ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ • TULA STATE UNIVERSITY •

В.И. Иванов

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ ПРИБЛИЖЕНИ

Учебное пособие

Тула 1999

Министерство образования Российской Федерации
Тульский государственный университет

В.И. Иванов

Введение в теорию приближений

Учебное пособие

Рекомендовано НМС по математике и механике УМО университетов России для студентов специальностей 010100 «Математика», 010200 «Прикладная математика», 010500 «Механика»

Тула 1999

УДК 517.5

Введение в теорию приближений: Учеб. пособие/ В.И. Иванов.— 2-е изд., испр.— Тула: ТулГУ, 1999.— 116 с.

ISBN 5-7679-0217-8

Приводятся основные результаты и методы теории приближений в пространствах C, L_2, L. Рассматриваются вопросы, связанные с существованием, единственностью и критериями для элементов наилучшего приближения, прямые и обратные теоремы теории приближений, экстремальные свойства полиномов. В приложении приводятся современные результаты по точным константам в неравенствах Джексона в пространствах L_p.

Рассчитано на студентов специальностей 010100 «Математика», 010200 «Прикладная математика», 010500 «Механика», а также может быть полезно специалистам по математическому анализу и вычислительной математике.

Во второе издание (1-е — 1996 г.) внесены исправления замеченных неточностей.

Библиогр. 31 назв.

ISBN 5-7679-0217-8

• • •

Печатается по решению редакционно-издательского совета Тульского государственного университета

Рецензенты: кафедра математического анализа Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н.Толстого, зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук, доц. И.В.Денисов; д-р физ.-мат. наук, проф. В.А.Юдин

И $\dfrac{1602070000-56}{76\ \text{П}(03)-99}$ Без объявл.

ISBN 5-7679-0217-8

Предисловие

«Теория приближений» — интенсивно развивающийся раздел современной математики с широким кругом экстремальных задач, связанных с приближением функций и классов функций, функционалов и операторов. Ее методы широко проникают в другие разделы математики и используются при разработке численных методов решения различных прикладных задач, таких, как обработка и экономное хранение больших массивов информации, обработка экспериментальных данных при информации, известной с погрешностью, представление кривых и поверхностей, машинная графика, численная обработка изображений и т.д. Поэтому изучение теории приближений должно занимать важное место в математическом образовании специалистов по прикладной математике.

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса «Теория приближений» для студентов направления 510200 «Прикладная математика и информатика», специальности 010200 «Прикладная математика» Тульского государственного университета.

Пособие содержит классические результаты П.Л. Чебышева, А.А. Маркова, А. Хаара, Валле Пуссена, Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, А.Н. Колмогорова, С.Б. Стечкина по теории приближений в пространствах C, L_2, L: существование, единственность и критерии для элементов наилучшего приближения, прямые и обратные теоремы, экстремальные свойства полиномов.

Несмотря на небольшой объем, автор старался для основных экстремальных задач теории приближений приводить решения с точными константами. Возможно это не было бы оправданным, если бы каждая новая задача не требовала привлечения новых идей и методов, которые затем оказывались полезными при решении других задач. В пособии приводятся доказательства неравенств Джексона с точными константами в пространствах $C(T)$ (Н.П. Корнейчук), $L_2(T)$ (Н.И. Черных), теоремы Ахиезера—Крейна—Фавара, вычисление поперечника класса периодических функций с ограниченной r-й производной (В.М. Тихомиров).

Для заинтересованного читателя, который после изучения основного курса хотел бы познакомиться с современным уровнем исследований в теории приближений, написано приложение, в котором приводятся результаты Н.И. Черныха, В.А. Юдина, В.И. Бердышева и автора по вычислению точных констант в неравенствах Джексона в пространствах $L_p(T^m)$.

При подготовке учебного пособия автор использовал известные монографии Н.И. Ахиезера [1], Н.П. Корнейчука [13–15], В.М. Тихомирова [25], В.К. Дзядыка [8], И.К. Даугавета [7], П.-Ж. Лорана [17], И.П. Натансона [18], А.Ф. Тимана [24].

Автор предполагает, что читатель знаком с основными фактами математического анализа, теории меры и интеграла Лебега, а также с элементами функционального анализа в объеме известного университетского учебника А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина [12].

Рукопись учебного пособия внимательно прочитал и сделал полезные замечания доктор физ.-мат. наук, профессор МЭИ В.А. Юдин. Она была обсуждена коллективом кафедры математического анализа Тульского государственного педагогического университета (зав. кафедрой, кандидат физ.-мат. наук, доцент И.В. Денисов). Участники математического семинара в Тульском государственном университете В.В. Глаголев, Д.В. Горбачев, А.В. Московский, О.И. Смирнов помогали в формировании содержания пособия и подготовке оригинал-макета. Всем им автор искренне благодарен.

1. Наилучшее приближение в нормированном пространстве

1.1. Основные задачи теории приближений

Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ — подмножество в нем.

Определение 1.1. *Величиной наилучшего приближения элемента $x \in X$ множеством M называется число*

$$E(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|, \tag{1.1}$$

а элементом наилучшего приближения называется такой элемент $m^* \in M$, для которого $E(x, M) = \|x - m^*\|$.

Геометрически величина наилучшего приближения элемента x трактуется как его расстояние до множества M, а элемент наилучшего приближения — как точка множества M, ближайшая к x. В качестве аппроксимирующего множества M будем рассматривать подпространство конечной или бесконечной размерности.

Выделим следующие задачи теории приближений.

1. Проблема существования. Для каких множеств M элемент наилучшего приближения множеством M существует для каждого $x \in X$? Такие множества будем называть множествами существования.

2. Проблема единственности. Для каких множеств M элемент наилучшего приближения, если он существует, единственен для каждого $x \in X$? Такие множества будем называть множествами единственности. Множества существования и единственности будем называть чебышевскими.

3. Проблема характеризации. Для чебышевских множеств указать критерий элемента наилучшего приближения.

4. Проблема скорости приближения. Если

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots \text{ —}$$

расширяющаяся система подпространств размерности $\dim F_n = n$ сепарабельного пространства X, то для элемента $x \in X$ выяснить поведение величины $E(x, F_n)$ при $n \to \infty$ в зависимости от свойств (гладкости) элемента x. Соответствующие утверждения принято называть прямыми теоремами теории приближений, а утверждения, в которых свойства элемента x характеризуются в зависимости от поведения величины $E(x, F_n)$, — обратными теоремами теории приближений.

Рассмотрим также задачу о поведении величин наилучшего приближения при $n \to \infty$ не только для индивидуальных элементов, но и для множеств $\mathfrak{M} \subset X$:

$$E(\mathfrak{M}, F_n) = \sup_{x \in M} E(x, F_n). \tag{1.2}$$

1.2. Проблема существования

Если $X = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$, $M = (a, b)$, то для любого $x \notin (a, b)$ величина наилучшего приближения $E(x, M) = \min\{|x - a|, |x - b|\}$ не достигается на множестве M, поэтому M естественно считать замкнутым множеством.

Теорема 1.1. *Подпространство F конечной размерности в любом нормированном пространстве X является множеством существования.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Функционал $f(u) = \|x - u\|$ непрерывен на подпространстве F:

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant \|u_1 - u_2\|.$$

Если $u \in F$ и $\|u\| > 2\|x\|$, то

$$\|x - u\| \geqslant \|u\| - \|x\| > 2\|x\| - \|x\| = \|x\| \geqslant E(x, F) \quad (0 \in F).$$

Поэтому

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\| = \inf_{F \cap B_{2\|x\|}(0)} f(u),$$

где

$$B_{2\|x\|}(0) = \{\, y \in X \mid \|y\| \leqslant 2\|x\| \,\}.$$

Заметим, что непрерывный функционал $f(u)$ на замкнутом ограниченном множестве $F \cap B_{2\|x\|}(0)$ конечномерного подпространства F достигает свою нижнюю грань. $\square$

Бесконечномерное подпространство, например в $C[a,b]$, может не быть множеством существования.

1.3. Проблема единственности

Уже конечномерное подпространство может не быть множеством единственности. Если

$$X = l_1^2 = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \right\},$$

а $F = \left\{ x \in l_1^2 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$, то для элемента $x_0 = (1,1)$ и $|\alpha| \leqslant 1$

$$E(x_0, F) = 2 = \|x_0 - (\alpha, -\alpha)\|_1.$$

Но можно указать широкий класс нормированных пространств, в которых подпространства являются множествами единственности.

Определение 1.2. *Нормированное пространство X называется строго нормированным, если равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ выполняется только в случае, когда элементы x и y лежат на одном луче ($x = \alpha y$ или $y = \alpha x$ при $\alpha \geqslant 0$).*

Определение 1.3. *Нормированное пространство X называется пространством со строго выпуклой нормой, если сфера $\|x\| = 1$ не содержит отрезков, то есть из условий $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ следует, что $\|\alpha x + (1-\alpha) y\| < 1$ для всех $0 < \alpha < 1$.*

Лемма 1.1. *Нормированное пространство X строго нормированное тогда и только тогда, когда оно со строго выпуклой нормой.*

Доказательство. Пусть X — строго нормированное пространство и для некоторых $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$

$$1 = \|\alpha x + (1-\alpha) y\| = \alpha \|x\| + (1-\alpha)\|y\| = \|\alpha x\| + \|(1-\alpha) y\|.$$

Тогда элементы x и y будут лежать на одном луче. Это противоречит условиям $\|x\| = \|y\|$, $x \neq y$. Значит, X — пространство со строго выпуклой нормой.

Пусть норма в X строго выпуклая, x и y не лежат на одном луче,

$$x' = \frac{x}{\|x\|}, \quad y' = \frac{y}{\|y\|}, \quad \alpha = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}.$$

Тогда

$$\|\alpha x' + (1-\alpha)y'\| = \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\frac{y}{\|y\|} \right\| =$$
$$= \frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} < 1.$$

Следовательно, $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$. Пространство X строго нормированное. □

ТЕОРЕМА 1.2. *В строго нормированном пространстве любое подпространство является множеством существования.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в подпространстве F для некоторого элемента $x\in X$, $x\notin F$ существуют два ближайших элемента u_1, u_2, то есть

$$E(x,F) = \|x-u_1\| = \|x-u_2\|.$$

Тогда и элемент $(u_1+u_2)/2\in F$ также будет ближайшим:

$$E(x,F) \leqslant \left\| x - \frac{u_1+u_2}{2} \right\| = \left\| \frac{x-u_1}{2} + \frac{x-u_2}{2} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \frac{x-u_1}{2} \right\| + \left\| \frac{x-u_2}{2} \right\| = E(x,F).$$

В силу строгой нормированности пространства X элементы $x-u_1$ и $x-u_2$ лежат на одном луче. Пусть, например, $x-u_1=\alpha(x-u_2)$, $\alpha>0$. Случай $\alpha\neq 1$ невозможен. Иначе $x=\frac{u_1-\alpha u_2}{1-\alpha}\in F$. Если $\alpha=1$, то $u_1=u_2$. □

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *В строго нормированном пространстве любое конечномерное подпространство является чебышевским множеством.*

Известно, что классические пространства l_p^n, l_p, $L_p[a,b]$ при $1<p<\infty$ являются строго нормированными, а пространства l_1^n, l_1, $L[a,b]$, $C[a,b]$ не являются таковыми.

Например, функции $x_1(t)=1$, $x_2(t)=1-t^2$ не лежат на одном луче в пространстве $C[-1,1]$, но

$$2 = \|x_1(t)+x_2(t)\|_C = \|x_1(t)\|_C + \|x_2(t)\|_C.$$

Если подпространство $F=\mathfrak{L}\{t,t^2\}$, то

$$1 = E(1, F) = \|1\|_C = \|1 - t^2\|_C$$

и F не является множеством единственности.

Более подробно проблемы существования, единственности, а также проблемы характеризации и скорости приближения мы рассмотрим в гильбертовом пространстве и в пространстве $C[a, b]$.

2. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве

2.1. Основные понятия в гильбертовом пространстве

Напомним, что гильбертовым называется полное нормированное пространство H, в котором норма определена с помощью скалярного произведения

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Мы будем рассматривать только действительные гильбертовы пространства.

Конкретными примерами гильбертовых пространств являются пространство последовательностей

$$l_2 = \Big\{ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \,\Big|\, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \Big\},$$

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

и пространство $L_2[a, b]$ измеримых по Лебегу на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_2^2 = \int_a^b |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) \, dt.$$

В гильбертовом пространстве справедливо неравенство Коши—Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|, \tag{2.1}$$

позволяющее определить угол между элементами

$$\cos \widehat{xy} = \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|}$$

и ортогональность элементов

$$x \perp y \iff (x, y) = 0. \tag{2.2}$$

Равенство в неравенстве (2.1) выполняется только в случае, когда элементы x и y лежат на одном луче. Так как неравенство треугольника следует из неравенства (2.1)

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,$$

то гильбертово пространство является строго нормированным пространством. Строгая выпуклость нормы в гильбертовом пространстве вытекает также из легко проверяемого равенства параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Действительно, если предположить, что для некоторых $x, y \in H$, $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$ и $0 < \alpha < 1$

$$1 = \|\alpha x + (1 - \alpha) y\|^2 = 2\alpha^2 + 1 - 2\alpha + 2\alpha(1 - \alpha)(x, y),$$

то $(x, y) = 1$ и $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$. Противоречие следует из равенства параллелограмма

$$1 = \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 = 1 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 < 1.$$

2.2. Проблемы существования и единственности в гильбертовом пространстве

Напомним, что подпространством в нормированном пространстве называется замкнутое линейное множество. Конечномерное линейное множество всегда замкнуто.

Лемма 2.1 (неравенство Леви). *Если F — подпространство в гильбертовом пространстве H, $x\in H$, $d=E(x,F)$, то для любых двух элементов $u_1, u_2\in F$ выполняется неравенство*

$$\|u_1-u_2\| \leqslant \sqrt{\|x-u_1\|^2-d^2}+\sqrt{\|x-u_2\|^2-d^2}.$$

Доказательство. Для любого $\lambda\neq-1$ элемент $u=\frac{u_1+\lambda u_2}{1+\lambda}\in F$. Тогда

$$d^2 \leqslant \left\|x-\frac{u_1+\lambda u_2}{1+\lambda}\right\|^2=\frac{1}{(1+\lambda)^2}\|(x-u_1)+\lambda(x-u_2)\|^2=$$
$$=\frac{1}{(1+\lambda)^2}\big\{\|x-u_1\|^2+2\lambda(x-u_1,x-u_2)+\lambda^2\|x-u_2\|^2\big\}.$$

Отсюда

$$\lambda^2\big(\|x-u_2\|^2-d^2\big)+2\lambda\big\{(x-u_1,x-u_2)-d^2\big\}+\|x-u_1\|^2-d^2\geqslant 0.$$

Так как λ произвольно, то

$$\big|(x-u_1,x-u_2)-d^2\big|\leqslant\sqrt{\|x-u_1\|^2-d^2}\sqrt{\|x-u_2\|^2-d^2}.$$

Следовательно,

$$\|u_1-u_2\|^2=\|(x-u_1)-(x-u_2)\|^2=$$
$$\|x-u_1\|^2-2(x-u_1,x-u_2)+\|x-u_2\|^2=$$
$$=\big(\|x-u_1\|^2-d^2\big)-2\big\{(x-u_1,x-u_2)-d^2\big\}+\big(\|x-u_2\|^2-d^2\big)\leqslant$$
$$\leqslant\big(\|x-u_1\|^2-d^2\big)+2\sqrt{\|x-u_1\|^2-d^2}\sqrt{\|x-u_2\|^2-d^2}+$$
$$+\big(\|x-u_2\|^2-d^2\big)=\Big(\sqrt{\|x-u_1\|^2-d^2}+\sqrt{\|x-u_2\|^2-d^2}\Big)^2. \quad \square$$

Теорема 2.1. *Любое подпространство в гильбертовом пространстве является чебышевским множеством.*

Доказательство. Пусть F — подпространство в гильбертовом пространстве H, $x\in H$, $d=E(x,F)$. Если $\{u_n\}\subset F$ — минимизирующая последовательность, то есть такая последовательность, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-u_n\|=d$, то согласно неравенству Леви

$$\|u_n-u_m\|\leqslant\sqrt{\|x-u_n\|^2-d^2}+\sqrt{\|x-u_m\|^2-d^2},$$

полноты H и замкнутости F она будет фундаментальной, а значит, и сходящейся к некоторому элементу $u^*\in F$. Покажем, что элемент u^* будет ближайшим для элемента x в F. Действительно,

$$\|x-u^*\| \leqslant \|x-u_n\| + \|u^*-u_n\|$$

и, следовательно, $\|x-u^*\|\leqslant d$. Обратное неравенство очевидно. Единственность u^* также является простым следствием неравенства Леви. □

Отметим, что в теореме 2.1 не предполагается конечномерности подпространства F.

2.3. Проблема характеризации элемента наилучшего приближения подпространством

Теорема 2.2. *Если F подпространство в гильбертовом пространстве H, $x\in H$, то $E(x,F)=\|x-u^*\|$ тогда и только тогда, когда $x-u^*\perp F$, то есть для всех $u\in F$ $(x-u^*,u)=0$.*

Доказательство. Достаточность. Если $u\in F$, $u\neq u^*$, то

$$\begin{aligned}\|x-u\|^2 = \|(x-u^*)+(u^*-u)\|^2 = \\ = \|x-u^*\|^2+2(x-u^*,u^*-u)+\|u^*-u\|^2 = \\ = \|x-u^*\|^2+\|u^*-u\|^2 > \|x-u^*\|^2.\end{aligned}$$

Тогда элемент u^* является ближайшим элементом для элемента x в подпространстве F.

Необходимость. Пусть u^* — ближайший элемент для x в F. Тогда для любых $u\in F$ и $\lambda\in\mathbb{R}$

$$0\leqslant \|x-u^*-\lambda u\|^2-\|x-u^*\|^2 = -2\lambda(x-u^*,u)+\lambda^2\|u\|^2.$$

Полагая $\lambda=\frac{(x-u^*,u)}{\|u\|^2}$, получим

$$-\frac{(x-u^*,u)^2}{\|u\|^2}\geqslant 0$$

Отсюда следует, что $(x-u^*,u)=0$ для любого элемента $u\in F$. □

2.4. Приближение конечномерным подпространством. Определитель Грама

Пусть $F_n \subset H$ — подпространство размерности n, а элементы $u_1, \ldots, u_n$ образуют базис в нем. Для $x \in H$ ближайший элемент u^* в F_n может быть представлен в виде

$$u^* = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Согласно теореме 2.2 коэффициенты разложения находятся из системы уравнений

$$(x - u^*, u_k) = 0 \quad \text{или} \quad (u^*, u_k) = (x, u_k) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Определитель этой системы

$$G(u_1, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) & \ldots & (u_n, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) & \ldots & (u_n, u_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (u_1, u_n) & (u_2, u_n) & \ldots & (u_n, u_n) \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

называется определителем Грама.

Согласно теореме 2.1 для линейно независимой системы векторов определитель Грама отличен от нуля, а система (2.3) имеет единственное решение. Найдем выражение для величины наилучшего приближения $d = E(x, F_n)$.

В соответствии с (2.3)

$$d^2 = (x - u^*, x - u^*) = (x - u^*, x) = (x, x) - (u^*, x).$$

Присоединяя к (2.3) уравнение $(u^*, x) = (x, x) - d^2$ и исключая $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, найдем, что

$$\begin{vmatrix} (u_1, u_1) & \ldots & (u_n, u_1) & (x, u_1) \\ (u_1, u_2) & \ldots & (u_n, u_2) & (x, u_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (u_1, u_n) & \ldots & (u_n, u_n) & (x, u_n) \\ (u_1, x) & \ldots & (u_n, x) & (x, x) - d^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$d^2 = E^2(x, F_n) = \frac{G(x, u_1, \ldots, u_n)}{G(u_1, \ldots, u_n)}. \tag{2.5}$$

Особенно простыми решение системы (2.3) и определитель Грама будут, если векторы $u_1, \dots, u_n$ образуют ортогональный базис $(u_i, u_j)=0$ для $i \neq j$. В этом случае

$$u^* = \frac{(x, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 + \dots + \frac{(x, u_n)}{(u_n, u_n)} u_n; \tag{2.6}$$

$$G(u_1, \dots, u_n) = (u_1, u_1) \dots (u_n, u_n); \tag{2.7}$$

$$G(x, u_1, \dots, u_n) = (u_1, u_1) \dots (u_n, u_n) \times \\ \times \left\{ (x, x) - \frac{(x, u_1)^2}{(u_1, u_1)} - \dots - \frac{(x, u_n)^2}{(u_n, u_n)} \right\};$$

$$E^2(x, F_n) = \frac{G(x, u_1, \dots, u_n)}{G(u_1, \dots, u_n)} = \|x\|^2 - \frac{(x, u_1)^2}{\|u_1\|^2} - \dots - \frac{(x, u_n)^2}{\|u_n\|^2}. \tag{2.8}$$

Для ортонормированного базиса $(u_i, u_j)=\delta_{ij}$ и

$$u^* = (x, u_1)u_1 + \dots + (x, u_n)u_n, \quad G(u_1, \dots, u_n) = 1; \tag{2.9}$$

$$E^2(x, F_n) = G(x, u_1, \dots, u_n) = \\ = \|x\|^2 - (x, u_1)^2 - \dots - (x, u_n)^2. \tag{2.10}$$

3. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве

3.1. Ряды Фурье по ортогональным и ортонормированным системам. Неравенство Бесселя

Пусть H — бесконечное сепарабельное гильбертово пространство. Это означает, что в H есть счетное всюду плотное множество.

Определение 3.1. *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортогональной системой в гильбертовом пространстве H, если для любых $n \neq m$ $(\varphi_n, \varphi_m)=0$. Если к тому же выполнены условия $(\varphi_n, \varphi_n)=1$ $(n \in \mathbb{N})$, то система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортонормированной системой.*

Любая бесконечная ортонормированная система, а значит, и бесконечная ортогональная система являются счетными. Действительно, если выбрать подмножество $\{x_n\}$ счетного всюду плотного множества так, чтобы $\|\varphi_n - x_n\| < \frac{1}{2}$ для всех n, то это соответствие будет взаимно однозначным, так как в случае ортонормированной системы

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) - 2(\varphi_n, \varphi_m) + (\varphi_m, \varphi_m) = 2 \quad (n \neq m).$$

Определение 3.2. *Рядом Фурье элемента $x \in H$ по ортогональной (ортонормированной) системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n \varphi_n, \tag{3.1}$$

у которого коэффициенты, называемые коэффициентами Фурье, имеют вид

$$\widehat{x}_n = \frac{(x, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \quad (\widehat{x}_n = (x, \varphi_n)). \tag{3.2}$$

Из предыдущего раздела следует, что если подпространство F_n есть линейная оболочка элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$, то частичная сумма ряда Фурье

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}_k \varphi_k$$

доставляет наилучшее приближение элементу x $E(x, F_n) = \|x - S_n x\|$ и при этом

$$E^2(x, F_n) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \tag{3.3}$$

в случае ортогональной системы, а в случае ортонормированной системы

$$E^2(x, F_n) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}_k|^2.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|x\|^2, \tag{3.4}$$

называемое неравенством Бесселя, которое справедливо для любого элемента $x \in H$ и любой ортогональной системы.

Отметим, что для любого $x \in H$ ряд Фурье (3.1) сходится к некоторому элементу $x_0 \in H$. В силу полноты H достаточно проверить фундаментальность последовательности частичных сумм. Если $n > m$, то из сходимости ряда (3.4) следует, что

$$\|S_n x - S_m x\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \widehat{x}_k \varphi_k \right\|^2 =$$
$$= \sum_{k=m+1}^{n} |\widehat{x}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Возникает вопрос, когда $x_0 = x$?

3.2. Полные ортогональные и ортонормированные системы. Равенство Парсеваля

Определение 3.3. *Ортогональная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется базисом в H, если для любого элемента $x \in H$ ряд Фурье (3.1) сходится к x, то есть $\|x - S_n x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.*

Определение 3.4. *Ортогональная система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется замкнутой в* H, *если линейные комбинации элементов системы образуют плотное множество в* H.

Определение 3.5. *Ортогональная система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется полной, если в* H *нет нулевого элемента, ортогонального всем элементам системы.*

Определение 3.6. *Для ортогональной системы* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *выполняется равенство Парсеваля, если для любого* $x \in H$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_k|^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Теорема 3.1. *Если* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— ортогональная система в гильбертовом пространстве* H, *то следующие условия эквивалентны:*

1) Φ *— замкнутая в* H *система;*
2) Φ *— базис в* H;
3) *для системы* Φ *выполнено равенство Парсеваля;*
4) Φ *— полная ортогональная система в* H.

Доказательство. 1)$\Longrightarrow$2). Эта импликация очевидна, так как среди всех линейных комбинаций частичные суммы ряда Фурье доставляют наилучшее приближение.

2)$\Longrightarrow$3). Если подпространство F_n есть линейная оболочка элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, то из базисности системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что для любого $x \in H$ $\lim\limits_{n\to\infty} E(x, F_n) = 0$. Тогда согласно (3.3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|x\|^2,$$

а это и есть равенство Парсеваля.

3)$\Longrightarrow$4). Если предположить, что для некоторого $x_0 \in H$, $x_0 \neq 0$ все коэффициенты Фурье $(\widehat{x}_0)_k = 0$, то согласно равенству Парсеваля

$$\|x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\widehat{x}_0)_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = 0.$$

И мы получаем противоречие.

4)$\Longrightarrow$1). Пусть H_0 — замыкание объединения подпространств F_n в H, $H_0^\perp$ — его ортогональное дополнение. Если $H_0^\perp=\{0\}$, то $H = H_0$. А если $H_0^\perp\neq\{0\}$, то существует элемент $x_0\in H_0^\perp$, $x_0\neq 0$, ортогональный всем элементам системы. □

3.3. Ортогонализация линейно независимых систем

Большое число полных ортонормированных систем можно получать исходя из следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ — замкнутая линейно независимая в H система. Существует такая полная ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, для которой выполняются следующие свойства:*

1) каждый элемент этой системы φ_k есть линейная комбинация элементов $\psi_1,\dots,\psi_k$;

2) каждый элемент исходной системы ψ_k есть линейная комбинация элементов $\varphi_1,\dots\varphi_k$.

Доказательство. Так как ортогональная система является линейно независимой, то требование линейной независимости исходной системы является естественным. Построение ортонормированной системы будем вести методом Шмидта. Пусть $\varphi_1=\frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}$. Если элементы $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ уже построены, то полагаем

$$\varphi'_{n+1} = \psi_{n+1} - (\psi_{n+1},\varphi_1)\varphi_1 - \dots - (\psi_{n+1},\varphi_n)\varphi_n, \quad \varphi_{n+1} = \frac{\varphi'_{n+1}}{\|\varphi'_{n+1}\|}.$$

Выполнение утверждений 1 и 2 теоремы очевидно. Полнота ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ следует из этих утверждений и замкнутости исходной системы. □

В следующем разделе мы продемонстрируем применение теоремы 3.2.

Учитывая, что определения 3.3—3.6 эквивалентные, в дальнейшем будем вести речь о полных ортогональных или полных ортонормированных системах.

4. Примеры полных ортогональных систем

4.1. Тригонометрическая система

Пусть $T=[0,2\pi)$ — одномерный тор с операцией сложения по $\operatorname{mod} 2\pi$, $L_2(T)$ — множество всех измеримых по Лебегу на T функций $f(x)$ (их можно считать периодически продолженными на всю прямую с периодом 2π), для которых конечна норма

$$\|f\|_2 = \left(\int\limits_T |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}, \quad (f,g) = \int\limits_T f(x)g(x)\,dx.$$

Легко проверяется, что тригонометрическая система

$$\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\} \tag{4.1}$$

является ортогональной в пространстве $L_2(T)$, причем

$$(1,1) = 2\pi, \quad (\cos nx, \cos nx) = (\sin nx, \sin nx) = \pi.$$

Ряд Фурье для тригонометрической системы обычно записывается в виде

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

а частичные суммы

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Так как пространство непрерывных функций $C(T)$ плотно вложено в $L_2(T)$, то теорема Вейерштрасса о возможности равномерного приближения функций из $C(T)$ тригонометрическими полиномами, обычно доказываемая в университетском курсе математического анализа, утверждает, что тригонометрическая система является полной ортогональной системой в $L_2(T)$. Равенство Парсеваля для тригонометрической системы имеет вид

$$\int_T |f(x)|^2\,dx = \pi\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right\}.$$

Удобно использовать комплексную форму тригонометрической системы

$$\{1, e^{ix}, e^{-ix}, \dots, e^{inx}, e^{-inx}, \dots\}$$

и ряда Фурье

$$f(x) \sim \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x},$$

где

$$\widehat{f}_\nu = \frac{(f, e^{i\nu x})}{(e^{i\nu x}, e^{i\nu x})} = \frac{1}{2\pi}\int_T f(x)e^{-i\nu x}\,dx.$$

Частичные суммы и равенство Парсеваля в этом случае имеют следующий вид:

$$S_n f(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x},$$

$$\int_T |f(x)|^2\,dx = 2\pi\sum_{\nu\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2.$$

4.2. Система Хаара

Система Хаара определяется в пространстве $L_2[0,1]$. Система Хаара — это система функций $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, в которой функция $\chi_1(x)\equiv 1$, а функции $\chi_n(x)$ с $n=2^k+i$, $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$, $i=1,\dots,2^k$, $k=0,1,\dots$ определяются так:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & x \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_n^-, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{4.2}$$

В ортонормированности системы Хаара легко убедиться, выполнив простые вычисления. Ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x),$$

где

$$c_1 = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad c_n = 2^{k/2} \left\{ \int_{\Delta_n^+} f(x)\,dx - \int_{\Delta_n^-} f(x)\,dx \right\}.$$

Линейная оболочка функций $\{\chi_n\}_{n=1}^{2^k}$ совпадает с множеством всех кусочно-постоянных функций D_{2^k} с участками постоянства вида $\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $i=1,\ldots,2^k$. Это следует из того, что функции $\{\chi_n\}_{n=1}^{2^k}$ кусочно-постоянные и линейно независимые, а $\dim D_{2^k}=2^k$.

4.3. Система Уолша

Всякое число $x\in[0,1]$ может быть записано в двоичной системе

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k+1}}, \quad x_k = 0, 1.$$

Коэффициенты x_k определяются однозначно, если считать дополнительно, что для двоично-рациональных x рассматривается разложение с конечным числом ненулевых коэффициентов. Аналогично любое $n\in\mathbb{N}$ может быть записано в двоичной системе:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k = \sum_{k=0}^{k(n)} n_k 2^k, \quad n_k = 0, 1, \quad k(n) = [\log_2 n].$$

Система Уолша — это система функций $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, в которой $W_0(x)\equiv 1$, а при $n\geqslant 1$

$$W_n(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} x_k n_k} = (-1)^{\sum_{k=0}^{k(n)} x_k n_k}. \tag{4.3}$$

Мы не будем останавливаться на проверке ортогональности системы Уолша в $L_2[0,1]$. Так как для всех n $|W_n(x)|=1$, то ее нормированность очевидна. Функции системы Уолша являются кусочно постоянными с участками постоянства $\left(\frac{i-1}{2^k};\frac{i}{2^k}\right)$ и значениями ± 1. В силу ортогональности линейная оболочка функций $\{W_n(x)\}_{n=0}^{2^k-1}$ совпадает с D_{2^k}. Отсюда следует полнота системы Уолша в $L_2[0,1]$.

4.4. Ортогональные многочлены

Пусть $p(x)\in L[a,b]$, $p\geqslant 0$ — весовая функция, $L_{2,p}[a,b]$ — пространство функций $f(x)$, для которых $\sqrt{p(x)}f(x)\in L_2[a,b]$. Пространство $L_{2,p}[a,b]$ — гильбертово с нормой

$$\|f\|_2 = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^2 p(x)\,dx\right)^{1/2}$$

и скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)p(x)\,dx.$$

Согласно теореме Вейерштрасса о возможности равномерного приближения непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций алгебраическими многочленами система степеней

$$\{1, x, \ldots, x^n, \ldots,\}$$

образует замкнутую линейно независимую систему в пространстве $L_{2,p}[a,b]$. Процесс ортогонализации для системы степеней, рассмотренный в теореме 3.2, приводит к полной ортонормированной системе многочленов $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $L_{2,p}[a,b]$.

Наиболее известными среди систем многочленов являются многочлены Якоби $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональные с весом $p(x)=(1-x)^\alpha\times(1+x)^\beta$ $(\alpha,\beta)>-1$ в пространстве $L_{2,p}[-1,1]$. Они известны как ультрасферические или многочлены Гегенбауэра при $\alpha=\beta$, многочлены Лежандра при $\alpha=\beta=0$, многочлены Чебышева при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$.

Ортогональные многочлены Чебышева на отрезке $[-1,1]$ могут быть определены как

$$T_n(x) = \cos n \arccos x. \tag{4.4}$$

Их нормы легко вычисляются:

$$(T_0, T_0) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi;$$

$$(T_n, T_n) = \int\limits_{-1}^{1} \cos^2(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{0}^{\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (n \geqslant 1).$$

Далее имеем

$$T_0(x)=1, \qquad T_1(x)=x$$

и из формулы

$$\cos(n+2)\theta = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta$$

следует, что

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Таким образом, $T_n(x)$ является многочленом степени n с коэффициентом 2^{n-1} при x^n.

5. Прямые теоремы теории приближений в пространстве $L_2(T)$

5.1. Неравенство Н.И. Черныха. Первая теорема Джексона

Пусть для $f \in L_2(T)$

$$E_n(f)_2 = \|f(x) - S_{n-1}f(x)\|_2 \text{ —}$$

величина наилучшего приближения тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ $(n \geqslant 1)$,

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x), \quad \omega(\delta, f)_2 = \sup_{|t| \leqslant \delta} \|\Delta_t f\|_2 \text{ —}$$

модуль непрерывности.

Если

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x},$$

то по равенству Парсеваля

$$E_n^2(f)_2 = \left\| f(x) - \sum_{|\nu| \leqslant n-1} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x} \right\|_2^2 = \\
= \left\| \sum_{|\nu| \geqslant n} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x} \right\|_2^2 = 2\pi \sum_{|\nu| \geqslant n} |\widehat{f}_\nu|^2; \tag{5.1}$$

$$\|\Delta_t f(x)\|_2^2 = \left\| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu (1 - e^{i\nu t}) e^{i\nu x} \right\|_2^2 = \\
= 2\pi \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 |1 - e^{i\nu t}|^2 = 4\pi \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 (1 - \cos \nu t). \tag{5.2}$$

Теорема 5.1 [26]. *Для любого $n \in \mathbb{N}$, любой функции $f \in L_2(T)$ справедливо точное неравенство*

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_2. \tag{5.3}$$

Доказательство. Рассмотрим четную 2π-периодическую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} \cos nt, & |t| \leqslant \frac{\pi}{2n}, \\ 0, & \frac{\pi}{2n} < |t| \leqslant \pi \end{cases}$$

и разложим ее в ряд Фурье. Имеем

$$\widehat{\varphi}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \varphi(t) e^{-i\nu t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \varphi(t) \cos \nu t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos nt \cos \nu t \, dt.$$

По формуле тригонометрии

$$\cos nt \cos \nu t = \frac{1}{2}(\cos(n+\nu)t + \cos(n-\nu)t).$$

Следовательно, для $|\nu| \neq n$ найдем

$$\widehat{\varphi}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} [\cos(n+\nu)t + \cos(n-\nu)t]\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(n+\nu)t}{n+\nu} \Big|_0^{\frac{\pi}{2n}} + \frac{\sin(n-\nu)t}{n-\nu} \Big|_0^{\frac{\pi}{2n}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin(n+\nu)\frac{\pi}{2n}}{n+\nu} + \frac{\sin(n-\nu)\frac{\pi}{2n}}{n-\nu} \right\}.$$

По формуле приведения получим

$$\widehat{\varphi}_\nu = \frac{n \cdot \cos \frac{\nu\pi}{2n}}{\pi(n^2 - \nu^2)}. \qquad (5.4)$$

При $|\nu| = n$

$$\widehat{\varphi}_\nu = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos^2 nt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} (1 + \cos 2nt)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(t + \frac{\sin 2nt}{2n} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2n}.$$

Рассмотрим новую функцию

$$\psi(t)=\varphi\left(t-\tfrac{\pi}{2n}\right)+\varphi\left(t+\tfrac{\pi}{2n}\right)=\begin{cases}|\sin nt|, & |t|\leqslant\frac{\pi}{n},\\ 0, & \frac{\pi}{n}<|t|\leqslant\pi.\end{cases}$$

Найдем ее коэффициенты Фурье:

$$\widehat{\psi}_\nu=\frac{1}{2\pi}\int\limits_T\left[\varphi\left(t-\tfrac{\pi}{2n}\right)+\varphi\left(t+\tfrac{\pi}{2n}\right)\right]e^{-i\nu t}\,dt.$$

Используя четность функции $\psi(t)$ и проводя замены переменных $t-\frac{\pi}{2n}=\tau$, $t+\frac{\pi}{2n}=\tau$, получаем

$$\widehat{\psi}_\nu=\frac{1}{2\pi}\int\limits_T\varphi(\tau)e^{-i\nu(\tau-\frac{\pi}{2n})}+e^{-i\nu(\tau+\frac{\pi}{2n})}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_T\varphi(\tau)\cos\nu\tau\cos\tfrac{\nu\pi}{2n}\,d\tau=2\widehat{\varphi}_\nu\cos\tfrac{\nu\pi}{2n}.$$

С помощью (5.4) запишем общий вид коэффициентов Фурье функции $\psi(t)$

$$\widehat{\psi}_\nu=\begin{cases}\frac{2n\cos^2\frac{\nu\pi}{2n}}{\pi(n^2-\nu^2)}, & |\nu|\neq n,\\ 0, & |\nu|=n,\end{cases}$$

из которого получаем два важных свойства функции $\psi(t)$:

1) $\widehat{\psi}_\nu\leqslant 0\quad(|\nu|\geqslant n),\qquad \widehat{\psi}_\nu\geqslant 0\quad(|\nu|\leqslant n);$

2) $\psi(t)\geqslant 0\quad(|t|\leqslant\frac{\pi}{n}),\qquad \psi(t)\equiv 0\quad(\frac{\pi}{n}\leqslant|t|\leqslant\pi).$

Эти свойства позволят без особого труда доказать неравенство (5.3). Проинтегрируем $\|\Delta_t f\|_2^2$ с весом $\psi(t)$ на T. Согласно (5.2)

$$I=\int\limits_T\|\Delta_t f\|_2^2\psi(t)\,dt=4\pi\int\limits_T\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_\nu|^2(1-\cos\nu t)\psi(t)\,dt\geqslant$$

$$\geqslant 4\pi\sum_{|\nu|\geqslant n}|\widehat{f}_\nu|^2\int\limits_T(1-\cos\nu t)\psi(t)\,dt=$$

$$=8\pi^2\left\{\sum_{|\nu|\geqslant n}|\widehat{f}_\nu|^2\widehat{\psi}_0-\sum_{|\nu|\geqslant n}|\widehat{f}_\nu|^2\widehat{\psi}_\nu\right\}.$$

В силу свойства 1 и (5.1)

$$I \geqslant 8\pi^2 \widehat{\psi}_0 \sum_{|\nu| \geqslant n} |\widehat{f}_\nu|^2 = 4\pi\widehat{\psi}_0 E_n^2(f)_2.$$

В силу свойства 2 получим

$$I = \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \|\Delta_t f\|_2^2 \psi(t)\, dt \leqslant \sup_{|t| \leqslant \frac{\pi}{n}} \|\Delta_t f\|_2^2 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \psi(t)\, dt =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_2 \int_T \psi(t)\, dt = 2\pi\widehat{\psi}_0 \omega^2\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_2.$$

Сравнивая доказанные неравенства для I, получаем (5.3).

Для доказательства точности неравенства (5.3) рассмотрим последовательность 2π-периодических функций:

$$f_N(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{N}, \\ 0, & \frac{2\pi}{N} < x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Для любого $t \in T$ имеем

$$\|\Delta_t f_N(x)\|_2^2 = \int_T \left\{ |f_N(x+t)|^2 + |f_N(x)|^2 - 2f_N(x)f_N(x+t) \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_T |f_N(x)|^2\, dx = \frac{4\pi}{N}.$$

Следовательно,

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}, f_N\right)_2 \leqslant 2\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2}. \tag{5.5}$$

Так как

$$|(\widehat{f}_N)_\nu| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_0^{\frac{2\pi}{N}} e^{-i\nu x}\, dx \right| \leqslant \frac{1}{N},$$

то

$$|S_{n-1} f_N(x)| = \left| \sum_{|\nu| \leqslant n-1} (\widehat{f}_N)_\nu e^{i\nu x} \right| \leqslant \frac{2n-1}{N}.$$

Тогда для достаточно больших N

$$E_n(f_N)_2 = \left(\int\limits_T |f_N(x) - S_{n-1} f_N(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_0^{\frac{2\pi}{N}} \left| 1 - \frac{2n-1}{N} \right|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi}{N} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2n-1}{N} \right).$$

Отсюда и из (5.5) следует, что

$$\sup_{f \in L_2(T)} \frac{E_n(f)_2}{\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_2} \geqslant \sup_N \frac{E_n(f_N)_2}{\omega\left(\frac{\pi}{n}, f_N\right)_2} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_N \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2n-1}{N} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \square$$

Неравенство (5.3) принято называть первой теоремой Джексона.

Определение 5.1. *Функция $f(x)$ называется принадлежащей классу $K\,\mathrm{Lip}(\alpha, 2)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, если для всех δ $(0<\delta\leqslant\pi)$ выполняется неравенство*

$$\omega(\delta, f)_2 \leqslant K\delta^2.$$

Следствие 5.1. *Если $f(x) \in K\,\mathrm{Lip}(\alpha, 2)$,* то для всех $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{K}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{n} \right)^\alpha.$$

5.2. Вторая теорема Джексона

Определение 5.2. *Будем говорить, что функция $f(x) \in L_2(T)$ имеет производную*

$$f^{(r)}(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu (i\nu)^r e^{i\nu x}$$

порядка $r \in \mathbb{N}$ в смысле L_2 и писать $f(x) \in L_2^r(T)$, если

$$\|f^{(r)}\|_2^2 = 2\pi \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 |\nu|^{2r} < \infty.$$

Теорема 5.2. *Если функция* $f(x) \in L_2^r(T)$, $r \in \mathbb{N}$, *то для всех* $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{1}{n^r} E_n(f^{(r)})_2. \tag{5.6}$$

Доказательство. Если $f(x) \in L_2^r(T)$, то согласно (5.1)

$$E_n^2(f^{(r)})_2 = 2\pi \sum_{|\nu| \geqslant n} |\widehat{f}_\nu|^2 |\nu|^{2r} \geqslant 2\pi n^{2r} \sum_{|\nu| \geqslant n} |\widehat{f}_\nu|^2 = n^{2r} E_n^2(f)_2. \quad \square$$

Из теорем 5.1 и 5.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.3. *Если* $f(x) \in L_2^r(T)$, $r \in \mathbb{N}$, *то для всех* $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2} n^r} \omega \left(\frac{\pi}{n}, f^{(r)} \right)_2. \tag{5.7}$$

Теорему 5.3 принято называть второй теоремой Джексона.

Определение 5.3. *Функция* $f(x)$ *называется принадлежащей классу* $KW_2^r \operatorname{Lip}(\alpha, 2)$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ r \in \mathbb{N})$, *если* $f(x) \in L_2^r(T)$ *и для всех* δ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ *выполняется неравенство*

$$\omega(\delta, f^{(r)})_2 \leqslant K\delta^\alpha.$$

Следствие 5.2. *Если* $f(x) \in KW_2^r \operatorname{Lip}(\alpha, 2)$, *то для всех* $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{K\pi^\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^{r+\alpha}}.$$

Можно показать, что, если $f(x) \in L_2^r(T)$, $r > m + \frac{1}{2}$, то $f(x)$ имеет обычную производную порядка m.

6. Обратные теоремы теории приближений в пространстве $L_2(T)$

6.1. Первая обратная теорема в $L_2(T)$

Рассмотрим следующий вопрос: как, зная скорость убывания наилучших приближений $E_n(f)_2$, оценить гладкость функции, например, модуль непрерывности $\omega(\delta, f)_2$?

Теорема 6.1. *Если $f(x) \in L_2(T)$, то для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\omega\left(\tfrac{\pi}{n}, f\right)_2 \leqslant \frac{2\pi}{n}\left\{\sum_{l=1}^{n} l E_l^2(f)_2\right\}^{1/2}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Пусть $t = \frac{\pi}{n}$. Согласно (5.2)

$$\begin{aligned}\|\Delta_t f\|_2^2 &= 4\pi \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2(1-\cos\nu t) = \\ &= 4\pi \sum_{|\nu|\leqslant n-1} |\widehat{f}_\nu|^2(1-\cos\nu t) + 4\pi \sum_{|\nu|\geqslant n} |\widehat{f}_\nu|^2(1-\cos\nu t) = \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Так как $1-\cos\nu t \leqslant 2$, то

$$\begin{aligned}I_2 &\leqslant 8\pi \sum_{|\nu|\geqslant n} |\widehat{f}_\nu|^2 = 4E_n^2(f)_2 \leqslant \frac{n(n+1)}{2} t^2 E_n^2(f)_2 = \\ &= t^2 \sum_{l=1}^{n} l E_n^2(f)_2 \leqslant 2t^2 \sum_{l=1}^{n} l E_n^2(f)_2.\end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое I_1. Имеем

$$I_1 = 4\pi \sum_{|\nu|\leqslant n-1} |\widehat{f}_\nu|^2(1-\cos\nu t) \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi \left\{ (1-\cos t) \sum_{|\nu|\geqslant 1} |\widehat{f}_\nu|^2 + (\cos t - \cos 2t) \sum_{|\nu|\geqslant 2} |\widehat{f}_\nu|^2 + \dots + \right.$$

$$\left. + (\cos(n-2)t - \cos(n-1)t) \sum_{|\nu|\geqslant n-1} |\widehat{f}_\nu|^2 \right\}.$$

Так как

$$\cos(l-1)t - \cos lt = 2\sin\left(l - \tfrac{1}{2}\right)t \sin\tfrac{t}{2} \leqslant \left(l - \tfrac{1}{2}\right)t^2 \leqslant lt^2,$$

то согласно (5.1)

$$I_1 \leqslant 2t^2 \sum_{l=1}^{n-1} lE_l^2(f)_2.$$

Собирая вместе оценки I_1 и I_2, получим

$$\|\Delta_t f\|_2^2 \leqslant 4t^2 \sum_{l=1}^{n} lE_l^2(f)_2. \quad \square$$

Следствие 6.1. *Если* $f(x) \in L_2(T)$ *и*

$$E_n(f)_2 = \mathrm{O}\left(\tfrac{1}{n^\alpha}\right) \quad (0 \leqslant \alpha < 1,\ n \to \infty),$$

то

$$\omega(\delta, f)_2 = \mathrm{O}(\delta^\alpha) \quad (\delta \to 0).$$

Доказательство. Если $\frac{\pi}{n+1} < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}$, то по теореме 6.1

$$\omega^2(\delta, f)_2 \leqslant \omega^2\left(\tfrac{\pi}{n}, f\right)_2 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n} l^{1-2\alpha}\right) =$$

$$= \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\int_1^n x^{1-2\alpha}\,dx\right) = \mathrm{O}(n^{-2\alpha}) = \mathrm{O}(\delta^{2\alpha}),$$

откуда $\omega(\delta, f)_2 = \mathrm{O}(\delta^\alpha)$ $(\delta \to 0)$. $\square$

Следствие 6.2. *Для того чтобы* $E_n(f)_2 = \mathrm{O}(\frac{1}{n^\alpha})$ $(0<\alpha<1)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\omega(\delta, f)_2 = \mathrm{O}(\delta^\alpha)$.

6.2. Вторая обратная теорема в $\mathrm{L}_2(\mathrm{T})$

Аналогично теореме 6.1, но несколько сложнее, доказывается следующая теорема.

Теорема 6.2. *Если* $r \in \mathbb{N}$, то *существуют постоянные* $A_r > 0$, $B_r > 0$ *такие, что для любой* $f(x) \in L_2(T)$, *для которой*

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{2r-1} E_l^2(f)_2 < \infty,$$

$f(x) \in L_2^r(T)$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}, f^{(r)}\right)_2 \leqslant \frac{A_r}{n} \left\{ \sum_{l=1}^{n} l^{2r+1} E_l^2(f)_2 \right\}^{1/2} + \\ + B_r \left\{ \sum_{l=n+1}^{\infty} l^{2r-1} E_l^2(f)_2 \right\}^{1/2}. \quad (6.2)$$

Доказательство этой теоремы приводить не будем.

Следствие 6.3. *Если функция* $f(x) \in L_2(T)$, $r \in \mathbb{N}$ *и*

$$E_n(f)_2 = \mathrm{O}(n^{-r-\alpha}) \quad (r \in \mathbb{N}.\ 0 < \alpha < 1,\ n \to \infty),$$

то $f(x) \in L_2^r(T)$ *и*

$$\omega(\delta, f^{(r)})_2 = \mathrm{O}(\delta^\alpha) \quad (\delta \to 0).$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} l^{2r-1} E_l^2(f)_2 = \mathrm{O}\left(\sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{l^{1+2\alpha}} \right) = \\ = \mathrm{O}\left(\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{1+2\alpha}} \right) = \mathrm{O}(n^{-2\alpha}).$$

Тогда по теореме 6.2 $f(x)\in L_2^r(T)$ и

$$\omega^2\left(\tfrac{\pi}{n}, f^{(r)}\right)_2 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} l^{1-2\alpha}\right) + \mathrm{O}(n^{-2\alpha}) = \mathrm{O}(n^{-2\alpha}).$$

Отсюда

$$\omega(\delta, f^{(r)})_2 = \mathrm{O}(\delta^\alpha) \quad (\delta \to 0). \quad \square$$

Следствие 6.4. *Для того чтобы $E_n(f)_2 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ $(r \in \mathbb{N}, 0 < \alpha < 1)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)\in L_2^r(T)$ и $\omega(\delta, f^{(r)})_2 = \mathrm{O}(\delta^\alpha)$.*

Другие обратные теоремы, но менее точные, не учитывающие строгую выпуклость нормы в пространстве $L_2(T)$, можно доказывать, опираясь на неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов. Схему рассуждений укажем позже, при доказательстве обратных теорем в пространстве $C(T)$.

6.3. Неравенства Бернштейна и Колмогорова

Теорема 6.3 (неравенство Бернштейна). *Для любого тригонометрического полинома $t_n(x)=\sum\limits_{|\nu|\leqslant n} c_\nu e^{i\nu x}$ порядка n справедливо точное неравенство*

$$\|t_n^{(r)}\|_2 \leqslant n^r \|t_n\|_2. \tag{6.3}$$

Доказательство. Достаточно доказать (6.3) для $r=1$. Имеем

$$t_n'(x) = \sum_{|\nu|\leqslant n} c_\nu (i\nu) e^{i\nu x}.$$

Следовательно, из равенства Парсеваля

$$\|t_n'\|_2^2 = 2\pi \sum_{|\nu|\leqslant n} |c_\nu|^2 |\nu|^2 \leqslant 2\pi n^2 \sum_{|\nu|\leqslant n} |c_\nu|^2 = n^2 \|t_n\|_2^2.$$

Неравенство (6.3) достигается на полиномах $t_n(x)=\cos(nx+\alpha)$ и только на них. $\square$

Теорема 6.4 (неравенство Колмогорова). *Если* $r \in \mathbb{N}$ *и* $f(x) \in L_2^r(T)$, *то для всех* $k=0,1,\ldots,r$ *справедливо точное неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_2 \leqslant \|f\|_2^{1-\frac{k}{r}} \|f^{(r)}\|_2^{\frac{k}{r}}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Имеем

$$\|f^{(k)}\|_2^2 = 2\pi \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 |\nu|^{2k}.$$

Далее воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} x_\nu y_\nu\right| \leqslant \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |x_\nu|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |y_\nu|^{p'}\right)^{1/p'},$$

где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Если положить $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{r}$, то $kp'=r$ и

$$\|f^{(k)}\|_2^2 \leqslant 2\pi \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 |\nu|^{2kp'}\right)^{1/p'} =$$

$$= \|f\|_2^{2/p} \left(2\pi \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 |\nu|^{2r}\right)^{1/p'} = \|f\|_2^{2\left(1-\frac{k}{r}\right)} \|f^{(r)}\|_2^{\frac{2k}{r}}.$$

Точность неравенства (6.4) легко проверяется на функциях $\cos(nx+\alpha)$. $\square$

7. Единственность наилучшего приближения в пространстве $C[a, b]$

7.1. Системы Чебышева

Пусть $C[a,b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_C = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$

Известно, что пространство $C[a,b]$ не является строго нормированным, поэтому конечномерное подпространство в $C[a,b]$ не всегда будет множеством единственности. Например, если $F_2=\mathfrak{L}(\{x,x^2\})$, $f_0(x)\equiv 1\in C[-1,1]$, то

$$E(f_0,F_2)_C = \|f_0(x) - \alpha x^2\|_C = 1 \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1).$$

Возникает задача описания конечномерных подпространств в $C[a,b]$, являющихся множествами единственности. Оно одновременно будет и описанием чебышевских множеств, так как конечномерные подпространства всегда являются множествами существования. Эта задача была решена А. Хааром. Приведем ее решение.

Пусть $F_n\subset C[a,b]$ — подпространство размерности n,

$$F_n = \mathfrak{L}(\{\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\}) = \mathfrak{L}(\Phi_n). \tag{7.1}$$

Определение 7.1. *Линейно независимая система непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $\Phi_n=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ называется чебышевской, если любой отличный от тождественного нуля полином $p(x,\alpha) = \alpha_1\varphi_1(x)+\dots+\alpha_n\varphi_n(x)\in F_n$ обращается в нуль не более чем в $n-1$ точках отрезка $[a,b]$.*

Примером чебышевской системы на любом отрезке $[a,b]$ является система степеней $\{1,x,\dots,x^{n-1}\}$, так как любой многочлен степени $n-1$ имеет не более $n-1$ нулей.

Теорема 7.1. *Пусть $\Phi_n=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n\subset C[a,b]$ — линейно независимая система. Следующие условия эквивалентны:*

1) *Φ_n — чебышевская система;*

2) *для любых различных точек* $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ *определитель*

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (7.2)$$

3) *для системы* Φ_n *разрешима любая интерполяционная задача, то есть для любых различных точек* $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ *и любых* $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ *найдется единственный полином* $p \in F_n = \mathfrak{L}(\Phi_n)$ *такой, что* $p(x_k) = y_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Если для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = 0$, то система

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

имеет ненулевое решение. Соответствующий этому решению нетривиальный полином $p(x, \alpha^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \varphi_i(x)$ будет иметь n нулей.

2) $\Longrightarrow$ 3). Разрешимость интерполяционной задачи $p(x_k, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x_k) = y_k$, $k = 1, \ldots, n$ вытекает из того, что определитель $\Delta(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ является главным определителем этой системы.

3) $\Longrightarrow$ 1). Если некоторый нетривиальный полином $p(x, \alpha^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \varphi_i(x)$ имеет n нулей $x_1, \ldots, x_n$, то $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = 0$ и интерполяционная задача не всегда разрешима. □

Теорема Хаара. *Подпространство* $F_n = \mathfrak{L}(\Phi_n)$, $\Phi_n = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *является чебышевским в пространстве* $C[a, b]$ *тогда и только тогда, когда система* Φ_n *чебышевская.*

7.2. Необходимость условий Хаара

Предположим, что система Φ_n — нечебышевская. Тогда некоторый нетривиальный полином $p(x, \alpha^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \varphi_i(x)$ имеет n различных нулей $x_1, \ldots, x_n$. По теореме 7.1 $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Транспонированный определитель $\Delta'(x_1, \ldots, x_n)$ равен нулю и система

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \varphi_i(x_j)=0$, $i = 1, \ldots, n$ имеет ненулевое решение $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$. Отметим, что для любого полинома $p(x, \alpha) \in F_n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* p(x_j, \alpha) = 0. \tag{7.3}$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* p(x_j, \alpha) = \sum_{j=1}^{n} a_j^* \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} a_j^* \varphi_i(x_j) = 0.$$

Построим функцию $g(x) \in C[a, b]$ так, чтобы $g(x_j) = \operatorname{sgn} a_j^*$, $j = 1, \ldots, n$, $\|g\|_C = 1$. Здесь

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Положим

$$f(x) = g(x) \left(1 - \frac{1}{M} |p(x, \alpha^*)| \right),$$

где $M = \|p(x, \alpha^*)\|_C$.

Функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \in C[a, b]$;

2) $f(x_j) = g(x_j) = \operatorname{sgn} a_j^*$;

3) $\|f\|_C = 1$;

4) $E(f, F_n)_C = 1$.

Свойства 1–3 очевидны. Имеем $E(f, F_n)_C \leqslant \|f\|_C = 1$. Допустим, что $E(f, F_n)_C < 1$ и $p^*(x) \in F_n$ — полином наилучшего приближения. Если $a_j^* \neq 0$, то

$$|f(x_j)| = 1, \quad |f(x_j) - p^*(x_j)| < 1$$

и

$$\operatorname{sgn} p^*(x_j) = \operatorname{sgn}[f(x_j) - (f(x_j) - p^*(x_j))] = \operatorname{sgn} f(x_j) = \operatorname{sgn} a_j^*.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* p^*(x_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j^* \operatorname{sgn} p^*(x_j)|p^*(x_j)| = \sum_{j=1}^{n} |a_j^*|\,|p^*(x_j)| > 0,$$

что противоречит (7.3). Свойство 4 также установлено.

Теперь, если $\varepsilon \in \mathbb{R}$ выбрано так, что $|\varepsilon| < \frac{1}{M}$, то

$$\begin{aligned}|f(x) - \varepsilon p(x,\alpha^*)| &\leqslant |g(x)|\left(1 - \tfrac{1}{M}|p(x,\alpha^*)|\right) + |\varepsilon|\,|p(x,\alpha^*)| \leqslant \\ &\leqslant 1 - \tfrac{1}{M}|p(x,\alpha^*)| + |\varepsilon|\,|p(x,\alpha^*)| = \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{M} - |\varepsilon|\right)|p(x,\alpha^*)| \leqslant 1 = E(f,F_n)_C.\end{aligned}$$

Таким образом, полином наилучшего приближения $\varepsilon p(x,\alpha^*)$ не единственен. Необходимость условий Хаара доказана.

7.3. Достаточность условия Хаара

Определение 7.2. *Пусть функция $f(x) \in C[a,b]$, $p^*(x) \in F_n = \mathfrak{L}(\Phi_n)$ — ее полином наилучшего приближения. Множество*

$$R(f,\Phi_n) = \{x \in [a,b] \mid |f(x) - p^*(x)| = E(f,F_n)_C\}$$

называется множеством точек максимального уклонения полинома наилучшего приближения.

Лемма 7.1. *Если $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) \notin F_n = \mathfrak{L}(\Phi_N)$, система Φ_n — чебышевская, то множество $R(f,\Phi_n)$ содержит по меньшей мере $n+1$ точку.*

Доказательство. Допустим, что $R(f,\Phi_n)$ содержит лишь m точек $x_1,\dots,x_m$ $(m \leqslant n)$. Если $m<n$, то дополним их произвольными различными точками $x_{m+1},\dots,x_n$. Пользуясь теоремой 7.1, построим полином $p(x,\alpha^*)$, удовлетворяющий условиям

$$p(x_k,\alpha^*) = \operatorname{sgn}(f(x_k) - p^*(x_k)),$$

где $p^*(x)$ — полином наилучшего приближения для $f(x)$.

Во всех точках множества $R(f,\Phi_n)$ полином $p(x,\alpha^*)$ принимает значения того же знака, что и $f(x) - p^*(x)$. Покажем, что это не возможно.

Очевидно, что

$$\gamma = \min_{x\in R(f,\Phi_n)} |p(x;\alpha^*)| > 0.$$

Выберем $\delta>0$ так, чтобы при $|x'-x''|<\delta$ были выполнены неравенства

$$|(f(x') - p^*(x')) - (f(x'') - p^*(x''))| < \frac{1}{2}\|f - p^*\|_C;$$

$$|p(x',\alpha^*) - p(x'',\alpha^*)| < \frac{\gamma}{2}.$$

Пусть

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^{m}(x_i - \delta, x_i + \delta)\right)\bigcap[a;b], \quad B = [a,b]\setminus A.$$

Тогда множество A — открыто, а множество B — замкнуто на отрезке $[a,b]$ и функции $f(x)-p^*(x)$ и $p(x,\alpha^*)$ на A принимают значения одного знака. Так как B — замкнуто и не содержит точек $R(f,\Phi_n)$, то

$$\max_{x\in B}|f(x) - p^*(x)| = \|f - p^*\|_C - \varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$.

Определим полином

$$p(x) = p^*(x) + \frac{\varepsilon}{2M}p(x,\alpha^*), \quad M = \|p(x,\alpha^*)\|_C.$$

Если $x\in A$, то в представлении

$$f(x) - p(x) = f(x) - p^*(x) - \frac{\varepsilon}{2M}p(x,\alpha^*)$$

уменьшаемое и вычитаемое имеют один и тот же знак, поэтому

$$|f(x) - p(x)| < \|f - p^*\|_C \quad (x\in A).$$

Если $x\in B$, то

$$|f(x) - p(x)| \leqslant |f(x) - p^*(x)| + \frac{\varepsilon}{2M}|p(x,\alpha^*)| \leqslant$$
$$\leqslant \|f - p^*\|_C - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < \|f - p^*\|_C.$$

Итак во всех точках отрезка $[a,b]$

$$|f(x) - p(x)| < \|f - p^*\|_C,$$

и p^* не является полиномом наилучшего приближения для f. $\square$

Продолжим доказательство достаточности в теореме Хаара. Допустим, что система Φ_n — чебышевская и для некоторой функции $f(x)\in C[a,b]$ есть два полинома $p_1(x)$, $p_2(x)\in F_n=\mathfrak{L}(\Phi_n)$ наилучшего приближения. Так как

$$\left\| f - \frac{p_1 + p_2}{2} \right\|_C \leqslant \frac{1}{2}\|f - p_1\|_C + \frac{1}{2}\|f - p_2\|_C = E(f, F_n)_C,$$

то полином $p(x) = \frac{p_1(x)+p_2(x)}{2}$ также является полиномом наилучшего приближения. По лемме 7.1 существуют такие точки $x_1, \ldots, x_{n+1}$, что $|f(x_i)-p(x_i)|=E(f, F_n)$. Для каждой точки x_i

$$E(f, F_n)_C = |f(x_i) - p(x_i)| = \frac{1}{2}|(f(x_i) - p_1(x_i)) + (f(x_i) - p_2(x_i))| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}|f(x_i) - p_1(x_i)| + \frac{1}{2}|f(x_i) - p_2(x_i)| = E(f, F_n)_C.$$

Отсюда для $i = 1, \ldots, n+1$

$$f(x_i) - p_1(x_i) = f(x_i) - p_2(x_i).$$

Полином $p_1(x)-p_2(x)$ имеет $n+1$ нулей. Значит, $p_1(x)\equiv p_2(x)$. □

Можно показать, что теорема Хаара верна для любого компакта в $\mathbb{R}^n$. В частности, она верна для тригонометрической системы

$$\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\},$$

являющейся чебышевской на T, так как любой тригонометрический полином порядка n на T имеет не более $2n$ нулей.

8. Критерий элемента наилучшего приближения в пространстве C[a, b]

8.1. Теорема Валле Пуссена

Пусть $\Phi_n=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\subset C[a,b]$ — чебышевская система, $F_n = \mathfrak{L}(\Phi_n)$. Рассмотрим вопрос об оценке снизу величины наилучшего приближения $E(f,F_n)$.

Теорема Валле Пуссена. *Если $f(x)\in C[a,b]$, $p(x)\in F_n$ и существуют такие точки $a\leqslant x_1<\ldots<x_{n+1}\leqslant b$, что $f(x_i)-p(x_i) = A_i$, $A = \min|A_i|>0$ и числа $\operatorname{sgn} A_i$ имеют чередующиеся знаки*, то

$$E(f,F_n)_C \geqslant A.$$

Доказательство. Предположим, что

$$E(f,F_n)_C = \|f-p^*\|_C < A.$$

Рассмотрим разность $p^*(x)-p(x)=P(x)\in F_n$. Для нее

$$P(x_i) = [f(x_i) - p(x_i)] - [f(x_i) - p^*(x_i)] = \\ = A_i - [f(x_i) - p^*(x_i)], \quad |f(x_i) - p^*(x_i)| < |A_i|.$$

Тогда $\operatorname{sgn} P(x_i)=\operatorname{sgn} A_i$ $i=1,\ldots,n+1$ и полином $P(x)$ имеет n перемен знака, а значит, и n нулей. В этом и состоит искомое противоречие. □

Можно показать, что теорема Валле Пуссена справедлива для произвольного конечномерного подпространства размерности n не обязательно чебышевского.

Определение 8.1. *Пусть $f\in C[a,b]$, $F_n=\mathfrak{L}(\Phi_n)$. Будем говорить, что полином $p\in F_n$ допускает чебышевский альтернанс длины m, если существуют точки $a\leqslant x_1<\ldots<x_m\leqslant b$ такие, что для $i=1,\ldots,m$ выполнены условия:*

1) $|f(x_i)-p(x_i)| = \|f-p\|_C$,

2) числа $\operatorname{sgn}(f(x_i)-p(x_i))$ имеют чередующиеся знаки.

Следствие 8.1. *Если Φ_n — чебышевская система, $F_n=\mathfrak{L}(\Phi_n)$, $f\in C[a,b]$, то любой полином $p^*\in F_n$, допускающий чебышевский альтернанс длины $n+1$, является полиномом наилучшего приближения.*

Доказательство. Из теоремы Валле Пуссена следует неравенство $E(f,F_n)_C\geqslant\|f-p^*\|$. Обратное неравенство $E(f,F_n)_C\leqslant\|f-p^*\|$ очевидно. □

Это следствие верно для произвольных подпространств размерности n.

8.2. Теорема Чебышева

Для доказательства теоремы Чебышева нам понадобятся некоторые свойства определителей $\Delta(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$ (7.2). В случае чебышевской системы Φ_n для различных точек $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}$ $\Delta(x_0,x_1,\ldots,x_n)\neq 0$. Тогда на связном подмножестве $\mathbb{R}^n$ $\Delta(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ сохраняет постоянный знак. Подмножество

$$\Pi=\{\,(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n\mid a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}\leqslant b\,\}.$$

является связным, поэтому нетривиальный полином $P(x)=\Delta(x,x_1,\ldots,x_{n-1})\in F_n=\mathfrak{L}(\Phi_n)$, $a\leqslant x_1<\ldots<x_{n-1}\leqslant b$ обладает следующими свойствами:

1) точки $x_1,\ldots,x_{n-1}$ и только они являются его нулями;

2) если точка $x_k\in(a,b)$, то при переходе через нее полином $P(x)$ меняет знак.

Второе свойство следует из того, что для точки $x_k\in(a,b)$ при достаточно малом $\varepsilon>0$ числа $\Delta(x_k-\varepsilon,x_1,\ldots,x_{n-1})$ и $\Delta(x_k+\varepsilon,x_1,\ldots,x_{n-1})$ имеют разные знаки.

Теорема Чебышева. *Пусть функция $f(x)\in C[a,b]$, Φ_n — чебышевская система, $F_n=\mathfrak{L}(\Phi_n)$. Полином $p^*(x)\in F_n$ является полиномом наилучшего приближения для $f(x)$ тогда и только тогда, когда он допускает альтернанс длины $n+1$.*

Доказательство. Достаточность в теореме Чебышева установлена в следствии 8.1. Как уже отмечалось ранее, достаточность справедлива не только для чебышевских систем.

Доказательство необходимости будем вести от противного. Допустим, что $p^*(x)\in F_n$ — полином наилучшего приближения для функции $f(x)$. Для простоты предположим, что разность $f(x)-p^*(x)$

принимает с чередующимися знаками значение $E=\|f-p^*\|_C$ ровно в n точках: $a\leqslant y_1<\ldots<y_n\leqslant b$. Тогда разность $f(x)-p^*(x)$ имеет $n-1$ нулей $y_1 < x_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < x_{n-1} < y_n$.

Полином $P(x)=\Delta(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$ меняет знак только при прохождении через нули $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Выберем $\varepsilon \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\operatorname{sgn}(f(y_1) - p^*(y_1))=\operatorname{sgn} \varepsilon P(x)$. Тогда при достаточно малом $|\varepsilon|$ для всех $x\in[a, b]$ будет выполняться неравенство

$$|f(x) - p^*(x) - \varepsilon P(x)| < E.$$

Значит, полином $p^*(x)$ не является полиномом наилучшего приближения. □

Приведем формулировки теоремы Чебышева для алгебраического и тригонометрического случаев.

Следствие 8.2. *Алгебраический многочлен* $p_n^*(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *доставляет функции* $f\in C[a, b]$ *наилучшее приближение в том и только том случае, если существуют* $n+2$ *точки* $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \leqslant b$, *в которых разность* $f(x)-p_n^*(x)$ *принимает значения* $\pm\|f-p^*\|$, *поочередно меняя знак.*

Следствие 8.3 *Тригонометрический полином* $t_n^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ *доставляет функции* $f(x)\in C(T)$ *наилучшее приближение в том и только том случае, если существуют* $2n + 2$ *точки*

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n+2} < 2\pi,$$

в которых разность $f(x)-t_n^*(x)$ *принимает значения* $\pm\|f-t_n^*\|$, *поочередно меняя знак.*

Если $f(x)\in C[a, b]$, $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)=M=f(x_1)$, $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)=m=f(x_2)$,

$$E_1(f)_C = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|f(x) - \alpha\|_C,$$

то $\alpha^* = \frac{m+M}{2}$ допускает альтернанс $\{x_1, x_2\}$ длины 2

$$f(x_1) - \alpha^* = \|f - \alpha^*\|_C, \quad f(x_2) - \alpha^* = -\|f - \alpha^*\|_C.$$

Следовательно,

$$E_1(f)_C = \|f - \alpha^*\|_C = \frac{M - m}{2}.$$

9. Экстремальные свойства полиномов

В этом разделе решается несколько экстремальных задач для алгебраических многочленов и тригонометрических полиномов. Их решение основано на применении теоремы Чебышева и принципа подсчета нулей.

9.1. Полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля

Задача 1. *Найти тригонометрический полином*

$$\alpha\cos nx+\beta\sin nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+b_{n-1}\sin(n-1)x+\cdots+a_0$$

наименьшей нормы в $C(T)$, если $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ заданы.

Эта задача эквивалентна задаче о наилучшем приближении функции

$$f(x)=\alpha\cos nx+\beta\sin nx=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos n(x-x_0)$$

тригонометрическими полиномами порядка $n-1$.

В силу следствия 8.3 искомый полином наилучшего приближения есть тождественный нуль, так как $f(x)$ принимает свое максимальное значение $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ с чередующимися знаками в $2n$ последовательных точках

$$\left(x_0+\frac{\pi k}{n}\right)\pmod{2\pi}\quad(k=1,\ldots,2n)$$

тора $T=[0,2\pi)$. Следовательно,

$$E_n(f)_C=\min_{t_{n-1}}\|f-t_{n-1}\|_C=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Задача 2. *Найти алгебраический многочлен*

$$x_n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

наименьшей нормы в $C[-1,1]$.

Эта задача эквивалентна задаче о наилучшем приближении функции $f(x)=x^n$ алгебраическими многочленами степени $n-1$. Согласно следствию 8.2 искомый многочлен принимает максимальное по модулю значение с чередующимися знаками не менее чем в $n+1$ точках.

Рассмотрим многочлен Чебышева (4.4):

$$\frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = x^n + a^*_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a^*_0 = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x).$$

В точках $x_k = -\cos\frac{\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

$$\frac{T_n(x_k)}{2^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-1}} = (-1)^{n-k}\left\| \frac{T_n}{2^{n-1}} \right\|_C,$$

поэтому

$$E_n(f)_C = \min_{p_{n-1}} \|x^n - p_{n-1}\|_C = \left\| \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \right\|_C = \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (9.1)$$

Многочлен Чебышева $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ называют многочленом, наименее уклоняющимся от нуля.

Задача 3. *Для многочленов степени n найти величину*

$$\psi_n(\eta) = \max\{\, p_n(\eta) \mid \eta > 1,\ \|p_n\|_{C[-1,1]} \leqslant 1 \,\}.$$

Покажем, что экстремальным и в этой задаче является многочлен Чебышева $T_n(x)$, то есть

$$\psi_n(\eta) = T_n(\eta).$$

Предположим противное. Для некоторого многочлена $p_n(\eta) > T_n(\eta)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon p_n(\eta) > T_n(\eta)$. Тогда разность $T_n(x) - \varepsilon p_n(x)$ имеет n нулей на интервале $(-1, 1)$ и один нуль на интервале $(1, \eta)$, что невозможно, так как $T_n(x) - \varepsilon p_n(x)$ — многочлен степени n.

Итак, для любого многочлена p_n степени n выполняется неравенство

$$|p_n(\eta)| \leqslant |T_n(\eta)|\, \|p_n\|_{C[-1,1]} \quad (|\eta| > 1). \qquad (9.2)$$

9.2. Неравенство Бернштейна

Задача 4. *Для любого тригонометрического полинома $t_n(x)$ порядка n доказать неравенство, известное как неравенство Бернштейна:*

$$\|t'_n\|_{C(T)} \leqslant n\|t_n\|_{C(T)}. \tag{9.3}$$

В начале покажем что, если $\|t_n\|_C=t_n(x_0)=M$, то

$$t_n(x_0+t) \geqslant M\cos nt \quad \left(|t| \leqslant \tfrac{\pi}{n}\right).$$

Пусть $\Delta_n(t)=t_n(x_0+t)-M\cos nt$ и предположим, что в некоторой точке $-\frac{\pi}{n}<t_0<\frac{\pi}{n}$ $\Delta_n(t_0)<0$. Тогда можно считать, что $0<t_0<\frac{\pi}{n}$. Для любого $k=0.1,\dots,2n-1$

$$\Delta_n\left(\tfrac{\pi k}{n}\right) = t_n\left(x_0+\tfrac{\pi k}{n}\right) - (-1)^k M,$$

а так как $|t_n(x)|\leqslant M$, то $\Delta_n\left(\frac{\pi k}{n}\right)$ имеет знак $(-1)^{k+1}$ или равно нулю. В частности, $\Delta_n\left(\frac{\pi}{n}\right)\geqslant 0$, а потому на отрезке $\left[t_0, \frac{\pi}{n}\right]$ $\Delta_n(t)$ имеет нуль. Кроме того, на каждом из отрезков $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{\pi(k+1)}{n}\right]$ $(k=1,\dots,2n-2)$ $\Delta_n(t)$ имеет по нулю. Кроме того, $\Delta_n(t)$ имеет двойной нуль при $t=0$, то есть

$$\Delta_n(0) = t_n(x_0) - M = 0, \quad \Delta'_n(0) = t'_n(x_0) + nM\sin n0 = 0,$$

так как x_0 — точка максимума $t_n(x)$. Итак, $\Delta_n(t)$ с учетом кратности имеет $2n+1$ нулей, что невозможно, ибо $\Delta_n(t)$ — тригонометрический полином порядка n.

Пусть теперь $\|t_n\|_C=M$, $\|t'_n\|_C=\mu=t'_n(x_0)$. Тогда

$$t'_n(x_0+t) \geqslant \mu\cos nt \quad \left(|t| \leqslant \tfrac{\pi}{n}\right)$$

и

$$\int_{\frac{-\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} t'_n(x_0+t)\,dt = t_n\left(x_0+\frac{\pi}{2n}\right) - t_n\left(x_0-\frac{\pi}{2n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mu \int_{\frac{-\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos nt\,dt = \frac{2\mu}{n}.$$

Отсюда

$$\|t_n'\|_C = \mu \leqslant \frac{n}{2}\left[t_n\left(x_0+\frac{\pi}{2n}\right) - t_n\left(x_0-\frac{\pi}{2n}\right)\right] \leqslant nM = n\|t_n\|_C.$$

Следовательно, неравенство Бернштейна доказано. Отметим, что оно достигается на полиномах $\cos(nx+\alpha)$ и только на них.

9.3. Неравенство Маркова

Задача 5. *Для любого алгебраического многочлена $p_n(x)$ степени n доказать неравенство, известное как неравенство Маркова:*

$$\|p_n'\|_{C[-1,1]} \leqslant n^2\|p_n\|_{C[-1,1]}. \tag{9.4}$$

Пусть $x=\cos\theta$, $x\in[-1,1]$, $\theta\in[0,\pi]$. Если $p_n(x)$ — алгебраический многочлен степени n, то $t_n(\theta)=p_n(\cos\theta)$ — тригонометрический полином порядка n. Так как

$$t_n'(\theta) = -p_n'(\cos\theta)\sin\theta, \qquad \|t_n\|_{C(T)} = \|p_n\|_{C[-1,1]},$$

то по неравенству Бернштейна

$$|p_n'(\cos\theta)|\sin\theta \leqslant n\|p_n\|_C \quad (\theta\in[0,\pi])$$

или

$$|p_n'(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant n\|p_n\|_C \quad (x\in[-1,1]). \tag{9.5}$$

Неравенство (9.5) также было установлено С.Н.Бернштейном.

Пусть $x_k=\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}$ $(k=1,\dots,n)$ — нули полинома Чебышева $T_n(x)$. Если $x_n\leqslant x\leqslant x_1$, то согласно (9.5) и неравенству $\sin\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{1}{n}$

$$|p_n'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{2n}}}\|p_n\|_C = \frac{n}{\sin\frac{\pi}{2n}}\|p_n\|_C \leqslant n^2\|p_n\|_C. \tag{9.6}$$

Для доказательства (9.4) при $x\in[-1,x_n]\cup[x_1,1]$ воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа с узлами в нулях x_k многочлена Чебышева $T_n(x)$. Фундаментальные полиномы имеют вид

$$l_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{n}\,\frac{T_n(x)}{x-x_k} \quad (k=1,\dots,n).$$

Тогда для любого многочлена $p_{n-1}(x)$ степени $n-1$

$$p_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_{n-1}(x_k)\sqrt{1-x_k^2}\,\frac{T_n(x)}{x-x_k}.$$

В частности, для многочлена $p_n(x)$ степени n

$$p'_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p'_n(x_k)\sqrt{1-x_k^2}\,\frac{T_n(x)}{x-x_k}. \qquad (9.7)$$

Для многочлена Чебышева согласно (9.7)

$$T'_n(x) = \frac{n\sin n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad T'_n(x_k) = \frac{n(-1)^{k+1}}{\sqrt{1-x_k^2}},$$
$$T'_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_k}, \quad |T'_n(x)| \leqslant T'_n(1) = n^2.$$

Отсюда и из (9.5)–(9.7) для $x\in[x_1, 1]$ следует, что

$$|p'_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|p'_n(x_k)|\sqrt{1-x_k^2}\,\frac{T_n(x)}{x-x_k} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_k}\|p_n\|_C = T'_n(x)\|p_n\|_C \leqslant$$
$$\leqslant T'_n(1)\|p_n\|_C = n^2\|p_n\|_C.$$

Аналогично доказывается (9.4) и для $x\in[-1, x_n]$. Экстремальным в (9.4) является многочлен Чебышева $T_n(x)$.

10. Наилучшее приближение в пространстве L[a, b]

10.1. Приближение в пространстве L[a, b] произвольными подпространствами

Пусть $L[a,b]$ — пространство измеримых по Лебегу на отрезке $[a,b]$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx < \infty.$$

Конечномерное подпространство в $L[a,b]$ является множеством существования. Так как пространство $L[a,b]$ не является строго нормированным, то конечномерное подпространство не всегда будет множеством единственности. Если, например, $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $x\in[-1,1]$, то

$$E(f,\mathbb{R})_1 = \min_{c\in\mathbb{R}} \|f(x)-c\|_1 = \min_{c\in\mathbb{R}}\{|1-c|+|1+c|\} = 2 =$$
$$= \|f(x)-\alpha\| \quad (|\alpha| \leqslant 1).$$

В этом примере уже одномерное подпространство, чебышевское в пространстве $C[-1,1]$, не является множеством единственности в $L[-1,1]$. Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема Джексона. *Если $\Phi_n=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\in C[a,b]$ — чебышевская система, $F_n=\mathfrak{L}(\Phi_n)$, то для любой функции $f(x)\in C[a,b]$ элемент наилучшего приближения подпространством F_n в пространстве $L[a,b]$ единственен.*

Доказательство этой теоремы приводить не будем.

Теорема 10.1. *Для того чтобы функция p_0 из подпространства $F\subset L[a,b]$ доставляла наилучшее приближение в $L[a,b]$ функции $f\in L[a,b]$ достаточно выполнение соотношения*

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(f(x)-p_0(x))p(x)\,dx = 0 \quad \forall p\in F. \tag{10.1}$$

Доказательство. Если $p\in F$, то

$$\int_a^b |f(x)-p_0(x)|\,dx = \int_a^b (f(x)-p_0(x))\operatorname{sgn}(f(x)-p_0(x))\,dx =$$
$$= \int_a^b f(x)\operatorname{sgn}(f(x)-p_0(x))\,dx =$$
$$= \int_a^b (f(x)-p(x))\operatorname{sgn}(f(x)-p_0(x))\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)-p(x)|\,dx.$$

Это и означает, что

$$E(f,F)_1 = \|f-p_0\|_1. \quad \square$$

Можно показать, что (10.1) является и необходимым условием, если разность $f(x)-p(x)$ для любого $p\in F$ обращается в нуль на множестве меры нуль.

10.2. Теорема Маркова

Определение 10.1. *Система функций* $\{\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x),\dots\}$ $\subset C[a,b]$ *называется системой Маркова, если для любого* $n\in\mathbb{N}$ *система* $\Phi_n=\{\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\}$ *является чебышевской.*

Пусть $p_{n-1}(x)\in F_{n-1}=\mathfrak{L}(\Phi_{n-1})$ — элемент наилучшего приближения в $L[a,b]$ для $\varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned} &E(\varphi_n,F_{n-1})_1 = \|\varphi_n - p_{n-1}\|_1,\\ &q_n(x) = \varphi_n(x) - p_{n-1}(x) \in F_n. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Покажем, что $q_n(x)$ имеет ровно $n-1$ нулей на интервале (a,b) и $\operatorname{sgn} q_n(x)\perp F_{n-1}$.

Пусть $x_1,\dots,x_k$ — нули $q_n(x)$ на интервале (a,b) ($k\leqslant n-1$), $x_0=a$, $x_{k+1}=b$. $q(x)>0$ для $x\in(x_0,x_1)$, а

$$I_n = \int_a^b |q_n(x)|\,dx.$$

Так как

$$q_n(x) = \varphi_n(x) - p_{n-1}(x) = \varphi_n(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \varphi_j(x),$$

$$I_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\varphi_n(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \varphi_j(x) \right) dx,$$

то в силу экстремальности $p_{n-1}(x)$

$$\frac{\partial I_n}{\partial \alpha_s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n-1).$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_s(x)\, dx = 0 \quad (s = 1, \ldots, n-1).$$

Это и означает, что $q_n \perp F_{n-1}$:

$$\int_a^b \varphi_s(x) \operatorname{sgn} q_n(x)\, dx = 0 \quad (s = 1, \ldots, n-1). \tag{10.3}$$

Если теперь предположить, что $k \leqslant n-2$, то рассматривая полином

$$p(x) = \Delta(x, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j \varphi_j(x) \in F_{k+1},$$

имеющий нули в точках $x_1, \ldots, x_k$ и только в них, получим

$$\int_a^b p(x) \operatorname{sgn} q_n(x)\, dx = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j \int_a^b \varphi_j(x) \operatorname{sgn} q_n(x)\, dx \neq 0,$$

что противоречит (10.3).

Из теоремы 10.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема Маркова. *Если функция $f \in L[a,b]$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ - система Маркова, система $\Phi_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $F_n = \mathfrak{L}(\Phi_n)$, полином $q_{n+1}(x) \in F_{n+1}$ определен в (10.2) и для некоторого полинома $p^*(x) \in F_n$ будет $\operatorname{sgn}(f(x) - p^*(x)) = \operatorname{sgn} q_{n+1}(x)$, то*

$$E(f, F_n)_1 = \|f - p^*\|_1 = \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sgn} q_{n+1}(x)\, dx \right|.$$

10.3. Примеры систем Маркова

Рассмотрим последовательность функций

$$1, \cos x, \dots, \cos nx, \dots$$

Она является системой Маркова на отрезке $[0, \pi]$. Покажем, что $q_{n+1}(x) = \cos nx$. Легко проверяется, что

$$\int_0^\pi \cos mx \operatorname{sgn} \cos nx\, dx = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, n-1).$$

Это следует из того, что, если

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu x}, \quad c_0 = 0,$$

то

$$f(nx) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu nx} \perp \{ e^{i\nu x} \}_{\nu = -n+1}^{n-1}.$$

Тогда по теореме 10.1

$$E\big(\cos nx, \mathfrak{L}(\{1, \dots, \cos(n-1)x\})\big) =$$
$$= \int_0^\pi \cos nx \operatorname{sgn} q_{n+1}(x)\, dx = \|\cos nx\|_1.$$

Итак, если $f(x) \in C[0, \pi]$ и полином

$$p_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_{n-1} \cos(n-1)x$$

такой, что разность $f(x)-p_n(x)$ меняет знак в нулях $\cos nx$

$$x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, \dots, n)$$

и только в них, то в пространстве $L[0,\pi]$

$$E\big(f, \mathfrak{L}(\{1, \dots, \cos(n-1)x\})\big)_1 = \left| \int_0^\pi f(x) \operatorname{sgn} \cos nx \, dx \right|. \qquad (10.4)$$

Аналогично для системы Маркова

$$\sin x, \dots, \sin nx, \dots$$

на интервале $(0,\pi)$ $\quad q_n(x) = \sin nx$ и, если $f(x) \in C[0,\pi]$ и полином

$$p_{n-1}(x) = b_1 \sin x + \dots + b_{n-1} \sin(n-1)x$$

такой, что разность $f(x)-p_{n-1}(x)$ меняет знак в нулях $\sin nx$

$$x_k = \frac{\pi k}{n} \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

и только в них, то в пространстве $L[0,\pi]$

$$E\big(f, \mathfrak{L}(\{\sin x, \dots, \sin(n-1)x\})\big)_1 = \left| \int_0^\pi f(x) \operatorname{sgn} \sin nx \, dx \right|. \qquad (10.5)$$

Опираясь на это утверждение, можно показать, что в пространстве $L[-1,1]$

$$E\big(x^n, \mathfrak{L}(\{1, x, \dots, x^{n-1}\})\big)_1 = \left| \int_{-1}^1 x^n \operatorname{sgn} U_n(x) \, dx \right| = \frac{1}{2^{n-1}},$$

где

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. Гладкость непрерывных функций

11.1. Модуль непрерывности. Классы непрерывных функций

Пусть функция $f(x) \in C[a, b]$,

$$\omega(\delta, f)_C = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leqslant \delta \\ x_1, x_2 \in [a,b]}} |f(x_1) - f(x_2)| \quad (0 \leqslant \delta \leqslant b - a) \text{ —}$$

ее модуль непрерывности. Если $f(x) \in C(T)$, то

$$\omega(\delta, f)_C = \omega(\pi, f)_C \quad (\pi \leqslant \delta \leqslant 2\pi).$$

Отметим основные свойства модуля непрерывности:

1) $\omega(0, f)_C = 0$;
2) $\omega(\delta, f)_C$ не убывает на отрезке $[0, b - a]$;
3) модуль непрерывности есть полуаддитивная функция, то есть

$$\omega(\delta_1 + \delta_2, f) \leqslant \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f);$$

4) $\omega(\delta, f) \in C[0, b - a]$.

Свойства 1 и 2 очевидны. Пусть для $x_1, x_2 \in [a, b]$ $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_1 + \delta_2$. Существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $|x_1 - x_0| \leqslant \delta_1$, $|x_2 - x_0| \leqslant \delta_2$, поэтому

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)| \leqslant \omega(\delta_1, f)_C + \omega(\delta_2, f)_C.$$

Отсюда вытекает свойство 3. Непрерывность $\omega(\delta, f)_C$ в нуле следует из равномерной непрерывности $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Так как в силу полуаддитивности

$$\omega(\delta + \Delta, f)_C - \omega(\delta, f)_C \leqslant \omega(\Delta, f)_C,$$

то непрерывность в точке $\delta > 0$ следует из непрерывности $\omega(\delta, f)_C$ в нуле.

Отметим, что эти четыре свойства являются характеристическими для модуля непрерывности. Функцию $\omega(t)$, $t\in[0, b-a]$, удовлетворяющую этим четырем свойствам, назовем модулем непрерывности. Для модуля непрерывности $\omega(t)$ будет

$$\omega(\delta, \omega)_C = \omega(\delta).$$

Для любого модуля непрерывности $\omega(t)$ определим класс функций

$$H^\omega[a,b] = \left\{ f \in C[a,b] \,|\, \omega(\delta, f)_C \leqslant \omega(\delta),\ 0 < \delta \leqslant b-a \right\}.$$

Приведем простые условия, являющиеся достаточными для того, чтобы функция была модулем непрерывности:

1) если неубывающая функция $\omega(t)$, $t\in[0, b-a]$ непрерывна в нуле, $\omega(0)=0$ и функция $\frac{\omega(t)}{t}$ не возрастает, то $\omega(t)$ — модуль непрерывности;

2) если функция $\omega(t)$, $t\in[0, b-a]$ — неубывающая, непрерывная в нуле, $\omega(0)=0$ и выпуклая (выпуклая вверх), то есть для любых $t_1<t<t_2$

$$\omega(t) \geqslant \frac{t_2-t}{t_2-t_1}\omega(t_1) + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\omega(t_2),$$

то $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности.

Для доказательства условий 1 и 2 достаточно установить полуаддитивность $\omega(t)$.

Для условия 1

$$\omega(t_1+t_2) = t_1\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2} + t_2\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2} \leqslant$$
$$\leqslant t_1\frac{\omega(t_1)}{t_1} + t_2\frac{\omega(t_2)}{t_2} = \omega(t_1)+\omega(t_2).$$

Если $t_1<t_2$, то

$$\omega(t_1) \geqslant \frac{t_1}{t_2}\omega(t_2) + \frac{t_2-t_1}{t_2}\omega(0) = \frac{t_1\omega(t_2)}{t_2}.$$

Это означает, что $\frac{\omega(t)}{t}$ не возрастает и условие 2 следует из условия 1.

Функция $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$ является выпуклым модулем непрерывности ($\omega''(t)<0$). Она определяет важный класс функций

$$K\operatorname{Lip}\alpha = \left\{ f \in C[a,b] \,|\, \omega(\delta,f)_C \leqslant K\delta^\alpha \right\}.$$

11.2. Свойства выпуклого модуля непрерывности

Модуль непрерывности не обязательно выпуклый, однако он не очень сильно отличается от выпуклого.

Лемма 11.1. *Если $\omega(t)$ — любой модуль непрерывности, то существует такой выпуклый модуль непрерывности $\omega^*(t)$, что при всех t*

$$\omega(t) \leqslant \omega^*(t) \leqslant 2\omega(t).$$

Доказательство. Для $\alpha>0$ положим

$$M_\alpha = \min_{0\leqslant t<\alpha} \frac{2\omega(\alpha)-\omega(t)}{\alpha - t} > 0.$$

Так как при $t\to\alpha-0$ $\frac{2\omega(\alpha)-\omega(t)}{\alpha-t}\to\infty$, то существует точка t_α, в которой достигается этот минимум. Пусть $l_\alpha(t)=2\omega(\alpha)+M_\alpha(t-\alpha)$. Покажем, что для всех t справедливо неравенство $\omega(t)\leqslant l_\alpha(t)$. При $0<t\leqslant\alpha$ оно следует из определения M_α. Если $t=(n+\theta)\alpha>\alpha$, $n\in\mathbb{N}$, $0<\theta\leqslant 1$, то в силу полуаддитивности и монотонности $\omega(t)$

$$\begin{aligned}\omega(t) &\leqslant n\omega(\alpha)+\omega(\theta\alpha) = n\big[\,M_\alpha(\alpha-t_\alpha)-(\omega(\alpha)-\omega(t_\alpha))\,\big]+\omega(\theta\alpha)\leqslant\\ &\leqslant nM_\alpha\alpha + l_\alpha(\theta\alpha) = 2\omega(\alpha)+M_\alpha((n+\theta)\alpha-\alpha) = l_\alpha(t).\end{aligned}$$

Положим $\omega^*(t)=\inf\limits_{\alpha} l_\alpha(t)$ $(t>0)$, $\omega^*(0)=0$. Имеем

$$\omega(t)\leqslant\omega^*(t), \quad \omega^*(t)\leqslant l_t(t) = 2\omega(t).$$

Так как для любого $\alpha>0$ функции $l_\alpha(t)$ — выпуклые, то остается показать, что нижняя грань выпуклых функций — вновь выпуклая функция. Действительно, для любых α, $t_1<t<t_2$

$$l_\alpha(t) \geqslant \frac{t_2-t}{t_2-t_1}l_\alpha(t_1)+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}l_\alpha(t_2)\geqslant\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\omega^*(t_1)+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\omega^*(t_2),$$

поэтому и

$$\inf_{\alpha} l_\alpha(t) = \omega^*(t) \geqslant \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\omega^*(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\omega^*(t_2). \quad \square$$

Лемма 11.2. *Если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, $\delta>0$, то существует $M=M(\delta)>0$ такое, что при всех $t\geqslant 0$*

$$\omega(t) - \omega(\delta) \leqslant M(t - \delta).$$

Доказательство. Положим

$$M = \inf_{0\leqslant t<\delta} \frac{\omega(t) - \omega(\delta)}{t - \delta}.$$

Ясно, что $0\leqslant M\leqslant\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ и для $t\in[0,\delta]$ $\omega(t)-\omega(\delta)\leqslant M(t-\delta)$. Из определения нижней грани для любого $\varepsilon>0$ существует $t_0\in[0,\delta)$ такое, что

$$\varphi(t_0) = \frac{\omega(t_0) - \omega(\delta)}{t_0 - \delta} \leqslant M + \varepsilon.$$

Выпуклость функции $\omega(t)$ означает, что функция $\varphi(t)$ не возрастает, поэтому при $t>\delta$

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(t_0) \leqslant M + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ $\varphi(t)\leqslant M$. $\square$

11.3. Классы дифференцируемых функций

Определение 11.1. $C^r[a,b]$ — *множество всех r раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций.*

Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любой системы интервалов $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)\subset[a,b]$, $\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$ будет

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

Известно, что для абсолютно непрерывной функции $f(x)$ почти всюду существует производная $f'(x)$ и $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$.

Определение 11.2. $KW^r_C[a,b]$ — *класс функций* $f(x)$, *у которых* $r-1$ *производная — абсолютно непрерывная, а* $|f^{(r)}(x)|\leqslant K$ *почти всюду на отрезке* $[a,b]$.

Определение 11.3. $W^r_C H^\omega[a,b]$ — *класс функций* $f(x)\in C^r[a,b]$, *у которых* $f^{(r)}(x)\in H^\omega[a,b]$.

В частности,

$$W^r_C K\,\mathrm{Lip}\,\alpha = \left\{\, f\in C^r[a,b]\,|\,\omega(\delta, f^{(r)})\leqslant K\delta^\alpha \,\right\}.$$

Отметим, что $KW^1_C[a,b] = K\,\mathrm{Lip}\,1$. Действительно, если $f\in K\,\mathrm{Lip}\,1$, то согласно неравенству

$$\sum_{k=1}^{n}|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|\leqslant K\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)$$

$f(x)$ — абсолютно непрерывная и $f'(x)$ существует почти всюду. Так как

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant K,$$

то $|f'(x)|\leqslant K$ почти всюду на отрезке $[a,b]$, то есть $f\in KW^1_C[a,b]$. Обратно, если $f\in KW^1[a,b]$, то

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f'(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_1}^{x_2}|f'(t)|\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}K\,dt\right| = K|x_1-x_2|.$$

Отсюда $f\in K\,\mathrm{Lip}\,1$.

Аналогично доказывается, что $KW^r_C[a,b]=W^{r-1}_C K\,\mathrm{Lip}\,1$.

12. Линейные методы приближения в пространстве C(T)

12.1. Суммы Фурье

Пусть функция $f(x)\in C(T)$,

$$f(x) \sim \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x}, \quad \widehat{f}_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_T f(x)e^{-i\nu x}\,dx \text{ —}$$

ее ряд Фурье,

$$S_n f(x) = \sum_{|\nu|\leqslant n} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x} \text{ —}$$

частичные суммы ряда Фурье.

Будет ли ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно, то есть

$$\|f(x) - S_n f(x)\|_C \to 0 \quad (n\to\infty)? \tag{12.1}$$

Положительный ответ на этот вопрос будет означать, что последовательность линейных операторов $S_n : C(T)\to C(T)$ сходится сильно к единичному оператору. Известная теорема Банаха—Штейнгауза утверждает, что для этого необходимо и достаточно, чтобы сходимость (12.1) имела место на плотном множестве в пространстве $C(T)$, а последовательность норм операторов S_n была ограниченной. Так как для любого полинома $t_N(x)$

$$S_n t_N(x) = t_N(x) \quad (n \geqslant N),$$

то сходимость (12.1) на плотном множестве есть.

Для частичной суммы

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\sum_{|\nu|\leqslant n} e^{i\nu(x-t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_T f(t)D_n(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_T f(x+t)D_n(t)\,dt, \tag{12.2}$$

где ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos t + \cdots + 2\sin\frac{t}{2}\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3}{2}t - \sin\frac{t}{2}\right) + \cdots + \left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

поэтому

$$L_n = \|S_n\| = \sup_{\|f\|_C \leqslant 1} \|S_n f(x)\|_C = \frac{1}{\pi}\int_T |D_n(t)|\,dt.$$

Оценка сверху норм $\|S_n\|$ очевидна. Для оценки снизу достаточно $\operatorname{sgn} D_n(t)$ приблизить в пространстве $L(T)$ функциями, для которых $\|f\|_C=1$. Числа L_n называют константами Лебега.

Оценим константы Лебега. Прежде всего отметим, что

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\cos nt =$$

$$= \frac{\sin nt}{t} + \sin nt\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\cos nt =$$

$$= \frac{\sin nt}{t} + \mathrm{O}(1) \quad (n \to \infty),$$

так как функция (правило Лопиталя)

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$$

ограничена на $[-\pi, \pi]$. Отсюда и из четности $D_n(t)$ следует, что

$$L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{t}\right| dt + \mathrm{O}(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi n}\left|\frac{\sin t}{t}\right| dt + \mathrm{O}(1) =$$

$$= \frac{2}{\pi} I_n + \mathrm{O}(1).$$

Ясно, что

$$I_{k+1} - I_k = \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi k + t}\, dt.$$

Так как

$$\frac{1}{\pi(k+1)} \leqslant \frac{1}{\pi k + t} \leqslant \frac{1}{\pi k} \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi), \qquad \int\limits_0^{\pi} \sin t\, dt = 2,$$

то

$$\frac{2}{\pi(k+1)} \leqslant I_{k+1} - I_k \leqslant \frac{2}{\pi k}.$$

Отсюда

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} (I_{k+1} - I_k) \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

или

$$I_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant I_n \leqslant I_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Принимая во внимание, что

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \mathrm{O}(1),$$

получим

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + \mathrm{O}(1) \quad (n \to \infty).$$

Итак, на всем множестве $C(T)$ равномерная сходимость (12.1) ряда Фурье отсутствует. Тем не менее хорошие функции частичные суммы ряда Фурье приближают достаточно хорошо. Установим неравенство Лебега:

$$\|f(x) - S_n f(x)\|_C \leqslant (1 + L_n) E_{n+1}(f)_C. \tag{12.3}$$

Действительно, если

$$E_{n+1}(f)_C = \min_{c_\nu} \left\| f(x) - \sum_{|\nu| \leqslant n} c_\nu e^{i\nu x} \right\|_C = \|f(x) - t_n^*(x)\|_C,$$

то

$$\|f(x) - S_n f(x)\|_C = \|f(x) - t_n^*(x) + S_n(f(x) - t_n^*(x))\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \|f(x) - t_n^*(x)\|_C + \|S_n\| \, \|f(x) - t_n^*(x)\|_C = (1 + L_n)E_{n+1}(f)_C.$$

12.2. Суммы Фейера

Рассмотрим последовательность операторов

$$\Lambda_n f(x) = \sum_{|\nu| \leqslant n} \lambda_\nu^n \widehat{f}_\nu e^{i\nu x} = \frac{1}{\pi} \int_T f(x+t) K_n(t)\, dt, \qquad (12.4)$$

где

$$K_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{|\nu| \leqslant n} \lambda_\nu^n e^{i\nu x} \text{ —}$$

ядра этих интегральных операторов.

На основании теоремы Банаха—Штейнгауза для равномерной сходимости

$$\|f(x) - \Lambda_n f(x)\|_C \to 0 \quad (n \to \infty)$$

на всем множестве $C(T)$ необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_\nu^n = 1 \quad (\forall \nu \in \mathbb{Z})$;

2) $\frac{1}{\pi} \int_T |K_n(t)|\, dt \leqslant C$.

Естественно привести пример множителей $\{\lambda_\nu^n\}$ ($|\nu| \leqslant n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), порождающих положительные ядра. Пусть $\lambda_\nu^n = 1 - \frac{|\nu|}{n+1}$. Тогда получаем ядро Фейера:

$$F_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{|\nu| \leqslant n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right) e^{i\nu t} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt.$$

Легко показать, что

$$F_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t).$$

Так как для фиксированного $\nu \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{|\nu|}{n+1}\right)=1,$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_T |F_n(t)|\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_T F_n(t)\,dt=1,$$

то для любой $f\in C(T)$

$$\|f(x)-\Phi_n f(x)\|_C\to 0\quad (n\to\infty). \tag{12.5}$$

Здесь

$$\Phi_n f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_T F_n(x+t)f(t)\,dt \text{ —} \tag{12.6}$$

суммы Фейера.

Можно показать, что если

$$\|f(x)-\Phi_n f(x)\|_C=o\left(\tfrac{1}{n}\right)\quad (n\to\infty),$$

то $f(x)=\text{const}$. Это означает, что не смотря на (12.5) хорошие функции суммы Фейера не могут приближать с высокой скоростью. Возникает вопрос о построении линейного метода приближения (12.4), свободного от недостатков как сумм Фурье, так и сумм Фейера.

12.3. Суммы Валле Пуссена

Ядром Валле Пуссена назовем четный тригонометрический полином порядка $2n-1$:

$$V_{2n-1}(t)=\frac{1}{n}\{D_n(t)+D_{n+1}(t)+\dots+D_{2n-1}(t)\}.$$

Это ядро порождает последовательность линейных операторов Валле Пуссена

$$W_{2n-1}f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_T f(x+t)V_{2n-1}(t)\,dt\ :\ C(T)\to C(T). \tag{12.7}$$

Так как

$$D_{n+k}(t) = D_n(t) + \cos(n+1)t + \cdots + \cos(n+k)t,$$

то

$$V_{2n-1}(t) = D_n(t) + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)\cos kt \tag{12.8}$$

и λ_ν^{2n-1}-множители имеют вид

$$\lambda_\nu^{2n-1} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |\nu| \leqslant n, \\ 2-\frac{|\nu|}{n}, & n \leqslant |\nu| \leqslant 2n-1. \end{cases}$$

Из определения ядра Валле Пуссена и ядра Фейера следует, что

$$V_{2n-1}(t) = \frac{1}{n}\left[\,2nF_{2n-1}(t) - nF_{n-1}(t)\,\right] =$$

$$= \frac{\sin^2 nt - \sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos nt - \cos 2nt}{4n\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{sgn}(\cos t - \cos 2t) = \begin{cases} 1, & t \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \\ -1, & t \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \end{cases}$$

получаем разложение в ряд Фурье:

$$\operatorname{sgn}(\cos t - \cos 2t) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2\pi k}{3}\cos kt.$$

Значит,

$$\operatorname{sgn} V_{2n-1}(t) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2\pi k}{3}\cos nkt. \tag{12.9}$$

В силу ортогональности тригонометрической системы

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|V_{2n-1}(t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)\cos kt\right\}\operatorname{sgn} V_{2n-1}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi},$$

поэтому

$$\|W_{2n-1}\| = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

Так как для любого тригонометрического полинома $t_n(x)$ порядка n

$$W_{2n-1}t_n(x) = t_n(x),$$

то, как и в случае неравенства Лебега (12.3),

$$E_{2n}(f)_C \leqslant \|f(x) - W_{2n-1}f(x)\|_C \leqslant \big(1 + \|W_{2n-1}\|\big)E_{n+1}(f)_C =$$
$$= \left(\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right) E_{n+1}(f)_C. \quad (12.10)$$

В заключение отметим, что ядро Валле Пуссена дает решение экстремальной задачи о наилучшем приближении ядра Дирихле в пространстве $L(T)$. На основании теоремы 10.1 и формул (12.8), (12.9)

$$\min_{a_k} \left\| D_n(x) - \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k \cos kx \right\|_1 = \|V_{2n-1}(x)\|_1.$$

13. Теорема Ахиезера—Крейна—Фавара

13.1. Интегральное представление дифференцируемых периодических функций

Пусть $f(x) \in C^r(T)$, $r \in \mathbb{N}$ и

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x}, \quad \widehat{f}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) e^{-i\nu t}\, dt.$$

Так как

$$A_\nu(x) = \widehat{f}_\nu e^{i\nu x} + \widehat{f}_{-\nu} e^{-i\nu x} = \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) \left(e^{i\nu(x-t)} + e^{-i\nu(x-t)} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \nu(x-t)\, dt,$$

то, интегрируя r раз по частям, с учетом периодичности $f(x)$ и ее производных будем иметь

$$A_\nu(x) = \frac{1}{\pi\nu} \int_0^{2\pi} f'(t) \sin \nu(x-t)\, dt = \frac{1}{\pi\nu} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos\left[\nu(x-t) - \tfrac{\pi}{2} \right] dt =$$

$$= \cdots = \frac{1}{\pi\nu^r} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \cos\left[\nu(x-t) - \tfrac{\pi r}{2} \right] dt.$$

Подставив это выражение в ряд Фурье, получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(x-t) f^{(r)}(t)\, dt, \tag{13.1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt,$$

$$D_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\pi r}{2} \right)}{k^r} \text{ —}$$

ядро Бернулли. Представление (13.1) справедливо и для функций из $W^r(T)$.

13.2. Приближение ядра Бернулли в пространстве L(T)

Так как

$$D_{2\nu}(x) = (-1)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{2\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

$$D_{2\nu+1}(x) = (-1)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{2\nu+1}} \quad (\nu = 0, 1, \dots),$$

то ядра Бернулли с четными индексами четны, а с нечетными индексами нечетны. Кроме того ,

$$D_{2\nu}(\pi - t) = D_{2\nu}(\pi + t), \quad D_{2\nu+1}(\pi - t) = -D_{2\nu+1}(\pi + t),$$

то есть график функции $D_{2\nu}(x)$ симметричен относительно прямых $x=\pi m$ ($m\in\mathbb{Z}$), а график $D_{2\nu+1}(x)$ — симметричен относительно точек $x=\pi m$, $y=0$. Следовательно, изучая поведение функций $D_r(x)$, остаточно ограничиться отрезком $[0, \pi]$.

Для функции $D_1(x)$ имеют место равенства

$$D_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, 2\pi. \end{cases} \tag{13.2}$$

Из определения функций $D_r(x)$ следует, что

$$D_r(x) = \int_{\beta_r}^{x} D_{r-1}(t)\, dt \quad (r = 2, 3, \dots), \tag{13.3}$$

где β_r выбрано так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_0^{2\pi} D_r(x)\, dx = 0,$$

в частности, $\beta_{2\nu+1}=0$.

Из (13.2) следует, что $D_r(x)$ на интервале $(0, 2\pi)$ есть алгебраический многочлен степени r, известный как многочлен Бернулли.

Учитывая вид функции $D_1(x)$ и соотношение (13.3), легко понять, что функция $D_{2\nu}(x)$ строго монотонна и имеет ровно один нуль на интервале $(0, \pi)$, а $D_{2\nu+1}(x)$, обращаясь в нуль в точках $x=0, \pi$, сохраняет знак и имеет один экстремум на $(0, \pi)$.

Теорема 13.1. *Наилучшее приближение в пространстве* $L(T)$ *функции* $D_r(t)$, $r \in \mathbb{N}$ *доставляет тригонометрический полином* $T_{nr}(t)$ *порядка* $n-1$, *интерполирующий* $D_r(t)$ *в нулях* $\cos nt$, *если* r *четно, и в нулях* $\sin nt$, *если* r *нечетно. При этом*

$$E_n(D_r)_1 = \|D_n - T_{nr}\|_1 = \frac{\pi K_r}{n^r} \quad (n, r \in \mathbb{N}), \tag{13.4}$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}. \tag{13.5}$$

Доказательство. Пусть r четно,

$$t_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n} \quad (j = 1, \dots, n),$$

$T_{nr}(t)$ — четный тригонометрический полином, для которого

$$\Delta(t_j) = D_r(t_j) - T_{nr}(t_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Покажем, что точки t_j являются простыми нулями функции $\Delta(t)$ и других нулей на отрезке $[0, \pi]$ эта функция не имеет. Предположим, что это не так, то есть что $\Delta(t)$ обращается в нуль на отрезке $[0, \pi]$ в $n+1$ точках или хотя бы один из нулей t_j является кратным. Тогда на основании теоремы Ролля $\Delta'(t)$ будет иметь на $(0, \pi)$, по крайней мере, n нулей. Однако

$$\Delta'(t) = D_{r-1}(t) - T'_{nr}(t)$$

является нечетной функцией, а потому обращается в нуль в точках $t=0, \pi$. Следовательно, $\Delta'(t)$ имеет на отрезке $[0, \pi]$ $n+2$ нулей и, снова по теореме Ролля, четная функция $\Delta''(t)$ должна иметь на $[0, \pi]$, по крайней мере, $n+1$ нулей. Продолжая эти рассуждения, придем к выводу, что нечетная функция $\Delta^{(r-1)}(t)$ имеет на $(0, \pi)$ n нулей. Так как

$$\Delta^{(r-1)}(t) = D_1(t) - T_{nr}^{(r-1)}(t) = \frac{\pi - t}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt \quad (0 < t < 2\pi),$$

то функция $\Delta^{(r-1)}(t)$ дифференцируема в интервале $(0,2\pi)$ и $\Delta^{(r-1)}(\pi)=0$, но тогда четный полином

$$\Delta^{(r)}(t) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} kb_k \cos kt$$

порядка $n-1$ на $(0,2\pi)$ имеет $2n$ нулей, что невозможно.

Итак доказано, что t_j — единственные, простые нули функции $\Delta(t)$ на отрезке $[0,\pi]$. Если учесть четность $\Delta(t)$, то приходим к выводу, что она обращается в нуль и меняет знак на интервале $[0,2\pi)$ в нулях $\cos nt$, то есть

$$\operatorname{sgn}\Delta(t) = \operatorname{sgn}(D_r(t) - T_{nr}(t)) = \pm \operatorname{sgn}\cos nt.$$

Тогда по теореме Маркова и (10.4)

$$E_n(D_r)_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |D_r(t) - T_{nr}(t)|\,dt =$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_{2\nu}(t) \operatorname{sgn}\cos nt\,dt \right| \qquad (r = 2\nu).$$

Используя разложение $\operatorname{sgn}\cos nt$ в ряд Фурье

$$\operatorname{sgn}\cos nt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1}$$

и ортогональность тригонометрической системы, получим

$$E_n(D_{2\nu})_1 = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{((2k+1)n)^{2\nu}(2k+1)} = \frac{\pi K_{2\nu}}{n^{2\nu}},$$

где

$$K_{2\nu} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\nu+1}}.$$

Пусть теперь r нечетно, $\tau_k = \frac{\pi k}{n}$ $(k=0,\dots,n)$, $T_{nr}(t)$ — нечетный тригонометрический полином, для которого

$$\Delta(\tau_k) = D_r(\tau_k) - T_{nr}(\tau_k) = 0 \quad (k = 0,\dots,n).$$

Рассуждая от противного и используя теорему Ролля, как и при четном r, убеждаемся, что эти нули на $[0,\pi]$ простые и единственные, поэтому

$$\operatorname{sgn}(D_r(t) - T_{nr}(t)) = \pm \operatorname{sgn}\sin nt.$$

Тогда по теореме Маркова и (10.5)

$$E_n(D_r)_1 = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_{2\nu+1}(t) \operatorname{sgn}\sin nt\, dt \right| \quad (r = 2\nu + 1).$$

Используя разложение $\operatorname{sgn}\sin nt$ в ряд Фурье

$$\operatorname{sgn}\sin nt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1},$$

получим

$$E_n(D_{2\nu+1})_1 = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((2k+1)n)^{2\nu+1}(2k+1)} = \frac{\pi K_{2\nu+1}}{n^{2\nu+1}},$$

где

$$K_{2\nu+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2\nu+2}}. \quad \square$$

Известно, что

$$K_0 = 1, \quad K_1 = \frac{\pi}{2}, \quad K_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad K_3 = \frac{\pi^3}{24}, \quad \dots, \tag{13.6}$$

$$1 = K_0 < K_2 < K_4 < \dots < \frac{4}{\pi} < \dots < K_3 < K_1 = \frac{\pi}{2}.$$

13.3. Доказательство теоремы Ахиезера—Крейна—Фавара

Теорема 13.2. *Если* $f \in MW^r(T)$, $r, n \in \mathbb{N}$, *то*

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{MK_r}{n^r}. \tag{13.7}$$

Доказательство. Если $f \in MW^r(T)$, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_T D_r(x-t) f^{(r)}(t)\, dt.$$

Рассмотрим тригонометрический полином порядка $n-1$

$$t^*_{n-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_T T_{nr}(x-t) f^{(r)}(t)\, dt,$$

где $T_{nr}(t)$ — полином из теоремы 13.1. Согласно этой теореме для него

$$\begin{aligned} E_n(f)_C &\leqslant \|f(x) - t^*_{n-1}(x)\|_C \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi} \left\| \int\limits_T \big[D_r(x-t) - T_{nr}(x-t) \big] f^{(r)}(t)\, dt \right\|_C \leqslant \\ &\leqslant \frac{M}{\pi} \int\limits_T |D_r(x) - T_{nr}(x)|\, dx \leqslant \frac{MK_r}{n^r}. \quad \square \end{aligned}$$

Позже мы установим, что неравенство (13.7) точное, то есть

$$E_n(MW^r(T))_C = \sup_{f \in MW^r(T)} E_n(f)_C = \frac{MK_r}{n^r}.$$

14. Прямые теоремы теории приближений в пространстве C(T)

14.1. Приближение класса $\mathbf{H}^{\omega}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ классом $\mathbf{K}\,\mathrm{Lip}\,\mathbf{1}$

Теорема 14.1. *Для любой функции $f\in H^{\omega}[a,b]$ существует функция $g\in K\,\mathrm{Lip}\,1$, $(K>0)$ такая, что*

$$\|f-g\|_C \leqslant \frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant b-a}(\omega(t)-Kt). \tag{14.1}$$

Доказательство. Пусть функция $f\in H^{\omega}[a,b]$,

$$\Delta=\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant b-a}(\omega(t)-Kt),$$

$$g(x)=\min_{a\leqslant y\leqslant b}(f(y)+K|x-y|)+\Delta=f(x')+K|x-x'|+\Delta.$$

Покажем, что $g\in K\,\mathrm{Lip}\,1$. Если $x_0,x_1\in[a,b]$, то

$$g(x_0)=f(x_0')+K|x_0-x_0'|+\Delta$$

и

$$g(x_1)\leqslant f(x_0')+K|x_1-x_0'|+\Delta.$$

Следовательно,

$$g(x_1)-g(x_0)\leqslant K\{\,|x_1-x_0'|-|x_0-x_0'|\,\}\leqslant K|x_1-x_0|.$$

Аналогично проверяется, что $g(x_0)-g(x_1)\leqslant K|x_1-x_0|$. Это и означает, что $g\in K\,\mathrm{Lip}\,1$.

Оценим разность $f(x)-g(x)$. Так как

$$g(x)\leqslant f(x)+K|x-x|+\Delta=f(x)+\Delta,$$

то

$$f(x)-g(x)\geqslant-\Delta.$$

С другой стороны,

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x') - K|x - x'| - \Delta \leqslant$$
$$\leqslant \omega(|x - x'|) - K|x - x'| - \Delta \leqslant 2\Delta - \Delta = \Delta,$$

поэтому для всех $x \in [a, b]$

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \Delta. \quad \square$$

14.2. Неравенство Н.П. Корнейчука. Первая теорема Джексона в пространстве C(T)

Пусть для $f \in C(T)$, $F_{2n-1} = \mathfrak{L}\left(\{e^{i\nu x}\}_{\nu=-n+1}^{n-1}\right)$

$$E_n(f)_C = E(f, F_{2n-1})_C = \min_{t_{n-1} \in F_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C.$$

Теорема 14.2 (неравенство Н.П. Корнейчука [13, с.231]). *Для любой функции $f \in C(T)$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_C \leqslant \omega\left(\tfrac{\pi}{n}, f\right)_C. \tag{14.2}$$

Доказательство. По лемме 11.1 для любой функции $f \in C(T)$ существует выпуклый модуль непрерывности $\omega^*(\delta)$ такой, что

$$\omega(\delta, f) \leqslant \omega^*(\delta) \leqslant 2\omega(\delta, f). \tag{14.3}$$

Тогда $f \in H^{\omega^*}(T)$. Покажем, что

$$E_n(f)_C \leqslant \tfrac{1}{2}\omega^*\left(\tfrac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда и из (14.3) следует (14.2), то есть

$$E_n(f)_C \leqslant \tfrac{1}{2}\omega^*\left(\tfrac{\pi}{n}\right) \leqslant \omega\left(\tfrac{\pi}{n}, f\right)_C.$$

Положим $\delta = \frac{\pi}{n}$. Для выпуклого модуля непрерывности $\omega^*(t)$ согласно лемме 11.2 существует такое число $K > 0$, что

$$\omega^*(t) - \omega^*\left(\tfrac{\pi}{n}\right) \leqslant K\left(t - \tfrac{\pi}{n}\right) \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

или

$$\omega^*(t) - Kt \leqslant \omega^*\left(\tfrac{\pi}{n}\right) - K\tfrac{\pi}{n}.$$

По теореме 14.1 найдется функция $g \in K \operatorname{Lip} 1$, для которой выполняется неравенство (14.1):

$$\|f - g\|_C \leqslant \tfrac{1}{2} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \pi} (\omega^*(t) - Kt) \leqslant \tfrac{1}{2}\left(\omega^*\left(\tfrac{\pi}{n}\right) - K\tfrac{\pi}{n}\right).$$

Из теоремы 13.2 и равенств (13.6)

$$E_n(g)_C \leqslant \frac{K\pi}{2n}.$$

Тогда

$$E_n(f)_C \leqslant E_n(g)_C + \|f - g\|_C \leqslant \tfrac{1}{2}\left(\omega^*\left(\tfrac{\pi}{n}\right) - K\tfrac{\pi}{n}\right) + \tfrac{K\pi}{2n} = \tfrac{1}{2}\omega^*\left(\tfrac{\pi}{n}\right). \quad \square$$

Н.П. Корнейчук для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$ построил функцию $f^* \in C(T)$, для которой

$$E_n(f^*)_C \geqslant \left(1 - \tfrac{1}{2n} - \varepsilon\right)\omega\left(\tfrac{\pi}{n}; f^*\right),$$

поэтому константу 1 в неравенстве (14.2) для всех $n \in \mathbb{N}$ уменьшить нельзя.

Неравенство (14.2) называют первой теоремой Джексона в $C(T)$.

При доказательстве (14.2), в частности, установлено следующее утверждение.

Следствие 14.1. *Для любой функции $f \in K \operatorname{Lip} \alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{K}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

Можно показать, что это неравенство точное. Наилучшее приближение класса $K \operatorname{Lip} \alpha$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ есть

$$E(K \operatorname{Lip} \alpha, F_{2n-1})_C = \sup_{f \in K \operatorname{Lip} \alpha} E_n(f)_C = \frac{K}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

14.3. Вторая теорема Джексона в пространстве $\mathbf{C^r(T)}$

ТЕОРЕМА 14.3. *Для любой функции* $f \in C^r(T)$, $r \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{K_r}{n^r} E_n(f^{(r)})_C, \tag{14.4}$$

где K_r *— константы Фавара.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f \in C^r(T)$ справедливо интегральное представление (13.1):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_T D_r(x-\tau) f^{(r)}(\tau)\, d\tau,$$

где $D_r(x)$ — ядро Бернулли.

Пусть $T^*_{n-1}(x)$ — полином наилучшего приближения $D_r(x)$ в пространстве $L(T)$, то есть

$$\|D_r(x) - T_{n-1}(x)\|_1 \leqslant \frac{\pi K_r}{n^r},$$

$t^*_{n-1}(x)$ — полином наилучшего приближения $f(x)$ в пространстве $C(T)$. Так как свертка полинома порядка $n-1$ с функцией вновь есть полином порядка $n-1$, то

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_T \big(D_r(x-\tau) - T^*_{n-1}(x-\tau) \big)\big(f^{(r)}(\tau) - t^*_{n-1}(\tau) \big)\, d\tau =$$
$$= f(x) - \frac{a_0}{2} - t_{n-1}(x).$$

Тогда

$$E_n(f)_C \leqslant \left\| f(x) - \frac{a_0}{2} - t_{n-1}(x) \right\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi} \|f^{(r)}(\tau) - t^*_{n-1}(\tau)\|_C \int\limits_T |D_r(x-\tau) - T^*_{n-1}(x-\tau)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \frac{K_r}{n^r} E_n(f^{(r)})_C. \quad \square$$

Из теорем 14.2 и 14.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 14.4. *Для любой функции* $f \in C^r(T)$, $r \in \mathbb{N}$, *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{K_r \omega\left(\frac{\pi}{n}, f^{(r)}\right)_C}{n^r}. \tag{14.5}$$

Неравенство (14.5) принято называть второй теоремой Джексона.

Следствие 14.2. *Для любой функции* $f \in MW^r \operatorname{Lip} \alpha$, $M>0$, $r \in \mathbb{N}$, $0<\alpha\leqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{MK_r}{2n^r}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

Итак,

$$E(MW^r \operatorname{Lip}\alpha, F_{2n-1}) = \sup_{f \in MW^r \operatorname{Lip}\alpha} E_n(f)_C \leqslant \frac{MK_r}{2n^r}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

Константа в этом неравенстве не является точной, но оно точно по порядку при $n \to \infty$.

15. Поперечник по Колмогорову класса функций $W_C^r(T)$ в пространстве $C(T)$

15.1. Определение поперечника по Колмогорову

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $M\subset X$ — фиксированное подмножество, $F_n\subset X$ — подпространство размерности $n\in\mathbb{N}$. Величину

$$E(M, F_n) = \sup_{f\in M} E(f, F_n) \qquad (15.1)$$

естественно называть величиной наилучшего приближения множества M подпространством F_n. Она зависит от выбора подпространства F_n и можно ставить задачу об отыскании такого подпространства размерности n, для которого величина (15.1) минимальна.

Определение 15.1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $M\subset X$ — некоторое множество. Тогда n-поперечником по Колмогорову множества M называется число*

$$d_n(M) = \inf_{F_n} E(M, F_n) = \inf_{F_n} \sup_{f\in F} E(f, F_n), \qquad (15.2)$$

где нижняя грань берется по всем подпространствам размерности n.

Определение 15.2. *Подпространство $F_n^*\subset X$ размерности n называется экстремальным для множества $M\subset X$, если*

$$d_n(M) = E(M, F_n^*). \qquad (15.3)$$

Вычислим поперечник по Колмогорову класса функций $W_C^r(T)$ в пространстве $C(T)$. При этом будем опираться на глубокое утверждение о поперечнике шара.

15.2. Поперечник шара

Теорема Борсука. *Пусть X_{n+1} — линейное нормированное пространство размерности $n+1$, S_n — единичная сфера в X_{n+1}, то есть*

$$S_n = \left\{ x \in X_{n+1} \mid \|x\| = 1 \right\}.$$

Если оператор $P(x) : S_n \to Y_n$ в n-мерное пространство Y_n является непрерывным и нечетным $\big(P(-x)=-P(x)\big)$, то существует точка $x_0 \in S_n$, в которой $P(x_0)=0$.

Доказательство этой теоремы можно найти в специальных книгах по топологии.

Теорема 15.1. *Пусть $M_{n+1} \subset X$ — $(n+1)$-мерное подпространство линейного нормированного пространства X, $U_{n+1} \subset M_{n+1}$ — замкнутый единичный шар, то есть*

$$U_{n+1} = \big\{ x \in M_{n+1} \mid \|x\| \leqslant 1 \big\}.$$

Тогда $d_n(U_{n+1})=1$.

Доказательство. Так как $d_n(U_{n+1}) \leqslant d_0(U_{n+1})=1$, то необходимо показать, что для любого n-мерного подпространства $F_n \subset X$ $E(U_{n+1}, F_n) \geqslant 1$. Осуществим это для строго нормированного пространства X, в котором любое конечномерное подпространство является множеством существования и единственности. Случай произвольного пространства рассмотрен в [13, с.255].

Пусть X — строго нормированное пространство, $F_n \subset X$ — n-мерное подпространство. Тогда определен оператор $P : X \to F_n$ такой, что $P(x)$ — элемент наилучшего приближения x в F_n.

Оператор P является однородным $P(\lambda x)=\lambda P(x)$, а значит, нечетным $P(-x)=-P(x)$. Действительно,

$$\|\lambda x - \lambda P(x)\| = |\lambda| \, \|x - P(x)\| = |\lambda| E(x, F_n) = \\ = E(\lambda x, F_n) = \|\lambda x - P(\lambda x)\|.$$

Докажем непрерывность оператора P. Пусть $x_m \to x_0$, $u_m = P(x_m)$, $u_0=P(x_0)$ и $u_m \to u_0$. Так как

$$|E(x_{m_1}, F_n) - E(x_{m_2}, F_n)| \leqslant E(x_{m_1} - x_{m_2}, F_n) \leqslant \|x_{m_1} - x_{m_2}\|,$$

то числовая последовательность $\{E(x_m, F_n)\}$ сходится. Тогда последовательность u_m является ограниченной:

$$\|u_m\| = \|u_m - x_m\| + \|x_m\| = E(x_m, F_n) + \|x_m\| \leqslant C.$$

В силу конечномерности и замкнутости F_n для некоторой подпоследовательности $\{u_{m_k}\}$ будет

$$\lim_{k \to \infty} u_{m_k} = u^* \in F_n, \quad u^* \neq u_0.$$

Так как

$$\|x_{m_k} - u_{m_k}\| = E(x_{m_k}, F_n) \leqslant \|x_{m_k} - u_0\|,$$

то в силу единственности элемента наилучшего приближения

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - u_{m_k}\| = \|x_0 - u'\| < \|x_0 - u_0\|,$$

что невозможно. Значит,

$$\lim_{m\to\infty} P(x_m) = P(x_0).$$

Рассмотрим оператор $P(x)$ на сфере

$$S_n = \{\, x \in M_{n+1} \mid \|x\| = 1 \,\}.$$

а основании теоремы Борсука существует элемент $z \in S_n$ такой, что $'(z) = 0$, поэтому

$$E(U_{n+1}, F_n) \geqslant E(S_n, F_n) \geqslant E(z, F_n) = \|z - P(z)\| = \|z\| = 1. \quad \square$$

Следствие 15.1. *Если множество M линейного нормированного пространства X содержит шар γU_{n+1} радиуса γ некоторого $n+1$-мерного подпространства, то*

$$d_n(M) \geqslant \gamma.$$

Действительно, из включения $\gamma U_{n+1} \subset M$ следует, что $d_n(M) \geqslant d_n(\gamma U_{n+1})$, и остается учесть, что

$$d_n(\gamma U_{n+1}) = \gamma d_n(U_{n+1}) = \gamma.$$

15.3. Поперечник класса $\mathbf{W}^r_{\mathbf{C}}(\mathbf{T})$

Для вычисления поперечника нам потребуется неравенство Колмогорова для функций из $W^r_C(T)$. Подобное неравенство было уста-·овлено для функций из $W^r_2(T)$.

Теорема Колмогорова. *Для любой функции* $f\in KW_C^r(T)$, $r\in\mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_C \leqslant \frac{K_{r-k}}{K_r^{1-\frac{k}{r}}}\|f\|_C^{1-\frac{k}{r}}K^{\frac{k}{r}} \quad (k=0,1,\ldots,r). \tag{15.4}$$

Доказательство этой теоремы приводится в [13, с.115; 14].

Пусть S_{2n}^0 — $2n$-мерное подпространство 2π-периодических функций вида

$$f(x)=\sum_{k=1}^{2n} c_k\psi_k(x),$$

где

$$\psi_k(x)=\begin{cases}1, & \frac{\pi(k-1)}{n}<x<\frac{\pi k}{n},\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases} \qquad \psi_k(x+2\pi)=\psi_k(x).$$

Через S_{2n}^r, $r\in\mathbb{N}$ будем обозначать $2n$-мерное подпространство r-х периодических интегралов от функций из S_{2n}^0 при дополнительном условии $c_1+\ldots+c_{2n}=0$. Если $f\in S_{2n}^r$, то $f\in C^{r-1}(T)$ и на каждом интервале $\left(\frac{\pi(k-1)}{n},\frac{\pi k}{n}\right)$ функция $f(x)$ есть алгебраический многочлен степени r. Функции множества S_{2n}^r называют полиномиальными сплайнами степени r дефекта 1 по разбиению $\left\{\frac{\pi k}{n}\right\}$. Сплайн $f\in S_{2n}^r$ лежит в классе $KW_C^r(T)$ при некотором $K=K(f)=\|f^{(r)}\|_\infty$, точнее для всех $x\in T$, кроме конечного числа точек $|f^{(r)}(x)|\leqslant K$ и $|f^{(r)}(x)|=K$ для некоторых $x\in T$.

Лемма 15.1. *Для любой функции* $f\in S_{2n}^r$ $(r,n\in\mathbb{N})$ *справедливо точное неравенство*

$$\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant \frac{n^r}{K_r}\|f\|_C.$$

Доказательство. Можно считать $\|f^{(r)}\|_\infty=1$. Необходимо показать, что

$$\|f\|_C \geqslant \frac{K_r}{n^r}. \tag{15.5}$$

Равенство $\|f^{(r)}\|_\infty=1$ для $f\in S_{2n}^r$ означает, что хотя бы на одном интервале $\left(\frac{\pi(k-1)}{n},\frac{\pi k}{n}\right)=\Delta_k$ $f^{(r)}(x)=1$ или $f^{(r)}(x)=-1$. Тогда

$$\sup_{x_1,x_2\in\Delta_k}|f^{(r-1)}(x_1)-f^{(r-1)}(x_2)|=\frac{\pi}{n},$$

поэтому

$$\|f^{(r-1)}\|_C \geqslant \frac{\pi}{2n}.$$

Если $r=1$, то (15.5) уже доказано, так как $K_1 = \frac{\pi}{2}$. Пусть $r \geqslant 2$. Применяя теорему Колмогорова при $k=r-1$, получим

$$\frac{\pi}{2n} \leqslant \|f^{(r-1)}\|_C \leqslant \frac{K_1}{K_r^{1/r}} \|f\|_C^{1/r} \|f^{(r)}\|_\infty^{1-1/r} = \frac{\pi}{2K_r^{1/r}} \|f\|_C^{1/r}.$$

Отсюда следует (15.5). □

Теорема 15.2. *Для $r, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$d_{2n-1}(W_C^r(T)) = \frac{K_r}{n^r}. \tag{15.6}$$

Экстремальным является подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$.

Доказательство. Считая S_{2n}^r подпространством размерности $2n$ в пространстве $C(T)$, рассмотрим шар

$$\frac{K_r}{n^r} U_{2n} = \left\{ f \in S_{2n}^r \mid \|f\|_C \leqslant \frac{K_r}{n^r} \right\}.$$

Если функция $f \in \frac{K_r}{n^r} U_{2n}$, то на основании леммы 15.1 $\|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1$ и $f \in W_C^r(T)$. Тогда из следствия 15.1

$$d_{2n-1}(W^r(T)) \geqslant \frac{K_r}{n^r}.$$

Оценка сверху следует из теоремы Ахиезера—Крейна—Фавара о приближении функций из $W_C^r(T)$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$. □

16. Обратные теоремы теории приближений в пространстве C(T)

16.1. Первая обратная теорема в пространстве C(T)

Лемма 16.1. *Для тригонометрического полинома $t_n(x)$ порядка $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\omega(\delta, t_n)_C \leqslant n\delta\|t_n\|_C \quad (0\leqslant\delta\leqslant\pi).$$

Доказательство. Согласно неравенству Бернштейна для любого $h\in\mathbb{R}$, $|h|\leqslant\delta$

$$|t_n(x+h)-t_n(x)| = |t_n'(x+\theta h)|\,|h| \leqslant \|t_n'\|_C|h| \leqslant n|h|\,\|t_n\|_C. \quad \square$$

Теорема 16.1. *Если функция $f(x)\in C(T)$, то для $n\in\mathbb{N}$*

$$\omega\left(\tfrac{1}{n}, f\right)_C \leqslant \tfrac{10}{n}\sum_{\mu=1}^{n} E_\mu(f)_C. \tag{16.1}$$

Доказательство. Пусть $t_n(x)=t_n(x,f)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения порядка n для функции $f(x)$ в пространстве $C(T)$. Тогда при любом целом $m\geqslant 0$

$$\omega\left(\tfrac{1}{n}, f\right)_C \leqslant \omega\left(\tfrac{1}{n}, f-t_{2^m-1}\right)_C + \omega\left(\tfrac{1}{n}, t_{2^m-1}\right)_C \leqslant$$
$$\leqslant 2\|f-t_{2^m-1}\|_C + \omega\left(\tfrac{1}{n}, t_{2^m-1}\right)_C =$$
$$= 2E_{2^m}(f)_C + \omega\left(\tfrac{1}{n}, t_{2^m-1}\right)_C. \tag{16.2}$$

Так как

$$t_{2^m-1}(x) = t_0(x) + \sum_{\nu=0}^{m-1}\left(t_{2^{\nu+1}-1}(x) - t_{2^\nu-1}(x)\right),$$

то вследствие леммы 16.1

$$\omega\left(\tfrac{1}{n}, t_{2^m-1}\right)_C \leqslant \sum_{\nu=0}^{m-1}\omega\left(\tfrac{1}{n}, t_{2^{\nu+1}-1}-t_{2^\nu-1}\right)_C \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^{\nu+1}\|t_{2^{\nu+1}-1}(x) - t_{2^\nu-1}(x)\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu\left\{E_{2^{\nu+1}}(f)_C + E_{2^\nu}(f)_C\right\} \leqslant \frac{4}{n}\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu E_{2^\nu}(f)_C.$$

Учитывая, что

$$2^\nu E_{2^\nu}(f)_C \leqslant 2 \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} E_\mu(f)_C,$$

получим оценку

$$\omega\left(\tfrac{1}{n}, t_{2^m-1}\right)_C \leqslant \tfrac{8}{n} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} E_\mu(f)_C \leqslant \tfrac{8}{n} \sum_{\mu=1}^{2^{m-1}} E_\mu(f)_C. \qquad (16.3)$$

Аналогично

$$E_{2^m}(f)_C \leqslant \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{\mu=1}^{2^{m-1}} E_\mu(f)_C. \qquad (16.4)$$

Выбирая $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$ и учитывая (16.2)–(16.4), получим

$$\omega\left(\tfrac{1}{n}, f\right)_C \leqslant \frac{10}{n} \sum_{\mu=1}^{n} E_\mu(f)_C. \quad \square$$

На основании теоремы 16.1 и следствия 14.1 справедливо следующее утверждение.

Следствие 16.1. *Если* $0<\alpha<1$, *то* $E_n(f)_C = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(n \to \infty)$ *тогда и только тогда, когда* $\omega(\delta, f)_C = O(\delta^\alpha)$ $(\delta \to 0+0)$.

16.2. Вторая обратная теорема в пространстве C(T)

Теорема 16.2. *Если функция* $f(x) \in C(T)$, *и для некоторого* $r \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_C < \infty,$$

то $f(x) \in C^r(T)$ *и*

$$\omega\left(\tfrac{1}{n}, f^{(r)}\right)_C \leqslant \frac{2^{3r+4}}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \mu^r E_\mu(f)_C + 2^{2r+1} \sum_{\mu=n}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_C. \qquad (16.5)$$

Доказательство. Если, как и в предыдущей теореме,

$$E_n(f)_C = \|f(x) - t_{n-1}(x; f)\|_C,$$

то равномерно для $x \in T$

$$f(x) = t_0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (t_{2^{\nu+1}-1}(x) - t_{2^\nu-1}(x)). \tag{16.6}$$

Покажем, что r раз продифференцированный ряд (16.6) сходится равномерно. Согласно неравенству Бернштейна

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (t_{2^{\nu+1}-1}(x) - t_{2^\nu-1}(x))^{(r)} \right\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{(\nu+1)r} \|t_{2^{\nu+1}-1}(x) - t_{2^\nu-1}(x)\|_C \leqslant 2^{2r+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{(\nu-1)r} E_{2^\nu}(f)_C \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2r+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{r-1} E_\mu(f)_C \leqslant 2^{2r+1} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_C < \infty.$$

Тогда $f(x) \in C^r(T)$ и

$$f^{(r)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (t_{2^{\nu+1}-1}(x) - t_{2^\nu-1}(x))^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^{(r)}_{2^{\nu+1}-1}(x).$$

Если $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$, то согласно лемме 16.1 и неравенству Бернштейна

$$\omega\left(\tfrac{1}{n}, f^{(r)}\right)_C \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega\left(\tfrac{1}{n}, T^{(r)}_{2^{\nu+1}-1}\right)_C \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{m} \omega\left(\tfrac{1}{n}, T^{(r)}_{2^{\nu+1}-1}\right)_C + 2 \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \|T^{(r)}_{2^{\nu+1}-1}\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{m} 2^{(\nu+1)(r+1)} \|T_{2^{\nu+1}-1}\|_C + 2 \sum_{\nu=m+1}^{\infty} 2^{(\nu+1)r} \|T_{2^{\nu+1}-1}\|_C.$$

Так как

$$\|T_{2^{\nu+1}-1}\|_C \leqslant \|f - t_{2^{\nu+1}-1}\|_C + \|f - t_{2^\nu-1}\|_C \leqslant 2E_{2^\nu}(f)_C,$$

то

$$\omega\left(\tfrac{1}{n}, f^{(r)}\right)_C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3r+4}}{n} \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^{(\nu-1)(r+1)} E_{2^\nu}(f)_C + 2^{2r+1} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} 2^{(\nu-1)r} E_{2^\nu}(f)_C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3r+4}}{n} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^r E_\mu(f)_C + 2^{2r+1} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{r-1} E_\mu(f)_C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3r+4}}{n} \sum_{\mu=1}^{2^{m-1}} \mu^r E_\mu(f)_C + 2^{2r+1} \sum_{\mu=2^m+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3r+4}}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \mu^r E_\mu(f)_C + 2^{2r+1} \sum_{\mu=n}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_C. \quad \square$$

На основании теоремы 16.2 и следствия 14.2 справедливо следующее утверждение.

Следствие 16.2. *Если* $0<\alpha<1$, $r \in \mathbb{N}$, *то* $E_n(f)_C = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ $(n\to\infty)$ *тогда и только тогда, когда* $f(x)\in C^r(T)$ *и* $\omega(\delta, f^{(r)})_C = O(\delta^\alpha)$ $(\delta\to 0+0)$.

Приложение

Теорема Джексона в пространствах $L_p(T^m)$

1. Константы Джексона. Оценки снизу

Пусть $T^m = [0, 2\pi)^m$ — m-мерный тор, $d\nu = (2\pi)^{-m}dx$; для $x \in T^m$, $\mu \in \mathbb{Z}^m$

$$\mu x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i, \quad |x| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2};$$

$X^m = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ — m-мерное действительное пространство с нормой $\|\cdot\|$, в частности,

$$l_p^m = \left\{x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty, \right.$$

$$\left. \|x\|_\infty = \max |x_i|, p = \infty \right\} \quad (|x| = \|x\|_2);$$

$$L_p(T^m) = \left\{f : T^m \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\|_p = \left(\int\limits_{T^m} |f|^p \, d\nu\right)^{1/p} < \infty \right.$$

$$\text{при } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vraisup}_{x \in T^m} |f(x)| =$$

$$\left. = \inf\{\alpha \geqslant 0 \mid \nu\{x \in T^m \mid |f(x)| > \alpha\} = 0\} < \infty \text{ при } p = \infty \right\},$$

p' — сопряженный показатель для $1 \leqslant p \leqslant \infty$: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$;

$\{e^{i\mu x}\}_{\mu \in \mathbb{Z}^m}$ — кратная тригонометрическая система (система характеров T^m); для функции $f \in L_p(T^m)$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$f \sim \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^m} \widehat{f}_\mu e^{i\mu x}, \quad \widehat{f}_\mu = \int\limits_{T^m} f(x) e^{-i\mu x} \, d\nu \text{ —}$$

ее разложение в ряд Фурье,

$$E_R(f, T^m)_p = \inf_{c_\mu \in \mathbb{C}} \left\| f(x) - \sum_{|\mu|<R} c_\mu e^{i\mu x} \right\|_p \text{ — }$$

ее наилучшее приближение в $L_p(T^m)$ сферическими тригонометрическими полиномами порядка, меньшего R,

$$\omega(\delta, f, T^m, X^m)_p = \sup_{\|t\| \leqslant \delta} \|\Delta_t f\|_p \text{ — }$$

ее модуль непрерывности в $L_p(T^m)$, отвечающий норме пространства X^m.

Величину

$$D_p(\delta, R, T^m, X^m) = \sup_{f \in L_p(T^m)} \frac{E_R(f, T^m)_p}{\omega(\delta, f, T^m, X^m)_p} \qquad (1 \leqslant p < \infty) \tag{П.1}$$

называют константой Джексона в пространстве $L_p(T^m)$.

Если

$$\omega(T^m, f, T^m)_p = \sup_{t \in T^m} \|\Delta_t f\|_p,$$

то для любого $\delta > 0$, пространства X^m

$$D_p(\delta, R, T^m, X^m) \geqslant D_p(T^m, R, T^m) = \sup_{f \in L_p(T^m)} \frac{E_R(f, T^m)_p}{\omega(T^m, f, T^m)_p}.$$

Очевидно также, что

$$D_p(T^m, R, T^m) \geqslant D_p(T, R, T).$$

Теорема 1 [4]. *Если $R \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, то*

$$D_p(T, R, T) \geqslant \max\{2^{-1/p'}, 2^{-1/p}\} = \varkappa_p. \tag{П.2}$$

Доказательство. Пусть сначала $R = 1$, $p \geqslant 2$. Рассмотрим последовательность 2π-периодических функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} |f_n(x+t) - f_n(x)|^p \, d\nu_x = \int_0^{2\pi} |f_n(x+t) - f_n(x)|^2 \, d\nu_x =$$
$$= 2\left\{ \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 \, d\nu_x - \int_0^{2\pi} f_n(x+t) f_n(x) \, d\nu_x \right\} \leqslant \frac{2}{n},$$

поэтому

$$\omega^p(T, f_n, T)_p \leqslant \frac{2}{n}. \qquad (\text{П}.3)$$

Далее

$$E_1^p(f_n, T)_p = \min_\lambda \left\{ \frac{1}{n}|1-\lambda|^p - \left(1 - \frac{1}{n}\right)|\lambda|^p \right\}.$$

Если $\lambda \geqslant n^{-1/p}$, то $E_1^p(f_n, T)_p \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$, а если $\lambda < n^{-1/p}$, то $E_1^p(f_n, T) \geqslant (1 - n^{-1/p})^p \frac{1}{n}$. Отсюда и из (3)

$$D_p(T, 1, T) \geqslant \sup_{f_n} \frac{E_1(f_n, T)_p}{\omega(T, f_n, T)_p} = \frac{1}{2^{1/p}} = \varkappa_p \quad (2 \leqslant p < \infty).$$

Пусть $R = 1$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, n — простое число. Рассмотрим последовательность 2π-периодических функций

$$f_n(x) = a(i), \qquad x \in \left(\frac{2\pi i}{n}, \frac{2\pi(i+1)}{n}\right) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

где $a(0) = 1$, $a(i) = \left(\frac{i}{n}\right)$ $(i = 1, \dots, n-1)$ — символы Лежандра по простому модулю n.

Напомним, что $\left(\frac{i}{n}\right) = 1$, если i — квадратичный вычет, то есть уравнение $x^2 = i (\operatorname{mod} n)$ разрешимо, $\left(\frac{i}{n}\right) = -1$, если i — квадратичный невычет, то есть уравнение $x^2 = i (\operatorname{mod} n)$ неразрешимо. Известно [6], что $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right) = 0$. Пусть также $f_n^1(x) = 1$ для $x \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ и $f_n^1(x) = 0$ для $x \in \left(\frac{2\pi}{n}, 2\pi\right)$, а $f_n^2(x) = f_n(x) - f_n^1(x)$.

Так как для любых двух функций $f_1, f_2 \in L_p(T)$

$$E_1(f_1 + f_2, T)_2 \leqslant E_1(f_1, T)_p + E_1(f_2, T)_p,$$

то

$$E_1(f_n)_p \geqslant E_1(f_n^2)_p - E_1(f_n^1)_p \geqslant \|f_n^2\|_p - \|f_n^1\|_p = \\ = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/p} - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}. \quad (\text{П.4})$$

Функция

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} |f_n(x+t) - f_n(x)|^p \, d\nu_x$$

является непрерывной и кусочно-линейной, поэтому для $t \in T$, $t_s = \frac{2\pi s}{n}$ $(s = 1, \ldots, n-1)$

$$\varphi(t) \leqslant \max_s \varphi(t_s). \quad (\text{П.5})$$

Далее

$$\varphi(t_s) = 2^{p-2} \int_0^{2\pi} |f_n(x+t_s) - f_n(x)|^2 \, d\nu_x = \\ = 2^{p-1} \left\{ \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 \, d\nu_x - \int_0^{2\pi} f_n(x+t_s) f_n(x) \, d\nu_x \right\} = \\ = 2^{p-1} \left\{ 1 - \int_0^{2\pi} (f_n^1(x+t_s) + f_n^2(x+t_s))(f_n^1(x) + f_n^2(x) \, d\nu_x \right\} \leqslant \\ \leqslant 2^{p-1} \left\{ 1 + \frac{2}{n} - \int_0^{2\pi} f_n^2(x+t_s) f_n^2(x) \, d\nu_x \right\} = \\ = 2^{p-1} \left\{ 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a(k) a(k+s) \right\}.$$

Здесь $a(0) = 0$.

Разложим вектор $\{a(k)\}_{k=0}^{n-1}$ в дискретный ряд Фурье

$$a(k) = \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{a}(j) e^{-\frac{2\pi i j k}{n}},$$

где

$$\widehat{a}(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a(k) e^{\frac{2\pi i j k}{n}}.$$

В нашем случае (см. [6])

$$|\widehat{a}(j)| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}}\right| = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{n}}, & j = 1.\ldots, n-1. \end{cases}$$

Так как для $s = 1, \ldots, n-1$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a(k)a(k+s) = \sum_{j=0}^{n-1} |\widehat{a}(j)|^2 e^{\frac{2\pi i j s}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi i j s}{n}} = -\frac{1}{n},$$

то

$$\varphi(t_s) \leqslant 2^{p-1}\left\{1 + \frac{3}{n}\right\}.$$

Отсюда и из (П.4), (П.5) следует, что

$$D_p(T, 1, T) \geqslant \sup_{f_n} \frac{E_1(f_n, T)_p}{\omega(T, f_n, T)_p} = \frac{1}{2^{1/p'}} = \varkappa_p.$$

Пусть теперь $R > 1$, $1 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$, функция $f \in L_p(T)$, $E_1(f, T)_p = \|f\|_p$. Тогда [13, с.53]

$$\int\limits_T |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x)\, d\nu = 0. \tag{П.6}$$

Если

$$t_{R-1}(x, g) = \sum_{|s| \leqslant R-1} c_s(g) e^{isx} \text{ —}$$

полином наилучшего приближения порядка $R-1$ функции g в пространстве $L_p(T)$, то [13, с.18]

$$|c_s(g)| \leqslant M\|g\|_p, \tag{П.7}$$

где константа M зависит только от R.

Пользуясь (П.6) и леммой Фейера [2, с.77], находим такое натуральное r, что для функции $f^*(x) = f(rx)$

$$\left|\int\limits_T |f^*(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f^*(x) e^{isx}\, d\nu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2RM}\|f\|_p^{p/p'} \qquad (|s| \leqslant R-1). \quad (\text{П.8})$$

Применяя неравенство Гельдера, (П.7) и (П.8), получим

$$\|f\|_p^p = \|f^*\|_p^p =$$
$$= \int\limits_T |f^*|^{p-1}(f^* - t_{R-1}(f^*)) \operatorname{sgn} f^*\, d\nu + \int\limits_T |f^*|^{p-1} t_{R-1}(f^*) \operatorname{sgn} f^*\, d\nu \leqslant$$
$$\leqslant E_{R-1}(f^*, T)_p \|f\|_p^{p/p'} + \sum_{|s|\leqslant R-1} |c_s(f^*)| \left|\int\limits_T |f^*|^{p-1} \operatorname{sgn} f^* e^{isx}\, d\nu\right| \leqslant$$
$$\leqslant E_{R-1}(f^*, T)_p \|f\|_p^{p/p'} + \varepsilon \|f\|_p^{1+p/p'}.$$

Следовательно,

$$E_{R-1}(f^*, T)_p \geqslant E_1(f, T)_p (1 - \varepsilon). \qquad (\text{П.9})$$

Так как

$$\int\limits_T |f(r(x+t)) - f(rx)|^p\, d\nu_x = \int\limits_T |f(x + rt) - f(x)|^p\, d\nu_x,$$

то отсюда и из (П.9)

$$D_p(T, R, T) \geqslant D_p(T, 1, T) \geqslant \varkappa_p.$$

Случай $p = 1$ получается предельным переходом в (П.2) при $p \to 1+0$. □

Важной задачей является доказательство точного неравенства Джексона

$$E_R(f, T^m)_p \leqslant \varkappa_p \omega\left(\frac{\tau_m}{R}, f, T^m, X^m\right)_p$$

с возможно меньшей константой $\tau_m = \tau(X^m)$.

2. Теорема Джексона в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbf{T}^m)$

Пусть

$$B^m = \{x \in X^m \mid \|x\| \leqslant 1\} \text{ —}$$

единичный шар в пространстве X^m, Γ^m — его граница. В дальнейшем будем предполагать границу кусочно-гладкой.

Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\Gamma^m} = 0, \quad \Delta u \in L_2(B^m),$$

где

$$\Delta = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \text{ —}$$

оператор Лапласа.

Известно [16,с.312], что оператор Лапласа имеет счетное множество точек спектра $\{\lambda_k(B^m)\}$, $\lambda_k(B^m) > 0$ и счетное множество собственных функций конечной кратности. Возьмем первую собственную функцию $u_1(x)$, соответствующую первому собственному значению λ_1, и положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in B^m, \\ 0, & x \notin B^m. \end{cases}$$

Известно также [16,с.382,388], что

$$\varphi(x) \geqslant 0, \quad x \in B^m, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma^m} \leqslant 0, \tag{П.10}$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ — производная φ по внешней нормали к Γ^m.

Найдем преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Так как

$$\widehat{\varphi}(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-isx}\, dx = -\lambda_1^{-1} \int\limits_{B^m} \Delta\varphi(x) e^{-isx}\, dx,$$

то по второй формуле Грина

$$(|s|^2 - \lambda_1)\widehat{\varphi}(s) = -\int\limits_{\Gamma^m} \left(\frac{\partial}{\partial n} e^{-isx}\right) \varphi(x)\, dx + \int\limits_{\Gamma^m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) e^{-isx}\, dx.$$

Ввиду краевого условия $\varphi(x)|_{\Gamma^m} = 0$ первое слагаемое исчезнет, поэтому

$$\widehat{\varphi}(s) = -(\lambda_1 - |s|^2)^{-1} \int\limits_{\Gamma^m} e^{-isx} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x)\, dx.$$

Введем функцию

$$\psi(x) = -\int\limits_{\Gamma^m} \varphi(x-u) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u)\, du. \tag{П.11}$$

Ее преобразование Фурье

$$\widehat{\psi}(s) = -\widehat{\varphi}(s) \int\limits_{\Gamma^m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u) e^{-isu}\, du =$$

$$= (\lambda_1 - |s|^2)^{-1} \left(\int\limits_{\Gamma^m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(u) e^{-isu}\, du \right)^2 . \tag{П.12}$$

Положим

$$\Phi_R(x) = \psi(R\lambda_1^{-1/2} x).$$

Так как

$$\widehat{\Phi}_R(s) = \lambda_1^{m/2} R^{-m} \widehat{\psi}(\lambda_1^{-1/2} R^{-1} s),$$

то

$$\widehat{\Phi}_R(s) = \lambda_1^{\frac{m-2}{2}} R^{2-m} (R^2 - |s|^2)^{-1} \left[\int\limits_{\Gamma^m} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) e^{-i\lambda_1^{1/2} R^{-1} sx}\, dx \right]^2 . \tag{П.13}$$

Рассмотрим периодизацию $\Phi_R(x)$, то есть функцию

$$\Psi_R(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \Phi_R(x + 2\pi k). \tag{П.14}$$

Она согласно (П.10) – (П.13) обладает следующими важными свойствами:

1) $\operatorname{supp} \Psi_R(x) \subset 2\lambda_1^{1/2} R^{-1} B^m$;
2) $\Psi_R(x) \geqslant 0$;

3) $\widehat{\Psi}_R(\mu) \leqslant 0$, $|\mu| \geqslant R$, $\mu \in \mathbb{Z}^m$,
где $\operatorname{supp} \Psi_R(x)$ — носитель функции $\Psi_R(x)$,

$$\lambda B^m = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \frac{x}{\lambda} \in B^m \right\} \text{ —}$$

гомотет шара B^m с коэффициентом $\lambda > 0$.

Свойство 3 следует из равенств

$$\widehat{\Psi}_R(\mu) = \int\limits_{T^m} \Psi_R(x) e^{-i\mu x}\, d\nu = \int\limits_{T^m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \Phi_R(x + 2\pi k) e^{-i\mu x}\, d\nu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Phi_R(x) e^{-i\mu x}\, dx = (2\pi)^{-m} \widehat{\Phi}_R(\mu).$$

Если $f \in L_2(T^m)$, то проинтегрируем $\|\Delta_t f\|_2^2$ с весом $\Psi_R(t)$ по T^m. По равенству Парсеваля с учетом свойств 2 и 3

$$\int\limits_{T^m} \|\Delta_t f\|_2^2\, \Psi_R(t)\, d\nu \geqslant$$

$$\geqslant 2 \int\limits_{T^m} \left\{ \sum_{|\mu| \geqslant R} |f_\mu|^2 - \frac{1}{2} \sum_{|\mu| \geqslant R} |f_\mu|^2 \left(e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}\right) \right\} \Psi_R(t)\, d\nu =$$

$$= 2 \left\{ \widehat{\Psi}_R(0) \sum_{|\mu| \geqslant R} |f_\mu|^2 - \frac{1}{2} \sum_{|\mu| \geqslant R} \left(\widehat{\Psi}_R(\mu) + \widehat{\Psi}_R(-\mu)\right) |f_\mu|^2 \right\} \geqslant$$

$$\geqslant 2 \widehat{\Psi}_R(0) E_R^2(f, T^m)_2.$$

С другой стороны, с учетом свойства 1

$$\int\limits_{T^m} \|\Delta_t f\|_2^2\, \Psi_R(t)\, d\nu \leqslant \widehat{\Psi}_R(0) \omega^2 \left(\frac{2\lambda_1^{1/2}}{R}, f, T^m, X^m \right)_2.$$

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 2 [31]. *Для любой функции $f \in L_2(T^m)$ имеют место точные неравенства*

$$E_R(f, T^m)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\widehat{\Psi}_R(0)} \int\limits_{T^m} \|\Delta_t f\|_2^2\, \Psi_R(t)\, d\nu \right)^{1/2}; \tag{П.15}$$

$$E_R(f, T^m)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \left(\frac{2\lambda_1^{1/2}}{R}, f, T^m, X^m \right)_2. \tag{П.16}$$

Рассмотрим частные случаи (П.16). Пусть $X^m = l_2^m$, $B_2^m = \{x \in l_2^m \mid |x| \leqslant 1\}$ — единичный евклидов шар, $\Gamma_2^m = \{x \in l_2^m \mid |x| = 1\}$ — его граница, $n = \frac{m}{2} - 1$, $J_n(t)$ — функция Бесселя первого рода порядка n, q_m — ее первый положительный нуль,

$$\varphi_2(x) = \frac{J_n(q_m|x|)}{|x|^n}\chi_{B_2^m}(x), \quad G_n(t) = 2^n\Gamma(n+1)\frac{J_n(t)}{t^n}. \tag{П.17}$$

Известно [16], что функция $\varphi_2(x)$ является первой собственной функцией оператора Лапласа в шаре B_2^m, соответствующей собственному значению $\lambda_1 = q_m^2$ ($q_1 = \frac{\pi}{2}$, $q_3 = \pi$, q_5 — первый положительный нуль функции $\operatorname{tg} t - t$, $q_m \sim m/2$ $(m \to \infty)$).

Так как

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_2^m} = \mathrm{const},$$

а [21,с.176]

$$\int\limits_{\Gamma_2^m} e^{-ixu}\, du = (2\pi)^{n+1}\frac{J_n(|x|)}{|x|^n},$$

то в соответствии с (П.12) и (П.13) весовая функция $\Psi_{R,2}(x)$ (П.14), $\widehat{\Psi}_{R,2}(0) = 1$ имеет вид

$$\Psi_{R,2}(x) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^m} \lambda_{m,2}(\frac{|\mu|}{R})e^{i\mu x}, \tag{П.18}$$

где для $|x| = t \in [0,1]$

$$\lambda_{m,2}(t) = \frac{G_n^2(q_m t)}{1-t^2}. \tag{П.19}$$

Следствие 1. *Для любой функции $f \in L_2(T^m)$ справедливо точное неравенство*

$$E_R(f,T^m)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(\frac{2q_m}{R}, f, T^m, l_2^m\right)_2.$$

Пусть $X^m = l_\infty^m$, $B_\infty^m = \{x \in l_\infty^m \mid \|x\|_\infty \leqslant 1\}$, $\Gamma_\infty^m = \{x \in l_\infty^m \mid \|x\|_\infty = 1\}$,

$$\varphi_\infty(x) = \left(\prod_{i=1}^m \cos\frac{\pi}{2}x_i\right)\chi_{B_\infty^m}(x). \tag{П.20}$$

Известно [16], что функция $\varphi_\infty(x)$ является первой собственной функцией оператора Лапласа в шаре B^m_∞, соответствующей собственному значению $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 m$.

Простые вычисления интеграла

$$\int\limits_{\Gamma^m_\infty} \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n}(u) e^{-ixu}\, du$$

показывают, что весовая функция $\Psi_{R,\infty}(x)$, $\widehat{\Psi}_{R,\infty}(0) = 1$ в этом случае имеет вид

$$\Psi_{R,\infty}(x) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^m} \lambda_{m,\infty}\left(\frac{\mu}{R}\right) e^{i\mu x}, \tag{П.21}$$

где

$$\lambda_{m,\infty}(x) = (1-|x|^2)\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{m}x_i}{1-mx_i^2}\right)^2. \tag{П.22}$$

Следствие 2. *Для любой функции $f \in L_2(T^m)$ справедливо точное неравенство*

$$E_R(f,T^m)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(\frac{\pi\sqrt{m}}{R}, f, T^m, l^m_\infty\right)_2.$$

3. Теорема Джексона в пространстве $\mathbf{L_p(T^m)}$, $1 \leqslant p < 2$

Пусть

$$K_R(t) = \sum_{|\mu|<R} (\widehat{K}_R)_\mu e^{i\mu t} \text{ —} \tag{П.23}$$

четный положительный полином с неотрицательными коэффициентами $(\widehat{K}_R)_\mu$, $(\widehat{K}_R)_0 = 1$ и со спектром в шаре $|\mu| < R$ ($|\cdot| = \|\cdot\|_2$),

$$A_R(x,f) = \int\limits_{T^m} f(x+t) K_R(t)\, d\nu_t. \tag{П.24}$$

Получим оценку уклонения в $L_p(T^m)$ для оператора (П.24). Пусть $L_q(T^m\times T^m)$ $(1\leqslant q\leqslant\infty)$ — пространство $\nu_x\times\nu^1_t$-измеримых комплексных функций $g(x,t) : T^m\times T^m \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\|g\|_q = \left(\int\limits_{T^m}\int\limits_{T^m} |g(x,t)|^q\, d\nu_x d\nu^1_t\right)^{1/q} < \infty,$$

где $d\nu^1_t = K_R(t)\, d\nu_t$.

ТЕОРЕМА 3 [10]. *Для любой комплексной функции* $f \in L_p(T^m)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ *справедливо неравенство*

$$\|f(x) - A_R(x,f)\|_p \leqslant \frac{1}{2^{1/p'}} \left(\int\limits_{T^m} \|\Delta_t f\|_p^p K_R(t)\, d\nu_t \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейный оператор из пространства $L_q(T^m \times T^m)$ в пространство $L_p(T^m)$:

$$Bg(x,t) = \int\limits_{T^m} (g(x-t,t) - g(x,t)) K_R(t)\, d\nu_t.$$

При $1 \leqslant p \leqslant 2$

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{T^m} |f|^p\, d\nu \right)^{1/p} = \sup \left\{ \left| \int\limits_{T^m} f\overline{g}\, d\nu \right| \;\middle|\; \|g\|_{p'} \leqslant 1 \right\}.$$

Отсюда и из неравенства Гельдера

$$\|Bg(x,t)\|_p = \sup_{\|h\|_{p'} \leqslant 1} \left| \int\limits_{T^m} Bg(x,t)\overline{h}(x)\, d\nu_x \right| =$$

$$= \sup_{\|h\|_{p'} \leqslant 1} \left| \int\limits_{T^m} \int\limits_{T^m} (g(x-t,t) - g(x,t))\overline{h}(x)\, d\nu_t^1\, d\nu_x \right| =$$

$$= \sup_{\|h\|_{p'} \leqslant 1} \left| \int\limits_{T^m} \int\limits_{T^m} g(x,t)(\overline{h}(x+t,t) - \overline{h}(x))\, d\nu_x\, d\nu_t^1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|h\|_{p'} \leqslant 1} \|\Delta_t h\|_{p'} \|g\|_p. \qquad (\text{П}.25)$$

На элементе $g(x,t) = \Delta_t f(x)$ в силу четности ядра $K_R(t)$

$$B(\Delta_t f(x)) = \int\limits_{T^m} (f(x) - f(x-t) - f(x+t) + f(x))\, d\nu_t^1 =$$

$$= 2\left(f(x) - \int\limits_{T^m} f(x+t) K_R(t)\, d\nu_t \right).$$

Отсюда и из (П.25) следует, что

$$\|B(\Delta_t f(x))\|_p = 2\|f - A_R(f)\|_p \leqslant \sup_{\|h\|_{p'}\leqslant 1} \|\Delta_t h\|_{p'} \|\Delta_t f\|_p. \qquad (\text{П.26})$$

Оценим нормы оператора $Qf = \Delta_t f(x) : L_{p'}(T^m) \to L_{p'}(T^m \times T^m)$ при $2 \leqslant p' \leqslant \infty$. Имеем

$$\|Qf\|_\infty = \sup_t \|\Delta_t f\|_\infty \leqslant 2\| f\|_\infty,$$

поэтому $\|Q\|_{\infty\to\infty} \leqslant 2$. Вследствие неотрицательности коэффициентов $(\widehat{K}_R)_\mu$ будет

$$\|Qf\|_2^2 = \int\limits_{T^m} \|f(x+t) - f(x)\|_2^2 K_R(t)\, d\nu_t =$$

$$= 2\left\{ \|f\|_2^2 - \sum_{|\mu|<R} (\widehat{K}_R)_\mu |\widehat{f}_\mu|^2 \right\} \leqslant 2\|f\|_2^2.$$

Отсюда $\|Q\|_{2\to 2} \leqslant \sqrt{2}$. Интерполируя эти крайние случаи [3], получим

$$\|Q\|_{p'\to p'} \leqslant 2^{1/p} \qquad (2 \leqslant p' \leqslant \infty).$$

Согласно (П.26)

$$\|f - A_R(f)\|_p \leqslant \frac{1}{2^{1/p'}} \|\Delta_t f\|_p. \quad \square$$

Нам понадобится также следующая теорема.

Теорема 4 [10]. *Для любой функции $f(x)\in L_p(T^m)$, $0<p<2$ существует функция $g(x) \in L_2(T^m)$ такая, что для всех $t \in T^m$ выполняется равенство*

$$\|\Delta_t f\|_p^p = \|\Delta_t g\|_2^2.$$

Доказательство. Так как

$$\|\Delta_t g\|_2^2 = 2 \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^m} |\widehat{g}_\mu|^2 (1 - \cos \mu t),$$

то достаточно установить, что для любого $\mu \in \mathbb{Z}^m$, $\mu \neq 0$ и любой кусочно-постоянной функции $f(x) = x_i$, $x \in e_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, $e_i \cap e_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $\cup e_i = T^m$

$$\int\limits_{T^m}\int\limits_{T^m} |\Delta_t f(x)|^p \operatorname{Re} e^{i\mu t}\, d\nu_x\, d\nu_t =$$

$$= \int\limits_{T^m}\int\limits_{T^m} |f(x) - f(y)|^p \operatorname{Re} e^{i\mu(x-y)}\, d\nu_x\, d\nu_y =$$

$$= \operatorname{Re} \int\limits_{T^m}\int\limits_{T^m} |f(x) - f(y)|^p e^{i\mu(x-y)}\, d\nu_x\, d\nu_y \leqslant 0. \qquad (\text{П}.27)$$

Воспользуемся следующим тождеством Шенберга [29]. Для любых наборов $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0$, $0 < p < 2$

$$\sum_{i,j=1}^N |x_i - x_j|^p \alpha_i \overline{\alpha}_j = -c(p) \int\limits_0^\infty \left\{ \sum_{i,j=1}^N \exp(-t^2|x_i - x_j|^2) \alpha_i \overline{\alpha}_j \right\} \frac{dt}{t^{p+1}}$$

$$(c(p) > 0).$$

Так как

$$\sum_{i=1}^N = \sum_{i=1}^N \int\limits_{e_i} e^{i\mu x}\, d\nu = 0,$$

то в силу положительной определенности функции $e^{-t^2|x|^2}$ $(t \neq 0)$,

$$\int\limits_{T^m}\int\limits_{T^m} |f(x) - f(y)|^p e^{i\mu(x-y)}\, d\nu_x\, d\nu_y = \sum_{i,j=1}^N |x_i - x_j|^p \alpha_i \overline{\alpha}_j =$$

$$= -c(p) \int\limits_0^\infty \left\{ \sum_{i,j=1}^N \exp(-t^2|x_i - x_j|^2) \alpha_i \overline{\alpha}_j \right\} \frac{dt}{t^{p+1}} \leqslant 0,$$

что доказывает (П.27) и теорему 4. $\square$

Если теперь функция $f \in L_p(T^m)$ и для некоторой четной неотрицательной функции

$$\Psi_R(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^m} (\widehat{\Psi}_R)_\mu e^{i\mu x}$$

с носителем в шаре $|x| \leqslant \tau_m/R$ выполнены условия

$$(\widehat{\Psi}_R)_0 = 1, \quad (\widehat{\Psi}_R)_\mu \leqslant (\widehat{K}_R)_\mu \quad (\forall \mu \in \mathbb{Z}^m), \tag{П.28}$$

то на основании теорем 3 и 4 при $1 \leqslant p < 2$ будет

$$\begin{aligned} E_R(f,T^m)_p \leqslant \|f - A_R(f)\|_p \leqslant \frac{1}{2^{1/p'}} \left(\int\limits_{T^m} \|\Delta_t f\|_p^p \, K_R(t)\, d\nu_t \right)^{1/p} = \\ = \frac{1}{2^{1/p'}} \left(\int\limits_{T^m} \|\Delta_t g\|_2^2 \, K_R(t)\, d\nu_t \right)^{1/p} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2^{1/p'}} \left(\int\limits_{T^m} \|\Delta_t g\|_2^2 \, \Psi_R(t)\, d\nu_t \right)^{1/p} = \\ = \frac{1}{2^{1/p'}} \left(\int\limits_{T^m} \|\Delta_t f\|_p^p \, \Psi_R(t)\, d\nu_t \right)^{1/p} \leqslant \\ \leqslant 2^{-1/p'} \omega \left(\frac{\tau_m}{R}, f, T^m, l_2^m \right)_p . \end{aligned} \tag{П.29}$$

Таким образом, задача сводится к построению четного положительного полинома $K_R(t)$ с неотрицательными коэффициентами и четной неотрицательной функции $\Psi_R(t)$ с возможно меньшим носителем, для которых выполнены условия (П.28).

Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция шара $|x| \leqslant 1/2$; $n = m/2 - 1$, $J_n(t)$ — функция Бесселя порядка n; $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,j} < \ldots$ — ее положительные нули, $q_m = x_{n,1}$, $t = |x|$,

$$\varphi(x) = \frac{J_n(2q_m|x|)}{|x|^n}\chi(x), \quad G_n(t) = 2^n\Gamma(n+1)\frac{J_n(t)}{t^n},$$

$$\Lambda_m(|x|) = \frac{(\varphi * \varphi)(x)}{(\varphi * \varphi)(0)} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(u)\varphi(x-u)\,du \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi^2(u)\,du \right)^{-1}, \tag{П.30}$$

$$K_R(x) = \sum_{|\mu|<R} \Lambda_m\left(\frac{|\mu|}{R}\right) e^{i\mu x} — \tag{П.31}$$

ядро многомерного метода Коровкина [30];

$$\lambda_{m,2} = \frac{G_n^2(q_m t)}{1-t^2}, \quad \Psi_{R,2}^{\tau}(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^m} \lambda_{m,2}\left(\frac{\tau|\mu|}{R}\right) e^{i\mu x} \text{ —} \tag{П.32}$$

весовая функция, построенная при доказательстве следствия 1. Полином $K_R(x)$ (П.31) при $m = 1$ является ядром средних Бомана—Коровкина [9,с.327].

Положим

$$\tau_m = \min\left\{\tau > 1 \mid \Lambda_m(t) - \lambda_{m,2}(\tau t) \geqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\tau}\right\}. \tag{П.33}$$

Так как спектр полинома $K_R(x)$ находится в шаре $|\mu| < R$, а носитель веса $\Psi_{R,2}^{\tau_m}(x)$ — в шаре $|x| \leqslant 2\tau_m q_m/R$, то согласно (П.28) и (П.29) при $1 \leqslant p < 2$, $m \geqslant 1$ получим следующее неравенство Джексона в $L_p(T^m)$ с точной константой:

$$E_R(f, T^m)_p \leqslant 2^{-1/p'} \omega\left(\frac{2\tau_m q_m}{R}, f, T^m, l_2^m\right)_p.$$

Возникает задача об оценке τ_m сверху для $m \geqslant 1$. В частности, верно ли, что всегда $\tau_m \leqslant 2$? Далее докажем, что для константы τ_m (П.33) справедливы оценки $\sqrt{2} \leqslant \tau_m \leqslant 2$ при всех $m \geqslant 1$.

Найдем преобразование Фурье функции $\Lambda_m(x)$. Имеем

$$\widehat{\Lambda}_m(x) = \frac{(\widehat{\varphi}(x))^2}{\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi^2(x)\,dx}.$$

По формуле суммирования Пуассона [21,с.281] из неотрицательности преобразования Фурье $\Lambda_m(x)$ вытекает неотрицательность ядра $K_R(x)$ многомерного метода Коровкина. Функция $\varphi(x)$ является радиальной. Поэтому ее преобразование Фурье — тоже радиальное и вычисляется по формулам [21,с.176; 20,с.301]:

$$\widehat{\varphi}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(u) e^{-ixu}\,du = \frac{(2\pi)^{n+1}}{|x|^n} \int\limits_0^{\infty} \varphi(u) u^{n+1} J_n(|x|u)\,du =$$

$$= \frac{(2\pi)^{n+1}}{|x|^n} \int\limits_0^{1/2} u J_n(2q_m u) J_n(|x|u)\,du =$$

$$= \frac{(2\pi)^{n+1} q_m J_{n+1}(q_m)}{4|x|^n (q_m^2 - |x|^2/4)} J_n(|x|/2).$$

Аналогично в соответствии с [20,с.302]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi^2(x)\,dx = \int\limits_{|x|\leqslant 1/2} \frac{J_n^2(2q_m|x|)}{|x|^{2n}}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} rJ_n^2(2q_m r)\,dr \int\limits_{|u'|=1} du' = \frac{\pi^{n+1}(n+1)}{4\Gamma(n+2)} J_{n+1}^2(q_m).$$

Тогда

$$\widehat{\Lambda}_m(x) = \frac{2^{2n}\pi^{n+1}q_m^2\Gamma(n+2)}{(n+1)(q_m^2-|x|^2/4)^2}\cdot\frac{J_n^2(|x|/2)}{|x|^{2n}}.$$

Используя обратное преобразование Фурье, получим для $|x| = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\Lambda_m(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}t^n}\int\limits_0^\infty \widehat{\Lambda}_m(u)u^{n+1}J_n(ut)\,du =$$

$$= \frac{2q_m^2\Gamma(n+2)}{(n+1)t^n}\int\limits_0^\infty \frac{uJ_n^2(u)}{(q_m^2-u^2)^2}\cdot\frac{J_n(2tu)}{u^n}\,du =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{2xJ_n^2(q_m x)}{(1-x^2)^2}G_n(2q_m xt)\,dx. \qquad (\text{П}.34)$$

Отметим некоторые свойства подынтегральных функций в (П.34). Известно, что при $n \geqslant 1/2$ [22,с.290] последовательность

$$M_{n,k} = \max_{x_{n,k}\leqslant x\leqslant x_{n,k+1}} \sqrt{x}\,|J_n(x)| \quad (k \geqslant 1)$$

убывает по k. Тогда при $n \geqslant 1/2$ убывать по k будет и последовательность

$$m_{n,k} = \max_{x_{n,k}\leqslant x\leqslant x_{n,k+1}} |G_n(x)| = |G_n(x_{n+1,k})| \downarrow 0. \qquad (\text{П}.35)$$

Действительно,

$$\frac{m_k}{\Gamma(n+1)2^n} \geqslant \frac{M_k}{\max_{x_{n,k}\leqslant x\leqslant x_{n,k+1}} x^{n+1/2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{M_{k+1}}{\min_{x_{n,k+1}\leqslant x\leqslant x_{n,k+2}} x^{n+1/2}} \geqslant \frac{m_{k+1}}{2^n\Gamma(n+1)}.$$

Докажем, что для $x \geqslant 0$, $0 < t \leqslant 1/2$, $n = m/2 - 1$, $m \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$G_n(2q_m tx) \geqslant G_n(2q_m t) - \frac{(x^2-1)(q_m t)^2}{n+1} G_{n+1}(2q_m t). \qquad (\text{П.36})$$

Рассмотрим функцию

$$f_n(x,t) = G_n(2q_m tx) - G_n(2q_m t) + \frac{(x^2-1)(q_m t)^2}{n+1} G_{n+1}(2q_m t).$$

Так как

$$\frac{d}{dx} G_n(2q_m tx) = -\frac{2x(q_m t)^2}{n+1} G_{n+1}(2q_m tx),$$

то

$$\frac{d}{dx} f_n(x,t) = \frac{2x(q_m t)^2}{n+1} \{G_{n+1}(2q_m t) - G_{n+1}(2q_m tx)\}.$$

Знак производной зависит от знака функции:

$$g_n(x,t) = G_{n+1}(2q_m t) - G_{n+1}(2q_m tx).$$

При $0 \leqslant x \leqslant 1$ $g_n(x,t) \leqslant 0$. При $1 \leqslant x \leqslant x_{n+2,1}/2q_m t$ $g_n(x,t) \geqslant 0$. Если $n = -1/2, 0$ и $x \geqslant x_{n+2,1}/2q_m t$, то вследствие убывания последовательности $m_{n+1,k}$

$$\begin{aligned} g_n(x,t) &\geqslant G_{n+1}(2q_m t) - |G_{n+1}(x_{n+2,1})| \geqslant \\ &\geqslant G_{n+1}(x_{n,1}) - |G_{n+1}(x_{n+2,1})| \geqslant 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство проверяется непосредственными вычислениями. Итак, $f_n(x,t) \geqslant f_n(1,t) = 0$ при $n \geqslant 1/2$, $0 \leqslant x \leqslant x_{n+1,1}/2q_m t \leqslant x_{n+2,1}/2q_m t$ и $f_n(x,t) \geqslant 0$ при $n = -1/2, 0$ и всех $x \geqslant 0$. Пусть теперь $n \geqslant 1/2$, $x \geqslant x_{n+1,1}/2q_m t$. Вследствие убывания последовательности $m_{n,k}$ по k, возрастания по x функции

$$r_n(x,t) = -G_n(2q_m t) + \frac{(x^2-1)(q_m t)^2}{n+1} G_{n+1}(2q_m t)$$

и уже доказанного неравенства

$$G_n(x_{n+1,1}) + r_n(x_{n+1,1}/2q_m t, t) \geqslant 0$$

можно записать цепочку неравенств

$$f_n(x,t) \geqslant G_n(x_{n+1,1}) + r_n(x,t) \geqslant G_n(x_{n+1,1}) + r_n(x_{n+1,1}/2q_m t, t) \geqslant 0.$$

Неравенство (П.36) доказано.

По построению, $\Lambda_m(0) = 1$, поэтому

$$\int_0^\infty \frac{2xJ_n^2(q_m x)}{(1-x^2)^2}\,dx = 1. \tag{П.37}$$

Покажем, что

$$\int_0^\infty \frac{2xJ_n^2(q_m x)}{x^2-1}\,dx = 0. \tag{П.38}$$

Известно, что [5,с.244]

$$\int_0^\infty \frac{2xJ_n^2(q_m x)}{x^2+z^2}\,dx = I_n(q_m z)K_n(q_m z), \tag{П.39}$$

где $z = -i + \beta$, $\beta > 0$, $I_n(z)$, $K_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя (см. [20,с.196]);

$$I_n(q_m z)K_n(q_m z) = \frac{\pi i}{2} J_n(iq_m z)(J_n(iq_m z) + iY_n(iq_m z)), \tag{П.40}$$

где $Y_n(z)$ — функция Бесселя второго рода.

Так как для $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $x \geqslant 0$

$$\frac{xJ_n^2(q_m x)}{|x^2+z^2|} \leqslant \frac{C_m}{x^2+1},$$

то для указанных β интеграл (П.39) сходится равномерно. Тогда, переходя в (П.39) к пределу при $\beta \to 0+0$, учитывая (П.40) и непрерывность $J_n(z)$, $Y_n(z)$ $(z \neq 0)$, получим (П.38).

Если теперь обе части неравенства (П.36) сначала умножить на функцию

$$\frac{2xJ_n^2(q_m x)}{(1-x^2)^2},$$

а затем проинтегрировать, то придем к оценке

$$\Lambda_m(t) \geqslant G_n(2q_m t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1/2). \tag{П.41}$$

Из разложения функции Бесселя $J_n(x)$ в произведение Вейерштрасса [20,с.192]

$$G_n(x) \leqslant 1 - (x/q_m)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant q_m,$$

поэтому для функции $\lambda_{m,2}$ (П.32)

$$\lambda_{m,2}(t) \leqslant G_n(q_m t).$$

Отсюда и из (П.41) вытекает справедливость неравенства

$$\Lambda_m(t) - \lambda_{m,2}(2t) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1/2),$$

а значит, и оценка $\tau_m \leqslant 2$ величины (П.33).

Если воспользуемся разложениями функций $J_n(x)$, $J_n^2(x)$ в степенной ряд [20,с.180,182], равенствами (П.37) и (П.38), то получим

$$\Lambda_m(t) \sim 1 - \frac{q_m^2 t^2}{n+1} \quad (t \to 0),$$
$$\lambda_m(t) \sim 1 - \frac{q_m^2 t^2}{2(n+1)} \quad (t \to 0).$$

Отсюда $\tau_m \geqslant \sqrt{2}$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 5 [10]. *Для любой функции $f \in L_p(T^m)$, $1 \leqslant p < 2$, $m \geqslant 1$ справедливо точное неравенство Джексона*

$$E_R(f, T^m)_p \leqslant 2^{-1/p'} \omega(4q_m/R, f, T^m, l_2^m)_p.$$

Рассмотрим возможность обобщения на случай пространства $L_p(T^m)$ и следствия 2. Если вновь функцию $f \in L_p(T^m)$ приближать суммами $A_R(x, f)$ (П.24) с ядром $K_R(x)$ (П.31), то для доказательства неравенства

$$E_R(f, T^m)_p \leqslant 2^{-1/p'} \omega\left(\frac{2\pi\sqrt{m}}{R}, f, T^m, l_\infty^m\right)_p \quad (1 \leqslant p < 2)$$

достаточно установить неравенство

$$\lambda_{m,2}(x) \geqslant \lambda_{m,\infty}(x) \quad (|x| \leqslant 1), \tag{П.42}$$

где (см.(П.22))

$$\lambda_{m,\infty}(x) = (1 - |x|^2) \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m} x_i}{1 - m x_i^2} \right)^2 .$$

Докажем справедливость неравенства (П.42) при $2 \leqslant m \leqslant 9$. Пусть

$$\lambda_m(t) = \max_{|x|=t} \lambda_{m,\infty}(x), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Лемма 1. *Для* $2 \leqslant m \leqslant 9$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\lambda_m(t) = \frac{\cos^{2m} \frac{\pi}{2} t}{(1 - t^2)^{2m-1}}. \tag{П.43}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(u) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{u}}{1 - u} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{(2k+1)^2} \right) .$$

При $0 \leqslant u < 9$ $\quad g(u) > 0$ и для указанных u

$$\ln g(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{u}{(2k+1)^2} \right) .$$

Так как для всех $k \geqslant 1$ функции

$$\ln \left(1 - \frac{u}{(2k+1)^2} \right)$$

при $0 \leqslant u < 9$ — выпуклые вверх, то выпуклой вверх будет и функция $\ln g(t)$. Если $t^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то, пользуясь неравенством Иенсена для набора точек $\{m x_i^2\}_{i=1}^{m}$, $2 \leqslant m \leqslant 9$, получим

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \ln g(m x_i^2) \leqslant \ln g(t).$$

Тогда для $2 \leqslant m \leqslant 9$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m} x_i}{1 - m x_i^2} \leqslant \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2} t}{1 - t^2} \right)^m .$$

Равенство будет достигаться при $x_i^2 = \frac{t^2}{m}$ $(i = 1, \ldots, m)$, что и доказывает (П.43). $\square$

Если воспользоваться разложениями функции Бесселя и $\cos\frac{\pi}{2}t$ в произведение Вейерштрасса, леммой 1, то неравенство (П.42) можно переписать так:

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\left(\frac{x_{n,1}t}{x_{n,k}}\right)^2\right) \geqslant \prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\left(\frac{t}{2k-1}\right)^2\right)^m . \qquad (\text{П}.44)$$

Рассмотрим функцию

$$r(t)=\frac{G_n(q_m\sqrt{t})}{1-t} \bigg/ \left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{t}}{1-t}\right)^m = \frac{\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{t}{\alpha_k^2}\right)}{\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{t}{\beta_k^2}\right)^m},$$

$$0\leqslant t\leqslant 1, \qquad \alpha_k=\frac{x_{n,k}}{x_{n,1}}, \qquad \beta_k=2k-1, \qquad q_m=x_{n,1}.$$

Выясним, когда функция $\ln r(t)$ выпуклая вверх. Для этого достаточно показать, что функции $\ln\left(\left(1-\frac{t}{\alpha_k^2}\right) \Big/ \left(1-\frac{t}{\beta_k^2}\right)^m\right)$ для $k\geqslant 2$ выпуклы вверх. Так как

$$\left(\ln\frac{1-\frac{t}{\alpha_k^2}}{\left(1-\frac{t}{\beta_k^2}\right)^m}\right)'' = \frac{m(t-\alpha_k^2)^2-(t-\beta_k^2)^2}{(t-\alpha_k^2)^2(t-\beta_k^2)^2},$$

то достаточно показать, что

$$\sqrt{m}\alpha_k^2-\beta_k^2-(\sqrt{m}-1)t\leqslant 0 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),$$

или согласно условию $m\geqslant 1$

$$m^{1/4}\alpha_k-\beta_k\leqslant 0 \qquad (k\geqslant 2). \qquad (\text{П}.45)$$

Если $\Delta x_{n,i}=x_{n,i+1}-x_{n,i}$, $\Delta_n=\sup_{i\geqslant 1}\Delta x_{n,i}$, то

$$x_{n,k}=x_{n,1}+\sum_{i=1}^{k-1}\Delta x_{n,i}\leqslant x_{n,1}+(k-1)\Delta_n.$$

Неравенства (П.45) будут выполнены, если

$$m^{1/4}\left(1+\frac{(k-1)\Delta_n}{x_{n,1}}\right)\leqslant 2k-1 \qquad (k\geqslant 2)$$

или

$$\left(m^{1/4}\frac{\Delta_n}{x_{n,1}}-2\right)(k-1)+m^{1/4}-1\leqslant 0 \qquad (k\geqslant 2). \qquad (\text{П}.46)$$

Воспользуемся следующей теоремой типа теорем Штурма [19, с.33].

Теорема 6. *Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная невозрастающая (неубывающая) функция в промежутке $a < x < b$, а y — решение уравнения*

$$y'' + \varphi(x)y = 0.$$

Если $x' < x'' < x'''$ — три последовательных нуля функции $y(x)$, то $x'' - x' \leqslant x''' - x''$ $(x'' - x' \geqslant x''' - x'')$, то есть последовательность нулей функции $y(x)$ — выпуклая вверх (вниз).

Функция $y(x) = \sqrt{x}J_\nu(x)$ является решением уравнения

$$y'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)y = 0.$$

Функция $\varphi(x) = 1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}$ удовлетворяет условиям теоремы 6 и является невозрастающей при $|\nu| < 1/2$ и неубывающей при $\nu \geqslant 1/2$. Применяя теорему 6, получаем следующее утверждение [22].

Лемма 2. *Последовательность положительных нулей функции Бесселя $J_n(t)$ — выпуклая вниз, если $n \geqslant 1/2$, и выпуклая вверх, если $|n| < 1/2$.*

Из леммы 2 вытекает, что последовательность $\Delta x_{n,k}$ не убывает при $n = 0$ и не возрастает при $n > 1/2$. Учитывая асимптотику нулей функции Бесселя [20, с.192] $x_{n,i} \sim \pi(i + n/2 - 1/4)$ $i \to \infty$, получаем следствие.

Следствие 3. *Если $m \geqslant 2$, $n = \frac{m}{2} - 1$, то $\Delta_n \leqslant \pi$ при $n = 0$ и $\Delta_n = x_{n,2} - x_{n,1}$ при $n \geqslant 1/2$.*

Вернемся к неравенству (П.46). Для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы были справедливы следующие неравенства:

1) $m^{1/4}\frac{\Delta_n}{x_{n,1}} \leqslant 2$,

2) $m^{1/4}\left(\frac{\Delta_n}{x_{n,1}} + 1\right) \leqslant 3$ (значение (П.46) при $k = 2$).

Так как $m \geqslant 1$, то из неравенства 2 автоматически следует неравенство 1, поэтому достаточно проверить неравенство 2. Используя приближенные значения первых и вторых нулей функции Бесселя, легко убедиться, что оно выполнено при $2 \leqslant m \leqslant 9$.

Таким образом, функция $\ln r(t)$ выпуклая вверх при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $2 \leqslant m \leqslant 9$. Отсюда следует, что

$$\ln r(t) \geqslant \min(\ln r(0), \ln r(1)) = \min(0, \ln r(1)).$$

Имеем

$$r(1) = \left(\frac{G_n(q_m\sqrt{t})}{1-t} \Big/ \left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{t}}{1-t} \right)^m \right) \Bigg|_{t=1} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}G_n'(q_m)}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^m} = \frac{(q_m/2)^2 G_{n+1}(q_m)}{(n+1)\left(\frac{\pi}{m}\right)^m}.$$

Используя приближенные значения q_m и $G_{n+1}(q_m)$, убеждаемся, что $r(1) \geqslant 1$ при $2 \leqslant m \leqslant 9$. Таким образом, $r(t) \geqslant 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $2 \leqslant m \leqslant 9$, а это и есть неравенство (П.44). Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 7 [10]. *Для любой функции $f \in L_p(T^m)$, $1 \leqslant p < 2$, $1 \leqslant m \leqslant 9$ справедливо точное неравенство Джексона*

$$E_R(f, T^m)_p \leqslant 2^{-1/p'} \omega(2\pi\sqrt{m}/R, f, T^m, l_\infty^m)_p.$$

Теорема 7 для всех $m \geqslant 2$ анонсирована в [28].

Библиографический список

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации.– М.: Наука, 1965.– 408 с.
2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды.– М.: ГИФМЛ, 1961.– 936 с.
3. Benedeck A., Panzone R. The spaces L_p with mixed norm// Duke Math. J.– 1961.– V.28.– P.301 – 324.
4. Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p// Труды МИАН СССР.– 1967.– Т.88.– С.3 – 16.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.2.– М.: Наука, 1970.– 295 с.
6. Виноградов И.М. Основы теории чисел.– М.: Наука, 1965.– 180 с.
7. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций.– Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.– 184 с.
8. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.– М.: Наука, 1977.– 512 с.
9. Жук В.В. Аппроксимация периодических функций.– Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.– 368 с.
10. Иванов В.И., Смирнов О.И. Ковстанты Джексона и константы Юнга в пространствах L_p.– Тула: ТулГУ, 1995.– 192 с.
11. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды.– М.: Наука, 1984.– 496 с.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1972.– 496 с.
13. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения.– М.: Наука, 1976.– 320 с.
14. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения.– М.: Наука, 1984.– 352 с.

15. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.– 336 с.

16. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.1.– Л.: Гостехиздат, 1951.– 476 с.

17. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация.– М.: Мир, 1975.– 496 с.

18. Натансон И.П. Конструктивная теория функций.– М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.– 688 с.

19. Сеге Г. Ортогональные многочлены.– М.: ИЛ, 1962.– 550 с.

20. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган.– М.: Наука, 1979.– 832 с.

21. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.– М.: Мир, 1974.– 331 с.

22. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.– Киев: Наукова Думка, 1981.– 340 с.

23. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций// Изв. АН СССР. Сер. Математика.– 1951.– Т.15.– №3.– С.219 – 242.

24. Тиман А.Ф. Теория приближений функций действительного переменного.– М.: ГИФМЛ, 1960.– 624 с.

25. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближения.– М.: Изд-во МГУ, 1976.– 304 с.

26. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2// Тр. МИАН СССР. – 1967.– Т.88.– С.71 – 74.

27. Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой// Тр. МИАН СССР.– 1992.– Т.198.– С.232 – 241.

28. Черных Н.И. О точном неравенстве Джексона в $L_p(T^n)$// Тез. докл. Международ. конф. "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ".– М.: МИРАН им. В.А.Стеклова, 1995.– С.295 – 296.

29. Schoenberg I.J. On best approximation of linear operators// Indagationes Math.– 1964.– V.26.– N.2.– P.155 – 163.

30. Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона// Математические заметки.- 1976.- Т.20.- №3.- С.439 - 444.

31. Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2// Математические заметки.- 1981.- Т.29.- №2.- С.309 - 315.

Оглавление

ИВАНОВ Валерий Иванович

Введение в теорию приближений

Редактор Н.П. Одноволова

Изд. лиц. ЛР 020300 от 12.02.97.
Подписано в печать 18.11.99.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 6,74. Усл. кр.-отт. 6,74 Уч.-изд. л. 5,8.
Тираж 100 экз. Заказ 763

Тульский государственный университет.
300600, Тула, просп. Ленина, 92.

Отпечатано в редакционно-издательском центре
Тульского государственного университета.
300600, Тула, ул. Болдина, 151.