ в $\mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – локальные координаты на M (все рассматриваемые объекты принадлежат классу C^{∞}), $x = \varphi(\alpha)$ – уравнение M. Пусть N – семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, заданных уравнениями $x = x(\tau, \alpha)$, где $x(0, \alpha) = \varphi(\alpha)$, $\tau \in (-a, b)$, $a, b > 0$ и $J(\tau, \alpha) = \det \frac{\partial x\,(\tau, \alpha)}{\partial \tau\, \partial \alpha}$. Точка $x^0 = x(\tau_0, \alpha^0)$ называется фокальной точкой семейства N, если $J(\tau_0, \alpha^0) = 0$. Пусть N – нормальный пучок к M (множество прямых, ортогональных к M), тогда Ф. т. N – цент-

ры кривизн многообразия M. Если M – сфера, то единственная Ф. т. N – центр сферы (фокус). Ф. т. определяется также в терминах якобиевых полей (см. [2]). Множество всех Ф. т. называется каустикой N. Ф. т. и каустики играют важную роль в различных задачах физики (оптика, квантовая механика, электродинамика и т. д.).

Лит.: [1] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [2] Бишоп Р., Криттенден Р., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967.

М. В. Федорюк.

ФОККЕРА – ПЛАНКА УРАВНЕНИЕ – см. *Диффузионный процесс, Колмогорова уравнение, Марковский процесс, Маркова цепь, Маркова цепь* с непрерывным временем, *Орнштейна – Уленбека процесс.*



Фокус.

ФОКУС – один из видов *особых точек* обыкновенных дифференциальных уравнений. Все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности такой особой точки, представляют собой спирали с бесконечным числом витков, неограниченно приближающихся к особой точке, навиваясь на нее (рис.).

В. И. Битюцков.

ФОЛЬКА – БРУХА НЕРАВЕНСТВО – для любого оператора $\hat{A}$ и любого самосопряженного оператора $\hat{H}$ неравенство:

$$b(\hat{A}) \geqslant g(\hat{A}) f(c(\hat{A})/4g(\hat{A})),$$

где

$$g(\hat{A}) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}((\hat{A}^+\hat{A} + \hat{A}\hat{A}^+)e^{-\beta\hat{H}}),$$

$$b(\hat{A}) = Z^{-1}\int_0^1 \operatorname{Tr}(\hat{A}^+ e^{-\beta x\hat{H}}\hat{A}e^{-\beta(1-x)\hat{H}})\,dx, \quad Z = \operatorname{Tr}e^{-\beta\hat{H}},$$

$$c(\hat{A}) = \operatorname{Tr}([\hat{A}^+[\beta\hat{H},\hat{A}]]e^{-\beta\hat{H}}),$$

а f – функция, задаваемая соотношением

$$f(x\operatorname{th}x) = x^{-1}\operatorname{th}x.$$

Ф.– Б. н. нашло применение в проблеме фазовых переходов.

Лит.: [1] Falk H., Bruch D. W., «Phys. Rev.», 1969, v. 180, № 1, p. 442; [2] Dyson F., Lieb E. H., Simon B., «Phys. Rev. Lett.», 1976, v. 37, № 3, p. 120.

Д. П. Санкович.

ФОНОН – квазичастица с энергией $E=\hbar\omega$ и импульсом $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$, которая в соответствии с основными принципами квантовой механики сопоставляется волне смещений атомов (ионов, молекул и т. п.) материальной среды с частотой ω и волновым вектором $\boldsymbol{k}$ (здесь $\hbar$ – постоянная Планка). Является основным понятием квантовой теории колебаний материальных сред, к-рые могут рассматриваться в виде газа Ф.

Лит.: [1] Тамм И. Е., Собрание научных трудов, т. 1, М., 1975, с. 168–85; [2] Борн М., Хуан Кунь, Динамическая теория кристаллических решеток, пер. с англ., М., 1958.

Е. Д. Белоколос.

ФОРМАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ аналитической системы дифференциальных уравнений – *формальный ряд*, производная которого в силу этой системы равна 0 (в смысле равенства формальных рядов).

А. И. Нейштадт.

ФОРМАЛЬНЫЙ РЯД (степенной) от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над полем P – алгебраическое выражение вида

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x_1, \ldots, x_n),$$

где F_k – форма от $x_1, \ldots, x_n$ степени k с коэффициентами из P. Обычно P – поле действительных или комплексных чисел. Коэффициенты могут быть функциями нек-рых параметров. При естественном определении операций сложения и умножения Ф. р. образуют коммутативное кольцо с единицей. По обычным правилам вводятся производные Ф. р. по переменным x_i или по параметрам. Можно определить также композицию Ф. р., считая x_i Ф. р. от новых переменных z_j. Ф. р. широко используются в *возмущений теории.*

Лит.: [1] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.– Л., 1941.

А. И. Нейштадт.

ФОРМФАКТОР в теории элементарных частиц – функция, описывающая влияние протяженности частицы на ее взаимодействие с другими частицами и полями. Термин «Ф.» заимствован из теории рассеяния рентгеновских лучей, а его применение основано на наглядном представлении о том, что, напр., протон проводит часть времени в виртуальном состоянии «нейтрон + π^--мезон». Поэтому заряд его оказывается «размазанным» с нек-рой плотностью $e\rho(r)$. Тогда, напр., амплитуда рассеяния электронов на таком размазанном протоне отличается от амплитуды рассеяния на точечном протоне множителем, называемым формфактором протона

$$F(q) = \int \rho(r)\exp(i\boldsymbol{qr})\,dV,$$

где q – передаваемый при рассеянии импульс.

В последовательной релятивистской локальной теории реальное размазывание невозможно, а строгий смысл термина Ф. в ней определяется следующим рассуждением. Плотность энергии взаимодействия электромагнитного поля, описываемого 4-потенциалом $A_\mu(x)$ со свободным фермионом, волновая функция к-рого $\psi(x)$, имеет вид:

$$H(x) = ie\overline{\psi(x)}\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) \equiv j_0^\mu(x)A_\mu(x),$$

где γ^μ – *Дирака матрицы*, а j_0^μ – функция, называемая электромагнитным током свободных фермионов. Но само взаимодействие меняет оператор тока j_0^μ. Матричный элемент электромагнитного тока взаимодействующего протона, взятый между состояниями реального протона с 4-импульсами p и p', с учетом релятивистской инвариантности, *Дирака уравнения* и сохранения заряда, в общем случае можно записать в виде:

$$\langle p'|j^\mu(0)|p\rangle = (4p_0p_0')^{-1}\bar{u}(p')\{\gamma^\mu F_1(q^2) + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu F_2(q^2)\}u(p),$$

где $q=p-p'$, $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)$. Входящие сюда скалярные функции $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ называются электрическим и магнитным Ф. протона; о них заранее можно утверждать лишь то, что в пределе $q\to 0$ для длинных волн или малых передаваемых импульсов $F_1(0)=e$, где e – наблюдаемый заряд, а $F_2(0)=\mu$, где μ – полный магнитный момент протона. Для свободной частицы $F_1(q^2)=e$, а $F_2(q^2)=\mu_0$, где μ_0 – «нормальный» магнитный момент дираковской частицы с зарядом e, $\mu_0=\frac{e\hbar}{2mc}$. В системе координат, где $q_0=0$, выражения

$$\rho_{1,2} = (2\pi)^{-2}\int dq\exp(i\boldsymbol{qr})F_{1,2}(-q^2)$$

можно считать пространственными распределениями соответственно заряда и магнитного момента взаимодействующей частицы. Благодаря Ф. F_1 и F_2 взаимодействующий протон выглядит протяженным; однако нельзя говорить о реальном физич. размазывании протона, поскольку взаимодействующий ток остается локальным оператором и условие микропричинности не нарушается. Аналогично электромагнитным Ф. F_1 и F_2 можно ввести мезонные Ф.

нуклона, описывающие соответствующий эффект при взаимодействии реального нуклона с мезонным полем, и другие Ф.

В *нелокальной квантовой теории поля* Ф. описывает реальное размазывание частицы. В этом случае плотность энергии взаимодействия фермиона с электромагнитным полем записывается в виде:

$$H(x) = ie\int d^4y d^4z\, F(x,y,z)\,\bar{\psi}(y)\gamma^{\mu}\psi(z)A_{\mu}(x) = j^{\mu}A_{\mu}(x).$$

Релятивистски-инвариантная функция

$$F(x, y, z) = f((x-y), (x-z))$$

называется формфактором в x-представлении, а ее фурье-образ

$$\tilde{f}(p,q) = \int d^4x d^4z\, f(x,y)\exp(-ipx - iqy)$$

называется формфактором в p-представлении, или обрезающим множителем. Благодаря Ф. взаимодействие размазано по всей области, где $F(x, y, z) \neq 0$. С одной стороны, это приводит к нарушению микропричинности, с другой стороны, подходящий выбор убывания $\tilde{f}(p, q)$ при больших значениях ее аргументов позволяет устранить «ультрафиолетовые» расходимости, присущие локальной теории. Для точечного взаимодействия

$$F(x, y, z) = \delta^4(x-y)\delta^4(x-z),\ \tilde{f}(p, q) \equiv 1,$$

а ток j^{μ} превращается в j_0^{μ} – ток свободных частиц в локальной теории.

Лит.: [1] Марков М.А., Гипероны и К-мезоны, М., 1958; [2] Дрелл С., Захариазен Ф., Электромагнитная структура нуклонов, пер. с англ., М., 1962.

В. П. Павлов.

ФОТОН (γ) – элементарная частица, *квант* электромагнитного излучения (в узком смысле – света). Масса покоя Ф. m_{γ} равна нулю (из опытных данных следует, что $m_{\gamma} < 4\cdot 10^{-21}\, m_e$, где m_e – масса электрона), и поэтому его скорость равна скорости света. *Спин* Ф. равен 1 (в единицах $\hbar$), и, следовательно, Ф. относится к *бозонам*. Частица со спином J и ненулевой массой покоя, согласно квантовой механике, имеет $2J+1$ спиновых состояний, различающихся проекцией спина, но поскольку $m_{\gamma}=0$, Ф. может находиться только в двух спиновых состояниях с проекциями спина на направление движения (спиральностью) ± 1; этому свойству в классич. электродинамике соответствует поперечность электромагнитной волны.

Так как не существует системы отсчета, в к-рой Ф. покоится, ему нельзя приписать определенной внутренней четности. По электрич. и магнитной мультипольностям системы зарядов, излучившей данный Ф., различают состояния Ф. электрич. и магнитного типа; четность электрич. мультипольного Ф. равна $(-1)^l$, магнитного $(-1)^{l+1}$. Ф.– истинно нейтральная частица и поэтому обладает определенной зарядовой четностью C ($C=-1$). Кроме электромагнитного взаимодействия, Ф. участвует в гравитационном взаимодействии.

Представление о Ф. возникло в ходе развития квантовой теории и теории относительности [термин «Ф.» был введен Г. Льюисом (G. Levis) в 1929]. В 1900 М. Планк (M. Planck) получил формулу для спектра теплового излучения абсолютно черного тела (см. *Планка закон излучения*), исходя из предположения, что излучение электромагнитных волн происходит определенными порциями – *квантами*, энергия к-рых может принимать лишь дискретный ряд значений, кратных неделимой порции – кванту $\hbar\omega$, где ω – частота электромагнитной волны. Развивая идею М. Планка, А. Эйнштейн (A. Einstein) ввел гипотезу световых квантов, согласно к-рой электромагнитное излучение само состоит из таких квантов, и на ее основе объяснил ряд закономерностей фотоэффекта, люминесценции, фотохимич. реакций. Построенная А. Эйнштейном специальная теория относительности (1905) создала предпосылки для того, чтобы считать электромагнитное излучение одной из форм материи, а световые кванты – реальными элементарными частицами. В опытах А. Комптона (A. Compton) по рассеянию рентгеновских лучей было установлено, что кванты излучения подчиняются тем же кинематич. законам, что и частицы вещества, в частности квант излучения с частотой ω обладает также и импульсом $\hbar\omega/c$.

К середине 30-х гг. в результате развития квантовой механики стало ясно, что ни наличие волновых свойств, проявляющихся в волновых свойствах света, ни способность исчезать или рождаться в актах поглощения и испускания не выделяют Ф. среди других элементарных частиц. Оказалось, что всем частицам вещества, напр. электронам, присущи не только корпускулярные, но и волновые свойства, и была установлена возможность взаимопревращения элементарных частиц. Напр., в электростатич. поле атомного ядра Ф. с энергией >1 МэВ (Ф. с энергией >100 кэВ обычно называют γ-квантами) может превратиться в электрон и позитрон (процесс рождения пары), а при столкновении электрона и позитрона может произойти их аннигиляция в два (или три) γ-кванта (аннигиляция пары).

Квантовой теорией взаимодействия Ф. с заряженными лептонами с учетом их возможных взаимопревращений является квантовая электродинамика. Взаимодействие Ф. с адронами и атомными ядрами описывается с помощью различных теоретич. моделей, напр. модели векторной доминантности, модели партонов. В 60-х гг. была создана единая теория электромагнитного и слабого взаимодействий, в к-рой Ф. выступает вместе с тремя «переносчиками» слабого взаимодействия – промежуточными векторными бозонами.

Э. А. Тагиров.

ФОТОННОЕ ЭХО – явление, заключающееся в формировании средой импульсного электромагнитного отклика в ответ на ее возбуждение резонансными оптическими импульсами.

Это явление включает в себя эффекты Ф. э., стимулированного Ф. э., трехуровневого Ф. э. и т. д., к-рые имеют место при различных способах возбуждения среды. Так, напр., Ф. э. формируется в среде при ее возбуждении двумя оптич. импульсами с несущей частотой, резонансной частоте оптически разрешенного неоднородно уширенного перехода атомов, молекул или примесных ионов среды. Сигнал Ф. э. образуется в среде спустя промежуток времени, приблизительно равный T после прохождения через нее второго возбуждающего импульса, где T – временной интервал между первым и вторым возбуждающими импульсами. При формировании Ф. э. длительности возбуждающих импульсов и промежуток времени T должны быть меньше или порядка времени необратимой релаксации поляризации среды. Физич. причина формирования Ф. э. состоит в том, что макроскопич. поляризация в условиях неоднородного уширения резонансной спектральной линии затухает значительно быстрее, чем поляризация отдельных групп излучателей.

Эффект Ф. э. был предсказан в [1] и впервые экспериментально реализован в рубине (см. [2]). В последующих экспериментальных исследованиях круг веществ, в к-рых наблюдалось явление Ф. э., постоянно расширяется. Наметились две области применения явления Ф. э.

Первая область – оптич. спектроскопия. При этом методы эхо-спектроскопии твердых тел (см. [3]) весьма похожи на методы спектроскопии с помощью спинового эха, чьим оптич. аналогом является Ф. э. Эхо-спектроскопия газов имеет весьма существенные особенности (см. [4]), связанные с важной ролью упругих столкновений. Явление Ф. э. позволяет проводить в газовых средах внутридоплеровскую спектроскопию.

Вторая область применения явления Ф. э.– хранение и обработка информации. Перспективность использования явления Ф. э. в этой области основана на свойствах стимулированного Ф. э., к-рое формируется в среде под действием трех возбуждающих импульсов с несущей частотой,

резонансной частоте оптически разрешенного перехода ее атомов, молекул или примесных ионов. Как впервые обнаружено в [5], сигнал стимулированного Ф. э. при нек-рых условиях может повторять форму одного из возбуждающих импульсов. С другой стороны, временной интервал между первыми двумя (информационными) и третьим (считывающим) импульсами может быть весьма велик. Так, в эксперименте (см. [6]) его удалось довести до 13 часов.

Лит.: [1] Копвиллем У. Х., Нагибаров В. Р., «Физика металлов и металловедение», 1963, т. 15, № 2, с. 313–15; [2] Kurnit N. A., Abella J. D., Hartmann S. R., «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, № 19, p. 567–68; [3] Манькин Э. А., Самарцев В. В., Оптическая эхо-спектроскопия, М., 1984; [4] Евсеев И. В., Ермаченко В. М., в кн.: IV Междунар. симпозиум по избранным проблемам статистической механики, Дубна, 1988, с. 107–14; [5] Зуйков В. А., Самарцев В. В., Усманов Р. Г., «Письма в ЖЭТФ», 1980, т. 32, в. 4, с. 293–97; [6] Babbitt W. R., Mossberg T. W., «Opt. Comm.», 1988, v. 65, № 3, p. 185–88.

И. В. Евсеев.

ФОТООТСЧЕТОВ СТАТИСТИКА – результат обработки данных квантовооптического эксперимента и сопоставления с модельными представлениями, вытекающими из *статистической теории отсчетов* излучения. Напр., пусть оптич. излучение с комплексной амплитудой $\xi(t)$ является суперпозицией случайной амплитуды $\alpha(t)$ и детерминированной амплитуды $\beta(t)$. Если $\alpha(t)$ является решением стохастич. дифференциального уравнения

$$d\alpha(t) = -\nu\alpha(t)\,dt + \sqrt{\sigma}\,dw(t),$$

ν, $\sigma = \text{const}$, $w(t)$ – стандартный комплекснозначный винеровский процесс, то производящая функция $Q(\lambda)$ случайного числа N фотоотсчетов

$$Q(\lambda) = \langle \exp(-\lambda N)\rangle,$$

регистрируемых на интервале $[0, T]$, равна

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\lambda\int_0^T |\alpha(t)+\beta(t)|^2\,dt\right\}\right\rangle =$$

$$= 4r\nu e^{\nu T}\left(r_+^2 e^{rT} - r_-^2 e^{-rT}\right)^{-1} \times$$

$$\times \exp\left\{-\lambda\int_0^T |\beta(t)|^2\,dt - \frac{2\lambda^2\sigma r^{-1}}{r_+^2 e^{rT} - r_-^2 e^{-rT}} \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^T dt \int_t^T d\tau \left(r_+ e^{rt} + r_- e^{-rt}\right)\left(r_+ e^{r(T-\tau)} + r_- e^{-r(T-\tau)}\right)\right\},$$

где $r = (\nu^2 + 2\lambda\sigma)^{1/2}$, $r_\pm = r \pm \nu$, а распределение вероятностей $P(n) = \mathrm{P}\{N = n\}$ случайного числа N фотоотсчетов на интервале $[0, T]$ равно

$$P(n) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} Q(\lambda)\Big|_{\lambda=1};$$

оно используется при анализе данных эксперимента.

Лит.: [1] Клаудер Дж., Сударшан Э., Основы квантовой оптики, пер. с англ., М., 1970; [2] Мазманишвили А. С., Континуальное интегрирование как метод решения физических задач, Киев, 1987.

А. С. Мазманишвили.

ФРАГМЕНА – ЛИНДЕЛЕФА ПРИНЦИП – семейство высказываний, распространяющих *максимума модуля принцип* для голоморфной функции на случай неограниченной области. Типичное утверждение такого рода: пусть функция $f(z)$ голоморфна в угле раствора π/α и непрерывна вплоть до его сторон. Если $|f(z)| \leqslant M$ на сторонах угла, то либо $|f(z)| \leqslant M$ всюду внутри угла, либо

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^{-\alpha} \ln \max_{|z|=\rho} |f(z)| > 0.$$

Имеются обобщения Ф. – Л. п. для решений и субрешений дифференциальных уравнений эллиптич. типа, для пространственных отображений с ограниченным искажением.

В. М. Миклюков.

ФРАГМЕНА – ЛИНДЕЛЕФА ТЕОРЕМА – обобщение *максимума модуля принципа* аналитических функций на случай функций, априори заданных как неограниченные; впервые в простейшей форме дано Э. Фрагменом и Э. Линделефом (E. Phragmen, E. Lindelöf, 1908). Пусть $f(z)$ – регулярная аналитич. функция комплексного переменного z в области D на плоскости $\mathbb{C}$ с границей Γ. Говорят, что $f(z)$ не превосходит по модулю числа M в граничной точке $\zeta \in \Gamma$, если

$$\lim_{z\to\zeta}\ \sup_{z\in D} |f(z)| \leqslant M,$$

то есть если для любого $\varepsilon > 0$ найдется круг Δ (зависящий от ζ и ε) с центром ζ такой, что $|f(z)| < M + \varepsilon$ при $z \in D \cap \Delta$. Основное содержание результатов Э. Фрагмена и Э. Линделефа, в несколько модернизированной форме, заключается в следующих двух положениях, последовательно расширяющих принцип максимума модуля.

I. Если регулярная аналитич. функция $f(z)$ всюду на границе Γ не превосходит по модулю числа M, то $|f(z)| \leqslant M$ всюду в области D. Это положение иногда называют *Фрагмена – Линделефа принципом*. Оно расширяет принцип максимума модуля на функции, о граничном поведении к-рых имеется лишь частичная информация.

II. Пусть регулярная аналитич. функция $f(z)$ не превосходит по модулю числа M во всех точках границы Γ, не принадлежащих нек-рому множеству $E \subset \Gamma$. Пусть, кроме того, существует функция $\omega(z)$ со следующими свойствами: 1) $\omega(z)$ регулярна в D, 2) $|\omega(z)| < 1$ в D, 3) $\omega(z) \neq 0$ в D, 4) для любого $\sigma > 0$ функция $|\omega(z)|^\sigma |f(z)|$ не превосходит числа M в каждой точке $\zeta \in E$. При этих условиях $|f(z)| \leqslant M$ всюду в D.

Формулировки I и II остаются в силе для голоморфной функции $f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, заданной в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. Многие работы посвящены получению результатов типа Ф. – Л. т. для решений дифференциальных уравнений с частными производными и систем уравнений эллиптич. типа.

Лит.: [1] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968.

Е. Д. Соломенцев.

ФРЕДГОЛЬМА АЛЬТЕРНАТИВА – см. *Интегральное уравнение.*

ФРЕДГОЛЬМА ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Интегральное уравнение.*

ФРЕДГОЛЬМОВ ОПЕРАТОР – см. *Интегральное уравнение, Интегральный оператор.*

ФРЕДГОЛЬМОВО ЯДРО – см. *Интегральный оператор.*

ФРЕЛИХА МОДЕЛЬ – модель, предложенная Х. Фрелихом [1] для описания блоховских электронов, взаимодействующих с фононами в металлах, гамильтониан которой

$$H = \sum_{\vec{k},\sigma} (\varepsilon_{\vec{k}} - \mu) a^+_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} + \sum_{\vec{q}} \hbar\omega_q b^+_{\vec{q}} b_{\vec{q}} +$$

$$+ V^{-1/2} \sum_{\vec{k},\sigma,\vec{q}} g(q) \left[a^+_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} b_{\vec{q}} + a^+_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} b^+_{\vec{q}} \right].$$

Канонич. преобразованием во втором порядке теории возмущений в гармонич. приближении для фононов было получено (см. [1]) эффективное взаимодействие между электронами, не зависящее от фононных амплитуд, с перенормировкой фононного спектра и константы связи:

$$H_I = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\vec{k}',\sigma,\sigma',\vec{q}} \frac{2\hbar\omega_q |M_q|^2}{(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}})^2 - (\hbar\omega_q)^2} \times$$

$$\times a^+_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma'} a_{\vec{k}',\sigma'} a^+_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} a_{\vec{k},\sigma}.$$

Ф. м. используется для получения *БКШ-модели.*

Лит.: [1] Frohlich H., «Proc. Roy. Soc. (London)», 1952, A 215, p. 291; [2] Bardeen J., Pines D., «Phys. Rev.», 1955, v. 99, p. 1140.

В. Н. Нескоромный.

ФРЕНЕЛЯ ИНТЕГРАЛ – *осциллирующий интеграл*, фаза которого имеет только невырожденные критические точки (см. *Морса лемма*). Ф. и. имеет порядок $\tau^{-n/2}$ при $\tau \to +\infty$. (Формулу для главного члена асимптотики см. в ст. *Коротковолновые асимптотики*.)

См. также *Интегральные функции*. *С. В. Чмутов.*

ФРИДМАНА ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ – см. *Гравитационные волны*.

ФРИДМАНА УРАВНЕНИЯ – уравнения, описывающие в рамках общей теории относительности эволюцию однородной и изотропной космологической модели, метрика которой имеет вид:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)d\Sigma^2,$$

где $d\Sigma^2$ – линейный элемент пространства постоянной кривизны, $a(t)$ – масштабный фактор. Ф. у. имеют вид:

$$\frac{3}{a^4}(a^2 + a'^2) = \frac{8\pi G}{c^4}\varepsilon; \quad -\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = \frac{3da}{a},$$

где ε – плотность энергии, p – давление среды, заполняющей космологич. модель, G – гравитационная постоянная, c – скорость света. Ф. у. становятся замкнутыми, если добавить к ним уравнение состояния, связывающее p и ε. Решения Ф. у. позволяют построить фридмановские космологич. модели, играющие главную роль в современной космологии. Ф. у. являются следствиями *Эйнштейна уравнений* при предположении однородности и изотропии пространства. При рассмотрении анизотропных однородных космологич. моделей удается получить обобщение Ф. у., включающее масштабные факторы, соответствующие различным направлениям (см. [3]). Ф. у. имеют гамильтонову структуру.

Ф. у. были сформулированы А. А. Фридманом в 1922 и 1924 при построении пространств положительной и отрицательной кривизны (замкнутая и открытая модели Фридмана).

Лит.: [1] Friedmann A., «Z. Phys.», 1922, Bd 10, S. 377–86; [2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1979.

О. И. Богоявленский, Д. Д. Соколов.

ФРИДМАНА – КЕЛЛЕРА УРАВНЕНИЯ – выводимая из уравнений гидродинамики бесконечная система уравнений для всевозможных многоточечных статистических моментов гидродинамических полей турбулентного течения, дающая его полное статистическое описание:

$$\frac{\partial\langle F\rangle}{\partial t_k} = -\frac{\partial\langle u_{k\alpha}F\rangle}{\partial x_{k\alpha}} + \left\langle w_{k\alpha}\frac{\partial F}{\partial u_{k\alpha}}\right\rangle.$$

Здесь

$$F = \prod_{l=1}^{n}[u_{j_l}(M_l)]^{m_l},$$

$u_j(M_l)$ – значения гидродинамич. полей в точках $M_l = (X_l, t_l)$, w_k – перенесенное в x_k условное математич. ожидание гидродинамич. ускорения $w(x, t_k)$ при условии, что $u(M_1)$, ..., $u(M_n)$ фиксированы (А. А. Фридман, Л. В. Келлер, 1924).

См. также *Статистическая гидромеханика*. *А. С. Монин.*

ФРОНТ лежандрова отображения – см. *Лежандрово расслоение*.

ФРОНТ осцилляций – см. *Осцилляций фронт*.

ФРУАССАРА НЕРАВЕНСТВО – см. *Парциальное сечение*.

ФУГИТИВНОСТЬ – переменная, связанная с *химическим потенциалом* термодинамической системы соотношением

$$z = \exp(\beta\mu),$$

где β – обратная температура, μ – химич. потенциал. Выражая большую статистич. сумму Ξ как функцию Ф., можно получить связь между Ξ и канонич. суммой F:

$$\Xi(\beta, V, z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N F(\beta, V, N),$$

то есть большая статистич. сумма как функция Ф. играет роль производящей функции по отношению к канонич. статистич. сумме.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978.

Д. П. Санкович.

ФУКСА УРАВНЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

ФУКСОВА ГРУППА – дискретная подгруппа Γ *группы* $PSL(2, \mathbb{C})$ всех дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, оставляющая инвариантным некоторый круг $D \subset \mathbb{C}$. При помощи сопряжения в $PSL(2, \mathbb{C})$ можно положить $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ или $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, так что Γ является дискретной подгруппой группы изометрий плоскости Лобачевского.

Пусть Λ – предельное множество группы Γ, то есть наименьшее замкнутое Γ-инвариантное подмножество в $\hat{\mathbb{C}}$; для Ф. г. $\Lambda \subset \partial D$. Ф. г. Γ называется фуксовой группой первого рода, если $\Lambda = \partial D$, и фуксовой группой второго рода, если Λ есть собственное подмножество в ∂D. Пусть Γ – Ф. г. первого рода; область $F \subset D$ называется фундаментальной областью Ф. г. Γ, если для всех $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$, $\gamma(F) \cap F = \varnothing$ и $\cup_{\gamma \in \Gamma}\gamma(\overline{F}) = D$. Любая Ф. г. первого рода допускает фундаментальную область, являющуюся выпуклым многоугольником в неевклидовой геометрии.

Пусть $\mu(F)$ – неевклидова площадь фундаментальной области F; $\mu(F)$ является инвариантом Ф. г. Γ.

Теорема Зигеля (см. [2]): если Γ – Ф. г. первого рода, F – ее фундаментальная область и $\mu(F) < \infty$, то:

1) Γ – конечно порожденная группа, каждый выпуклый фундаментальный многоугольник к-рой имеет конечное число сторон;

2) Γ содержит конечное число n сопряженных классов максимальных параболич. циклич. подгрупп и конечное число l сопряженных классов максимальных эллиптич. подгрупп с порядками $m_1, \ldots, m_l \geqslant 2$;

3) факторпространство $\Gamma\backslash D$ конформно эквивалентно компактной *римановой поверхности* рода $g \geqslant 0$ с n проколами и накрытие $\pi: D \to \Gamma\backslash D$ разветвлено лишь над неподвижными точками эллиптич. элементов Γ с индексами ветвления $m_1, \ldots, m_l$;

4) $$\mu(F) = 2\pi\left(g - 2 + n + l - \frac{1}{m_1} - \ldots - \frac{1}{m_l}\right).$$

Кроме того, если Γ – конечно порожденная Ф. г. первого рода, то $\mu(F) < \infty$. Символ $(g | m_1, \ldots, m_l; n)$ называется сигнатурой конечно порожденной Ф. г. первого рода Γ; Ф. г. с данной сигнатурой допускает канонич. систему образующих $A_1, \ldots, A_g, B_1, \ldots, B_g, C_1, \ldots, C_l$ и $S_1, \ldots, S_n$ с соотношениями

$$A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1} \ldots A_gB_gA_g^{-1}B_g^{-1}C_1 \ldots C_lS_1 \ldots S_n = 1,$$

где A_i, B_i – гиперболические, C_i – эллиптические, а S_i – параболические элементы Ф. г. Γ. Подобную классификацию можно провести и для конечно порожденных Ф. г. второго рода (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Poincare H., «Acta math.», 1882, Bd 1, S. 1–62; [2] Siegel C. L., «Ann. Math.», 1945, v. 46, p. 708–18; [3] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.–Л., 1936; [4] Бердон А., Геометрия дискретных групп, пер. с англ., М., 1986.

Л. А. Тахтаджян.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДЛИНА, элементарная длина,– гипотетическая универсальная постоянная размерности длины, определяющая пределы применимости фундаментальных физических представлений – теории относительности, квантовой теории, принципа причинности. Через Ф. д. l выражаются масштабы областей пространства-времени и энергии-импульса (размеры $x < l$, интервалы времени $t < l/c$, энергии $\varepsilon > \hbar c/l$), в к-рых можно ожидать новых явлений, не укладывающихся в рамки существующей физич. картины. Если бы это ожидание оправдалось, то предстояло бы еще одно радикальное преобразование фи-

зики, сопоставимое по своим последствиям с созданием теории относительности или квантовой теории. Соответственно Ф. д. вошла бы как существенный элемент в теорию элементарных частиц, играя роль третьей (после c и $\hbar$) фундаментальной размерной константы физики, ограничивающей пределы применимости современных представлений.

С помощью известных характерных физич. параметров можно построить ряд величин размерности длины, к-рые в разное время обсуждались как претенденты на роль Ф. д. Это – комптоновская длина волны электрона $\lambda_e \sim 10^{-11}$ см (электромагнитное взаимодействие), π-мезона ($\lambda_\pi \sim 10^{-13}$ см) и нуклона ($\lambda_N \sim 10^{-14}$ см, сильное взаимодействие), характерная длина слабого взаимодействия $\sqrt{G_F/\hbar c} \sim 10^{-16}$ см (G_F – фермиевская константа слабого взаимодействия), гравитационная длина (так наз. планковская длина) $\sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33}$ см (G – гравитационная постоянная). Отождествление Ф. д. с одной из перечисленных величин сыграло бы огромную роль для физики элементарных частиц, указав, с каким типом взаимодействия будет связано появление новых физич. представлений. К 1983 экспериментально установлено, что верхняя граница Ф. д. составляет около 10^{-16} см; имеются аргументы в пользу еще меньшего значения l ($\sim 10^{-20}$ см). Поэтому величины, связанные с электромагнитным, сильным и, скорее всего, слабым взаимодействиями, уже не могут претендовать на роль Ф. д. Весьма вероятно, что Ф. д. физики окажется гравитационная длина.

Экспериментальный метод определения Ф. д. основан на сравнении с опытом результатов расчета различных физич. эффектов, выполненного в соответствии с существующей теорией. Такое сравнение (во всех случаях, когда оно могло быть проведено) до сих пор не показало каких-либо расхождений. Поэтому эксперимент дает пока лишь верхнюю границу Ф. д. Для этой цели используются прежде всего опыты при высоких энергиях, выполняемые на ускорителях и характеризующиеся относительно невысокой точностью. К ним относятся опыты по проверке *дисперсионных соотношений* для рассеяния π-мезонов на нуклонах и т. п., а также нек-рых предсказаний квантовой электродинамики (рождение пар, рассеяние электронов на электронах и т. д.). К другому типу относятся прецизионные статич. эксперименты: измерения аномального магнитного момента электрона и мюона, лэмбовского сдвига уровней и т. д. Обсуждались предложения по использованию информации, идущей от космич. объектов,– космич. лучей сверхвысоких энергий ($\sim 10^{19}$ эВ), пульсаров, квазаров, черных дыр.

Существует ряд моделей теории, содержащей Ф. д. (варианты нелокальной квантовой теории поля, теории квантованного пространства-времени и др.). Нек-рые из них используются при планировании и обработке результатов экспериментов по определению Ф. д.

Острота проблемы Ф. д. существенно уменьшилась в связи с успехами квантовой теории поля (объединенной теории слабого и электромагнитного взаимодействий, квантовой хромодинамики, великого объединения), основывающейся на обычных фундаментальных представлениях физики.

Лит.: [1] Тамм И. Е., Собрание научных трудов, т. 2, М., 1975; [2] Марков М. А., Гипероны и К-мезоны, М., 1958; [3] его же, О природе материи, М., 1976; [4] Киржниц Д. А., «Природа», 1973, № 1; [5] Блохинцев Д. И., Пространство и время в микромире, М., 1970.

Д. А. Киржниц.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – см. *Великое объединение взаимодействий, Ренормализационная группа.*

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ сверточного оператора $S*$ – решение $E \in \mathscr{F}'$ *свертки уравнения*

$$S*E=\delta,$$

где S – *свертыватель* в пространстве *обобщенных функций* $\mathscr{F}'$, δ – *Дирака дельта-функция*. В частности, при $S=P(D)\delta$, где $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, уравнение свертки переходит в дифференциальное уравнение

$$P(D)E=\delta,$$

E – его обобщенное решение. По известному Ф. р. E решение $u \in \mathscr{F}'$ неоднородного уравнения $S*u=f$, $f \in \mathscr{F}'$, определяется формулой $u=E*f$ при условии, что последняя свертка существует. Ф. р. определяется с точностью до решения однородного уравнения $S*u=0$, и эта свобода используется для построения Ф. р. с нужными свойствами (рост, носитель, гладкость и т. д.). Для всякого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами существует Ф. р. в классе *умеренных распределений*, для оператора с вещественными аналитич. коэффициентами – в классе *гиперфункций*.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979.

В. В. Жаринов.

ФУНКЦИОНАЛ – см. *Вариационное исчисление.*

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ – свойство решения некоторой задачи, отвечающее симметрии относительно специального преобразования, состоящего из преобразования трансляции или растяжения независимой переменной и одновременного преобразования граничного условия (фиксирующего данное решение), содержащего функциональную зависимость. Ф. а. может рассматриваться как обобщение обычной степенной автомодельности, в к-ром закон преобразования решения имеет не степенной, а функциональный вид.

Ф. а. может быть проиллюстрирована следующим примером. Пусть $G(l)$ – решение уравнения нек-рой физич. задачи, рассматриваемое как функция переменной l (времени, координаты, энергии и т. п.), к-рое может быть однозначно фиксировано заданием одного граничного условия $G(l=l_0)=g_0$. Тогда, записав данное частное решение в виде $G(l-l_0, g_0)$, условимся говорить, что оно параметризовано парой (l_0, g_0). Пусть также $G(l)$ – однозначная функция. Возьмем нек-рое значение аргумента $l=l_1$ и обозначим $G(l_1-l_0, g_0)=g_1$. Тогда, в случае однородности задачи по переменной l пару (l_1, g_1) можно использовать вместо (l_0, g_0) для параметризации данного частного решения. Поэтому будет выполняться соотношение

$$G(l-l_0, g_0)=G(l-l_1, g_1), \qquad (1)$$

представляющее собой условие инвариантности относительно операции изменения точки параметризации, то есть относительно преобразования

$$l \to l-\lambda, \; g_0 \to G(\lambda, g_0). \qquad (2)$$

Подставляя определение g_1 в правую часть (1), получаем функциональное уравнение

$$G(l, g_0)=G(l-\lambda, \; G(\lambda, g_0)), \qquad (3)$$

обеспечивающее выполнение закона композиции для преобразования (2), к-рое, таким образом, обладает групповым свойством и в силу непрерывности параметра преобразования λ образует группу Ли.

Решение уравнения (3), линейное по второму аргументу, имеет простой вид:

$$G(l, g)=g\exp(\nu l),$$

где ν – числовой параметр. Если сделать замену переменных $l=\ln x$, $\lambda=\ln t$, то преобразование (2) примет вид преобразования степенного подобия

$$x \to x/t, \; g \to gt^{\nu}. \qquad (4)$$

Свойство Ф. а. лежит в основе так наз. *ренормализационной группы* и может быть обнаружено в большом числе разнообразных физич. задач.

Лит.: [1] Ширков Д. В., «Доклады АН СССР», 1982, т. 263, с. 64–67.

Д. В. Ширков.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ГИПОТЕЗА – см. *Сокращенное описание состояния.*

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ – см. *Вариационное исчисление.*

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ, интеграл по траекториям, континуальный интеграл,– интеграл, для которого область определения – то или иное функциональное пространство. Ф. и. можно определить как интеграл Лебега от функционала, заданного на пространстве функций, по нек-рой мере в этом пространстве. Такие меры можно получить распространением квазимер (то есть аддитивных функций множеств, определенных на алгебре всех цилиндрич. подмножеств функционального пространства). Ф. и. определяют также как предел по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$ при $n\to\infty$. При этом $\mathbb{R}^n$ служит приближением для функционального пространства, а приближением функционала является функция n переменных.

Многие из Ф. и., встречающихся в теоретич. физике, пока не имеют строгого определения, и операции над ними часто производятся на формальном уровне без строгого обоснования. С Ф. и. в квантовой теории поля и квантовой статистич. физике связаны проблемы общей теории меры и интегрирования по бесконечномерному пространству.

Ф. и. в квантовой механике. Матричный элемент оператора эволюции $\exp(-i\hat{H}t)$, $t\in\mathbb{R}^1$, квантовомеханич. системы можно записать в виде Ф. и., определив его как предел n-кратного интеграла при $n\to\infty$.

Пусть $H(p, q)$ – функция Гамильтона одномерной механич. системы (q – координата, p – импульс),

$$S=\int_0^t\big(\dot{p}(\tau)q(\tau)-H(p(\tau),q(\tau))\big)d\tau \qquad (1)$$

– соответствующий функционал действия ($\dot{q}(\tau)=dq(\tau)/d\tau$). Интервал $[0, t]$ делится на N подинтервалов точками деления $\tau_1, \ldots, \tau_{N-1}$ и рассматриваются функции $p(\tau)$, постоянные на подинтервалах, и функции $q(\tau)$, линейные на подинтервалах. Такая траектория определяется значениями $p_1, \ldots, p_N$ функции $p(\tau)$ на подинтервалах и значениями $q=q_0, q_1,\ldots, q_{N-1}, q_N=q_1$ функции $q(\tau)$ на концах подинтервалов. Фиксируя $q(0)=q_0=q$, $q(t)=q_N=q'$, вводят интеграл

$$J_N(q,q',t)=(2\pi)^{-N}\int\prod_{i=1}^{N}dp_i\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{N-1}dq_j\exp iS(p_1,\ldots,p_N,q_0,q_1,\ldots,q_N). \qquad (2)$$

В пределе при $N\to\infty$ этот интеграл дает матричный элемент оператора инволюции, а именно,

$$\lim_{N\to\infty}\int dqdq'f(q)J_N(q,q',t)\bar{g}(q')=(e^{-i\hat{H}t}f,g).$$

Если $H(p, q)$ зависит только от p или только от q, допредельное выражение для J_N не зависит от N и совпадает со своим пределом. Если $H=p^2/2m+V(q)$, то можно доказать существование предела, используя формулу Троттера-Като. Для функции Гамильтона $H(p, q)$ общего вида предел J_N зависит от способа аппроксимации траектории $(p(\tau), q(\tau))$. Это связано с проблемой построения оператора $\hat{H}$ по функции Гамильтона $H(p, q)$ заменой p, q операторами $\hat{p}, \hat{q}$ с перестановочными соотношениями $\hat{q}\hat{p}-\hat{p}\hat{q}=i$ (проблема упорядочения, не имеющая, как известно, естественного решения).

Рассмотренная конструкция Ф. и. непосредственно переносится на гамильтонову систему с любым конечным числом степеней свободы, где $q=(q^1, \ldots, q^n)$ – точка многообразия M, $p=(p_1, \ldots, p_n)$ – элемент кокасательного пространства.

Если заменить в (1) $H(p(\tau), q(\tau))$ на $-iH(p(\tau), q(\tau))$, то выражение J_N в (2) в пределе $N\to\infty$ дает матричные элементы для полугруппы операторов $\exp(-\hat{H}t)$, $t>0$. В частном случае $H=Dp^2+V(q)$ получается Ф. и. для уравнения теплопроводности – исторически первого объекта, для к-рого возникло понятие Ф. и. (см. [1]).

Ф. и. в квантовой статистической физике. Для системы бозе-частиц в кубич. объеме $V=L^D$ с периодич. граничными условиями Ф. и.– интеграл с весом $\exp S$ по пространству комплексных функций $\Psi(x, \tau)$ (где $x\in V$, $\tau\in[0, \beta]$, $\beta^{-1}=T$ – абсолютная температура), периодических по τ: $\Psi(x, \beta)=\Psi(x, 0)$ (см. [7], [8]). Функционал действия S имеет вид:

$$S=\int_0^\beta d\tau\int dx\overline{\Psi}(x,\tau)\partial\tau\Psi(x,\tau)-\int_0^\beta H'(\tau)\,d\tau,$$

где

$$H'(\tau)=\int dx((2m)^{-1}\nabla\Psi'(x,\tau)\nabla\Psi(x,\tau)-\lambda\overline{\Psi}(x,\tau)\Psi(x,\tau))+$$
$$+\frac{1}{2}\int dxdy\,u(x-y)\overline{\Psi}(x,\tau)\overline{\Psi}(y,\tau)\Psi(y,\tau)\Psi(x,\tau$$

– гамильтониан, в к-ром λ – химич. потенциал, $u(x-y)$ – парный потенциал взаимодействия между бозе-частицами. Разложив Ψ в ряд Фурье:

$$\Psi(x,\tau)=(\beta V)^{-1/2}\sum_p e^{ipx}a(p),$$

где $p=(k, \omega)$, $px=\omega\tau+kx$, $\omega=\omega_n=2\pi n/\beta$ – частота Мацубара, $k_i=2\pi n_i/L$, можно затем определить Ф. и. как интеграл от нек-рого функционала $F(\Psi, \overline{\Psi})$ по мере

$$D_\mu=\prod_p da^*(p)da(p)$$

с весом $\exp S$, где S в терминах $a(p)$, $a^*(p)$ имеет вид:

$$S=\sum_p(i\omega-k^2/2m+\lambda)a^*(p)a(p)-$$
$$-(4\beta V)^{-1}\sum_{p_1+p_2=p_3+p_4}(v(k_1-k_3)+$$
$$+v(k_1-k_4))a^*(p_1)a^*(p_2)a(p_4)a(p_3). \qquad (3)$$

При этом $v(k)=\int dxe^{ikx}u(x)$ – потенциал «в k-представлении». Такой Ф. и. есть предел конечномерного интеграла по переменным $a(p)$, $a^*(p)$ с $|k|<K_0$, $|\omega|<\Omega_0$ при $K_0, \Omega_0\to\infty$.

Функции Грина определяются как (формальные) частные Ф. и.:

$$G=-\langle\Psi(x,\tau)\overline{\Psi}(x',\tau')\rangle=-\int D\mu e^S\Psi(x,\tau)\overline{\Psi}(x',\tau')\Big/\int D_\mu e^S.$$

Теория возмущений для вычисления функций Грина естественно возникает, если считать невозмущенным действием квадратичную форму по $a(p)$, $a^*(p)$ в S (3), а форму четвертой степени считать возмущением. Каждому члену теории возмущений можно сопоставить диаграмму, состоящую из элементов – линий и вершин. Линии соответствует невозмущенная функция Грина $G_0(p)=(i\omega-k^2/2m+\lambda)^{-1}$, вершине – симметризованный потенциал $v(k_1-k_3)+v(k_1-k_4)$. Выражение для диаграммы, дающей вклад в функцию Грина, получают, просуммировав произведение выражений для ее линий и вершин по независимым 4-импульсам $p=(k, \omega)$ внутренних линий и умножив результат на $(-1/\beta v)^{l-v-1}r^{-1}$, где l – число линий, v – число вершин, r – порядок группы симметрии диаграммы.

Заменив в описанной конструкции Ф. и. комплексные числа $a(p)$, $a^*(p)$ в (3) антикоммутирующими друг с другом образующими грассмановой алгебры, получают Ф. и. для системы ферми-частиц в объеме V при конечной температуре T, определяемый как предел конечномерного интеграла по антикоммутирующим переменным $a(p)$, $a^*(p)$ с $|k|<K_0$, $|\omega|<\Omega_0$ (интеграл Березина) при $K_0, \Omega_0\to\infty$. В выражении для линии $(i\omega-k^2/2m+\lambda)^{-1}$ диаграммной теории возмуще-

ний мацубаровская частота ω равна $2\pi(n+1/2)/\beta$ вместо $2\pi n/\beta$ в бозе-случае, а на ферми-поле $\Psi(x,\tau)$ наложено условие антипериодичности ($\Psi(x,\beta)=-\Psi(x,0)$). Вершине сопоставлен антисимметризованный потенциал $v(k_1-k_3)-v(k_1-k_4)$ вместо симметризованного в бозе-случае, а вместо $(-1/\beta V)^{l-\nu-1}r^{-1}$ возникает $(-1)^F\times\times(-1/\beta V)^{l-\nu-1}r^{-1}$, где F – число независимых замкнутых ферми-циклов диаграммы.

Удалось построить Ф. и. и диаграммную теорию возмущений (см. [9]) для спиновых систем спина 1/2 и 1 как Ф. и. по антикоммутирующим переменным $\Psi(x,\tau)$, на к-рые наложены граничные условия $\Psi(x,\beta)=i\Psi(x,0)$ ($s=1/2$) и $\Psi(x,\beta)=\exp(2\pi i/3)\,\Psi(x,0)$, $s=1$. При этом выражение для линии диаграммной теории возмущений имеет вид $(i\omega-\varepsilon)^{-1}$, где $\omega=2\pi(n+1/4)/\beta$ для $s=1/2$ и $\omega=2\pi(n+1/3)/\beta$ для $s=1$.

Описанные конструкции Ф. и. служат исходным пунктом для построения различных модификаций теории возмущений. В частности, построены модифицированные схемы теории возмущений для описания систем бозе- и ферми-частиц в сверхтекучем, сверхпроводящем, ферромагнитном состояниях, возможных при достаточно низких температурах. Исходная конструкция Ф. и. в квантовой статистич. физике может быть использована для перехода в Ф. и. к другим переменным, в частности, к переменным, соответствующим коллективным степеням свободы рассматриваемой системы (см. [7], [8]).

Ф. и. в квантовой теории поля – это интеграл по нек-рой мере D_μ с весом $\exp iS$, где S – действие системы. Напр., для скалярного поля с самодействием действие имеет вид:

$$S=\int dx\left(\frac{1}{2}g_0^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}-\frac{m^2}{2}\varphi^2-\frac{g}{3!}\varphi^3\right),$$

где $g_0^{\mu\nu}$ – диагональный тензор Минковского, а функции Грина определяются как формальные частные Ф. и. вида:

$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle=\int\varphi(x)\varphi(y)e^{iS}D_\mu\Big/\int e^{iS}D_\mu.$$

Такие Ф. и. можно определить как пределы конечномерных интегралов для полей на конечной дискретной решетке при стремлении к нулю шага решетки и к бесконечности объема, занятого полем.

Теория возмущений, возникающая, если взять за невозмущенное действие квадратичную форму полей, а возмущением считать члены высших степеней, естественно, формулируется в терминах диаграмм, состоящих из линий и вершин. Линии в теории возмущений сопоставляется причинная (фейнмановская) функция Грина оператора $-\Box-m^2$:

$$D_F(x-y)=(2\pi)^{-D}\int dk e^{i(k,\,x-y)}(k^2-m^2-i0)^{-1},$$

где $kx=k_0x_0-kx$, $k^2=k_0^2-k^2$, вершине – константа связи g. Вклад данной диаграммы, напр. для двухточечной функции Грина, получают, проинтегрировав произведение выражений, соответствующих ее линиям и вершинам, по координатам внутренних вершин и умножив результат на $i^{l-\nu-1}r^{-1}$, где l – число линий, ν – число вершин, r – порядок группы симметрии диаграммы.

Формальное обоснование Ф. и. получает, если его удается свести к Ф. и. в гамильтоновой форме. Такой Ф. и. является обобщением Ф. и. для квантовомеханич. системы с конечным числом степеней свободы. Напр., для скалярного поля с самодействием Ф. и. в гамильтоновой форме имеет вид:

$$\int D_\mu[\varphi,\pi]\exp(iS[\varphi,\pi]),$$

где действие

$$S[\varphi,\pi]=\int\left(\pi\partial_0\varphi-\frac{1}{2}\pi^2-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^2-\frac{g}{3!}\varphi^3\right)d^Dx$$

соответствует гамильтониану

$$\int d^{D-1}x\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+\frac{m^2}{2}\varphi^2+\frac{g}{3!}\varphi^3\right).$$

Интеграл в гамильтоновой форме эквивалентен исходному, в чем можно убедиться, сделав сдвиг $\pi(x)\to\pi(x)+\partial_0\varphi(x)$.

Вышеописанная схема построения Ф. и. дает метод квантования бозе-полей. Квантование ферми-полей можно реализовать с помощью интеграла по антикоммутирующим переменным (интеграл Березина).

Ф. и. для калибровочных полей. Калибровочные поля имеют геометрич. природу и могут рассматриваться как связности расслоенного пространства, в к-ром базой является пространство-время, а слоем служит пространство представлений нек-рой калибровочной группы. Попытки квантовать калибровочные поля стандартными методами приводят к трудностям и противоречиям. Применение Ф. и. с учетом геометрич. специфики приводит к следующей схеме квантования. Действие калибровочного поля $S[A]$ инвариантно при замене $A\to A^\Omega$, где A – калибровочное поле, A^Ω – результат применения к A калибровочного преобразования Ω. Калибровочная инвариантность действия заставляет считать основными объектами теории классы полей A^Ω, получающиеся применением к фиксированному полю A множества всех калибровочных преобразований Ω, а в Ф. и. интегрировать по поверхности $f(A)=0$, однократно пересекающейся с каждым классом. Такой интеграл можно получить, вставив в Ф. и.

$$\int D_\mu[A]\exp(iS[A])$$

тождество

$$\Delta[A]\int\delta(f(A^\Omega))D\Omega=1,$$

определяющее калибровочно инвариантный функционал $\Delta[A]$ и сделав затем замену переменных $A^\Omega\to A$. При этом Ф. и. превращается в произведение Ф. и. $\int D\Omega$ (объема калибровочной группы) на Ф. и.

$$\int\exp(iS[A])\,\Delta[A]\delta(f(A))D_\mu[A], \qquad (4)$$

к-рый и полагается исходным при построении квантовой теории калибровочных полей. Наличие в (4) множителя $\delta(f(A))$ (функционального аналога δ-функции) означает интегрирование по полям, удовлетворяющим уравнению $f(A)=0$. Обоснование Ф. и. типа (4) заключается в преобразовании его к Ф. и. в гамильтоновой форме (см. [6]), аналогичному Ф. и. в квантовой механике.

Техника преобразований Ф. и. позволяет переходить в (4) от одной калибровки $f(A)=0$ к другой $g(A)=0$. С помощью Ф. и. (4) построены ковариантные теории возмущений для квантовой электродинамики, теории поля Янга – Миллса, теории тяготения Эйнштейна и других калибровочных теорий, доказана унитарность и перенормируемость единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий.

Ф. и. и длинноволновая асимптотика функций Грина в квантовой теории поля и статистической физике. Метод Ф. и. позволяет довольно просто получать длинноволновую (инфракрасную) асимптотику функций Грина систем, в к-рых присутствуют кванты сколь угодно малой энергии. Члены стандартной теории возмущений для функции Грина содержат так наз. инфракрасные сингулярности, так что желательна перестройка теории возмущений. Ее можно реализовать, используя метод интегрирования по быстрым и медленным переменным. Представив поле ψ, по к-рому ведется интегрирование, в виде суммы «медленного» ψ_0 и «быстрого» ψ_1 полей, получают после интегрирования по быстрым полям $\exp S_{\text{eff}}$, где S_{eff} – зависящий от медленных полей функционал эффективного действия. Дальнейшее интегрирование по медленным полям должно учитывать специфику рассматриваемой системы. Напр., для сверхтекучей бозе-системы к теории возмущений, свободной от инфракрасных

сингулярностей, ведет переход к полярным координатам $\rho(x, \tau)$, $\varphi(x, \tau)$ медленного поля

$$\psi_0(x, \tau) = (\rho(x, \tau))^{1/2} \exp(i\varphi(x, \tau)).$$

Во многих случаях к цели ведет переход в Ф. и. по медленным полям к переменным, соответствующим коллективным степеням свободы системы.

В теориях типа электродинамики, в к-рых массивные ферми- или бозе-частицы взаимодействуют с безмассовым векторным полем A_μ, полезна формула

$$G(x,y|A) \cong G(x,y|0)\exp\left(ie\int_x^y A_\mu dx^\mu\right) \qquad (5)$$

для функции Грина оператора Дирака (или Д'Аламбера) в медленном поле A_μ, где $\int_x^y A_\mu\, dx^\mu$ – интеграл по прямой, соединяющей точки x и y пространства-времени. Функциональное интегрирование выражений типа (5) по медленным полям дает инфракрасную асимптотику функций Грина в квантовой электродинамике, формулы дважды логарифмич. асимптотики, различные модификации эйкональных формул.

Лит.: [1] Wiener N., «J. Math. Phys.», 1923, v. 2, № 3, p. 131–74; [2] его же, «Proc. London Math. Soc.», 1924, v. 22, № 6, p. 454–67; [3] Фейнман Р., Хибс А., Квантовая механика и интегралы по траекториям, пер. с англ., М., 1968; [4] Гельфанд И. М., Яглом А. М., «Успехи математич. наук», 1956, т. 11, в. 1, с. 77–114; [5] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [6] Ковальчик И. М., Янович Л. А., Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения, Минск, 1989; [7] Фаддеев Л. Д., «Теоретич. и математич. физика», 1969, т. 1, № 1, с. 3–17; [8] Попов В. Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, М., 1976; [9] Popov V. N., Functional integrals and collective excitations, Camb., 1988; [10] Попов В. Н., Федотов С. А., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1988, т. 94, в. 3, с. 183–94.

В. Н. Попов.

ФУРЬЕ ГИПЕРФУНЦИЯ – модификация *гиперфункции*, тесно связанная с *аналитическими функционалами* и обладающая преобразованием Фурье. Ф. г. были введены М. Сато (M. Sato) одновременно с гиперфункциями в конце 50-х гг. 20 в. Теория Ф. г. построена Т. Кавай [1]. Ф. г. широко применяются в теории линейных уравнений с частными производными. Имеются приложения Ф. г. в аксиоматич. квантовой теории поля.

Пусть $\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n \cup S^{n-1}$ – компактификация $\mathbb{R}^n$ с помощью сферы «бесконечного» радиуса. Для всякого открытого подмножества $U \subset \mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n$ через $\varkappa_\varepsilon(U)$ обозначено банахово пространство всех функций $\Phi(z)$, аналитических в $U \cap \mathbb{C}^n$ с конечной нормой

$$|\Phi| = \sup\{e^{\varepsilon|z|}|\Phi(z)|;\ z \in U \cap \mathbb{C}^n\}.$$

Пусть Ω – открытое подмножество из $\mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n$, и

$$\varkappa_-(\Omega) = \limproj_{U \Subset \Omega} \limproj_{\varepsilon < 0} \varkappa_\varepsilon(U),$$

$$\varkappa_+(\Omega) = \limproj_{U \Subset \Omega} \liminf_{\varepsilon > 0} \varkappa_\varepsilon(U),$$

запись $U \Subset \Omega$ означает, что замыкание $\overline{U}$ – компакт в $\mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n$ и $\overline{U} \subset \Omega$. Для компакта $K \subset \mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n$ пусть

$$\varkappa_+(K) = \liminf_{U \supset K} \liminf_{\varepsilon > 0} \varkappa_\varepsilon(U).$$

Пространства $\varkappa_-(\Omega)$ вместе с естественными сужениями $\varkappa_-(\Omega) \to \varkappa_-(\omega)$ при $\Omega \subset \omega$ образуют пучок $\varkappa_-$ ростков аналитич. функций в $\mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n$, растущих в вещественных направлениях медленнее любой линейной экспоненты.

По аналогии с гиперфункциями пространство $\mathscr{R}(O)$ Ф. г. в области $O \subset \mathbb{D}^n$, по определению, есть $H_O(\Omega; \varkappa_-)$ – n-я группа когомологий множества Ω с коэффициентами в пучке $\varkappa_-$ и с носителями в O, где Ω – произвольная окрестность O в $\mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n$.

Ф. г. обладают всеми свойствами, присущими гиперфункциям. Каждая Ф. г. $g \in \mathscr{R}(O)$ задается конечным набором $\{f_j\}$ функций $f_j \in \varkappa_-(D_j(O))$, где $D_j(O)$ – тубоиды в $\mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n$, и обратно, всякий такой набор задает Ф. г. Нулевые Ф. г. представляются функциями

$$f_j(z) = \sum f_{jk}(z), \quad z \in D_j(O),$$

где функции $f_{jk} = -f_{kj} \in \varkappa_-(D_{jk}(O))$, тубоиды $D_{jk}(O) = D_{kj}(O) \supset D_j(O) \cup D_k(O)$. Как и в случае гиперфункций, для подобласти ω области O определяется сужение $\mathscr{R}(O) \to \mathscr{R}(\omega)$, и Ф. г. образуют вялый пучок $\mathscr{R}$ линейных пространств на $\mathbb{D}^n$.

Сужение пучка Ф. г. $\mathscr{R}$ с $\mathbb{D}^n$ на $\mathbb{R}^n$ совпадает с пучком гиперфункций $\mathscr{B}$.

Множество Ф. г. $g \in \mathscr{R}(\mathbb{D}^n)$, носители к-рых лежат в компакте $K \subset \mathbb{D}^n$, отождествляется с сопряженным пространством $\varkappa'_+(K)$. В отличие от $\mathbb{R}^n$, каждое замкнутое подмножество $\mathbb{D}^n$ есть компакт. В частности, $\mathscr{R}(\mathbb{D}^n) = \varkappa'_+(\mathbb{D}^n)$, то есть каждая Ф. г. представляется аналитич. функционалом.

Основное пространство

$$\varkappa_+(\mathbb{D}^n) = \liminf_{\varepsilon > 0} \varkappa_\varepsilon(\mathbb{R}^n + iB_\varepsilon),$$

где шар $B_\varepsilon = \{|y| < \varepsilon\}$. На $\varkappa_+(\mathbb{D}^n)$ действует преобразование Фурье F:

$$\varkappa_+(\mathbb{D}^n) \cong \varkappa_+(\mathbb{D}^n),$$

так что определено преобразование Фурье Ф. г.:

$$F: \mathscr{R}(\mathbb{D}^n) \cong R(\mathbb{D}^n)$$

(см. *Фурье преобразование* обобщенной функции).

На пространствах Ф. г. действуют дифференциальные операторы бесконечного порядка, такие же, как и на гиперфункциях.

Лит.: [1] Kawai T., «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.», 1970, v. 17, p. 467–517.

В. В. Жаринов.

ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛ – формула для разложения непериодической функции на гармонические компоненты, частоты которых пробегают непрерывную совокупность значений. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке и если сходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt. \qquad (1)$$

Эта формула впервые встречается при решении нек-рых задач теплопроводности у Ж. Фурье (J. Fourier, 1811), но ее доказательство было дано позже другими математиками. Формулу (1) можно представить также в виде:

$$f(x) = \int_0^\infty [a(u)\cos ux + b(u)\sin ux]\,du, \qquad (2)$$

где

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt,$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

В частности, для четных функций

$$f(x) = \int_0^\infty a(u)\cos ux\,dx,$$

где

$$a(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt.$$

Формулу (2) можно рассматривать как предельную форму ряда Фурье для функций, имеющих период $2T$, когда $T \to \infty$. При этом $a(u)$ и $b(u)$ аналогичны коэффициентам Фурье функции $f(x)$. Употребляя комплексные числа, можно за-

менить формулу (1) формулой

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu(x-t)}f(t)\,dt.$$

Формулу (1) можно преобразовать также к виду:

$$f(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}dt \qquad (3)$$

(простой интеграл Фурье).

Если интегралы в формулах (2), (3) расходятся, то во многих случаях их можно просуммировать к $f(x)$ при помощи того или иного метода суммирования. При решении многих задач используются формулы Ф. и. для функций двух и большего числа переменных. *В. И. Битюцков.*

ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ – см. *Фурье ряд, Гильбертово пространство.*

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ – одно из интегральных преобразований – функция $g(u)$, выражающаяся через данную функцию $f(x)$ формулой

$$g(u)\equiv F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}\,dt. \qquad (1)$$

Если функция $f(x)$ – четная, то ее Ф. п. равно

$$g(u)\equiv F_c[f]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos ut\,dt \qquad (2)$$

(косинус-преобразование), а если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$g(u)\equiv F_s[f]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin ut\,dt \qquad (3)$$

(синус-преобразование). Формулы (1)–(3) обратимы, то есть для четных функций

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g(u)\cos ux\,du,$$

а для нечетных функций

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g(u)\sin ux\,du.$$

В общем случае имеет место формула

$$f(x)\equiv F^{-1}[g]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{iux}\,du. \qquad (4)$$

Каждой операции над функциями соответствует операция над их Ф. п., к-рая во многих случаях проще соответствующей операции над $f(x)$. Напр., Ф. п. для $f'(x)$ является $iug(u)$. Если

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-s)f_2(s)\,ds,$$

то $g(u)=g_1(u)g_2(u)$. Для $f(x+a)$ Ф. п. является $e^{iua}g(u)$, а для $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ – функция $c_1g_1(u)+c_2g_2(u)$.

Если существует

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx,$$

то интегралы в формулах (1) и (4) сходятся в среднем, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|^2\,du \qquad (5)$$

(теорема Планшереля). Формула (5) является обобщением на Ф. п. равенства Парсеваля для рядов Фурье. Физич. смысл формулы (5) заключается в равенстве энергии нек-рого колебания сумме энергий его гармонич. компонент. Отображение $F:f(x)\to g(u)$ является унитарным оператором в гильбертовом пространстве функций $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, с интегрируемым квадратом. Этот оператор может быть представлен также в виде:

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{du}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iut}-1}{-it}f(t)\,dt.$$

Если функция $f(x)$ достаточно быстро убывает, то ее Ф. п. можно определить и при нек-рых комплексных значениях $u=v+iw$. Напр., если существует

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|e^{a|x|}\,dx,\quad a>0,$$

то Ф. п. определено при $|w|<a$. Ф. п. при комплексных значениях тесно связано с двусторонним *Лапласа преобразованием*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-px}\,dx,\quad p=s+i\sigma.$$

Оператор Ф. п. может быть расширен на более обширные классы функций, нежели совокупность интегрируемых функций, и даже на нек-рые классы обобщенных функций (так наз. медленного роста).

Ф. п., первоначально возникшее в теории теплопроводности, имеет многочисленные применения как в самой математике (напр., при решении дифференциальных, разностных и интегральных уравнений, в теории специальных функций), так и в различных разделах теоретич. физики. Напр., Ф. п. стало стандартным аппаратом квантовой теории поля, широко используется в методе функций Грина для неравновесных задач квантовой механики и термодинамики, в теории рассеяния. *В. И. Битюцков.*

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ обобщенной функции – распространение классического преобразования Фурье

$$F[g](x)=\int e^{ix\xi}g(\xi)\,d^n\xi$$

(где $x\xi=x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n$ для $x,\ \xi\in\mathbb{R}^n$) суммируемой функции $g(x)$ на *обобщенные функции*. Ф. п. обобщенной функции было введено Л. Шварцем (L. Schwartz) в конце 40-х гг. 20 в. Он же выделил наиболее популярный класс обобщенных функций, инвариантный относительно преобразования Фурье – *умеренные распределения*. Ф. п. широко применяются в теории обобщенных функций, в теории линейных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами, в аксиоматич. квантовой теории поля и в ряде разделов математич. физики.

Ф. п. обобщенной функции определяется как сопряженное к одноименному преобразованию в основных пространствах (см. *Обобщенная функция*). Именно, пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ – основные пространства, элементы к-рых – суммируемые в $\mathbb{R}^n$ функции, причем Ф. п., определяемое формулой

$$F[\Phi](\xi)=\int e^{i\xi x}\Phi(x)\,d^nx,\quad \Phi\in\mathcal{F},$$

задает топологич. изоморфизм

$$F:\mathcal{F}\cong\mathcal{G}.$$

Тогда Ф. п. $g\in\mathcal{G}'$ определяется равенством

$$(F[g],\Phi)=(g,F[\Phi]),\ \Phi\in\mathcal{F},$$

и задает топологич. изоморфизм

$$F:\mathcal{G}'\cong\mathcal{F}'.$$

В стандартных пространствах

$$F[D^{\alpha}g](x)=(-ix)^{\alpha}F[g](x),$$

где мультииндекс $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $D_i=\partial/\partial x_i$, $D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$.

Преобразование Фурье умеренных распределений. Здесь основное пространство $\mathcal{S}$ инвариантно относительно преобразования Фурье, то есть

$$F:\mathcal{S}\cong\mathcal{S},$$

так что определено Ф. п.

$$F:\mathcal{S}'\cong\mathcal{S}'$$

– топологич. изоморфизм.

Примеры.

(1) $F[\theta](x)=i\frac{1}{x+i0}$,

(2) $F[\delta](x)=1$,

где θ – функция Хевисайда, δ – дельта-функция Дирака, $1/(x+i0)$ – одна из регуляризаций локально неинтегрируемой функции $1/x$ (см. *Обобщенная функция*), $n=1$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., 1959; [3] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1–2, P., 1950–51 (nouv. éd., P., 1978).

В. В. Жаринов.

ФУРЬЕ РЯД функции $f(x)$ по ортонормированной на промежутке (a, b) системе функций $\{\varphi_k(x)\}$ – ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

коэффициенты (так наз. коэффициенты Фурье функции f) которого определяются по формулам

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

О функции f в общем случае предполагается, что она интегрируема с квадратом на (a, b). Аналогично строятся Ф. р. для функций многих переменных. Ф. р. по ортонормированным системам возникли как обобщение Ф. р. по тригонометрич. системе, к-рые были первыми примерами Ф. р. Дальнейшие обобщения приводят к Ф. р. в гильбертовом пространстве.

Ф. р. по тригонометрич. системе определяется для каждой функции f, интегрируемой на $(0, 2\pi)$. Это ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

с коэффициентами

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx. \qquad (2)$$

Теория Ф. р. по тригонометрич. системе разработана наиболее глубоко. Имея в виду Ф. р. по тригонометрич. системе, обычно говорят просто о Ф. р., не указывая, по какой системе они строятся.

Ф. р. составляют значительную часть теории тригонометрич. рядов. Впервые Ф. р. появились в работах Ж. Фурье (J. Fourier, 1807), посвященных исследованию задач теплопроводности. Он предложил для представления функции f, заданной на $(0, 2\pi)$ тригонометрич. рядом, брать ряд (1) с коэффициентами (2). Выбор коэффициентов (2) является естественным со многих точек зрения. Напр., если формально приравнять ряд (1) функции $f(x)$, то почленное интегрирование приводит к коэффициентам a_k, b_k, определяемым по формулам (2). Так их получал еще Л. Эйлер (L. Euler, 1777).

Интеграл в (2) можно понимать по-разному, напр. как интеграл Римана или Лебега. В зависимости от этого говорят о рядах Фурье – Римана, Фурье – Лебега и т. п. Современный вид теория Ф. р. приобрела после построения интеграла Лебега, после чего она развивается, главным образом, как теория рядов Фурье – Лебега.

В теории Ф. р. исследуются вопросы представления функций с помощью Ф. р., изучается связь свойств функции со свойствами ее Ф. р.

К работе Ф. Бесселя (F. Bessel, 1828) восходит доказательство минимального свойства частных сумм Ф. р.: для функций $f \in L^2$ среди тригонометрич. полиномов $t_n(x)$ порядка n наименьшее значение интегралу

$$\int_0^{2\pi}[f(x) - t_n(x)]^2\,dx$$

доставляет частная сумма Ф. р. функции f. Если $f \in L^2$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx,$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции f. Это означает, что для каждой функции $f \in L^2$ ее Ф. р. сходится к ней в метрике L^2.

Коэффициенты Фурье каждой интегрируемой функции стремятся к нулю. Скорость стремления увеличивается, если функция обладает лучшими свойствами. Напр., если f абсолютно непрерывна, то Ф. р. производной f' можно получить почленным дифференцированием Ф. р. функции f и для коэффициентов Фурье функции f справедлива оценка a_k, $b_k = o(k^{-1})$ при $k \to \infty$.

Теория Ф. р. для функций многих переменных разработана в меньшей степени. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_N)$ – точка N-мерного пространства, $k = (k_1, \ldots, k_N)$ – N-мерный вектор с целочисленными координатами и $(k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_Nx_N$. Для функции $f(x)$ периода 2π по каждой переменной, интегрируемой на N-мерном кубе $[0, 2\pi]^N$, Ф. р. (в комплексной форме) по тригонометрич. системе называется ряд

$$\sum_k c_k e^{i(k,x)}, \qquad (3)$$

где суммирование ведется по всем k и

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-i(k,x)}\,dx$$

– коэффициенты Фурье функции f.

Возможны различные определения частных сумм ряда (3), напр. по прямоугольникам

$$\sum_{|k_1| \le n_1, \ldots, |k_N| \le n_N} c_k e^{i(k,x)}$$

или по кругам

$$\sum_{|k| \le n} e^{i(k,x)},$$

где n – радиус и $|k| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_N^2}$.

Лит.: [1] Толстов Г. П., Ряды Фурье, 2 изд., М., 1960.

В. И. Битюцков.

ФУРЬЕ УЛЬТРАГИПЕРФУНКЦИЯ – *аналитический функционал* на основном пространстве

$$\Phi = \lim_{\nu \to \infty} \operatorname{proj} \Phi_\nu,$$

где банаховы пространства Φ_ν состоят из всех функций $\Phi(z)$, аналитических в трубчатой области $\mathbb{R}^n + iB_\nu$, с конечной нормой

$$|\Phi| = \sup\left\{e^{\nu|z|}|\Phi(z)|;\ z \in \mathbb{R}^n + iB_\nu\right\},$$

шар $B_\nu = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y| < \nu\}$.

Ф. у. введены в конце 50-х гг. 20 в.; применяются при изучении сильно нелокальных моделей квантовой теории поля.

На основном пространстве Φ действует преобразование Фурье

$$F: \Phi \cong \Phi,$$

так что определено преобразование Фурье Ф. у.

$$F: \Phi' \cong \Phi'$$

(см. *Фурье преобразование* обобщенной функции).

Лит.: [1] Жаринов В. В., «Труды Математич. ин-та АН СССР», 1983, т. 162, с. 1–80.

В. В. Жаринов.

ФУРЬЕ – МАСЛОВА ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР – интегральный оператор, ядро которого есть значение при $\tau = 0$ результата применения *Маслова канонического оператора* к функции на некотором лагранжевом многообразии (см. [1]). К Ф. – М. и. о. рядом тождественных преобразований приводятся интегральные операторы Фурье, введенные в [4].

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [2] Данилов В. Г., Ле Ву Ань, «Математич. сб.», 1979, т. 110, № 3, с. 323–68; [3] Назайкинский В. Е. [и др.], «Успехи математич. наук», 1981, т. 36, в. 2, с. 81–140; [4] Хермандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, пер. с англ., т. 4, М., 1988.

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.

X

ХААГА – АРАКИ АКСИОМА – см. *Аксиоматическая квантовая теория поля.*

ХААРА МЕРА на локально компактной группе – левая (правая) мера на группе G, инвариантная относительно левых сдвигов L_h:

$$g \to hg \text{ на } G$$

(соответственно, правых сдвигов $R_g: g \to gh$). Эти две меры называются соответственно левой и правой мерой Хаара. Х. м. единственна с точностью до пропорциональности. Обычно эту меру удается задать с помощью явных формул. Напр., на группе Ли для этого достаточно задать инвариантную относительно переносов форму объема.

См. также *Инвариантное интегрирование.* *Ю. А. Неретин.*

ХААРА СИСТЕМА – см. *Ортогональная система функций.*

ХАНКЕЛЯ ФУНКЦИИ – см. *Ганкеля функции.*

ХАОС (в квантовой механике), квантовый хаос, – совокупность свойств, специфически присущая квантовым хаотическим системам – гамильтоновым системам, которые в классическом случае обладают стохастическим движением. Последнее означает, что в фазовом пространстве существуют области финитного движения, в к-рых зависимость динамич. переменных x от времени $x(t)$ экспоненциально неустойчива при изменении начальных условий:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \sim \exp(\sigma t).$$

Величина σ, определяющая степень такой неустойчивости, называется показателем Ляпунова (см. [1], [2]).

Квантовый Х. доступен определению только в квазиклассич. случае: для систем, у к-рых характерный масштаб действия S велик в сравнении с постоянной Планка $\hbar$.

Квантовый Х. имеет два основных аспекта. Первый проявляется в характеристиках собственно квантовых параметров (энергетич. спектров, волновых функций и матричных элементов операторов) и фиксирует отличия квантовых хаотич. систем от квантовых регулярных (полностью интегрируемых) систем. Второй аспект проявляется в отличии динамики наблюдаемых для квантовых хаотич. систем и ее классич. аналога. В классич. механике существование стохастич. движения является исключительным свойством нелинейных неинтегрируемых систем с числом степеней свободы $N \geqslant 2$. В силу линейности уравнения Шредингера истинная, асимптотическая при $t \to \infty$ экспоненциальная неустойчивость движения средних значений наблюдаемых при изменении начальных условий в квантовых системах невозможна. С другой стороны, в силу принципа соответствия значения динамич. переменных, найденные по классич. и квантовой теориям при сходных начальных условиях, должны оставаться близкими в течение нек-рого времени соответствия τ_C, расходясь по прошествии этого времени. О различии в динамике классич. и квантовых наблюдаемых при временах $t > \tau_C$ говорят как о квантовом подавлении классич. стохастичности. Для данной системы время соответствия τ_C растет вместе с увеличением отношения $S/\hbar$.

Проблема квантового хаоса в форме вопроса о способе квантования классич. неинтегрируемых систем известна с первых лет существования квантовой теории. Она не могла быть решена до становления теории стохастичности в классич. гамильтоновых системах, выявившей сложное, квазислучайное поведение динамич. переменных при стохастич. движении и подготовившей перенос акцента с определения конкретных значений квантовых параметров на определение их статистич. свойств (см. [1], [2]). Начало современному этапу изучения квантового Х. было положено в [3], где на основе принципа соответствия описаны качественные свойства спектров и волновых функций квантовых хаотич. систем, и в [4], где было предложено исследовать статистич. свойства энергетич. спектра и предугадано явление отталкивания уровней в квантовых хаотич. системах; в [5] теоретически определен вид статистики спектра для регулярных квантовых систем; в [6], где было обнаружено в численном эксперименте и истолковано проявление времени соответствия τ_C для модели квантовой хаотич. системы.

Статистические свойства параметров квантовых хаотических систем. Основные понятия, используемые для описания квантового Х., заимствованы из статистич. теории случайных матриц, развитой в 60-е гг. 20 в. для описания структуры спектров сложных ядер (см. [7]). Центральное место в этой теории занимает понятие об ансамбле матриц – гамильтонианов, обладающих статистически независимыми элементами, функции распределения к-рых остаются инвариантными при преобразованиях, совместимых с дискретными симметриями гамильтониана.

Простейшей характеристикой структуры энергетич. спектра – последовательности значений уровней энергии E_n – является функция распределения относительной величины межуровневых расстояний S_n:

$$S_n = (E_n - E_{n-1})\rho(E_n),$$

где $\rho(E)$ – плотность уровней; в квазиклассич. случае такая плотность хорошо определена и плавно зависит от E. Функция распределения $P(S)$ случайной величины S нормирована условиями

$$\int_0^\infty P(S)\,dS = 1, \quad \int_0^\infty P(S)S\,dS = 1$$

и характеризует свойства спектра на минимальном масштабе энергии.

Другой важной характеристикой статистич. свойств спектра является спектральная жесткость $\Delta_3(L)$, к-рая определяется ниже. Для последовательности уровней ε_n, нормированных на единичную плотность ($\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + S_n$), вводится ступенчатая функция $n(\varepsilon)$, равная числу уровней с $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon$. По построению $n(\varepsilon)$ имеет вид лестницы с единичным в среднем наклоном. Функция $\Delta_3(x, L)$ определяется как минимум квадратичного отклонения $n(\varepsilon)$ на интервале $(x, x+L)$ от прямой линии:

$$\Delta_3(x, L) = \frac{1}{L} \min_{A,B} \int_x^{x+L} (n(\varepsilon) - A\varepsilon - B)^2\,d\varepsilon.$$

Значение $\langle \Delta_3(x, L) \rangle_x$, усредненное по значениям x из области, в к-рой характер флуктуаций спектра можно считать неизменным, зависит только от L и обозначается $\Delta_3(L)$.

Спектральная жесткость описывает упорядоченность спектра на участках, больших по сравнению со средним интервалом между уровнями: чем медленнее растет $\Delta_3(L)$ с ростом L, тем менее вероятны в спектре тесные кластеры уровней и лакуны с пониженной плотностью уровней.

Для полностью интегрируемых систем общего вида последовательность уровней лишена каких-либо корреляций: вероятность присутствия уровня в нек-ром интервале dE не зависит от положения других уровней. В этом случае распределение межуровневых расстояний есть распределение Пуассона,

$$P(S) = \exp(-S),$$

а спектральная жесткость линейно зависит от L:

$$\Delta_3(L) = L/15.$$

Противоположный предельный случай составляют квантовые хаотич. системы, классич. аналоги к-рых обладают свойством эргодичности на энергетич. поверхности: фазовая траектория стохастич. движения при $t \to \infty$ равномерно заполняет всю энергетич. поверхность. Для таких систем, обладающих инвариантностью при обращении времени (описывающих движение бесспиновых частиц в отсутствие магнитного поля), в квазиклассич. пределе статистич. свойства спектров не отличаются от соответствующих свойств гауссова ортогонального ансамбля вещественных симметричных матриц, инвариантных при произвольных ортогональных преобразованиях. Именно: распределение межуровневых расстояний описывается (с ошибкой порядка 1%) формулой Вигнера

$$P(S) = \frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{4} S^2\right). \qquad (1)$$

Обращение $P(S)$ в нуль при $S \to 0$ отражает отталкивание уровней — понижение вероятности обнаружить в спектре пару соседних уровней на малом расстоянии в сравнении с полностью случайным (пуассоновским) распределением.

Спектральная жесткость квантовой хаотич. системы при $L \gg 1$ описывается асимптотич. формулой

$$\Delta_3(L) = \frac{1}{\pi^2} \ln L - 0{,}0069. \qquad (2)$$

Сравнительно медленный рост $\Delta_3(L)$ означает, что уровни спектра квантовой хаотич. системы расположены равномернее, чем в полностью случайной последовательности.

Гипотеза об эквивалентности статистич. свойств спектров эргодич. квантовых хаотич. систем и гауссова ортогонального ансамбля, впервые выдвинутая в [8], подтверждена данными многочисленных компьютерных расчетов и поддержана аналитич. оценками (см. [9]–[11]). Существенна универсальность формул (1) и (2). Их применимость не связана с конкретной формой гамильтониана, а обусловлена только эргодичностью классич. движения и достаточной малостью отношения $\hbar/S$: так, формула (2) применима при $L \leqslant (S/\hbar)^{N-1}$, где N — число степеней свободы.

Эргодичность стохастич. движения на энергетич. поверхности представляет собой частный, обычно предельный, случай. В общем случае классич. неинтегрируемая система может быть характеризована долей μ объема компактной энергетич. поверхности, занятой стохастич. траекториями. Регулярным системам соответствует $\mu = 0$, эргодическим — $\mu = 1$. При изменении параметров системы, влекущем увеличение μ, статистич. свойства спектров соответствующих квантовых хаотич. систем меняются монотонно от пуассоновских при $\mu \ll 1$ до свойственных гауссовым статистич. ансамблям при $1 - \mu \ll 1$. Статистика спектра в промежуточных случаях по современным представлениям не универсальна и зависит как от типа системы, так и от величины отношения $\hbar/S$.

Типичные волновые функции стационарных состояний эргодич. квантовых хаотич. систем имеют случайный характер. Для волновых функций в координатном представлении ψ он внешне проявляется в иррегулярных картинах линий узлов $\psi(q) = 0$. Свойства таких волновых функций могут описываться статистич. характеристиками: плотностью распределения значений волновой функции $P(\psi)$ (она оказывается близкой к гауссовой) и корреляционными функциями $C(r) = \langle \psi(q)\psi(q+r) \rangle_q$. С другой стороны, отдельные волновые функции могут обладать видимыми чертами регулярности, связанными с существованием областей повышенной плотности вероятности $\rho(q) = |\psi(q)|^2$ вблизи неустойчивых периодич. орбит классич. движения.

Динамика наблюдаемых в классических и квазиклассических квантовых хаотических системах. Время соответствия τ_C для заданной системы зависит как от типа динамич. переменной, так и от начальных условий. Тем не менее можно указать два характерных масштаба, ограничивающие наиболее существенный интервал таких времен.

Ближайшим квантовым аналогом точки в фазовом пространстве является гауссов волновой пакет с минимальными неопределенностями координаты и импульса ($\Delta p \sim \Delta q \sim \sqrt{\hbar}$). Время расплывания такого пакета можно оценить как время расхождения пучка классич. траекторий, начальные точки к-рых повторяют распределение плотности пакета в фазовом пространстве. Учитывая экспоненциальный характер расхождения траекторий, для времени, в течение к-рого размеры пакета станут сравнимы с размерами энергетич. поверхности, получают оценку

$$\tau_E \sim \frac{1}{\sigma} \ln \frac{S}{\hbar}.$$

Она иногда называется эренфестовым масштабом соответствия. До наступления времени τ_E все квантовые средние близки к значениям классич. динамич. переменных.

С другой стороны, частотный спектр классич. динамич. величин при стохастич. движении является непрерывным. У квантовых же автономных систем энергетич. спектр, а с ним и частотные спектры операторов динамич. величин — дискретны. Эта дискретность проявится в динамике наблюдаемых на временах порядка

$$\tau_D \sim \hbar\rho(E). \qquad (3)$$

Величина τ_D иногда называется диффузионным масштабом соответствия. Для автономной системы с N степенями свободы плотность уровней в квазиклассич. случае дается асимптотич. формулой

$$\rho(E) \sim (2\pi\hbar)^{-N} \frac{d\Omega(E)}{dE}, \qquad (4)$$

где $\Omega(E)$ — фазовый объем, занятый траекториями системы с энергиями, меньшими E. Из (3) и (4) получается выражение для диффузионного масштаба времени

$$\tau_D \sim \frac{1}{\omega} \left(\frac{S}{\hbar}\right)^{N-1},$$

где ω — характерная частота движения системы. Поскольку для стохастич. систем $N \geqslant 2$, то $\tau_D \gg \tau_E$. Время τ_D определяет верхнюю границу шкалы времен соответствия: при $t \geqslant \tau_D$ поведение всех квантовых динамич. переменных существенно отличается от классического.

Сказанное выше относится к автономным системам. Значительной спецификой обладает вопрос о времени соответствия для неавтономных систем, гамильтонианы к-рых зависят от времени. Для них в квантовом случае плотность спектральных компонент уже не определяется простым образом, подобным (4), а проявляет чувствительность к типу системы и ее параметрам. В частности, спектр квантовой неавтономной системы может стать непрерывным при сохранении финитности движения.

У нек-рых неавтономных классич. систем при изменении параметров скачком возникает стохастич. компонента, не ограниченная по временной действия I — так наз. глобальная стохастичность (см. [1], [2]). В этом случае

поведение функции распределения по действию $f(I, t)$ для ансамбля систем имеет характер диффузии, как следствие вызывает возрастание средней энергии системы и может быть описано уравнением Фоккера – Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I}\left(D(I)\frac{\partial f}{\partial I}\right).$$

В квантовом случае диффузия по действию прекращается за время $\tau_D \sim D/\hbar^2$.

Примером системы с такими свойствами является одномерная модель атома водорода в переменном электрич. поле с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{z} + e\mathscr{E}z\cos\omega t, \quad z \geqslant 0.$$

Согласно классич. теории для такой модели при начальном значении действия I_0 глобальная стохастичность возникает, если $\omega I_0^3 > me^4$, а напряженность поля $\mathscr{E}$ превышает пороговое значение

$$\mathscr{E}_C \approx 0{,}02m^{7/3}e^{19/3}\omega^{-1}I_0^{-5}.$$

При этом коэффициент диффузии в уравнении Фоккера – Планка равен

$$D(I) \approx 0{,}3\mathscr{E}^2m^{-5/3}e^{-2/3}\omega^{-4/3}I^3.$$

Квантовые эффекты приводят к тому, что диффузия по действию, а с ней и набор энергии, приводящий в конечном счете к отрыву электрона (стохастической ионизации), ограничены временем соответствия τ_D; если только $\mathscr{E}$ не превосходит значения

$$\mathscr{E} \approx 0{,}4m^{5/6}\omega^{7/6}e^{1/3}\hbar^{1/2}I_0^{-1}.$$

В противном случае и в квантовой системе происходит быстрая ионизация (см. [12]).

Лит.: [1] Лихтенберг А., Либерман М., Регулярная и стохастическая динамика, пер. с англ., М., 1984; [2] Шустер Г., Детерминированный хаос. Введение, пер. с англ., М., 1988; [3] Percival I. C., «J. Phys. B: Mol. Phys.», 1973, v. 6, № 6, p. L229–L232; [4] Заславский Г. М., Филоненко Н. Н., «Журнал эксперим. и теоретич. физики», 1973, т. 65, № 2(8), с. 643–56; [5] Berry M. V., Tabor M., «Proc. Roy. Soc. London», 1977, v. 356A, p. 375–94; [6] Casati G., Chirikov B. V., Izrailev F. M., Ford J., in: «Stochastic Behavier in Classical and Quantum Hamiltonian Systems», B.–Heidelberg – N. Y., 1979, p. 334–52; [7] Mehta M. L., Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels, N. Y.– L., 1967; [8] Casati G., Vals-Gris F., Guarnevi I., «Lett. Nuovo Cimento», 1980, v. 28, № 8, p. 279–82; [9] Eckhardt B., «Phys. Rep.», 1988, v. 163, № 4, p. 205–92; [10] Елютин П. В., «Успехи физич. наук», 1988, т. 155, № 3, с. 397–442; [11] Friedrich H., Wintgen D., «Phys. Rep.», 1989, v. 183, № 2, p. 37–79; [12] Casati G., Chirikov B. V., Shepelyansky D. L., «Phys. Rep.», 1987, v. 154, № 2, p. 77–123.

П. В. Елютин.

ХАРАКТЕР группы – гомоморфизм этой группы в группу комплексных чисел, по модулю равных единице с операцией умножения. Если G – топологич. группа, то необходимо также потребовать, чтобы этот гомоморфизм был непрерывным. Пусть χ_1 и χ_2 – Х. группы G. Тогда произведение функций $\chi_1(g)\chi_2(g)$, $g \in G$, снова является Х. группы G. Таким образом, множество всех Х. группы является группой, к-рая называется группой характеров.

Ю. А. Неретин.

ХАРАКТЕР конечномерного представления T группы G – функция на G, определяемая равенством $\chi(g) = \mathrm{tr}\, T_g$, где $g \in G$, через tr обозначен след оператора. Если представление T одномерно и унитарно, то χ – *характер* группы. См. также *Обобщенный характер представления.*

Ю. А. Неретин.

ХАРАКТЕРИСТИК МЕТОД – метод получения и исследования решений дифференциальных уравнений. Пусть, напр., дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial t} + Fu = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C, D, E, F – заданные функции пространственной координаты x и времени t, u – искомая функция. Характеристикой уравнения (1) называется линия

$$X(x, t) = \mathrm{const},$$

вдоль к-рой решение этого уравнения имеет слабый разрыв. Иными словами, в каждой точке x, t характеристики решение $u(x, t)$ непрерывно, тогда как производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ имеют разрывы 1-го рода. Так как $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ конечны, то вблизи характеристики величина u мало изменяется. С другой стороны, так как значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\left(\text{и } \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ в бесконечно малой окрестности характеристики меняются на конечную величину, то для нахождения характеристики достаточно рассмотреть быстро изменяющиеся решения функции $u(x, t)$. При этом можно пренебречь зависимостью коэффициентов A, B, C, D, E, F от x и t, то есть считать их постоянными. В этом случае решение $u(x, t)$ можно разложить в двойной интеграл Фурье

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, u_{k\omega} \exp[i(kx - \omega t)], \qquad (2)$$

где k и ω удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$-k^2A + 2k\omega B - \omega^2 C + ikD - i\omega E + F = 0. \qquad (3)$$

Так как характеристика определяется быстро изменяющимися возмущениями, то величины k и ω можно считать бесконечно большими и для нахождения характеристики в дисперсионном уравнении можно оставить только старшие члены по k, ω:

$$k^2A - 2k\omega B + \omega^2 C = 0. \qquad (4)$$

Кроме того, в интеграле Фурье играют роль только значения $k \to \infty$ и $\omega \to \infty$. Если в окрестности нек-рой точки x_0, t_0 к решению $u(x, t)$ добавлено нек-рое возмущение δu, то это возмущение будет распространяться вдоль характеристики. Скорость V распространения возмущений равна ω/k. Согласно уравнению (4),

$$V \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}. \qquad (5)$$

Если $B^2 - AC > 0$, то существуют две различные характеристики и уравнение (1) относится к гиперболич. типу. Так как скорость распространения возмущений равна dx/dt, то уравнение характеристики $X(x, t) = \mathrm{const}$ можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = V(x,t).$$

Это означает, что тангенс угла наклона характеристики к оси t равен локальной скорости распространения возмущений.

Решение уравнения (1) определяется начальными условиями, то есть значениями при $t = 0$ функции $u(x, t)$ и ее производной

$$u(x,t)|_{t=0} = f_1(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x).$$

Возмущения функций f_1 и f_2 в точке x_0 влияют на решение $u(x, t)$ только вдоль двух характеристик, исходящих из этой точки. Из этого следует важный вывод. Пусть значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ заданы только на отрезке MN оси x. Проведем через точки M и N характеристики $X_{\pm}^{MN}$ (индексы +, – соответствуют двум знакам в формуле (5)). Начальные условия u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ на отрезке MN полностью определяют решение $u(x, t)$

в области, называемой областью зависимости отрезка MN. Эти же начальные значения влияют на решение в других областях, хотя и не полностью определяют его. Эти области называются областями влияния отрезка MN; для остальных областей никак не влияют начальные условия на отрезке MN.

Если же $B^2 - AC < 0$, то характеристики отсутствуют. При этом уравнение (1) относят к эллиптич. типу. В этом случае решение $u(x, t)$ уравнения (1) непрерывно вместе со всеми своими производными во всей области существования.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [3] Годунов С. К., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1979; [4] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

В. П. Демуцкий, Р. В. Половин.

ХАРАКТЕРИСТИКА гиперповерхности в контактном пространстве с контактной формой α — интегральная кривая поля ядер ограничения дифференциала $d\alpha$ на пересечение гиперплоскости контактного поля с касательным пространством гиперповерхности. Характеристич. поле не зависит от выбора контактной формы и имеет особенности в точках касания гиперповерхности контактного поля.

М. Э. Казарян.

ХАРАКТЕРИСТИКА гиперповерхности в симплектическом пространстве — интегральная кривая поля ядер ограничения *симплектической структуры* на эту гиперповерхность. Если гиперповерхность является поверхностью уровня гамильтониана H, то характеристич. поле направлений задается ограничением на гиперповерхность гамильтонова векторного поля с гамильтонианом H.

М. Э. Казарян.

ХАРАКТЕРИСТИКА дифференциального оператора — понятие теории дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть $\hat{H} - \hat{A}$-псевдодифференциальный оператор с главным символом $H(x, p)$. Характеристиками оператора $\hat{H}$ называются поверхности $S(x) = \text{const}$ с функцией S, удовлетворяющей уравнению Гамильтона — Якоби $H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$. Бихарактеристиками этого оператора называются траектории системы Гамильтона для гамильтониана $H(x, p)$ в фазовом пространстве:

$$\dot{x} = H_p(x, p),\ \dot{p} = -H_x(x, p).$$

Лит.: [1] Маслов В. П., «Успехи математич. наук», 1983, т. 38, в. 6, с. 3–36.

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.

ХАРАКТЕРИСТИКА контактной формы — кривая в *контактном многообразии*, касательная прямая которой в каждой точке является ядром 2-формы $d\lambda$, где λ — контактная форма. Х. трансверсальны *контактной структуре*. Векторное поле v, касающееся Х., называется характеристическим полем (полем Риба), если $\lambda(v) = 1$. Такое поле сохраняет контактную структуру. Пример Х.— геодезич. поток в многообразии контактных элементов риманова многообразия.

2-форма $d\lambda$ определяет в многообразии (определенном лишь локально) Х. симплектич. структуру.

С. А. Табачников.

ХАРАКТЕРИСТИКА уравнения с частными производными $F(u, \partial u/\partial x, x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ — *характеристика* гиперповерхности в контактном пространстве 1-струй функций на $\mathbb{R}^n$, заданной уравнением $F(u, p, x) = 0$. Смысл Х. состоит в том, что 1-струя любого решения целиком состоит из Х. В координатах Х. задаются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = F_p,\ \dot{p} = -F_x - pF_u,\ \dot{u} = pF_p.$$

См. также *Характеристик метод.*

М. Э. Казарян.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ случайной величины — *Фурье преобразование* функции распределения этой случайной величины; удобный аналитический объект для математических исследований различных свойств случайной величины.

Пусть ξ — случайная величина,

$$F(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}$$

— ее функция распределения. Функция

$$f(t) = f_\xi(t) = \langle \exp it\xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\xi)\, dF \qquad (1)$$

($t \in \mathbb{R}$) называется характеристической функцией случайной величины ξ. В случае, когда случайная величина обладает плотностью распределения вероятностей $p(x)$, интеграл (1) принимает вид

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, p(x)\, dx.$$

Х. ф. $f(t)$ любой случайной величины обладает следующими свойствами:

$f(0) = 1$,

$f(t)$ — непрерывна,

$f(t)$ — положительно определена, то есть

$$\sum_{i,j} f(t_i - t_j)\, z_i z_j^* \geqslant 0,$$

где $t_1, \ldots, t_s$ — произвольный конечный набор значений аргумента t, а $z_1, \ldots, z_s$ — произвольный набор комплексных чисел (* — означает комплексное сопряжение). Указанные три свойства являются определяющими, а именно, для любой функции $f(t)$, обладающей этими тремя свойствами, найдется (и при этом лишь одна) функция $F(x)$ распределения вероятностей значений нек-рой случайной величины ξ такая, что $f(t)$ представима в виде (1).

Справедливы равенства для *моментов*

$$m_n \equiv \mathsf{E}\xi^n = (-i)^n f^{(n)}(0),$$

где $f^{(n)}(0)$ — производная функции $f(t)$ порядка n.

В случае, когда у случайной величины существует k моментов m_n, $n = 1, \ldots, k$, функция $\ln f(t)$, по крайней мере, k раз дифференцируема в малой окрестности точки $t = 0$; ее производные в этой точке:

$$\left.\frac{d^k \ln f(t)}{dt^k}\right|_{t=0},$$

называются семиинвариантами (кумулянтами) случайной величины.

Для двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 с Х. ф. $f_1(t)$ и $f_2(t)$, Х. ф. их суммы $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$$f_\eta(t) = f_1(t) f_2(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Это свойство чрезвычайно существенно в теории суммирования случайных величин. Из него следует, что при добавлении к случайной величине константы b Х. ф. случайной величины умножается на $\exp(itb)$,

$$f_{\xi+b}(t) = \exp(itb) f_\xi(t).$$

Для наиболее употребительных случаев гауссовского, пуассоновского и равномерного распределений их Х. ф. вычислены и имеют вид:

для *Гаусса распределения* со средним a и дисперсией σ^2 Х. ф.

$$f(t) = \exp(ita - \sigma t^2);$$

для *Пуассона распределения* с интенсивностью λ

$$f(t) = \exp\{\lambda[\exp it - 1]\};$$

для равномерного распределения на конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ [$\xi \in [a, b]$, плотность $p(x) = (b-a)^{-1}$]

$$f(t) = \frac{\exp itb - \exp ita}{it(b-a)}.$$

В случае нескольких случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_s$ их совме-

стная Х. ф. от s переменных определяется формулой

$$f_{\xi_1 \dots \xi_s}(t_1, \dots, t_s) = \langle \exp(\xi_1 t_1 + \dots + \xi_s t_s) \rangle =$$

$$= \iint \exp(x_1 t_1 + \dots + x_s t_s)\, dF_{\xi_1 \dots \xi_s}(x_1, \dots, x_s),$$

где $F_{\xi_1 \dots \xi_s}(x_1, \dots, x_s)$ – совместная функция распределения набора случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_s$. Если все величины ξ_i независимы, то

$$f_{\xi_1 \dots \xi_s}(t_1, \dots, t_s) = \prod_{i=1}^{s} f_{\xi_i}(t_i).$$

Свойства Х. ф. $f_{\xi_1 \dots \xi_s}(t_1, \dots, t_s)$ для нескольких случайных величин аналогичны перечисленным выше трем свойствам Х. ф. одной случайной величины.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984. *Р. А. Минлос.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ – действительная функция $\chi(v)$ на векторном пространстве, удовлетворяющая условиям:

1) $\chi(av) = \chi(v)$, $a \neq 0$;

2) $\chi(v_1 + v_2) \leqslant \max\{\chi(v_1), \chi(v_2)\}$;

3) $\chi(0) = -\infty$.

Функция $\chi(v)$ принимает конечное число значений ($\leqslant$ размерности пространства).

Если $\dot{v} = A(t)\, v$ – линейная система дифференциальных уравнений, то функция

$$\chi(v(t)) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \|v(t)\|$$

на пространстве ее решений $v(t)$, $v(0) = v_0$, удовлетворяет условиям 1)–3) и называется характеристическим показателем системы.

Если f^t – динамич. система на гладком римановом многообразии M ($t \in \mathbb{Z}$ или $t \in \mathbb{R}$), то функция

$$\chi(x, v) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \left\| df^t v \right\|$$

при каждом $x \in M$ удовлетворяет 1)–3) и называется характеристическим показателем системы. Как функция от v она принимает конечное число значений $\chi_1(x) \leqslant \dots \leqslant \chi_n(x)$ ($n = \dim M$), к-рые являются борелевскими (но, вообще говоря, не непрерывными) функциями x.

Лит.: [1] Былов Б. Ф. и др., Теория показателей Ляпунова, М., 1966; [2] Песин Я. Б., «Успехи математич. наук», 1977, т. 32, в. 4, с. 55–112. *Я. Б. Песин.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ случайной линейной функции $\{\xi_\varphi, \varphi \in E\}$ – функционал $F(\varphi)$ на векторном пространстве E, обобщающий понятие *характеристической функции* одной случайной величины.

Пусть задана линейная *случайная функция*

$$\{\xi_\varphi, \varphi \in E\}, \qquad (1)$$

то есть семейство *случайных величин* (определенных на одном и том же вероятностном пространстве Ω), помеченных элементами $\varphi \in E$ нек-рого линейного пространства E и линейно зависящих от них:

$$\xi_{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2} = \lambda_1 \xi_{\varphi_1} + \lambda_2 \xi_{\varphi_2}, \qquad (2)$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in E,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Функционал на E

$$F(\varphi) = \langle \exp(i \xi_\varphi) \rangle \qquad (3)$$

называется характеристическим функционалом линейной случайной функции (1). Из (2) и (3) следует, что для любого конечного набора элементов $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ функция $f_{\{\varphi_t\}}(t_1, \dots, t_s)$ от действительных переменных $t_1, \dots, t_s$

$$f_{\{\varphi_t\}}(t_1, \dots, t_s) = F(t_1 \varphi_1 + \dots + t_s \varphi_s)$$

является совместной характеристич. функцией набора случайных величин $\{\xi_{\varphi_1}, \dots, \xi_{\varphi_s}\}$. Таким образом, Х. ф. $F(\varphi)$ однозначно определяет совместные распределения любого конечного набора случайных величин $\{\xi_{\varphi_1}, \dots, \xi_{\varphi_s}\}$, то есть определяет все статистич. свойства линейной случайной функции (1).

Х. ф. равен 1 при $\varphi = 0$, положительно определен, то есть

$$\sum_{i,j} F(\varphi_i - \varphi_j)\, z_i z_j^* \geqslant 0,$$

для любого конечного набора элементов $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ и любого набора комплексных чисел $z_1, \dots, z_s$ ($*$ – означает комплексное сопряжение), а также в случае непрерывной линейной функции непрерывен по φ. В наиболее простом и употребительном случае – гауссовской линейной случайной функции $\{\xi_\varphi, \varphi \in E\}$ со средним

$$\mathsf{E}\xi_\varphi = T(\varphi)$$

и ковариацией

$$\mathsf{E}\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2} = \mathsf{E}\xi_{\varphi_1}\xi_{\varphi_2} - \mathsf{E}\xi_{\varphi_1}\mathsf{E}\xi_{\varphi_2} = B(\varphi_1, \varphi_2)$$

ее Х. ф.

$$F(\varphi) = \exp[-B(\varphi_1, \varphi_2) - iT(\varphi)].$$

Лит.: [1] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А., Вероятностные распределения в банаховых пространствах, М., 1985. *Р. А. Минлос.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ – см. *Характеристика* контактной формы, *Контактная геометрия.*

ХАРТОГСА ТЕОРЕМА – см. *Голоморфное отображение.*

ХАРТРИ МЕТОД – см. *Самосогласованное поле.*

ХАРТРИ – ФОКА МЕТОД – см. *Квантовая теория многих частиц, Самосопряженное поле.*

ХАУСДОРФА АКСИОМА – см. *Топологическое пространство.*

ХАУСДОРФОВА РАЗМЕРНОСТЬ – числовая характеристика подмножеств компактного метрического пространства X, равная

$$\inf\{\alpha : m(\alpha, Z) = 0\},$$

где $m(\alpha, Z)$ – λ – внешняя мера Хаусдорфа множества $Z \subset X$, определяемая как

$$m(\alpha, Z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{G} \left\{ \sum_{U \in G} (\operatorname{diam} U)^\alpha \right\}$$

(нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям G множества Z открытыми множествами, диаметр которых не больше ε).

В теории динамич. систем Х. р. является одной из наиболее важных размерностных характеристик инвариантных фрактальных множеств.

Лит.: [1] Hausdorff F., «Math. Ann.», 1919, Bd 79, S. 157–79; [2] Песин Я. Б., «Успехи математич. наук», 1988, т. 43, в. 4, с. 95–128. *Я. Б. Песин.*

ХЕВИСАЙДА ФУНКЦИЯ – см. *Обобщенная функция.*

ХЕЛЕ – ШОУ ЗАДАЧА с неизвестной границей – задача теории плоских течений несжимаемой вязкой жидкости, заключающаяся в описании динамики движения области $D_{(t)}$, занятой жидкостью, при условии, что в $D_{(t)}$ имеются источники (стоки) z_k заданной мощности Q_k, а на границе $\gamma_t = \partial D_{(t)}$ контакта жидкости с внешней средой (напр., воздухом) давление p остается неизменным.

Точнее, Х.– Ш. з. состоит в нахождении семейства областей $D_{(t)}$ и потенциальной функции $p : D_{(t)} \to \mathbb{R}$ таких, что выполняются условия

$$\Delta p = 0 \text{ в } D_{(t)} \setminus \cup\{z_k\},\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$p = 0 \text{ и } \partial p/\partial t - |\nabla p|^2 = 0 \text{ на } \gamma_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Кроме того, считаются известными начальная область $D_{(0)}$ и $p(z, 0)$, а в точках z_k потенциал p имеет поведение $(Q_k/2\pi) \ln |z - z_k|$.

Х. – Ш. з. с неизвестной границей подверглась изучению после предложенной в [2] математич. модели, объяснявшей

результаты физич. эксперимента Г. Хеле-Шоу [1]. Близкие однофазные краевые задачи с неизвестными границами рассматривались позднее в теории фильтрации, астрофизике, электрохимич. обработке материалов и т. д. (см. [3]). Характерным в подобных задачах является появление в ряде случаев особенностей на неизвестной границе за конечное время, что влечет за собой несуществование классич. решения для всего интервала времени.

Лит.: [1] Hele-Shaw H. S., «Trans. Inst. Nav.», 1898, v. XI; [2] Stokes G., «Rep. Brit. Ass.», 1898, p. 143–47; [3] Crank J., Free and moving boundary problems, Oxford, 1984, ch. 2. *Ю. Е. Хохлов.*

ХИГГСА МЕХАНИЗМ – «механизм», разработанный для построения последовательной калибровочной теории элементарных частиц, в которой частицы могут иметь ненулевые массы. С математич. точки зрения ситуация здесь вполне удовлетворительная. В 1964 П. Хиггс (P. Higgc) указал на то, что последствия *спонтанного нарушения симметрии* сильно отличаются от того, что имеется в некалибровочных теориях.

Лит.: [1] Кейн Г., Современная физика элементарных частиц, пер. с англ., М., 1990; [2] Садбери А., Квантовая механика и физика элементарных частиц, пер. с англ., М., 1989; [3] Райдер Л., Квантовая теория поля, пер. с англ., М., 1987. *М. И. Войцеховский.*

ХИГГСА ЭФФЕКТ – см. *Спонтанное нарушение симметрии.*

ХИЛЛЕ – ИОСИДЫ ТЕОРЕМА – см. *Полугруппа.*

ХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ – термодинамический параметр, задающий вместе с температурой состояние большого канонического ансамбля. Х. п.– интенсивная величина, определяемая соотношением

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\beta, V},$$

где F – свободная энергия, N – число частиц, β – обратная температура, V – объем. Х. п. тела, состоящего из одинаковых частиц, есть удельная (в расчете на одну частицу) свободная энтальпия (энергия Гиббса).

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1, М., 1978. *Д. П. Санкович.*

ХОДЖА ОПЕРАТОР – см. *Дуальности оператор.*

ХОДЖА СТРУКТУРА смешанная – следующие две фильтрации в пространстве $H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, где $H_{\mathbb{R}}$ – конечномерное векторное пространство, содержащее решетку $H_{\mathbb{Z}}$: 1) весовая фильтрация W_k, рациональная относительно $H_{\mathbb{Z}}$, 2) убывающая *Ходжа фильтрация* F^p такая, что для любых p, k и $q = k - p$:

$$F^p \cap W_k + \overline{F^{q+1} \cap W_k} + W_{k-1} = W_k \quad \text{и} \quad F^p \cap \overline{F^{q+1}} + W_{k-1} = W_{k-1}.$$

Для *критической точки* функции W_k строится по логарифму унипотентной части оператора монодромии. *С. В. Чмутов.*

ХОДЖА ФИЛЬТРАЦИЯ $\{F^p\}$ для *критической точки* ростка $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ определяется следующим образом. Пусть ω – голоморфная форма на $(\mathbb{C}^n, 0)$. Рассматриваются сечения $[\omega/df]$ расслоения когомологий связанного с *Милнора расслоением* деформации $F(x, t) = f(x) + t$. Тогда

$$[\omega/df] = \sum t^{\alpha} (\ln t)^k A^{\omega}_{k,\alpha} / k!,$$

где $A^{\omega}_{k,\alpha}$ – ковариантно постоянные сечения. Пусть $\alpha(\omega) = \min\{\alpha : A^{\omega}_{k,\alpha} \neq 0$ для нек-рого $k\}$ и

$$s_{\max}[\omega](t) = t^{\alpha(\omega)} \sum (\ln t)^k A^{\omega}_{k,\alpha} / k!.$$

Тогда фильтрация Ходжа $\{F^p\}$ – подпространство, порожденное $s_{\max}[\omega](t)$ с $\alpha(\omega) \in (n-p-2, n-p-1)$. *С. В. Чмутов.*

ХОДЖА ЧИСЛО $h^{p,q}$ – размерность пространства $H^{p,q}$, определенного смешанной *Ходжа структурой* W_k и F^p:

$$H^{p,q} = (F^p \cap W_{p+q} / F^{p+1} \cap W_{p+q} + W_{p+q-1}) / W_{p+q-1}.$$

С. В. Чмутов.

ХОКИНГА ТЕОРЕМА – см. *Черная дыра*; теоремы единственности.

ХОКИНГА ЭФФЕКТ – квантовый эффект излучения *черной дыры*, предсказанный С. Хокингом (см. [1], [2]) и приводящий к ее испарению. Излучение возникает в результате неустойчивости вакуума в гравитационном поле черной дыры и имеет тепловой характер. Его температура равна

$$T_{\text{ч.д.}} = \frac{\hbar \varkappa}{2\pi k_B c}$$

($\varkappa$ – поверхностная гравитация черной дыры, k_B – постоянная Больцмана). В результате квантового излучения происходит распад черной дыры, причем последний этап этого процесса носит взрывной характер.

Лит.: [1] Hawking S., «Nature», 1974, v. 248, p. 30–31; [2] его же, «Comm. Math. Phys.», 1975, v. 43, p. 199–220; [3] Черные дыры. Сб. статей, пер. с англ., М., 1978; [4] Новиков И. Д., Фролов В. П., Физика черных дыр, М., 1986. *В. П. Фролов.*

ХОПФА УРАВНЕНИЕ – нелинейное уравнение переноса для скорости течения $u(x, t)$ в точке $x \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in [0, \infty)$ в одномерной газодинамике:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) точно интегрируется и его решение $u(x, t)$ определяется неявно из уравнения

$$u = u_0(x - ut),$$

где $u_0(x) = u(x, 0)$. Однако это решение существует только на интервале $t \in [0, (\max_x(-\partial u_0/\partial x))^{-1})$. Это явление типично для систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка. Чтобы говорить о возможности продолжения решений этих уравнений на $[0, \infty)$ вводится понятие *обобщенных решений*, к-рые уже являются разрывными. В классич. работе Э. Хопфа [1] построено обобщенное разрывное решение уравнения (1), как поточечный предел решения уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu > 0,$$

с тем же начальным условием $u_0(x)$ при стремлении к нулю вязкости μ. Полученное разрывное решение удовлетворяет интегральному закону сохранения

$$\oint_C u\,dx - \frac{u^2}{2}\,dt = 0,$$

где C – любой контур в $(-\infty, \infty) \times [0, \infty)$, и так наз. условию Гюгонио на линиях разрыва решения.

Лит.: [1] Hopf E., «Comm. Pure Appl. Math.», 1956, v. 3, № 1, p. 201–30; [2] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений, 2 изд., М., 1978. *Ю. П. Вирченко.*

ХОПФА УРАВНЕНИЕ – дифференциальное уравнение для функционала $\chi(t, w)$, имеющее вид:

$$\partial\chi(t,w)/\partial t = \nu(\partial\chi/\partial w, \Delta w) -$$

$$-i\sum_{j=1}^{3} (\partial^2\chi/\partial w^j(\cdot)\delta w(\cdot), \partial w(\cdot)/\partial x^j) + i(w, f(t,\cdot))\,\chi(t,w).$$

Здесь

$$\delta\chi/\delta w(x) = (\delta\chi/\delta w^1(x), \ldots, \delta\chi/\delta w^3(x)),$$

$$\delta^2\chi/\delta w^j(x)\delta w(x)$$

– вариационные производные, Δ – оператор **Лапласа**, $f(t, x)$ – плотность внешних сил,

$$(u, v) = \int_\Omega u^j(x) v^j(x)\,dx$$

– скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, $t \in [0, T]$,

$$w(x) \in H^2 \equiv \{(w^1, w^2, w^3) \in (H^2(\Omega))^3 : \operatorname{div} w = 0,\ w|_{\partial\Omega} = 0\},$$

где $H^2(\Omega)$ – пространство функций Соболева, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с производными до второго порядка. Если функционал $\chi(t, w)$ удовлетворяет Х. у. и является

характеристич. функционалом семейства мер

$$\mu(t,B):\chi(t,w)=\int\exp\{i(u,w)\}\mu(t,du),$$

то $\mu(t,B)$ – пространственное статистич. решение уравнений Навье – Стокса (см. *Статистическая гидромеханика*).

М. И. Вишик, А. В. Фурсиков.

ХОРИ ФОРМУЛА – см. *Производящий функционал.*

ХОХЛОВА – ЗАБОЛОТСКОЙ УРАВНЕНИЕ – уравнение, описывающее трансформацию профилей и спектров нелинейных дифрагирующих волн, локализованных в пространстве в виде пучков, поперечный размер которых велик по сравнению с длиной волны. Опубликовано Р. В. Хохловым и Е. А. Заболотской в 1968. Это одно из основных уравнений теории нелинейных волн. В приложении к нелинейной акустике обобщенным Х. – З. у. принято называть уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial\tau}+\hat{L}p\right)=\frac{c}{2}\Delta_\perp p.$$

Здесь p – акустич. давление, z – координата вдоль оси пучка, $\tau=t-z/c$ – время в бегущей со скоростью звука c системе координат, $\Delta_\perp$ – двумерный лапласиан по координатам в поперечном сечении пучка, ε – нелинейный параметр среды, ρ – плотность среды. Линейный интегро-дифференциальный оператор $\hat{L}$ определяется частотной зависимостью слабых дисперсионных и диссипативных свойств среды.

Обычное Х. – З.у. $\hat{L}=0$ в линейном случае ($\varepsilon=0$) для гармонич. сигналов переходит в параболич. уравнение теории дифракции. Для возмущений с плоскими фронтами Х. – З. у. переходит в уравнение простых волн, описывающее укручение профиля бегущей волны вплоть до образования разрывов – ударных фронтов. Обычное Х. – З. у. также справедливо в той области пространства, где разрывов нет.

Приложения, прежде всего к гидроакустике и медицине, потребовали обобщить обычное Х. – З. у. с целью устранения особенностей и учета дополнительных физич. факторов. Наиболее часто используется обобщение Х. – З. у., содержащее вторую производную ($\hat{L}=-b\partial^2/\partial\tau^2$), к-рая описывает диссипацию (в частности, конечную ширину фронта слабых ударных волн), а также интегральный член с экспоненциальным ядром, ответственным за учет молекулярной релаксации. Когда $\hat{L}$ имеет вид 3-й производной по τ, Х. – З. у. переходит в *Кадомцева – Петвиашвили уравнение.*

Уравнения типа Х. – З. у. использовались независимо с конца 1940-х гг. в механике для расчета обтекания тонких аэродинамич. профилей трансзвуковыми потоками сжимаемого газа, а в 1970-х гг. для расчета ударных волн с пространственно-ограниченным фронтом.

Лит.: [1] Руденко О. В., Солуян С. И., Теоретические основы нелинейной акустики, М., 1975; [2] Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И., Нелинейная гидроакустика, Л., 1981; [3] Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Нелинейная теория звуковых пучков, М., 1982.

О. В. Руденко.

ХРОМОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ – см. *Цвет.*

ХРОНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ операторов в квантовой теории поля – запись произведения операторов в виде, когда все операторы расположены так, что временные компоненты их аргументов убывают слева направо. Х. п. двух операторов (*Т*-произведение), по определению, есть

$$T(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2))=\theta\left(x_1^0-x_2^0\right)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)+$$
$$+\theta\left(x_2^0-x_1^0\right)\varphi_2(x_2)\varphi_1(x_1),$$

если хотя бы один из операторов $\varphi_i(x_i)$ – оператор бозонного поля, и

$$T(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2))=\theta\left(x_1^0-x_2^0\right)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)-$$
$$-\theta\left(x_2^0-x_1^0\right)\varphi_2(x_2)\varphi_1(x_1),$$

если $\varphi_i(x_i)$ – операторы фермионного поля; $\theta(x)=1$, $x\geqslant 0$, $\theta(x)=0$, $x\leqslant 0$, x_i^0 – нулевая (временная) компонента вектора x_i, $i=1, 2$. Знак разности $(x_1^0-x_2^0)$ не является лоренц-инвариантным, если точки x_1 и x_2 разделены пространственноподобным интервалом, однако в локальной теории само T-произведение лоренц-инвариантно. Это связано с тем, что, согласно аксиоме локальности, для таких точек равен нулю коммутатор полей $\varphi_i(x_i)$, если хотя бы одно из них – бозонное, либо равен нулю антикоммутатор, если оба поля фермионные.

T-произведение для n операторов поля определяется аналогично:

$$T(\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n))=\varepsilon_F\varphi_{i_1}\left(x_{i_1}\right)\dots\varphi_{i_n}\left(x_{i_n}\right),\qquad(*)$$
$$x_{i_1}^0>x_{i_2}^0>\dots>x_{i_n}^0,$$

$\varepsilon_F=1$, если число перестановок фермионных операторов с фермионными, необходимых для получения хронологич. упорядочения операторов, четно; $\varepsilon_F=-1$, если это число нечетно. В таком виде Х. п. было введено Дж. Виком (G. Wick). Ф. Дайсоном (F. Dyson) было дано определение Х. п. (*Р*-произведения), отличающееся от определения Вика тем, что в формуле (*) отсутствует множитель ε_F.

Х. п. операторов входит в наиболее существенные формулы квантовой теории поля.

Важное значение в квантовой теории поля имеет *Вика теорема*, связывающая Х. п. операторов с их *нормальным произведением.*

Лит.: [1] Вик Д., Вычисление матрицы столкновений, в сб.: Новейшее развитие квантовой электродинамики, [пер. с англ.], М., 1954; [2] Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д., Релятивистская квантовая теория, т. 2, пер. с англ., М., 1978; [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984.

Ю. С. Вернов.

ХУАНГА – ЯНГА – ЛАТТИНДЖЕРА МОДЕЛЬ – модель, являющаяся следующим, за *Дэвиса моделью*, шагом в направлении более реалистического учета неидеальности бозе-газа. Если

$$T_\Lambda(\omega)=\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon_k(\Lambda)n_k(\omega)$$

– гамильтониан идеального бозе-газа в сосуде $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$, к-рый определяется на пространстве Ω финитных последовательностей ω неотрицательных целых чисел, то

$$\Omega=\{\omega:\sum_{k\geqslant 1}\omega_k<\infty,\ \omega_k\in\mathbb{N}\},$$

с помощью одночастичного спектра $\{\varepsilon_k(\Lambda)\}_{k\geqslant 1}$ и чисел заполнения $n_k:\omega\to\omega_k$. Тогда гамильтониан Х. – Я. – Л. м. имеет вид:

$$H_\Lambda=T_\Lambda+\frac{a}{2V}\left(2N_\Lambda^2-\sum_{k\geqslant 1}n_k^2\right),\quad a\geqslant 0,\qquad(*)$$

где

$$N_\Lambda(\omega)=\sum_{k\geqslant 1}n_k(\omega)$$

– полное число частиц в сосуде Λ для конфигурации $\omega\in\Omega$. Гамильтониан (*) для $a=\frac{4\pi r}{m}$ (для $a<0$ система неустойчива) впервые появился в работе [1], где с помощью аргументов, основанных на теории возмущений, было продемонстрировано, что (*) имитирует неидеальный бозе-газ твердых сфер радиуса r и массы m. Явные выражения для давления и для бозе-конденсата в Х.– Я.– Л. м. в термодинамич. пределе были получены в работе [2].

Лит.: [1] Huang K., Yang C. N., Luttinger J. M., «Phys. Rev.», 1957, v. 105, № 4, p. 776–84; [2] Van den Berg M., Lewis J. T., Pule J. V., «Comm. Math. Phys.», 1988, № 2, p. 61–85.

В. А. Загребнов.

ХУСИМИ – ТЕМПЕРЛИ МОДЕЛЬ – см. *Кюри – Вейсса модель.*

ХЮЛЬТЕНА – КООНА ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП – см. *Вариационные принципы* в теории рассеяния.

Ц

ЦВЕТ – квантовое число *кварков* и *глюонов*, характеризующее физически неразличимые унитарно эквивалентные состояния этих фундаментальных частиц. Ц. принимает для каждого типа (или *аромата*) кварков q три значения и восемь значений для глюона G, то есть $q=\{q_i\}$, $i=1, 2, 3$, $G=\{G_a\}$, $a=1, ..., 8$. Ц. впервые введен в теорию элементарных частиц в 1965 в рамках динамич. составной *кварковой модели* адронов (см. [1]) как дополнительное квантовое число кварков, позволяющее разрешить проблему статистики кварков и дать последовательное объяснение закономерностей спектроскопии сильно взаимодействующих частиц – мезонов и барионов (см. [2], [3]). При этом предполагалось, что волновые функции низколежащих мезонов M, состоящих из пары кварка и антикварка, и барионов B, состоящих из трех кварков, обладают максимальной симметрией по отношению к Ц. кварков (принцип бесцветности адронов), то есть

$$M \sim \delta^i_j q_i(1)\bar{q}^j,$$

$$B \sim \in^{ijk} q_i(1) q_j(2) q_k(3).$$

В настоящее время считается, что Ц. всех наблюдаемых состояний сильно взаимодействующих частиц (*адронов*) равен нулю, тогда как обладающие отличным от нуля Ц. кварки и глюоны удерживаются в адронах субъядерными, так наз. хромодинамическими силами и не могут наблюдаться в свободном состоянии.

Переносчиком хромодинамич. сил, как бы склеивающих кварки в адронах, являются соответствующие цветным глюонам безмассовые калибровочные векторные поля (см. [5]).

В современной калибровочной теории сильных взаимодействий (*квантовой хромодинамике*) Ц. ассоциируется с зарядом, принимающим, в отличие, напр., от электрич. заряда, значения в многомерном векторном пространстве (размерности, равной трем для кварков и восьми для глюонов). Как и электрич. заряд Ц. строго сохраняется, что обусловлено локальной природой цветовой симметрии в квантовой хромодинамике, описываемой неабелевой калибровочной группой $SU_c(3)$.

В ряде ранних работ в качестве альтернативы введению Ц. для устранения противоречия с принципом Паули в кварковой модели Гелл-Мана и Цвейга обсуждалась гипотеза парафермистатистики кварков ранга 3 (см. [6]). Оказывается, что максимальной группой симметрии в калибровочной теории парафермионов ранга 3 является ортогональная группа $SO(3)$, приводящая к трем калибровочным векторным бозонам (глюонам) вместо восьми, соответствующим группе $SU(3)$. Таким образом, гипотеза парафермистатистики кварков не является физически приемлемой альтернативой гипотезе цветных кварков, удовлетворяющих нормальной статистике Ферми – Дирака.

Лит.: [1] Боголюбов Н.Н., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н., К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц, Дубна, 1965; [2] Релятивистски инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы, Дубна, 1965; [3] Намбу Й., «Успехи физич. наук», 1978, т. 124, с. 147–69; [4] его же, Кварки, М., 1984; [5] Han M., Nambu Y., «Phys. Rev.», 1965, v. 139, № 48, p. 1006–10; [6] Nambu Y., A systematics of hadrons in subnuclear physics, Chicago, 1965; [7] Greenber O., «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 598–602.

К. Г. Четыркин.

ЦВЕТОВОЙ ЗАРЯД – см. *Аномалия.*

ЦЕЙНЕЛЯ МЕТОД – см. *Усреднения метод.*

ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Целая функция, Рациональная функция, Особая точка* аналитической функции.

ЦЕЛАЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ – см. *Особая точка* аналитической функции.

ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ – функция, аналитическая во всей плоскости комплексного переменного (кроме, возможно, бесконечно удаленной точки). Она разлагается в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \geqslant 0,$$

сходящийся во всей плоскости $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}=0$.

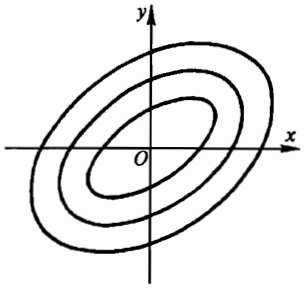
Простейшая Ц. ф. – целая рациональная функция (или многочлен, полином) – функция вида

$$w=P_n(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+...+a_n,$$

где n – целое неотрицательное, коэффициенты $a_0, ..., a_n$ – действительные или комплексные числа, z – действительное или комплексное переменное. *В. И. Битюцков.*

ЦЕМПЛЕНА ТЕОРЕМА – см. *Ударные волны.*

ЦЕНТР – один из видов *особых точек* дифференциального уравнения. В окрестности этой точки все интегральные кривые являются замкнутыми и содержат ее внутри себя (см. рис.). Ц. принадлежит к числу таких особых точек, характер к-рых, вообще говоря, не сохраняется при малых изменениях правой части уравнения. *В. И. Битюцков.*



Центр.

ЦЕНТР группы – множество всех элементов z группы G, удовлетворяющих условию $zg=gz$ для всех g из G. Ц.– нормальный делитель в G. *Ю. А. Неретин.*

ЦЕНТР ИНЕРЦИИ, центр масс,– геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе. Координаты Ц. и. определяются формулами:

$$x_c=\sum m_k x_k/M, \quad y_c=\sum m_k y_k/M, \quad z_c=\sum m_k z_k/M$$

или для тела при непрерывном распределении масс:

$$x_c=\frac{1}{M}\int_{(V)}\rho x\,dV, \quad y_c=\frac{1}{M}\int_{(V)}\rho y\,dV, \quad z_c=\frac{1}{M}\int_{(V)}\rho z\,dV,$$

где m_k – массы материальных точек, образующих систему, x_k, y_k, z_k – координаты этих точек, $M=\sum m_k$ – масса системы, $\rho(x, y, z)$ – плотность, V – объем. Понятие о Ц. и. отличается от понятия о центре тяжести тем, что последнее имеет смысл только для твердого тела, находящегося в одно-

родном поле тяжести; понятие же о Ц. и. не связано ни с каким силовым полем и имеет смысл для любой механич. системы. Для твердого тела положения Ц. и. и центра тяжести совпадают.

При движении механич. системы ее Ц. и. движется так, как двигалась бы материальная точка, имеющая массу, равную массе системы, и находящаяся под действием всех внешних сил, приложенных к системе. Кроме того, нек-рые уравнения движения механич. системы (тела) по отношению к осям, имеющим начало в Ц. и. и движущимся вместе с Ц. и. поступательно, сохраняют тот же вид, что и для движения по отношению к инерциальной системе отсчета.

С. М. Таре.

ЦЕНТР КАЧАНИЯ физического маятника – см. *Маятник*.

ЦЕНТР МАСС – см. *Центр инерции*.

ЦЕНТР СИЛЫ – см. *Центральная сила*.

ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМА – система отсчета, в которой центр масс покоится. Конфигурационное пространство $\mathbb{R}^{3N}$ координат r_i системы N частиц представляется в виде ортогональной суммы $\mathbb{R}^3_\rho \oplus \mathbb{R}^{3(N-1)}_x$, где

$$\rho = \left(\sum_{i=1}^N m_i\right)^{-1}(m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_N r_N)$$

– координаты центра масс, а $x \in \mathbb{R}^{3(N-1)}$ – относительные координаты. Ц. м. с. обычно используется для описания систем нескольких частиц. Оператор энергии таких систем имеет вид:

$$H = -\sum_{i=1}^N (2m_i)^{-1}\Delta_{r_i} + V(r_1, r_2, \ldots, r_N),$$

где функция V – трансляционно инвариантна, то есть

$$V(r_1+\lambda, r_2+\lambda, \ldots, r_N+\lambda) = V(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N),\ \lambda \in \mathbb{R}^3.$$

Оператор H приводится к виду

$$H = -\left(2\sum_{i=1}^N m_i\right)^{-1}\Delta_\rho + H_{\text{cm}},$$

где первое тривиальное слагаемое – оператор кинетич. энергии движения системы N частиц как целого, а H_{cm} – оператор энергии N частиц в Ц. м. с. Если в качестве координат x взять набор приведенных *Якоби координат*, то оператор H_{cm} дается формулой:

$$H_{\text{cm}} = -\Delta_x + V(x),\ x \in \mathbb{R}^{3(N-1)}.$$

Лит.: [1] Гольдбергер М., Ватсон К., Теория столкновений, пер. с англ., М., 1967; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 3, Теория рассеяния, М., 1982.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

ЦЕНТРАЛИЗАТОР подмножества X в группе G – множество всех $g \in G$, удовлетворяющих условию $gx = xg$ для любого x из G. Ц. подмножества X в G является подгруппой в G. Если A – ассоциативная алгебра (соответственно алгебра Ли), то Ц. подмножества X в A – это множество всех $a \in A$, удовлетворяющих условию $xa = ax$ (соответственно $[x, a] = 0$). Ц. подмножества X в A является подалгеброй в A.

Ю. А. Неретин.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИЛА – приложенная к материальному телу сила, линия действия которой при любом положении тела проходит через некоторую определенную точку, называемую центром силы. Примеры Ц. с.– сила тяготения, направленная к центру планеты, кулоновы силы электростатич. притяжения или отталкивания и др. Под действием Ц. с. центр масс свободного тела движется по плоской кривой, а отрезок прямой, соединяющей этот центр с центром силы, описывает в любые равные промежутки времени равные площади (см. *Площадей закон*).

ЦЕНТРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ – специальным образом выбранное инвариантное многообразие: а) векторного поля в окрестности особой точки, либо замкнутой траектории или б) диффеоморфизма в окрестности неподвижной точки.

Теорема 1 (см. [1]–[3], [5], [6]). Пусть O – особая точка C^2-гладкого векторного поля V на N-мерном многообразии M, а $V_{*|O}$ – линеаризация поля V в точке O. Пусть T^s, T^u и T^c – такие инвариантные относительно $V_{*|O}$ подпространства касательного пространства к M в точке O, что собственные числа ограничения $V_{*|O}$ на T^s, T^u и T^c имеют отрицательные, положительные и нулевые вещественные части соответственно. Пусть размерности подпространств T^s, T^u и T^c равны N_s, N_u и N_c, соответственно, $N_s + N_u + N_c = N$. Тогда поле V имеет в окрестности точки O следующие пять проходящих через O инвариантных многообразий: устойчивое (притягивающее) W^s, неустойчивое (отталкивающее) W^u, центральное (нейтральное) W^c, центрально-устойчивое W^{cs} и центрально-неустойчивое W^{cu} размерностей N_s, N_u, N_c, $N_c + N_s$ и $N_c + N_u$ соответственно. Многообразия W^s, W^u и W^c касаются в точке O подпространств T^s, T^u и T^c соответственно. Многообразие $W^{cs}(W^{cu})$ содержит многообразия W^c и W^s (соответственно W^c и W^u). Решения уравнения $dx/dt = V(x)$ с начальными условиями на $W^s(W^u)$ экспоненциально стремятся к O при $t \to +\infty$ (соответственно при $t \to -\infty$). Если поле V гладкое класса C^r, где $r \geqslant 2$ – натуральное число, то многообразия W^s и W^u также гладкие класса C^r, а многообразия W^c, W^{cs} и W^{cu} класса C^{r-1}.

Если поле V аналитично или C^∞-гладко, то многообразия W^s и W^u также аналитичны или C^∞-гладки соответственно, в то время как гладкость многообразий W^c, W^{cs} и W^{cu}, вообще говоря, лишь конечна (но растет с уменьшением рассматриваемой окрестности точки O).

Частный случай этого утверждения, когда $N_c = 0$, называется теоремой Адамара – Перрона (см. [5]) или теоремой Ляпунова – Перрона (см. [2]).

Если $N_c = 0$, то $W^c = \{0\}$, $W^{cs} = W^s$ и $W^{cu} = W^u$. Многообразия W^s и W^u в этом случае называются сепаратрисными многообразиями.

Теорема 1 имеет бесконечномерные аналоги (см. [4]). Кроме того, справедливы аналоги этой теоремы для неподвижных точек диффеоморфизмов (см. [1]) [в том числе (см. [4]) в бесконечномерном пространстве] и для замкнутых траекторий векторных полей (см. [1], [6]). Существуют обобщения теоремы 1 на автономные уравнения (см. [1], [2]) и на произвольные инвариантные многообразия диффеоморфизмов и векторных полей (см. [3]).

Теорема 2 (теорема сведения Шошитайшвили [7]). В условиях теоремы 1 уравнение $dx/dt = V(x)$ в окрестности точки O топологически эквивалентно системе

$$d\xi/dt = -\xi,\ d\eta/dt = \eta,\ d\zeta/dt = v(\zeta),$$

где $\xi \in T^s$, $\eta \in T^u$, а третье уравнение есть ограничение исходного на многообразие W^c.

Справедлив аналог теоремы 2 для неподвижных точек диффеоморфизма и ее обобщения на конечнопараметрич. семейства векторных полей и диффеоморфизмов.

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Плисс В. А., Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М., 1977; [3] Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M., «Lect. Notes Math.», 1977, v. 583; [4] Марсден Дж., Мак-Кракен М., Бифуркация рождения цикла и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; [5] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 1, М., 1985, с. 7–149; [6] Kellay A., «J. Diff. Equat.», 1967, v. 3, № 4, p. 546–70; [7] Шошитайшвили А. Н., «Труды семинара имени И. Г. Петровского», в. 1, М., 1975, с. 279–309.

М. Б. Севрюк.

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ МОМЕНТ – см. *Момент* случайной величины.

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР – см. *Удар.*

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР – см. *Казимира оператор.*

ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ – см. *Момент инерции.*

ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ – см. *Ускорение.*

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА – см. *Свободное гармоническое колебание.*

ЦИКЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ – обобщенные координаты механической системы, не входящие явно в *Лагранжа функцию* или в другие характеристические функции этой системы. Наличие Ц. к. упрощает процесс решения (интегрирования) соответствующих дифференциальных уравнений движения механич. системы. Напр., если в функции Лагранжа L не входит явно координата q_1, то первое из уравнений Лагранжа примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0$$

и сразу дает интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const}.$$

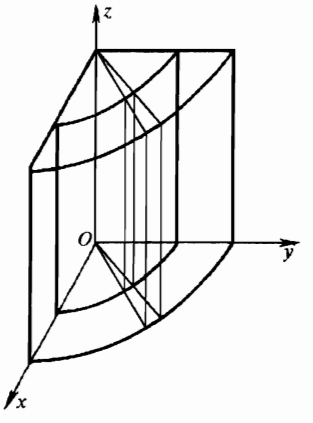
ЦИКЛИЧНАЯ КООРДИНАТА – см. *Гамильтонова система.*

ЦИКЛИЧНОСТИ ИНДЕКС – см. *Символическая динамика.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ – числа ρ, φ и z, связанные с прямоугольными декартовыми координатами x, y и z формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,$$

где $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Координатные поверхности (см. рис.): круговые цилиндры ($\rho = \text{const}$), полуплоскости ($\varphi = \text{const}$), плоскости ($z = \text{const}$). Система Ц. к.– ортогональная.



Координатные поверхности системы цилиндрических координат.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho = L_z = 1,\ L_\varphi = \rho.$$

Элемент площади поверхности:

$$ds = \sqrt{\rho^2(d\rho\,d\varphi)^2 + (d\rho\,dz)^2 + \rho^2(d\varphi\,dz)^2}.$$

Элемент объема:

$$dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\text{grad}_\rho f = \frac{\partial f}{\partial \rho},\quad \text{grad}_\varphi f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi},\quad \text{grad}_z f = \frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}a_\rho + \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\text{rot}_\rho \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z},\quad \text{rot}_\varphi \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\text{rot}_z \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}a_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi};$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Обобщенными Ц. к. называются числа u, v и w, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x = au\cos v,\ y = bu\sin v,\ z = cw,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $-\infty < w < \infty$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq b$. Координатные поверхности: эллиптич. цилиндры ($u = \text{const}$), полуплоскости ($v = \text{const}$) и плоскости ($w = \text{const}$).

Д. Д. Соколов.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ – решения дифференциального *Бесселя уравнения*

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dZ}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)Z = 0, \qquad (1)$$

p – параметр (индекс) уравнения. В приложениях наиболее часто встречаются Ц. ф. 1-го рода $J_p(z)$ (см. *Бесселя функции*) и Ц. ф. 2-го рода $N_p(z)$ [см. *Неймана функции*, их называют также функциями Вебера и употребляют иногда обозначение $Y_p(z)$], преимущественно при действительных значениях аргумента. В комплексной области удобно пользоваться Ц. ф. 3-го рода $H_p^{(1)}(z)$ и $H_p^{(2)}(z)$ (см. *Ганкеля функции*). Ц. ф. иногда называют бесселевыми функциями.

Соотношения между Ц. ф. напоминают соотношения между тригонометрич. и показательной функциями:

$$J_p = \frac{H_p^{(1)}(z) + H_p^{(2)}(z)}{2};\quad H_p^{(1)} = J_p(z) + iN_p(z);$$

$$N_p = \frac{H_p^{(1)}(z) - H_p^{(2)}(z)}{2i};\quad H_p^{(2)} = J_p(z) - iN_p(z).$$

При действительных значениях аргумента (и индекса p) функции Бесселя и Неймана действительны и представляют собой действительную и мнимую части функций Ганкеля. Эта же аналогия проявляется в асимптотич. представлениях (при больших $|z|$), верных при $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$:

$$H_p^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} S_p(-2iz),$$

$$H_p^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} S_p(2iz),$$

$$J_p(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left\{P_p(z)\cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - Q_p(z)\sin\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$N_p(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left\{P_p(z)\sin\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + Q_p(z)\cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

где

$$S_p(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^p}{k!(4t)^k} + O(z^{-n-1}),$$

$$P_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k A_{2k}^p}{(2k)!(8z)^{2k}} + O(z^{-2n-2}),$$

$$Q_p(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k A_{2k-1}^p}{(2k-1)!(8z)^{2k-1}} + O(z^{-2n-3}),$$

$$A_k^p = (4p^2 - 1^2)(4p^2 - 3^2)\ldots[4p^2 - (2k-1)^2].$$

Другие соотношения между Ц. ф. (при нецелом p):

$$J_p(z) = \frac{N_{-p}(z) - N_p(z)\cos p\pi}{\sin p\pi},$$

$$N_p(z) = \frac{J_p(z)\cos pz - J_{-p}(z)}{\sin p\pi},$$

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{J_{-p}(z) - e^{-p\pi i}J_p(z)}{i\sin p\pi} = \frac{N_{-p}(z) - e^{-p\pi i}N_p(z)}{\sin p\pi},$$

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{e^{p\pi i}J_p(z) - J_{-p}(z)}{i\sin p\pi} = \frac{N_{-p}(z) - e^{p\pi i}N_p(z)}{\sin p\pi}.$$

Ц. ф. удовлетворяют важным и удобным рекуррентным соотношениям:

$$Z_{p-1} + Z_{p+1} = \frac{2p}{z}Z_p;\quad \frac{d}{dz}\left\{z^p Z_p\right\} = z^p Z_{p-1};$$

$$Z_{p-1} - Z_{p+1} = 2Z_p';\quad \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z^p}Z_p\right\} = \frac{1}{z^p}Z_{p+1}.$$

С помощью Ц. ф. выражается общее решение линейного уравнения

$$z^2W'' + (1-2\alpha)\,zW' + [\beta^2\gamma^2 z^{2\gamma} - (p^2\gamma^2 - \alpha^2)]\,W = 0 \qquad (2)$$

при произвольных α, β, γ. Именно:

$$W = c_1 z^{\alpha} Z_p^{(1)}(\beta z^{\gamma}) + c_2 z^{\alpha} Z_p^{(2)}(\beta z^{\gamma}).$$

Среди уравнений (2) содержится уравнение вида

$$W' - zW = 0,$$

к-рое порождает так наз. функции Эйри.

В приложениях часто встречаются модифицированные Ц. ф. (Ц. ф. мнимого аргумента), к-рые определяются соотношением:

$$I_p(x) = e^{-\frac{p\pi i}{2}} J_p(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}$$

и удовлетворяют уравнению вида (2) при $\alpha = 0$, $\beta = i$, $\gamma = 1$:

$$U'' + \frac{1}{x}U' - \left(1 + \frac{p^2}{x^2}\right)U = 0; \qquad (3)$$

в качестве второго решения берут здесь или $I_{-p}(x)$ (при нецелом p), или функцию Макдональда

$$K_p(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{p\pi i}{2}} H_p^{(1)}(ix).$$

Важность этих функций обусловлена тем, что они представляют собой положительные решения уравнения (3) при $x > 0$ с экспоненциальным поведением на бесконечности, асимптотич. представления имеют для них вид:

$$I_p(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x; \qquad K_p(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}.$$

В нек-рых задачах встречаются еще Ц. ф. аргумента

$$z = x\sqrt{-i} = e^{3i\pi/4}x.$$

Для действительных и мнимых частей этих функций введены специальные обозначения (p – действительно):

$$I_p(x\sqrt{-i}) = \mathrm{ber}_p x + i\,\mathrm{bei}_p x,$$

$$K_p(x\sqrt{-i}) = \mathrm{ker}_p x + i\,\mathrm{kei}_p x,$$

$$H_p(x\sqrt{-i}) = \mathrm{her}_p x + i\,\mathrm{hei}_p x.$$

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [2] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.– Л., 1963; [3] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1–2, М., 1949; [4] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, 2 изд., пер. с нем., М., 1968.

П. И. Лизоркин.

ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО – см. *Случайный процесс, Случайное поле.*

ЦИРКУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ – см. *Эллиптический интеграл.*

ЦИРКУЛЯЦИЯ *векторного поля* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ вдоль замкнутой кривой L – интеграл вида:

$$\oint_L \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r};$$

в координатной форме Ц. равна

$$\int_L (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz).$$

Работа, совершаемая силами силового поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ при перемещении пробного тела (единичной массы, заряда и т. д.) вдоль кривой L, равна Ц. поля вдоль L.

См. также *Векторный анализ.*

В. И. Битюцков.

Ч

ЧАНДРАСЕКАРА – МЮНША УРАВНЕНИЕ – уравнение для плотности распределения вероятностей $f(u;\,x)$ наблюдаемой яркости ξ звездного скопления, находящегося на расстоянии x от Земли, $\int_0^{\infty} f(u;\,x)\,du = 1$. В теории Чандрасекара – Мюнша яркость ξ, наблюдаемая с Земли в заданном направлении, вследствие случайного распределения туманностей во Вселенной со случайным коэффициентом прозрачности $q < 1$ рассматривается как случайный разрывный *марковский процесс* $\{\xi(x),\ x \in (0, \infty)\}$. Тогда

$$f(u;\,x)\,du = \mathsf{P}\{\xi(x) \in [u,\ u+du]\}.$$

При известной плотности $f(u;\,x-0)$ в точках $x-h$, $h \to +0$, условная вероятность события $\{\xi(x+0) \in [u,\ u+du]\}$ при условии, что в точке x свет проходит через туманность с коэффициентом прозрачности q, равна $f(u/q;\,x)du/q$. Полагая, что моменты встречи луча света с туманностью составляют пуассоновский поток событий с интенсивностью α, статистически независимый от q и $\psi(q)$ – плотность распределения q, $\int_0^1 \psi(q)dq = 1$, получим, что процесс $\{\xi(x)\}$ – марковский. Из уравнения Колмогорова – Чепмена вытекает:

$$f(u;\,x+h) = f(u-\beta h;\,x)(1-\alpha h) +$$

$$+ \alpha h \int_0^1 dq\,\psi(q)\,f(u/q;\,x)/q + o(h), \qquad h \to +0, \qquad (1)$$

где β – коэффициент детерминированного угасания яркости на единице длины. Из (1) следует Ч.– М. у.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u;x) + \beta \frac{\partial}{\partial u} f(u;x) =$$

$$= \alpha\left[\int_0^1 f(u/q;x)\,\psi(q)\,dq/q - f(u;x)\right]. \qquad (2)$$

Так как $\xi(0) = 0$, то в качестве начального условия для этого уравнения нужно взять $f(u;\,0) = \delta(u)$ и нижний предел в интеграле в правой части (2) может быть заменен на $u/\beta x$.

Лит.: [1] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [2] Chandrasekar S., Munch G., «Astrophys. J.», 1950, v. 112, № 3, p. 380–92, 393–98; 1951, v. 114, № 1, p. 110–22; 1952, v. 115, № 1, p. 94–102, 103–23.

Ю. П. Вирченко.

ЧАПЛЫГИНА ЗАДАЧА о движении твердого тела в жидкости – задача, решение которой найдено С. А. Чаплыгиным в 1903 (см. [1]). Ч. з. отвечает случаю, когда живая сила имеет вид:

$$T = \frac{a}{2}\left(P_1^2 + P_2^2 + 2P_3^2 + (b+c)R_1^2 + (b-c)R_2^2 + bR_3^2\right),$$

где R_i, P_i – проекции главного вектора и главного момента импульсов на оси, связанные с телом. Уравнения Кирхгофа – Клебша в этом случае помимо интегралов

$$F_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2, \quad F_2 = T, \quad F_3 = P_1R_1 + P_2R_2 + P_3R_3$$

при выполнении условия $F_3 = 0$ допускают интеграл

$$F_4 = \left(P_1^2 - P_2^2 + cR_3^2\right)^2 + 4P_1^2P_2^2$$

и интегрируются.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., Собрание сочинений, т. 1, М.–Л., 1948, с. 337–46.

А. А. Буров.

ЧАПЛЫГИНА ЗАДАЧА о движении твердого тела с неголономными связями – см. *Динамика твердого тела*; неголономные связи.

ЧАПЛЫГИНА СЛУЧАЙ – см. *Твердое тело*; движение в идеальной жидкости.

ЧАПЛЫГИНА УРАВНЕНИЯ динамики – дифференциальные уравнения движения неголономной механической системы, предложенные С. А. Чаплыгиным в 1897 (см. [1]). Ч. у. имеют место для механич. системы со стационарными неголономными связями, положение к-рой определяется s обобщенными координатами q_j, $j = 1, 2, \ldots, s$, а обобщенные скорости $\dot{q}_j$ связаны r неинтегрируемыми дифференциальными соотношениями

$$A_{1,\rho}\dot{q}_1 + A_{2,\rho}\dot{q}_2 + \ldots + A_{s,\rho}\dot{q}_s, \ \rho = 1, 2, \ldots, r, \qquad (1)$$

с коэффициентами $A_{j,\rho}$, зависящими только от $s-r$ обобщенных координат, напр. от q_{r+1}, q_{r+2}, ..., q_s. Тогда, если, пользуясь равенствами (1), выразить $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_r$ через $\dot{q}_{r+1}$, $\dot{q}_{r+2}$, ..., $\dot{q}_s$ в виде:

$$\dot{q}_i = B_{i,\,r+1}\dot{q}_{r+1} + \ldots + B_{i,\,s}\dot{q}_s, \ i = 1, 2, \ldots, r, \qquad (2)$$

то Ч. у. для рассматриваемой системы будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\sum_{k=r+1}^{s}\left(\frac{\partial B_{i,\sigma}}{\partial q_k} - \frac{\partial B_{i,k}}{\partial q_\sigma}\right),$$

$$\sigma = r+1, \ldots, s,$$

где T и U – кинетич. и потенциальная энергии системы, к-рые также считаются не зависящими явно от q_1, q_2, ..., q_r, а $\widetilde{T}$ – выражение кинетич. энергии, в к-ром скорости $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_r$ исключены с помощью равенств (2). Если действующие силы не потенциальны, то $-\partial U/\partial q_\sigma$ в правых частях Ч. у. заменяется на обобщенные силы Q'_σ.

Ч. у. указывают, что предварительное исключение $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_r$ из выражения T при составлении уравнений Лагранжа приведет к ошибке – к потере членов с двойными суммами.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости, Собрание сочинений, т. 1, М.– Л., 1948; [2] Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961, гл. 8.

С. М. Targ.

ЧАСТНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ – см. *Относительности теория.*

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение.*

ЧАСТОТА колебания – см. *Гармоника, Свободное гармоническое колебание.*

ЧАСТОТНЫЙ БАЗИС – см. *Условно-периодическое движение.*

ЧЕБЫШЕВА МНОГОЧЛЕНЫ первого рода – многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Для стандартизованных Ч. м. справедлива формула

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \ x \in [-1, 1],$$

и рекуррентное соотношение

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

с помощью к-рых находят последовательно

$$T_0(x) = 1, \ T_1(x) = x, \ T_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \ \ldots.$$

Ортонормированные Ч. м.:

$$\hat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\hat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos x), \quad n \geqslant 1.$$

Старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ при $n \geqslant 1$ равен 2^{n-1}. Поэтому Ч. м. с единичным старшим коэффициентом определяются формулой

$$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x), \quad n \geqslant 1.$$

Нули многочлена $T_n(x)$, определяемые равенством

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

часто применяются в качестве узлов интерполяционных и квадратурных формул. Многочлен $T_n(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1-x^2)\,y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Многочлен $\widetilde{T}_n(x)$ наименее отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$, то есть для всякого другого многочлена $\widetilde{P}_n(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом выполняется условие

$$\max_{x\in[-1,\,1]}|\widetilde{P}_n(x)| > \max_{x\in[-1,\,1]}|\widetilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

С другой стороны, для всякого многочлена $Q_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющего условию

$$\max_{x\in[-1,\,1]}|Q_n(x)| = 1,$$

при любом $x_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ имеет место неравенство

$$|Q(x_0)| \leqslant |T_n(x_0)|.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и ее модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ удовлетворяет условию Дини

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta, f)\ln\frac{1}{\delta} = 0,$$

то эта функция разлагается в ряд Фурье – Чебышева

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{T}_n(x), \quad x \in [-1, 1],$$

сходящийся равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Коэффициенты этого ряда определяются по формуле

$$a_n = \int_{-1}^{1}f(t)\hat{T}_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Если же функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на отрезке $[-1, 1]$, причем ее p-я производная $f^{(p)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, то имеет место неравенство

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}a_k\hat{T}_k(x)\right| \leqslant \frac{c_1\ln n}{n^{p+\alpha}}, \quad x \in [-1, 1],$$

где постоянная c_1 не зависит от n и x.

Ч. м. второго рода определяются равенством

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) = \sin[(n+1)\arccos x]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Эти многочлены ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h_2(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Для всякого многочлена $\tilde{Q}_n(x)$ с единичным старшим коэффициентом справедливо неравенство

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \int_{-1}^{1} |\tilde{U}_n(x)|dx \leqslant \int_{-1}^{1} |\tilde{Q}_n(x)|dx.$$

Ч. м. были введены в 1854 П. Л. Чебышевым (см. [1]).

Обе системы Ч. м. являются частными случаями *ультрасферических многочленов* и *Якоби многочленов*.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, т. 2, М.– Л., 1947, с. 23–51; [2] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

П. К. Суетин.

ЧЕБЫШЕВА НЕРАВЕНСТВО – см. *Квадратичное отклонение.*

ЧЕЛЛЕНА – ЛЕМАНА ТЕОРЕМА – см. *Нуль-заряд.*

ЧЕПМЕНА – ЖУГЕ УСЛОВИЕ – см. *Ударные волны.*

ЧЕРЕНКОВА ЭФФЕКТ в разностных уравнениях – эффект, аналогичный возникновению излучения Вавилова – Черенкова. Ч. э. в разностных уравнениях заключается в образовании *осцилляций шлейфа* при движении точечного источника, что модулируется введением в правую часть соответствующего уравнения «функции единичной ошибки» (см. *Разностные уравнения*; асимптотика решения). Типичным примером является Ч. э. для уравнения кристалла:

$$h^2 u_{tt} + L(x, -ih\partial/\partial x)\, u = \sqrt{h}\, \delta_h(x - q(t)),$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,\ L(x, p) = 4c^2(x)\sin^2(p/2),\ x \in \mathbb{R}^1,$$
$$-\pi \leqslant p \leqslant \pi,$$

h – малый параметр, функция $q(t)$ описывает траекторию источника. Область осцилляций решения этой задачи в момент времени t имеет вид:

$$\{x = X^{\pm}(q(\tau), t-\tau, \omega(\tau)),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\},$$

где $X^{\pm}(x^0, t, \omega)$, $P^{\pm}(x^0, t, \omega)$ – решение гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H_{\omega}^{\pm}(x, p) = \pm 2c(x)\,\omega^{-1}\sin(\omega p/2),\ -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi,$$

удовлетворяющее начальным данным

$$X^{\pm}\big|_{t=0} = x^0, \quad P^{\pm}\big|_{t=0} = 1,$$

$\omega(\tau)$ – решение уравнения $\partial q(\tau)/\partial\tau = H_{\omega}^{\pm}(\tau)(q(\tau), 1)$, принадлежащее отрезку $[-\pi, \pi]$. Если

$$|\partial q/\partial\tau| < \min_{x,\,\omega} \left|H_{\omega}^{\pm}(x, 1)\right|$$

при всех τ (то есть скорость источника меньше фазовой скорости волн в среде), то Ч. э. отсутствует. Эффекты, аналогичные Ч. э. в разностных уравнениях, имеют место и для других диспергирующих сред.

Лит.: [1] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [2] Маслов В. П., Данилов В. Г., «Труды Математич. ин-та АН СССР», 1984, т. 166, с. 130–60; 1985, т. 167, с. 96–107; [3] Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н., «Функциональный анализ и его прилож.», 1985, т. 19, № 4, с. 43–54.

В. Г. Данилов, П. Н. Жевандров.

ЧЕРНАЯ ДЫРА – область сильного гравитационного поля в асимптотически плоском пространстве-времени, из которой не могут выйти на бесконечность никакие причинные (то есть распространяющиеся со скоростью, не превышающей скорость света в вакууме) сигналы. Предсказание о существовании Ч. д. во Вселенной сделано на основе общей теории относительности (впрочем, нечто подобное рассматривал ранее П. Лаплас, P. Laplase). Термин «Ч. д.» введен в 1968 Дж. Уилером (J. Wheeler). Ч. д. возникает при сжатии тела с массой M до размеров, меньших его гравитационного радиуса $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ (G – гравитационная постоянная, c – скорость света). Возможные механизмы образования Ч. д. во Вселенной зависят от их массы. Различают первичные Ч. д. (образующиеся из неоднородностей вещества в ранней Вселенной), звездные Ч. д. (возникающие при коллапсе звезд на их конечной стадии эволюции) и массивные Ч. д. (в ядрах галактик и квазарах).

Возникающая Ч. д. в общем случае не статична. Трехмерная поверхность, разделяющая видимую и невидимую для отдаленного наблюдателя области пространства-времени, называется *горизонтом событий*. Пересечение горизонта событий с пространственноподобной поверхностью Σ_τ, описываемой уравнением $\tau(x) = \text{const}$, состоит из набора замкнутых двумерных поверхностей $\partial B_i(\tau)$, каждая из к-рых отвечает поверхности одной из существующих в момент времени τ Ч. д. $B_i(\tau)$. Число Ч. д. может со временем только расти. Горизонт событий образован неограниченно продолжимыми в будущее световыми геодезическими. Они либо полностью лежат на горизонте, либо входят в горизонт в точках каустик из пространства вне Ч. д. В условиях, когда можно пренебречь квантовыми эффектами, площадь отдельно взятой Ч. д. не убывает со временем. Возникающая нестатичная Ч. д. за время порядка r_g/c становится стационарной. Уединенная стационарная Ч. д. либо аксиально симметрична, либо статична. В классич. теории решения, описывающие стационарные Ч. д., устойчивы относительно малых возмущений. В квантовой теории действие гравитационного поля на вакуум приводит к неустойчивости последнего, в результате чего Ч. д. теряет массу и становится источником квантового излучения (*Хокинга эффект*).

Лит.: [1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 1–3, М., 1977; [2] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977; [3] Черные дыры: мембранный подход, пер. с англ., М., 1988; [4] Новиков И. Д., Фролов В. П., Физика черных дыр, М., 1986.

В. П. Фролов.

ЧЕРНАЯ ДЫРА; законы механики – законы, которым подчиняются процессы, характеризующие динамику и стационарное состояние *черных дыр*. Законы механики Ч. д. обнаруживают глубокую аналогию с законами термодинамики. В рамках термодинамич. аналогий при помощи геометрич. характеристик горизонта событий вводится энтропия S_H Ч. д. по формуле

$$A = aS_H$$

и температура θ_H Ч. д. по формуле

$$\theta_H = ak/8\pi,$$

где A – площадь поверхности горизонта событий (см. *Черная дыра*; поверхность), a – коэффициент пропорциональности, определяемый при помощи квантовой теории рождения частиц в поле Ч. д. (см. [1]), а k – поверхностная гравитация, характеризующая геометрич. свойства гравитационного поля стационарных дыр (см. [2]). Для *Керра – Ньюмена черной дыры*

$$k = 4\pi(M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2}/A,$$

M – масса, Q – заряд, a – удельный угловой момент Ч. д. Ниже приводятся краткие формулировки законов механики Ч. д.

Нулевой закон. Поверхностная гравитация k стационарной Ч. д. постоянна на горизонте событий.

Первый закон. При переходе системы, содержащей Ч. д., из одного стационарного состояния в другое близкое стационарное состояние изменение массы системы дается формулой:

$$\delta M = \frac{k}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q + \delta_m,$$

где δJ – изменение углового момента, δQ – изменение заряда Ч. д., а δ_m – изменение массы вещества вне Ч. д. Величины Ω_H и Φ_H представляют собой угловую скорость и электрич. потенциал Ч. д. (см. [2]).

Второй закон. Площадь (энтропия) Ч. д. не убывает при любом взаимодействии.

Третий закон. Характерное время релаксации Ч. д. к стационарному состоянию обратно пропорционально значению поверхностной гравитации (температуры) на горизонте событий.

Нулевой закон механики Ч. д. аналогичен нулевому началу термодинамики, постулирующему наличие теормодинамич. равновесия и существование температуры. Из третьего закона следует недопустимость нулевого значения поверхностной гравитации, что эквивалентно отсутствию возможности обращения в нуль температуры Ч. д. за конечное число шагов, выполнение к-рых требует конечного времени. Таким образом, оказывается невозможным обратить Ч. д. с $M^2 > a^2 + Q^2$ в экстремальную Ч. д. с $M^2 = a^2 + Q^2$ с помощью конечного числа физич. воздействий. Первый и второй законы полностью аналогичны первому и второму началу термодинамики. Все физич. процессы, происходящие с увеличением площади поверхности Ч. д., являются необратимыми. Второй закон теряет силу при учете квантовых эффектов, когда нарушается сильное энергетич. условие (см. *Сингулярности пространства-времени*). Имеется ряд соображений (см. [4]), позволяющих предположить, что в самом общем случае справедлив закон неубывания суммарной энтропии Ч. д. и вещества вне Ч. д.

Лит.: [1] Hawking S., «Comm. Math. Phys.», 1975, v. 43, № 3, p. 199–220; [2] Carter B., в кн.: General relativity. An Einstein centenary survey, Camb. – [a. o.], 1979, p. 294–369; [3] Новиков И. Д., Фролов В. П., Физика черных дыр, М., 1986; [4] Zurek W., «Phys. Rev. Lett.», 1982, v. 49, № 23, p. 1683–86.

А. Т. Ильичев.

ЧЕРНАЯ ДЫРА; поверхность – поверхность горизонта событий в фиксированный момент времени τ (см. *Пространство-время* теории относительности). Площадь поверхности Ч. д. равна

$$A = \iint_S dS,$$

где S – пространственноподобная двумерная поверхность, полученная пересечением горизонта H^+ с пространственноподобной гиперповерхностью $\tau = \text{const}$. Площадь поверхности *Керра – Ньюмена черной дыры* (см. [1]) дается формулой (в геометрич. единицах):

$$A = 4\pi\left[\left(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}\right)^2 + a^2\right],$$

где M – масса, a – угловой момент вращения, а Q – заряд Ч. д. Замечательным фактом, установленным С. Хокингом (S. W. Hawking, см. [2]) является теорема о неубывании площади поверхности Ч. д. (так наз. второй закон термодинамики черных дыр) при любом взаимодействии:

$$\partial A \geqslant 0.$$

В частности, из теоремы площадей следует, что добавлением частиц к Ч. д. нельзя раскрутить ее до голой сингулярности при $M^2 < a^2$, а также, что при соударении двух Ч. д. суммарная площадь их поверхности никогда не может быть меньше площади каждой из Ч. д. до взаимодействия.

Лит.: [1] Newman E. [и др.], «J. Math. Phys.», 1965, v. 6, p. 918–19; [2] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977.

А. Т. Ильичев.

ЧЕРНАЯ ДЫРА; теоремы единственности – теоремы, устанавливающие, что внешнее гравитационное и электромагнитное поля стационарной *черной дыры*, образовавшейся в результате коллапса заряженной звезды, однозначно определяются массой M, зарядом Q и моментом импульса S (магнитный монопольный момент предполагается равным нулю). В самом общем случае стационарная Ч. д. описывается решением Керра – Ньюмена (см. [1]). Специфика конечного состояния коллапсирующей звезды, по-видимому, заключается в том, что Ч. д. при переходе в стационарное состояние излучает все мультипольные поля с $l \geqslant s$, где l – номер мультиполя, а s – спин поля (гипотеза Дж. Уилера, J. Wheeler). Это свойство образно характеризуется фразой: «Черная дыра не имеет волос». Гипотеза Уилера нашла свое подтверждение в частном случае при анализе эволюции малых возмущений полей статич. и стационарных Ч. д., являющихся точными решениями уравнений общей теории относительности, к-рые затухают с течением времени. Теоремы единственности Ч. д. позволяют строго доказать справедливость гипотезы Уилера для электровакуума при ряде физически разумных предположений о глобальных свойствах пространства-времени. Ниже приводятся краткие формулировки основных теорем.

Теорема Биркгофа – Хоффмана. Сферически симметричное пространство-время, геометрия к-рого удовлетворяет уравнениям Эйнштейна – Максвелла без источников, представляет собой решение Рейсснера – Нордстрема, характеризующееся двумя параметрами M и Q; в случае отсутствия электромагнитного поля – решение Шварцшильда, к-рое зависит от одного параметра M.

Теорема Хокинга. В стационарном асимптотически плоском пространстве-времени с регулярным горизонтом событий, не содержащем сингулярностей, лежащих вне горизонта и с тензором энергии-импульса, удовлетворяющим условию энергодоминантности (см. *Горизонтов топология*), горизонт гомеоморфен $S^2 \times \mathbb{R}$ и пространство-время обладает осевой симметрией или статично (момент импульса S равен нулю) или то и другое вместе.

Теорема Израэля. Статическое асимптотически плоское пространство-время, геометрия к-рого удовлетворяет уравнениям Эйнштейна – Максвелла без источников и условиям теоремы Хокинга, является сферически симметричным, то есть вследствие теоремы Биркгофа – Хоффмана представляет собой решение Рейсснера – Нордстрема или Шварцшильда.

Теорема Робинсона. Стационарное осесимметричное асимптотически плоское пространство-время, геометрия к-рого удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна. и условиям теоремы Хокинга, представляет собой решение Керра, к-рое характеризуется двумя параметрами M и $a = S/M$.

Теорема Мазура. Стационарное осесимметричное асимптотически плоское пространство-время, геометрия к-рого удовлетворяет уравнениям Эйнштейна – Максвелла без источников и условиям теоремы Хокинга, представляет собой решение Керра – Ньюмена, к-рое характеризуется тремя параметрами M, Q, a.

При наличии в пространстве-времени полей, отличных от электромагнитного, также имеет место ряд теорем, подтверждающих гипотезу Уилера. К ним относятся, в частности, теоремы Бекенштейна об отсутствии «волос» массивного скалярного, векторного и тензорного мезонных полей, удовлетворяющих линейным уравнениям без источников в статич. и стационарном осесимметричном пространстве-времени, содержащем двумерные поверхности, ортогональные поверхностям транзитивности векторов Киллинга.

Лит.: [1] Newman E. [a. o.], «J. Math. Phys.», 1965, v. 6, № 6, p. 918–19; [2] Новиков И. Д., Фролов В. П., Физика черных дыр, М., 1986.

А. Т. Ильичев.

ЧЕРНАЯ ДЫРА Керра – см. *Керра – Ньюмена черная дыра.*

ЧЕРНАЯ ДЫРА Рейсснера – Нордстрема – см. *Керра – Ньюмена черная дыра.*

ЧЕРНАЯ ДЫРА Шварцшильда – см. *Керра – Ньюмена черная дыра.*

ЧЕРНОВА ФОРМУЛА – формула, позволяющая аппроксимировать однопараметрические полугруппы сжимающих операторов. Пусть A – генератор C_0-полугруппы сжатий $T(t)$ в банаховом пространстве X и пусть $\{F(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ –

семейство линейных операторов на X, все $\|F(t)\| \leqslant 1$, $F(0) = I$ и

$$\lim_{t \to +0} \|t^{-1}(F(t) - I)f - Af\| = 0$$

для $f \in \mathcal{D}$ (существенной области определения A, то есть $\overline{A|_{\mathcal{D}}} = A$). Тогда

$$T(t)f = \lim_{n \to \infty} F(t/n)^n f$$

для всех $f \in X$. При $F(t) = U(t)V(t)$, где $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ – полугруппы сжатий, получается *Троттера формула*.

Лит.: [1] Chernoff P., «J. Funct. Anal.», 1968, v. 2, p. 238–42; [2] Братгели У., Робинсон Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, пер. с англ., М., 1982.

А. В. Булинский.

ЧЕТАЕВА ПРИНЦИП максимума работы – один из *вариационных принципов классической механики*: работа

$$A_\delta = \sum_i (F_i - m_i w_i)\left(v_i + \frac{\delta v_i}{dt}\frac{dt}{2}\right)dt + \ldots$$

на элементарном цикле, состоящем из прямого движения в поле заданных сил и движения обратного в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механическая система была совершенно свободной; здесь $F_i(t, r_j, \dot{r}_j) \in C^1$ – активные силы, m_i – масса точки r_j системы, $v_i = \dot{r}_i$, $w_i = \ddot{r}_i$. Ч. п. позволяет расширить характер обычно рассматриваемых механич. систем путем привлечения принципа Карно из термодинамики.

Принцип предложен Н. Г. Четаевым (1941). *В. В. Румянцев.*

ЧЕТАЕВА ФУНКЦИЯ – см. *Устойчивость.*

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ВЕКТОР в пространстве-времени – объект, определяемый четырьмя действительными величинами, преобразующимися соответствующим образом при *Лоренца преобразованиях*. Так, пространственные и временная координаты *мировой точки* (события) в галилеевой (псевдоевклидовой) системе координат образуют контравариантный четырехмерный вектор

$$(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Здесь $x^0 = t$ – время, $(x^1, x^2, x^3) = \boldsymbol{r}$ – пространственные координаты. Аналогично преобразуются и дифференциалы. Другой пример – ковариантный четырехмерный вектор

$$(x_0, x_1, x_2, x_3),\ x_0 = t,\ x_s = -x^s.$$

Метрический (псевдоевклидов) тензор η_{ij} пространства-времени устанавливает соответствие

$$\eta_{ij} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$$

между этими двумя типами векторов, а именно:

$$x_i = \eta_{ij} x^j;\ i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Скалярное произведение двух Ч. в. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получается при свертке контравариантных компонент одного с ковариантными компонентами другого, то есть

$$a_i b^i = a^i b_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

при этом, очевидно, квадрат нормы

$$(\boldsymbol{a})^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.$$

Ч. в. разделяются на три класса в соответствии со знаком их нормы $|\boldsymbol{a}|$:

1) $a_i a^i < 0$, $\boldsymbol{a}$ – пространственноподобный вектор, s(space)-вектор,

2) $a_i a^i > 0$, $\boldsymbol{a}$ – времениподобный вектор, t(time)-вектор,

3) $a_i a^i = 0$, светоподобный, или изотропный, вектор, l(light)-вектор.

Эта классификация соответствует положению Ч. в. по отношению к *световому конусу* $x_i x^i = 0$. Первый и второй случай различаются еще знаком временной компоненты:

если $a^0 > 0$, то вектор направлен в будущее,

если $a^0 < 0$, то вектор направлен в прошлое.

Два s-вектора могут быть ортогональны: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, однако два ненулевые t-вектора таковыми быть не могут; ортогональность s-векторов равносильна их линейной зависимости.

Если Ч. в., соединяющий мировые точки двух событий, времениподобен, то существует система отсчета, в к-рой события происходят в одной и той же точке трехмерного пространства $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$. Время, разделяющее события в этой системе отсчета, равно $\tau = |t_2 - t_1|$, где τ – *собственное время*. Ни в какой системе отсчета эти события не могут быть одновременными (то есть иметь равные координаты t). Если Ч. в., соединяющий мировые точки двух событий, пространственноподобен, то существует система отсчета, в к-рой эти два события происходят одновременно $t_1 = t_2$; они не связаны причинно-следственной связью, и модуль интервала $|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$ (также всегда положительный) определяет пространственное расстояние между этими двумя точками в этой системе отсчета.

Лит.: [1] Федоров Ф. И., Группа Лоренца, М., 1979.

М. И. Войцеховский.

ЧИСТАЯ ФАЗА – см. *Статистической механики математические задачи.*

ЧИСТОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА – см. *Буст.*

ЧИСТОЕ СОСТОЯНИЕ – состояние физической системы, *плотности матрица* ρ которого является проекционным оператором. В этом случае оператор ρ представим в виде:

$$\rho = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle},$$

где ψ – нек-рый ненулевой вектор в гильбертовом пространстве. Вектор ψ определяется по матрице плотности с точностью до множителя и называется *вектором состояния.*

Состояние с матрицей плотности ρ является чистым тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих четырех утверждений.

1) Существует наблюдаемая с чисто дискретным спектром, дисперсия к-рой в состоянии ρ равна нулю.

2) $\rho^2 = \rho$.

3) Оператор ρ не представим в виде $\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$, где α_1, $\alpha_2 > 0$, а ρ_1, ρ_2 – положительные операторы с единичным следом.

4) Энтропия системы $W = -\operatorname{Sp}(\rho \ln \rho) = 0$.

См. также *Плотности оператор.* *Ф. А. Лунев.*

ЧИСТЫЙ АНСАМБЛЬ – см. *Плотности матрица.*

ЧИСТЫЙ ПРОЦЕСС РОЖДЕНИЯ – см. *Рождения и гибели процесс.*

Ш

ШАГ винта – см. *Винтовое движение.*

ШАРКОВСКОГО ПОРЯДОК – линейное упорядочение множества натуральных чисел вида:

$$1, 2, 2^2, ..., 2^n, 2^{n+1}, ..., 2^{n+1}\cdot 5, 2^{n+1}\cdot 3, ..., 2^n\cdot 5, 2^n\cdot 3, ..., ..., 9, 7, 5, 3.$$

Введен в *Шарковского теореме.* Задает направление бифуркаций в одномерных динамич. системах и многих других системах, связанных с одномерными. В однопараметрич. семействах бифуркации в соответствии с Ш. п. (в частности, бифуркации удвоения периода) обладают при определенных условиях рядом универсальных свойств, таких, как универсальная скорость бифуркаций по параметру λ и универсальные масштабные соответствия между точками вновь возникающих циклов. *Ю. Л. Майстренко.*

ШАРКОВСКОГО ТЕОРЕМА – теорема, устанавливающая закономерности сосуществования циклов различных периодов для одномерных отображений (цикл периода m отображения f – множество, состоящее из m различных точек x_i, для которых $x_{i+1}=f(x_i)$, $i=1, ..., m-1$ и $x_1=f(x_m)$). Если непрерывное отображение $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ имеет цикл нек-рого периода m, то f имеет циклы всех других периодов, предшествующих m в *Шарковского порядке.* Из Ш. т. вытекает простой критерий сложного динамич. поведения: если у отображения f есть цикл нек-рого периода $m_0\neq 2^n$, $n=0, 1, ...$ (напр., периода 3), то у этого отображения есть бесконечное число циклов других, в том числе сколь угодно больших периодов. В этом (и только в этом) случае *топологическая энтропия* рассматриваемой системы положительна.

Имеются многочисленные обобщения Ш. т., учитывающие понятие типа траектории (порядка, в к-ром точки цикла переставляются под действием f). На нек-рые классы отображений Ш. т. переносится без изменений. Это отображения окружности $f:S^1\to S^1$ с нулевым числом вращения, и отображения $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ вида

$$f:(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)})\mapsto(f_1(x^{(1)}), f_2(x^{(1)}, x^{(2)}), ..., ..., f_k(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)})),$$

называемые треугольными.

Лит.: [1] Шарковский А. Н., «Украинский математич. журнал», 1964, № 1, с. 61–71. *Ю. Л. Майстренко.*

ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ – однородные функции u_n степени n от прямоугольных координат x, y, z, удовлетворяющие уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}=0$$

для областей, ограниченных сферическими поверхностями. Существует $2n+1$ линейно независимых однородных многочленов от x, y, z целой положительной степени n, являющихся Ш. ф.; их линейная комбинация представляет общий вид такого многочлена степени n.

Так, напр.,

$$u_0=a,\ u_1=ax+by+cz,$$
$$u_2=a(x^2-z^2)-b(y^2-z^2)+cxy+dyz+ezx$$

(a, b, c, d, e – произвольные постоянные) представляют общий вид однородных многочленов степеней 0, 1, 2, являющихся Ш. ф. Задача об отыскании общего вида простейших Ш. ф. степени n приводит к понятию *сферических функций.*

Ш. ф. применяются при нахождении общего решения уравнения Лапласа и при решении задач математич. физики для областей, ограниченных сферич. поверхностями. *Н. Я. Виленкин.*

ШВАРЦА ИНТЕГРАЛ – зависящий от параметра интеграл, дающий решение задачи Шварца о выражении аналитической функции $f(z)=u(z)+iv(z)$ в круге D по граничным значениям ее действительной (или мнимой) части u на граничной окружности C.

Пусть на единичной окружности $C=\{z: z=e^{i\varphi}, 0<\varphi<2\pi\}$ дана непрерывная действительная функция $u(\varphi)$. Тогда интегральные формулы Шварца, выражающие аналитич. функцию $f(z)=u(z)+iv(z)$, граничные значения действительной части к-рой совпадают с $u(\varphi)$ (или граничные значения мнимой части совпадают с $v(\varphi)$), имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} f(z)=Su(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C u(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+ic=\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}u(\varphi)\,d\varphi+ic,\\ f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_C v(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+c_1=\\ &=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}v(\varphi)\,d\varphi+c_1, \end{aligned}\right\}\quad (*)$$

где $z=re^{i\theta}$, $t=e^{i\varphi}$, c и c_1 – произвольные действительные постоянные. Ш. и. (*) тесно связан с *Пуассона интегралом.* Выражение

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}$$

часто называется ядром Шварца, а интегральный оператор S, фигурирующий в первой формуле (*),– оператором Шварца. Эти понятия обобщаются и на области произвольного вида комплексной плоскости.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [2] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977. *Е. Д. Соломенцев.*

ШВАРЦА ЛЕММА: пусть голоморфная в $U=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ функция f удовлетворяет условиям $f(0)=0$ и $|f(z)|<1$ при $z\in U$, тогда $|f(z)|\leqslant|z|$ при всех $z\in U$. Кроме того, если $|f(z_0)|=|(z_0)|$ при нек-ром z_0, то $f(z)=e^{i\alpha}z$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Дальнейшее развитие этого результата с целью придания ему конформно инвариантной формулировки приводит к *гиперболической метрики принципу.*

Лит.: [1] Schwarz H. A., Ges. math. Abh., Bd 1–2, B., 1890. *В. В. Горяйнов.*

ШВАРЦА НЕРАВЕНСТВО: если для комплексного векторного пространства V существует комплекснозначная функция $(\cdot,\cdot)$ на $V\times V$, удовлетворяющая условиям:

1) $(x, x)\geqslant 0$, причем $(x, x)=0$ эквивалентно $x=0$;
2) $(x, y+z)=(x, y)+(x, z)$;
3) $(x, \alpha y)=\alpha(x, y)$;

4) $(x, y)=\overline{(y, x)}$, то $(\cdot, \cdot)$ называется внутренним произведением, и справедливо неравенство

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

В случае, когда V – гильбертово пространство со скалярным произведением, Ш. н. часто называется Коши – Шварца неравенством. *В. Н. Нескоромный.*

ШВАРЦА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, обобщенная функция в узком смысле, в области $\omega \subset \mathbb{R}^n$ – линейный непрерывный функционал на основном пространстве

$$\mathscr{D}(\omega) = \limind_{K \subset \omega} \mathscr{D}(K),$$

где индуктивный предел берется по компактам K, лежащим в ω. Пространство Фреше $\mathscr{D}(K)$ состоит из всех функций $\Phi(x)$, определенных в области ω и имеющих непрерывные частные производные $D^\alpha\Phi(x)$ всех порядков $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, с *носителями* $\operatorname{supp}\Phi$, лежащими в ω. Здесь и ниже $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_i=\partial/\partial x_i$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Топология в $\mathscr{D}(K)$ задается полунормами

$$|\Phi| = \sup\{|D^\alpha\Phi(x)|;\ |\alpha| = p,\ x \in K\},\ p = 0, 1, 2, \ldots$$

Ш. р. были введены Л. Шварцем (L. Schwartz) в конце 40-х гг. 20 в. Это наиболее известный и активно используемый класс *обобщенных функций*. Многие популярные в приложениях классы обобщенных функций естественным образом вкладываются в пространство Ш. р. Обычно Ш. р. называют просто обобщенными функциями.

Имеется непрерывное вложение $\mathscr{D}(\omega) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ при $\omega \subset \Omega$, так что определено отображение $\mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\omega)$, к-рое Ш. р. $g \in \mathscr{D}'(\Omega)$ ставит в соответствие его сужение $g|_\omega \in \mathscr{D}'(\omega)$. Для всякой области ω в основном пространстве $\mathscr{D}(\omega)$ существует *разложение единицы*. Именно, для всякого локально конечного покрытия $\{\omega_k\}$ области ω (то есть $\omega = \bigcup_k \omega_k$, открытые подмножества $\omega_k \Subset \omega$, и любой компакт $K \subset \omega$ пересекается лишь с конечным числом подмножеств ω_k) существует семейство основных функций $\{\Omega_k\}$ со свойствами:

$$\Phi_k \in \mathscr{D}(\omega_k), \quad 0 \leqslant \Phi_k \leqslant 1, \quad \sum \Phi_k(x) = 1, \quad x \in \omega.$$

Запись $A \Subset B$ означает, что открытое множество A ограничено и его замыкание $\overline{A}$ лежит в открытом множестве B. Далее, пространства $\mathscr{D}'(\omega)$ образуют пучок векторных пространств на $\mathbb{R}^n$, обозначаемый через $\mathscr{D}'$. В частности, Ш. р. можно описывать локально, у всякого Ш. р. g определен носитель $\operatorname{supp} g$ – наименьшее замкнутое множество, вне к-рого g равно нулю.

Дифференцирования D_i – непрерывные операции в каждом пространстве $\mathscr{D}(\omega)$. Поэтому всякое Ш. р. g имеет производные всех порядков, определяемые формулами

$$(D^\alpha g, \Phi) = (-1)^{|\alpha|}(g, D^\alpha\Phi),\ \Phi \in \mathscr{D}(\omega).$$

Каждое Ш. р. локально имеет конечный порядок. Точнее, пусть Ш. р. $g \in \mathscr{D}'(\omega)$, тогда для любой подобласти $O \Subset \omega$ сужение $g|_O$ имеет конечный порядок, то есть существуют непрерывная функция G на O и мультииндекс α такие, что

$$(g, \Phi) = \int G(x) D^\alpha\Phi(x)\, d^n x, \quad \Phi \in \mathscr{D}(O).$$

Лит.: [1] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1–2, P., 1950–51 (nouv. éd., P., 1978); [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [3] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, 2 изд., М., 1959. *В. В. Жаринов.*

ШВАРЦА ТЕОРЕМА – см. *Минимальное множество.*

ШВАРЦА ФУНКЦИЯ, функция Римана – Шварца, – аналитическая функция, реализующая конформное отображение треугольника, ограниченного дугами окружностей, на верхнюю полуплоскость (или на единичный круг) и при неограниченном аналитическом продолжении остающаяся однозначной. Ш. ф. являются *автоморфными функциями*, группа к-рых зависит от вида отображаемого треугольника. Требованию однозначности можно удовлетворить лишь в том случае, если углы треугольника равны π/ν_1, π/ν_2, π/ν_3, где ν_1, ν_2, ν_3 – нек-рые специально подобранные натуральные числа.

Если $1/\nu_1 + 1/\nu_2 + 1/\nu_3 = 1$, то получаются прямолинейные треугольники, для к-рых возможны только случаи: $\nu_1=\nu_2=2$, $\nu_3=\infty$ (полуполоса); $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=6$; $\nu_1=2$, $\nu_2=\nu_3=4$; $\nu_1=\nu_2=\nu_3=3$. Во всех этих случаях Ш. ф. выражаются через тригонометрич. функции или через *Вейерштрасса эллиптические функции* и являются автоморфными функциями, группа к-рых есть группа движений евклидовой плоскости.

Если $1/\nu_1 + 1/\nu_2 + 1/\nu_3 > 1$, то возможны следующие случаи: $\nu_1=\nu_2=2$, ν_3 – любое; $\nu_1=2$, $\nu_2=\nu_3=3$; $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=4$; $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=5$. Во всех этих случаях Ш. ф. являются рациональными автоморфными функциями, группа к-рых есть конечная группа движений сферы. Вследствие связи этой группы с правильными многогранниками такие Ш. ф. называются также полиэдральными функциями.

Наконец, если $1/\nu_1 + 1/\nu_2 + 1/\nu_3 < 1$, то возможно бесконечно много различных треугольников, так как числа ν_1, ν_2, ν_3 можно неограниченно увеличивать. При этом Ш. ф. суть автоморфные функции с непрерывной особой линией (окружностью или прямой). В частности, случаи $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=\infty$ и $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\infty$ (круговой треугольник с нулевыми углами) приводят к *модулярным функциям* $J(z)$ и $\lambda(z)$ соответственно. Ш. ф. изучались Г. Шварцем (H. Schwarz, 1873). *Е. Д. Соломенцев.*

ШВАРЦА – ИЕНСЕНА ФОРМУЛА – см. *Иенсена формула.*

ШВАРЦШИЛЬДА ЧЕРНАЯ ДЫРА – см. *Керра – Ньюмена черная дыра.*

ШВЕРИНГОВСКИЙ ЧЛЕН – см. *Токов алгебра.*

ШВИНГЕРА ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП – вариационный принцип для амплитуды рассеяния, использующий *Липпмана – Швингера уравнение*. Основан на эквивалентности условия стационарности для функционала Швингера $t(\psi_1^-, \psi_2^+)$:

$$\delta t(\psi_1^-, \psi_2^+) = 0$$

уравнению Липпмана – Швингера для функций $\psi_i^\pm$:

$$\psi_i^\pm = \varphi_i - R_0(E \pm i0)V\psi_i^\pm.$$

Здесь

$$t\left(\psi_1^-, \psi_2^+\right) = \left\langle V\varphi_2, \psi_1^-\right\rangle + \left\langle V\psi_2^+, \varphi_1\right\rangle - \left\langle [V + VR_0(E+i0)]\psi_2^+, \psi_1^-\right\rangle,$$

$$E = k_n^2, \quad n = 1, 2,$$

$$\varphi_n = \varphi_n(x, k_n) = \exp\{i(x, k_n)\},$$

$$\langle U, V\rangle = \int dx\, u(x)\bar{v}(x),$$

$R_0(z)$ – интегральный оператор с ядром

$$(4\pi|x-x'|)^{-1}\exp\{i\sqrt{z}\,|x-x'|\},$$

$V = v(x)$ – короткодействующий потенциал. Амплитуда рассеяния $f(k_1, k_2)$, $|k_1| = |k_2|$, выражается через стационарное значение функционала $t(\psi_1^-, \psi_2^+)$ формулой:

$$f(k_1, k_2) = -2\pi t\left(\psi_1^-, \psi_2^+\right).$$

Лит.: [1] Schwinger J., «Phys. Rev.», 1947, v. 72, p. 742; [2] Lippman B. A., Schwinger J., там же, 1950, v. 79, p. 469; [3] Мотт Н., Месси Х., Теория атомных столкновений, пер. с англ., М., 1969. *С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.*

ШВИНГЕРА ФУНКЦИЯ, евклидова функция Грина,– *Грина функция* релятивистской квантовой теории поля для мнимых времен. Введены Дж. Швингером [1]. В формализме Вайтмана n-точечной функцией Швингера $S_n(x_1, ..., x_n)$ называется сужение обобщенной *Вайтмана функции* W_n на евклидовы точки $z_j=(x_j^0, \vec{x}_j)$, где $(x_j^0, \vec{x}_j)\equiv x_j\in\mathbb{R}^4$, $x_j\neq x_k$ для всех $j\neq k$. Найден [2] набор свойств Ш. ф. (аксиомы Остервальдера – Шрадера), эквивалентный аксиомам Вайтмана.

Лит.: [1] Schwinger J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1958, v. 44(9), p. 956–65; [2] Osterwalder K., Schrader R., «Comm. Math. Phys.», 1975, v. 42(3), p. 281–305; [3] Боголюбов Н. Н. и др., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987.

А. В. Воронин.

ШЕПЧУЩАЯ ГАЛЕРЕЯ – явление концентрации энергии волнового процесса вблизи вогнутых отражающих границ. Название связано с тем, что вблизи гладких вогнутых стен часто можно слышать тихие («шепчущие») звуки. Принципиально явление Ш. г. объяснил Рэлей [1]. Современная теория Ш. г. основана на методе дифракционного пограничного слоя и соответствующих высокочастотных асимптотич. разложений.

Лит.: [1] Rayleigh, «Philos. Mag.», 1910, v. 20, p. 1001–04; [2] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.

В. М. Бабич.

ШИРИНА резонанса – см. *Время жизни.*

ШИРИНА спектральных линий – интервал частот ν (или длин волн $\lambda=c/\nu$), характеризующий спектральные линии в оптических спектрах атомов, молекул и других квантовых систем. Каждому излучательному *квантовому переходу* между дискретными уровнями энергии $\mathscr{E}_k$ и $\mathscr{E}_i$ соответствует нек-рый интервал $\Delta\nu_{ki}$ частот, близких к частоте перехода

$$\nu_{ki}=(\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_i)/h=(\mathscr{E}_k-\mathscr{E}_i)/2\pi\hbar.$$

Значение $\Delta\nu_{ki}$ определяет Ш. спектральных линий – степень немонохроматичности данной спектральной линии. Контур спектральной линии $I(\nu)$ (зависимость интенсивности испускания или поглощения от частоты) обычно имеет максимум при частоте перехода ν_{ki} или вблизи нее; за Ш. спектральных линий принимают разность частот, к-рым соответствует уменьшение интенсивности по сравнению с максимальной вдвое (ее называют иногда полушириной спектральной линии).

Ш. спектральных линий $\Delta\nu_{ki}$ без учета эффекта Доплера определяется суммой *ширин* уровней энергии $\mathscr{E}_k$ и $\mathscr{E}_i$:

$$\Delta\nu_{ki}=(\Delta\mathscr{E}_k-\Delta\mathscr{E}_i)/h\approx(1/\tau_k+1/\tau_i)/2\pi,$$

то есть $\Delta\nu_{ki}$ тем больше, чем меньше времена жизни τ_k и τ_i квантовой системы на уровнях k и i. Радиационная (естественная) Ш. спектральных линий $(\Delta\nu_{ki})_{\text{рад}}=(A_k+A_i)/2\pi$ (где A_k и A_i – полные вероятности спонтанных переходов с уровней $\mathscr{E}_k$ и $\mathscr{E}_i$ на все нижележащие уровни). *М. А. Ельяшевич.*

ШИРИНА уровня – неопределенность энергии квантовомеханической системы (атома, молекулы и других), обладающей дискретными уровнями энергии $\mathscr{E}_k$ в состоянии, которое не является строго стационарным. Ш. уровня $\Delta\mathscr{E}_k$, характеризующая размытие уровня энергии, его уширение, зависит от средней длительности пребывания системы в данном состоянии – времени жизни на уровне τ_k и, согласно *неопределенностей соотношению* для энергии и времени, равна:

$$\Delta\mathscr{E}_k\approx\hbar/\tau_k.$$

Для строго стационарного состояния системы $\tau_k=\infty$ и $\Delta\mathscr{E}_k=0$. Время жизни τ_k, а следовательно, и Ш. уровней обусловлены возможностью *квантовых переходов* системы в состояния с другими энергиями. Для свободной системы (напр., для изолированного атома) спонтанные излучательные переходы с уровня $\mathscr{E}_k$ на нижележащие уровни $\mathscr{E}_i(\mathscr{E}_i<\mathscr{E}_k)$ определяют радиационную, или естественную, ширину уровня:

$$(\Delta\mathscr{E})_{\text{рад}}\approx\hbar A_k,$$

где

$$A_k=\sum_i A_{ki}$$

– полная вероятность спонтанного испускания с уровня $\mathscr{E}_k$, A_{ki} – коэффициенты Эйнштейна для спонтанного испускания. *М. А. Ельяшевич.*

ШИРОТА – см. *Координаты.*

ШЛЕЙФ осцилляций – см. *Осцилляций шлейф.*

ШРЕДИНГЕРА КАРТИНА – см. *Симплектическая геометрия.*

ШРЕДИНГЕРА КООПЕРАТОР – см. *Блоха закон дисперсии.*

ШРЕДИНГЕРА НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Нелинейное уравнение Шредингера.*

ШРЕДИНГЕРА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ – 1) одна из равноправных схем описания динамики в квантовой механике, в которой изменения во времени претерпевают состояния $\omega=\omega(t)$, а наблюдаемые (не имеющие явной зависимости от времени) фиксированы, хотя их средние значения могут зависеть от времени через волновые функции. Ш. п. является квантовым аналогом классич. картины движения Лиувилля. Среди эквивалентных схем описания квантовой эволюции наиболее известны *Гейзенберга представление* и *взаимодействия представление.* В Ш. п. эволюция чистого состояния, описываемого вектором состояния $\psi(x, t)$, определяется *Шредингера уравнением*

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(x,t)=H\psi(x,t);\quad \psi(x,t)|_{t=0}=\psi(x),$$

где H – гамильтониан. Смешанное состояние с матрицей плотности $\rho(t)$ эволюционирует по

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho(t)=[H,\rho(t)],\quad \rho(t)|_{t=0},$$

где

$$[A,B]\doteqdot AB-BA.$$

Эти уравнения имеют решения

$$\psi(x,t)=U(t)\psi(x),\ \rho(t)=U(t)\rho U^{-1}(t),$$

соответственно, где

$$U(t)=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}Ht\right\}$$

– оператор эволюции, к-рый реализует эквивалентность Ш. п. с представлением Гейзенберга. В Ш. п. выделенную роль играют стационарные состояния, в к-рых средние значения наблюдаемых не зависят от времени. Чистые состояния являются собственными для гамильтониана и характеризуются определенным значением энергии E_n, $H\psi_n=E_n\psi_n$. Условие стационарности для смешанных состояний имеет вид $[H,\rho(t)]=0$.

2) Ш. п.– стандартная реализация канонич. коммутативных соотношений операторами в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Для системы с одной степенью свободы Ш. п. действует в пространстве $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R})$ (по мере Лебега). В Ш. п. неограниченные канонич. операторы Q и P определены на плотной в $L^2(\mathbb{R})$ области $\mathscr{D}=\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (пространство Шварца быстроубывающих функций) формулами

$$\left.\begin{aligned}&(Q\psi)(x)=x\psi(x),\\&(P\psi)(x)=-i\frac{d}{dx}\psi(x),\\&\psi\in\mathscr{D},\quad \hbar=1\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

и удовлетворяют на $\mathscr{D}$ гейзенберговским канонич. коммутационным соотношениям

$$[Q,P]=i\mathbb{1},\ [Q,Q]=0,\ [P,P]=0.\qquad(2)$$

На области $\mathscr{D}$ операторы Q и P существенно самосопряжены и имеют единственные самосопряженные расширения. Унитарные операторы Вейля $U(p)=e^{ipQ}$, $V(q)=e^{iqP}$, $q, p\in\mathbb{R}$, действуют в Ш. п. по формулам

$$\left.\begin{aligned}(U(p)\psi)(x)&=e^{ipx}\psi(x),\\(V(q)\psi)(x)&=\psi(x+q)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

и удовлетворяют вейлевской форме канонич. коммутационных соотношений

$$\left.\begin{aligned}V(q)U(p)&=e^{ipq}U(p)V(q),\\U(p_1)U(p_2)&=U(p_1+p_2),\\V(q_1)V(q_2)&=V(q_1+q_2).\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Ш. п. неприводимо в $\mathscr{H}$. Оно называется координатным, так как диагонализирует оператор координаты Q и является спектральным представлением для Q. Операторы Q и P в Ш. п. имеют непрерывный спектр, заполняющий всю ось. Собственные функции операторов Q и P имеют вид:

$$Q\varphi_q=q\varphi_q,\ \varphi_q(x)=\delta(x-q);$$

$$P\varphi_p=p\varphi_p,\quad \varphi_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipx}$$

и принадлежат пространству $\mathscr{S}^*(\mathbb{R})$, топологически двойственному пространству $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}(\mathbb{R})\subset\mathscr{H}\subset\mathscr{S}^*(\mathbb{R})$. Наряду с координатным Ш. п. имеется импульсное, диагонализирующее канонически сопряженный импульс:

$$(\tilde{Q}\tilde{\psi})(p)=i\frac{d}{dp}\tilde{\psi}(p),\quad (\tilde{P}\tilde{\psi})(p)=p\tilde{\psi}(p),$$

$$\tilde{\psi}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Импульсное Ш. п. унитарно эквивалентно координатному и его свойства аналогичны. Эквивалентность реализуется преобразованием Фурье:

$$W:\psi(x)\mapsto\tilde{\psi}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ipx}\psi(x)\,dx,$$

$$\tilde{Q}=WQW^{-1},\quad \tilde{P}=WPW^{-1}.$$

Согласно *Стоуна – Неймана теореме* единственности каждое представление вейлевских канонич. коммутационных соотношений (4) унитарно эквивалентно прямой сумме копий Ш. п. (3). Для гейзенберговских канонич. коммутационных соотношений (1) существуют неэкспоненцируемые представления неэквивалентные Ш. п. (3) (см. *Гейзенберга представление*). Обобщение на случай систем с конечным числом степеней свободы не вызывает осложнений.

Е. В. Дамаскинский.

ШРЕДИНГЕРА РАДИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Радиальное уравнение Шредингера.*

ШРЕДИНГЕРА СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Квантовое стохастическое исчисление.*

ШРЕДИНГЕРА УРАВНЕНИЕ – основное динамическое уравнение нерелятивистской квантовой механики; предложено Э. Шредингером (E. Schrödinger, 1926). В квантовой механике Ш. у. играет такую же фундаментальную роль, как уравнения движения Ньютона в классич. механике и уравнения Максвелла в классич. теории электромагнетизма. Ш. у. описывает изменение во времени состояния квантовых объектов, характеризуемого *волновой функцией*. Если известна волновая функция ψ в начальный момент времени, то, решая Ш. у., можно найти ψ в любой последующий момент времени t.

Для частицы массы m, движущейся под действием силы, порождаемой потенциалом $V(x, y, z, t)$, Ш. у. имеет вид:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(x,y,z,t)\psi,\qquad(1)$$

где

$$\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$$

– оператор Лапласа (x, y, z – координаты). Это уравнение называется временным уравнением Шредингера.

Если V не зависит от времени, то решения Ш. у. можно представить в виде:

$$\psi(x,y,z,t)=e^{-(i/\hbar)\mathscr{E}t}\psi(x,y,z),\qquad(2)$$

где $\mathscr{E}$ – полная энергия квантовой системы, а $\psi(x, y, z)$ удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(x,y,z)\psi=\mathscr{E}\psi.\qquad(3)$$

Для квантовых систем, движение к-рых происходит в ограниченной области пространства, решения Ш. у. существуют только для нек-рых дискретных значений энергии: $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ..., $\mathscr{E}_n$, ...; члены этой последовательности (в общем случае бесконечной) нумеруются набором целых квантовых чисел n. Каждому значению $\mathscr{E}_n$ соответствует волновая функция $\psi_n(x, y, z)$, и знание полного набора этих функций позволяет вычислить все измеримые характеристики квантовой системы.

Ш. у. является математич. выражением фундаментального свойства микрочастиц – корпускулярно-волнового дуализма, согласно к-рому все существующие в природе частицы материи наделены также волновыми свойствами. Ш. у. удовлетворяет *соответствия принципу* и в предельном случае, когда длины волн де Бройля значительно меньше размеров, характерных для рассматриваемого движения, позволяет описать движение частиц по законам классич. механики. Переход от Ш. у. к уравнениям классич. механики, описывающей движения частиц по траекториям, подобен переходу от волновой оптики к геометрической. Аналогия между классич. механикой и геометрич. оптикой, к-рая является предельным случаем волновой, сыграла важную роль в установлении Ш. у.

С математич. точки зрения Ш. у. есть волновое уравнение и по своей структуре подобно уравнению, описывающему колебания нагруженной струны. Однако, в отличие от решений уравнения колебаний струны, к-рые дают геометрич. форму струны в данный момент времени, решения $\psi(x, y, z, t)$ Ш. у. прямого физич. смысла не имеют. Смысл имеет квадрат волновой функции, а именно величины

$$\rho_n(x,y,z,t)=|\psi_n(x,y,z,t)|^2,$$

равной вероятности нахождения частицы (системы) в момент t в квантовом состоянии n в точке пространства с координатами x, y, z. Эта вероятностная интерпретация волновой функции – один из основных постулатов квантовой механики.

См. также *Квантовая эволюция.*

Лит.: [1] Шредингер Э., Новые пути в физике. Статьи и речи, М., 1971.

Л. И. Пономарев.

ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ ЗАДАЧА – задача о нахождении отличных от нуля решений дифференциального уравнения

$$-[p(x)y']'+q(x)y=\lambda y,\qquad(1)$$

удовлетворяющих граничным условиям вида

$$A_1y(a)+B_1y'(a)=0,\ A_2y(b)+B_2y'(b)=0$$

(так наз. собственных функций), а также о нахождении значений параметра λ (собственных значений), при которых существуют такие решения. При нек-рых условиях на коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ Ш.– Л. з. можно свести к рассмотрению аналогичной задачи для уравнения вида

$$-y''+q(x)y=\lambda y.\qquad(2)$$

Эта задача была впервые (1837–41) исследована Ж. Лиувиллем (J. Liouville) и Ш. Штурмом (Ch. Sturm).

Решение нек-рых видов уравнений математич. физики методом Фурье приводит к Ш.– Л. з. Напр., задача о колебаниях однородной струны, закрепленной на концах, приводит к Ш.– Л. з. для уравнения $-y''=\lambda y$ с граничными условиями $y(0)=y(\pi)=0$. В этом случае существует беско-

нечная последовательность значений $1^2, 2^2, ..., n^2, ...$, к-рым соответствуют собственные функции $\sin nx$, образующие на отрезке $[0, \pi]$ полную ортогональную систему функций. Аналогично обстоит дело и в общем случае, возникающем, напр., при изучении распространения тепла в неоднородном стержне, и т. д. И здесь, если функция $q(x)$ в уравнении (2) непрерывна и действительна на отрезке $[a, b]$, A_1, B_1, A_2, B_2 – действительные числа, существует возрастающая последовательность действительных *собственных значений* $\lambda_1, ..., \lambda_n, ...$, стремящаяся к бесконечности, причем каждому из λ_n соответствует определенная с точностью до постоянного множителя *собственная функция* $\varphi_n(x)$, имеющая n нулей на участке $a < x < b$. Функции $\varphi_n(x)$ образуют на $[a, b]$ полную ортогональную систему функций (для уравнения (1) имеет место ортогональность с весом $p(x)$). Замкнутость такой системы функций была доказана В. А. Стекловым (1896). Весьма общие теоремы о разложении функций в ряды Фурье по системе $\varphi_n(x)$ доказал Д. Гильберт (D. Hilbert, 1904) с помощью теории линейных интегральных уравнений. При возрастании n собственные значения и собственные функции Ш.– Л. з. для уравнения (2) стремятся к собственным значениям и собственным функциям для уравнения $-y'' = \lambda y$ при тех же граничных условиях. Большинство встречающихся в математике ортогональных систем функций, напр. многочлены Лежандра, многочлены Эрмита, являются системами собственных функций нек-рых Ш.– Л. з.

Иногда Ш.– Л. з. называют краевую задачу для уравнения (1) при более общих краевых условиях:

$$\alpha_i y(a) + \beta_i y'(a) + \gamma_i y(b) + \delta_i y'(b) = 0,\ i = 1, 2,$$

где α_i, β_i, γ_i, δ_i – постоянные числа. Среди краевых условий такого вида наиболее важными являются $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ (периодич. условия) и $y(a) = -y(b)$, $y'(a) = -y'(b)$ (полупериодич. условия).

Многие задачи математич. физики (напр., задача о распространении тепла в бесконечном неоднородном стержне) приводят к Ш.– Л. з. на полуоси или на всей оси. В первом случае рассматриваются решения уравнения (2), удовлетворяющие условию $A_1 y(0) + B_1 y'(0) = 0$; вместо последовательности собственных функций здесь появляется совокупность собственных функций $\varphi(x, \lambda)$, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра λ. Вместо разложения в ряды Фурье рассматриваются разложения вида

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda),$$

где $\rho(\lambda)$ – нек-рая неубывающая функция. Эти разложения аналогичны интегралу Фурье. При этом

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\varphi(x, \lambda)\, dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} f^2(x)\, dx.$$

Аналогичные факты имеют место и для Ш.– Л. з. на всей оси. Для нек-рых задач математич. физики важное значение имеет обратная Ш.– Л. з., то есть задача о восстановлении дифференциального уравнения по функции $\rho(\lambda)$.

Ш.– Л. з. возникает также в нек-рых вопросах квантовой механики и вариационного исчисления.

Лит.: [1] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.– Л., 1950; [2] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям..., пер. с англ., т. 1, М., 1960.

Н. Я. Виленкин.

Э

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР уравнений Боголюбова – оператор U, с помощью которого решение задачи Коши F для *Боголюбова уравнений* определяется формулой

$$F(t) = U(t)\, F^0.$$

Для симметричной системы частиц он имеет вид (см. [1]):

$$U(t) = e^{\int dx\, S(-t)\, e^{-\int dx}},$$

где $S(-t)$ – прямая сумма *эволюционных операторов* уравнений Лиувилля, символом $\int dx$ обозначен оператор

$$\left(\int dx\, f\right)_n(x_1, ..., x_n) = \int dx_{n+1}\, f_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}).$$

Для несимметричных систем Э. о. уравнений Боголюбова имеет вид:

$$U(t) = \left(1 - \int dx\right)^{-1} S(-t)\left(1 - \int dx\right).$$

Э. о. определен на пространстве последовательностей суммируемых функций. Построено (см. [1]) расширение Э. о. уравнений Боголюбова на пространство последовательностей ограниченных функций (см. *Термодинамический предел*). Другие типы Э. о. описаны в [2].

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985; [2] Маслов В. П., Тариверdиев С. Э., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 85–125.

В. И. Герасименко.

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР уравнения Лиувилля – оператор S, действие которого определяется формулой

$$(S^n(t) f_n)(x_1, ..., x_n) =$$

$$= f_n(X_1(t, x_1, ..., x_n), ..., X_n(t, x_1, ..., x_n)),$$

где $X_i(t, x_1, ..., x_n)$ – фазовая точка i-й частицы в момент времени t системы n частиц, которые в начальный момент находились в фазовых точках $x_1, ..., x_n$. Посредством Э. о. уравнения Лиувилля определяется решение задачи Коши для *Лиувилля уравнения*

$$D(t, x_1, ..., x_n) = S^n(-t)\, D^0(x_1, ..., x_n).$$

Если гамильтониан системы удовлетворяет определенным условиям, Э. о. в пространстве суммируемых функций образует однопараметрич. группу изометрич. операторов, инфинитезимальный оператор к-рой на множестве непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями совпадает с *Пуассона скобкой* (см. [1]).

Лит.: [1] Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Математические основы классической статистической механики, Киев, 1985.

В. И. Герасименко.

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ РАЗРЫВ – см. *Ударные волны.*

ЭЙЗЕНШТЕЙНА ТЕТА-РЯД – см. *Тета-ряд.*

ЭЙКОНАЛА УРАВНЕНИЕ – уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 = 1,$$

которое описывает распространение коротких световых волн в однородной среде. Его решение, равное нулю на гиперповерхности D в $\mathbb{R}^n$,– это оптич. длина кратчайшего пути от источника света D до точки $q \in \mathbb{R}^n$. Проекция в $\mathbb{R}^n$ характеристик, составляющих график 1-струи функции u, – это нормальные прямые (лучи) к поверхностям уровня функции u (фронтам). *М. Э. Казарян.*

ЭЙЛЕРА ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ – см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки.

ЭЙЛЕРА ПЕРЕМЕННЫЕ – см. *Эйлера уравнения* в гидромеханике.

ЭЙЛЕРА ТОЖДЕСТВО – см. *Квазиоднородное эйлерово поле.*

ЭЙЛЕРА УГЛЫ – углы, определяющие взаимное положение в пространстве двух прямоугольных систем координат с общим началом ($Oxyz$ и $Ox'y'z'$ на рис. 1) введены Л. Эйлером (L. Euler, 1760). Переход от $Oxyz$ к $Ox'y'z'$ осуществляется с помощью трех последовательных поворотов на углы ψ (прецессии), ϑ (нутации) и φ (собственного вращения). Первый поворот производится вокруг оси Oz на угол ψ, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, в положительном направлении так, что Ox перейдет в Ox_1 (линия узлов), затем делается поворот вокруг Ox_1 на угол ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, и после этого – поворот вокруг нового положения оси Oz, то есть Oz', на угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

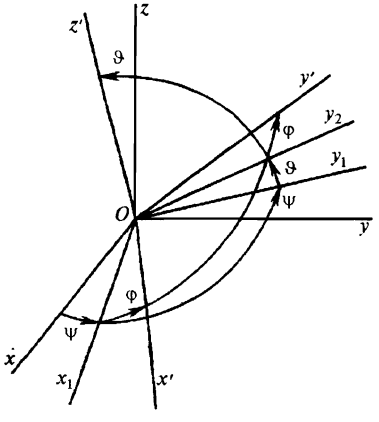


Рис. 1. Углы Эйлера ψ, ϑ, φ, с помощью которых осуществляется переход от системы координат $Oxyz$ к $O'x'y'z'$.

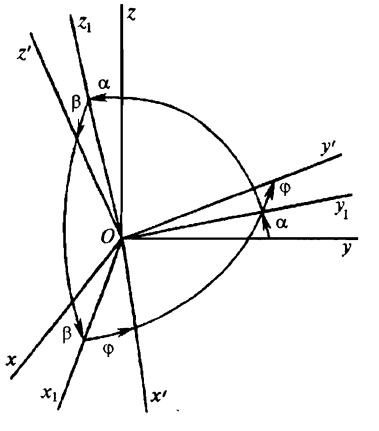


Рис. 2. Углы Крылова α, β, φ, используемые в теории гироскопов.

В теории *гироскопов* используется разновидность Э. у.– углы Крылова α, β, φ, к-рые вводятся следующим образом: α – угол поворота вокруг оси Ox (рис. 2), β – угол поворота вокруг нового направления Oy_1 оси Oy и φ – угол поворота вокруг направления оси Oz, занятого ею после второго поворота (ось Oz'). Эти углы удобны при рассмотрении таких движений системы координат $Ox'y'z'$, в к-рых ось Oz' «близка» к Oz. Для гироскопа в кардановом подвесе система осей $Oxyz$ связывается с основанием прибора, причем Ox направляется по оси вращения внешнего кольца. Тогда, если положение ротора задается углами Крылова, то α означает угол поворота внешнего кольца относительно плоскости основания Oxy, β – угол поворота внутреннего кольца вокруг его оси, перпендикулярной к Ox, относительно плоскости внешнего кольца и φ – угол поворота ротора гироскопа вокруг его оси.

Кроме того, в динамике твердого тела широко используются так наз. самолетные и корабельные углы (см. *Ориентации углы*).

Лит.: [1] Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961.

В. С. Сергеев.

ЭЙЛЕРА УРАВНЕНИЯ в гидромеханике – дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости в переменных Эйлера. Если давление p, плотность ρ, проекции скоростей частиц жидкости u, v, w и проекции действующей объемной силы X, Y, Z рассматривать как функции координат x, y, z точек пространства и времени t (переменные Эйлера), то Э. у. в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат принимает вид системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Решение общей задачи гидромеханики в переменных Эйлера сводится к тому, чтобы, зная X, Y, Z, а также начальные и граничные условия, определить u, v, w, p, ρ как функции x, y, z и t. Для этого к Э. у. присоединяют уравнение неразрывности в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

В случае баротропной жидкости, у к-рой плотность зависит от давления, пятым уравнением будет уравнение состояния $\rho = \varphi(p)$ (или $\rho = \text{const}$, когда жидкость несжимаема).

Лит.: [1] Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, 6 изд., М., 1987.

С. М. Тарг.

ЭЙЛЕРА УРАВНЕНИЯ в механике твердого тела. Динамические Э. у. представляют собой дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x + (I_x - I_y)\omega_y\omega_z &= M_x,\\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x &= M_y,\\ I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y &= M_z, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно главных осей инерции, проведенных из неподвижной точки; ω_x, ω_y, ω_z – проекции мгновенной угловой скорости тела на эти оси; M_x, M_y, M_z – главные моменты сил, действующих на тело, относительно тех же осей; $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ – производные по времени от ω_x, ω_y, ω_z.

Кинематические Э. у. дают выражения ω_x, ω_y, ω_z через *Эйлера углы* φ, ψ, θ и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,\\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,\\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Системы уравнений (1) и (2) позволяют, зная закон движения тела, определить момент действующих на него сил и наоборот, зная действующие на тело силы, определить закон его движения.

Лит.: [1] Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, 6 изд., ч. 2, М., 1972. *С. М. Таре.*

ЭЙЛЕРА ФОРМУЛА – см. *Динамика твердого тела.*

ЭЙЛЕРА – КРЫЛОВА УГЛЫ – то же, что корабельные углы (см. *Ориентации углы*).

ЭЙЛЕРА – ЛАГРАНЖА УРАВНЕНИЯ – см. *Вариационное исчисление, Вариационное исчисление в целом, Лагранжев формализм.*

ЭЙЛЕРА – ПУАНСО СЛУЧАЙ – первый (по времени и простейший) из трех классических случаев интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки (другие – *Лагранжа – Пуассона случай, Ковалевской случай*). Он характеризуется тем, что неподвижной точкой является центр тяжести тела (обычно совпадающий с началом координат O). В этом случае $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки) и уравнения Эйлера – Пуассона (I)–(II) обладают следующим четвертым дополнительным первым интегралом:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2 = \text{const},$$

выражающим сохранение кинетич. момента; открыт Л. Эйлером [1].

Этот интеграл и позволяет свести интегрирование уравнений (I)–(II) в рассматриваемом случае к квадратурам, обращению нек-рого эллиптич. интеграла (2-го рода) и решению квадратных уравнений. В частном случае, когда начальные данные таковы, что $B = \frac{l^2}{h}$, функции p, q, r выражаются через элементарные функции (см. [3]). Решение уравнений II суть

$$\gamma = \frac{Ap}{l}, \quad \gamma' = \frac{Bq}{l}, \quad \gamma'' = \frac{Cr}{l}.$$

Если p, q, r известны как функции t, то легко определить и положение твердого тела, применяя выражение γ, γ', γ'' через *Эйлера углы.*

Заслуга Л. Пуансо (см. [2]) состоит в том, что он дал геометрич. интерпретацию движения твердого тела в рассматриваемом случае.

Первое представление Пуансо: эллипсоид инерции (уравнение к-рого $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ в репере, связанном с телом) катится без проскальзывания по неподвижной плоскости π, перпендикулярной кинетич. моменту l и отстоящей от неподвижной точки O на расстояние

$$\delta = \sqrt{2h}/|l|.$$

Эллипсоид, катаясь по плоскости π, оставляет на ней след, называемый герполодией; точка касания с плоскостью на эллипсоиде описывает кривую, называемую полодией. Так как полодия высекается на эллипсоиде инерции направлением угловой скорости ω, то полодии совпадают с фазовыми кривыми уравнений Эйлера при

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Герполодии располагаются на плоскости в нек-ром кольце и, вообще говоря, не замкнуты.

Второе представление Пуансо: если с подвижным репером (связанным с телом) связать конус

$$\frac{A\xi^2}{A-D} + \frac{B\xi^2}{B-D} + \frac{C\xi^2}{C-D} = 0, \quad D = \frac{l}{h},$$

то движение тела можно представить как качение этого конуса по плоскости π, проходящей через O перпендикулярно кинетич. моменту l и вращающейся с постоянной угловой скоростью.

Если тело обладает динамич. симметрией, то эллипсоид Пуансо становится эллипсоидом вращения и движение можно описать качением прямого кругового конуса, фиксированного в теле, по неподвижному в пространстве прямому круговому конусу.

Лит.: [1] Euler L., «Mémoires de l'Acad. des Sc. de Berlin», 1758 (см. также пер.: Эйлер Л., Основы динамики точки, М., 1938); [2] Poinsot L., «J. de Liouville», 1851, t. 16; [3] Голубев В. В., Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953; [4] Татаринов Я. В., Лекции по классической динамике, М., 1984. *М. И. Войцеховский.*

ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА УРАВНЕНИЯ – см. *Твердое тело*; движение около неподвижной точки.

ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА – топологический инвариант фигуры Ф, определяемый с помощью разбиения ее на клетки разных размерностей; клетка – гомеоморфный образ куба, под фигурой понимается конечное объединение всевозможных клеток или (более общо) гомеоморфных им выпуклых многогранников, быть может, вырожденных. Тогда эйлерова характеристика – это число $\chi(\Phi)$, поставленное в соответствие каждой фигуре так, что выполнены аксиомы:

1) Э. х. пустой фигуры равна нулю: $\chi(\varnothing) = 0$;

2) для каждого (в том числе вырожденного) выпуклого многогранника C Э. х. равна единице: $\chi(C) = 1$;

3) для любых фигур A и B имеет место аддитивность:

$$\chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B).$$

Так, для многогранника в трехмерном пространстве Э. х. выражается формулой:

$$\chi = \text{В} - \text{Р} + \text{Г},$$

где В – число вершин, Р – число ребер, Г – число граней; для замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^3$ Э. х. выражается через гауссову кривизну формулой Гаусса – Бонне:

$$\int K\, ds = 2\pi\xi.$$

М. И. Войцеховский.

ЭЙНШТЕЙНА ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, принцип относительности: все физические явления (механические, электромагнитные и любые другие) при одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех *инерциальных системах отсчета.* *М. И. Войцеховский.*

ЭЙНШТЕЙНА ТЕНЗОР – *тензор* вида

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R, \quad R = g^{ij}R_{ij},$$

где $R^{ij} = g^{il}g^{jm}R_{lm}$ и R_{ij} – *Риччи кривизна.* Он удовлетворяет так наз. уравнениям Эйнштейна

$$G^{ij}{}_{,j} = 0$$

в пустоте, описывающим гравитационное поле (метрику) в пустом пространстве (без материи). *М. И. Войцеховский.*

ЭЙНШТЕЙНА УРАВНЕНИЯ – основные уравнения общей теории относительности, связывающие геометрическую структуру пространства-времени и тензор энергии-импульса всевозможных полей и частиц, находящихся в нем. Э. у. имеют вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}, \quad i,k = 0, 1, 2, 3,$$

где R_{ik} – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, T_{ik} – тензор энергии-импульса, G – гравитационная постоянная, c – скорость света, g_{ik} – метрич. тензор пространства-времени. В Э. у., в отличие от других уравнений математич. физики, ищутся одновременно и неизвестные компоненты метрич. тензора и то многообразие, на к-ром они заданы. Э. у. содержат 1-е и 2-е производные от компонент метрич. тензора, следствием чего являются уравнения движения среды $T^k_{ik} = 0$. Наиболее разработана постановка задачи Коши для Э. у., в к-рой начальные данные задаются на нек-рой пространственноподобной гиперповерхности и ищется эволюция во времени этой гиперповерхности

(см. [3]). В рамках этой задачи удается трактовать Э. у. как систему гиперболич. типа.

Э. у. были сформулированы А. Эйнштейном [1] в ходе работы над общей теорией относительности и выведены также Д. Гильбертом (D. Hilbert) из вариационного принципа. Э. у. для нек-рых видов тензора энергии-импульса материи (вакуум, скалярное и электромагнитное поля, различные виды сплошной среды) имеют гамильтонову структуру и обладают рядом законов сохранения. Рассматриваются также Э. у. с космологич. постоянной, отличающиеся добавлением члена Λg_{ik} в правую часть.

См. также *Гравитационного поля уравнения, Гравитационные волны, Положительная определенность энергии.*

Лит.: [1] Einstein A., «Sitzungsber. press. Akad.», 1915, Bd 42, № 2, S. 844–47; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988; [3] Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж., Гравитация, пер. с англ., М., 1977. *О. И. Богоявленский, Д. Д. Соколов.*

ЭЙНШТЕЙНА – СМОЛУХОВСКОГО УРАВНЕНИЕ – уравнение, описывающее диффузию броуновских частиц и пригодное для описания некоторых других случайных процессов:

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial r_i}\right) + D\Delta_{\boldsymbol{r}}\rho.$$

Здесь ρ – функция распределения, α, D – заданные коэффициенты, $U(\boldsymbol{r})$ – нек-рая функция.

Лит.: [1] Кляцкин В. И., Статистическое описание систем с флуктуирующими параметрами, М., 1975.

И. А. Кузин, В. П. Политюков.

ЭЙРИ ИНТЕГРАЛ – интеграл вида

$$\mathrm{Ai}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x^3/3+\lambda x)}\,dx.$$

Фаза Э. и.– версальная деформация *критической точки* $x^3/3$ (типа A_2). Функция $\mathrm{Ai}(\lambda)$ называется функцией Эйри и возникает при анализе волнового поля вблизи каустики.

С. В. Чмутов.

ЭЙРИ УРАВНЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение*; аналитическая теория.

ЭЙРИ ФУНКЦИИ – см. *Эйри интеграл, Цилиндрические функции.*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ АНСАМБЛЕЙ ПРИНЦИП – см. *Статистической механики математические задачи.*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРИНЦИП – см. *Масса.*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АНСАМБЛЕЙ – независимость предельных состояний равновесных статистических систем (в термодинамическом пределе) от выбора ансамбля Гиббса: микроканонического, канонического или большого канонического. Под слабой эквивалентностью ансамбля понимают выполнимость обычных термодинамич. соотношений для термодинамич. функций (энергии, свободной энергии и давления), получаемых из различных ансамблей при определенном соответствии между термодинамич. параметрами, определяющими эти ансамбли. Сильная эквивалентность ансамбля означает совпадение всех предельных характеристик (корреляционных функций или приведенных матриц плотности), получаемых из разных ансамблей. Полное решение проблемы Э. а. остается открытым. В общем случае (напр., для систем, допускающих фазовый переход) сильная Э. а. места не имеет. Для нек-рых классич. и квантовых систем Э. а. доказана в определенной области значений термодинамич. параметров. В качестве примера подобного результата сформулируем утверждение Н. Н. Боголюбова, Д. Я. Петрины и Б. И. Хацета (см. [2]).

Пусть задана система частиц с парным потенциалом $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^\nu$, к-рый ограничен снизу и удовлетворяет условиям:

$$\Phi(x) \geqslant \varphi_1(|x|) \text{ при } |x| \leqslant a_1,$$

$$\Phi(x) \geqslant -\varphi_2(|x|) \text{ при } |x| \geqslant a_2,$$

где $0 < a_1 < a_2$, φ_1 и φ_2 – положительные убывающие функции на $(0, a_1)$ и $(a_2, +\infty)$ соответственно такие, что

$$\int_0^{a_1} \varphi_1(t) t^{\nu-1}\,dt = +\infty, \quad \int_{a_2}^{\infty} \varphi_2(t) t^{\nu-1}\,dt < +\infty.$$

Тогда для каждого $\beta > 0$ можно указать такие значения $\mu_0(\beta)$ и $\rho_0(\beta)$, что

а) соответствие $\mu \leftrightarrow \rho : \mu = \dfrac{\partial f(\rho,\beta)}{\partial \rho}$ и $\rho = \dfrac{\partial p(\mu,\beta)}{\partial \mu}$ взаимно однозначно для $\rho \in (0, \rho_0(\beta))$ и $\mu \in (-\infty, \mu_0(\beta))$,

б) для $\mu < \mu_0(\beta)$ и $\rho < \rho_0(\beta)$ существуют термодинамич. пределы $\rho_{\text{б.к.а.}}(X)$ и $\rho_{\text{к.а.}}(X)$ корреляционных функций большого канонич. ансамбля и канонич. ансамбля, и для ρ и μ, связанных соотношениями пункта а), эти пределы равны: $\rho_{\text{б.к.а.}}(X) = \rho_{\text{к.а.}}(X)$.

Здесь μ – химич. потенциал, ρ – плотность, β – обратная температура, $f(\rho, \beta)$ – плотность свободной энергии, $p(\mu, \beta)$ – давление.

См. также *Термодинамические функции, Корреляционная функция, Приведенная матрица плотности.*

Лит.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И., «Теоретич. и математич. физика», 1969, т. 1, № 2, с. 251. *Д. П. Санкович.*

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ группы – пара конечномерных (соответственно унитарных) *представлений* T и T' группы, для которой существует обратимый (соответственно унитарный) *сплетающий оператор*, связывающий T и T'. *Ю. А. Неретин.*

ЭКВИДИСТАНТА – см. *Нормальное отображение.*

ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ – см. *Потенциал.*

ЭКМАНА СПИРАЛЬ – см. *Геофизическая турбулентность.*

ЭКМАНОВСКИЙ СЛОЙ – см. *Геофизическая турбулентность.*

ЭКСПАНСИВНОСТЬ – см. *Символическая динамика.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ – см. *Устойчивость.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ – см. *Ли группа.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ – см. *Квантовая теория гравитации.*

ЭКСТЕНСИВНАЯ ВЕЛИЧИНА – макроскопическая величина, характеризующая находящуюся в состоянии термодинамического равновесия физическую систему и пропорциональная массе системы или числу частиц в системе. Значение Э. в. для всей системы равно сумме ее значений для отдельных частей системы. Примерами Э. в. служат внутренняя энергия, объем, энтропия, масса, теплоемкость системы и пр.

Наряду с термином «Э. в.» используются эквивалентные термины «аддитивная величина» и «экстенсивный параметр». *А. В. Солдатов.*

ЭКСТЕНСИВНЫЙ ПАРАМЕТР – см. *Экстенсивная величина.*

ЭКСТРЕМАЛЬ – см. *Вариационное исчисление, Вариационное исчисление в целом.*

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ФОРМФАКТОР – см. *Формфактор.*

ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ – система нелинейных уравнений для определения напряженностей электромагнитного поля и траекторий его источников. В электродинамике Х. Лоренца (H. Lorentz, 1892) каждому источнику (частице) сопоставляется плотность массы μ, заряда ρ, тока $\boldsymbol{J}$, поле скоростей $\boldsymbol{v}$ и так наз. микроскопич. поля $\boldsymbol{e}$ (электрическое) и $\boldsymbol{h}$ (магнитное). Предполагается, что эти величины связаны следующими уравнениями (здесь k – номер источника, c – скорость света в вакууме).

1) Уравнения микроскопич. полей:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e}_k = -\frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{c\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}_k = \frac{4\pi \boldsymbol{J}_k}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{c\partial t},$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{e}_k = 4\pi\rho_k, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{h}_k = 0.$$

2) Уравнения движения источников:

$$\mu_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} = \sum\nolimits_e (\rho_k \boldsymbol{e}_l + \boldsymbol{J}_k \times \boldsymbol{h}_l/c).$$

3) Связи:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}_k = 0, \quad \frac{\partial \mu_k}{\partial t} + \operatorname{div} \mu_k \boldsymbol{v}_k = 0,$$

$$\boldsymbol{J}_k = \rho_k \boldsymbol{v}_k, \mu_k/m_k = \rho_k/q_k,$$

где m_k и q_k – массы и заряды источников. Эти уравнения релятивистски инвариантны (A. Пуанкаре; H. Poincaré, 1906). Для точечных источников:

$$J_\mu = \{-\boldsymbol{J}/c, \rho\} = q\int_{-\infty}^{\infty} u_\mu(\tau)\,\delta(x - x(\tau))\,\delta(y - y(\tau)) \times$$

$$\times\, \delta(z - z(\tau))\,\delta(t - t(\tau))\,d\tau,$$

где $u_\mu = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \{-\boldsymbol{v}, c\}$ – 4-скорость источника, τ – собственное время, $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$, $t = t(\tau)$,– траектория в пространстве Минковского. В этом приближении решались задачи Коши для уравнений поля при заданных траекториях его источников и для уравнений движения частиц в заданных электромагнитных полях. Полученные результаты позволили объяснить многочисленные эффекты в процессах излучения и поглощения электромагнитных волн, развить теорию ускорителей и антенн. Однако модель точечных источников приводит к бесконечной энергии микроскопич. полей. Этот недостаток устранен в моделях протяженных источников, напр. в динамич. коллективной модели ядра. В таких моделях движение источников определяется *гидродинамики уравнениями*, в к-рых с помощью давления учтено взаимодействие, обеспечивающее стабильность источников. Альтернативный подход состоит в использовании в качестве уравнений микроскопич. полей *Борна – Инфельда уравнений* или *Боппа – Подольского уравнений*. В обоих случаях энергия поля точечного источника оказывается конечной, причем энергия и импульс поля образуют 4-вектор, к-рый можно принять в качестве 4-вектора энергии-импульса источника (так наз. гипотеза полевой массы). Таким образом, отпадает необходимость в сомнительном тождестве $\mu/m = \rho/q$, к-рое служит исходным пунктом моделей протяженных источников. С другой стороны, обобщения уравнений микроскопич. полей сводятся к постулированию тех или иных материальных уравнений для вакуума. Такие уравнения в принципе оправданы возможностью поляризации вакуума в силу наличия в нем электрон-позитронных пар, но конкретный их вид пока составляет предмет произвольных гипотез.

Лит.: [1] Беккер Р., Теория электричества, т. 2. Электронная теория, пер. с нем., М.– Л., 1936; [2] Соколов А. А., Тернов И. М., Релятивистский электрон, М., 1983; [3] Айзенберг И., Гренер В., Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления, пер. с англ., М., 1975; [4] Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях, М., 1988. *А. И. Кириллов.*

ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬС – см. *Векторный потенциал.*

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ – см. *Великое объединение взаимодействий.*

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ – см. *Взаимодействие.*

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ТОК – см. *Формфактор.*

ЭЛЕКТРОННЫЙ ТЕРМ – одно из основных понятий, возникающих при использовании *Борна – Оппенгеймера метода* в теории молекул. Вследствие большой разницы в массах скорости движения ядер в молекуле малы по сравнению со скоростями электронов. Это позволяет рассматривать электронное движение при неподвижных ядрах, расположенных на заданных расстояниях $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, ..., $\boldsymbol{R}_{N-1}$ от центра масс молекулы (N – число ядер в молекуле). Энергетич. уровни $E_s(\boldsymbol{R}_1, ..., \boldsymbol{R}_{N-1})$ такой системы и определяют Э. т. молекулы. В энергию E_s обычно включается также и электростатич. энергия взаимодействия ядер друг с другом, так что E_s, по существу, представляет собой полную энергию молекулы при заданном расположении ядер. В отличие от атомов, где энергетич. уровни – определенные числа, Э. т. определяет нек-рую поверхность в пространстве переменных, к-рые являются расстояниями от ядер до центра масс молекулы. Однако так же, как и в атомах, возможны излучательные переходы между Э. т., причем, в соответствии с принципом Франка – Кондона, они происходят при фиксированных значениях $\boldsymbol{R}_1$, ..., $\boldsymbol{R}_{N-1}$. Э. т. и соответствующие ему электронные состояния могут обладать определенной симметрией, с к-рой связаны правила отбора при упомянутых излучательных переходах. *И. Д. Феранчук.*

ЭЛЕКТРОНЫ в периодических полях – электроны, рассматриваемые при построении квантовой теории кристаллических твердых тел. В простейшем случае эта задача сводится к изучению в $L_2(\mathbb{R}^N)$ спектральных свойств оператора Шредингера H с периодическим потенциалом $u(x)$:

$$H = -\Delta + u(x),\ u(x+a) = u(x),$$

$x \in \mathbb{R}^N$, $a \in \Lambda$, Λ – решетка в $\mathbb{R}^N$. Пусть оператор Шредингера самосопряжен, что выполняется, если потенциал $u(x)$ удовлетворяет нек-рым условиям, напр. условию

$$\int_\Omega u^2(x)\,dx < +\infty,$$

где Ω – элементарная ячейка (фундаментальная область) решетки Λ. Основой спектральной теории оператора Шредингера с периодич. потенциалом является теорема Флоке – Блоха, к-рая была установлена для $N = 1$ Г. Флоке (G. Floquet) в 1883 и обобщена на случай $N > 1$ Ф. Блохом (F. Bloch) в 1928: поскольку оператор Шредингера с периодич. потенциалом H инвариантен относительно трансляций на векторы решетки T_a, $T_a H T_a^{-1} = H$, то собственные функции Ψ оператора Шредингера могут быть выбраны таким образом, что преобразуются по неприводимым представлениям группы трансляций

$$(T_a\Psi)(x) = \Psi(x - a) = \exp(-ika)\Psi(x),$$

здесь k – квазиимпульс, характеризующий неприводимое представление группы трансляций. Следствием теоремы Флоке – Блоха является возможность построения совместных спектральных разложений операторов трансляций и оператора Шредингера с периодич. потенциалом:

$$T_a \int \exp(ika)\,dE_k, \quad H = \int \mathscr{E}(k)\,dE_k,$$

где E_k – проекционный оператор, а функция $\mathscr{E}(k)$ называется законом дисперсии Блоха. Теорема Флоке – Блоха обобщается на случай, когда периодич. потенциал инвариантен относительно пространственной группы, содержащей множество трансляций в качестве подгруппы, относительно инверсии времени и т. п. Существует обобщение этой теоремы для оператора Шредингера, содержащего кроме периодич. потенциала однородное электрич. поле или однородное магнитное поле. *Е. Д. Белоколос.*

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ – см. *Векторное поле.*

ЭЛЕМЕНТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ – совокупность (D, f) области D на плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$ и аналитической функции $f(z)$, заданной в D при помощи некоторого аналитического аппарата, позволяющего эффективно осуществить *аналитическое продолжение* $f(z)$ во всю ее область существования как *полной аналитической функции*. Наиболее простой и чаще всего применяемой формой Э. а. ф. является круговой элемент в виде совокупности степенного ряда

$$f(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \qquad (1)$$

и его круга сходимости $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ с центром a (центр элемента) и радиусом сходимости $R > 0$. Аналитич. продолжение здесь достигается (быть может, много-

кратным) переразложением ряда (1) для различных центров b, $|b-a| \leqslant R$, по формулам вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-b)^n = c_0 + \\ + [c_1(b-a) + c_1(z-b)] + [c_2(b-a)^2 + \\ + 2c_2(b-a)(z-b) + c_2(z-b)^2] + \dots .$$

Любой из элементов (D, f) полной аналитич. функции определяет ее однозначно и может быть представлен посредством круговых элементов с центрами $a \in D$. В случае бесконечно удаленного центра $a = \infty$ круговой элемент принимает вид:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

с областью сходимости $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. *Е. Д. Соломенцев.*

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ДЛИНА – см. *Фундаментальная длина.*

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КАТАСТРОФА – см. *Бифуркация.*

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РАБОТА – см. *Работа.*

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ – см. *Координаты.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ – *двоякопериодическая функция*, мероморфная в конечной плоскости комплексного переменного z. Э. ф. обладают следующими основными свойствами.

Не существует целых Э. ф., кроме констант (теорема Лиувилля).

Пусть $2\omega_1$, $2\omega_3$ – примитивные периоды Э. ф. $f(z)$, $\operatorname{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$. Сумма вычетов всех полюсов $f(z)$ в ее параллелограмме периодов

$$\Delta = \{z = 2t\omega_1 + 2\tau\omega_3;\ 0 \leqslant t < 1,\ 0 \leqslant \tau < 1\}$$

равна нулю.

Пусть r – число полюсов (с учетом их кратности) Э. ф. $f(z)$ в параллелограмме периодов Δ. Тогда $f(z)$ принимает в Δ каждое конечное значение с учетом кратности в точности r раз. Число r называется порядком Э. ф. Не существует Э. ф., порядок к-рых меньше 2.

Если a_i и b_i, $i = 1, \dots, r$, – все нули и полюсы Э. ф. $f(z)$ в ее параллелограмме периодов Δ с учетом их кратности, то сумма

$$\sum_{i=1}^{r} (a_i - b_i)$$

сравнима с нулем по модулю периодов, то есть

$$\sum_{i=1}^{r} (a_i - b_i) = 2m_1\omega_1 + 2m_3\omega_3,$$

где m_1, m_3 – целые числа.

Все Э. ф. с фиксированными примитивными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ образуют алгебраич. поле Э. ф. с двумя образующими. В качестве этих образующих можно взять, напр., функцию Вейерштрасса $\wp$ и ее производную (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*).

Производная Э. ф. является, в свою очередь, Э. ф. того же порядка с теми же периодами. Каждая Э. ф. удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка.

Каждая Э. ф. $f(z)$ допускает алгебраическую теорему сложения, то есть значения $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_1 + z_2)$ связаны неприводимым алгебраич. уравнением с постоянными коэффициентами. Обратно, имеет место теорема Вейерштрасса: всякая аналитич. функция $f(z)$, допускающая алгебраич. теорему сложения, либо является рациональной функцией от z или от e^z, либо есть Э. ф.

Иногда применяется более общая терминология, связанная с теорией *тета-функций*. Э. ф. III рода называется всякая мероморфная функция $f(z)$, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$f(z + 2\omega_i) = \exp[a_i(z + \omega_i) + b_i] f(z),\ i = 1, 3,$$

где a_i, b_i – нек-рые постоянные. Если $a_1 = a_3 = 0$, то $f(z)$ называется Э. ф. II рода. Если $a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0$, то $f(z)$ называется Э. ф. I рода, или Э. ф. в собственном смысле. По этой терминологии тета-функции Якоби (см. *Якоби эллиптические функции*) и сигма-функции Вейерштрасса (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*) суть Э. ф. III рода.

Изучению Э. ф. предшествовало накопление знаний об *эллиптических интегралах* в работах ученых конца 17 – начала 19 вв. Основоположниками теории Э. ф. являются А. Лежандр (A. Legendre), Н. Абель (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi). Они указали на связь Э. ф. с обращением эллиптич. интегралов. Развитое К. Якоби построение Э. ф. на основе тета-функций имеет основное значение для приложений Э. ф. Теоретически более простое построение поля Э. ф., при к-ром в качестве образующих берутся функция $\wp$ и ее производная, было дано К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) в 70-х гг. 19 в.

При развитии теории Э. ф. одной из основных является проблема преобразования Э. ф. и связанных с ними величин при переходе от примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ к другим примитивным периодам $2\hat{\omega}_1$, $2\hat{\omega}_3$, связанным соотношениями

$$\hat{\omega}_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3,\ \hat{\omega}_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3,$$

где α, β, γ, δ – целые числа такие, что $\alpha\delta - \beta\gamma = n$, n – натуральное число, называемое порядком преобразования. Площадь параллелограмма периодов $2\hat{\omega}_1$, $2\hat{\omega}_3$ в n раз больше площади параллелограмма периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$. При $n = 1$ получаются преобразования модулярной группы, откуда возникла связанная с Э. ф. теория *модулярных функций*.

Э. ф. можно трактовать как мероморфные функции, инвариантные относительно преобразований группы сдвигов

$$\{z \to z + 2n\omega_1 + 2m\omega_3;\ n, m \in \mathbb{Z}\}$$

комплексной плоскости. Обобщение этого подхода привело к рассмотрению *автоморфных функций*, инвариантных относительно *дробно-линейных отображений*. Э. ф. и модулярные функции суть частные случаи автоморфных функций.

Обращение эллиптич. интегралов сразу же привело к *Якоби проблеме обращения*, более общих *абелевых интегралов*. На этом пути получаются *абелевы функции* – обобщение Э. ф. на случай нескольких комплексных переменных.

Э. ф. и эллиптич. интегралы находят многочисленные применения (как специальные функции) во многих разделах анализа, а также в механике, электродинамике и других прикладных областях.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ – см. *Координаты.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ – интеграл от *алгебраической функции* I рода, то есть интеграл вида

$$\int_{z_0}^{z_1} R(z, w)\, dz, \qquad (1)$$

где $R(z, w)$ – рациональная функция от переменных z и w, связанных алгебраическим уравнением

$$w^2 = f(z) \equiv a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4, \qquad (2)$$

в котором $f(z)$ – многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней. При этом обычно подразумевается, что интеграл (1) нельзя выразить через одни только элементарные функции. В том случае, когда такое выражение возможно, интеграл (1) называется псевдоэллиптическим интегралом.

Название Э. и. связано с тем, что впервые они появились при спрямлении дуги эллипса и других кривых 2-го порядка в работах конца 17 – начала 18 вв. Я. Бернулли (J. Ber-

noulli), И. Бернулли (J. Bernoulli), Дж. К. Фаньяно деи Тоски (G. C. Fagnano dei Toschi), Л. Эйлер (L. Euler) заложили основы теории Э. и. и *эллиптических функций*, возникающих при обращении Э. и.

Любой Э. и. можно выразить в виде суммы элементарных функций и линейной комбинации канонических Э. и. I, II и III рода. Последние записываются, напр., следующим образом:

$$I_1=\int\frac{dz}{w},\quad I_2=\int\frac{z\,dz}{w},\quad I_3=\int\frac{dz}{(z-c)w},$$

где c – параметр Э. и. III рода.

Подвергая переменное z нек-рым преобразованиям, можно привести функцию w и основные Э. и. к нормальным формам.

В нормальной форме Вейерштрасса выполняется соотношение

$$w^2=4z^3-g_2z-g_3,$$

и интеграл

$$u=-\int_z^\infty\frac{dz}{w}$$

имеет периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$. Обращение этого Э. и. дает эллиптич. функцию Вейерштрасса $\wp(z)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ и инвариантами g_2, g_3 (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*). Вычисление периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ по заданным инвариантам производится при помощи *модулярной функции* $J(\tau)$. Если в нормальном интеграле II рода

$$\int\frac{z\,dz}{w}$$

принять нормальный интеграл I рода u в качестве переменной интегрирования, то при надлежащем выборе постоянной интегрирования будет выполняться равенство

$$\int\frac{z\,dz}{w}=-\zeta(u),$$

где $\zeta(u)$ – дзета-функция Вейерштрасса. При этом периоды нормального интеграла II рода равны $-2\eta_1=-2\zeta(\omega_1)$, $-2\eta_3=-2\zeta(\omega_3)$. Нормальный интеграл III рода по Вейерштрассу имеет вид:

$$I(z,w;z_0,w_0)=\frac12\int\frac{(w+w_0)\,dz}{(z-z_0)w}=\log\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)\sigma(u_0)}+u\frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)},$$

где $\sigma(u)$ – сигма-функция Вейерштрасса, $z_0=\wp(u_0)$, $w_0=\wp'(u_0)$, $u_0\not\equiv0(\mathrm{mod}\,(2\omega_1,\ 2\omega_3))$. При этом справедливо правило перестановки:

$$I(z,w;z_0,w_0)-I(z_0,w_0;z,w)=$$
$$=\frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)}u-\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}u_0+(2n+1)\pi i,$$

где n – целое число. Периоды нормального интеграла III рода имеют вид:

$$-u_0\eta_1+\zeta(u_0)\,\omega_1+2n_1\pi i,$$
$$-u_0\eta_3+\zeta(u_0)\,\omega_3+2n_3\pi i,$$

где n_1, n_3 – целые, $2\pi i$ – логарифмический период.

В приложениях чаще встречается нормальная форма Лежандра. При этом

$$w^2=(1-z^2)(1-k^2z^2),$$

где k называется модулем Э. и., k^2 – иногда называемый лежандровым модулем, $k'=\sqrt{1-k^2}$ – дополнительным модулем. Чаще всего имеет место нормальный случай, когда $0<k<1$, а $z=x=\sin t$ – действительное переменное. Э. и. I рода в нормальной форме Лежандра имеет вид:

$$u=\int_0^z\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^\varphi\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2t}}=F(\varphi,k);$$

он называется также неполным Э. и. I рода; $\varphi=\mathrm{am}\,u$ называется амплитудой Э. и. I рода. Амплитуда есть бесконечнозначная функция от u. Обращение нормального интеграла I рода приводит к эллиптич. функции Якоби $z=\mathrm{sn}\,u$ (см. *Якоби эллиптические функции*).

Нормальный интеграл II рода в нормальной форме Лежандра имеет вид:

$$\int_0^z\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2t}\,dt=E(\varphi,k)=E(u);$$

он называется неполным Э. и. II рода.

Интегралы

$$F\left(\frac\pi2,k\right)=K(k)=K,$$
$$F\left(\frac\pi2,k'\right)=K'(k)=K',$$
$$E\left(\frac\pi2,k\right)=E(k)=E,$$
$$E\left(\frac\pi2,k'\right)=E'(k)=E'$$

называются полными Э. и. соответственно I и II рода. Лежандровы интегралы I рода имеют периоды $4K$ и $2iK'$, II рода – периоды $4E$ и $2i(K'-E')$.

Нормальный интеграл III рода в нормальной форме Лежандра имеет вид:

$$\int_0^z\frac{dx}{(1-n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^\varphi\frac{dt}{(1-n^2\sin^2t)\sqrt{1-k^2\sin^2t}}=$$
$$=\Pi(\varphi;n^2,k)=\Pi(u;n^2),$$

где n^2 – параметр, чаще всего $-\infty<n^2<\infty$. При $-\infty<u^2<0$ или $k^2<u^2<1$ он называется циркулярным интегралом, а при $0<n^2<k^2$ или $1<n^2$ – гиперболическим интегралом.

Нормальный интеграл III рода по Якоби определяется несколько иначе:

$$\Pi_J(u;a)=k^2\mathrm{sn}\,a\cdot\mathrm{cn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,a\int_0^u\frac{\mathrm{sn}^2u\,du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2a},$$

где $n^2=k^2\mathrm{sn}^2\,a$. Связь между интегралами III рода Якоби и Лежандра выражается формулой

$$\Pi(u;n^2)=u+\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}\Pi_J(u;a);$$

циркулярный характер соответствует мнимым a, гиперболический – действительным a.

Наряду с эллиптич. функциями, Э. и. находят многочисленные и важные применения в различных вопросах анализа и геометрии, физики, в частности механики, астрономии и геодезии. Составлены таблицы Э. и., подробные руководства по теории Э. и. и эллиптич. функций, а также сводки формул.

Лит.: [1] Беляков В. М., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, т. 1–2, М., 1962–63; [2] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Дифференциальное уравнение* с частными производными второго порядка.

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕМПЕРАТУРА – см. *Температура.*

ЭМПИРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ – см. *Распределение.*

ЭНДОМОРФИЗМ пространства с мерой – измеримое и сохраняющее меру отображение пространства с мерой на себя. Другими словами, отображение $T:\Omega\to\Omega$ есть Э. пространство с мерой $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, если:

1) $T\Omega=\Omega$;

2) $T^{-1}A\in\mathcal{F}$, $\mathsf{P}(T^{-1}A)=\mathsf{P}(A)$ для любого $A\in\mathcal{F}$. Замена условия 1) условием $T\Omega\in\mathcal{F}$ приводит к понятию эндо-

морфизма по модулю нуль (эндоморфизма mod 0); его можно превратить в Э., выбросив из пространства подходящее множество нулевой меры. Примером Э. вероятностного пространства служит сдвиг влево в пространстве реализаций стационарной в узком смысле случайной последовательности X_n, $n \geqslant 0$. *Б. М. Гуревич.*

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЗОНА – см. *Блоха закон дисперсии.*

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЩЕЛЬ – см. *БКШ–Боголюбова уравнение.*

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ – см. *Сингулярности пространства-времени.*

ЭНЕРГИИ ИМПУЛЬСА ТЕНЗОР – см. *Нетер теорема.*

ЭНЕРГИИ ИНТЕГРАЛ – см. *Динамическая система.*

ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЕ – эволюционное уравнение для средней плотности кинетической энергии турбулентного течения $E = (1/2)\rho\langle u'_\alpha u'_\alpha\rangle$ (здесь ρ – плотность, u'_i – флуктуации скорости). Для несжимаемой жидкости Э. т. у. имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E\langle u_\alpha\rangle + (1/2)\rho\left\langle u'_\beta u'_\beta u'_\alpha\right\rangle + \langle p' u'_\alpha\rangle - \left\langle u'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}\right\rangle\right) =$$

$$= \rho\langle u'_\alpha X'_\alpha\rangle - \rho\langle\varepsilon\rangle - \rho\left\langle u'_\alpha u'_\beta\right\rangle \frac{\partial\langle u_\alpha\rangle}{\partial x_\beta},$$

где p – давление, σ_{ij} – тензор вязких напряжений, ρX_i – плотность внешних сил, $\rho\langle\varepsilon\rangle$ – средняя удельная вязкая диссипация энергии турбулентности.

Э. т. у. в дополнение к уравнениям Рейнольдса впервые предложено А. Н. Колмогоровым [1].

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Известия АН СССР. Сер. физическая», 1942, т. 6, № 1–2, с. 56–8 (Избранные труды. Математика и механика, М., 1985, с. 294–96); [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1, М., 1965. *В. П. Красицкий.*

ЭНЕРГИЯ – общая количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи. Э. не возникает из ничего и не исчезает, она может только переходить из одной формы в другую.

В соответствии с различными формами движения материи рассматривают разные формы Э.: механическую, внутреннюю, электромагнитную, химическую, ядерную и др. Это деление до известной степени условно. Так, химич. Э. складывается из кинетич. Э. движения электронов и электрич. Э. взаимодействия электронов друг с другом и с атомными ядрами. Внутренняя Э. равна сумме кинетич. Э. хаотич. движения молекул относительно центра масс тел и потенциальная Э. взаимодействия молекул друг с другом. Э. системы однозначно зависит от параметров, характеризующих состояние системы. В случае непрерывной среды или поля вводятся понятия плотности энергии, то есть Э. в единице объема, и плотности потока энергии, равной произведению плотности Э. на скорость ее перемещения.

Теория относительности показала, что Э. тела $\mathscr{E}$ неразрывно связана с его массой m соотношением

$$\mathscr{E} = mc^2.$$

Любое тело обладает Э.; если масса покоящегося тела m_0, то его Э. покоя

$$\mathscr{E}_0 = m_0 c^2;$$

эта Э. может переходить в другие виды Э. при превращениях частиц (распадах, ядерных реакциях и т. п.).

Согласно классич. физике, Э. любой системы меняется непрерывно и может принимать любые значения. Квантовая теория утверждает, что Э. микрочастиц, движение к-рых происходит в огранич. объеме пространства (напр., электронов в атоме), принимает дискретный ряд значений. Так, атомы испускают электромагнитную Э. в виде дискретных порций – световых квантов, или фотонов.

Лит.: [1] Майер Ю. Р., Закон сохранения и превращения энергии. Четыре исследования. 1841–1851, М.–Л., 1933; [2] Гельмгольц Г., О сохранении силы, пер. с нем., 2 изд., М.– Л., 1934; [3] Планк М., Принцип сохранения энергии, пер. с нем., М.– Л., 1938; [4] Лауэ М., История физики, пер. с нем., М., 1956; [5] Вигнер Е., Этюды о симметрии, пер. с англ., М., 1971. *Г. Я. Мякишев.*

ЭНЕРГИЯ покоя – см. *Релятивистская механика.*

ЭНЕРГИЯ системы – см. *Статистический ансамбль.*

ЭНЕРГОДОМИНАНТНОСТИ УСЛОВИЕ – см. *Горизонтов топология.*

ЭНСТРОФИЯ – величина Ω, равная половине среднего квадрата вихря скорости $\boldsymbol{v}$:

$$\Omega = \frac{1}{2}|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}|^2.$$

Э. наряду с энергией является адиабатич. интегральным инвариантом в двумерной турбулентности, благодаря чему создается каскад Э. в малые масштабы по спектральному «закону минус трех», а энергии – в большие масштабы по спектральному «закону пяти третей» (см. [1]). В трехмерной турбулентности при сохраняемости энергии Э. возрастает за счет эффекта растяжения вихревых нитей. При этом энергия передается только в малые масштабы; в инерционном интервале масштабов выполняется закон Колмогорова – Обухова пяти третей (см. [2]).

См. также *Геофизическая турбулентность.*

Лит.: [1] Kraichnan R. H., «Phys. Fluids», 1967, v. 10, № 7, p. 1417–23; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967. *А. П. Мирабель.*

ЭНТАЛЬПИЯ – *термодинамический потенциал*, однозначная функция состояния термодинамической системы при условии, что в качестве независимых термодинамических параметров выбраны энтропия S и давление p. Э. связана с внутренней энергией U соотношением

$$H = U + pV,$$

где V – объем системы. При изобарных процессах изменение Э. равно поглощенному системой количеству теплоты $(\delta Q)_p$:

$$(dH)_p = (\delta Q)_p = C_p dT,$$

поэтому Э. называют тепловой функцией, или теплосодержанием. Э. минимальна в состоянии термодинамич. равновесия (при постоянных p и S). При адиабатно-изобарных процессах в сложной системе убыль Э. равна работе немеханич. сил. *А. В. Солдатов.*

ЭНТРОПИИ ЗАКОН ВОЗРАСТАНИЯ – фундаментальная гипотеза неравновесной термодинамики: в ходе спонтанной эволюции изолированной системы *энтропия* может лишь возрастать с течением времени в результате необратимых процессов, идущих в системе. Возрастание прекращается только тогда, когда система приходит в равновесное состояние; при этом энтропия достигает максимума. По существу, Э. з. в. есть следствие второго начала термодинамики (см. *Термодинамики законы*). Э. з. в. может быть доказан для нек-рых кинетич. уравнений (уравнения Больцмана и Ландау). Часто Э. з. в. называют H-теоремой Больцмана.

Лит.: [1] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 2, М., 1978; [2] Зубарев Д. Н., Неравновесная статистическая термодинамика, М., 1971. *Д. П. Санкович.*

ЭНТРОПИИ ПРОИЗВОДСТВО – см. *Энтропия.*

ЭНТРОПИЙНАЯ ВОЛНА – см. *Магнитогидродинамические волны.*

ЭНТРОПИЙНОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ – см. *Неопределенностей соотношение.*

ЭНТРОПИЯ – теоретико-информационная мера степени неопределенности случайной величины. Если $\xi \in (\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ – дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, \ldots, x_n$ с распределением вероятностей $p_1, \ldots, p_n$ (где $p_i = \mathsf{P}\{\xi = x_i\}$), то энтропия определяется выражением

$$H = H(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log(1/p_i)$$

(считается, что $0 \cdot \log 0 = 0$). *М. А. Сташенко.*

ЭНТРОПИЯ в термодинамике – понятие, впервые введенное для определения меры необратимого рассеяния энергии. В статистич. физике Э. служит мерой вероятности осуществления какого-либо макроскопич. состояния, в теории информации – мерой неопределенности какого-либо опыта (испытания), к-рый может иметь различные исходы. Эти трактовки Э. имеют глубокую внутреннюю связь. Напр., на основе представлений об информационной Э. можно вывести все важнейшие положения статистич. физики.

Э. была введена Р. Клаузиусом (R. Clausius, 1865) на основе второго начала термодинамики, к-рое можно сформулировать математически в виде неравенства Клаузиуса:

$$\oint \delta Q/T \geqslant 0.$$

Интеграл берется по замкнутому циклич. процессу, при к-ром система получает (или у нее отбирают) малые количества теплоты δQ при соответствующих значениях абсолютной температуры T. Знак равенства относится к обратимым процессам (равенство Клаузиуса). Из равенства Клаузиуса следует, что для обратимого процесса

$$dS = \delta Q/T \qquad (1)$$

есть полный дифференциал функции состояния S, называемый энтропией (дифференциальное определение Э.). Разность Э. системы в двух произвольных состояниях A и B (заданных, напр., значениями температур и объемов) равна

$$S_B - S_A = \int_A^B \delta Q/T \qquad (2)$$

(интегральное определение Э.). Интегрирование здесь ведется вдоль пути любого квазистатич. обратимого процесса, связывающего состояния A и B. Таким образом, из второго начала термодинамики следует, что существует однозначная функция состояния S, к-рая при обратимых адиабатич. процессах ($\delta Q = 0$) остается постоянной. Из неравенства Клаузиуса следует, что при необратимых процессах

$$S_B - S_A > \int_A^B \delta Q/T,$$

поэтому в адиабатически изолированных системах при необратимых процессах Э. может только возрастать (*энтропии закон возрастания*).

Согласно первому началу термодинамики

$$\delta Q = dU + \sum_i A_i da_i,$$

то есть сообщаемое системе количество теплоты равно сумме приращения внутренней энергии dU и совершаемой системой элементарной работы, где a_i – внешние параметры, A_i – сопряженные им внутренние параметры. В случае, когда единственным внешним параметром является объем системы V, элементарная работа равна pdV, где p – давление. С учетом первого начала термодинамики дифференциальное определение Э. принимает вид:

$$dS = T^{-1}\left(dU + \sum_i A_i da_i\right),$$

откуда следует, что Э. представляет собой термодинамич. потенциал при выборе в качестве независимых переменных внутренней энергии U и внешних параметров a_i. Частные производные Э.:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{\ldots a_i \ldots} \qquad (3)$$

и

$$A_i = T\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)_U \qquad (4)$$

определяют уравнения состояния системы. Уравнение (3) определяет абсолютную шкалу температур.

Формула (2) определяет Э. лишь с точностью до аддитивной постоянной (то есть оставляет начало отсчета Э. произвольным). Абсолютное значение Э. можно установить с помощью третьего начала термодинамики, согласно к-рому принимается $S = 0$ при $T = 0$.

Э. в неравновесной термодинамике может быть определена для таких неравновесных состояний, когда отклонения от термодинамич. равновесия невелики и можно ввести представление о локальном термодинамич. равновесии в малых, но еще макроскопич. объемах. По определению, Э. неравновесной системы равна сумме Э. ее частей, находящихся в локальном равновесии. Термодинамика неравновесных процессов позволяет более детально исследовать процесс возрастания Э. и вычислить количество Э., образующееся в единице объема в единицу времени вследствие отклонения от термодинамич. равновесия – производство энтропии. Для пространственно неоднородных неравновесных систем второе начало термодинамики может быть записано в виде уравнения баланса для плотности энтропии $S(x, t)$:

$$\partial S(x, t)/\partial t = -\operatorname{div} \boldsymbol{J}_S(x, t) + \sigma(\boldsymbol{x}, t), \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{x}$ – радиус-вектор физически бесконечно малого элемента среды, $\boldsymbol{J}_S(x, t)$ – вектор потока Э., $\sigma(\boldsymbol{x}, t) \geqslant 0$ – локальное производство Э. Полное производство Э. равно интегралу от $\sigma(\boldsymbol{x}, t)$ по объему системы. Если термодинамич. силы $X_i(\boldsymbol{x}, t)$ (градиенты температуры, химич. потенциалов компонентов, массовой скорости и т. д.) создают в системе сопряженные им потоки $J_i(\boldsymbol{x}, t)$ (теплоты, вещества, импульса и др.), то локальное производство Э. $\sigma(\boldsymbol{x}, t)$ в такой неравновесной системе равно

$$\sigma = \sum_i X_i J_i.$$

Если величины X_i, J_i – векторы или тензоры, то в выражении для σ подразумевается их полная свертка. Потоки J_i связаны с термодинамич. силами X_k линейными соотношениями

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k,$$

где L_{ik} – онсагеровские кинетич. коэффициенты. Следовательно, локальное производство Э.

$$\sigma = \sum_{i,k} X_i L_{ik} X_k$$

выражается квадратичной формой от термодинамич. сил.

Э. в равновесной статистической физике зависит от выбора статистич. ансамбля. Для микроканонич. ансамбля Гиббса (см. *Гиббса распределения*), описывающего равновесное состояние изолированных систем, Э. выражается через статистич. вес состояния $W(\mathscr{E}, N, V)$:

$$S = k \ln W(\mathscr{E}, N, V), \qquad (6)$$

где k – постоянная Больцмана, $W(\mathscr{E}, N, V)$ – число квантовомеханич. состояний, энергия к-рых лежит в узком интервале $\Delta\mathscr{E}$ вблизи значения энергии $\mathscr{E}$ системы из N частиц в объеме V. В классич. статистич. физике W – величина безразмерного объема в фазовом пространстве системы при заданных $\mathscr{E}$, $\Delta\mathscr{E}$, N, V:

$$W(\mathscr{E}, N, V) = \int d\Gamma_N, \qquad (7)$$

где

$$d\Gamma_N = dpdq/N!\hbar^{3N},$$

$dpdq$ – элемент объема в $6N$-мерном фазовом пространстве системы из N частиц, $\hbar$ – постоянная Планка. Интегрирование ведется в пределах $\mathscr{E} \leqslant H_N(p, q) \leqslant \mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}$ ($H_N(p, q)$ – функция Гамильтона системы из N частиц). Для канонич. ансамбля Гиббса, описывающего равновесное состояние систем в термостате, Э. выражается через канонич. распределение Гиббса $f(p, q)$:

$$S = -k \int f(p, q) \ln f(p, q)\, d\Gamma_N. \qquad (8)$$

Аналогичным образом определяется Э. для систем с переменным числом частиц в термостате через большое кано-

нич. распределение Гиббса $f_N(p, q)$:

$$S = -k\sum_{N\geqslant 0}\int f_N(p,q)\ln f_N(p,q)\,d\Gamma_N. \qquad (9)$$

В квантовой статистике Э. для всех равновесных ансамблей выражается через статистич. оператор (или матрицу плотности) $\hat{\rho}$:

$$S = -k\,\mathrm{Sp}(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}). \qquad (10)$$

Символ $\mathrm{Sp}\,\hat{A}$ означает сумму диагональных матричных элементов оператора $\hat{A}$; суммирование ведется по волновым функциям состояний допустимой симметрии относительно перестановки частиц.

Вдали от областей сосуществования фаз и критич. точек значения Э., вычисленные с помощью различных ансамблей Гиббса, совпадают с термодинамич. Э. в пределе $N\to\infty$, $V\to\infty$ при $N/V=\mathrm{const}$ (см. *Термодинамический предел*).

Э. в статистич. физике связана с информационной Э., к-рая служит мерой неопределенности сообщений (сообщения описываются множеством величин x_1, x_2, ..., x_n и вероятностей P_1, P_2, ..., P_n их появления). Для дискретного статистич. распределения вероятностей P_k информационной энтропией (с точностью до постоянного множителя) называют величину

$$S_u = \sum_{k=1}^{n} P_k \ln P_k \quad \text{при} \quad \sum_{k=1}^{n} P_k = 1; \qquad (11)$$

$S_u=0$, если какое-либо из P_k равно 1, а остальные – нулю, то есть информация достоверна, неопределенность отсутствует. Э. принимает наибольшее значение, когда все P_k одинаковы (неопределенность в информации максимальна). Непрерывной случайной величине X с функцией распределения $f(x)$ соответствует информационная энтропия:

$$S_u = -\int f(x)\ln f(x)\,dx \quad \text{при} \quad \int f(x)\,dx = 1. \qquad (12)$$

Информационная Э., как и термодинамическая, обладает свойством аддитивности (Э. нескольких сообщений равна сумме Э. отдельных сообщений). Из вероятностной трактовки Э. в статистич. физике выводятся основные равновесные распределения: канонич. распределение Гиббса, к-рое соответствует максимальному значению информационной Э. при заданной средней энергии, и большое канонич. распределение Гиббса – при заданных средней энергии и среднем числе частиц в системе (теорема Гиббса об экстремальных свойствах распределений по фазам).

Э. в неравновесной статистической физике зависит от способа описания неравновесного состояния системы. Напр., неравновесное гидродинамич. состояние однокомпонентных газов и жидкостей определяется неоднородными распределениями средних значений плотностей энергии $\langle\hat{H}(\boldsymbol{x})\rangle^t$, числа частиц $\langle\hat{n}(\boldsymbol{x})\rangle^t$ и импульса $\langle\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\rangle^t$, то есть плотностей интегралов движения. Динамич. переменные $\hat{H}(\boldsymbol{x})$, $\hat{n}(\boldsymbol{x})$, $\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$ в классич. случае являются функциями координат и импульсов частиц, а в квантовом случае – соответствующими операторами. Операция усреднения $\langle\ldots\rangle^t$ выполняется с неравновесной функцией распределения $f(\boldsymbol{p}, q, t)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля

$$\partial f/\partial t = \{H, f\},$$

H – гамильтониан системы, $\{H, f\}$ – скобка Пуассона. В квантовом случае в уравнении Лиувилля надо заменить f на неравновесный статистич. оператор $\hat{\rho}(t)$, а классич. скобку Пуассона – на квантовую.

Э. в неравновесной статистич. физике пропорциональна ($S=kS_u$) максимуму информационной Э. $S_u=-\langle\ln f\rangle$ при заданных средних значениях динамич. переменных, выбранных для описания неравновесного состояния. Напр., если неравновесное состояние характеризуется средними значениями $\langle\hat{H}(\boldsymbol{x})\rangle^t$, $\langle\hat{n}(\boldsymbol{x})\rangle^t$, $\langle\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\rangle^t$, то максимуму информационной Э. соответствует локальное равновесное распределение

$$f_l(t) = \exp\left\{-\frac{1}{k}\left(\Phi(t)+\int\beta(\boldsymbol{x},t)(\hat{H}'(\boldsymbol{x})-\mu(\boldsymbol{x},t)\hat{n}(\boldsymbol{x}))\,d\boldsymbol{x}\right)\right\}, \qquad (13)$$

где

$$\hat{H}'(\boldsymbol{x}) = \hat{H}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\,\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) + \frac{m}{2}v^2(\boldsymbol{x},t)\,\hat{n}(\boldsymbol{x})$$

– плотность энергии в сопровождающей системе координат, движущейся с массовой скоростью $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$. Функционал Масье – Планка $\Phi(t)$ определяется из условия нормировки f_l и зависит от $\beta(\boldsymbol{x}, t)$, $\beta(\boldsymbol{x}, t)\mu(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, где $\beta(\boldsymbol{x}, t)$ – обратная локальная температура, $\mu(\boldsymbol{x}, t)$ – локальный химич. потенциал. В этом случае неравновесная Э.

$$S(t) = -k\int f_l(p,q,t)\ln f_l(p,q,t)\,d\Gamma_N$$

является функционалом

$$S(t) = \Phi(t) + \int\beta(\boldsymbol{x},t)\left(\langle\hat{H}'(\boldsymbol{x})\rangle_l^t - \mu(\boldsymbol{x},t)\langle\hat{n}(\boldsymbol{x})\rangle_l^t\right)d\boldsymbol{x}. \qquad (14)$$

Операция $\langle\ldots\rangle_l^t$ означает усреднение по распределению (13), причем

$$\left.\begin{aligned}\delta S(t)/\delta\langle\hat{H}'(\boldsymbol{x})\rangle_l^t &= \beta(\boldsymbol{x},t),\\ \delta S(t)/\delta\langle\hat{n}(\boldsymbol{x})\rangle_l^t &= -\beta(\boldsymbol{x},t)\mu(\boldsymbol{x},t).\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Основная идея неравновесной термодинамики состоит в том, что термодинамич. равенства должны выполняться для элемента среды, движущегося с массовой скоростью. Из (15) следует, что для этого необходимо потребовать, чтобы

$$\left.\begin{aligned}\langle\hat{H}(\boldsymbol{x})\rangle^t &= \langle\hat{H}(\boldsymbol{x})\rangle_l^t,\\ \langle\hat{n}(\boldsymbol{x})\rangle^t &= \langle\hat{n}(\boldsymbol{x})\rangle_l^t,\\ \langle\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\rangle^t &= \langle\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\rangle_l^t.\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(16)}$$

Равенства (16) являются условиями самосогласованного выбора параметров $\beta(\boldsymbol{x}, t)$, $\mu(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и определяют их зависимость от неравновесных средних значений $\langle\hat{H}(\boldsymbol{x})\rangle^t$, $\langle\hat{n}(\boldsymbol{x})\rangle^t$, $\langle\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\rangle^t$.

Локально равновесное распределение служит вспомогательным распределением для определения понятия Э. неравновесного состояния, но не описывает необратимых процессов переноса. Потоки энергии и импульса, вычисленные с помощью $f_l(t)$, соответствуют потокам этих величин в идеальной гидродинамике. Неравновесная функция распределения может быть получена как формальное решение уравнения Лиувилля с начальным условием локального равновесия в нек-рый момент времени t_0:

$$f(t;\,t_0) = \exp[-iL(t-t_0)]\,f_l(t_0).$$

Оператор Лиувилля L определяется через скобки Пуассона $iLf=\{H, f\}$. Это решение зависит от начального состояния, к-рое реальная система должна «забывать» из-за корреляций между элементами среды. Можно считать, что пучок фазовых траекторий с различными t_0, $-\infty<t_0<t$, реализует ансамбль Гиббса для неравновесных состояний. Предполагая, что начальные состояния распределены с экспоненциальной вероятностью $T^{-1}\exp[-(t-t_0)/T]$ (гипотеза об априорных вероятностях), получают неравновесную функцию распределения

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{T}e^{-(t-t_0)/T}e^{-iL(t-t_0)}f_l(t_0)\,dt_0, \qquad (17)$$

$T^{-1}=\varepsilon\to+0$ после термодинамич. предельного перехода при вычислении средних. Функция распределения (17) удовлетворяет уравнению Лиувилля с малым источником

в правой части:

$$\partial f(t)/\partial t - \{H, f(t)\} = -\varepsilon(f(t) - f_l(t)), \qquad (18)$$

$\varepsilon \to +0$. Кроме того, предполагаются выполненными условия самосогласования (16).

С помощью функции распределения (17) можно усреднить уравнения движения для $\hat{H}(x)$, $\hat{p}(x)$:

$$\partial \hat{H}(x)/\partial t = \{\hat{H}(x), H\}, \partial \hat{p}(x)/\partial t = \{\hat{p}(x), H\}$$

и получить *теплопроводности уравнение* и *Навье – Стокса уравнение*, в к-рых коэффициенты теплопроводности и вязкости представлены в виде пространственно-временных корреляционных функций потоков энергии и импульса (*Грина – Кубо формулы*). Отсюда следует уравнение баланса (5) для плотности Э. и другие соотношения неравновесной термодинамики.

В неравновесной статистич. физике закон возрастания Э. тесно связан со свойством симметрии уравнения Лиувилля относительно обращения времени. Малый член $\sim \varepsilon \to +0$ в уравнении (18) нарушает эту симметрию, снимая вырождение, то есть отбирая запаздывающее решение уравнения Лиувилля. Такое решение приводит к $\sigma > 0$ в уравнении (5), то есть делает возможным возрастание Э. При этом существенно, что $\varepsilon \to +0$ после термодинамич. предельного перехода. Другое решение уравнения Лиувилля (с $\varepsilon \to -0$) приводит к убыванию Э. и должно быть отброшено как нефизическое.

Э. для других процессов, отличных от гидродинамических, может быть определена с помощью квазиравновесного состояния, к-рое соответствует максимуму информационной Э. при заданных средних значениях нек-рого набора динамич. переменных, характеризующих неравновесное состояние. В общем случае квазиравновесное состояние может сильно отличаться от локального равновесия.

Лит.: [1] Гиббс Дж., Термодинамика. Статистическая механика, [пер. с англ.], М., 1982; [2] Леонтович М. А., Введение в термодинамику. Статистическая физика, М., 1983; [3] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [4] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [5] де Гроот С., Мазур П., Неравновесная термодинамика, пер. с англ., М., 1964; [6] Зубарев Д. Н., Неравновесная статистическая термодинамика, М., 1971; [7] Ахиезер А. И., Пелетминский С. В., Методы статистической физики, М., 1977; [8] Зубарев Д. Н., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 15, М., 1980.

Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов.

ЭНТРОПИЯ динамической системы метрическая – числовая характеристика *динамической системы*, имеющая теоретико-информационное происхождение. Для эндоморфизма T вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ энтропия $h(T)$ определяется следующим образом. Пусть X – произвольная случайная величина с конечным числом значений, определенная на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, и $X_n(\omega) = X(T^n\omega)$, $\omega \in \Omega$, $n = 0, 1, \ldots$ При $n \to \infty$ отношение $H_n(X_0^{n-1})/n$, где $H_n(X_0^{n-1})$ – энтропия случайного вектора $X_0^{n-1} = (X_0, \ldots, X_{n-1})$, сходится к пределу $h(T, X)$, к-рый называется (в теории информации) скоростью создания энтропии в случайном процессе X_n, $n \geqslant 0$ (см. [3]), и совпадает с пределом при $n \to \infty$ с условной Э. случайной величины X при условии случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$. По определению,

$$h(T) = \sup_X h(T, X),$$

где верхняя грань берется по всем указанным X. Если в этом определении вместо случайных величин с конечным числом значений пользоваться случайными величинами с конечной Э. (и, следовательно, с не более чем счетным числом значений), то $h(T)$ не изменится.

Так как Э. любой случайной величины Y зависит лишь от порождаемого ею разбиения пространства Ω, то есть разбиения на множества вида $Y = \text{const}$, то удобно определять Э. непосредственно в терминах разбиений. При таком подходе (принятом в эргодич. теории) X заменяется на произвольное конечное разбиение α пространства Ω, а X_0^{n-1} – на разбиение $\alpha_T^n = \alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \ldots \vee T^{-n-1}\alpha$, элементы к-рого имеют вид $A_{i_0} T^{-1} A_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n+1} A_{i_{n-1}}$, где $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n-1}}$ – произвольные элементы разбиения α.

Понятие энтропии динамической системы было введено А. Н. Колмогоровым [1], к-рый определил ее несколько иначе, чем это сделано выше (приведенное определение принадлежит Я. Г. Синаю [2]). С появлением Э. возникло новое, энтропийное направление эргодич. теории, оказавшее глубокое воздействие на все ее разделы.

При вычислении Э. часто пользуются теоремой (см. [2]), согласно к-рой $h(T) = h(T, \alpha)$ для любого разбиения α, элементы к-рого вместе с элементами разбиений $T^{-n}\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$, порождают всю σ-алгебру $\mathcal{F}$ (α называется тогда односторонним образующим разбиением, или односторонней образующей, для T). В случае когда T – автоморфизм, то же самое имеет место и для двусторонних образующих, то есть для таких α, что $\mathcal{F}$ порождаются всеми T_α^n, $n \in \mathbb{Z}$. Существуют обобщения этих утверждений, связанные с заменой образующих на последовательности асимптотич. образующих (см. [4], [5]).

Если T – *Бернулли сдвиг* с дискретным пространством состояний $(Y, \mathcal{B}, \mu)$, то

$$h(T) = -\sum_i \mu(y_i) \ln \mu(y_i),$$

где y_i – атомы меры μ; для сдвига Бернулли с недискретным пространством состояний $h(T) = \infty$. Для *Маркова сдвига* с дискретным пространством состояний

$$h(T) = -\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} \ln p_{ij},$$

где $\{\pi_i\}$ – одномерное распределение, а p_{ij} – переходные вероятности соответствующей цепи Маркова. Для гладких динамич. систем Э. имеет наглядный геометрич. смысл: она характеризует среднюю скорость (в логарифмич. шкале) удаления друг от друга близких в начальный момент точек фазового пространства.

Общие свойства Э. динамической системы:

1) $h(T)$ принимает все значения от 0 до $+\infty$ включительно;

2) $h(T^k) = kh(T)$ для любого $k \geqslant 0$; если $\{T^t, t \geqslant 0\}$ – непрерывный полупоток, то $h(T^t) = th(T^1)$ для любого $t \geqslant 0$ (см. [7], [11]); если T – автоморфизм, то $h(T^{-1}) = h(T)$, следовательно, для непрерывного потока $h(T^t) = |t| h(T^1)$, $-\infty < t < \infty$, энтропией потока называется $h(T^1)$;

3) Э. прямого произведения динамич. систем равна сумме их Э.;

4) Э. гомоморфного образа динамич. системы (см. *Изоморфизм* динамических систем) не превосходит Э. самой системы; изоморфные системы имеют одинаковую Э.;

5) если T-инвариантная вероятностная мера P представлена в виде выпуклой комбинации

$$a\mathsf{P}_1 + (1-a)\mathsf{P}_2$$

T-инвариантных вероятностных мер P_1 и P_2, то $h(T) = ah_1 + (1-a)h_2$, где h_i – Э., вычисленная по мере P_i, $i = 1, 2$.

Имеется аксиоматич. определение Э. динамич. системы (см. [6]), а также обобщения этого понятия на динамич. системы с общим групповым временем (см. [7]) и на динамич. системы в пространстве с σ-конечной мерой (см. [8]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Доклады АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861–64; [2] Синай Я. Г., там же, 1959, т. 124, № 4, с. 768–71; [3] Пинскер М. С., Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов, М., 1960; [4] Рохлин В. А., «Доклады АН СССР», 1959, т. 124, № 5, с. 980–83; [5] Синай Я. Г., там же, 1959, т. 125, № 6, с. 1200–02; [6] Рохлин В. А., там же, 1963, т. 143, № 4, с. 779–81; [7] Conze J. P.,

«Z. Wahr. und verw. Geb.», 1972, Bd 25, № 1, S. 11–30; [8] Krengel U., там же, 1967, Bd 7, № 3, S. 161–81; [9] Рохлин В. А., «Успехи математич. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–56; [10] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [11] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [12] Мартин К., Ингленд Дж., Математическая теория энтропии, пер. с англ., М., 1980.

Б. М. Гуревич.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА в статистической физике – предположение, что средние по времени значения физич. величин, характеризующих систему, равны их средним статистическим. Предложена Л. Больцманом (L. Boltzmann, 1887) для обоснования статистич. физики.

В классич. статистич. физике равновесных систем Э. г. основана на предположении, что средние по времени от фазовых переменных (функций, зависящих от координат q и импульсов p всех частиц замкнутой и энергетически изолированной системы), взятые вдоль траектории движения системы в *фазовом пространстве*, равны средним статистическим по равномерному распределению фазовых точек в тонком (в пределе – бесконечно тонком) слое вблизи поверхности постоянной энергии. В квантовой статистич. физике Э. г. есть предположение, что все энергетич. состояния в тонком слое вблизи поверхности постоянной энергии равновероятны. Э. г. эквивалентна, таким образом, предположению, что замкнутая система (как классическая, так и квантовая) может быть описана микроканонич. *Гиббса распределением*. Напр., для классич. замкнутых систем из N частиц с *Гамильтона функцией* $H_N(p, q)$ в объеме V почти всегда существуют средние по времени от функции фазовых переменных $F(p(t), q(t))$:

$$\tilde{F} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(p(t), q(t))\,dt,$$

где эволюция $p(t)$, $q(t)$ во времени определяется из решения уравнений Гамильтона. Согласно Э. г.,

$$\tilde{F} = \langle F\rangle_{\text{м. к.}} = \int F(p, q) f_{\text{м. к.}}(p, q)\, d\Gamma_N,$$

где $d\Gamma_N = dpdq/N!h^{3N}$ – элемент фазового объема в безразмерных переменных; $f_{\text{м.к.}}(p, q)$ – микроканонич. распределение, имеющее вид:

$$f_{\text{м. к.}}(p, q) = \begin{cases} W(\mathscr{E}, N, V) & \text{при } \mathscr{E} \leqslant H_N(p, q) \leqslant \mathscr{E} + \Delta\mathscr{E}, \\ 0 & \text{вне этого слоя} \end{cases}$$

(интегрирование проводится по всем «микроскопическим» состояниям системы, энергия к-рых лежит в слое энергии шириной $\Delta\mathscr{E}$); $W(\mathscr{E}, N, V) = \int d\Gamma_N$ – *статистический вес*, связанный с *энтропией* S соотношением $S = k\ln W$.

Делались попытки обоснования Э. г. с помощью исследования свойств фазовых траекторий замкнутых изолированных механич. систем из большого числа частиц. Были доказаны *эргодические теоремы*, к-рые сводили Э. г. к предположению о специфич. свойстве фазового пространства (его метрич. неразложимости). Однако для обоснования статистич. физики эти теоремы не являются необходимыми, так как фазовые траектории чрезвычайно чувствительны к малым возмущениям. В частности, они очень чувствительны к малейшему нарушению изоляции или замкнутости системы. Аналогичным свойством чувствительности квантовых состояний к малым возмущениям обладают и квантовые системы.

Д. Н. Зубарев.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА – утверждение о существовании пределов временных средних от случайного процесса или о совпадении их с фазовыми.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ задан случайный процесс X_t, $t\in T$, с дискретным (то есть $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$) или непрерывным (то есть $T = [0, \infty)$) временем и со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathscr{A})$; $\mathscr{N}$ – наименьшая σ-алгебра, относительно к-рой измеримы величины X_t при всех $t\in T$.

Пусть множество траекторий процесса X_t, $t\in T$, замкнуто относительно сдвигов. Последнее, по определению, означает, что для всякого $\omega\in\Omega$ и для всякого $s\in T$ множество Ω содержит такой элемент ω_s^t, что $X_t(\omega_s^t) = X_{t+s}(\omega)$ для всех $t\in T$. Замкнутость множества траекторий относительно сдвигов позволяет связать со случайным процессом X_t, $t\in T$, семейство операторов сдвига θ_t, $t\in T$, действующих на $\mathscr{N}$-измеримые случайные величины X и события Γ по правилу:

$$\theta_t X(\omega) = X(\omega_t^+) \text{ и } \omega\in\theta_t\Gamma$$

тогда и только тогда, когда $\omega_t^+\in\Gamma$.

Если $T = [0, \infty)$, то процесс X_t, $t\in T$, предполагается измеримым в следующем смысле: отображение $(t, \omega)\to X_t(\omega)$ измеримо как отображение измеримого пространства $([0, \infty)\times\Omega, \mathscr{B}_+\times\mathscr{N}$ в измеримое пространство $(E, \mathscr{A})$ (здесь $\mathscr{B}_+$ – σ-алгебра борелевских подмножеств полуоси $[0, \infty)$). Такая измеримость процесса X_t, $t\in T$, обеспечивает измеримость по совокупности переменных t, ω сдвинутой величины $\theta_t X$.

Временные средние $\mathscr{N}$-измеримой случайной величины X суть нормированные суммы

$$S_t(X) = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1}\theta_k X,$$

если время дискретно, или интегралы

$$S_t(X) = \frac{1}{t}\int_0^t \theta_u X\, du,$$

если время непрерывно.

Фазовое среднее случайной величины X есть не что иное, как ее математич. ожидание $\mathsf{E}X$. Таким образом, Э. т. либо устанавливают существование (в каком-либо смысле) предела

$$S(X) = \lim_{t\to\infty} S_t(X),$$

либо формулируют условия, при к-рых

$$S(X) = \mathsf{E}X.$$

Исторически первым результатом такого рода является *Биркгофа – Хинчина эргодическая теорема*, к-рая утверждает, что если время дискретно, последовательность $X_0, X_1, \ldots$ стационарна и $\mathsf{E}|X| < \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} S_t(X) = \mathsf{F}(X|\mathfrak{I}) \text{ почти наверное,} \qquad (*)$$

где σ-алгебра $\mathfrak{I}$ содержит те и только те события $\Gamma\in\mathscr{N}$, для к-рых $\theta_t\Gamma = \Gamma$ при всех $t\geqslant 0$.

Если, кроме того, $\mathsf{E}|X|^p < \infty$ при нек-ром $p\geqslant 1$, то сходимость в (*) имеет место и в среднем порядка p.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае непрерывного времени. Вопрос о совпадении $S(X)$ с $\mathsf{E}X$ почти наверное в данном случае сводится к вопросу о тривиальности σ-алгебры $\mathfrak{I}$. Стационарные процессы с тривиальной σ-алгеброй $\mathfrak{I}$ называют еще эргодическими. Для эргодичности стационарного процесса достаточно, чтобы он обладал свойством *перемешивания*. Примерами эргодич. случайных процессов являются: последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин; гауссовский случайный процесс с непрерывной спектральной функцией; положительно возвратная цепь Маркова с конечным или счетным числом состояний.

Одна из наиболее общих Э. т. утверждает следующее. Пусть найдется такая $\mathscr{N}$-измеримая величина $\tau > 0$, что конечномерные распределения процессов X_t, $t\geqslant 0$, и $X_{\tau+t}$, $t\geqslant 0$, совпадают. Тогда, если

$$\mathsf{E}(\tau) < \infty \text{ и } \mathsf{E}\int_0^\tau \theta_t|X|\,dt < \infty,$$

то почти наверное

$$\lim_{t\to\infty} S_t(X) = \mathsf{E}\left(\int_0^\tau \theta_t X\, dt\,|\,\mathfrak{I}\right)\Big/\mathsf{E}(\tau|\mathfrak{I}).$$

Иногда Э. т. называют теоремы о существовании пределов вида

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\theta_t X, \quad \lim_{t\to\infty} S_t(X)/S_t(\eta)$$

или

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\theta_t X/\mathsf{E}\theta_t(\eta).$$

Существуют также Э. т. для случайных полей.

Лит.: [1] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] Шуренков В. М., Эргодические теоремы и смежные вопросы теории случайных процессов, Киев, 1981.

В. М. Шуренков.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ – раздел математики, возникший в 20–30-х гг. 20 в., хотя основные ее понятия – *эргодичность, перемешивание* – восходят к трудам Л. Больцмана (L. Boltzmann) и Дж. Гиббса (J. Gibbs), посвященным проблеме обоснования статистич. физики. Одной из первых общих теорем Э. т. стала *Биркгофа–Хинчина эргодическая теорема*, утверждающая существование почти наверное временных средних у однопараметрич. групп или полугрупп преобразований, сохраняющих какую-либо вероятностную меру (автоморфизмов, потоков или эндоморфизмов, полупотоков). Далее такие группы или полугруппы называются *динамическими системами*. Они служат основным объектом изучения в Э. т.

В теории вероятностей динамич. системы естественно возникают как группы сдвигов в пространстве реализаций стационарных в узком смысле случайных процессов. Динамич. системы появляются во многих проблемах теории дифференциальных уравнений, статистич. физики, механики, теории нелинейных колебаний, физике плазмы и др. Напр., в гамильтоновых системах с компактным многообразием постоянной энергии поток, состоящий из сдвигов вдоль траекторий такой системы, сохраняет микроканонич. распределение Лиувилля и является тем самым динамич. системой. В диссипативных системах механики, где фазовый объем под действием динамики уменьшается, в фазовых пространствах часто образуются инвариантные притягивающие множества, напр. стохастич. аттракторы, и свойства динамики определяют свойства сосредоточенных на них естественных сохраняющихся вероятностных мер. Считается, что в этих терминах может быть описано явление *турбулентности* в гидродинамике. Динамич. системы возникают во многих задачах теории чисел, в особенности в задачах, связанных с равномерным распределением. Так, теорема Вейля о том, что дробные доли $\{\mathscr{P}(n)\}$, где $\mathscr{P}(n)=a_0n^r+\ldots+a_{r-1}n+a_r$ и хотя бы один из коэффициентов $a_0, \ldots, a_{r-1}$ иррационален, равномерно распределены, может быть выведена как усиление эргодич. теоремы Биркгофа – Хинчина для специального сохраняющего меру преобразования r-мерного тора (см. [1]). Динамич. системы возникают в комбинаторике, теории представлений групп некоммутативных алгебр и др. (см. [1], [2]). При этом в этих областях появляются и группы сохраняющих меру преобразований, переводящие меры в эквивалентные в смысле абсолютной непрерывности меры.

Пусть $X_0(\omega)$ – произвольная случайная величина и $\{S^t\}$ – поток в пространстве Ω. Семейство случайных величин $X_t(\omega)=X_0(S^t\omega)$ образует стационарный в узком смысле случайный процесс. Если поток $\{S^t\}$ представляет собой группу сдвигов исходного стационарного процесса, то переход $\omega\to\{X_t(\omega)\}$ можно рассматривать как нелинейное преобразование этого процесса. Э. т. изучает свойства всех стационарных процессов, возникающих таким образом. Если X_0 такова, что наименьшая σ-алгебра, порожденная всеми случайными величинами X_t, $-\infty<t<\infty$, совпадает с σ-алгеброй всех измеримых множеств, то X_0 называется образующей, а сама динамич. система $\{S^t\}$ оказывается тем самым изоморфной группе сдвигов построенного стационарного процесса (см. *Изоморфизм* динамических систем).

В отличие от типичных задач теории вероятностей «случайность» динамич. системы состоит только в выборе начальной точки ω, после чего эволюция такой точки происходит чисто детерминированным образом. По этой причине в физич. литературе Э. т. часто называют теорией детерминированного хаоса.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ – измеримое пространство, $\{S^t\}$ – однопараметрич. группа или полугруппа преобразований пространства Ω. Ниже указаны свойства $\{S^t\}$, к-рые обычно рассматриваются как стохастические, сближающие динамич. системы со случайными процессами с теми или иными свойствами регулярности (в определенном смысле эти свойства последовательно усиливают друг друга).

1) Существование распределения вероятностей, инвариантного относительно группы $\{S^t\}$. Здесь распределение вероятностей P называется инвариантным относительно $\{S^t\}$, если для любого $C\in\mathscr{F}$ и любого t, $-\infty<t<\infty$, вероятность $\mathsf{P}(S^tC)=\mathsf{P}(C)$. Если Ω – компакт, $\mathscr{F}$ – его борелевская σ-алгебра, а $\{S^t\}$ – однопараметрич. группа гомеоморфизмов Ω, то существует хотя бы одно инвариантное распределение вероятностей P. Это вытекает из общей *Боголюбова – Крылова теоремы*; рассуждение, использованное при ее доказательстве, носит весьма общий характер и встречается во многих других вопросах, напр. при доказательстве существования хотя бы одного стационарного распределения у цепи Маркова с компактным фазовым пространством, в теории клеточных автоматов.

Инвариантные распределения вероятностей могут оказаться вырожденными, то есть сосредоточенными на одной или нескольких траекториях группы $\{S^t\}$. Для получения невырожденных распределений иногда используется следующий прием. Пусть для любого распределения вероятностей P через $(S^*)^t\mathsf{P}$ обозначен его сдвиг на время t, то есть

$$((S^*)^t\mathsf{P})(C)=\mathsf{P}(S^{-t}C),\ C\in\mathscr{F}.$$

Если

$$(S^*)^t\mathsf{P}\Rightarrow\mathsf{P}_0$$

в каком-либо естественном смысле, то P_0 будет инвариантным. Именно так строятся инвариантные распределения вероятностей в системах со стохастич. аттракторами и близких к ним.

2) Эргодичность. Пусть для группы $\{S^t\}$ уже выбрано инвариантное распределение вероятностей P_0. Эргодич. теорема Биркгофа – Хинчина устанавливает для любой $f\in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}_0)$ существование почти всюду пределов временных средних

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(S^t\omega)\,dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(S^{-1}\omega)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(S^t\omega)\,dt.$$

Эргодичность P_0 означает, что все эти пределы равны математич. ожиданию

$$\int f(\omega)\,d\mathsf{P}_0(\omega).$$

Во многих случаях либо эргодичность устанавливается достаточно просто, либо оказывается следствием более сильных стохастич. свойств.

3) Перемешивание. Пусть для динамич. системы $\{S^t\}$ установлено, что распределение вероятностей P_0 инвариантно и эргодично, и пусть распределение вероятностей Q_0 абсолютно непрерывно относительно P_0, $q_0(\omega)=\frac{d\mathsf{Q}_0}{d\mathsf{P}_0}$. Тогда $\mathsf{Q}_t=(S^*)^t\mathsf{Q}_0$ также абсолютно непрерывно относительно P_0 и его плотность $q_t(\omega)=q_0(S^t\omega)$. Система

$\{S^t\}$ перемешивающая (см. *Перемешивание*), если для любой ограниченной измеримой f предел

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega f(\omega)\,d\mathsf{Q}_t(\omega)=\lim_{t\to\infty}\int f(\omega)\,q_t(\omega)\,d\mathsf{P}_0(\omega)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int f(\omega)\,q_0(S^t\omega)\,d\mathsf{P}_0=\int f(\omega)\,d\mathsf{P}_0(\omega).$$

Распределение вероятностей Q_0 интерпретируется как неравновесное. Перемешивание означает, что всякое неравновесное распределение вероятностей сходится под действием динамики к равновесному P_0. Именно в таком виде оно было введено Дж. Гиббсом. Из перемешивания вытекает эргодичность. Эргодич. системы без перемешивания возникают в теории *динамических систем* с чисто точечным спектром.

4) Регулярность. В теории вероятностей большую роль играет закон нуль – единица Колмогорова. А. Н. Колмогоров предложил также (см. [3]) понятие *K-системы* как такой динамич. системы, в к-рой в определенном смысле выполняется закон нуль–единица. Родственными понятиями являются понятия K-перемешивания и K-разбиения. K-системы – аналоги регулярных стационарных процессов, но не вполне идентичны им.

Группа сдвигов стационарного в узком смысле процесса с реализациями $\omega=\{\omega(s),\ -\infty<s<\infty\}$ является K-системой, если существует такая образующая $\eta_0=f(\omega)=f(\{\omega(s),\ -\infty<s<\infty\})$, что отвечающий ей стационарный процесс $\eta_t=f(\{\omega(s+t),\ -\infty<s<\infty\})$ регулярный (то есть удовлетворяет закону нуль–единица). K-системы являются эргодичными и перемешивающими. Обратное, как показывают простые примеры, неверно. В целом ряде случаев установить K-свойство проще, чем установить отдельно эргодичность или перемешивание.

5) Выполнение центральной предельной теоремы. Регулярные стационарные процессы при небольших дополнительных условиях подчиняются центральной предельной теореме. Для динамич. систем справедливость ее для какой-нибудь случайной величины $X_0=f(\omega)$ означает, что нормированная случайная величина

$$\frac{1}{\sqrt{\mathsf{D}X_t}}(X_t-t\mathsf{E}X_0),$$

где

$$X_t(\omega)=\int_0^t f(S^u\omega)\,du,$$

$t\mathsf{E}X_0=\mathsf{E}X_t$, $\mathsf{D}X_t$ – математич. ожидание и дисперсия X_t, имеет в пределе при $t\to\infty$ гауссовское распределение. Для динамич. систем, не относящихся непосредственно к теории вероятностей, утверждение центральной предельной теоремы может иногда выглядеть достаточно неожиданным. Как всегда, ее доказательство сводится к изучению свойств слабой зависимости семейства случайных величин $X_t=f(S^t\omega)$. В приложениях Э. т. представляет интерес доказательство центральной предельной теоремы для возможно более широкого класса случайных величин X_0.

6) Характер убывания временных ковариаций. Во многих приложениях Э. т. важную роль играет характер убывания временных ковариаций

$$b_f(t)=\mathsf{E}f(S^t\omega)f(\omega)-(\mathsf{E}f(\omega))^2.$$

В случае марковских стационарных процессов такие ковариации часто убывают экспоненциально, причем показатель экспоненты выражается через щель в спектре соответствующего марковского оператора. В случае динамич. систем экспоненциальное убывание ковариаций обычно устанавливается путем построения марковских аппроксимаций динамич. систем. Точное исследование асимптотич. поведения $b_f(t)$ относится к наиболее трудным проблемам Э. т. Часто убывание ковариаций оказывается гораздо более медленным.

7) Изоморфизм сдвигу Бернулли. Динамич. системой с дискретным временем, обладающей наиболее сильными стохастич. свойствами, является *Бернулли сдвиг*. Иногда в качестве стохастич. свойства предлагается изоморфизм динамич. системы $\{S^t\}$ этому сдвигу. Следует, впрочем, подчеркнуть, что изоморфизм обычно оказывается измеримым и не сохраняет дополнительной структуры, напр. топологии, гладкости. Поэтому при изоморфизме может теряться контроль за асимптотикой ковариаций, центральной предельной теоремой и т. п. для естественных классов функций.

Одной из основных задач Э. т. считается задача исследования стохастич. свойств тех или иных классов динамич. систем. У классич. динамич. систем, представляющих собой группы сдвигов вдоль траекторий систем дифференциальных уравнений, возникновение стохастич. свойств объясняется неустойчивостью динамики. Первые замечания, относящиеся к этой общей и важной идее, можно найти еще у А. Пуанкаре (H. Poincaré). Роль неустойчивости для статистики отмечалась также Ж. Адамаром (J. Hadamard), Дж. Биркгофом (G. Birkhoff), Э. Хопфом (E. Hopf) при их анализе геодезич. потоков на многообразиях отрицательной кривизны, являющихся частным случаем систем Аносова, и Н. С. Крыловым, заметившим глубокую аналогию в свойствах неустойчивости между указанными геодезич. потоками и системами твердых сфер, взаимодействующих при движении посредством упругих соударений (см. [2], [4]). Ясное понимание связи между неустойчивостью динамики и стохастич. свойствами динамич. систем возникло в начале 60-х гг. после появления работы А. Н. Колмогорова [3], где были введены понятия энтропии динамич. системы и K-системы. В дальнейшем было предложено более общее понятие энтропии (см. [2], [5]), к-рое теперь является общепризнанным. Энтропия динамич. систем является инвариантом изоморфизма, и это позволило А. Н. Колмогорову дать отрицательное решение одной из основных проблем Э. т. об изоморфизме динамич. систем со счетнократным лебеговским спектром, показав, что сдвиги Бернулли с разным значением энтропии метрически не изоморфны между собой. После работы А. Н. Колмогорова стало также ясно, что проблема изоморфизма динамич. систем в случае K-систем должна рассматриваться как проблема стационарного кодирования в духе теории информации. Первые продвижения здесь принадлежат Л. Д. Мешалкину и Я. Г. Синаю (см. [1], [2]). Окончательные результаты в проблеме метрич. изоморфизма K-систем были получены Д. Орнстейном (см. [6]). Он показал, в частности, что сдвиги Бернулли с равной энтропией изоморфны. В то же время в классе K-систем энтропия не образует полной системы метрич. инвариантов и существует континуум попарно неизоморфных K-систем с одинаковым значением энтропии. Эти результаты получены путем глубокого анализа свойств регулярности стационарных процессов и построения тонких примеров процессов с различными свойствами регулярности.

В Э. т. важную роль играют также динамич. системы со слабыми стохастич. свойствами. К ним относятся, в первую очередь, динамич. системы с чисто точечным спектром. Известная теория Колмогорова – Арнольда – Мозера утверждает, что такие системы возникают на эргодич. компонентах гамильтоновых систем, являющихся малым возмущением интегрируемых гамильтоновых систем. Преобразования d-мерного тора с координатами $(x_1, \ldots, x_d)$, имеющие вид $(x_1, \ldots, x_d)\to(x_1+c_1,\ x_2+c_2x_1,\ \ldots,\ x_d+c_{d,1}x_1+\ldots$ $\ldots+c_{d,d-1}x_{d-1})$, где $c_{i,j}$ – целые, называемые косыми сдвигами и возникают в приложениях Э. т. к теории чисел (см. [1]). Своеобразные динамич. системы возникают в теории билиардов в многоугольных и вообще плоских областях, перекладываниях отрезков и связанных с ними векторных полях на двумерных многообразиях.

В теории однородных случайных полей возникают группы сохраняющих меру преобразований, где «временем» служат пространства $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d$. Эргодич. теоремы, эргодич-

ность, перемешивание, энтропия определяются так же, как в случае однопараметрич. групп преобразований. Свойства же регулярности здесь могут быть гораздо более разнообразными и сложными, чем в случае одномерного времени. Многочисленные примеры однородных полей возникают в равновесной статистич. механике.

Формулировки и доказательства эргодич. теорем значительно усложняются, когда время оказывается свободной группой или близким к ней объектом. Соответствующая теория связана с теорией аменабельных групп и факторов Неймана (см. [2], [7]).

Лит.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985; [3] Колмогоров А. Н., «Доклады АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861–64; [4] Крылов Н. С., Работы по обоснованию статистической физики, М.– Л., 1950; [5] Синай Я., «Доклады АН СССР», 1959, т. 124, № 4, с. 768–71; [6] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [7] Нейман Дж., Избранные труды по функциональному анализу, т. 1–2, пер. с англ., М., 1987. *Я. Г. Синай.*

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА – см. *Маркова цепь.*

ЭРГОДИЧЕСКИЙ СТАЦИОНАРНЫЙ ПРОЦЕСС – см. *Эргодическая теорема.*

ЭРГОДИЧНОСТЬ – свойство группы или полугруппы, сохраняющих меру преобразований вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Оно определяется как отсутствие подмножеств $A \in \mathcal{F}$, $\mathsf{P}(A) > 0$, $\mathsf{P}(\Omega \setminus A) > 0$, инвариантных относительно группы или полугруппы. Для сохраняющих бесконечную меру преобразований иногда вместо термина «Э.» используется термин «метрическая транзитивность». Если $\{S^{(t)}\}$ – группа сдвигов в пространстве реализаций стационарного случайного поля $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Z}^d\}$, то Э. означает, что для любой случайной величины $Y (X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}))$ временное среднее

$$\frac{1}{T^d}\int_0^T \dots \int_0^T Y(S^{(t_1 \dots t_d)})\, dt_1 \dots dt_d \to \mathsf{E}Y$$

почти всюду (в случае $\mathbb{Z}^d$ вместо интегралов надо рассмотреть суммы). Эквивалентность этого приведенному выше определения есть простое следствие *Биркгофа – Хинчина эргодической теоремы.*

Лит.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980. *Я. Г. Синай.*

ЭРГОСФЕРА – область пространства-времени стационарной вращающейся *черной дыры*, заключенная между горизонтом событий и расположенной вне его поверхностью предела статичности, определяемой уравнением $\xi_t^2 = 0$ (ξ_t – ограниченное на бесконечности векторное поле Киллинга, порождающее трансляции по времени). Основное свойство Э., характеризующее ее, состоит в том, что все частицы и кванты, движущиеся в ней, увлекаются черной дырой во вращение и имеют отличную от нуля угловую скорость относительно бесконечно удаленного покоящегося наблюдателя.

См. также *Керра – Ньюмена черная дыра.* *В. П. Фролов.*

ЭРЕНФЕСТОВ МАСШТАБ СООТВЕТСТВИЯ – см. *Хаос.*

ЭРМИТА МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены Чебышева – Эрмита, – многочлены, ортогональные на интервале $(-\infty, \infty)$ с весовой функцией $h(x) = \exp(-x^2)$. Стандартизованные Э. м. определяются формулой Родрига:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}.$$

Наиболее употребительны формулы:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k},$$

$$\exp(2xw - w^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} w^n.$$

Первые Э. м. имеют вид:

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,\ H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x, \dots$$

Многочлен $H_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Ортонормированные Э. м. определяются равенством

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}.$$

Э. м. с единичным старшим коэффициентом имеют вид:

$$\tilde{H}_n(x) = \frac{1}{2^n} H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}.$$

Ряды Фурье по Э. м. внутри интервала $(-\infty, \infty)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье.

В математич. статистике и теории вероятностей применяются Э. м., соответствующие весовой функции

$$h(x) = \exp(-x^2/2).$$

Определение Э. м. встречается у П. Лапласа (P. Laplace, 1810). Подробное исследование этих многочленов опубликовал П. Л. Чебышев в 1859 (см. [2]). Затем эти многочлены изучал Ш. Эрмит (Ch. Hermite, 1864).

Лит.: [1] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979. *П. К. Суетин.*

ЭРМИТА УРАВНЕНИЕ – см. *Специальные функции.*

ЭРМИТОВ ОПЕРАТОР – см. *Линейный оператор.*

ЭРНСТА УРАВНЕНИЯ в общей теории относительности – нелинейные (квазилинейные) уравнения с частными производными, представляющие собой двумерные редукции уравнений Эйнштейна для гравитационных полей в вакууме (одно уравнение для одного комплексного потенциала) или уравнений Эйнштейна – Максвелла для взаимодействующих гравитационных и электромагнитных полей вне их источников, то есть для электровакуумных полей (система двух уравнений для двух комплексных потенциалов). Эти редукции имеют место при следующих предположениях.

1) Существуют два коммутирующих между собой неизотропных поля векторов Киллинга, то есть пространство-время допускает двумерную абелеву группу изометрий.

2) Существуют двумерные поверхности, ортогональные к орбитам этой группы изометрий.

При выполнении этих условий все компоненты метрики и 4-потенциала электромагнитного поля зависят только от двух из четырех пространственно-временных координат и выражаются через упомянутые выше комплексные потенциалы.

Э. у. для гравитационных полей в вакууме имеет вид (см. [1]):

$$(\mathrm{Re}\,\mathcal{E})\,\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu + \frac{\alpha_\mu}{\alpha}\right)\partial_\nu \mathcal{E} - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu \mathcal{E}\,\partial_\nu \mathcal{E} = 0,$$

где $\mathcal{E}(x^1, x^2)$ – комплексный потенциал Эрнста, $\mathrm{Re}\,\mathcal{E}$ – его вещественная часть; индексы μ, ν пробегают значения 1, 2; ∂_μ есть $\partial/\partial x^\mu$; постоянная матрица $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -\varepsilon)$, где $\varepsilon = 1$ в гиперболич. случае, то есть для полей, зависящих от времени и одной из пространственных координат, и $\varepsilon = -1$ в эллиптич. случае, то есть для стационарных полей. Функция $\alpha(x^1, x^2)$ есть произвольное непостоянное решение линейного уравнения

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\alpha = 0$$

такое, что

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\alpha\partial_\nu\alpha \neq 0.$$

Эта функция может быть выбрана в качестве одной из координат, напр. координаты x^1. Так, для стационарных

полей с осевой симметрией обычно полагают $x^1=\alpha=\rho$, $x^2=z$.

Э. у. для электровакуумных полей в тех же обозначениях имеют вид (см. [2]):

$$\begin{cases}(\mathrm{Re}\mathscr{E}+\Phi\bar{\Phi})\,\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu+\dfrac{\alpha_\mu}{\alpha}\right)\partial_\nu\mathscr{E}-\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\mathscr{E}+2\bar{\Phi}\partial_\mu\Phi)\,\partial_\nu\mathscr{E}=0,\\ (\mathrm{Re}\mathscr{E}+\Phi\bar{\Phi})\,\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu+\dfrac{\alpha_\mu}{\alpha}\right)\partial_\nu\Phi-\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\mathscr{E}+2\bar{\Phi}\partial_\mu\Phi)\,\partial_\nu\Phi=0.\end{cases}$$

Обзор многих результатов, касающихся полной интегрируемости Э. у. и методов построения разнообразных семейств их точных решений можно найти, напр., в [3].

Лит.: [1] Ernst F. J., «Phys. Rev.», 1968, v. 167, p. 1175–78; [2] его же, там же, 1968, v. 168, p. 1415–17; [3] Алексеев Г. А., «Труды Математич. ин-та АН СССР», 1987, т. 176, с. 211–58.

Г. А. Алексеев.

ЭФФЕКТИВНАЯ КОНСТАНТА СВЯЗИ, эффективный заряд, в квантовой теории поля – аналог экранированного заряда в классической электродинамике сплошных сред. В квантовой теории поля физич. вакуум, то есть пространство, не содержащее реальных частиц, обладает способностью реагировать на присутствие отдельной физич. частицы виртуальными процессами рождения частиц, называемыми поляризацией вакуума. В квантовой электродинамике вследствие поляризации вакуума возникает явление, аналогичное экранировке классич. заряда в среде. Однако вид зависимости Э. к. с. существенно отличается от классич. случая. Поскольку электрич. заряд в квантовой электродинамике выступает как константа связи, то есть определяет интенсивность электромагнитного взаимодействия полей, то понятие Э. к. с. переносится на любые модели квантовой теории поля. В общем случае Э. к. с. описывает эффекты усиления или ослабления взаимодействия в зависимости от расстояния (см. *Перенормировка*). Так, напр., в единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий Э. к. с. (аналогично в квантовой электродинамике) с увеличением расстояния убывает до значения заряда электрона e. Напротив, в квантовой хромодинамике, описывающей сильное взаимодействие «цветных» кварков и глюонов, имеет место эффект антиэкранировки и убывание «цветового», Э. к. с. с уменьшением расстояния, то есть на малых расстояниях кварки становятся как бы свободными (так наз. *асимптотическая свобода*). С увеличением расстояния между кварками и глюонами Э. к. с. возрастает, что препятствует их разлету. Это может оказаться причиной так наз. «инфракрасного удержания» кварков и глюонов, призванного объяснить их отсутствие в свободном состоянии.

А. В. Ефремов.

ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА РАЗЛОЖЕНИЕ – разложение, описывающее поведение парциальных фаз рассеяния $\delta_l(k)$ при низких энергиях:

$$k^{2l+1}\operatorname{ctg}\delta_l(k)=-\frac{1}{a_l}+\frac{1}{2}r_lk^2+o(k^2).$$

Справедливо для потенциалов класса $\mathscr{A}_\sigma$:

$$\int^\infty r^\sigma|v(r)|\,dr<\infty$$

с $\sigma=2l+5$. Если $V\in\mathscr{A}_\sigma$ при любом σ, то $k^{2l+1}\operatorname{ctg}\delta_l$ – аналитич. функция k^2 и Э. р. р. содержит все степени k^2. Для дальнодействующих потенциалов вида:

$$v(r)=q/r+v_s(r),$$

$v_s(r)\in\mathscr{A}_\sigma$ Э. р. р. модифицируется. Напр., при $l=0$:

$$C_0^2(\eta)\,k^{2l+1}\operatorname{ctg}\delta_l^{(s)}(k)+h_0(\eta)=-\frac{1}{a_0}+\frac{1}{2}r_0k^2+o(k^2),$$

где

$$\eta=q/2k,\ \delta_l^{(s)}=\delta_l-\arg\Gamma(1+l+i\eta),$$
$$C_0^2(\eta)=2\pi\eta(l^{2\pi\eta}-1)^{-1},$$
$$h_0(\eta)=q\,(\ln k+\mathrm{Re}\,\psi(i\eta)).$$

Параметры a_l и r_l в Э. р. р. называются длиной рассеяния и эффективным радиусом.

Лит.: [1] Берк Ф., Потенциальное рассеяние в атомной физике, пер. с англ., М., 1980; [2] Мотт Н., Месси Г., Теория атомных столкновений, пер. с англ., М., 1969.

С. П. Меркурьев, А. А. Квицинский.

ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ – первое *Лежандра функциональное преобразование*. См. также *Производящий функционал*.

ЭФФЕКТИВНОЕ СЕЧЕНИЕ процесса – см. *Рассеяния теория*.

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЗАРЯД – см. *Эффективная константа связи*.

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН в квантовой теории поля – *лагранжиан*, в котором учтено в ограниченной области энергий взаимодействие лишь части из полного числа степеней свободы, содержащихся в исходном фундаментальном лагранжиане квантовой теории поля. При этом «лишние» степени свободы, содержащиеся в фундаментальном лагранжиане, либо вообще не возбуждаются и могут не учитываться при построении Э. л., либо, через вакуумные флуктуации, определяют вид взаимодействия полей в Э. л. Практически любой из известных лагранжианов может рассматриваться как Э. л. с точки зрения более глубокой теории. Поэтому Э. л. является одним из важнейших понятий квантовой теории поля.

Процедура построения Э. л. состоит в исключении лишних степеней свободы из исходного лагранжиана. Исключение может производиться разными способами, напр. с помощью интегрирования по этим степеням свободы в *функциональном интеграле* (что соответствует суммированию по их вакуумным флуктуациям) или с помощью техники *операторного разложения*. В адронной физике, где явное исключение лишних степеней свободы, как правило, оказывается невозможным, методика построения Э. л. основывается на использовании принципов симметрии.

Э. л. применяется для вычислений в низкоэнергетич. адронной физике, при описании слабого взаимодействия, в сочетании с операторным разложением он находит широкое распространение в квантовой хромодинамике. В практич. вычислениях последовательно использовать Э. л. можно только в 1-м порядке теории возмущений. Это, в частности, связано с тем, что при учете входящих в Э. л. взаимодействий в высших порядках приходится учитывать (в промежуточных состояниях) возбуждение тех степеней свободы (напр., компонент полей с большими импульсами), к-рых нет в первоначальном Э. л. Таким образом, учет высших приближений, как правило, приводит к выходу за рамки применимости первоначального Э. л. Исключение составляют перенормируемые Э. л., итерация к-рых при описании низкоэнергетич. процессов является непротиворечивой. Все известные реалистич. лагранжианы (лагранжианы квантовой хромодинамики и электрослабого взаимодействия) являются перенормируемыми Э. л. с точки зрения более глубокой квантовой теории поля (напр., с точки зрения *великого объединения моделей*).

Исторически первым примером Э. л., непосредственно полученного из исходного фундаментального лагранжиана, явился Гейзенберга – Эйлера лагранжиан, описывающий нелинейное взаимодействие низкоэнергетич. компонент электромагнитного поля, возникающее за счет суммирования по вакуумным флуктуациям электрон-позитронного поля в лагранжиане квантовой электродинамики. Характерной величиной напряженности поля в лагранжиане Гейзенберга – Эйлера является

$$F_0=m^2c^3/e\hbar,$$

где e и m – заряд и масса электрона ($e^2/\hbar c=\alpha\approx 1/137$). В полях такой напряженности заряд e на расстоянии комптоновской длины электрона, $r\sim\lambda_C=\hbar/mc$, приобретает энергию $\sim mc^2$. Лагранжиан Гейзенберга – Эйлера получен для медленно меняющихся полей с характерными частотами $\omega\ll mc^2/\hbar$, поэтому он является функцией только отноше-

ний E/F_0 и H/F_0 и не содержит производных от напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей. Общее выражение для лагранжиана Гейзенберга – Эйлера достаточно громоздко. В предельном случае слабых полей ($E \sim H \ll F_0$) плотность лагранжиана Гейзенберга – Эйлера имеет вид:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(E^2 - H^2) + \frac{\alpha}{90\pi F_0^2}[(E^2 - H^2)^2 + 7(EH)^2] + \ldots$$

Для сильных полей ($E \sim H \gg F_0$):

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{3}\alpha(E^2 - H^2)\ln\frac{|E^2 - H^2|}{F_0^2}.$$

Лагранжиан Гейзенберга – Эйлера получен В. Гейзенбергом и Г. Эйлером [1]. Ю. Швингер [2] разработал эффективный общий метод вывода лагранжианов типа лагранжиана Гейзенберга – Эйлера с использованием так наз. формализма собственного времени.

Набор полей, входящих в Э. л., может и не совпадать с полями в исходном фундаментальном лагранжиане, а описывать, напр., связанные состояния исходных полей в ограниченном интервале импульсов. Такая ситуация осуществляется, в частности, в киральном лагранжиане (см. *Киральная симметрия*), к-рый описывает низкоэнергетич. взаимодействие π-мезонов с нуклонами (см. [3]), а также в Э. л., являющимся феноменологич. реализацией нарушенной $U(1)$-симметрии мезонных взаимодействий в квантовой хромодинамике (см. [4]).

Лит.: [1] Heisenberg W., Euler H., «Z. Phys.», 1936, Bd 98, S. 714; [2] Schwinger J., «Phys. Rev.», 1951, v. 82, p. 664; [3] Weinberg S., «Phys. Rev.», 1968, v. 166, p. 1568; [4] Arnowitt R., Nath P., «Nucl. Phys.», 1982, v. B 209, p. 234. *М. В. Терентьев.*

ЭФФЕКТИВНЫЙ РАДИУС рассеяния – см. *Рассеяния теория.*

Ю, Я

ЮКАВЫ ПОТЕНЦИАЛ – *потенциал* вида

$$V(r) = \int_\mu^\infty da\, c(a)\, e^{-ar}.$$

Функция Йоста $F_0(k)$ для Ю. п. дается представлением

$$F_0(k) = 1 + \int_\mu^\infty da\rho(k, a),$$

где ρ – решение интегрального уравнения

$$a(a - 2ik)\rho(k, a) = c(a) + \theta(a - 2\mu)\int_\mu^{a-\mu} c(a - b)\rho(k, b)\, db,$$

$\theta(x) = 0$, если $x < 0$, $\theta(x) = 1$, если $x \geqslant 0$, к-рое точно решается итерациями в последовательных интервалах $[n\mu, (n+1)\mu]$, n – целое число. Функция $F_0(k)$ для Ю. п. аналитична в комплексной k-плоскости с разрезом $[-i\varkappa, -i\infty)$, $\varkappa \geqslant \mu$. Частным случаем Ю. п. при $c(a) = \text{const}$ является *Юкавы потенциал взаимодействия*, предложенный для описания ядерных сил.

Лит.: [1] Альфаро В., Редже Т., Потенциальное рассеяние, пер. с англ., М., 1966. *С. П. Меркурьев, А. А. Квицинский.*

ЮКАВЫ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ – *взаимодействия потенциал* вида

$$\Phi = C\exp(-\varkappa r)/r,$$

где r – расстояние между центрами взаимодействия частиц, C и $\varkappa$ – постоянные. Величина $r_0 = 1/\varkappa$ называется радиусом взаимодействия Ю. п. в. В зависимости от физич. смысла постоянные C и r_0 Ю. п. в. описывают различные виды взаимодействия. Введен Х. Юкавой [1] для описания ядерных сил. Он предположил, что ядерные силы носят обменный характер и возникают благодаря обмену между нуклонами нек-рой частицы с массой около 200 масс электрона. Предсказанные Х. Юкавой частицы (π-мезоны) были обнаружены в 1947. В этом случае радиус действия Ю. п. в. равен $r_0 = \hbar/mc$.

Ю. п. в. описывает также электростатич. поле отдельного (точечного или сферического) заряда в плазме, электролите или полупроводнике с учетом коллективных взаимодействий, благодаря к-рым происходит экранирование *кулоновского потенциала взаимодействия*. В этом случае r_0 называется дебаевским радиусом экранирования. Для растворов электролитов (плазмы) с n сортами частиц:

$$\varkappa = r_0^{-1} = \left(\frac{4\pi e^2\beta}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n N_i Z_i^2\right)^{1/2},$$

где e – заряд электрона, $\beta = 1/kT$ – обратная температура, ε – диэлектрич. проницаемость, N_i – концентрация частиц (ионов или электронов) i-го сорта, Z_i – валентность иона i-го сорта (для электрона $Z = 1$).

Ю. п. в.

$$\Phi = e^{-\varkappa|x - x_0|}\Big/|x - x_0|$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца (пространственному уравнению Клейна – Гордона – Фока):

$$\Delta\Phi(x, x_0) - \varkappa^2\Phi(x, x_0) = -4\pi\delta(x - x_0),$$

где Δ – оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\delta(x - x_0)$ – трехмерная дельта-функция Дирака.

Лит.: [1] Jukawa H., «Proc. Phys. Math. Soc. Japan», 1935, v. 17(2), p. 48; [2] Широков Ю. М., Юдин И. П., Ядерная физика, М., 1972; [3] Лившиц Е. М., Питаевский Л. П., Физическая кинетика, М., 1979. *П. В. Малышев.*

ЮЛА – ФАРРИ ПРОЦЕСС – см. *Рождения и гибели процесс.*

ЮЛИНГА – УЛЕНБЕКА УРАВНЕНИЕ – квантовое кинетич. уравнение для газа со слабым взаимодействием:

$$\frac{df}{dt} = \int dp'\, dp_1'\, dp_1\, W(p, p_1, p', p_1)\times$$
$$\times(f'f_1'(1 + \theta f)(1 + \theta_1 f_1) - ff_1(1 + \theta_1 f')(1 + \theta_1 f') +$$
$$+ (1 + \theta f)S(p) - fY(p).$$

Здесь $f(p, t)$ – функция распределения (в обозначениях f несет те же индексы, что и аргумент p), W – вероятность перехода $(p, p_1) \to (p', p_1')$, $S(p)$ – источник, $Y(p)$ – сток, $\theta = 1$ для статистики Бозе, $\theta = -1$ – для статистики Ферми (аналогично для θ_1).

Лит.: [1] Ueling E., Uhlenbeck G., «Phys. Rev.», 1933, v. 43, p. 552. *И. А. Кузин, В. П. Политюков.*

ЯДЕРНЫЙ ОПЕРАТОР – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве (сепарабельном) такой, что для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Tr}|A| = \sum_{n\geqslant 0}(\varphi_n, |A|\varphi_n) < \infty,$$

$$|A| = (A^*A)^{1/2}.$$

В. И. Скрипник.

ЯКОБИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ – см. *Вариационное исчисление в целом.*

ЯКОБИ КООРДИНАТЫ – относительные координаты, используемые для описания многочастичных систем в *центра масс системе* отсчета. Сопоставим нек-рой упорядоченной последовательности номеров частиц $i_1, i_2, \ldots, i_N$ последовательность подсистем $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_N$ такую, что $\omega_l = \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$. Пусть $y_{\omega_l} \in \mathbb{R}^3$ – координата центра масс подсистемы ω_l массы m_{ω_l}:

$$y_{\omega_l} = \frac{1}{m_{\omega_l}}\sum_{s=1}^{l} m_{i_s} r_{i_s},$$

$$m_{\omega_l} = \sum_{s=1}^{l} m_{i_s},$$

r_{i_s} и m_{i_s} – координаты и масса частиц с номером i_s. Координаты Якоби, соответствующие последовательности подсистем $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_N$, строятся по формулам

$$\xi_{\omega_l i_{l+1}} = y_{\omega_l} - r_{i_{l+1}},$$

$$\xi_{i_1 i_2} = r_{i_1} - r_{i_2},$$

$l = 2, 3, \ldots, N-1$. Существует $N!$ различных систем Я. к., отвечающих всевозможным перестановкам частиц. Наряду с Я. к. часто используются приведенные Я. к. связанные с $\xi_{\omega_l i_{l+1}}$ соотношениями

$$x_{\omega_l i_{l+1}} = \left(2\frac{m_{\omega_l} m_{i_{l+1}}}{m_{\omega_l} + m_{i_{l+1}}}\right)^{1/2} \xi_{\omega_l i_{l+1}}.$$

В этих координатах особенно просто выглядит оператор

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\Delta_{r_i}$$

кинетич. энергии N частиц в системе центра масс:

$$H_0 = -\Delta_X,$$

$$X = \left\{x_{\omega_l i_{l+1}}\right\} \in \mathbb{R}^{3(N-1)}.$$

Лит.: [1] Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, 6 изд., М., 1983; [2] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985; [3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 3, Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1982.

С. П. Меркурьев, С. Л. Яковлев.

ЯКОБИ МНОГООБРАЗИЕ – см. *Абелев дифференциал.*

ЯКОБИ МНОГОЧЛЕНЫ – многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

$$\alpha > -1,\ \beta > -1,\ x \in [-1, 1].$$

Стандартизованные Я. м. определяются формулой Родрига

$$P_n(x; \alpha, \beta) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x^2)^n],$$

а ортонормированные Я. м. имеют вид:

$$\hat{P}_n(x; \alpha, \beta) = \sqrt{\frac{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\,P_n(x; \alpha, \beta).$$

Многочлен $P_n(x; \alpha, \beta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1) = 0.$$

При $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$ и $\beta \geqslant -\frac{1}{2}$ для ортонормированных Я. м. имеет место весовая оценка

$$(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}|\hat{P}_n(x; \alpha, \beta)| \leqslant c_1,$$

$$x \in [-1, 1],$$

где постоянная c_1 не зависит от n и x. А в точках $x = \pm 1$ последовательность $\{\hat{P}_n(x; \alpha, \beta)\}$ возрастает со скоростью $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ и $n^{\beta+\frac{1}{2}}$ соответственно.

Ряды Фурье по Я. м. внутри интервала $(-1,1)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье, а в окрестности концов отрезка ортогональности – свойства рядов Фурье – Якоби иные, ибо в точках $x = \pm 1$ ортонормированные Я. м. возрастают неограниченно. Равномерная сходимость ряда Фурье – Якоби на всем отрезке $[-1, 1]$ имеет место, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на этом отрезке и $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\gamma$, причем $p + \gamma > q + \frac{1}{2}$, где

$$q = \max\{\alpha, \beta\} > -\frac{1}{2}.$$

При этих условиях выполняется неравенство

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \hat{P}_k(x; \alpha, \beta)\right| \leqslant \frac{c_2}{n^{p+\gamma}} n^{q+\frac{1}{2}},$$

$$x \in [-1, 1],$$

где постоянная c_2 не зависит от n и x. С другой стороны, для остатка ряда Фурье – Якоби при $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$ и $\beta \geqslant -\frac{1}{2}$ справедлива весовая оценка

$$(1-x^2)^{1/4}\sqrt{h(x)}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \hat{P}_k(x; \alpha, \beta)\right| \leqslant c_3 E_n(f)\ln n,$$

$$x \in [-1, 1],$$

где $n \geqslant 2$, постоянная c_3 не зависит от n и x, а $E_n(f)$ – наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ многочленами порядка не выше n.

Я. м. были введены К. Якоби (C. Jacobi, 1859) в связи с решением гипергеометрич. уравнения. Частными случаями Я. м. являются *Лежандра многочлены* (при $\alpha = \beta = 0$), *Чебышева многочлены* 1-го рода (при $\alpha = \beta = -1/2$), Чебышева многочлены 2-го рода (при $\alpha = \beta = 1/2$), *ультрасферические многочлены* (при $\alpha = \beta$).

П. К. Суетин.

ЯКОБИ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА эллиптического интеграла – см. *Эллиптический интеграл.*

ЯКОБИ ПОЛЕ – векторное поле $\xi = (\xi^i)$ на геодезической $\gamma = \{x(t)\}$, обращающееся в нуль на концах $P = \gamma(0)$ и $Q = \gamma(1)$ и удовлетворяющее уравнению Якоби

$$J\xi^i = 0,$$

где

$$J\xi^i = \nabla_{\dot{x}}^2 \xi^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R^i_{j,kl}$$

– оператор второй вариации функционала,

$$S[\gamma] = \int_P^Q g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j\, dt,$$

$\nabla_{\dot{x}}$ – ковариантная производная вдоль γ, $R^i_{j,kl}$ – тензор кривизны Римана. Определение обобщается на случай экстремалей других функционалов, в том числе многомерных. Я. п. служит для исследования глобальной минимальности и устойчивости экстремалей.

А. В. Болсинов.

ЯКОБИ ПРИНЦИП стационарного действия – один из *вариационных принципов классической механики*: если

заданы начальное и конечное положения голономной консервативной системы, то для действительного движения

$$\delta\int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(U+h)}\,ds = 0 \qquad (1)$$

при сравнении со всякими другими бесконечно близкими движениями между теми же самыми начальным и конечным положениями и с тем же самым постоянным значением энергии $h = T - U$, что и в действительном движении; здесь в обобщенных координатах q_i кинетич. энергия системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

и задана метрика координатного пространства формулой

$$ds^2 = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\,dq_i\,dq_j, \qquad (2)$$

а также конечные положения системы P_0 и P_1 в нек-ром действительном движении системы.

Я. п. приводит задачу изучения движения голономной консервативной системы к геометрич. задаче отыскания в римановом пространстве с метрикой (2) экстремалей вариационной задачи (1), к-рые представляют собой действительные траектории системы. Я. п. выявляет тесную связь, существующую между движениями голономной консервативной системы и римановой геометрией пространства. Если движение системы происходит в отсутствие заданных сил, когда $U = 0$, то система движется вдоль геодезич. линии координатного пространства $(q_1, \ldots, q_n)$ с постоянной скоростью. Этот факт является обобщением закона инерции Галилея. Когда $U \neq 0$, разыскание движения голономной консервативной системы также сводится к задаче определения геодезических в римановом пространстве с метрикой

$$ds_1^2 = 2(U+h)\,ds^2 = \sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}\,dq_i\,dq_j.$$

Для случая одной материальной точки, когда линейный элемент ds – элемент евклидова 3-мерного пространства, Я. п. представляет собой механич. аналог принципа Ферма в оптике.

Принцип предложен К. Якоби (C. Jacobi, 1837).

В. В. Румянцев.

ЯКОБИ ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ – проблема обращения *абелевых интегралов* I рода произвольного поля *алгебраических функций*. Иначе говоря, проблема обращения абелевых интегралов I рода на компактной римановой поверхности F рода $p \geqslant 1$, соответствующей данному алгебраич. уравнению $F(z, w) = 0$.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ – базис *абелевых дифференциалов* I рода на F. Обращение одного абелева интеграла, напр.

$$\int_{c_1}^{w_1}\varphi_1 \equiv u_1(w_1) = z_1,$$

то есть представление всевозможных рациональных функций от w_1, в частности представление функции $w_1 = w_1(z_1)$ как функций от z_1, имеет смысл только при $p = 1$ – в этом случае речь идет об обращении *эллиптического интеграла*, к-рое приводит к двоякопериодич. *эллиптическим функциям*. Напр., обращение нормального интеграла I рода в нормальной форме Лежандра

$$u_1(w_1) = \int_0^{w_1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = z_1$$

приводит к *Якоби эллиптической функции* $w_1 = \operatorname{sn} z_1$.

Как заметил еще К. Якоби (C. Jacobi, 1832), проблема обращения при $p > 1$ должна рассматриваться для всех абелевых интегралов I рода $\int\varphi_1, \ldots, \int\varphi_p$ в совокупности, так как должны получиться функции с $2p$ периодами. В общем случае при $p \geqslant 1$ рациональная постановка Я. п. о. состоит в следующем: пусть дана система равенств

$$\int_{c_1}^{w_1}\varphi_j + \int_{c_2}^{w_2}\varphi_j + \ldots + \int_{c_p}^{w_p}\varphi_j = z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \qquad (1)$$

в к-рой нижние пределы интегрирования $c_1, c_2, \ldots, c_p$ – фиксированные точки на F; $w_1, \ldots, w_p$ – текущие точки на F; $z = (z_1, \ldots, z_p)$ – данные произвольные комплексные числа. Требуется указать, при каких условиях и как можно обратить систему (1), то есть получить представление всевозможных симметрич. рациональных функций от w_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, как функций от $z = (z_1, \ldots, z_p)$.

Вследствие зависимости от формы путей, соединяющих на F точки c_k и w_k, абелевы интегралы в (1), как функции от верхних пределов w_k, многозначны: при изменении формы пути они могут получить приращение в виде целочисленной линейной комбинации периодов. Отсюда вытекает, что (1) является в сущности системой сравнений по модулю периодов дифференциалов $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Получаемые при решении Я. п. о. функции от комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_p)$ не должны изменять своих значений при прибавлении к аргументу любой целочисленной комбинации периодов дифференциалов $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Это будут, следовательно, специальные *абелевы функции* с $2p$ независимыми периодами.

Для случая $p = 1$, то есть для эллиптич. интеграла, построение эллиптич. функций, решающих проблему обращения, достигается при помощи сравнительно простых тета-функций Якоби от одного комплексного переменного z, причем мероморфные эллиптич. функции строятся в виде отношений целых тета-функций. Решение общей Я. п. о. также возможно при помощи тета-функций $\theta_H(z) = \theta_H(z_1, \ldots, z_p)$ 1-го порядка от p комплексных переменных с полуцелыми характеристиками H.

Е. Д. Соломенцев.

ЯКОБИ ТЕОРЕМА – см. *Гамильтона – Якоби уравнение.*

ЯКОБИ ТОЖДЕСТВО – см. *Ли алгебра, Пуассона скобки.*

ЯКОБИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ – *эллиптические функции*, введенные К. Якоби [1] для обращения *эллиптических интегралов*. Для построения Я. э. ф. вводятся сначала якобиевы *тета-функции* $\vartheta\left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \delta\end{matrix}\right](v;\,\tau)$, где $v \in \mathbb{C}$ и $\tau \in H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$, с помощью ряда

$$\vartheta\left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \delta\end{matrix}\right](v;\tau) = \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}}\exp i\pi\{(n+\varepsilon)^2\tau + 2(n+\varepsilon)(v+\delta)\},$$

к-рый для действительных характеристик $\left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \delta\end{matrix}\right]$ абсолютно и равномерно сходится на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}\times H$. Я. э. ф. удовлетворяют дифференциальному уравнению с частными производными

$$\partial^2\vartheta/\partial v^2 = 4\pi i\,\partial\vartheta/\partial\tau,$$

они обладают свойством периодичности:

$$\vartheta\left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \delta\end{matrix}\right](v+k+l\tau;\tau) = \exp i\pi(-\tau l^2 - 2vk + 2(\varepsilon k - \delta l))\,\vartheta\left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \delta\end{matrix}\right](v;\tau),$$

где k, l – целые числа; а под действием модулярной группы Γ, образованной целочисленными (2×2)-матрицами $\left(\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right)$, $ad - bc = 1$, преобразуются по закону

$$\vartheta\left[\left(\begin{matrix}d & -c\\ -b & a\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\varepsilon\\ \delta\end{matrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{matrix}c & d\\ a & b\end{matrix}\right)\right]\left(\frac{v}{a+b\tau};\,\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) =$$

$$= \varkappa(a+b\tau)^{1/2}\exp\frac{i\pi bv^2}{a+b\tau}\,\vartheta\left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \delta\end{matrix}\right](v;\tau),$$

где $\varkappa^8 = 1$. Я. э. ф. определены на торе $T^2 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ по v переменной v и на множестве H/Γ по переменной τ (см. [2]). Нетождественно равные нулю значения Я. э. ф. и их производных при $v = 0$ называются тета-константами.

Для четырех Я. э. ф. с полуцелыми характеристиками приняты обозначения

$$\vartheta_3(v)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(v;\tau),\qquad \vartheta_4(v)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(v;\tau),$$

$$\vartheta_2(v)=\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(v;\tau),\quad \vartheta_1(v)=-\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(v;\tau).$$

Функция $\vartheta_1(v)$ является нечетной, остальные три – четные. Для тета-констант справедливы равенства:

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0),\ \vartheta_3^4(0)=\vartheta_2^4(0)+\vartheta_4^4(0)$$

(см. [3]). Имеет место фундаментальная теорема сложения (тета-формула Римана) (см. [2]):

$$\sum\nolimits_\rho e_\rho\prod_{j=1}^4\vartheta_3(v_j+\rho)=2\prod_{k=1}^4\vartheta_3(w_k),$$

где $\rho=0,\ 1/2,\ \tau/2,\ (\tau+1)/2$, $e_\rho=1$ при $\rho=0,\ 1/2$, $e_\rho=\exp(i\pi(\tau+\sum_j v_j))$ при $\rho=\tau/2,\ (1+\tau)/2$; $2w_1=v_1+v_2+v_3+v_4$, $2w_2=v_1+v_2-v_3-v_4$, $2w_3=v_1-v_2+v_3-v_4$, $2w_4=v_1-v_2-v_3+v_4$.

Основные Я. э. ф. вводятся по формулам

$$\mathrm{s}=\mathrm{sn}(u;k)=\frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(v)},$$

$$\mathrm{c}=\mathrm{cn}(u;k)=\frac{\vartheta_4(0)\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(v)},$$

$$\mathrm{d}=\mathrm{dn}(u;k)=\frac{\vartheta_4(0)\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)\vartheta_4(v)},$$

где $u=\pi\vartheta_3^2(0)\,v$ и $k=\vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0)$ – модуль Я. э. ф. Периодами функций s, c, d являются соответственно $4K$ и $2iK'$, $4K$ и $2(K+iK')$, $2K$ и $4iK'$, где $K=K(k)=\pi\vartheta_3^2(0)/2$, $K'=K(k')=-i\tau K$ – полные эллиптич. интегралы I рода, а $k'=\sqrt{1-k^2}$ – дополнительный модуль.

Я. э. ф. разрешают *Якоби проблему обращения* для эллиптич. интеграла I рода. В частности, справедливо равенство

$$u=\int_0^{\mathrm{sn}(u;k)}[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-1/2}dx.$$

Я. э. ф. связаны соотношениями

$$\mathrm{s}^2+\mathrm{c}^2=1,\ \mathrm{d}^2+k^2\mathrm{s}^2=1,\ \mathrm{d}^2-k^2\mathrm{c}^2=k'^2$$

и

$$\mathrm{s}'^2=(1-\mathrm{s}^2)(1-k^2\mathrm{s}^2),\ \mathrm{c}'^2=(1-\mathrm{c}^2)(k'^2+k^2\mathrm{c}^2),$$
$$\mathrm{d}'^2=(1-\mathrm{d}^2)(\mathrm{d}^2-k'^2).$$

Пересечение двух квадрик, определяемых первой группой соотношений, задает так наз. эллиптическую кривую. Дифференциальные уравнения, составляющие вторую группу соотношений, определяют ту же кривую, координатами к-рой являются соответственно (s′, s), (c′, c), (d′, d) (см. [2]).

Теоремы сложения для Я. э. ф. имеют вид:

$$\mathrm{sn}(u_1+u_2;k)=r(\mathrm{s}_1\mathrm{c}_2\mathrm{d}_2+\mathrm{c}_1\mathrm{d}_1\mathrm{s}_2),$$

$$\mathrm{cn}(u_1+u_2;k)=r(\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2-\mathrm{s}_1\mathrm{d}_1\mathrm{s}_2\mathrm{d}_2),$$

$$\mathrm{dn}(u_1+u_2;k)=r(\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2-k^2\mathrm{s}_1\mathrm{c}_1\mathrm{s}_2\mathrm{c}_2),$$

$$r^{-1}=1-k^2s_1^2s_2^2,\ \mathrm{s}_i=\mathrm{s}(u_i),\ \mathrm{c}_i=\mathrm{c}(u_i),\ \mathrm{d}_i=\mathrm{d}(u_i).$$

При $k=0$ или 1 Я. э. ф. вырождаются соответственно в тригонометрич. и гиперболич. функции (см. [3]).

Лит.: [1] Jacobi C., Gesammelte Werke, Bd 1, B., 1881; [2] Мамфорд Д., Лекции о тета-функциях, пер. с англ., М., 1988; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. 3, пер. с англ., М., 1967. *В. З. Энольский.*

ЯКОБИАН римановой поверхности – см. *Абелев дифференциал.*

ЯКОБИЕВА МАТРИЦА – см. *Абелев дифференциал.*

ЯКОБИЕВО ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ – см. *Вариационное исчисление в целом.*

ЯКОБИ – ШАЛЯ ТЕОРЕМА – теорема, описывающая геодезический поток на эллипсоиде. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксируется квадрика $\langle A^{-1}x,\,x\rangle=1$, где A – симметрич. оператор с различными собственными числами.

Касательные прямые к квадрике касаются, кроме этой квадрики, еще $n-2$ конфокальных с нею квадрик $\langle(A-\lambda E)^{-1}x,\,x\rangle=1$. Полученные $n-2$ значения параметра λ являются первыми интегралами в инволюции геодезич. потока на квадрике. Геодезич. поток на квадрике в евклидовом пространстве – вполне интегрируемая гамильтонова система (то есть обладает полной *системой в инволюции* первых интегралов). *М. Э. Казарян.*

ЯНГА – МИЛЛСА МОДЕЛЬ – см. *Квантовое евклидово поле*; решетчатые модели.

ЯНГА – МИЛЛСА ПОЛЕ – *векторное поле*, реализующее присоединенное *представление* полупростой компактной группы Ли и обеспечивающее инвариантность теории относительно *калибровочных преобразований.*

Я.– М. п., называемые также *калибровочными полями*, используются в современной физике для описания физич. полей, играющих роль переносчиков взаимодействия. Так, электромагнитное поле в электродинамике, поле векторных W-бозонов – переносчиков слабого взаимодействия в теории электрослабого взаимодействия Вайнберга – Салама и, наконец, глюонное поле – переносчик сильного взаимодействия – описываются Я.– М. п. Гравитационное поле также может быть интерпретировано как Я.– М. п.

Впервые концепция связности как нек-рого поля была развита Г. Вейлем (H. Weyl, 1917), к-рый также сделал попытку описания электромагнитного поля в терминах связности. Ч. Янг (C. Yang) и Р. Миллс (R. Mills) предположили (1954), что пространство внутренних степеней свободы элементарных частиц (напр., изотопич. пространство, описывающее две степени свободы нуклона, соответствующих двум его чистым состояниям – протону и нейтрону) зависит от точки пространства-времени, причем внутренние пространства, соответствующие различным точкам, канонически не изоморфны. На геометрич. языке предположение Янга – Миллса состоит в том, что пространство внутренних степеней свободы является векторным расслоением над пространством-временем, не обладающим канонич. тривиализацией, а физич. поля описываются сечениями этого расслоения. Для написания дифференциального уравнения эволюции поля необходимо ввести в расслоение нек-рую *связность* – тривиализацию расслоения вдоль кривых базы. Такая связность с фиксированной группой голономии описывает физич. поле (получившее название поля Янга – Миллса). Из вариационного принципа выводятся уравнения для свободного Я.– М. п., являющиеся естественным нелинейным обобщением *Максвелла уравнений.*

Более строгое определение Я.– М. п. см. в [1].

Лит.: [1] Математическая энциклопедия, т. 5, М., 1985, кол. 1058–60. *Д. В. Алексеевский.*

ЯНОШИ УРАВНЕНИЕ – уравнение немарковского *ветвящегося процесса*, описывающего нуклонный, либо электронно-фотонный каскады – последовательности реакций элементарных частиц с ядрами поглотителя, происходящих в случайные моменты времени. Случайные реализации процесса $\xi(t,\,E)$ интерпретируются как число частиц с энергией, меньшей E, проникающих на глубину t в вещество-поглотитель.

В нуклонном каскаде в результате одной реакции нуклон с энергией E_0, сталкиваясь с ядром, порождает два новых нуклона с энергиями E' и E''. Пусть

$$w(E'/E_0,\ E''/E_0)/E_0^2$$

– сечение этой реакции, $w(\varepsilon', \varepsilon'') = 0$ при $\varepsilon' + \varepsilon'' > 1$, и

$$\alpha = \int_0^1 d\varepsilon' d\varepsilon'' w(\varepsilon', \varepsilon'')$$

– интенсивность реакции (число реакций в единицу времени). Для производящей функции

$$G(\varepsilon, z; t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\varepsilon, n; t) z^n$$

Я. у. (G-уравнение) ветвящегося процесса, описывающего нуклонный каскад, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\varepsilon, z; t) + \alpha G(\varepsilon, z; t) =$$

$$= \int_0^{\infty} d\varepsilon' d\varepsilon'' w(\varepsilon', \varepsilon'') G(\varepsilon/\varepsilon', z; t) G(\varepsilon/\varepsilon'', z; t).$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$, $n_i = 0, 1, 2, \ldots$, $z = (z_1, z_2)$, $z^n = z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ и $P(\varepsilon, n; t)$ – вероятность того, что на глубине t в веществе имеется n_1 частиц с энергией большей εE_0 и n_2 частиц с энергией меньшей εE_0, $P(\varepsilon, 0; t) = 0$,

$$\sum_{n:|n|=N} P(\varepsilon, n; t) = \mathrm{P}\{\xi(t, \infty) = N\},$$

$$|n| = n_1 + n_2.$$

При условии, что каскад порождается одной первичной частицей с энергией E_0, начальное условие для процесса имеет вид:

$$P(\varepsilon, n; 0) = \delta_{1n_1}\delta_{0n_2}\theta(1-\varepsilon) + \theta(\varepsilon - 1)\delta_{n_1 0}\delta_{n_2 1},$$

то есть

$$G(\varepsilon, z; 0) = \theta(1-\varepsilon)z_1 + z_2\theta(\varepsilon - 1),$$

$\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Аналогичный смысл имеют и Я. у. для производящей G-функции, описывающей электрон-фотонный каскад, к-рый состоит из последовательности реакций образования электрон-позитронных пар и излучения протонов. Однако ввиду того, что каскад состоит из двух типов частиц, то для описания соответствующего ветвящегося процесса необходимо ввести двухкомпонентную функцию P и соответственно двухкомпонентную G-функцию.

Лит.: [1] Janossy L., «Proc. Phys. Soc. (London), ser. A», 1950, v. 63, № 2, p. 241–49; [2] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

Ю. П. Вирченко.

ISBN 5-85270-304-4

9 785852 703040 >

Математическая физика. Энциклопедия / Гл. ред. М34 Л. Д. Фаддеев. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. – 691 с.: ил.

ISBN 5-85270-304-4

Математическая физика – один из важнейших разделов фундаментальных наук. Ее методы проникают почти во все области современного естествознания и техники. Энциклопедия «Математическая физика» отражает основные и перспективные направления этой науки. Она содержит вопросы классической и квантовой механики, теории поля, статистической механики, математические методы математической физики. По характеру сообщаемой информации статьи Энциклопедии могут быть разделены на три основные группы: 1) обзорные статьи; 2) статьи, посвященные отдельным конкретным проблемам и методам; 3) краткие справки: определения основных понятий, важнейшие теоремы и формулы и т. д.

Вошедший в Энциклопедию материал необходим студентам и аспирантам вузов и втузов, научным работникам в области математической физики и других разделов естествознания, близких к ней.

51-7

Лицензия № 010144 от 14.01.97. Налоговая льгота – общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2: 953000. Подписано в печать 14.01.98. Формат издания $84 \times 108^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Объем издания 72,66 усл. печ. л. 72,66 усл. кр.-отт., 120,99 уч.-изд. л. Тираж 2000 экз. Заказ 5856. С5.

Научное издательство «Большая Российская энциклопедия». 109544, Москва, Покровский бульвар, 8.

Компьютерный набор и верстка издательства «Большая Российская энциклопедия».

Изготовление фотоформ и печать в АООТ «Тверской полиграфический комбинат». 170024, Тверь, проспект Ленина, 5.