УДК 57.091

Библиотека «R&C Dynamics», том VI

Серия организована издательством «УРСС» и редакцией журнала «Регулярная и хаотическая динамика» в 1998 г. и выпускается совместно.

Голубев В. В. Талант без почвы. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 120 стр. — ISBN 5-7029-???-?

15 января 2000 года исполняется 150 лет со дня рождения С. В. Ковалевской. В этой книге известный русский математик и механик В. В. Голубев рассказывает о творческом пути знаменитой соотечественницы (материал не был опубликован при его жизни). Автор включил фрагменты переписки С. В. Ковалевской с разными математиками. Приложение содержит две статьи Н. Е. Жуковского.

ISBN 5-7029-???-?

Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала «Регулярная и хаотическая динамика».
http://www.uni.udm.ru/rcd

Содержание

Предисловие

15 января 2000 г. исполняется 150 лет со дня рождения С. В. Ковалевской — знаменитой женщины-математика, имя которой прославило Россию, а результаты вошли в золотой фонд мировой математики. Не следует забывать также, что С. В. Ковалевская оставила замечательное литературное и культурное наследие и сыграла значительную роль в общественном движении, создав предпосылки для участия женщин в научном творчестве и образовании. Все это кажется сейчас вполне естественным, однако в прошлом веке женщине было невозможно получить сколько-нибудь серьезное образование. С. В. Ковалевская первая прошла этот путь до конца — от вольнослушателя западного университета до члена-корреспондента Императорской Академии Наук. Ее математические работы получили мировую известность, она вошла в круг самых значительных математиков прошлого столетия, перед ней открылись двери европейских университетов. Однако на своем пути она постоянно испытывала противодействие как со стороны официальных законов, так и со стороны некоторых известных математиков (акад. А. А. Марков и др.).

Ее литературные опыты подвергались постоянным нападкам, содержащих элементы ненависти (к примеру, со стороны известного в то время драматурга Стринберга). Заметим только, что до сих пор романы и воспоминания Ковалевской переиздаются и всегда находят своего читателя.

Она покинула жизнь в расцвете творческих сил и таланта, незадолго до этого получив две крупные премии за открытие и исследование нового случая интегрируемости уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки (уравнений Эйлера–Пуассона). Это — премия Бордена Французской Академии Наук (1888 г.) и премия Шведской Королевской Академии Наук (1889 г.). Тем не менее, она так и не смогла добиться места в России, потому вынуждена была преподавать в одном из университетов Стокгольма, и только неожиданная смерть помешала ей окончательно получить шведское гражданство.

В русской и западной литературе существует несколько книг о жизни и творчестве С. В. Ковалевской (они приведены в списке литературы). Не все они написаны профессиональными математиками и зачастую содержат много вымысла и фантазии. Особенно это относится к влиянию Вейерштрасса на судьбу ее открытий, ошибочности и неполноте анализа в ее работах, поворотов личной жизни. Пожалуй, наиболее объективной и развернутой является книга П. Я. Кочиной, вышедшая в 1981 г. в издательстве «Наука»[1].

Предлагаемая небольшая книга Владимира Васильевича Голубева представляет собой, собственно говоря, не вполне законченное исследование, позволяющее дать однозначные оценки, а ряд эскизов, замечаний, личных соображений. Все они очень интересны для широкого круга читателей, потому что принадлежат перу замечательного ученого — известного специалиста по теории аналитических функций и теоретической механике, в течение всей жизни обращавшегося к творчеству С. В. Ковалевской. Собственно, одна из его самых известных книг «Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки»[2] посвящена явному интегрированию случая Ковалевской с помощью теории аналитических функций комплексного переменного.

В конце жизни В. В. Голубев собирался написать «Очерки по истории математики и механики XIX века в России». Он предполагал включить в них материалы о Лобачевском, Остроградском, Чебышеве, школе московских механиков. Однако до нас дошли лишь очерки о С. В. Ковалевской, которые также содержали отдельные неточности, связанные с болезнью автора. В советское время эти очерки так и не были опубликованы.

От редакции журнала «Регулярная и Хаотическая Динамика» я выражаю благодарность дочери ученого, профессору О. В. Голубевой за предоставленные рукописи. Я не счел целесообразным снабдить текст своими комментариями и восполнить недостающие места — устранены лишь отдельные неточности. К очерку добавлены две статьи Н. Е. Жуковского (который, кстати, в большой степени повлиял на фор-

[1] П. Я. Кочина. Софья Васильевна Ковалевская. М. Наука. 1981.

[2] В. В. Голубев. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Гостехиздат. 1953.

мирование В. В. Голубева как ученого). Одна из них посвящена оценке вклада С. В. Ковалевской в прикладную математику. Вторая статья содержит геометрическую интерпретацию случая Ковалевской и метод его явного интегрирования.

Результаты последней работы практически не изложены в учебной литературе, исключая известный учебник Г. К. Суслова [11], в котором, однако, они содержатся лишь частично. Кроме того, так как понимание существенных свойств движения волчка Ковалевской до сих пор не достигнуто (несмотря на замечательные исследования в [4]), сейчас, возможно, следует вернутся к естественным соображениям великого русского механика, не замутненных отталкивающим формализмом современной математической науки.

В заключение — еще одно замечание. Несмотря на то, что гений Ковалевской нашел международное признание, само название очерка «Талант без почвы» остается актуальным. От имения Ковалевской в Палибино (вблизи г. Великие Луки) остались лишь одни стены, а музей С. В. Ковалевской, обосновавшийся в небольшой пристройке, практически закрыт. Большинство книг о ней также написано и издано не в России. Можно надеяться, что издание этих очерков хоть отчасти нарушит существующую несправедливость.

А. В. Борисов

В. В. Голубев. «Талант без почвы»

1. Переписка С. В. Ковалевской с г. Миттаг-Леффлером

Есть картина Рафаэля “Диспут о причащении”; среди величественной колоннады сидят мудрецы-старцы и с напряженным вниманием, с крайним усилием мысли рассуждают о великих тайнах духа. И есть другие образы творчества человечества — это картина напряженного коллективного труда на грандиозных стройках, в соревновании колхозов. И есть, наконец, “Базар житейской суеты” Теккерея, где Бекки Шарп и ее товарищи и партнеры стараются урвать от жизни что удается; здесь средствами не стесняются, о человеческом достоинстве, человеческой гордости, о какой-нибудь морали не заботятся — какая уж мораль на базаре?

В жизни, конечно, все перепутано и смешано. Перепутано и смешано и великое и жалкое и в жизни науки и творчества. Но все-таки, к чему же ближе жизнь научного творчества? Разобрать действительное положение дел здесь так же трудно, как разобрать сущность исторических ситуаций по “Житиям святых”. Благочестивые истории “ad majorem dei gloriam” вычеркивали из этих житий все, что хоть в какой-нибудь степени могло бросить тень на преподобного, житие которого творилось. Недалеко ушли отсюда и жизнеописания ученых.

Тут тоже “ad majorem scientiae gloriam” вычеркивалось и замалчивалось все, что, по мнению составителя жизнеописания, не соответствовало тому образу ученого, который он хотел бы иметь. За примерами ходить недалеко: ведь исключили же во 2-ом издании сочинений Н. Е. Жуковского его статью “Старая механика в новой физике” только потому, что, по мнению физиков (С. И. Вавилов и др.), антирелятивистские взгляды Н. Е. Жуковского могли уменьшить ореол непогрешимости славного “отца русской авиации”.

Отсюда понятен огромный интерес для истории науки всего того, что сохранилось из писаний ученых, написанных с отражением “злобы дня", тех интересов, какие их в большей или меньшей степени захватывали. И здесь, конечно, на первом плане стоят их письма.

Обстоятельства сложились так, что С. В. Ковалевская и по своей научной подготовке, как ученица Вейерштрасса, и по обстоятельствам своей жизни, как русская по национальности, профессор Стокгольмской высшей школы, и, наконец, по обстоятельствам личной жизни, как родственная связь с Жакляром, знакомство ее родителей с бароном Угласс, который играл какую-то роль в Швеции и, в частности, в организации высшей школы в Стокгольме[1].

Она хорошо знала положение и взаимоотношения математиков в Берлине и в Париже. Естественно, что ее переписка представляет огромный интерес для истории науки. Пусть эта переписка касается не парадной стороны науки, а ее задворков — тем это интереснее: ведь и кухня, и топки, и все хозяйство помещается не в парадных салонах, а именно на задворках. Пусть даже они носят и несколько колорит "Воспоминаний" Авдотии Панаевой; для истории литературы и сплетни Авдотии Панаевой представляют немаловажный интерес.

Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера охватывает период с 1880 г. (первое письмо 2/14 октября 1880 г.) по 1891 г. В жизни С. В. Ковалевской это был период полного расцвета ее математического таланта, период создания ею наиболее крупных ее научных работ, а вместе с тем и период выхода ее на широкую научную и педагогическую арену, как профессора-женщины высшей школы, а затем и как творца прославившей ее работы о движении твердого тела; в то же время это были годы мучительных попыток как-то наладить свою личную жизнь, неудовлетворенности и одиночества.

---

[1] В письме 29.04.1884 г. из Петербурга С. В. Ковалевская пишет: « ... В бумагах моего отца я нашла очень интересную (подчеркнуто С. В. К.) и даже очень трогательную переписку с матерью барона Угласс, когда она была совсем молодою девушкою. Там есть также исполненные ею рисунки и план ее дома. Я привезу все это Углассу, когда осенью вернусь в Стокгольм. Надеюсь, что это доставит ему удовольствие.»

Сравн. это с телеграммою от 24 июня 1884 г.

«Профессору Миттаг-Леффлеру. Г-жа Ковалевская назначена вчера профессором на 5 лет. Ее поставили в известность телеграммой в Берлин.

Густав Угласс»

Не менее важен был этот период и для Г. Миттаг-Леффлера. Это был для него период появления его крупных научных исследований, период создания такого крупнейшего научного предприятия, как математический журнал "Acta Mathematica", поиски его организационной формы как предприятия международного, его финансового укрепления. Но это был также период и большой работы по строительству Высшей школы в Стокгольме, организованной на общественные средства. Наконец, и в личной жизни Миттаг-Леффлера это был важный и решающий период; к 1881 г. относится его женитьба на Сигне Линдфорс, дочери шведского генерала.

Переписка началась по случайному поводу. Не надо забывать, что 60-тые и отчасти 70-е годы были годы борьбы за "эмансипацию" женщин в России. Ряд талантливых русских женщин пробили широкий путь к высшему образованию и за границею окончили высшие школы. Так появились первые врачи, получившие степень доктора за границей, первые естествоиспытатели-женщины (геолог Мария Васильевна Гортынская, училась в Париже; впоследствии жена академика геолога и палеонтолога Алексея Петровича Павлова) и, наконец, выдающийся женщина–математик сама С. В. Ковалевская.

После убийства Александра II настроения в России изменились. Злейшая реакция загнала куда-то глубоко в подполье и революционные планы, и вместе с тем и женскую эмансипацию. Несколько позднее в одном письме С. В. Ковалевская хорошо характеризует общественные настроения начала царствования Александра III.

«Чтобы показать Вам, каково сейчас настроение умов в Петербурге, я сообщаю Вам, что "Нора" Ибсена была поставлена здесь зимой и освистана (подч. С. В. К.) публикою. Ее не решились поставить более двух раз, пять лет тому назад эту прекрасную драму сумели бы понять в России ... Кажется, что все находятся под гнетом дурного сна и действуют диаметрально противоположно здравому смыслу.

Впрочем, дальше того еще хуже.»[2]

В мае 1887 г. С. В. писала из Петербурга:

«Здесь много говорят о том, что университет вообще закроют или что его преобразуют на манер английских. Говорят также, что его

[2]Письмо от 20.04.84 г.

переведут в небольшое селение Грузины, расположенное на расстоянии половины дня пути от Петербурга.»[3]

В 1881 году дело еще не дошло до таких крайностей. Молодые девушки мечтали идти по пути "эмансипации" и, очевидно, пример С. В. Ковалевской увлек дочь математика Покровского пойти по ее пути. С. В. была, несомненно, знакома с Миттаг-Леффлером через Вейерштрасса, написала ему в Гельсингфорс, где он был в то время, и просила его помочь устроиться мадемуазель Покровской в Гельсингфорский Университет, где женщины были допущены к слушанию лекций. Миттаг-Леффлер любезно помог устроиться в Гельсингфорсе Покровской, но дальше из этого ровно ничего не вышло: не все родятся со способностями С. В. Ковалевской.

Эта случайная просьба послужила началом оживленной и длительной переписки, а вместе с тем и близкой дружбы С. В. с Миттаг-Леффлером и его женою. Переписка эта очень быстро приобрела совершенно дружественный характер. Если в первых письмах С. В. величает Миттаг-Леффлера "милостивым государем" и заканчивает письмо уверением в самом полном уважении, то очень быстро Миттаг-Леффлер превращается из "милостивого государя" в "дорогого Миттаг-Леффлера", а в последующие годы и просто в "дорогого друга" и даже в "дорогого Гёста". Этим определяется и характер писем; они носят совершенно неофициальный, дружеский характер, иногда информации, иногда обмена мнений, иногда совета, а весьма часто и совершенно не подлежащего распространению слуха. В этом своеобразная непосредственность и интерес переписки.

2. Приглашение С. В. Ковалевской в Стокгольм

Вопрос о приглашении С. В. Ковалевской преподавателем высшей школы в Стокгольм прошел сложную и длинную историю. Первые шаги в этом направлении, по-видимому, относятся еще к лету 1881 г.

В письме от 7 июня 1881 г. С. В. пишет из Берлина:

« ... Что касается Ваших прекрасных планов относительно Гельсингфорса, касающихся лично меня, то я должна признаться, милостивый государь, что я никогда в них серьезно не верила, несмотря на то,

[3] Письмо от 27.05.87 г. из Петербурга.

что очень желала их осуществления. Я не намерена также возлагать слишком большие надежды на Стокгольм; однако, признаюсь, что я была бы в восторге, если бы мне представился случай приложить свои математические знания к преподаванию в высшей школе. Функции профессора заключают в самих себе нечто благородное, что всегда сильно привлекало меня. Не говоря уже о том большом значении, какое обязанности доцента имели бы в моей жизни, я была бы в восторге открыть новую карьеру женщинам ... Но, повторяю, я не хочу слишком предаваться этим прекрасным проектам, которые, вероятно, будут иметь такую же судьбу, как большинство прекрасных проектов на земле ... »

Таким образом, как видно из письма, первоначально Миттаг-Леффлер пытался устроить С. В. доцентом в Гельсингфорс, где сам он был профессором в Университете, но из этого проекта ничего не вышло. Новые перспективы появились в связи с открытием высшей школы в Стокгольме, куда собирался переходить Миттаг-Леффлер.

На этот раз переписка по этому вопросу шла оживленно. Уже через месяц С. В. пишет в ответ на письмо Миттаг-Леффлера[4]:

« ... Благодарю Вас также живейшим образом за участие, проявляемое Вами к моему возможному приглашению в Стокгольм и за все Ваши хлопоты по этому делу. Я со своей стороны уверяю Вас, что если мне будет предложена должность доцента, то я приму ее от всего сердца. Я никогда не рассчитывала на какое-либо другое положение. Признаюсь Вам даже, что для начала я буду чувствовать себя гораздо менее смущенной и менее робкой, если мне просто предложат возможность приложить свои знания в области высшего преподавания и открыть таким образом женщинам доступ в Университеты, который до сих пор им не разрешен за исключением совершенно особых случаев, являющихся проявлением особой милости. К тому же эта милость может быть отнята у них так же легко и произвольно, как это имело место в большинстве германских университетов. Не будучи особенно богатой, я все же обладаю средствами для совершенно независимого образа жизни. Таким образом, вопрос об окладе не оказывает никакого влияния на мое решение. Моей главною целью является служение делу, которое мне очень дорого, и обеспечение себе возможности посвятить себя работе в среде людей, занимающихся тем же делом, как и я. Этого

---

[4]Письмо из Берлина от 8 июля 1881 г.

счастья я всегда была лишена; я лишена его и теперь — в России и могла им пользоваться только во время пребывания в Берлине.

Вот, дорогой г. Миттаг-Леффлер, каковы мои личные чувства. Но я обязана сообщить Вам следующее: г. Вейерштрасс, насколько он может судить о положении вещей в Швеции, не считает возможным, чтобы Стокгольмский университет допустил женщину в число своих профессоров. Более того, он опасается, что если Вы будете слишком настаивать на подобных нововведениях, то это может повредить Вашему собственному положению, так как, по его словам, имеется достаточное число лиц недоброжелательных и желающих повредить Вам хотя бы из зависти. Разумеется все, что я здесь пишу Вам, предназначено только для Вас, и я прошу хранить это в строгой тайне. Но с моей стороны было бы слишком эгоистично не сообщить Вам этих слов нашего дорогого учителя. Вы можете себе представить, насколько я была бы огорчена, если бы в конце концов только повредила Вам — который всегда проявлял ко мне столько внимания и готовности услужить мне и к которому я чувствую столь искреннюю дружбу. В виду этого я думаю, что, пожалуй, было бы более осмотрительным не предпринимать в данный момент никаких попыток и во всяком случае выжидать полного окончания работ, которыми я сейчас занята. Если мне удастся закончить их настолько же успешно, насколько я надеюсь и желаю этого, то во всяком случае это будет поддержкою в намеченной мною цели. Пока же прошу Вас не только не предпринимать никаких попыток, но и не слишком много говорить об этом прежде, чем Вы не убедитесь, что можете вполне рассчитывать на лиц, которые Вас окружают и от которых в значительной степени зависит сделать Ваше пребывание в Стокгольме приятным ... »

Но Миттаг-Леффлер был не только крупный математик, но и осторожный и ловкий дипломат. Он медленно и умело готовил почву в Стокгольме. Очевидно, уже в конце 1881 года стали намечаться какие-то вполне реальные, хотя и не очень близкие возможности. В ноябре 1881-го года С. В. пишет[5]:

« ... Простите мне, что я только через неделю отвечаю на два Ваших последних письма. Содержание их было настолько серьезным, что этого времени едва хватило на обдумывание ответа. Я очень счастлива,

[5]Письмо из Берлина от 21 ноября 1881 г.

что Ваши письма застали меня в Берлине, потому что таким образом я могла непосредственно посоветоваться с г. Вейерштрассом и руководствоваться мнением нашего учителя.

Вы, конечно, не меньше меня знаете, какие чувства благодарности и дружбы привязывают меня к Вейерштрассу и с каким участием он всегда относился ко всему, что касается меня. Поэтому Вы можете быть уверены, что в таком серьезном деле я вполне последую его совету. В этом вопросе он держится следующего мнения: он полагает, что появление женщины в звании доцента на университетской кафедре представляет собой настолько серьезный шаг, который может иметь такие серьезные последствия для цели, которой я главным образом хочу служить, что я не имею права решиться на него прежде, чем своими чисто научными трудами не докажу, на что я способна. Поэтому г. Вейерштрасс считает совершенно необходимым, чтобы я сначала закончила исследования, которыми я занята теперь и которым посвятила уже около года. До их окончания я не должна отвлекаться ничем иным и не брать на себя столь серьезных обязанностей, как те, которые Вы мне предлагаете. Должна признаться, что нахожу доводы г. Вейерштрасса настолько убедительными, что не могу не последовать им.

Таким образом, Вы видите, что мое вступление на должность этой зимой, к сожалению, совершенно неосуществимо. Но, повторяю, по окончании моих исследований я была бы очень счастлива, если бы Вы снова взяли это дело в свои руки.»

Таким образом, С. В. приступает к работе в высшей школе с большою осторожностью, можно сказать, с благоговением. Пройдет несколько лет, и иные настроения появятся у нее в подобных же обстоятельствах. Два человека влияли на С. В. в это время: это г. Миттаг-Леффлер и ее учитель Вейерштрасс, и как различно было их влияние!

Г. Миттаг-Леффлер был по природе организатор, устроитель и дипломат. Ему хотелось устроить С. В. преподавателем в Стокгольм и, как человеку деловому, ему казалось, что для этого нужно было только два обстоятельства: во-первых, нужно, чтобы было подходящее место, и, во-вторых, нужно было согласие коллег на приглашение С. В., чтобы ее не провалили при баллотировке. В новой высшей школе место было: шведы в те времена не очень увлекались абстрактными науками. Что касается мнения коллег и баллотировки, то дело упрощалось тем, что никакого ученого совета не было, все дела в условиях, когда высшая школа еще только создавалась, решало правление, а в правлении Миттаг-Леффлер играл первую скрипку не только как, вероятно, наиболее крупный, признанный за границей ученый, но и как человек с большими связями.

Итак, обстановка благоприятна, надо ею пользоваться. Совсем иначе смотрел на дело Вейерштрасс. Это был серьезный и требовательный старый немецкий ученый; для него наука была смыслом и содержанием жизни, а высшая школа была действительно храмом, в котором он служил своему богу, немецкой математической науке. Он сам вступил в этот храм после долгих лет упорной и трудной научной работы, долгого учительства в школах в немецкой провинции, вооруженный большим опытом научных исканий и педагогической работы, и он был убежден, что другого пути, легкого “царского пути” в храм науки нет.

Несомненно, он очень любил свою ученицу, милую Соню, может быть даже она была единственным человеком, которого он любил теперь, на старости лет. Несомненно, он высоко ценил ее математические способности, может быть, считал ее своею самою талантливою ученицею, которой он надеялся передать свои научные мысли, свои научные планы, которые сам он не сможет осуществить.

Но, несмотря на все это, он считал, что его ученица должна пройти весь тот искус, который проходят все ученые. И он ей не позволил идти преподавать в высшей школе, пока у нее не будут выполнены все требования, которые предъявляются к преподавателям в Германии. По мнению Вейерштрасса, этого требовало достоинство науки и высшей школы, этого требовало достоинство его ученицы, его милой Сони.

По германским обычаям, для права преподавания в высшей школе надо было написать сочинение “provenia legendi” так называемым Habilitationsschrift. Эти сочинения иногда бывали классическими научными исследованиями. Вспомним, например, составлявшее эпоху сочинение Римана “О гипотезах, которые лежат в основании геометрии”.

И Вейерштрасс потребовал от своей ученицы представления серьезного исследования, которое давало бы ей право при всяких условиях работать в высшей школе. Таким сочинением и был написанный С. В. мемуар о прохождении света через кристаллы. Это было обширное и серьезное исследование; правда, придет время, и эту работу раскритикует Вольтерра, но не надо забывать, что в науке очень немного истин, которые бы стояли на удивление потомкам, как незыблемые колоссы, которых не касается все разрушающая рука времени.

Серьезные научные работы не пекутся наспех, как блины, для выполнения плана. Только через два года летом 1883 года С. В. могла написать Миттаг-Леффлеру об ее окончании. Вот ее письмо от 28 августа 1883 года:

«Дорогой Миттаг-Леффлер. Наконец мне удалось закончить одну из двух работ, которыми я была занята последние два года. Моим первым желанием после того, как я пришла к удовлетворительному результату, было сообщить его Вам. Но г. Вейерштрасс со своею обычною добротою взял на себя труд уведомить Вас о результате моих исследований раньше, чем они будут изложены соответствующим образом, чтобы их можно было напечатать. Я только что получила от него письмо, где он сообщает мне, что уже написал Вам по этому поводу и что Вы со своей стороны, дорогой г. Миттаг-Леффлер, ответили ему, проявляя при этом свое обычное благожелательное отношение ко мне и предлагая мне, как только будет возможно, приехать в Стокгольм, чтобы начать там чтение факультативного курса (cours privatis sime). Я не могу выразить, дорогой Миттаг-Леффлер, насколько я Вам благодарна за дружбу, которую Вы всегда проявляли ко мне, и как я счастлива, что скоро смогу вступить на путь, который всегда был предметом моих наиболее дорогих желаний.

Однако, я не должна скрывать от Вас, что во многих отношениях я чувствую себя очень мало подготовленной к выполнению обязанностей доцента, и порою я даже начинаю настолько сомневаться в себе, что опасаюсь, как бы Вы, дорогой Миттаг-Леффлер, всегда судивший обо мне с такою благожелательностью, не слишком разочаровались, когда Вы увидите ближе, на что я способна.

Я так благодарна Стокгольскому университету, который первым из всех европейских университетов хочет открыть мне свои двери, что я заранее готова привязаться к Стокгольму и к Швеции как к родной стране, и я надеюсь, что, прибыв туда, я останусь там на долгие годы и найду там вторую родину. Но именно по этой причине я хотела бы приехать в Стокгольм только тогда, когда почувствую себя достойной хорошего мнения, которое Вы имеете обо мне, и когда я смогу надеяться произвести там благоприятное впечатление. Сегодня я даже написала Вейерштрассу и спросила его, не находит ли он более благоразумным, если я еще два или три месяца проведу около него, чтобы лучше впитать его идеи и чтобы заполнить пробелы, быть может еще существующие в моем математическом образовании ...

... В случае, если Вейерштрасс вернется в Берлин к концу октября, то, может быть, мне следует провести два месяца — ноябрь и декабрь — в Берлине и приехать в Стокгольм только к 1-му января 1884 г. Два месяца, проведенные в Берлине, будут мне чрезвычайно полезны во всех отношениях, потому что, с одной стороны, я смогу спрашивать Вейерштрасса о многих основаниях его теорий, еще не настолько ясных для меня, чтобы я могла их излагать на лекциях; с другой стороны, я буду в контакте с молодыми математиками, кончающими там свое образование или начинающими свою карьеру доцента. С некоторыми из них я довольно близко сошлась во время последнего пребывания в Берлине. Я могу даже сговориться с двумя или тремя из них, чтобы взаимно обмениваться математическими сообщениями. Я, например, возьму на себя изложить им теорию преобразований абелевых функций, которую они не знают и которую я изучила более основательно. Это даст мне возможность напрактиковаться в чтении лекций, чего я была совершенно лишена до сих пор, и тогда я в январе приеду в Стокгольм гораздо более уверенной в себе ...

... Я предполагала выбрать предметом моего курса лекций в Стокгольме теорию линейных дифференциальных уравнений. Я начну с доказательства, что каждая система дифференциальных уравнений обладает вблизи некритической точки системою правильных интегралов (как это излагает Вейерштрасс). Далее я изложу исследования Фукса, Таннери и Пуанкаре относительно линейных дифференциальных уравнений. Я довольно хорошо знаю литературу по этому вопросу. Думаете ли Вы, что мой выбор хорош для начала? Или же Вы посоветуете мне взять что-нибудь другое? ... »

Таковы были планы С. В. осенью 1883 г. Но из этих планов ничего не вышло. Поехать к Вейерштрассу не удалось, задержали дела в России. По совету Миттаг-Леффлера пришлось изменить и содержание курса. Первого октября 1883 г. С. В. пишет из Москвы:

« ... Ваше предложение взять предметом моего курса уравнения в частных производных вместо обыкновенных дифференциальных уравнений подходит мне во всех отношениях. Мне, действительно, будет бесконечно легче читать лекции о первых, которыми я специально занималась.

С другой стороны, я буду иметь удовольствие слушать Ваш курс о линейных дифференциальных уравнениях и беседовать с Вами по этому вопросу, который меня живейшим образом интересует и привлекает. Поэтому я чрезвычайно довольна предлагаемой Вами переменой, если только мне удастся заинтересовать своих будущих слушателей.»

Но не только не удалось выполнить эти мелкие планы. Гораздо серьезнее было другое. С. В. мечтала найти в Швеции, в Стокгольме, свою вторую родину. Мы увидим далее, что из этих надежд ничего не вышло. Пройдет пять лет, и С. В. будет рваться из Стокгольма, из Швеции. Куда? В обширном мире так трудно найти счастье!

3. Научные интересы С. В. Ковалевской

Естественно, что научные вопросы составляют если не наибольшую по объему, то, во всяком случае, наиболее существенную часть переписки. И здесь, прежде всего, необходимо отметить, что, несмотря на достаточное разнообразие затрагиваемой в переписке научной тематики, есть одна доминирующая тема, к которой чаще всего обращается Софья Васильевна — это вопрос об интегрировании уравнений при помощи аналитических функций, главным образом при помощи абелевых функций, и прежде всего вопрос об интегрировании уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки — это задача, прославившая С. В. Ковалевскую. Школа Вейерштрасса — это, конечно, школа теории функций комплексного переменного; здесь разбираются и изучаются общие теоремы и общие методы теории, идет сравнение методов самого Вейерштрасса, алгебраизированных методов, основанных на систематическом применении степенных рядов, и методов, основанных на теоремах Коши; это работы Миттаг-Леффлера[6], юного Рунге, начинающего Гурвица. А кстати изучаются вопросы об области существования аналитических функций, о разложении функций в ряд — это работы Бендиксона, Фрагмена.

[6]Письмо от 25.06.1884 г.

Восьмидесятые годы — это годы утверждения теории функций комплексного переменного и годы утверждения аналитической теории дифференциальных уравнений. В Германии это, прежде всего, работы Вейерштрасса, а затем работы Шварца, Рунге, Кенигсбергера и многих других.

Интересно проследить по письмам, как сам Вейерштрасс относился к результатам, носившим характер общих теорем. В этом отношении, пожалуй, представляет интерес письмо от 29.05.1884 г. Дело идет о теме, которую предполагали поставить на премию организованного и руководимого Миттаг-Леффлером журнала Acta Mathematica. По этому поводу Миттаг-Леффлер через С. В. запросил мнение Вейерштрасса. Вот ответ С. В. Ковалевской:

«Вейерштрасс полагает, что следует выбрать тему по возможности ограниченную, но и очень точную. По его мнению, достаточно было бы потребовать полного интегрирования какой-нибудь группы дифференциальных уравнений, например, группы, которой удовлетворяет гипергеометрическая функция. При этом следует требовать полного решения вопроса, т. е. выражения двух переменных (связанных дифференциальным уравнением (В. Г.)) в однозначных во всей плоскости функциях третьей переменной. Вейерштрасс не думает, чтобы фуксовые функции были наиболее подходящими для интегрирования дифференциальных уравнений, если порядок последних превосходит второй.»

Итак, задача должна быть совершенно конкретная и классическая — интеграция дифференциальных уравнений. Это весьма характерное мнение для основоположника общей теории функций. Можно указать ряд мест в письмах, из которых видно, что Вейерштрасс весьма мало придавал значения общим положениям, не относившимся непосредственно к большим классическим конкретным задачам[7]. Впрочем, последний факт мы обнаружили в сочинениях большинства математиков XIX века — у Клейна, у Пуанкаре, у Пикара и даже позднее у Гильберта. Время "теорий функций вообще", как она расцвела, например, в монографиях коллекции Бореля, тогда еще не пришло.

Любопытно сравнить по этому вопросу мнение Кронекера. С. В. Ковалевская 1.06.1884 г. пишет:

«Но он не мог удержаться, чтобы не прибавить капли желчи ко

[7]См., напр., письмо 29.05.1844 г. о результатах Фрагмена.

всему этому меду, по крайней мере косвенным образом. Он ничего не говорил о Вашей (т. е. Миттаг-Леффлера) работе, но, говоря о трудах Рунге (по тому же вопросу), он рассыпался в сожалениях по поводу молодых математиков, которые расточают свои прекрасные способности, посвящая их не истинно полезным и имеющим длительное значение (durables) темам, а не имеющим цены общим вопросам (?!)».

Аналогичные высказывания мы найдем у Клейна[8], который сравнивает некоторые математические работы с выставками оружия у фирм, изготовляющих вооружение: выставленные образцы поражают остроумием изобретателей, но увы!, когда начинается действительная война, то они в силу тех или иных непредусмотренных причин оказываются непригодными, и все приходится начинать сначала.

Конечно, все эти замечания весьма интересны, особенно если мы учтем тот характер беспредметности, который приобрели эти исследования, например, в последних выпусках коллекции Бореля, в работах Монтеля, самого Бореля, а также в некоторых работах Ландау и многочисленных Funktionetheoretiker XX-го века.

Приведенное выше замечание Вейерштрасса интересно тем, что знаменитая работа С. В. Ковалевской и решает частный случай задачи о движении твердого тела именно в том виде, как намечал Вейерштрасс. Та же идея с большим успехом была использована Пуанкаре и позднее Зундманом[9] в их исследованиях по задаче трех тел; ту же идею параметрического решения задачи с успехом применял С. А. Чаплыгин[10] в работе по движению тел с *неголономными* связями и Н. Е. Жуковским[11] в его видоизменении метода Кирхгофа.

Для самого Вейерштрасса таким выходом в область совершенно конкретных и "имеющих длительное значение" областей была теория абелевых функций. Для его верной ученицы и горячей последовательницы, С.В. Ковалевской, абелевы функции, естественно, также являются важнейшим и интереснейшим объектом исследования.

[8] Ф. Клейн. Лекции по истории математики XIX века.

[9] K. F. Sundman. Recherches sur le problème des trois corps. Acta Soc. Sci. Fennical. 1907. 34. Nr. 6.

[10] С. А. Чаплыгин. Исследования по динамике неголономных систем. М.–Л. Гостехиздат. 1949.

[11] Н. Е. Жуковский. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Собрание сочинений. Т. 2. Гостехиздат. 1948.

«Очень жаль, — пишет она о работах Вейерштрасса 8.1.1881 г., — что мы, может быть, никогда не увидим полного изложения его теории абелевых функций, потому что, по моему мнению, одна из величайших заслуг Вейерштрасса состоит в единстве его метода и в способе, одновременно логическом и естественном, какими он выводит всю теорию из одной основной теоремы и представляет ее действительно как органическое целое; но как раз эту сторону его гения теряют полностью из вида при печатании его исследований отдельными кусками, как это делалось до сих пор, и это правильно оценивается только небольшим числом его учеников.

Разве не странно, что в наше время теория абелевых функций, со всеми особенностями метода, которые ей свойственны и которые делают ее поистине одной из самых прекрасных ветвей анализа, еще мало изучена и мало понята всюду, кроме Германии! Я была просто возмущена, прочитав, например, трактат по абелевым функциям Брио[12], который до сих пор мне не попадался на глаза. Можно ли излагать такой прекрасный предмет таким сухим способом, мало доступным для студентов! Я почти не удивляюсь, что наши русские математики, которые знают эту теорию только по книгам Неймана[13] и Брио, проявляют столь полное равнодушие к этим функциям. Поверите ли Вы, например, если я Вам скажу, что недавно мне пришлось вести очень оживленный спор с несколькими профессорами математиками Московского университета, утверждавшими, что абелевы функции еще не пригодны для какого-нибудь серьезного применения и что вся эта теория настолько запутана и суха, что не может служить предметом университетского курса.»

По поводу этого интересного письма необходимо отметить, что С. В. Ковалевская совершенно не упоминает о работах Римана, которые не могли быть ей не известны, так как книга Неймана, о которой она говорит в письме, написана именно с точки зрения Римана. Как известно, центральной и исходной теоремой, на которой построена теория Вейерштрасса, является теорема сложения абелевых интегралов, знаменитая теорема Абеля, представляющая, в свою очередь, гениальное обобще-

[12] Ch. Briot. Theorie des Fonctions Abeliennes, Paris, 1879

[13] C. Neumann. Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelischen Integrale. Teubner. 1865

ние теоремы сложения эллиптических интегралов, данной Эйлером. В этом отношении можно сказать, что теория Вейерштрасса представляет собой дальнейшее развитие направления Эйлера и Абеля.

Гениальные идеи Римана, его знаменитые поверхности, дали всей этой теории совершенно иное направление, и это направление, блестящим популяризатором которого был Клейн[14], не признавалось школою Вейерштрасса, да и вообще с трудом усваивалось и в Германии, и за границей. Уже много позднее в России вышла книга профессора В. П. Ермакова, в самом названии которой было отрицание идей Римана: "Теория Абелевых функций без Римановых поверхностей"[15]:

Другой областью, за которою С. В. Ковалевская следила с напряжением и вниманием, является аналитическая теория дифференциальных уравнений. Как раз к 80-м годам относятся замечательные исследования Фукса по теории линейных уравнений. К 1884 году относится приглашение Фукса в Берлин, и в мае 1884 года Фукс сделал доклад об уравнениях первого порядка с неподвижными критическими точками.

Вот что пишет по этому поводу С. В. 1.07.1884 г.:

«На последнем заседании Академии г. Фукс прочитал свою работу, которая, кажется, замечательно хороша. Я ее не читала, так как она еще не появилась в печати, но я познакомилась с нею частью по рассказам Кронекера и частью по рассказу самого Фукса. Представьте себе, что Фуксу удалось найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы нелинейное дифференциальное уравнение обладало основным свойством линейных уравнений, именно: чтобы критические точки его интегралов не зависели от начальных данных. Не правда ли, что это замечательно? Особенно замечательно то, что Фукс никому никогда не рассказывал об этой работе, и еще за несколько дней до заседания он говорил, что сделает свое сообщение против желания. Странный человек этот Фукс. Теперь ясно, что Вейерштрасс прав и что в Фуксе "гораздо больше материала", чем можно было предполагать … »

А еще через две недели, 15 июля 1884 года, она пишет:

---

[14] F. Klein. Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen. 1883
F. Klein. Gesammelte Mathematische. Abh. т. III см. также
F. Klein. Riemann'sche Flächen. I и II.

[15] В. П. Ермаков. Теория Абелевых функций без Римановых поверхностей. Киев. 1897 г.

«Я Вам уже писала о превосходной работе Фукса о дифференциальных уравнениях, обладающих такими же свойствами, как дифференциальные линейные уравнения. Фукс обещал мне послать Вам один экземпляр; не знаю, сделал ли он это. Но вот что чрезвычайно странно. Не прошло и двух недель, как Фукс представил эту работу в Академию, а Пуанкаре уже успел воспользоваться ею, чтобы положить ее в основу новой работы, которую он только что доложил в Парижской Академии. Теперь после того, как Фукс сообщил идею, лежащую в основе его исследований, она кажется настолько простой и естественной, что трудно понять, как она не пришла в голову раньше.»

Очевидно, что мы здесь видим начало нового направления работ в теории дифференциальных уравнений: изучение уравнений с неподвижными критическими точками. Исторически эти исследования продолжали работы Брио и Буке, Эрмита по теории уравнений первого порядка, не содержащих независимого переменного. Далее из них вырастут работы Миттаг-Леффлера, Пикара, самой С. В. Ковалевской и затем фундаментальные исследования Пенлеве и его многочисленных учеников и последователей. В замечательных стокгольмских лекциях Пенлеве, прочитанных в 1895 г. по приглашению шведского и норвежского короля Оскара II, живо интересовавшегося математикой, это направление окончательно оформится и примет законченные очертания[16].

4. "Случай Ковалевской"

Область научных интересов, о которых выше было сказано, естественно, должна была выдвинуть задачи, связанные с механикою. С точки зрения теории дифференциальных уравнений на очереди стояли две классические задачи механики:

во-первых, задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки;

во-вторых, задача трех тел.

Обе эти задачи представляли следующий шаг для задач, изученных до конца. Первая представляла собою дальнейшую задачу для задачи о качании маятника, которая до конца решается применением эллиптических функций и которая, конечно, является частным случаем задачи

[16]Здесь в рукописи отсутствуют семь страниц.

о движении тела, имеющего неподвижную точку. Точно так же задача трех тел является следующим шагом для задачи двух тел, полностью решенною еще Ньютоном. Мы видели, что в школе Вейерштрасса интегрирование дифференциальных уравнений рассматривалось как основная задача. Работы Фукса и связанные с ними работы Пуанкаре, а позднее работы Пенлеве дали существенный прогресс в этой области; естественно было попытаться результаты общей теории применить к конкретным механическим задачам.

Несомненно, что из указанных выше двух классических задач задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки является более простою. В самом деле, решение этой задачи приводится к интегрированию шести уравнений первого порядка, в то время как задача трех тел приводится к интегрированию девяти уравнений второго порядка. Естественно было начинать с попыток приложения общих методов аналитической теории дифференциальных уравнений, именно: к задаче о движении тяжелого твердого тела; кроме того, эта задача представляла еще тот интерес, что она, несомненно, привлекала к себе гораздо менее внимание исследователей, в то время как задаче трех тел (ввиду несомненного астрономического интереса ее) было посвящено огромное число исследований.

С. В. Ковалевская начала заниматься этой задачей очень рано.

В письме от 21-го ноября 1881 года С. В. Ковалевская подробно описывает начало своих исследований[17].

«Теперь, если Вы позволите, я расскажу Вам о работах, которые меня занимают. Прошлою осенью я начала работу об интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных, которые встречаются в оптике в вопросе о преломлении света в кристаллической среде. Это исследование уже достаточно продвинулось вперед, когда я возымела слабость отвлечься работою над другим вопросом, который вертелся у меня в голове почти с самого начала моих математических занятий и о котором я одно время думала, что другие исследователи опередили меня. Он касается решения общего случая задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при помощи абелевых функций. Вейерштрасс как-то предлагал мне заняться этой задачей, но тогда все мои попытки оказались бес-

[17] Письма к Миттаг-Леффлеру по фотокопиям, находящимся в АН СССР.

плодными, и даже исследования самого Вейерштрасса показали, что дифференциальные уравнения этой задачи не могут быть удовлетворены однозначными функциями времени. Этот результат заставил меня в то время отказаться от решения этого вопроса. Но впоследствии превосходные, еще не опубликованные исследования нашего учителя относительно условий устойчивости и аналогия с другими динамическими задачами снова оживили мой пыл и возбудили во мне надежду решить эту задачу при помощи абелевых функций, аргументы которых не являются линейными функциями времени (подчеркнуто С. В. К.). Эти исследования показались мне настолько интересными и увлекательными, что я на время забыла все остальное и предалась им со всей горячностью, на какую только способна. Путь, которым я шла, заключался в следующем: переменные данной задачи были выражены в функциях θ от двух независимых переменных, которые при некоторых значениях констант приводились к эллиптическим функциям θ, к которым мы приходим в частном случае Лагранжа. Далее я старалась выбрать их таким образом, чтобы дифференциальные уравнения можно было интегрировать в функциях θ от времени. Вычисления, к которым я пришла, пользуясь этим способом, настолько трудны и сложны, что пока я еще не могу сказать, достигну ли я желанной цели. Во всяком случае в течение двух-трех недель, не более, я надеюсь узнать, чего мне держаться, и Вейерштрасс утешает меня, что даже в худшем случае я могу всегда обратить задачу и постараться определить, под влиянием каких сил получается вращение, переменные которого могут быть выражены в абелевых функциях задача, правда, довольно скромная и далеко не представляющая такого же интереса, как та, которую я себе проставила. Однако в случае неудачи я должна удовлетвориться ею ... »

Таким образом, мы видим, что уже в 1881 году С. В. Ковалевская ставит отчетливо и задачу об изыскании однозначных интегралов, и задачу об аналитических средствах решения (функции θ двух переменных), и о возможности ограничения задачи частными случаями, правда, это ограничение понимается в ином направлении, чем оно было впоследствии осуществлено в "случае Ковалевской".

Отсюда понятен тот огромный интерес, который С. В. Ковалевская в позднейшее время проявляет к работам по уравнениям с неподвижными критическими точками.

«На последнем заседании Академии, — пишет она Миттаг-Леффлеру 1 июля 1884 г., — г. Фукс прочитал свою работу, которая, кажется, замечательно хороша ... Представьте себе, Фуксу удалось найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы нелинейное дифференциальное уравнение обладало основным свойством линейных уравнений, именно: чтобы критические точки его интегралов не зависели от начальных данных ... [18]»

Немного позднее, 15 июня 1884 г., она пишет Миттаг-Леффлеру:

«Не прошло и двух недель, как Фукс представил эту работу в Академию, а Пуанкаре уже успел воспользоваться ею, чтобы положить ее в основу новой работы, которую он только что доложил в Парижской Академии. Теперь, после того, как Фукс сообщил идею, лежащую в основе его исследований, она кажется настолько простой и естественной, что трудно понять, как она никому не пришла в голову.»

Это все работы по теории уравнений с неподвижными критическими точками, т. е. по разработке метода, которым пользовалась С.В. Ковалевская в поставленной ею механической задаче[19]. Несомненно, С. В. Ковалевская упорно занималась этими вопросами и чрезвычайно внимательно следила за всеми работами в этой области; в письме, написанном в декабре 1886 г., и в более позднем письме (без даты) она пишет о результатах Миттаг-Леффлера и Пикара:

«Мемуар Пикара в Comptes Rendus очень хорош ... Я не была бы очень удивлена, если бы узнала, что моя работа о вращении твердого тела и наши беседы об этом послужили ему побуждением заняться этим вопросом. Не далее этого лета он отнесся с большим недоверием, когда я ему сказала, что функции вида

$$y = \frac{\theta(Cx + A, C_1x + A_1)}{\theta_1(Cx + A, C_1x + A_1)}$$

могут быть очень полезны при интегрировании некоторых дифференциальных уравнений ... »

Легко видеть, что во всех этих письмах дело идет о разработке методов, которыми пользовалась С. В. Ковалевская в своем исследовании.

[18]См. об этих исследованиях, например, в книге В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2. ГТТИ, 1950, стр. 74.

[19]Об исследованиях А. Пуанкаре см., например, В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. ГТТИ. 1950, стр. 102 и 146.

Наконец, представляет очень большой интерес и история постановки задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки Парижскою Академией Наук.

«Бертран вообще проявляет ко мне необычайную доброжелательность, — пишет она 26 июня 1886 года из Парижа Миттаг-Леффлеру. — Представьте себе, что он придумал: в следующий понедельник эти господа должны собраться, чтобы предложить тему на большую академическую премию на 1886 г. Бертрану пришло в голову предложить темой как раз проблему вращения тяжелого твердого тела. Таким образом, у меня будут некоторые шансы получить эту премию. Вы можете себе представить, насколько меня соблазняет эта мысль. Вчера Эрмит, Бертран, Камилл Жордан и Дарбу, все являющиеся членами этой комиссии, обсуждали этот проект вместе со мною. Они меня заставили изложить им еще раз детально результат моей работы и снова выслушали все настолько, что они думают, что эта работа имеет много шансов быть премированною. Единственным неудобством является то, что я должна буду отложить опубликование этого случая до 1888 г. Вы можете себе представить, насколько этот проект мне улыбается. Но в этом случае мне невозможно сделать сообщение о моей работе в Христиании в этом году ... »

Таким образом, уже в июне 1886 г. работа о движении твердого тела около неподвижной точки находилась в таком состоянии, что ее можно было публиковать, и о ней знали широкие круги математиков. Мало того. Эта уже, во всяком, случае далеко продвинутая работа вызвала постановку темы на премию Бордена в Парижской Академии Наук. Таким образом, не С. В. Ковалевская писала на тему, выдвинутую Парижской Академией Наук, а, наоборот, Парижская Академия Наук выдвинула тему, учитывая те возможности значительного научного продвижения, которые стали ясны из результатов, полученных С. В. Ковалевской!

В небольшом письме без даты, по-видимому, относящемуся к 1887 году, С. В. Ковалевская точно указывает Миттаг-Леффлеру найденный ею частный случай и указывает, что только в трех случаях (т. е. в случае Эйлера–Пуансо, в случае Лагранже и в случае Ковалевской) интегралы не имеют критических подвижных точек[20].

[20] Письмо № 187.

В своей работе С. В. Ковалевская дала полное решение поставленной ею задачи в гиперэллиптических функциях, т. е. при помощи частного случая абелевых функций, т. е. функций, представляющих обращение интегралов от алгебраических функций. Но мы видели выше, что первоначальная задача С. В. Ковалевской была гораздо более широкой ... [21]

Приближался срок присуждения премии. Вероятно, в июне или в начале июля 1888 г. в письме без даты С. В. Ковалевская пишет Миттаг-Леффлеру из Парижа:

« ... Все здешние математики кажутся мне очень заинтересованными результатами, которых я добилась в своей работе, и не сомневаются, что я получу премию. Что касается редакции — лишь бы мне послать другой отредактированный экземпляр до начала октября — все будет в порядке. Прошлый вторник Бертран дал в честь меня обед, на который были приглашены Эрмит, Пикар, Хальфен и Дарбу. В честь меня были произнесены три тоста, и Эрмит, и Дарбу сказали откровенно, что они совсем не сомневаются, что я получу премию ...

... Я мечтаю только об одном: иметь место профессора в Париже. Однако, я еще ничего не сказала, не сделала, чтобы добиться этого, и мне не хватает мужества поговорить об этом с Эрмитом. Я предполагаю, что самое лучшее дождаться декабря, ничего не говоря по этому поводу ... »[22]

В страшной спешке С. В. заканчивает свою работу. По-видимому, к началу сентября относится письмо, в котором содержится все содержание второй части работы.

«Господину Гёста Миттаг-Леффлеру. Ул. Дженнаро Серра 75, Неаполь. Италия (Из Парижа).

Я получила Ваше милое письмо. Моя голова теперь так полна математикою, что я не могу ни думать, ни говорить о чем-нибудь другом. Я пришла к определенному результату, и к очень радостному, а именно, что этот случай задачи о вращении интегрируется действительно посредством ультраэллиптических функций. Но мне еще предстоит получить окончательные формулы, и я не знаю, успею ли это сделать до конца месяца. Не могу не сообщить Вам несколько подробнее о своей работе.

[21] Здесь в рукописи отсутствуют десять страниц.
[22] Письмо 242

Вследствие недостатка времени буду писать очень коротко, но Вы все же постарайтесь вникнуть в вопрос.

Система дифференциальных уравнений для 6 величин p, q, r, γ, γ', γ'' в этом случае следующая:

$$\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} &= qr, & \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma' r - \gamma'' q, \\ 2\frac{dq}{dt} &= -pr - C_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} &= \gamma'' p - \gamma r, \\ \frac{dr}{dt} &= C_0\gamma', & \frac{d\gamma''}{dt} &= \gamma q - \gamma' p, \end{aligned}$$

C_0 — действительная постоянная.

Между этими величинами p, q, r, γ, γ', γ'' прежде всего имеют место 3 алгебраических соотношения, которые имеем также и в общем случае:

$$\begin{aligned} 2(p^2+q^2)+r^2 &= C_0\gamma + l_1^2, \\ 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' &= l, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

l и l_1 являются постоянными интеграции. Кроме этих трех соотношений, мы находим в этом случае еще четвертое. А именно, имеем:

$$\begin{aligned} 2\frac{d(p+qi)}{dt} &= -ri(p+qi) - C_0 i\gamma'', \\ \frac{d(\gamma+\gamma' i)}{dt} &= -ri(\gamma+\gamma' i) + \gamma'' i(p+qi). \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{d}{dt}\left\{(p+qi)^2 + C_0(\gamma+\gamma' i)\right\} = -ri\left\{(p+qi)^2 + C_0(\gamma+\gamma' i)\right\}$$

и также

$$\frac{d}{dt}\left\{(p-qi)^2 + C_0(\gamma-\gamma' i)\right\} = ri\left\{(p-qi)^2 + C_0(\gamma-\gamma' i)\right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\ln\left[(p+qi)^2+C_0(\gamma+\gamma' i)\right]+\frac{d}{dt}\ln\left[(p-qi)^2+C_0(\gamma+\gamma' i)\right]=0,$$

или

$$\left[(p+qi)^2+C_0(\gamma+\gamma' i)\right]\left[(p-qi)^2+C_0(\gamma-\gamma' i)\right]=k^2, \tag{2}$$

k — действительная постоянная. Это новый алгебраический интеграл. Теперь я ввожу следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &x_1=p+qi, \quad y_1=\gamma+\gamma' i, \quad \xi_1=x_1^2+C_0y_1,\\ &x_2=p-qi, \quad y_2=\gamma-\gamma' i, \quad \xi_2=x_2^2+C_0y_2. \end{aligned}$$

Тогда мы имеем:

$$\xi_1\xi_2=k^2. \tag{2'}$$

На основании уравнений (1)

$$\begin{aligned} r^2&=A+\xi_1+\xi_2,\\ C_0r\gamma''&=B-x_2\xi_1-x_1\xi_2,\\ C_0r\gamma''^2&=C+x_2^2\xi_1+x_1^2\xi_2, \end{aligned}$$

где я для краткости полагаю

$$\begin{aligned} &A=l_1^2-(x_1+x_2)^2,\\ &B=lC_0+x_1x_2(x_1+x_2),\\ &C=C_0^2-k^2-x_1^2x_2^2. \end{aligned}$$

Теперь у меня, следовательно, четыре величины x_1, x_2, ξ_1, ξ_2, между которыми существует два равенства:

$$\begin{gathered} \xi_1\xi_2=k^2,\\ (A+\xi_1+\xi_2)(C+x_2^2\xi_1+x_1^2\xi_2)-(R-x_2\xi_1-x_1\xi_2^2)=0. \end{gathered}$$

Это последнее равенство, если его раскрыть, дает мне следующее: если я положу

$$\begin{aligned} R(x_1)&=Ax_1^2+2Bx_1+C=-x_1^4+l_1^2x_1^2+2C_0lx_1+C_0^2-k^2,\\ R(x_2)&=Ax_2^2+2Bx_2+C=-x_2^4+l_1^2x_2^2+2C_0lx_2+C_0^2-k^2,\\ R(x_1,x_2)&=Ax_1x_2+B(x_1+x_2)+C=\\ &=-x_1^2x_2^2+l_1x_1x_2+C_0l(x_1+x_2)+C_0^2-k^2, \end{aligned}$$

то я могу написать вышестоящее равенство в следующей форме:

$$v = AC - B^2 = \frac{R(x_1)R(x_2) - (R(x_1, x_2))^2}{(x_1 - x_2)^2},$$
$$R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2 + v + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0,$$
$$\xi_1\xi_2 = k^2,$$

из чего следует:

$$\xi_1 = -\frac{v - k^2(x_1 - x_2)^2 + w}{2R(x_1)},$$

и поэтому

$$w^2 = \{v + k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2R(x_1)R(x_2).$$

Как Вы легко убедитесь, можно на основании соотношения

$$v = R(x_1)R(x_2) - (R(x_1, x_2))^2$$

написать w в следующей форме. Если я положу

$$S_1 = \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2},$$
$$S_2 = \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2},$$

то мы имеем

$$w^2 = (x_1 - x_2)^4(S_1^2 - k^2)(S_2^2 - k^2)$$

и

$$\xi_1 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4R(x_2)}[(\sqrt{S_1 - k}\sqrt{S_2 - k} + \sqrt{S_1 + k}\sqrt{S_2 + k})^2 - 4k^2],$$
$$\xi_1 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4R(x_1)}[(\sqrt{S_1 - k}\sqrt{S_2 - k} - \sqrt{S_1 + k}\sqrt{S_2 + k})^2 - 4k^2].$$

Теперь присоединяется удивительное обстоятельство, которое долго вводило меня в заблуждение.

Если Вы помните формулы для приведения эллиптического интеграла

$$\frac{dxe}{\sqrt{R(x_1)}}$$

к нормальной форме

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^2 - g_2 s - g_3}}$$

(мне кажется, что Вы сами применяли эти формулы в одной из Ваших более ранних работ и кроме того, они изложены подробно в лекциях Вейерштрасса о применении эллиптических функций), то Вы сейчас же заметите, что именно количества S_1 и S_2 производят это приведение, т. е. если

$$R(x_1) = Ax_1^4 + 4Bx_1^3 + 6Cx_1^2 + 4B_1x_1 + A,$$
$$R(x_1, x_2) = Ax_1^2x_2^2 + 2Bx_1x_2(x_1 + x_2) + 6Cx_1x_2 + 2B'(x_1 + x_2) + A'$$

(в моем случае $A = -1$, $B = 0$, $6C = l_1^2$, $4B = 2C_0l$, $A' = 6$) и если положить

$$du_1 = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}, \qquad du_2 = \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}},$$
$$S_1 = \frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)} + R(x_1, x_2)}{2(x_1 - x_2)^2},$$
$$S_2 = -\frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)} + R(x_1, x_2)}{2(x_1 - x_2)^2},$$

то

$$S_1 = \gamma(u_1 - u_2) + \frac{1}{2}C,$$
$$S_2 = \gamma(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}C$$

и, таким образом, мы имеем, если положить:

$$S_1 = 4(S_1 - \frac{1}{2}C)^3 - g_2(S_1 - \frac{1}{2}C) - g_3,$$
$$S_2 = 4(S_2 - \frac{1}{2}C)^3 - g_2(S_2 - \frac{1}{2}C) - g_3,$$

в виду чего

$$\begin{gathered}
g_2 = AA' + 3CC' - 4BB', \\
g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'B' - A'BB - C^2, \\
\frac{dS_1}{\sqrt{S_1}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} - \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}, \\
\frac{dS_2}{\sqrt{S_2}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}.
\end{gathered}$$

Теперь Вы можете, вероятно, понять, что эти формулы навели меня на мысль, что я действительно имела здесь дело с эллиптическими функциями[23], я искала и искала, но тщетно; к своей большой радости и удивлению я нашла, что решение будет то, что каждая симметрическая функция S_1 и S_2 является ультраэллиптическою функциею времени, т. е. может быть выражена через рациональную функцию отношений

$$\frac{\theta(u_1, u_2)^\alpha}{\theta(u_1, u_2)},$$

где $u_1 = at + b$, $u_2 = a_1 t + b_1$, a, b, a_1, b_1 — постоянные, t — время.

А именно, мы находим, если подставим в дифференциальные уравнения для x_1 и x_2 вместо r и γ'' их выражения через x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 и квадратный корень

$$\begin{gathered}
-4\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = R(x_1) + (x_1 - x_2)^2 \xi_1, \\
-4\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = R(x_2) + (x_1 - x_2)^2 \xi_2, \\
4\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} = R(x_1, x_2).
\end{gathered}$$

[23] К этому еще присоединилось то наводящее на ложный путь обстоятельство, что в специальном случае, когда я считала постоянную интегрирования $k = 0$, то я действительно приходила к эллиптическим функциям.

Таким образом:

$$\frac{1}{S_1}\left(\frac{dS_1}{dt}\right)^2=\frac{1}{R(x_1)}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\frac{1}{R(x_2)}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{R(x_1)}}\frac{dx_1}{dt}\frac{1}{\sqrt{R(x_1)}}\frac{dx_2}{dt}=$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}\left\{\left(\frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}+R(x_1,x_2)}{x_1-x_2}\right)^2-k^2\right\}=\frac{S_1-k^2}{(S_1-S_2)^2}.$$

Если теперь положим

$$R_1(S)=(k^2-S^2)S=(k^2-S^2)(4S^3-g_2S-g_3),$$

R_1 обозначает полином 5 степени, то мы имеем:

$$\frac{dS_1}{\sqrt{R(S_1)}}=\frac{dt}{S_1-S_2}$$

и также

$$\frac{dS_2}{\sqrt{R(S_2)}}=\frac{dt}{S_2-S_1},$$

откуда следует, таким образом,

$$0=\frac{dS_1}{\sqrt{R_1(S_1)}}+\frac{dS_2}{\sqrt{R_2(S_2)}},$$

$$dt=\frac{S_1dS_1}{\sqrt{R_1(S_1)}}+\frac{S_2dS_2}{\sqrt{R_2(S_2)}}.$$

Это как раз нормальная форма ультраэллиптических интегралов 1-го рода; и известное решение этой системы диф. уравнений как раз таково, что каждая симметрическая функция S_1 и S_2 есть рациональная функция от $\theta(u_1,\, u_2)$, где u_1 и u_2 — линейные функции времени.

Все входящие в рассматриваемую проблему количества суть алгебраические функции S_1 и S_2, и именно такие, что как x_1, так и x_2 являются корнями алгебраического уравнения 4-й степени, коэффициенты которого — симметрические функции $0 > S_1$ и S_2 (следовательно, ультраэллиптические θ-функции).

Но так как я предыдущими исследованиями убедилась в том, что x_1 и x_2 суть однозначные функции времени, то не подлежит сомнению, что окончательное решение должно выражаться так, что x_1 и x_2 являются рациональными функциями $\theta(u_1, u_2)$, и это мы должны совершить посредством преобразования 2-й степени тех θ-функций, к которым непосредственно приходят, когда исходят из вышестоящей системы диф. ур. Это как раз те формулы, которые я не успела развить.

Это очень досадно, потому что, как Вы видите, моя работа стала довольно интересною. Самое худшее — это то, что я так устала, так изнемогла, что сижу, сижу и размышляю в течение целых часов о какой-нибудь простой вещи, которую при других обстоятельствах я легко могла бы решить в полчаса.

Я буду Вам очень благодарна, если Вы напишете Эрмиту, как Вы это предложили, и сообщите ему, как обстоит дело со мною и с моею статьей. У меня еще есть одна неделя работы над нею. Но я все же думаю, что едва ли успею ...

... Если статья не будет готова до тех пор, то придется ее отложить до следующей осени, потому что летом вряд ли я смогу много заниматься математическими работами. Досадно быть так близко к цели и все же не достигнуть ее! Но придется утешаться тем, что я, во всяком случае, сделала хорошую работу, и не стану слишком горевать о премии. Но будьте добры написать Эрмиту. Я, впрочем, сама напишу ему, чтобы дать отчет о своей работе. Но хорошо, чтобы Вы тоже написали.

Во всяком случае, утешением служит то, что мне не в чем себя упрекнуть, по крайней мере за последнее время, потому что я была так прилежна, как только это было возможно.»

Итак, работа заканчивалась в крайней спешке, с надрывом. Дело усугублялось еще тем, что роман с М. Ковалевским тянулся нудно. М. Ковалевский, по-видимому, плохо понимал огромный труд, который выполняла С. В. Надо было ехать к нему в Лондон, как было условлено. Это еще усугубляло нервное напряжение С. В.

Работа все-таки была окончена в срок, несмотря на все эти затруднения.

В следующем письме С. В. с облегчением пишет об ее окончании:

«Дорогой Гёста!

Я сегодня исправляю свою статью, tant bien que mal plutat mal que bien. Проблема совершенно разрешена, все теоретические трудности преодолены. Все шесть величин p, q, r, γ, γ', γ'' могут быть выражены рационально через отношения вида $\dfrac{\theta(v_1, v_2)^\alpha}{\theta(v_1, v_2)}$, где v_1 и v_2 являются линейными функциями времени. Что это было не так легко, Вы можете видеть из того, что Вейерштрасс, которому я писала, до и после того, как я нашла, что проблема решается через ультраэллиптические θ-функции, и который, по-видимому, серьезно думал об этом деле, не смог доказать этого. Он пишет мне, чтобы сказать, что он начинает думать, что это вещь невозможная, и что, вероятно, я ошиблась в своих размышлениях о том, что p, q, r являются однозначными функциями времени. Но я не успела по-настоящему выполнить все вычисления. Последние ведь чисто механические и, вероятно, могут быть выполнены меньше, чем за неделю каждым, кто сколько-нибудь привык обращаться с θ-функциями. Но в данное время я так устала, что не могу больше ничего сделать. Поэтому я не решилась послать статью прямо в Академию наук (институт) и адресую ее Эрмиту в сопровождении длинного письма, в котором я подробно излагаю ему все причины, задержавшие меня в моей работе ...

Теперь Эрмит должен решить, что ему следует сделать со статьей. В качестве девиза я выбрала:

Dis ce que tu sais,
Fais ce que tu dois
Advienne ce que purra.»

Итак, работа была кончена и послана, но послана в неотделанном виде. Позднее, пользуясь мемуаром Кенигсбергера об гиперэллиптических интегралах, С. В. Ковалевская даст ей законченный вид.

Но в этом письме есть загадочная фраза, которая показывает, что у С. В. Ковалевской были некоторые результаты для общего случая задачи.

«Я рассказываю (Эрмиту в письме (В. Г.)) о некоторых, как мне кажется, удивительных и интересных результатах, которые я нашла относительно общего случая.»

Что это за результаты, мы не знаем. После преждевременной смерти С. В. Ковалевской в ее бумагах не нашлось ничего, что как-то разъяснило бы эту загадочную фразу. Но есть указания, что позднее, уже за несколько месяцев до смерти, С. В. Ковалевская о своих дальнейших результатах в этой знаменитой задаче говорила Пуанкаре.

Дальнейшая судьба мемуара была весьма удачна. По-видимому, уже в ноябре 1888 г. С. В. пишет:

« ... Вы уже знаете, что я отредактировала мой мемуар, что я добилась удачного его окончания и что я послала его Эрмиту, прося его распорядиться им, как он найдет нужным. Я получила от него сегодня письмо — он представил его на конкурс Бордена. Эрмит поздравляет меня "с моим прекрасным глубоким анализом", но он говорит, что у него хватило времени только пробежать мой мемуар и что он собирается вскоре основательно его изучить. Но, признаюсь, что об этом, т. е. об истинной ценности моей работы, я не слишком беспокоюсь, так как Вейерштрасс, который ее изучил, как будто очень ее оценил. Изложение же моего мемуара "неряшливо" и ниже всякой критики. Но Эрмит мне пишет, что вполне в моей власти написать добавление, которое Академия примет во внимание при распределении премий. Это, очевидно, то, что я должна сделать ... »

Наконец, все эти волнения, все огромное напряжение окончилось: С. В. Ковалевская получила премию Бордена. Официальное извещение от Академии было следующее:

«**Парижская Академия Наук (голова Минервы)**

Париж, 18 декабря 1888 г.

Непременные секретари Академии.

Госпоже Софии Ковалевской. Стокгольм.

Госпожа Ковалевская.

Имеем честь Вас известить, что Академия Наук присудила Вам премию Бордена (усовершенствовать теорию движения твердого тела).

Мы приглашаем Вас, Госпожа Ковалевская, присутствовать на публичном заседании, которое состоится в понедельник 24-го декабря текущего месяца ровно в час дня и на котором будут провозглашены результаты конкурса. С готовностью пользуемся этим случаем, чтобы принести Вам личные поздравления и засвидетельствовать нашу уверенность в той пользе, которую Академия предвидит в Ваших работах и Ваших успехах.

Примите, Госпожа Ковалевская, уверения в нашем уважении.

Бертран».

На торжественном заседании 24-го января С. В. Ковалевской была присуждена премия Бордена. Миттаг-Леффлер в Стокгольме был извещен об этом телеграммой:

«Париж, 24/12 1888 г.

Профессору Миттаг-Леффлеру

Стокгольм.

Премия Бордена присуждена мадам Ковалевской. Хвалебная речь президента Мансена в ее честь отмечена высокая оригинальность работы. Награда встречена горячими аплодисментами».

5. Розы и тернии

Итак, С. В. Ковалевская стала мировою знаменитостью. О замечательном научном достижении С. В. Ковалевской писали научные журналы: "Случай Ковалевской" в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки прочно вошел в науку как классический результат, наряду с работами Эйлера, Пуансо, Лагранжа, Пуассона, Якоби. О замечательной русской женщине-ученом математике писали журналисты, печатались ее портреты.

«Я пошла повидать Эрмита на следующий день после приезда, — пишет она в средине декабря 1888 г. — Он был со мною очень любезен и пригласил меня на обед, на котором соберется вся семья Эрмит-Бертран — во вторник 25-го. Затем я была у Бертрана и Дарбу ... Я вчера была у Пуанкаре, я была у Дарбу и у его жены, которая меня также спросила, почему у Сигне нет ребенка. Бертран собирается дать в честь меня обед, на который он хочет пригласить шведского министра. Я была очень смущена тем, что не могла сказать его имя. Напишите мне его. Я нанесу ему визит ... »

Знаменитостью не так легко быть: положение обязывает. «За последнюю неделю, — пишет она 12.1.1888 г., — я получила много приглашений — к Бертрану (князь Л. сказал мне, что он подробно описал этот обед в письме в Стокгольм и что он написал Вам, чтобы Вы ознакомились с письмом). Затем к Менабреа, к князю Левенгаупт, где я была в обществе принца Евгения, и т. д., и т. д.»

« ... Единственный упрек, который я могу себе сделать за последнее время, это то, что я еще не сделала визита Левенгаупту. Признаю, что это нехорошо. Но, видите ли, я могу привести ряд оправданий: если бы я сделала визит к Л., я должна была бы сделать визиты ряду других светских лиц, с которыми я у него встречалась и которые приглашали меня обедать. И все мое время было бы этим занято. Очень трудно бывать в обществе в таком, в каком я сейчас нахожусь — положении странствующей женщины, без горничной. Тут не только занят вечер, весь день уходит в важных заботах туалета.»[24]

При таких условиях научно работать, конечно, было некогда. Но одолевали С. В. не только великосветские приемы и обеды, заботы о светском этикете и о туалетах. Были заботы и гораздо более важные. С. В. была выбрана профессором в Стокгольмскую Высшую школу на пять лет, в 1884 г. Теперь, в 1889 г., срок избрания заканчивался: надо было думать, что делать далее.

Положение, которое занимала в Стокгольме С. В., было двойственное. С одной стороны, это был крупный ученый, женщина-математик, прославившая теперь во всем мире свое имя, а вместе с тем и юную Стокгольмскую школу, а вместе с тем и молодую шведскую науку. А наряду с этим, в сущности, за эти пять лет С. В. оставалась в Стокгольме столь же чуждой шведскому обществу, как и в момент ее приезда. Все общество, в котором она вращалась — это был сам Гёста Миттаг-Леффлер, его жена Сигне и его сестра, по шведским понятиям экстравагантная писательница, Анна-Шарлотта, и это все. В ее письмах нет абсолютно никаких указаний на близкое знакомство с кем-нибудь еще в Стокгольме. В самой Стокгольмской Высшей школе она совершенно изолирована: нет, кроме Миттаг-Леффлера, ни близких товарищей по работе, ни просто интересных людей, но зато есть достаточно людей, или относящихся к ней настороженно, или просто враждебно.

Можно было с некоторою правдой писать:

«В качестве рождественского подарка я получила от Вашей сестры статью Стриндберга, в которой он ясно, как дважды два четыре, дока-

[24]Письмо № 341, по-видимому, февраль 1888 г.

зывает, насколько такое чудовищное явление, как женщина-профессор математики, пагубно, бесполезно и неприятно ... »[25]

Конечно, большой беды не было, что такую вещь писал Стриндберг, для которого своеобразное женоненавистничество было писательским profession de foi; много хуже было то, что среди товарищей по работе в школе было достаточно таких, которые хоть и не писали, но думали, а при случае и говорили то же самое.

В своих замечательных лекциях о норвежской литературе Георг Брандес как-то попутно очень ярко рисует тот самодовольный и тихий мир ограниченного мещанства, с которыми боролись и преодолевали его основоположники норвежской литературы Биернстберне-Бюрнсон и Ибсен. Швеция была в несколько иных культурных условиях, чем Норвегия, но едва ли эти настроения тихого и самодовольного мещанства в Швеции сильно отличались от Норвегии: ведь, в конце концов, это также было провинциальное захолустье Европы. И само собою понятно, что С.В. Ковалевской с ее передовыми идеями эмансипации женщин, с ее хорошим знанием и пониманием и русской, и европейской культуры не так легко было уложиться в прокрустово ложе понятий шведского общества.

Нетрудно установить и причины, вызывавшие известное отчуждение С. В. в Стокгольмском обществе. Несомненно, что рассуждения, что круг деятельности женщины ограничен четырьмя “К” (Kirche, Küche, Kinder, Kleider — т. е. церковь, кухня, дети и одежда) по немецкому примеру, имели большое хождение и в Стокгольме. Совершенно очевидно, что ярая поборница эмансипации женщин С. В. Ковалевская меньше всего подходила под этот идеал. А если к этому еще добавить, что С. В. — интересная, красивая, широко образованная и обаятельная женщина, то настороженное отношение к ней Стокгольмских “княгинь Марий Алексеевных” станет совершенно понятным.

С. В. очень ясно чувствовала эту настороженность. Например, в письме летом 1886 г. из Парижа[26] мы находим такие строки:

«Все-таки очень смешно, что Эрмит, несмотря на высказываемое мне устно и письменно восхищение, не предлагает мне ввести меня в его собственную семью. Я не понимаю, от чего это может зависеть? Я

[25] Письмо от 28.12.1884 г.

[26] Письмо без даты № 115, написанное, по-видимому, в июне 1886 г.

полагаю, что г-жа Эрмит боится ученых женщин и не хочет со мной знакомиться.»

Правда, когда мадам Эрмит увидала позднее на обеде у Бертрана С.В., то, очевидно, решила, что “не так страшен черт, как его малюют”, и пригласила все-таки С. В. к себе на обед. А что С. В. женщина опасная, в этом многие были убеждены. В самом деле, вот один из примеров:

В письме от 24 июня 1888 г. С. В. между прочим пишет из Парижа:

«Что касается Липпмана — я Вам поведаю, конечно, под большим секретом, каковы были на этот раз наши отношения. Я Вам рассказывала уже в свое время, что его мать обвиняла меня перед рядом лиц, мне это передававших, что я причиною тому,что ее сын не женится. В этот раз, когда я приехала к ним с визитом, я застала дома только мать, и она тотчас сообщила мне, что теперь у нее есть надежда, что ее сын решится, наконец, просить руки Виктора Шербулье, и что она только опасается, чтобы какое-нибудь опасное влияние не отвлекло бы его от этого. Вы понимаете, что после подобного оборота дела мои отношения с Липпманом не могли быть очень близкими.»

Таким образом, если даже среди парижских дам С. В. рисовалась особою подозрительною, которая своими учеными чарами могла разбить сердца и расстроить счастье, то чего же ждать от провинциального, мещански замкнутого Стокгольмского общества.

Семья Миттаг-Леффлера была в этом отношении исключением. Сестра Гёсты Миттаг-Леффлера, Анна-Шарлотта, была писательницей, по своим устремлениям близкою С. В., но и к писаниям Анны-Шарлотты шведское общество относилось не лучше, чем к поведению С. В. Чего стоит, например, следующая сцена, описанная С. В.[27]

«Третьего дня я обедала у директора банка Пальме. Общество, которое я там встретила, было скорее назидательным, чем интересным. Оно состояло из старой швейцарской гувернантки и из пастора французской церкви в Стокгольме. Разговор почти все время вращался около безнравственности новой пьесы Анны-Шарлотты. Пальме имел даже смелость заявить, что ничего подобного никогда не могло бы произойти в Стокгольме. Я ему заметила, что хотя я и не претендую на то, что хорошо знаю Стокгольмское общество, но мне пришлось уже слышать несколько небольших рассказов, герои которых весьма уважае-

[27] Письмо № 34, 15 мая 1885 г.

мые лица, которые позволяют мне сомневаться в его оптимистическом утверждении. Пальме был так раздражен пьесой Вашей сестры, что у меня, право, возникло сомнение, не имеет ли он каких-нибудь личных причин, чтобы находить ее безнравственной и неправдоподобной!»

Было и другое обстоятельство, которое не очень привязывало С. В. к Стокгольмской Высшей школе.

С. В. Ковалевская, несомненно, весьма мало интересовалась преподаванием, совершенно его не любила и при всяких условиях рада была найти предлог, чтобы не читать очередную лекцию. В ее переписке с Миттаг-Леффлером пестрят записи об отмене и о переносе ее лекций: то болит голова, то была бессонница, то простудилась, то было расстройство желудка. Самые лекции совершенно не носили вид вдохновенной проповеди идей науки, и они записывались, проверялись и обсуждались все с тем же Гёстою и только мешали то идти на званый обед, то идти кататься на коньках, то пойти в театр.

Наконец, был и еще один существенный мотив, который не очень привязывал С. В. к Стокгольмской Высшей школе: там не много платили профессорам. А С. В. не привыкла очень стеснять себя. И в имении у крупного помещика и генерала, и в последующие годы с хорошим приданым и с предпринимательским широким размахом мужа, В. О. Ковалевского, она не привыкла урезывать себя во всем. А теперь приходилось жить в меблированной комнате, учитывать каждую копейку, чтобы подешевле устроить свою дочку Фуфу; надо беречь деньги то на поездку в Берлин, чтобы повидать и посоветоваться с Вейерштрассом и побыть в обществе немецких математиков, то в Париж, где на почве работы над ее знаменитым исследованием у нее завязались тесные научные связи, то в Петербург, где по-прежнему она поддерживает близкое знакомство со своими русскими подругами, да и, кроме того, с русскими математиками Чебышевым, Имшенецким. На эти поездки нужны деньги — и немалые; а тут то требуют уплаты шведских налогов, то задержали и не присылают на дом вовремя зарплату.

Теперь С. В. стала мировою знаменитостью. Естественно, можно было ожидать, что изменится и ее материальное положение. В Германии устроиться женщине профессором невозможно. Это С. В. знала очень хорошо. Другое дело во Франции. Здесь ее так хорошо принимали, так высоко ценили, а, кроме того, и республиканские порядки не ставили непреодолимых препятствий к поступлению женщины на работу в высшую школу. И у С. В. явилась мысль сделаться профессором во Франции.

Впервые, по-видимому, мысль о том, чтобы уехать из Стокгольма, явилась у С. В. еще в 1887 г.; летом этого года она пишет Миттаг-Леффлеру из Петербурга:

« ... Что касается моих личных дел, то до весны я должна буду ограничиться 4000 крон и в это время я должна буду написать Эрмиту или Сильвестру, чтобы серьезно спросить их, могу ли я рассчитывать на женские курсы в Севре или на какую-нибудь работу в новом женском университете в Лондоне. Чем больше я думаю об этом деле, тем больше оно мне кажется единственно возможным ... »[28]

Севр поминается здесь не случайно. Еще год назад, в апреле 1886 г., когда так удачно для С. В. была намечена тема на премию Бордена, С. В. Ковалевская писала:

« ... Вчера у меня был день успехов: в 6 часов пришел за мною Ж. Таннери, чтобы свезти меня в нормальную школу, в Севре; г-жа Жюль Таннери и Аппель ждали меня там. В моем присутствии барышень экзаменовали. Затем мы пошли завтракать в Вирофле у Бертрана, где было много математиков. Меня осыпали комплиментами ... »[29]

Казалось, что теперь, после получения премии Бордена, наступил момент, когда можно привести этот план в исполнение.

«В первый день я не касалась моих планов относительно Парижа, но в понедельник г-н Бертран просил меня зайти в Академию, чтобы получить мои 5000 франков и чтобы решить все относительно издания моего мемуара, который не замедлят напечатать в “Мемуарах иностранных ученых”. Когда мы с Бертраном остались одни, я с ним говорила откровенно ... я набралась мужества и спросила откровенно — как он думает — могла ли бы я получить какое-нибудь место в Париже. Он мне ответил приблизительно следующее: он думает, что я могла бы без затруднения получить место профессора в провинции. Что же касается Парижа, то на это не надо рассчитывать. Но, если я хочу удовольствоваться местом руководителя семинара в Париже (с окладом в 4000 фр.), — он думает, что это вполне возможно. Сверх того, я

[28] Письмо 175, по-видимому, лето или осень 1887 г.

[29] Письмо 26.04.1886 г.

могла бы иметь место профессора в Севре, так как Дарбу заявлял уже несколько раз, что он в нем не заинтересован, и г-н Бертран думает, что г-н Дарбу хотел бы мне его уступить. Это мне дало бы 8000 фр. в год ... Я сказала Бертрану, что, со своей стороны, я была бы в восторге, если бы это могло осуществиться. Он мне пообещал поговорить об этом с министром и профессорами ... »[30]

Однако дело оказалось не столь простым, как думал Бертран. Вот что она пишет через месяц, 17-го января 1889 г.:

«Сегодня у меня был важный разговор с Бертраном. Он сказал мне, что самым большим препятствием к тому, чтобы я могла составить себе положение во Франции является то обстоятельство, что я не француженка. Он не сможет хлопотать обо мне перед министром, пока я не приму французское гражданство. Но с другой стороны, как я могу менять гражданство, не имея определенных обещаний? Вот что мне пришло в голову и, что кажется, очень понравилось Бертрану. Нельзя ли найти возможность натурализоваться во Франции, не компрометируя окончательно своего положения в Швеции. Для малой натурализации достаточно шестимесячного пребывания в Париже. Если я возьму сейчас отпуск на предстоящий семестр, мое пребывание здесь продлится до 15 сентября, т. е. на необходимый срок. В течение этого времени я буду продолжать свои исследования о вращении тел и приготовлю хорошую работу на эту тему, которая послужит мне докторской диссертацией, потому что Бертран и Эрмит, оба считают очень важным для моего будущего во Франции не добиваться разрешения на докторат в Германии, а наоборот блестяще защитить диссертацию в Париже. Когда это будет сделано, но еще не будет подходящего для меня места, я смогу к сроку вернуться в Швецию, но здешние математики будут себя считать обязанными по отношению ко мне ... »

Итак, радужные перспективы, связанные с научным успехом, не оправдались. Все становится довольно неопределенным. Совершенно неясно, что значат все эти советы Эрмита, Бертрана и Дарбу: искреннее желание иметь знаменитую ученую женщину в Париже или пустую любезность, ничего не значащую, так как осуществление этих планов силою вещей откладывается ad calcudas graecas. Можно думать, что было именно второе: слава — славою, она мало к чему обязывала, а

[30] Письмо от середины декабря 1888 г.

хороших мест с крупным окладом не так много, чтобы их раздавать иностранцам, хотя бы и знаменитым, тем более, что эти иностранцы вовсе не собираются, по-видимому, как-нибудь печься о gloire de la belle France — о славе прекрасной Франции, а совершенно явственно пекутся о своем собственном иностранном устройстве. Об этом, по-видимому, подозревала и С. В., хотя вначале и считала, что выясняющаяся необходимость снова засесть за диссертацию явится только лишним стимулом работы. Во всяком случае в письме, по-видимому, от мая 1889 г., она пишет:

« ... Судя по тому, что говорит Эрмит, вероятность получить мне здесь место — очень незначительна. Во всяком случае, мне надо снова серьезно приняться за математику и готовить мою докторскую диссертацию ... »[31]

Итак, пока что из широких планов на переезд из Стокгольма в Париж ничего не выходило, наоборот, эти планы отходили все далее с необходимостью натурализации, с необходимостью писать диссертацию. К этому примешивались мотивы и чисто личного характера; ее роман с Максимом Ковалевским никак не подвигался: не радость давал он, а целую кучу неприятностей. По письмам мы не можем судить о причинах этих затруднений, почему периоды радости и, как будто, счастья сменялись периодами размолвок, разочарований. Несомненно одно: если Гёста Миттаг-Леффлер действительно понимал научные заслуги С. В. Ковалевской, то для Максима Ковалевского ее научные работы были книгою за семью печатями. Богатый барин, живший в свое удовольствие, блестящий либеральный профессор, космополит, непрерывно разъезжавший по Европе, избалованный жизнью и успехом у женщин, он видел в С. В. Ковалевской прежде всего знаменитую женщину, прославленную во всем мире, и связь с нею импонировала ему так же, как получение золотой медали от географического общества, как чтение лекций в Стокгольме и вообще, как всякая встреча со знаменитостями. Не забудем, что пройдет десяток лет и Максим Ковалевский окажется в лапах итальянской торговки, грубой и глупой, но правда, отменно красивой.

Как у представителя гуманитарных наук, у него, вероятно, было весьма распространенное в то время убеждение, что не в "сухой" мате-

[31] Письмо № 348.

матике, а в литературе и искусстве прогресс человеческой культуры. Так и теперь, он не старается уяснить себе роль и значение в науке С. В., поддержать ее, как друг, помочь ей в возникшей любви найти новый стимул научного творчества. Он заинтересован прежде всего в том, чтобы была “слава”, было “имя”.

При таких условиях нет ничего удивительного, что при встречах с Максимом Ковалевским ценилась литература, а о математике и не поминали. По-видимому, в апреле 1889 г. С. В. пишет Миттаг-Леффлеру:

«Во время моего пребывания в Ницце я рассказала Максиму Ковалевскому и еще одному бывшему там профессору, Кванюкову много эпизодов из своего детства, которые они нашли очень интересными и горячо предложили мне написать и опубликовать их. Этим я занята в течение последнего месяца. Я только что закончила большой рассказ о своем детстве, воспоминания моей сестры о Достоевском и т. д.

... я написала также небольшой рассказ по-французски о польском восстании ...

... я была бы Вам очень обязана, если бы Вы передали его Монтану и спросили его, не опубликует ли он этот рассказ в своем журнале, уплатив мне, разумеется, за это что-нибудь ... »

Среди таких противоречивых и сложных настроений начался для С. В. новый 1889 год. Не удивительно, что всеми этими делами, борьбою, славою и неудачами С. В. была измучена до последнего.

С. В. только что получила премию и вот что она пишет:

«Суббота, 12-го января 89 г.

Дорогой Гёста!

Только что получила Ваше милое письмо. Как я Вам благодарна за Вашу дружбу. Я, право, считаю ее самым ценным, что мне дала жизнь. И как мне стыдно, что я так мало делаю, чтобы доставить Вам удовольствие и показать, как я ценю эту дружбу. Не сердитесь на меня за это, дорогой Гёста. Я, право, сейчас потеряла голову. Со всех сторон я получаю поздравительные письма и, по странной насмешке судьбы, никогда в своей жизни я не чувствовала себя столь несчастной, как сейчас. Несчастна, как собака, нет, я думаю, что собаки не могут быть так несчастны, как люди, и особенно, как женщины ... »

Надо было искать какой-то выход, хоть на ближайшее время. Вот какие планы были у С. В.

«1 января 1889 г. Париж. Площадь Мадлен, 21.

Дорогой Гёста!

Я чувствую себя очень виноватою перед Вами, что не писала Вам последние дни. Но я провела их в таком лихорадочном состоянии, что совсем потеряла голову ... Я не знаю, в каком состоянии мои дела в Париже и, главное, каким образом все это устроится в будущем. Опасаюсь, что трудности окажутся большими, чем я предполагала. Я говорила об этом Эрмиту, который беседовал на этот счет с Бертраном. Но мне кажется, что Бертран не рассчитывает, что я могу скоро получить место в Париже. Придется побыть в провинции, что меня нисколько не прельщает. Но я признаюсь Вам откровенно, что мне больше всего хотелось бы получить на предстоящий семестр отпуск, провести весну, где мне захочется, и иметь возможность сосредоточиться, собраться с мыслями. Вы не можете себе представить, в каком я сейчас нервном состоянии. Если я сейчас возвращусь в Стокгольм и буду вынуждена вновь приняться за работу, то уверена, что кончу каким-нибудь тяжелым заболеванием.

С другой стороны, я не в состоянии сейчас принять какого-нибудь определенного решения. Вы всегда были мне добрым, преданным другом, дорогой Гёста, но уверяю Вас, что если бы вы могли устроить мне отпуск на предстоящий семестр, это была бы самая большая услуга из всех, которые Вы мне когда бы то ни было оказывали ... Я знаю, что этот отпуск представит большие трудности ввиду окончания моего профессорства в июле. Но даже предвидя эту опасность, я не могу решиться вернуться в Стокгольм.

Прошу Вас, дорогой и добрый Гёста, не сердитесь на меня за это! Уверяю Вас, что в настоящее время я не способна возобновить работу ...

Очень прошу, помогите мне получить отпуск на предстоящий семестр. Сейчас это единственный выход, который дал бы мне время, чтобы успокоить нервы и избавил от необходимости принять какое-либо решение в данную минуту. Ничего я сейчас не желаю как получить отпуск!!»

Итак, надо было прежде всего получить отпуск и не возвращаться в Стокгольм. А дальше рисовалась неясная картина дальнейшей научной работы, защиты диссертации в Париже, — конечно, обязательно блестящей, — а в перспективе, не очень ясной, переезд в Париж!

Но из всех этих планов осуществилось только одно: верный Гёста и здесь помог С. В. — она получила желанный отпуск.

Представили засвидетельствованную справку от невропатолога Буазена, — конечно, Парижской знаменитости! — о сильном расстройстве нервов, но пришлось понести и ущерб: профессора Ковалевскую пришлось заменять в Стокгольме и половина ее зарплаты пошла ее заместителю, Фрагмену. Но дальше ни о какой спокойной и напряженной работе думать не приходилось. Прежде всего непрерывные волнения и разговоры о работе в Париже. А тут же еще как демон–соблазнитель вьется около нее великолепный "русский боярин", огромный и величественный Максим Ковалевский. Разъезжает он то в Монте-Карло — нельзя же богатому русскому побывать за границей и не поиграть в рулетку — то в Ниццу, благо это рядом, а то внезапно исчезает в Россию "по делам имения". В Ницце М. Ковалевский даже купил кстати виллу. Позднее, когда бессмысленная смерть похитит С. В., и ее дочка, Фуфа, останется совершенно безо всего, М. Ковалевский в припадке великодушия завещает эту виллу Фуфе. Но, увы! как из многих других хороших планов на земле и из этого ничего не вышло: энергичная итальянка М. Ковалевского решительно воспретит ему такие широкие жесты и присвоит виллу себе!

Пока что он выписывает в Ниццу и С. В.

«Дорогой Гёста! — пишет она, по-видимому, в конце января 1889 г. —

Представьте, я сейчас в Ницце ... В Ницце сейчас прекрасно. Здесь настоящее лето. После плохой погоды, какая была в Париже в последние дни, трудно вообразить столь чудесную перемену. Можете себе представить, как это действует на меня, которая никогда не была на юге.»[32]

Итак, непрерывно волнения, разъезды, встречи, прощания!

А тут еще С. В. пришлось принимать участие в одном "международно-комическом" предприятии.

Какова бы ни была научная сторона дела, присуждением премии С. В. Ковалевской французские математики сделали очень хитрый ход.

Во-первых, Франция еще раз показала себя бескорыстной и незаинтересованной жрицей международной науки, мирного, культурного

[32] Письмо № 328.

прогресса. Премия была присуждена передовой русской женщине, шведскому профессору, ученице немецкого ученого.

Во-вторых, этим была оказана великая честь юной шведской математической науке. Ее успехами интересуется сам король Оскар, а ведь для республиканского французского сердца "король" особенно импонирует, и С. В. приглашается во дворец, и с нею беседует король!

А, кроме того, под покровительством короля существует и влиятельный международный научный журнал и его руководитель Миттаг-Леффлер — близкий друг С. В. — это всем хорошо известно.

И, наконец, С. В. любимая ученица крупнейшего берлинского ученого Вейерштрасса, стало быть в успехе С. В. Ковалевской была кровно заинтересована и германская наука. А ведь этим тоже пренебрегать не следует. Эрмит очень боится войны и революции[33], и не мудрено: разгром Франции Пруссией и коммуна 1871 г. еще у всех в памяти, а тут еще начали шебаршить военные, Буланже, мечтают о реванше, а Бисмарк весьма недвусмысленно подумывает о "провентивной" войне и еще неизвестно, пришлет ли Александр III своих казаков на помощь французам. Нет, пренебрегать немцами совсем не время.

Итак, дело шло к платежам. Первый подумал об этом милейший, обязательнейший, августейший математик, король Швеции и Норвегии, Оскар II, и он решил наградить за особое внимание Эрмита. Но дело это оказалось очень тонким и сложным. Вот как С. В. пишет в письме от 24 января 1889 г. о переговорах с Эрмитом по этому поводу:

« ... По его виду я поняла, что он хочет мне что-то сказать, но не знает, как это сделать. Наконец, под глубочайшим секретом он сообщил мне в чем дело. Вы ему будто написали, что король желает высказать ему свою благодарность, и вот по этому поводу Эрмит чувствует себя в крайне затруднительном положении, и что для нас троих — для меня, для Вас и даже Вейерштрасса могут быть неприятности: Бертран будет чрезвычайно задет, если Эрмит получит новое отличие от шведского короля в то время, как у него только орден "Полярной звезды". Он желает получить такое же отличие, как Эрмит. Это желание было откровенно высказано его старшим сыном, и, видимо, поэтому он так заискивал перед шведским министром. Эрмит думает, что если его отличат новым орденом, или чем-нибудь подобным, обойдя при этом Бертрана,

[33] Письмо № 243 июля 1889 г.

тот будет глубоко обижен, и это плохо отразится на всех нас. Эрмит сам опасается своего столкновения с Бертраном, но для нас это будет еще хуже. Эрмит сообщил мне следующие два проекта, взяв с меня, конечно, клятву, что я никому об этом не скажу. Он хочет получить для Вас орден Почетного Легиона, что может быть полезно для Ваших будущих планов, в виду того значения, которое во Франции имеют глупость прибавить этой красной ленточке, а для Вейерштрасса он хочет получить 50000 франков, которые Академия должна в этом году присудить самому заслуженному ученому Европы. Сами понимаете, что без поддержки Бертрана осуществление этих двух проектов невозможно. Ради Бога, приложите все усилия, чтобы Бертран получил это отличие ... Дорогой Гёста! Напрягите весь свой ум, приложите сверхчеловеческие усилия, чтобы устроить это дело ... Сделайте все, чтобы Бертран получил орден ... »

Выполнение всех этих хитроумных планов проходило с большим скрипом. Прежде всего, Миттаг-Леффлеру Бертран выхлопотал только низшую степень ордена Почетного Легиона: по-видимому, его не пригласили в жюри по присуждению шведской премии Оскара II, так же как и Кронекера.

« ... Эрмит очень сердится на Бертрана за то, что он, написав министру, ничего не сказал им о важнейшей аналитической теореме, с которой навсегда связано Ваше имя, ни о Ваших заслугах, как математика. Он просто просил для Вас награды, как инициатора премии Оскара.

Когда Эрмит сделал некоторые замечания Бертрану относительно низшей степени, которую Вы получили, тот ответил, что для Аппеля и Пуанкаре могла пройти только эта степень, а так как вы проходили все вместе, он не мог просить для Вас чего-нибудь другого. Я думаю, что это просто уловка со стороны Бертрана ...

В то же время Эрмит мне рассказал, конечно, под большим секретом, что мадам Эрмит сделала ему сцену по поводу этих наград. Она соглашалась, что на худой конец Пуанкаре может быть награжден раньше Пикара, но что одновременно награжден и Аппель — это она считает для Пикара слишком унизительным.»[34]

Трудно распределять награды! Но в конце концов все кое-как утряслось: Эрмит получил портрет короля, который ему хотелось

[34]Письмо из Парижа от 14 мая 1889 г.

иметь[35]. С. В. вместе с Пуанкаре получила знак отличия: назначена офицером народного просвещения, а Бертран дуется.

«Бертран более чем холоден со мною, — пишет С. В. 18 апреля 1889 г. — Он не отдал мне два визита, которые я ему нанесла, и он был очень холоден во время моего последнего визита, (надо, однако, сказать, что я пришла в неудачное время: он только получил известие — один из его двоюродных братьев сошел с ума).»

Впрочем, у всех свои заботы.

«Эрмит обеспокоен: мадам Пикар ожидает четвертого ребенка[36]»; у С. В. свои заботы:

« ... Напишите мне, пожалуйста, как обстоит дело с моим жалованьем. Начну ли я с июня снова получать все мое жалование? Мне кажется, это будет наиболее справедливо ... »[37], а какая-то девица Легерли нарушила свое обязательство выйти замуж за заместителя С. В. — Фрагмена.

« ... Почему девица Легерли нарушила свое обязательство. Устройте ее брак с Фрагменом. Оба так хорошо подошли бы друг к другу.»[38]

Итак, прошла зима, прошла весна. Шло лето. За всеми этими делами время летело незаметно, но ничего не подвигалось. Ни о какой научной работе не было и речи; не было и речи о получении работы в Париже.

В конце концов надо было решать дело с преподаванием в Стокгольме. Когда С. В. приглашали профессором в 1884 г., Высшая школа еще только организовывалась, и ни о каких выборах преподавателей не могло быть и речи: некому было выбирать. Профессоров назначало правление. Теперь школа уже сложилась и работала нормально; естественно, что их не назначало правление, а выбирала профессорская коллегия или ее уполномоченные. Очевидно, С. В. запросили, согласна ли она выдвинуть свою кандидатуру. С. В. отвечала на запрос следующим письмом:

«Любезный г. профессор, отвечая на Ваш вопрос о том, буду ли я искать профессуру по высшему математическому анализу, я могу только объяснить, что ввиду того, что правление не имеет больше права

[35] Письмо № 345.
[36] Письмо от 5 апреля 1889 г.
[37] Письмо № 346.
[38] Письмо 23 апреля 1889 г.

назначения, не имею ничего против того, чтобы мое возобновленное и окончательное утверждение состоялось в такой форме.

Одна есть у меня настоятельная просьба к администрации, чтобы уполномоченные были действительно знающими людьми, которые дали бы себе труд прочесть мои работы.

С величайшим уважением. Софья Ковалевская.»

Очевидно с выборами шло не все гладко, и упоминание о действительно знающих людях было написано не спроста. В июле С. В. пишет:

«Дорогой Гёста!

Посылаю Вам письмо, которое Вы у меня просите для Высшей школы, хотя я хорошо не понимаю, что оно означает. Как досадно, что Рециус и Ридберг причиняют столько неприятностей, но этого надо было ожидать. Я совсем не уверена, что Бьеркнес скажет что-нибудь очень благоприятное относительно моих работ; он их, конечно, хорошо не понимает ... »[39]

Были, очевидно, и другие “друзья”, которые были непрочь устроить гадость С. В. Ковалевской и, несомненно, что какое-то участие в этом принимал “друг Ковалевской и Миттаг-Леффлера” — Кронекер!

Пятого июля, очевидно, в разгар всех этих событий С. В. пишет Миттаг-Леффлеру следующее замечательное письмо:

«5 июля 1889 г.

Дорогой Гёста.

... Представьте, два дня назад я получила письмо от Кронекера. Он мне пишет под довольно странным предлогом. До его слуха дошло, пишет он мне, что недоброжелательные лица распространили слух, что якобы он сделал все возможное, чтобы помешать окончательному назначению меня в Стокгольм. Он считает своим долгом написать мне, чтобы уверить в обратном и заверить меня, что ни он, ни его жена не переставали превозносить меня при каждом удобном случае.

Я сожалею, что не могу послать Вам это любопытное письмо ввиду того, что я уже послала его Вейерштрассу. Я ответила по-французски, говоря ему, что слух, о котором он говорит, никогда не доходил до меня, что его письмо первое оповестило меня, что подобный слух ходил, и что

---

[39]Это письмо (№ 348), по-видимому, сопровождало предыдущее заявление.

я абсолютно не знала, кому было интересно его распространять. Впрочем, пишу я ему, я очень довольна, что эти досадные сплетни предоставили Вам возможность уверить меня в Вашем ко мне расположении, о котором я думаю тем более охотно, что у меня нет уверенности в том, что я никогда не подавала Вам серьезный повод на меня жаловаться.

Эрмит нашел это письмо очень хорошим и очень меня за него похвалил ... »

Очевидно с Кронекером опять случился “зигзаг” — он сделал какую-то пакость, а затем пытался то ли оправдаться, то ли как-то загладить свое очередное грехопадение. На этот раз С. В. полностью использовала гибкость французского языка, чтобы в изящной и любезной форме отчитать такого “друга”.

Как бы то ни было, С. В. Ковалевская была окончательно утверждена профессором и без особой радости с осени вернулась в Стокгольм. Однако это свое возвращение в Стокгольм С. В. рассматривала отнюдь не как прочное и основательное; наоборот, можно думать, что для нее это была печальная необходимость — при первой возможности она стремилась покинуть эту европейскую провинциальную дыру. Впрочем и сам Миттаг-Леффлер, несмотря на все свое влияние в Стокгольме, несмотря на покровительство короля, тоже был непрочь при благоприятных условиях променять Швецию на Францию и Стокгольм на Париж.

По-видимому, еще летом 1888 года возникли какие-то надежды на переход в Париж Миттаг-Леффлера. В письме от 24 июня 1888 г. С. В. пишет между прочим:

« ... Мне было совершенно невозможно говорить с ним (С Липпманом) конфиденциально, что было необходимо, чтобы затронуть вопрос о Вашем назначении на место Броха.»[40]

Этот Брох несколько раз поминается в переписке. Он был болен, ждали его смерти и на открывавшуюся вакансию имел какие-то виды Миттаг-Леффлер.

Вскоре открылись совершенно иные перспективы. В декабре 1889 г. умер академик Буняковский. Вот как на это реагировала С.В. в письме из Парижа от 22 декабря 1889 года:

« ... Пишу Вам несколько слов по делу, которое для меня очень

[40] Письмо № 243, помеченное, по-видимому, ошибочно 24.06.1889 г.

важно. Вчера я узнала о смерти Буняковского — вот вакансия в Академии, которую я жду. Мне кажется, что сейчас мое присутствие в Петербурге было бы очень необходимо ...

У меня очень серьезный конкурент в лице Маркова. Он пользуется большим покровительством, и я уверена, что большинство будет за него ... »

В этом письме все удивительно. Умер старый русский ученый, и единственная реакция на это у С. В. Ковалевской, тоже русской и ученой — это: освободилось место в Академии!

Хоть бы для приличия, по русскому обычаю пожелала ему царствия небесного!

Но удивительно и другое, С. В., по-видимому, вполне убеждена, что премия Бордена должна ей открыть двери в Академию, хотя вся ее деятельность была совершенно не связана с Россией. Мало того, никаких планов работать на благо русской науки и России не только не высказывалось, но об этом, по-видимому, даже и в голову не приходило. За место в Петербургской Академии Наук С. В. хваталась только потому, что не выходило какое-нибудь место в Париже!

Итак, надо было действовать. С. В. просит поехать к моменту выборов в Академию в Петербург Миттаг-Леффлера, едет сама в Петербург, добивается поддержки Эрмита.

«Вы ведь знаете также, в каком напряжении я теперь живу, по поводу смерти Буняковского, — пишет она, по-видимому, 24 декабря 1889 г. —

Позавчера я была у Эрмита ... Эрмит был очень любезен. Я рассказала ему о моих недеждах и опасениях относительно вакансии в Петербургской Академии, и он тотчас же предложил, что он напишет Чебышеву, чтобы выразить свое большое удовлетворение тем, что меня выбрали в члены-корреспонденты и одновременно надежду, что Петербургская Академия не остановится на этом первом шаге ... »

Между тем, в Петербурге не терял времени Марков. При выборах все средства хороши, и Марков, познакомившись с работою С. В. Ковалевской, кричал на всех перекрестках, что вся ее работа вздор, что основное положение, что будто бы С. В. удалось найти все случаи, когда интегралы уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки — ничем не доказано, что было верно, но уже тогда А. М. Ляпунов указывал, что, несмотря на неполноту доказательства, найденный С. В. результат правилен, что и было далее строго доказано самим А. М. Ляпуновым и Г. Г. Аппельротом.

Далее Марков утверждал, что в работе много ошибок и что, если за нее и дали премию Бордена, то только потому, что эту работу никто не читал. В этом тоже была доля правды: работа писалась наспех, редактировалась небрежно и, как мы видели, действительно, Эрмит ее только пробежал, когда присуждали премию, и собирался ее читать подробно впоследствии. Также несомненно, что из-за спешки остальные члены жюри ее тоже не читали и судили о работе по тем рассказам, которые они слышали много раз от Ковалевской.

Но Марков не знал, вероятно, того, что эту работу знал во всех подробностях Вейерштрасс: вся работа создавалась на его глазах, подробнейшим образом он ее изучал, когда работа была окончена.

Впрочем в Петербурге почва для таких суждений была чрезвычайно благоприятна: П. Л. Чебышев теорию функций комплексного переменного вообще не признавал. При таких настроениях работа С. В. Ковалевской не могла иметь в Петербурге успеха.

Когда в июне состоялись выборы, то С. В. в письме характеризует положение следующим образом:

« . . . Все не математические члены Академии со слов других убеждены в том, что Марков совершенно уничтожил мою статью. Эту приятную сказку я уже слышала с нескольких сторон. Я сказала очень энергично, как Чебышеву, так и Имшенецкому, что я требую, чтобы они объяснили при каком-нибудь официальном случае в Академии, как обстоит дело в действительности; они мне ответили несколько уклончиво, что Марков еще очень молодой человек и не надо быть к нему слишком строгим. Я не думаю, что они что-нибудь сделают, а сама не знаю, чтобы я смогла сделать.»[41]

Как бы то ни было, дело было сделано: экстраординарным академиком был выбран Марков. Естественно, что после этого и Марков стал более милостив.

« . . . Тогда Марков уже успел быть выбранным в экстраординарные и тогда он ответил милостиво, что дело с моею статьей не вполне плохо,

[41] Письмо № 373, по-видимому, от первых чисел июня 1890 г.

как он думал при первом чтении: но много ценного в ней все же не содержится ... »[42]

Любопытно отметить, что отзыв Маркова — это обычное проявление дурного тона в науке и полного неуважения и пренебрежения к труду своих товарищей по специальности; правда здесь к нему примешивается еще и подсиживание: поругав неизвестно за что работу Ковалевской, Марков сам сел на место, на которое она претендовала. Казалось бы, щекотливость положения заставляла быть Маркова особенно осторожным в оценке работы С.В. Ковалевской.

Впрочем и сама С.В. судила о математических работах не с большею щепетильностью. Вот, например, ее суждение о какой-то диссертации, на которую она случайно попала в Гельсингфорсе:

« ... Наконец, я пошла в Университет на диспут молодого щенка, который написал какую-то мазню о минимальных поверхностях и которому усердно протежирует Неовиус ... »[43]

На "базаре житейской суеты" трудно ожидать парламентских приличий, свойственных английским лордам. Пожалуй по этому поводу не мешает вспомнить слова одного из героев рассказов А.П. Чехова:[44]

«Как-то раз я был приглашен экспертом в окружной суд: в антракте один из моих товарищей-экспертов обратил мое внимание на грубое отношение прокурора к подсудимым, среди которых были две интеллигентные женщины. Мне кажется, я нисколько не преувеличил, ответив товарищу, что это отношение не грубее тех, какие существуют у авторов серьезных статей друг к другу. В самом деле, эти отношения так грубы, что о них можно говорить только с тяжелым чувством друг к другу и к тем писателям, которых они критикуют, относятся они или излишне почтительно, не щадя своего достоинства, или же, наоборот, третируют их гораздо смелее, чем я в этих записках и мыслях своего будущего зятя Гнеккера. Обвинения в невменяемости, в нечистоте намерений и даже во всякого рода уголовщине составляют обычное украшение серьезных статей. А это уж, как любят выражаться в своих статейках молодые врачи, ultima ratio! ... »

Итак, не помог ни приезд в Петербург, ни письмо Эрмита:

[42]То же письмо

[43]Отрывок из письма без даты №373.

[44]Рассказ "Скучная история".

С. В. Ковалевская была с треском провалена — до нее даже не дошло дело. Но так же, как ранее в Париже, она не сразу сдалась: «Я не уеду из Петербурга, не быв представленной великому Князю,» — пишет она[45].

"Великий князь" — это, по-видимому, Константин Константинович — "августейший" президент Академии наук.

Приема у великого князя С. В. добилась. В начале июня С. В. пишет:

«Дорогой Гёста.

Очень Вас благодарю за Ваше письмо, которое я получила вчера. Я останусь в Петербурге до следующей среды (11 июня) главным образом потому, что будет происходить заседание Академии, и я думаю, что если я буду здесь, то они вынуждены будут пригласить меня. Я уже два раза была у великого князя (один раз я была приглашена на завтрак). Он казался очень заинтересованным моим разговором и повторил несколько раз, как было бы хорошо, если бы я поселилась в России. Откровенно говоря, я все же не думаю, чтобы его добрая воля значила бы очень много. Мой кузен Косич говорит, что я должна непременно представиться государыне. Но, к несчастью, как раз на днях сюда приехал итальянский щенок (ох! любила это словцо С. В.). Каждый день при дворце какой-нибудь праздник, так что о представлении не может быть и речи ... »[46]

Добилась ли С. В. приема у императрицы или нет — неизвестно, но все равно результат был тот, что с устройством в Петербурге так же ничего не вышло, как не вышло с устройством в Париже. Пришлось нехотя вернуться в Стокгольм. Утешением было то, что лето 1890 г. после всех этих неудач С. В. проводила в Швейцарии в обществе Максима Ковалевского.

«Что касается меня, то мне сейчас очень весело. В Тараспе очень красиво, погода прекрасная и путешествие через южную Германию и Швейцарию было прелестным ...

С самых тех пор, когда я уехала из Швеции, я не написала ни строчки и в моей голове не было ни одной разумной мысли, я начинаю бояться, что безнадежно поглупела ...

Я со страхом думаю о том, что должна зимою читать теорию чисел.

---

[45] То же письмо № 373.

[46] Письмо № 374

Я рассчитываю на Ваши лекции, но если они неполные или неупорядоченные, то я пропала ... »

Мелькают названия курортов, гостиниц. Одно только ясно: С.В. в эту осень была совсем, совсем счастлива с Максимом — с Максимом Максимовичем Ковалевским.

И только одно бросается в глаза: С. В. уже больше не вспоминает о своем старом учителе, Вейерштрассе.

Осенью 1889 г. Вейерштрасс звал ее прожить каникулы вместе на острове Рюген.

«Я получила письмо от Вейерштрасса, он извещает меня, что проведет осень в Рюгене, и приглашает меня приехать туда его повидать. Я думаю уехать отсюда (из Севра) в конце августа и остаться с 1 по 15 сентября с Вейерштрассом.»[47]

Да и Вейерштрасс был уже не тот: годы делали свое дело:

«Вейерштрасс производит очень усталое впечатление, только позавчера у него выдался хороший момент, когда мне удалось поговорить с ним немного о математике. Обычно же он для этого слишком слаб.»[48]

А ведь ему хотелось так много сказать его любимой ученице.

«Вейерштрасс ... очень просит меня устроить дела так, чтобы провести несколько недель с ним летом, — пишет С. В. еще осенью 1888 г.[49] —

Он говорит, что чувствует, — его силы слабеют, что он еще много должен мне сказать, и, что он не думает, что будет иметь возможность мне это сказать в более отдаленное время. Очевидно, я должна провести с ним некоторое время летом, но я еще не знаю, когда и как я это сделаю.»

Не весело быть стариком. Ведь вот конец рассказа “Случайная история”.

«Катя встает и, холодно улыбнувшись, не глядя на меня, протягивает мне руку.

Мне хочется спросить: «Значит на похоронах у меня не будешь?» Но она не глядит на меня, рука у нее холодная, словно чужая. Я молча провожаю ее до дверей ...

---

[47] Письмо № 352

[48] Письмо № 375. Лето 1890 г.

[49] Письмо № 248, вероятно, октябрь 1888 г.

Вот она вышла от меня, идет по длинному коридору, не оглядываясь. Она знает, что я гляжу ей вслед, и, вероятно, на повороте оглянется.

Нет, не оглянулась. Черное платье в последний раз мелькнуло, затихли шаги ... Прощай, мое сокровище! ... »

В действительности случилось так, что учитель пережил свою ученицу на целых шесть лет.

Н. Е. Жуковский

1. Труды С. В. Ковалевской по прикладной математике[1] (1891 г.)

С. В. Ковалевская под руководством своего знаменитого учителя, профессора Вейерштрасса, прошла школу высокого математического анализа, но самостоятельные работы ее относятся не к одной чистой математике, а главным образом — к прикладным наукам.

Она избирала при этом для своего исследования те задачи, решение которых требовало обширного знания трансцендентных функций и, вполне обладая этим знанием, получила результаты, которые составляют ценный вклад в науку.

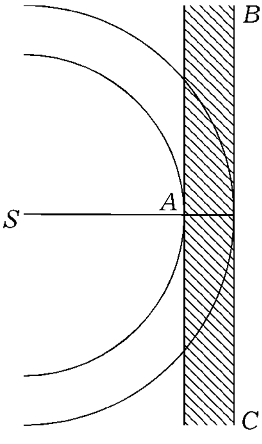

Рис. 1

Первая работа покойной в рассматриваемой области посвящена трудному вопросу астрономии: о форме кольца Сатурна. Она напечатана в 1885 г. в Astronomische Nachrichten (№ 2643, t. CXI) под названием: "Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnstringe". Лаплас в своей "Небесной механике" предполагает, что кольцо Сатурна слагается из нескольких жидких колец, имеющих форму тел вращения и симметричных относительно плоскости общего экватора. Вследствие малости меридионального сечения колец сравнительно с их диаметром Лаплас пренебрегает взаимодействием колец и допускает, что сила притяжения кольца (рис. 1) на какую-нибудь точку A его меридионального сечения равна силе притяжения на эту точку бесконечно-длинного цилиндра BC, имеющего основанием меридио-

[1] Н. Е. Жуковский. Полное собрание сочинений. т. IX. М.–Л. 1937.

нальное сечение. При таком допущении Лаплас нашел, что контуры меридиональных сечений колец суть эллипсы, растянутые вдоль плоскости экватора, и что плотность колец убывает по мере удаления от Сатурна.

Анализ Лапласа очень прост и изящен, но он представляет только первое приближение в решении задачи и обладает тем недостатком, что из него не видно, какого порядка члены опущены при приближении.

С. В. Ковалевская задалась мыслью исследовать вопрос о равновесии кольца с большею точностью и повести исследование так, чтобы по желанию можно было ограничиваться членами того или другого порядка.

Она выражает потенциал кольца на точку, лежащую на меридиональном контуре кольца, по формуле Гаусса:

$$V = \frac{1}{2}\rho \int \cos i d\Sigma, \tag{1}$$

в которой интеграл распространяется на всю поверхность кольца, $d\Sigma$ есть элемент этой поверхности, i есть угол внешней нормали поверхности кольца с радиусом, идущим от притягиваемой точки к элементу $d\Sigma$, а ρ есть постоянная плотность вещества кольца.

Что касается контура сечения кольца, то С. В. Ковалевская представляет его с помощью уравнений:

$$\begin{aligned} x &= l(1 - \sigma\cos t), \\ y &= l\sigma(\alpha\sin t + \alpha'\sin 2t + \alpha'' 3t + \ldots), \end{aligned} \tag{2}$$

где l — радиус кольца, σ — некоторая малая величина, а t — переменная величина, которая при изменении от 0 до 2π дает координатам x, y все последовательные их значения на меридиональном сечении кольца. Начало координат берется в центре Сатурна, ось Oy направляется по оси кольца, а ось Ox по радиусу кольца.

Подставляя формулы (2) в выражение (1), С. В. Ковалевская представляет его в виде:

$$V = \rho l^2 \int_0^{2\pi} W\,dt;\ W = M\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} + N\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\,d\theta, \tag{3}$$

где коэффициенты M и N при эллиптических интегралах первого и второго рода зависят от тригонометрических функций переменных t и t', причем последнее есть значение t для притягиваемой точки.

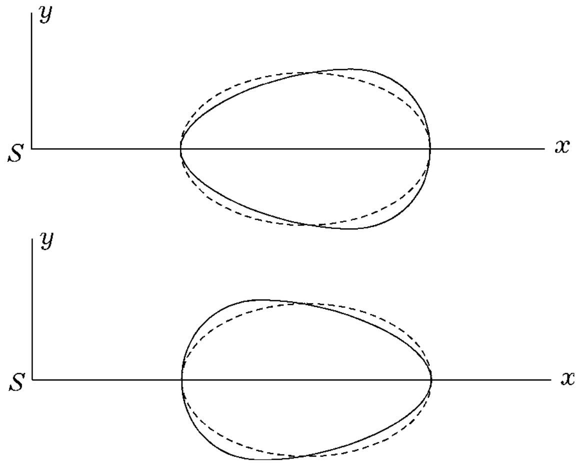

Рис. 2

Внеся значение W в V, С. В. Ковалевская развертывает исследуемый потенциал кольца в ряд по косинусам кратных дуг от t'. Так же поступает она и с потенциалом Сатурна на рассматриваемую точку меридионального сечения и, написав после этого, что сумма двух найденных потенциалов на контуре меридионального сечения постоянна, приравнивает нулю все коэффициенты при одинаковых косинусах. При этом выясняется, что коэффициенты α, α', α'', ... последовательно убывают. Вследствие этого, взяв во второй формуле (2) надлежащее число членов, мы можем получить решение задачи с желаемой степенью точности. Решение Лапласа соответствует только первому члену. Если принять во внимание и второй член, то получается второе приближение. С. В. Ковалевская показывает, что это приближение дает для меридионального сечения две формы, отклоняющиеся от эллипса Лапласа так, как изображено на рис. 2.

Второй работой С. В. Ковалевской по прикладным наукам является исследование о распространении световой волны в средах двойной преломляемости. Этот вопрос был теоретически разобран Ламе, который привел его к интегрированию уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)-b^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right),\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right),\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= b^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),\\ \theta &= \frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0, \end{aligned} \tag{4}$$

где ξ, η, ζ суть весьма малые перемещения точек упругой среды, выражающиеся функциями координат x, y, z и времени t. Ламе нашел частное решение этих уравнений в виде формул:

$$\xi = X\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau};\ \eta = Y\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau};\ \zeta = Z\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau}, \tag{5}$$

в которых X, Y, Z суть некоторые функции координат, и показал, что при этом световые волны могут быть построены с помощью поверхности

$$\frac{x^2}{r^2-a^2}+\frac{y^2}{r^2-b^2}+\frac{z^2}{r^2-c^2}=1, \tag{6}$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Это есть так называемая поверхность френелевой волны, состоящая из двух полостей. В частном случае, при $a = b$ или $a = c$, она приводится к эллипсоиду вращения и вписанному или описанному около него шару.

Подставляя в формулу (6) вместо x, y, z величины $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, мы получим вид волны по прошествии времени t после развития колебания в начале координат, а решая найденное уравнение относительно t, найдем два значения для времени, в которое та и другая часть поверхности волны пройдут через точку (x, y, z).

Решение Ламе, по мнению С. В. Ковалевской, представляет то неудобство, что в нем величины X, Y, Z становятся неопределенными по направлению оптических осей среды и делаются бесконечно большими в центре колебания. Ввиду этого, она занялась изысканием общего решения уравнений (4), которое бы позволило выбрать частное решение, не обладающее упомянутыми недостатками.

Свои исследования С. В. Ковалевская сообщила в 1883 г. на VII Съезде русских естествоиспытателей и врачей, бывшем в Одессе[2], и напечатала в Acta Mathemetica (6/3) в 1885 г., под названием "Über die Brechung des Lichtes in kristallinischen Mitteln".

Основанием для решения вопроса послужило ненапечатанное сочинение Вейерштрасса об интегрировании уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+2A'\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}+\\ +2B'\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}+2C'\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},\end{gathered}\tag{7}$$

в котором A, B, C, A', B', C' суть постоянные величины.

Вейерштрасс интегрирует это уравнение подобно тому, как Коши интегрирует уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=a^2\Delta(\psi),$$

и пользуется для этого одной новой теоремой о многократных интегралах, являющейся обобщением теоремы Грина.

Учитель вполне уступил свою работу любимой ученице, так что статья С. В. Ковалевской начинается изложением работы Вейерштрасса.

Воспользовавшись способом интегрирования Вейерштрасса, С. В. Ковалевская находит интегралы уравнений (4) в виде:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\iiint\varphi_1(u,\,v,\,w)f(x+u,\,y+v,\,z+w)\,du\,dv\,dw,\\ \eta&=\iiint\varphi_2(u,\,v,\,w)f(x+u,\,y+v,\,z+w)\,du\,dv\,dw,\\ \zeta&=\iiint\varphi_3(u,\,v,\,w)f(x+u,\,y+v,\,z+w)\,du\,dv\,dw,\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

[2]Протоколы VII Съезда русских естествоиспытателей и врачей, заседание математической секции 22 августа, Одесса 1883.

где φ_1, φ_2, φ_3 суть определенные функции, f — произвольная функция, интеграция же совершается на объем, заключенный между двумя поверхностями волны.

Потом она составляет с помощью этих интегралов новое частное решение задачи, в котором тригонометрические функции формул (5) заменяются эллиптическими функциями первого рода. Это частное решение уже не обладает вышеупомянутыми недостатками. К сожалению решение С. В. Ковалевской не сопровождается теми ясными геометрическими иллюстрациями, которыми обставлено изложение свойств френелевой волны. Я думаю, что подобное геометрическое исследование решения С. В. Ковалевской дало бы весьма интересную тему.

Теперь я перехожу к последней работе покойной, которая, по моему мнению, составляет главным образом ее ученую славу.

На 1888 г. Парижская Академия наук предложила для соискания премии тему об исследовании вращения твердого тела около неподвижной точки и в своем заседании 24 декабря присудила эту премию, увеличенную до 5000 франков, за сочинение, представленное С. В. Ковалевской.

Самостоятельная часть этой работы напечатана в Acta Mathematica (12/2) в 1889 г. под названием: "Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe".

Чтобы яснее выставить на вид, что было прибавлено С. В. Ковалевской в решении упомянутой трудной задачи, я напомню коротко результаты, достигнутые при исследовании этого вопроса другими учеными.

Вопрос о движении тяжелого твердого тела в случае, когда центр его тяжести находится в точке опоры, аналитически исследован Эйлером, который написал обширный трактат на эту тему; но полное решение его было дано с помощью изящного геометрического метода Пуансо, показавшим, что интеграла живых сил и площадей вполне достаточно, чтобы дать полную картину движений. Второй случай, который поддался решению, соответствовал таким обстоятельствам, при которых эллипсоид инерции относительно точки опоры есть эллипсоид вращения и на оси вращения этого эллипсоида лежит центр тяжести тела. Задача о движении такого тела была разрешена Лагранжем, который к интегралу живых сил и интегралу площадей относительно вертикальной линии, проходящей через точку опоры, прибавил еще интеграл, выражающий постоянство угловой скорости около оси вращения эллипсоида инерции, и, воспользовавшись этими тремя интегралами, выразил все искомые величины с помощью эллиптических трансцендентных. Дальнейшие работы ученых содержат доказательства различных геометрических и аналитических теорем, относящихся в двум упомянутым случаям движения. Таковы работы: Максвелла, Сильвестра, Мак-Куллаха, Якоби, Сомова, Дарбу и других. При этом из аналитических исследований выяснилось, что положение тела в пространстве в той и другой задаче может быть дано с помощью Якобиевых функций θ от линейных функций времени.

С. В. Ковалевская в начале своей статьи задается вопросом: не существует ли еще других случаев движения твердого тела, при которых обстоятельства движения могут быть выражены с помощью функций времени, аналогичных функциям θ, т. е. имеющих особые точки только в форме полюсов. В результате своих изысканий она находит, что подобными функциями может быть разрешен еще один новый случай движения тяжелого твердого тела. В этом случае центр тяжести тела лежит на плоскости экватора эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки, который должен быть эллипсоидом вращения и должен удовлетворять условию:

$$A = B = 2C, \tag{9}$$

где A, B и C главные моменты инерции. Придя к такому заключению, С. В. Ковалевская обращается к задаче о движении твердого тела в упомянутом случае и разрешает ее вполне. Для наглядного сравнения трех случаев движения тяжелого твердого тела, прошу обратить внимание на три волчка, изображенные на рис. 3. Первый волчок соответствует случаю, разрешенному Пуансо, второй представляет случай Лагранжа, а третий тот случай, который исследован С. В. Ковалевской. Характерная особенность третьего случая состоит в том, что с поворотом волчка около оси вращения изменяется момент действующей на него силы.

Весь успех исследования С. В. Ковалевской в рассматриваемой задаче заключается в прибавлении к известным интегралам живых сил и площадей еще одного нового алгебраического интеграла. Анализ ее для достижения этой цели настолько прост, что, по моему мнению, его следует включить в курсы аналитической механики.

Принимая $C = 1$, пишем для рассматриваемого случая дифференциальные уравнения движения твердого тела в виде:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} &= qr, & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\ 2\frac{dq}{dt} &= -pr - c_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\ \frac{dr}{dt} &= c_0\gamma', & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma', \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где p, q, r суть проекции угловой скорости на главные оси инерции, γ, γ', γ'' суть углы, образуемые этими осями с направлением силы тяжести, а c_0 есть произведение веса тела на координату x центра тяжести, лежащего на оси Ox.

К трем известным интегралам этих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2(p^2 + q^2) + r^2 &= 2c_0\gamma + 6l_1, \\ 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' &= 2l, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

из которых первый есть интеграл живых сил, второй интеграл площадей и третий представляет известное соотношение между косинусами, С. В. Ковалевская прибавляет четвертый интеграл. Для этого она умножает второе уравнение (10) на $i = \sqrt{-1}$ и складывает с первым, потом умножает пятое на i и складывает с четвертым. Получается:

$$2\frac{d}{dt}(p + qi) = ri(p + qi) - c_0 i\gamma'',$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma + \gamma' i) = -ri(\gamma + \gamma' i) + \gamma'' i(p + qi).$$

Отсюда по исключении γ'' находится соотношение:

$$\frac{d}{dt}\left[(p + qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma' i)\right] = -ri\left[(p + qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma' i)\right], \tag{12}$$

в котором мы имеем право изменить i на $-i$, что дает еще соотношение:

$$\frac{d}{dt}\left[(p - qi)^2 + c_0(\gamma - \gamma' i)\right] = ri\left[(p - qi)^2 + c_0(\gamma - \gamma' i)\right]. \tag{13}$$

Исключение из уравнений (12) и (13) величины r и интеграция дают искомый интеграл:

$$\left[(p+qi)^2+c_0(\gamma+\gamma' i)\right]\left[(p-qi)^2+c_0(\gamma-\gamma' i)\right]=\varkappa^2. \tag{14}$$

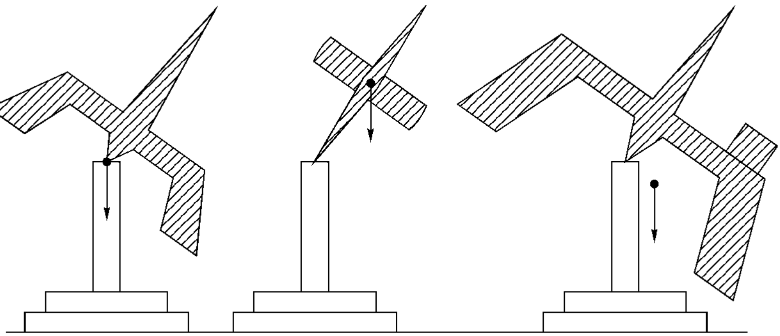

Рис. 3

Когда этот интеграл был найден, то дальнейшее разрешение задачи свелось к совершению вполне определенных аналитических операций, которые С. В. Ковалевская выполнила до конца, сведя отыскание всех обстоятельств движения к отысканию функций s_1 и s_2, удовлетворяющих уравнениям:

$$\frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}+\frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}=0;\qquad \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}+\frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}=dt, \tag{15}$$

где $R_1(s)$ есть многочлен пятой степени.

В конце рассматриваемого сочинения С. В. Ковалевская показывает, что всякое тело, главные моменты инерции которого $A_1>B_1>C_1$ относительно центра тяжести удовлетворяют условию

$$A_1=2(B_1-C_1),$$

может быть укреплено в неподвижной точке так, что его движение будет соответствовать рассмотренному ею случаю. Для этого стоит только взять точку опоры на оси, соответствующей моменту A_1, на расстоянии

$$a = \sqrt{\frac{A_1 - B_1}{M}}$$

от центра тяжести.

В 1890 г. в Acta Mathematica (14/1) С. В. Ковалевская напечатала дополнение к вышеозначенному сочинению под названием: "Sur une propriété du système d'équations différentielles, qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe". В этом дополнении она дает подтверждение той мысли, что случаи Пуансо, Лагранжа и разрешенный ею случай движения твердого тела суть единственные, обстоятельства движения которых могут быть выражены однозначными функциями времени, не имеющими иных особых точек, кроме полюсов.

Вопрос о движении твердого тела, разрешенный С. В. Ковалевской, несмотря на его частный характер [вследствие соотношения (9)], является ценным прибавлением к имеющимся исследованиям о движении твердого тела.

Летом 1889 г. я встретил в Париже Пуанкаре, который передавал мне, что С. В. Ковалевская работает над расширением рассмотренного случая и имеет надежду разрешить задачу о движении при центре тяжести, лежащем на плоскости экватора эллипсоида инерции, который есть какой-нибудь эллипсоид вращения. К сожалению, ранняя смерть положила предел всем этим надеждам и лишила нас соотечественницы, которая немало содействовала прославлению русского имени.

---

*19 февраля 1891 г. в заседании Московского математического общества автор сделал сообщение "Труды С. В. Ковалевской по прикладной математике". Работа вошла как часть в коллективный труд А. Г. Столетова, Н. Е. Жуковского и П. А. Некрасова "С. В. Ковалевская" и была напечатана в "Математическом сборнике", т. XVI, 1891. *Прим. ред.*

2. Геометрическая интерпретация рассмотренного С. В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки[1]

§ 1. После появления замечательного мемуара С. В. Ковалевской[2] о движении тяжелого твердого тела, в котором главные радиусы инерции a, b, c относительно неподвижной точки находятся в соотношении

$$a = b = \sqrt{2c} \tag{1}$$

и центр тяжести лежит на плоскости равных радиусов инерции, было напечатано несколько статей, посвященных этой интересной задаче.

Большая статья Кёттера[3] заключает в себе переработку и пополнение анализа С. В. Ковалевской. Статьи Г. Г. Аппельрота[4], П. А. Некрасова[5] и А. М. Ляпунова[6] посвящены исследованию (по отношению к полюсам) функций времени, определяющих движение тела, когда время рассматривается за комплексное переменное. Что касается геометрической интерпретации рассматриваемого движения, то она была дана в сочинении Н. Б. Делоне[7] для частного случая, при котором постоянное k в интеграле С. В. Ковалевской есть нуль. Этот случай подвергся более

[1]Сообщено 1.III 1892 на заседании Московского математического общества и впервые напечатано отдельным изданием, Москва, 1896.

[2]*Kowalevski S.* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Math., т. XII; Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Math., т. XIV.

[3]*Kötter F.* Sur le cas traité par M-me Kowalevski de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta. Math., т. XVII.

[4]*Аппельрот Г. Г.* По поводу первого параграфа мемуара С. В. Ковалевской, Математический сборник, т. XVI, 1892; Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки, Москва, 1893.

[5]*Некрасов П. А.* К задаче о движении твердого тела около неподвижной точки, Математический сборник, т. XVI, 1892.

[6]*Ляпунов А. М.* Об одном свойстве дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, Сообщения Харьковского математического общества, т. IV.

[7]*Делоне Н. Б.* К вопросу о геометрическом истолковании интегралов движения твердого тела около неподвижной точки, данных С. В. Ковалевской, Математический сборник, т. XIV, 1890; Алгебраические интегралы движения тяжелого твердого тела, С.-Петербург, 1892.

детальной обработке в статьях Г. Г. Аппельрота[8] и Б. К. Млодзеевского[9]. Для общего случая указаны некоторые геометрические свойства движения в небольшой статье Г. К. Суслова[10].

В предлагаемом сочинении я имею в виду установить геометрическую интерпретацию общего случая движения рассматриваемого тела и за основу этой интерпретации беру разъяснение геометрического смысла двух гиперэллиптических функций времени, через которые С. В. Ковалевская выражает все величины, определяющие положение движущегося тела. Я показываю, что эти функции являются параметрами некоторой системы криволинейных ортогональных координат на плоскости равных радиусов инерции. Относительно этой системы координат весьма просто получается движение конца проекции угловой скорости на плоскость равных радиусов инерции. По траектории этой точки строится конус, представляющий в теле место вертикальной линии, который я называю конусом вертикальной линии. Знание же этого конуса дает нам картину движения тела.

§ 2. Рассмотрим на плоскости Oxy равных радиусов инерции (O лежит в неподвижной точке, а ось Ox проходит через центр тяжести тела) комплексное переменное

$$\zeta = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2}$$

и его функцию

$$\begin{aligned} f(\zeta) = \alpha + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta^3 + \alpha_4\zeta^4 = X + iY = \\ = R(\cos\lambda + i\sin\lambda), \end{aligned} \tag{3}$$

где $i = \sqrt{-1}$, а α, α_1, ... суть некоторые действительные коэффициенты, значения которых для данной механической задачи будут указаны

[8] *Аппельрот Г. Г.* Некоторые дополнения к сочинению Н. Б. Делоне, Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. VI, 1893.

[9] *Млодзеевский Б. К.* Об одном случае движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, Математический сборник, т. XVIII. 1897.

[10] *Суслов Г. К.* Вращение тяжелого твердого тела около неподвижного полюса (случай С. В. Ковалевской), Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. VII, вып. 2, 1895.

после. Назовем через ζ_1 комплексную величину, сопряженную ζ, и напишем эллиптические интегралы:

$$\rho_1 + \rho_2 i = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}, \quad \rho_1 - \rho_2 i = \int \frac{d\zeta_1}{\sqrt{f(\zeta_1)}}. \tag{4}$$

Семейства линий

$$\rho_1 = \mathrm{const}, \quad \rho_2 = \mathrm{const} \tag{5}$$

представляют нам некоторую систему криволинейных ортогональных изотермических координат, для которой ρ_1 и ρ_2 суть изотермические параметры. Трансцендентные уравнения (5) рассматриваемых координатных линий могут быть заменены алгебраическими уравнениями. Для этого составляем дифференциальное уравнение кривых $\rho_2 = \mathrm{const}$. Принимаем в уравнениях (4) параметр ρ_2 за постоянную величину и берем от обеих частей их производную по ρ_1:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_1} = \sqrt{f(\zeta)}, \quad \frac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_1} = \sqrt{f(\zeta_1)}. \tag{6}$$

Исключая отсюда $d\rho_1$, найдем дифференциальное уравнение первого семейства кривых (5), выраженное в переменных ζ, ζ_1; но нам удобнее сохранить уравнения (6) и отыскать интеграл так, как это делает Лагранж[11]. Из формул, получаемых по уравнениям (3) и (4), имеем:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_1}\right)^2 &= \alpha + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta^3 + \alpha_4\zeta^4, \\
\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_1}\right)^2 &= \alpha + \alpha_1\zeta_1 + \alpha_2\zeta_1^2 + \alpha_3\zeta_1^3 + \alpha_4\zeta_1^4, \\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho_1^2} &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2\zeta + 3\alpha_3\zeta^2 + 4\alpha_4\zeta^3), \\
\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\rho_1^2} &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2\zeta_1 + 3\alpha_3\zeta_1^2 + 4\alpha_4\zeta_1^3).
\end{aligned}$$

[11] *Lagrange.* Qeuvres, IX, стр. 127.

На основании
$$x = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta_1), \quad y = \frac{1}{2i}(\zeta - \zeta_1)$$
находим, что
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1^2} = \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2 x + \frac{3}{2}\alpha_3(x^2 - y^2) + 2\alpha_4(x^3 - 3xy^2),$$
$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_1} = \frac{\alpha_1}{2}y + \alpha_2 xy + \frac{\alpha_3}{2}(3x^2 y - y^3) + 2\alpha_4(x^2 - y^2)xy.$$

С помощью этих двух формул составляем дифференциальное уравнение
$$y\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1^2} - \frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_1} = -\alpha_3 y^3 - 4\alpha_4 x y^3,$$
которое по умножении на $\frac{2}{y^3}\frac{dx}{d\rho_1}$ и интегрировании дает:
$$\left(\frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + 2\alpha_3 x + 4\alpha_4 x^2 = s_2,$$
где постоянное интеграции s_2 есть функция одного ρ_2

Так же найдем для уравнений
$$\frac{d\zeta}{d\rho_2} = i\sqrt{f(\zeta)}, \quad \frac{d\zeta_1}{d\rho_2} = -i\sqrt{f(\zeta_1)} \tag{7}$$
интеграл
$$-\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \rho_2}}{y}\right)^2 + 2\alpha_3 x^4 + \alpha_4 x^2 = s_1,$$
где постоянное s_1 есть функция одного ρ_1. Так как, на основании формул (6), (7) и (3),
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} &= \sqrt{R}\cos\frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{R + X}{2}}, \\ \frac{\partial x}{\partial \rho_2} &= -\sqrt{R}\sin\frac{\lambda}{2} = -\sqrt{\frac{R - X}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

то найденные функции s_1 и s_2 могут быть представлены так:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{X-R}{2y^2} + 2\alpha_3 x + 4\alpha_4 x^2, \\ s_2 &= \frac{X+R}{2y^2} + 2\alpha_3 x + 4\alpha_4 x^2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь R есть абсолютная величина радиуса-вектора точки, представляющей на плоскости Oxy комплексную величину $f(\zeta)$, а X есть взятая с надлежащим знаком абсцисса этой точки.

Вследствие сказанного уравнения (5) заменяются следующими алгебраическими уравнениями:

$$s_1 = \mathrm{const}, \quad s_2 = \mathrm{const}, \tag{10}$$

причем s_1 и s_2 суть некоторые неизотермические параметры рассматриваемой криволинейной системы координат. Величины $\frac{s_1}{4}$ и $\frac{s_2}{4}$ и суть функции, с помощью которых С. В. Ковалевская выражает все элементы, определяющие положение движущегося тела[12]. Весь успех ее анализа, с геометрической точки зрения, заключается в исследовании движения проекции конца угловой скорости на плоскость равных радиусов инерции с помощью указанной системы криволинейных координат.

§ 3. Формулы (8) позволяют нам вывести одно свойство координатных линий (10), которое мы выразим в виде теоремы:

Теорема 1. *Касательные координатных линий* $s_1 = \mathrm{const}$ *и* $s_2 = \mathrm{const}$ *параллельны бисекторам углов, образованных соответственным вектором* R *с осью абсцисс.*

Обозначая вместе с Ламе (Lamé) первый дифференциальный параметр знаком Δ и замечая, что ρ_1 и ρ_2 суть изотермические функции, напишем:

$$\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2}},$$

---

[12] Величины s_1 и s_2, употребляемые у Кёттера, суть наши величины $\frac{1}{2}s_1$, $\frac{1}{2}s_2$.

откуда следует, что

$$\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2 = \frac{1}{\sqrt{R}}. \tag{11}$$

Теперь мы можем составить выражения косинусов углов, образованных осью Ox с проведенными в точке (x, y) касательными к рассматриваемым координатным линиям:

$$\Delta\rho_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} = \cos\frac{\lambda}{2}, \quad \Delta\rho_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} = -\sin\frac{\lambda}{2}, \tag{12}$$

причем первый косинус соответствует касательной к кривой $s_2 = \mathrm{const}$, а второй соответствует касательной к кривой $s_1 = \mathrm{const}$. Теорема таким образом доказана.

§ 4. Чтобы хорошенько познакомиться с введенными нами криволинейными координатами, остановимся сначала на предположении

$$f(\zeta) = (\varepsilon_1^2 - \zeta^2)(\varepsilon_2^2 - \zeta^2), \tag{13}$$

где ε_1 и ε_2 суть некоторые действительные или чисто мнимые величины (мы будем называть через ε_1 и ε_2 корни, взятые с положительным знаком).

Составляем функции s_1 и s_2 для точек, лежащих на осях координат. Мы имеем на оси абсцисс:

$$y = 0, \quad Y = 0, \quad X = f(x) = \pm R. \tag{14}$$

Если X положителен, то по формуле (9) $s_2 = +\infty$, а функция s_1 имеет конечную величину. Для определения последней воображаем точку (x, y), бесконечно близкую оси абсцисс, и пишем:

$$\frac{-R+X}{2y^2} = \frac{X}{2y^2}\left\{-\left[1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+1\right\} = -\frac{Y^2}{4y^2X} =$$

$$= -\frac{\left[-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)^2 r^2 \sin 2\varphi + r^4 \sin 4\varphi\right]^2}{4r^2\sin^2\varphi\left[\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)r^2\cos 2\varphi + r^4\cos 4\varphi\right]}.$$

[По сокращении на $4\sin^2\varphi$], полагая $\varphi = 0$, $r = x$, находим:

$$\frac{X - R}{2y^2} = -\frac{x^2\left[-(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + 2x^2\right]^2}{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)x^2 + x^4}.$$

Подставляя эту величину в первую формулу (9) и полагая $\alpha_3{=}0$, $\alpha_4{=}1$, получаем:

$$s_1 = -\frac{x^2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^2}{f(x)}.$$

При отрицательном значении X находим, что $s_1 = -\infty$, а s_2 выражается той же формулой, которой прежде выражалось s_1.

На оси ординат имеем:

$$x = 0, \quad Y = 0, \quad X = f(yi) = \pm R, \tag{15}$$

так что при положительном X по формулам (9)

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{(\varepsilon_1^2 + y^2)(\varepsilon_2^2 + y^2)}{y^2}.$$

При отрицательном X имеем $s_2 = 0$, а s_1 выражается той же формулой, которой при положительном X выражалось s_2.

Высказанное относительно значений функций s_1, s_2 на осях координат можно сформулировать так:

На оси абсцисс

$$s = -\frac{x^2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^2}{f(x)}; \tag{16}$$

при этом, если вторая часть формулы положительна (см. формулу (14)), то она представляет s_2, а $s_1 = -\infty$; если же вторая часть формулы отрицательна, то она представляет s_1, а $s_2 = +\infty$.

На оси ординат

$$s = \frac{(\varepsilon_1^2 + y^2)(\varepsilon_2^2 + y^2)}{y^2}; \tag{17}$$

при этом, если вторая часть формулы положительна, то она представляет s_2, а $s_1 = 0$; если же вторая часть формулы отрицательна, то она представляет s_1, а $s_2 = 0$.

Рядом с формулами (16) и (17) нам будет важно еще обратить внимание на некоторые формулы, непосредственно из них получаемые. Для оси абсцисс находим:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - s &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - x^2)^2}{f(x)}, \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - s &= \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + x^2)^2}{f(x)}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{ds}{d(x^2)} = -\frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^2(\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - x^4)}{[f(x)]^2}. \tag{19}$$

Для оси ординат находим:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - s &= -\frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2 - y^2)^2}{y^2}, \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - s &= -\frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2 + y^2)^2}{y^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{ds}{d(y^2)} = -\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - y^4}{y^4}. \tag{21}$$

Переходим к разъяснению вида координатных линий при условии (13). Мы имеем три случая:

Корни ε_1 и ε_2 действительны. Примем, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и отложим на оси абсцисс (рис. 1) отрезки

$$OF_1 = OF_4 = \varepsilon_1, \quad OF_2 = OF_3 = \varepsilon_2.$$

Рассмотрим изменения s_1 и s_2 при изменении x^2 от 0 до ∞. На отрезке F_3F_2 вторая часть формулы (16) отрицательна и представляет функцию s_1, которая при переходе от 0 до F_2 или от 0 до F_3 изменяется от 0 до $-\infty$. Функция же s_2 на всем отрезке F_3F_2 имеет постоянную величину $+\infty$, вследствие чего отрезок оси абсцисс F_3F_2 принадлежит координатной линии $s_2 = +\infty$. На отрезках F_2F_1 и F_3F_4 вторая часть формулы (16) положительна и представляет функцию s_2, которая при переходе от F_2 к F_1 или от F_3 к F_4 уменьшается от $+\infty$ до наименьшей величины $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2$, а потом опять возрастает до $+\infty$. Наименьшая величина получается при $x^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2$ (формулы (18), (19)). Функция s_1 на отрезках F_2F_1 и F_3F_4 имеет постоянную величину $-\infty$, так что эти отрезки представляют координатную линию $s_1 = -\infty$. Наконец, на бесконечных концах оси абсцисс, начинающихся от точек F_1 и F_4, имеем вторую часть формулы (16) опять отрицательной; она представляет нам функцию s_1, изменяющуюся от $-\infty$ до 0. Функция s_2 на рассматриваемых бесконечных отрезках имеет постоянную величину $+\infty$, так что эти отрезки вместе с отрезком F_2F_3 представляют координатную линию $s_2 = +\infty$.

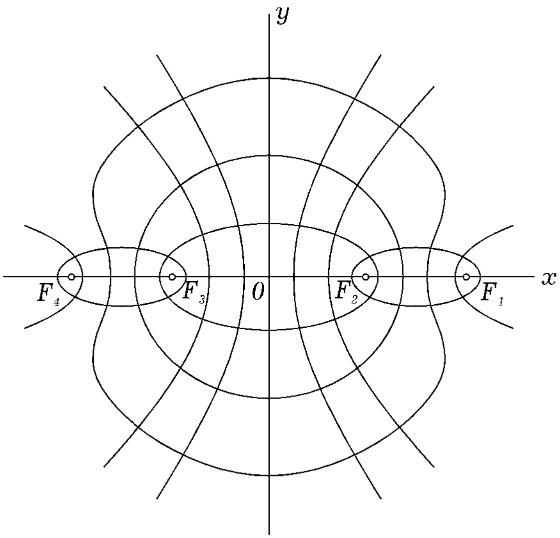

Рис. 1

Для всех точек оси ординат вторая часть формулы (17) положительна и представляет функцию s_2, которая уменьшается при удалении от начала координат от $+\infty$ до наименьшей величины $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$ и потом возрастает до $+\infty$. Наименьшая величина получается при $y^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2$

(формулы (20), (21)). Функция s_1 на всей оси ординат имеет значение нуль, так что эта ось есть координатная линия $s_1 = 0$.

Сказанное дает нам расположение координатной сети, представленное на рис. 1. Любопытно заметить, что линия $s_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$ в этой сети есть круг[13], проведенный из начала координат радиусом $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$.

Корни ε_1 и ε_2 суть чисто мнимые величины. Примем модуль ε_1 более модуля ε_2, т. е.

$$\frac{\varepsilon_1}{i} > \frac{\varepsilon_2}{i}.$$

Отложим на оси ординат отрезки

$$OF_1 = OF_4 = \frac{\varepsilon_1}{i},$$

$$OF_2 = OF_3 = \frac{\varepsilon_2}{i}$$

и будем рассматривать изменения функций s_1 и s_2 сначала на оси абсцисс (рис. 2). Для всех точек этой оси вторая часть формулы (16) отрицательна и представляет нам функцию s_1, которая при удалении от начала координат убывает от нуля до наименьшей величины $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2$, а потом опять возрастает до нуля. Наименьшая величина получается при $x^2 = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ (формулы (18), (19)). Функция s_2 на всей оси Ox равна $+\infty$, так что эта ось принадлежит координатной линии $s_2 = +\infty$. На оси ординат при передвижении от начала координат к F_2 или F_3 вторая часть формулы (17) положительна и представляет функцию s_2, которая изменяется от ∞ до 0; функция же s_1 на отрезке F_3F_2 имеет постоянное значение нуль, вследствие чего весь этот отрезок принадлежит координатной линии $s_1 = 0$.

На отрезках F_2F_1 и F_3F_4 вторая часть формулы (17) отрицательна и представляет функцию s_1, которая уменьшается от нуля до наименьшей величины $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2$, а потом возрастает до нуля. Наименьшая величина имеет место при $y^2 = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ (формулы (20), (21)). Функция s_2 на отрезках F_2F_1 и F_3F_4 имеет постоянное значение нуль, так что эти отрезки представляют координатную линию $s_2 = 0$. На бесконечных

[13]См. мое сочинение «Видоизменение метода Кирхгофа ... », § 19. Математический сборник, т. XV. 1890.

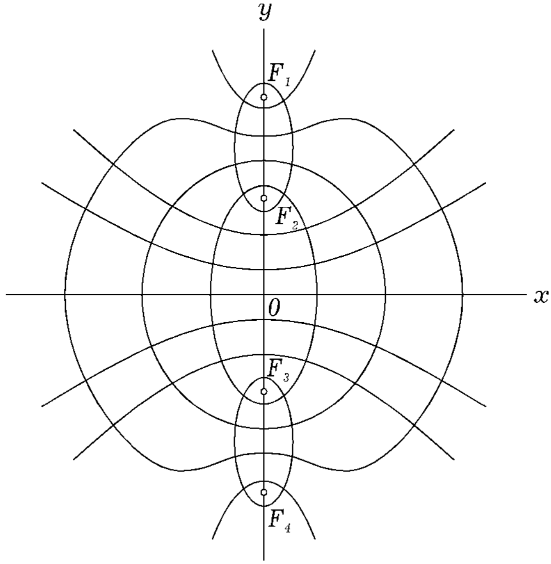

Рис. 2

отрезках оси ординат, начинающихся от F_1 и F_4, вторая часть формулы (17) положительна и представляет функцию s_2, которая при возрастании y^2 увеличивается от 0 до ∞. Что касается функции s_1, то она на рассматриваемых бесконечных отрезках сохраняет постоянную величину нуль, так что эти отрезки вместе с отрезком F_2F_3 представляют координатную линию $s_1 = 0$.

На основании всего сказанного получаем расположение координатной сети, представленное на рис. 2. Здесь, так же как в предыдущей сети, одна из координатных линий, именно

$$s_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2,$$

представляет окружность (радиус окружности $\sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_2}$).

Корень ε_1 представляет действительную величину, а корень ε_2 есть чисто мнимая величина. Отложим (рис. 3) на оси абсцисс

$$OF_1 = OF_2 = \varepsilon_1$$

и на оси ординат

$$OF_3 = OF_4 = \frac{\varepsilon_2}{i}.$$

На отрезке оси абсцисс F_2F_1 вторая часть формулы (16) положительна и представляет функцию s_2, которая изменяется при переходе от начала координат к точкам F_1 и F_2 от 0 до ∞; функция же s_1 на всем отрезке F_2F_1 имеет постоянную величину $-\infty$, так что этот отрезок представляет координатную линию $s_1 = -\infty$. На бесконечных отрезках оси абсцисс, начинающихся от точек F_1 и F_2, вторая часть формулы (16) отрицательна и представляет функцию s_1, которая при беспредельном возрастании x^2 возрастает от $-\infty$ до 0. Функция s_2 на рассматриваемых бесконечных отрезках имеет постоянную величину $+\infty$, так что эти отрезки принадлежат координатной линии $s_2 = +\infty$. На отрезке F_3F_4 оси ординат вторая часть формулы (17) имеет отрицательную величину и представляет функцию s_1, которая при переходе от начала координат к точкам F_3 и F_4 изменяется от $-\infty$ до 0; функция же s_2 на рассматриваемом отрезке имеет постоянную величину нуль, так что этот отрезок представляет координатную линию $s_2 = 0$. На бесконечных отрезках оси ординат, начинающихся от точек F_3 и F_4, вторая часть формулы (1717) имеет положительный знак и представляет функцию s_2, которая при беспредельном возрастании y^2 увеличивается от 0 до ∞. Функция s_1 на этих отрезках имеет постоянную величину нуль, так что эти отрезки дают нам координатную линию $s_1 = 0$. На основании сказанного получаем расположение координатной сети, изображенное на рис. 3.

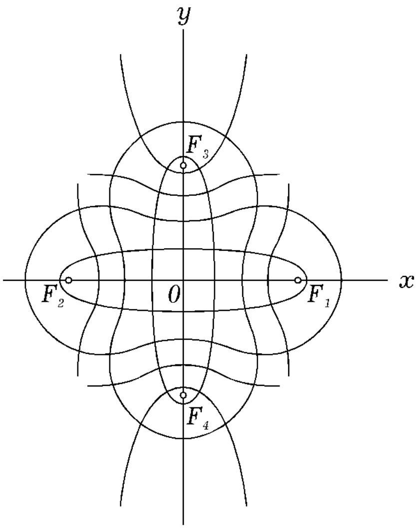

Рис. 3

§ 5. Обнаружим теперь, что *всякая координатная сеть, данная формулой (10), получается путем преобразования одной из трех сетей предыдущего параграфа с помощью обратных радиусов-векторов из центра, лежащего на оси абсцисс.* Предполагаем, что в равенстве

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}} = -\int \frac{d\zeta'}{\sqrt{f_1(\zeta')}} \tag{22}$$

первый эллиптический интеграл переходит во второй с помощью следующей подстановки:

$$(\zeta - l)(\zeta' - m) = n^2 \tag{23}$$

[где l, m, n — действительны]. Замечаем, что при этом корни двух уравнений четвертой степени

$$f(\zeta) = 0, \quad f_1(\zeta') = 0 \tag{24}$$

будут связаны между собой соотношением (23). Геометрический смысл этого соотношения можно усмотреть на рис. 4. Точку M', представляющую на осях $O'x'y'$ комплексное переменное $\zeta' = x' + y'i$, следует соединить с центром преобразования C, лежащим на оси $O'x'$ на расстоянии $O'C = m$ от начала, и заменить на соответственную точку M так, чтобы

$$CM \cdot CM' = n^2.$$

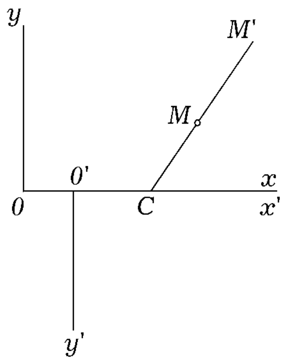

Рис. 4

Полученную точку M следует отнести к осям координат Oxy, в которых ось Ox направлена по $O'x'$, ось Oy направлена в сторону, прямо противоположную $O'y'$, а начало O отстоит от центра C на расстоянии $OC = l$. Точка M относительно осей Oxy представит нам комплексное переменное $\zeta = x + yi$, соответственное переменному ζ'.

Докажем, что для всякого многочлена четвертой степени $f_1(\zeta')$ с действительными коэффициентами можно отыскать действительные

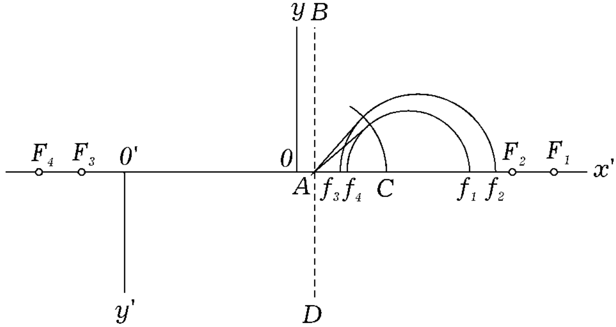

Рис. 5

величины l, m, n, при которых функция $f(\zeta)$ представляется формулой (13). Если все четыре корня второго уравнения (24) действительны, то они представляются точками f_1, f_2, f_3, f_4, расположенными на оси абсцисс $O'x'$ (рис. 5). Строим на отрезках f_4f_1 и f_3f_2, как на диаметрах, окружности и проводим радикальную ось этих окружностей BD. Из точки A пересечения радикальной оси с осью абсцисс проводим к окружностям касательные, которые будут по длине равны, и, приняв эти касательные за радиус, чертим из центра A окружность. Точка пересечения C этой окружности с осью абсцисс будет служить центром преобразования с помощью обратных радиусов, а $O'C = m$. Так как

$$(AC - Cf_4)(AC + Cf_1) = AC^2, \quad (AC - Cf_3)(AC + Cf_2) = AC^2,$$

то

$$\frac{1}{AC} = \frac{1}{Cf_4} - \frac{1}{Cf_1} = \frac{1}{Cf_3} - \frac{1}{Cf_2},$$

откуда

$$\frac{1}{Cf_4} - \frac{1}{Cf_3} = \frac{1}{Cf_1} - \frac{1}{Cf_2}.$$

Если назовем через F_1, F_2, F_3, F_4 точки, соответствующие точкам f_1, f_2, f_3, f_4 относительно центра преобразования C при произвольном действительном значении коэффициента n, то, умножив полученное равенство на n^2, найдем, что

$$CF_4 - CF_3 = CF_1 - CF_2,$$

или

$$F_4F_3 = F_2F_1.$$

Теперь нам остается только взять середину отрезка F_3F_2 за начало O координат Oxy, т.е. положить $l = CO$, чтобы получить для $f(\zeta)$ выражение (13) при действительных корнях ε_1, ε_2.

Когда все четыре корня второго уравнения (24) комплексны и представляются точками f_1, f_4, f_2, f_3, попарно симметричными относительно оси $O'x$, то следует провести через эти четыре точки окружность (рис. 6). Точка пересечения C этой окружности с осью абсцисс будет центром преобразования с помощью обратных радиусов, так что $O'C = m$. При преобразовании на нашей фигуре с коэффициентом $n = CO$ упомянутая окружность преобразуется в ось ординат Oy, на которой симметрично от начала O располагаются точки F_1, F_4, F_2, F_3, соответственные точкам f_1, f_4, f_2, f_3 и представляющие корни первого уравнения (24). Коэффициент l будет $-CO$. Функция $f(\zeta)$ примет вид (13) (различие на постоянный множитель) при чисто мнимых значениях ε_1, ε_2.

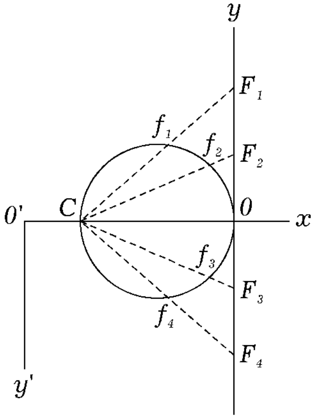

Рис. 6

Наконец, если два корня второго уравнения (24) действительны, а два другие суть комплексные сопряженные величины, то, представив их на рис. 7 точками f_1, f_2, f_3, f_4, соединяем точку f_3 с f_1 и f_2 и отлагаем

$$\angle f_1 f_3 H = \angle f_1 f_2 f_3.$$

Из точки H как из центра проводим окружность радиусом Hf_3, причем эта окружность пройдет и через точку f_4. Точки f_2 и f_1 будут относительно этой окружности взаимно сопряженные, т.е. будут удовлетворять соотношению

$$f_1H \cdot f_2H = HC^2,$$

или

$$(Cf_1 - CH)(Cf_2 - CH) = CH^2, \quad \frac{1}{Cf_1} + \frac{1}{Cf_2} = \frac{2}{CD}.$$

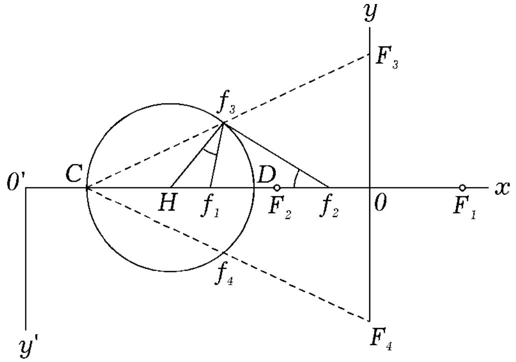

Рис. 7

Приняв точку C за центр преобразования обратными радиусами ($O'C = m$), при каком-нибудь действительном коэффициенте n, преобразуем построенную окружность в ось Oy новой системы осей координат ($-OC = l$). На этой оси симметрично относительно начала O расположатся точки F_3 и F_4, преобразованные из точек f_3 и f_4; что же касается точек F_1 и F_2, преобразованных из точек f_1 и f_2, то они расположатся по оси абсцисс тоже симметрично относительно O, так как, умножая последнее наше равенство на n^2, получим:

$$CF_1 + CF_2 = 2CO.$$

Функция $f(\zeta)$ принимает в рассматриваемом случае вид, данный формулой (13) при действительном ε_1 и чисто мнимом ε_2.

Таким образом мы обнаружили, что всякая координатная сеть рассматриваемого вида с помощью преобразования обратными радиусами приводится к одному из видов, данных на рис. 1, 2 или 3. Так как преобразование обратными радиусами взаимно, то, наоборот, всякая координатная сеть рассматриваемого вида получается этим преобразованием из простейших сетей одного из трех упомянутых типов.

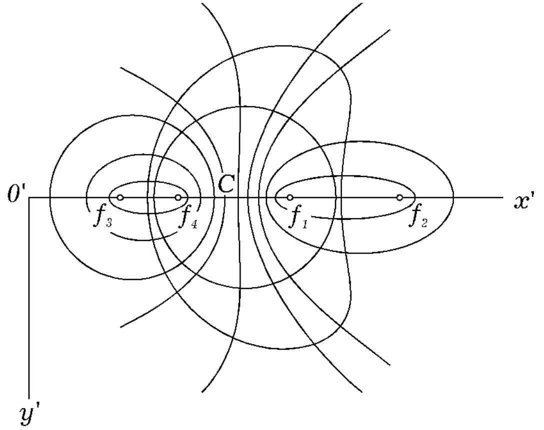

Рис. 8

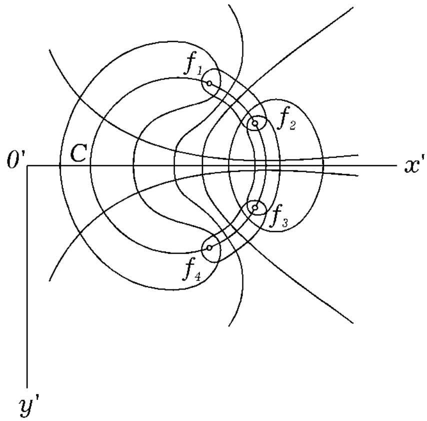

Рис. 9

На рис. 8 представлена сеть, получаемая через преобразование сети рис. 1. Мы замечаем на ней две окружности, соответствующие координатным линиям $s_2 = \text{const}$ и $s_1 = \text{const}$, из которых первая преобразовалась из круга радиуса $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, а вторая — из оси Oy и потому проходит через центр C.

На рис. 9 представлена сеть, получаемая через преобразование сети рис. 2. Окружность, проходящая через точки f_1, f_2, f_3, f_4, соответствующие корням второго уравнения (24), обладает тем замечательным свойством, что ее дуги f_1f_2 и f_3f_4 представляют координатную линию $s_2 = \text{const}$, а ее дуги f_1f_4 и f_2f_3 представляют координатную линию $s_1 = \text{const}$.[14] Другая окружность, изображенная на рисунке, получается из круга радиуса $\sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_2}$ и соответствует координатной линии $s_1 = \text{const}$.

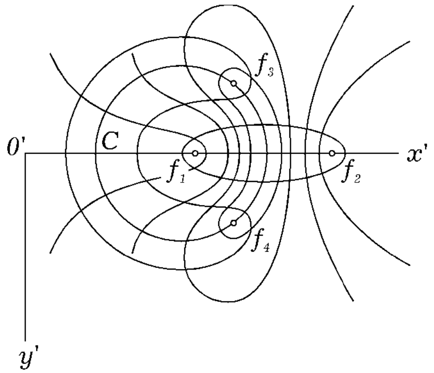

Рис. 10

На рис. 10 представлена сеть, полученная через преобразование сети рис. 3. Ось ординат при этом преобразуется в окружность, у которой дуга f_3f_4 есть координатная линия $s_2 = \text{const}$, а дуга f_3Cf_4 есть координатная линия $s_1 = \text{const}$.

§ 6. Для нашей механической задачи следует еще доказать одну теорему, имеющую место при $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 1$.

[14] Пользуясь этим свойством, можно разрешить задачу о распределении тока в круглой пластинке, для которой электродами служат равные дуги f_1f_2 и f_4f_3.

Теорема 2. *Первые дифференциальные параметры функций* s_1 *и* s_2 *выражаются формулами*

$$\left.\begin{aligned}\Delta s_1 &= 2\sqrt{\frac{(e_1 - s_1)(e_2 - s_1)(e_3 - s_1)}{R}},\\ \Delta s_2 &= 2\sqrt{\frac{(e_1 - s_2)(e_2 - s_2)(e_3 - s_2)}{R}},\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где постоянные e_1, e_2, e_3 *выражаются по корням* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ *уравнения* $f(\zeta) = 0$ *таким образом:*

$$e_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2, \quad e_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2, \quad e_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)^2.$$

При доказательстве теоремы 1 было обнаружено, что первый дифференциальный параметр функций ρ_1 и ρ_2 есть $1 : \sqrt{R}$. Из этого следует, что

$$\Delta s_2 = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{ds_1}{d\rho_1}, \quad \Delta s_2 = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{ds_2}{d\rho_2}. \tag{26}$$

Так как $\dfrac{ds_1}{d\rho_1}$ есть функция s_1, то мы будем знать эту величину на всей плоскости, если определим ее на какой-нибудь кривой $s_2 = \mathrm{const}$; точно так же мы будем знать $\dfrac{ds_2}{d\rho_2}$ на всей плоскости, если определим эту производную на какой-нибудь кривой $s_1 = \mathrm{const}$.

Предположим сначала, что функция $f(\zeta)$ имеет вид (13), и заметим, что в этом случае ось абсцисс или состоит частью из линии $s_1 = \mathrm{const}$ и частью из линии $s_2 = \mathrm{const}$ (рис. 1 и 3), или представляется линиею $s_2 = \mathrm{const}$ (рис. 2), причем в последнем случае некоторая часть оси ординат представляет линию $s_1 = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что для всякого индекса будет удовлетворяться на той или другой оси одно из равенств:

$$(\Delta s)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2, \quad (\Delta s)^2 = \left(\frac{ds}{dy}\right)^2. \tag{27}$$

Приравниваем теперь произведения первых и вторых частей уравнений (16) и (18), а также уравнений (17) и (20):

$$\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s\right]\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s\right](-s)=\frac{(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)^4(\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2-x^4)^2x^2}{[f(x)]^3},$$

$$\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s\right]\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s\right]\cdot s=\frac{f(yi)(\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2-y^4)^2}{y^6}.$$

Полученные результаты, на основании формул (19), (21), (27), приводят к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}(\Delta s)^2&=\frac{4}{f(x)}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s\right]\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s\right](-s),\\(\Delta s)^2&=\frac{4}{f(yi)}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s\right]\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s\right]\cdot s.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Если мы желаем отнести эти формулы к s_1, то, по сказанному в § 4, должны в них считать $f(x)$ положительным, а $f(yi)$ отрицательным и полагать (формулы (14), (15)), что

$$f(x)=R,\quad f(yi)=-R;$$

если же желаем относить их к s_2, то должны в них на основании того же параграфа считать $f(x)$ отрицательным, а $f(yi)$ положительным и полагать, что

$$f(x)=-R,\quad f(yi)=R.$$

Внося указанные значения $f(x)$ и $f(yi)$ в формулы (28) и подставляя найденные результаты в формулы (26), приходим к заключению, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{ds_1}{d\rho_1}&=2\sqrt{[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s_1]\,[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s_1]\,(-s_1)},\\\frac{ds_2}{d\rho_2}&=2\sqrt{-\,[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-s_2]\,[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-s_2]\,(-s_2)}.\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

Так как в случае уравнения (13) имеем:

$$\varepsilon_3=-\,\varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_4=-\,\varepsilon_1,$$

то формулы (29) и (26) обнаруживают справедливость теоремы для рассматриваемого частного случая.

Посмотрим, как преобразуются формулы (29), когда мы перейдем от простейшего вида $f(\zeta)$ к какому-нибудь иному виду $f_1(\zeta')$, удовлетворяющему условию $\alpha'_3 = 0$, $\alpha'_4 = 1$, с помощью подстановки (23).

Подстановка (23) может быть заменена тремя последовательными подстановками

$$\zeta = l + \zeta'', \quad \zeta'' = \frac{n^2}{\zeta'''}, \quad \zeta''' = \zeta' - m,$$

причем подкоренные величины в формуле (4) последовательно будем обозначать через $f(\zeta)$, $f_2(\zeta'')$, $f_3(\zeta''')$, $f_1(\zeta')$. По этим функциям на основании формул (9) вполне определяются функции s_1 и s_2, которые соответственно будем называть через s_1, s_2, s''_1, s''_2, s'''_1, s'''_2, s'_1, s'_2. Посмотрим, в каком соотношении будут эти функции для соответственных значений ζ, ζ'', ζ''', ζ'. При первой подстановке

$$\zeta = l + \zeta'', \quad f(\zeta) = f(l + \zeta'') = f_2(\zeta''),$$
$$x'' = x - l, \quad y'' = y, \quad R'' = R, \quad X'' = X.$$

Вследствие этого

$$s'' - s = 4\alpha_4(-2lx + l^2) + 2(\alpha_3 + 4\alpha_4 l)(x - l) - 2\alpha_3 x,$$

или

$$s'' - s = -4\alpha_4 l^2 - 2\alpha_3 l. \tag{30}$$

При второй подстановке

$$\zeta'' = \frac{n^2}{\zeta'''}, \; f_3(\zeta''') = \frac{\zeta'''^4}{n^4} f_2(\zeta''), \; y'' = -\frac{n^2}{r'''^2} y''', \; R'' = \frac{n^4}{r'''^4} R'''. \tag{31}$$

Два последних уравнения приводят нас к заключению о неизменности в формулах (9) частей

$$\frac{R''}{2y''^2} = \frac{R'''}{2y'''^2}.$$

Докажем, что остающиеся части тоже равны, т. е.

$$\frac{X'' + 4\alpha_3'' x'' y''^2 + 8\alpha_4'' x''^2 y''^2}{2y''^2} = \frac{X''' + 4\alpha_3''' x''' y'''^2 + 8\alpha_4'' x'''^2 y'''^2}{2y'''^2}.$$

Подставляем сюда $x'' = r'' \cos\varphi''$, $y'' = r'' \sin\varphi''$ и представляем на основании соотношений

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi'' + 4\cos\varphi'' \sin^2\varphi'' &= \cos\varphi'',\\ \cos 4\varphi'' + 8\cos^2\varphi'' \sin^2\varphi'' &= 1\end{aligned}$$

первую дробь таким образом:

$$\frac{\alpha'' + \alpha_1'' r'' \cos\varphi'' + \alpha_2'' r''^2 \cos 2\varphi'' + \alpha_3'' r''^3 \cos\varphi'' + \alpha_4'' r''^4}{2r''^2 \sin^2\varphi''}.$$

Подобное же выражение найдем для второй дроби, причем придется только изменить значок $('')$ на значок $(''')$. Так как на основании формул (31)

$$\begin{gathered} r'' = \frac{n^2}{r'''},\ \varphi'' = -\varphi''',\ \alpha''' = n^4\alpha_4'',\ \alpha_1''' = n^2\alpha_3'',\\ \alpha_2''' = \alpha_2'',\ \alpha_3''' = n^{-2}\alpha_1'',\ \alpha_4''' = n^{-4}\alpha'', \end{gathered}$$

то обе дроби равны. Таким образом

$$s''' - s'' = 0. \tag{32}$$

Вместо третьей подстановки мы рассмотрим обратную ей подстановку $\zeta' = \zeta''' + m$ и на основании сказанного о первой подстановке напишем

$$s' - s''' = 4\alpha_4' m^2 + 2\alpha_3' m. \tag{33}$$

Сложение первых и вторых частей равенств (30), (32), (33) дает:

$$s' - s = 4\alpha_4' m^2 - 4\alpha_4 l^2 + 2\alpha_3' m - 2\alpha_3 l.$$

Для интересующего нас вопроса надо положить $\alpha_4=\alpha_4'=1$, $\alpha_3=\alpha_3'=0$, так что

$$s' - s = 4m^2 - 4l^2. \tag{34}$$

Представим эту формулу в ином виде. Если сразу положим

$$\zeta = l + \frac{n^2}{\zeta' - m},$$

то найдем, что

$$\alpha_4' = \frac{f(l)}{n^4} = \frac{1}{n^4}(\varepsilon_1 - l)(\varepsilon_2 - l)(\varepsilon_3 - l)(\varepsilon_4 - l),$$

откуда, вследствие $\alpha_4' = 1$, имеем:

$$(\varepsilon_1 - l)(\varepsilon_2 - l)(\varepsilon_3 - l)(\varepsilon_4 - l) = n^4.$$

Также докажем, что

$$(\varepsilon_1' - m)(\varepsilon_2' - m)(\varepsilon_3' - m)(\varepsilon_4' - m) = n^4,$$

где ε_1', ε_2', ε_3', ε_4' — корни уравнения $f_1(\zeta') = 0$. Корни ε_1, ε_2 и ε_3', ε_4' связываются соотношениями:

$$\varepsilon_1 - l = \frac{n^2}{\varepsilon_1' - m},$$

$$\varepsilon_2 - l = \frac{n^2}{\varepsilon_2' - m}.$$

Складываем:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2l = \frac{n^2(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - 2m)}{(\varepsilon_1' - m)(\varepsilon_2' - m)}. \tag{35}$$

Также найдем, что

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - 2l = \frac{n^2(\varepsilon_3' + \varepsilon_4' - 2m)}{(\varepsilon_3' - m)(\varepsilon_4' - m)}.$$

Полагая здесь, на основании условий $\alpha_3 = \alpha_3' = 0$,

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad \varepsilon_3' + \varepsilon_4' = -(\varepsilon_1' + \varepsilon_2'),$$

получаем:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2l = \frac{n^2(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + 2m)}{(\varepsilon_3' - m)(\varepsilon_4' - m)}. \tag{36}$$

Перемножаем соответственно первые и вторые части уравнений (35) и (36) и приравниваем их, обращая внимание на выражение для n^4; мы получим:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 4l^2 = (\varepsilon_1' + \varepsilon_2')^2 - 4m^2. \tag{37}$$

Формула (34) на основании формулы (37) может быть представлена в таком виде:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - s = (\varepsilon_1' + \varepsilon_2')^2 - s'. \tag{38}$$

Подставляя определенную отсюда и из аналогичных формул величину s в формулы (29), приводим их к виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds_1'}{d\rho_1} &= 2\sqrt{[(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')^2 - s_1'][(\varepsilon_1' + \varepsilon_3')^2 - s_1'][(\varepsilon_1' + \varepsilon_4')^2 - s_1']}, \\ \frac{ds_2'}{d\rho_1} &= 2\sqrt{-[(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')^2 - s_2'][(\varepsilon_1' + \varepsilon_3')^2 - s_2'][(\varepsilon_1' + \varepsilon_4')^2 - s_2']}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Опуская здесь значок ($'$), который мы употребляли для того, чтобы рассмотреть переход от функции $f(\zeta)$, выраженной уравнением (13), к некоторой иной функции четвертой степени, стесненной условием $\alpha_4{=}1$, $\alpha_3 = 0$, подставляем формулы (39) в уравнения (26). Полученный при этом результат доказывает нашу теорему.

§ 7. Четвертый алгебраический интеграл дифференциальных уравнений Эйлера, найденный С. В. Ковалевской для рассматриваемого ею твердого тела, может быть получен с помощью геометрических соображений и изложен в виде некоторой теоремы. Мы формулируем эту теорему, введя термин *вектор второй степени* от данного вектора. Если данный вектор имеет длину r и образует с осью Ox угол φ, то вектор второй степени имеет длину r^2 и образует с осью Ox угол 2φ. Между скоростью конца данного вектора и скоростью конца вектора второй степени имеет место соотношение, состоящее в том, что обе скорости наклонены к своим векторам под равными углами и вторая скорость равна первой, умноженной на $2r$. Угловые скорости и моменты количеств движения мы будем графически представлять векторами, которые в единицах длины выражаются числами, представляющими рассматриваемые механические величины в соответственных единицах. Единицы длины и массы будем считать произвольными, единицу же времени выберем так, чтобы

$$\frac{a^2}{2g\overline{x}} = 1, \tag{40}$$

где $\overline{x}$ — расстояние центра тяжести G от точки опоры, а g — напряжение тяжести.

Теорема 3. *Концы двух векторов, из которых первый представляет проекцию на плоскость равных радиусов инерции единицы длины, отложенной от точки опоры вверх, а второй есть вектор второй степени от проекции угловой скорости на ту же плоскость, находятся в течение всего времени движения друг от друга на неизменном расстоянии.*

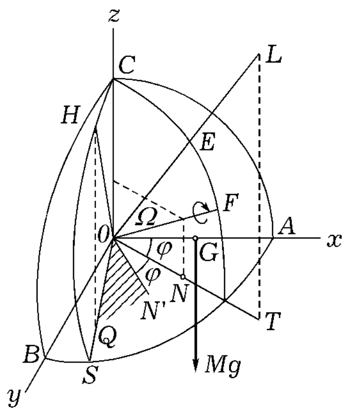

Рис. 11

Возьмем начало подвижных прямоугольных осей координат в неподвижной точке O (рис. 11) и направим ось Oz по оси, которой соответствует радиус инерции c, а ось Ox направим, как было сказано, через центр тяжести G рассматриваемого тела массы M. Проведем из центра O сферу ABC радиусом, равным единице, и отметим точки ее пересечения H, E, F с вертикальной линией, с главным моментом количеств движения L и с угловой скоростью Ω. Проекции векторов OH, Ω, L на плоскость Oxy пусть будут

$$OQ = \sin\theta,\ ON = r,\ OT = Ma^2 r,$$

причем θ есть угол HOC.

Называя угол NOA через φ, построим вектор $ON' = r^2$, образующий с осью Ox угол 2φ и являющийся вектором второй степени относительно вектора ON. Соединим прямою точки N' и Q и займемся исследованием движения хорды $N'Q$. Для этого рассмотрим скорости точек N' и Q. Точка H остается неподвижной в пространстве и потому имеет относительно тела скорость, равную и противоположную скорости соответственной точки тела. Составляющая этой скорости по направлению плоскости Oxy будет искомая скорость точки Q. Она слагается геометрически из скоростей u_1 и u_2, из которых первая происходит от компонента ω угловой скорости около оси Oz и направлена по перпендикуляру к OQ в сторону Ox, а вторая происходит от компонента r угловой скорости и направлена перпендикулярно к ON в сторону оси Oy. Эти скорости имеют величины

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \omega\sin\theta, \\ u_2 &= r\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Для определения скорости точки N' следует сначала рассмотреть скорость точки N. Если бы сила веса тела Mg не действовала, то точка L была бы неподвижна в пространстве, и точка T имела бы в плоскости Oxy от компонентов угловой скорости ω и r скорость $M\omega r(a^2 - c^2)$, направленную по перпендикуляру к OT в сторону Ox. Но, так как сила тяжести действует, то точка L получает от этой причины скорость, геометрически равную моменту пары, получаемой при перенесении силы Mg в неподвижную точку O. Скорость точки T на подвижных осях Oxy от этой причины будет иметь величину $Mg\overline{x}\cos\theta$ и будет направлена по оси Oy. Заметив, что

$$\frac{ON}{OT} = \frac{1}{Ma^2},$$

найдем для скорости точки N две составляющие

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} r\omega, \\ v_2 &= \frac{g\overline{x}}{a^2}\cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

из которых первая направлена перпендикулярно к ON в сторону Ox, а вторая — по оси Oy, т. е. под углом $\frac{\pi}{2} - \varphi$ к вектору ON.

Так как по соотношению (1) и условию (40)

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{g\overline{x}}{a^2} = \frac{1}{2},$$

то найденные скорости получают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} r\omega, \\ v_2 &= \frac{1}{2}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Что касается скорости точки N', то на основании сказанного о скорости вектора второй степени заключаем, что скорость точки N' будет слагаться из двух скоростей:

$$w_1 = \omega r^2, \quad w_2 = r\cos\theta, \tag{44}$$

из которых первая перпендикулярна к вектору ON' и направлена к оси Ox, а вторая образует с ON' угол $\frac{\pi}{2} - \varphi$, т. е. перпендикулярна к ON и направлена к Oy.

Сравнение формул (44) и (41) приводит нас к заключению, что от скоростей u_1 и w_1 хорда $N'Q$ вращается около точки O с угловой скоростью ω в сторону, обратную вращению тела около оси Oz [так как $ON' = r^2$, а $OQ = \sin\theta$], а вследствие скоростей u_2 и w_2 эта хорда движется поступательно, направляясь по перпендикулярному направлению от вектора ON со скоростью $r\cos\theta$.[15] От обеих этих причин длина хорды $N'Q$ не изменяется, что и требовалось доказать. Постоянную

[15] Это свойство указывается Г. К. Сусловым («Вращение тяжелого твердого тела около неподвижного полюса», § 3).

длину хорды $N'Q$ мы будем называть через k и будем рассматривать k, как вектор, направленный от N' к Q.

§ 8. Для определения движения точки N по плоскости Oxy нам надо вывести еще одну теорему, которая является следствием интеграла живых сил и интеграла площадей. Напишем эти интегралы, пользуясь рис. 11:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{Ma^2\omega^2}{2} + Ma^2r^2 + 2Mg\overline{x}\cos\beta = Mg\overline{x}h, \\ &\frac{Ma^2}{2}\omega\cos\theta + Ma^2r\cos\gamma = \frac{1}{4}M\sqrt{2g\overline{x}}al, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где h и l суть постоянные отвлеченные величины, β есть угол HOA, а γ есть угол HON.

Называя через ξ и η проекции вектора k на оси Ox и Oy, найдем, что

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta &= r^2\cos 2\varphi + \xi, \\ \cos\gamma &= r^2\cos\varphi + (\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Подставляем эти величины в формулы (45) и из полученных уравнений определяем ω^2 и $2\omega\cos\theta$, обращая внимание на формулу (40):

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= h - 2r^2(1 + \cos 2\varphi) - 2\xi, \\ 2\omega\cos\theta &= l - 4r^3\cos\varphi - 4r(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

К этим соотношениям присоединяем еще формулу

$$\sin^2\theta = (r^2\cos 2\varphi + \xi)^2 + (r^2\sin 2\varphi + \eta)^2,$$

которую преобразуем так:

$$\cos^2\theta = 1 - k^2 - r^4 - 2r^2(\xi\cos 2\varphi + \eta\sin 2\varphi). \tag{48}$$

Предполагаем теперь, что скорость движения точки N по плоскости Oxy выражается вектором V, и определяем проекции этого вектора на оси Ox и Oy на основании формул (43):

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{1}{2}\omega r \sin\varphi,\\ V_y &= \frac{1}{2}(-\omega r\cos\varphi + \cos\theta); \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

из этих формул следует, что

$$V^2 = \frac{1}{4}(\omega^2 r^2 - 2\omega r\cos\theta\cos\varphi + \cos^2\theta).$$

Исключая отсюда ω^2, $2\omega\cos\theta$ и $\cos^2\theta$ с помощью формул (47) и (48), находим:

$$V^2 = \frac{1}{4}(1 - k^2 - lr\cos\varphi + hr^2 - r^4). \tag{50}$$

Таким образом *величина скорости точки N вполне определяется по координатам* $(r,\ \varphi)$ *этой точки.*

Чтобы удобнее определить направление скорости V, будем рассматривать вектор $V' = V^2$, являющийся вектором второй степени от скорости V, и напишем на основании формул (49) его проекции по осям:

$$\begin{aligned} V'_x &= V_x^2 - V_y^2 = \frac{1}{4}[-\omega^2 r^2\cos 2\varphi + 2\omega r\cos\theta\cos\varphi - \cos^2\theta],\\ V'_y &= 2V_xV_y = \frac{1}{4}[-\omega^2 r^2\sin 2\varphi + 2\omega r\cos\theta\sin\varphi]. \end{aligned}$$

Исключая отсюда ω^2, $2\omega\cos\theta$ и $\cos^2\theta$ с помощью формул (47) и (48), получаем:

$$\left.\begin{aligned} V'_x &= \frac{1}{4}(-1 + k^2 + lr\cos\varphi - hr^2\cos 2\varphi + r^4\cos 4\varphi) - \xi r^2\sin^2\varphi,\\ V'_y &= \frac{1}{4}(lr\sin\varphi - hr^2\sin 2\varphi + r^4\sin 4\varphi) - \eta r^2\sin^2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Вообразим на плоскости Oxy систему криволинейных координат (s_1, s_2) при условии

$$\alpha = -1 + k^2, \quad \alpha_1 = l,$$
$$\alpha_2 = -h, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1,$$

и напишем проекции по осям Ox и Oy вектора R, соответствующего точке N. Они будут:

$$\left.\begin{aligned} X &= -1 + k^2 + lr\cos\varphi - hr^2\cos 2\varphi + r^4\cos 4\varphi, \\ Y &= lr\sin\varphi - hr^2\sin 2\varphi + r^4\sin 4\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Это позволяет формулы (51) представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}X &= V_x' + \xi y^2, \\ \frac{1}{4}Y &= V_y' + \eta y^2, \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

где y есть ордината точки N. Сказанное приводит нас к теореме 4:

Теорема 4. *Вектор* $\dfrac{R}{4}$ *есть геометрическая сумма вектора второй степени от скорости точки* N *и вектора* ky^2, *направленного по вектору* k.

§ 9. Проведем через точку N координатные линии $s_2 = \mathrm{const}$ и $s_1 = \mathrm{const}$, которые на рис. 12 обозначены через s_2 и s_1, и построим согласно теореме 4 параллелограмм $OV'MP$, в котором сторона OV' есть вектор второй степени от скорости V точки N, диагональ OM направлена по вектору R и равна $\dfrac{R}{4}$, а сторона OP направлена по вектору k и равна ky^2.

Разделим углы $V'Ox$, MOx и POx пополам прямыми Ov', Om и Op и заметим, что прямая Ov' будет параллельна скорости V точки N, прямая же Om по теореме 1 будет параллельна касательной к кривой $s_2 = \mathrm{const}$ в точке N. Если назовем через 2ϑ и 2χ, углы MOV' и MOP, то углы mOv' и mOp будут ϑ и χ. Эти углы могут быть определены по обыкновенным формулам тригонометрии из треуголь-

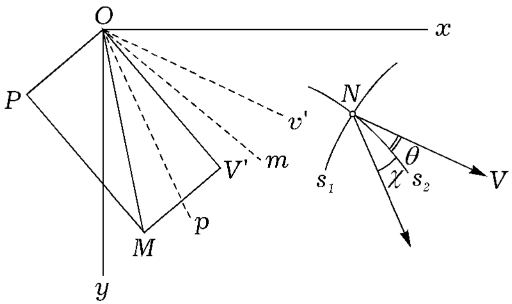

Рис. 12

ника $OV'M$. Мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\vartheta &= \sqrt{\frac{\left(\frac{R}{4} - V^2 + y^2k\right)\left(-\frac{R}{4} + V^2 - y^2k\right)}{\left(\frac{R}{4} + V^2 + y^2k\right)\left(\frac{R}{4} + V^2 + y^2k\right)}}, \\ \operatorname{tg}\chi &= \sqrt{\frac{\left(\frac{R}{4} + V^2 - y^2k\right)\left(-\frac{R}{4} + V^2 + y^2k\right)}{\left(\frac{R}{4} - V^2 + y^2k\right)\left(\frac{R}{4} + V^2 + y^2k\right)}}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Вторые части этих формул легко выразить по s_1 и s_2. Для этого сложим величину X, данную формулами (52), с $4V^2$ (формула (50)). Получим:

$$X + 4V^2 = h(1 - \cos 2\varphi)r^2 - (1 - \cos 4\varphi)r^4.$$

Вводим сюда декартовы координаты точки N и определяем V^2:

$$V^2 = \frac{1}{4}(-X + 2hy^2 - 8x^2y^2). \tag{55}$$

Вносим эту величину в формулы (54) и обращаем внимание на уравнения (9), которые для нашего случая имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{-R+X}{2y^2}+4x^2, \\ s_2 &= \frac{R+X}{2y^2}+4x^2. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\vartheta &= \sqrt{-\frac{(s_2-k_1)(s_2-k_2)}{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}}, \\ \operatorname{tg}\chi &= \sqrt{-\frac{(s_1-k_1)(s_2-k_2)}{(s_2-k_1)(s_1-k_2)}}, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

где

$$k_1 = h - 2k, \quad k_2 = h + 2k. \tag{58}$$

Первая из формул (57) дает нам ясное геометрическое представление о виде траектории точки N. *Эта траектория пересекает семейство координатных линий* $s_2 = \mathrm{const}$ *под углом* ϑ, *зависящим указанным образом от координатных параметров* s_1, s_2. Вторая формула (57) позволяет по направлению касательной, проведенной в точке N к координатной линии $s_2 = \mathrm{const}$, найти направление прямой Op, а следовательно, и вектора k.

Вектор $OM = \dfrac{R}{4}$ при данной точке N определяется по величине и по направлению, что же касается векторов $OV' = V^2$ и $OP = ky^2$, то они определяются при данной точке N по величине (формула (50)). По этим данным мы можем построить или параллелограмм $OV'MP$, представленный на рис. 12, или другой параллелограмм, который получается через поворот нарисованного [параллелограмма, изображенного на рис. 12], на 180° около диагонали OM. Это показывает, что в каждой точке N возможны два направления скорости V, которые наклонены к касательной координатной кривой $s_2 = \mathrm{const}$ под равными углами. Задача о построении семейства траекторий точки N при заданных значениях постоянных h, l, k есть задача второй степени, и упомянутое семейство будет иметь огибающие кривые.

Данному направлению скорости V соответствует определенное направление вектора k, а следовательно (теорема 3), и определенное положение точки Q на рис. 11. Вследствие этого при рассматривании движения тела, зная место точки Q, мы не будем иметь никакого сомнения, по которому из двух указанных направлений движется точка N.

Первое уравнение (57) позволяет нам составить дифференциальное уравнение траектории точки N в принятых криволинейных координатах. Мы имеем:

$$\frac{ds_2}{\Delta s_2} : \frac{ds_1}{\Delta s_1} = \operatorname{tg}\vartheta.$$

Подставляя сюда соответственные величины из формул (25) и (57), видим, что

$$\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} - \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} = 0, \tag{59}$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= (e_1 - s_1)(e_2 - s_1)(e_3 - s_1)(k_1 - s_1)(k_2 - s_1),\\ S_2 &= (e_1 - s_2)(e_2 - s_2)(e_3 - s_2)(k_1 - s_2)(k_2 - s_2).\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Что касается связи между положением точки N на плоскости Oxy и временем, то она найдется при рассмотрении проекций скорости V на касательные кривых $s_1 = \text{const}$ и $s_2 = \text{const}$. Мы имеем

$$\frac{1}{\Delta s_1}\frac{ds_1}{dt} = V\cos\vartheta, \qquad \frac{1}{\Delta s_2}\frac{ds_2}{dt} = V\sin\vartheta.$$

Преобразуем эти формулы на основании уравнений (25) и на основании формул:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{y^2}{2V}\sqrt{\frac{(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)}{R}},\\ \sin\vartheta &= \frac{y^2}{2V}\sqrt{\frac{-(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)}{R}},\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

которые получаются рядом с формулами (57) из треугольника $OV'M$ (рис. 12). Полученные при этом результаты можно написать так:

$$dt = \frac{R}{y^2}\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}, \quad dt = \frac{R}{y^2}\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}.$$

Так как формулы (56) дают нам

$$s_2 - s_2 = \frac{R}{y^2}, \tag{62}$$

то через умножение двух вышенаписанных выражений dt соответственно на s_1, s_2 и вычитание их, находим:

$$dt = \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{S_2}} - \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{S_1}}. \tag{63}$$

Формулы (59) и (63) позволяют выразить s_1 и s_2; гиперэллиптическими функциями времени и являются фундаментальными уравнениями С. В. Ковалевской.

§ 10. Положение точки Q по данному положению точки N находится с помощью теоремы 3. Рассматривая рис. 11, приходим к следующему заключению. *Для построения траектории точки Q по данной траектории точки N следует все векторы ON заменить векторами второй степени ON' и через концы их N' провести векторы $N'Q = k$. Местом концов этих последних векторов будет траектория точки Q.* Эта траектория представляет проекцию на плоскость Oxy пути, который описывает в теле точка H. Если соединим все точки этого сферического пути с неподвижной точкой O, то получим конус, который я называю *конусом вертикальной линии.*

Для полного знания положения тела в пространстве мы определим еще угол ψ, образованный плоскостью HOC с некоторой неподвижной плоскостью, проходящей через вертикальную линию. Производная $\frac{d\psi}{dt}$ найдется из рассмотрения на рис. 11 составляющей скорости точки C по направлению перпендикуляра к плоскости HOC. Эта составляющая будет зависеть только от проекции угловой скорости r на OQ и будет иметь величину $r\cos(\varphi+\nu)$, где ν есть угол QON'. Разделив найденную скорость на $\sin\theta$, получим искомую производную:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r\cos(\varphi+\nu)}{\sin\vartheta}. \tag{64}$$

На основании сказанного в этом и предыдущем параграфах интерпретируем рассматриваемое движение теоремой 5:

Теорема 5. *Движение твердого тела в случае С. В. Ковалевской совершается так, что соединенный с телом конус вертикальной линии скользит через вертикаль OH по закону, характеризуемому движением точки N, а вертикальная плоскость, проходящая через точку C, вращается около вертикали OH с угловой скоростью, данной формулой (64).*

§ 11. Рассмотрим некоторые частные случаи исследуемого движения. Простейшим является случай $k=0$, указанный Н. Б. Делоне. Н. Б. Делоне в вышеупомянутом сочинении дает для этого случая геометрическую интерпретацию, аналогичную той, которая предложена Дарбу для случая Лагранжа. По этой интерпретации тело, двигаясь вместе с подвижным годографом угловой скорости, катится этою кривою без скольжения по некоторой неподвижной поверхности вращения.

Случай $k=0$ имеет место, когда в начальный момент времени радиус OQ направляется по ON', а угловая скорость Ω такова, что точка Q совпадает с N', т. е.

$$\sin\theta = r^2 = \Omega^2\sin^2\mu, \tag{65}$$

где μ есть угол COF (рис. 11). Если бы мы желали выразить это условие при произвольных единицах времени, то должны бы были на основании формулы (40) заменить Ω на $\Omega\dfrac{a}{\sqrt{2g\overline{x}}}$, что дало бы нам

$$\sin\theta = \frac{a^2}{2g\overline{x}}\Omega^2\sin^2\mu. \tag{65$'$}$$

Если в начальный момент времени точки N' и Q сливаются, то по теореме 3 они будут совпадать всегда, и вектор OQ будет во все время движения представлять вектор второй степени от проекции угловой скорости, так что $\sin\theta = r^2$ и $\nu = 0$. По теореме 4 вектор квадрата скорости V^2 точки N будет геометрически представляться вектором $\dfrac{R}{4}$, т. е. скорость V будет направлена по касательной к кривой $s_2 = \mathrm{const}$. Это значит, что траектория точки N будет одною из координатных линий $s_2 = \mathrm{const}$. Какое именно значение имеет постоянное, видно из первой формулы (57), которая дает $\vartheta = 0$ при

$$s_2 = k_1 = k_2 = h.$$

Заменив в координатной кривой $s_2 = h$ все векторы V векторами второй степени $V' = V^2$, мы получим траекторию точки Q, по которой построим конус вертикальной линии. Но будет гораздо проще получить уравнение этого конуса сразу, воспользовавшись теоремой 6:

Теорема 6. *В случае $k = 0$ проекция главного момента количеств движения на вертикальную плоскость, проходящую через ось неравных радиусов инерции, образует с вертикальной линией постоянный угол.*

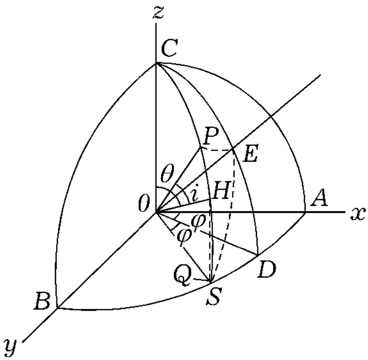

Рис. 13

Положим $\xi = 0$ в первой формуле (47) и дадим ей следующий вид:

$$\omega^2 = h - 4r^2\cos^2\varphi,$$

откуда следует, что

$$\frac{M^2a^2}{4}\omega^2 + M^2a^4r^2\cos^2\varphi = \frac{M^2a^4h}{4}.$$

Так как первая часть этого равенства представляет квадрат проекции главного момента количеств движения L на указанную в теореме плоскость, то заключаем, что эта проекция имеет постоянную величину $\dfrac{Ma^2\sqrt{h}}{2}$. Предположим, что упомянутая проекция на рис. 13 направлена по OP, и назовем угол POH, который она образует с вертикалью OH, через i. Так как проекция L на OH имеет постоянную величину $\dfrac{1}{4}M\sqrt{2g\overline{x}}al$, то

$$\cos i = \frac{\sqrt{2g\overline{x}}}{a}\frac{l}{2\sqrt{h}},$$

или, по формуле (40),

$$\cos i = \frac{l}{2\sqrt{h}}. \tag{66}$$

Чтобы составить на основании доказанной теоремы уравнение конуса вертикальной линии, обращаем внимание на прямоугольные сферические треугольники EPS и EDS. Так как у обоих треугольников гипотенуза общая, то произведения косинусов их катетов равны. Но

$$\cos(EP) = \frac{Ma^2\sqrt{h}}{2L},$$

$$\cos(ED) = \frac{Ma^2\sqrt{\sin\theta}}{L},$$

поэтому

$$\sin(\theta - i)\frac{\sqrt{h}}{2} = \sqrt{\sin\theta}\cos\varphi,$$

или

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{h}}{2}\frac{\sin(\theta - i)}{\sqrt{\sin\theta}}. \tag{67}$$

Так как здесь θ есть полярный угол точки H, а 2φ ее долгота, то найденное уравнение представляет нам сферическую кривую, по которой конус вертикальной линии пересекает сферу радиуса единицы. Входящий в формулу постоянный угол i следует считать положительным, если дуга HP откладывается от точки H вверх, и отрицательным в обратном случае.

Приписывая углу θ различные значения от 0 до π, будем находить по формуле (67) величины $\cos\varphi$, причем каждый косинус даст нам два положения точки H: одно соответствует долготе 2φ, а другое — долготе $4\pi - 2\varphi$ или, что одно и то же, $2\pi - 2\varphi$. Из этого заключаем, что наша сферическая кривая симметрична относительно меридиана AC. Посмотрим, в каких точках пересекает она этот меридиан. При $\theta = i$ для положительного значения i и при $\theta = \pi + i$ для отрицательного значения i по формуле (67) получаем $\cos\varphi = 0$, следовательно, $2\varphi = 2\pi - 2\varphi = \pi$. Из этого заключаем, что наша сферическая кривая пересекает рассматриваемый меридиан в точке H_0

(рис. 14), лежащей на продолжении дуги AC на расстоянии $H_0C = i$ (или $H_0C = \pi + i$). Остальные точки пересечения найдутся из предположений $\cos^2\varphi = 1$, $2\varphi = 0$ или $2\varphi = 2\pi$. Эти предположения приводят нас к условию

$$\frac{4}{h}\sin\theta - \sin^2(\theta - i) = 0. \tag{68}$$

Делая здесь подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{\theta - i}{2} = u,$$

находим для определения u уравнение четвертой степени:

$$F(u) = \frac{1}{h}[2u\cos i + (1 - u^2)\sin i](1 + u^2) - u^2 = 0. \tag{68$'$}$$

Отсюда заключаем, что рассматриваемая кривая пересечет мередиан еще, вообще говоря, в четырех точках H_1, H_2, H_3, H_4. Относительно этих точек может быть дано геометрическое толкование. Изложим его для положительного i.

Вообразим на рис. 14 некоторые косоугольные оси координат $Oz'x'$, в которых ось Ox' образует с нашею осью Ox угол i, а ось Oz' направлена в сторону, прямо противоположную оси Oz. Какая-нибудь точка M меридиана, определяемая углом θ, будет иметь относительно этих осей координаты

$$z' = \frac{\sin(\theta - i)}{\sin i},$$

$$x' = \frac{\sin\theta}{\sin i}.$$

Определяя отсюда $\sin\theta$ и $\sin(\theta - i)$ и подставляя в уравнение (68), найдем:

$$\frac{4}{h\sin i}x' - z'^2 = 0. \tag{69}$$

Это уравнение показывает, что искомые точки H_1, H_2, H_3, H_4 суть точки пересечения меридиана AC с параболой, ось которой параллельна Ox' и которая прикасается в точке O к прямой zz'. Так как

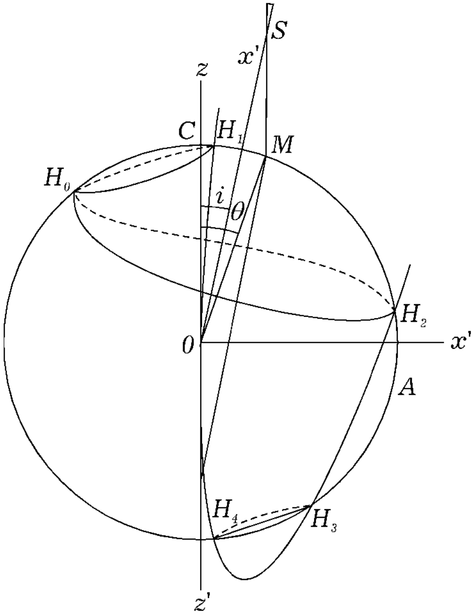

Рис. 14

$\cos^2\varphi < 1$, то по (67) для всех точек сферической кривой первая часть уравнения (68) должна быть более нуля, а следовательно, должна быть более нуля и первая часть уравнения (69). Это показывает, что концы дуг θ, соответствующие точкам нашей сферической кривой, лежат на отрезках меридиана CA, заключенных внутри начертанной параболы, т.е. рассматриваемая сферическая кривая должна состоять, вообще говоря, из двух ветвей, из которых одна заключена между параллельными кругами, проходящими через точки H_1 и H_2, а другая заключена между параллельными кругами, проходящими через точки H_3 и H_4. На рис. 14 первая ветвь имеет в H_0 кратную точку, а вторая ветвь представляет некоторую замкнутую кривую.

Если $i = 0$, то точки H_0 и H_1 сливаются с C, и кривая получает здесь точку возврата. Уравнение (67) принимает при этом упрощенный вид:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{h}}{2}\sqrt{\sin\theta}. \tag{70}$$

Вышеупомянутая парабола обращается при этом в две параллельные прямые, из которых одна есть ось Oz. Так как вторая часть уравнения (70) получает одинаковые значения при θ и при $\pi-\theta$, то рассматриваемая сферическая кривая состоит из двух ветвей, симметричных относительно плоскости экватора Oxy.

Заменяя $\sqrt{\sin\theta}$ в уравнении (70) на r, найдем полярное уравнение траектории точки N:

$$r = \frac{2}{\sqrt{h}}\cos\varphi,$$

которое представляет окружность, проходящую через точку O и имеющую центр на оси Ox. Кривая, получаемая из этой окружности через замену всех радиусов на векторы второй степени, будет улитка Паскаля, которая представит проекцию на плоскость Oxy линии пересечения сферы с конусом вертикальной линии. Если точки H_2 и H_3 или H_3 и H_4 между собой сливаются, то рассматриваемая сферическая кривая состоит из одной ветви с двумя кратными точками или из ветви с одной кратной точкой и из одной отдельной точки.

Условие равенства двух корней уравнения (68) или (6) может быть выражено тем, что искомая величина θ удовлетворяет одновременно уравнению (68) и уравнению

$$\frac{2}{h}\cos\theta - \sin(\theta-i)\cos(\theta-i) = 0. \tag{71}$$

Из этих уравнений находим, что

$$\operatorname{tg} i = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{2\operatorname{tg}^2\theta+1}, \quad 3\sin^2\theta - h\sin\theta + 1 = 0. \tag{72}$$

Определяя из последнего уравнения (72) величину $\operatorname{tg}\theta$ и подставляя в первое, найдем связь между $\operatorname{tg} i$ и h, при которой происходит слияние точек H_2 и H_3 или H_3 и H_4. Так как первая часть уравнения (68) положительна для точек, лежащих внутри вышеописанной параболы, и имеет отрицательное значение для точек, лежащих вне этой параболы, то случай слияния точек H_2 и H_3 характеризуется условием минимума первой части уравнения (68), а случай слияния точек H_3 и H_4 — условием максимума этой части. Это соответствует верхнему или нижнему знаку неравенства

$$-2\sin\theta - h\cos 2(\theta - i) \gtrless 0.$$

На основании уравнения (68) это неравенство приводится к виду

$$6\sin\theta - h \gtrless 0. \tag{73}$$

Отсюда следует, что

$$\sin\theta > \frac{h}{6}$$

при слиянии точек H_2 и H_3, и

$$\sin\theta < \frac{h}{6}$$

при слиянии точек H_3 и H_4. Прибавим к этому, что на основании первой формулы (72) при $i < \frac{\pi}{2}$ будем иметь $\theta > \frac{\pi}{2}$.

Если движение тела началось так, что вертикальная линия проходит через слившиеся точки H_3 и H_4, то она в течение всего времени движения будет сохранять в теле неизменное место и, следовательно, явится перманентной осью вращения. Это вращение будет устойчивым по отношению к весьма малому изменению постоянных i и h, так как всякое изменение обращает рассматриваемую нами отдельную точку сферической кривой в некоторый весьма малый замкнутый контур. Что касается случая, в котором вертикальная линия проходит в начальный момент через слившиеся точки H_2 и H_3, то он соответствует тоже вращению около перманентной оси (что будет выяснено ниже); только это вращение неустойчиво, так как малое изменение i и h заставляет сферическую кривую разложиться на две конечные ветви, и вертикальная линия начинает свое движение в теле по той или другой полости конуса, соответствующего этим ветвям.

Вопрос об отыскании перманентных осей тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, не представляет особых затруднений и обстоятельно исследован в сочинениях Штауде[16] и

[16] *Staude.* Crelle Journal, т. 113.

Б. К. Млодзеевского[17]. При этом исследовании обнаружилось, что местом перманентных осей вращения в теле при заданном направлении прямой, соединяющей центр тяжести с неподвижной точкой, является некоторый конус второго порядка. Для случая С. В. Ковалевской упомянутый конус распадается на две плоскости Ozx и Oxy, из которых только первая соответствует конечным угловым скоростям.

Предположим, что перманентная ось вращения совпадает с вертикалью OH, образующей с осью Oz угол θ, и установим связь между θ и угловой скоростью Ω из того условия, что скорость, сообщаемая концу главного момента количеств движения от вращения Ω, геометрически равна моменту вращающей пары от силы тяжести. Это требует, чтобы

$$Ma^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{Ma^2}{2}\Omega^2\sin\theta\cos\theta = Mg\overline{x}\cos\theta,$$

откуда получаем:

$$\sin\theta = \frac{2g\overline{x}}{\Omega^2 a^2}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (11), видим, что второе при $\mu = 0$ приводится к первому. Это показывает нам, что *все перманентные вращения в задаче С. В. Ковалевской принадлежат к случаю Делоне.* На основании формулы (40) имеем

$$\Omega^2\sin\theta = 1.$$

Если теперь приложим к случаю существования перманентной оси первую формулу (47), то найдем из нее:

$$\Omega^2(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta) = h.$$

Исключение Ω^2 из двух вышенаписанных формул приводит нас ко второй формуле (72). Таким образом перманентные оси соответствуют (рис. 14) случаю слияния точек H_2 и H_3 или H_3 и H_4, причем, решая первое уравнение (72), видим, что один из его корней будет более $\frac{h}{6}$, а другой менее, т. е. один будет соответствовать слиянию точек H_2 и H_3, а другой H_3 и H_4.

[17]Млодзеевский Б. К. Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. VII, вып. 1, 1894.

Если неравенство (73) обращается в равенство

$$h = 6\sin\theta,$$

то парабола будет иметь соприкосновение 2-го порядка к кругу, и три точки ее пересечения с кругом H_2, H_3, H_4 сливаются между собой (рис. 14). Подставляя вышенаписанную величину h во вторую формулу (72), получаем уравнение, из которого находим, что

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Линия пересечения конуса вертикальной линии со сферой будет иметь кратную точку в H_1 и точку возврата в точке, представляющей слияние точек H_2, H_3, H_4. Движение твердого тела, при котором конус вертикальной линии имеет указанный вид, было исследовано Б. К. Млодзеевским, который показал, что в рассматриваемом случае все элементы, характеризующие движение тела, выражаются алгебраическими рациональными функциями времени. Положение вертикали, проходящей через точку возврата, соответствует перманентной оси вращения. Вращение это относительно изменения постоянных i и h будет, вообще говоря, неустойчиво. Анализ Млодзеевского показывает, что при движении по рассматриваемому конусу вертикальной линии вертикаль OH приближается к положению перманентной оси, но достигает этого положения только по прошествии бесконечно большого времени. Такое же обстоятельство имеет место для случая слияния точек H_2 и H_4.

§ 12. Для полного решения задачи о движении в случае Делоне мы должны еще определить θ и ψ в функции времени. Так как вся скорость точки C происходит только от вращения r, то проекция этого компонента скорости на горизонтальную прямую, перпендикулярную к OS, будет выражать скорость точки C по направлению дуги HC (рис. 13). Вследствие этого

$$\frac{d\theta}{dt} = r\sin\varphi = \sqrt{\sin\theta}\,\sin\varphi.$$

Подставляя сюда выражение $\sin\varphi$, получаемое из формулы (67), находим:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\sin\theta - \frac{h}{4}\sin^2(\theta - i)}, \tag{74}$$

что с помощью подстановки (формула (6))

$$\operatorname{tg}\frac{\theta - i}{2} = u$$

приводит к эллиптическому интегралу

$$t + \tau = \int \frac{du}{\sqrt{F(u)}}; \tag{74'}$$

что же касается угла ψ, то он найдется по формуле (64), если положить в ней $\nu = 0$, $r = \sqrt{\sin\theta}$ и заменить в ней величину $\cos\varphi$ из формулы (67). Это дает нам:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\sqrt{h}}{2}\frac{\sin(\theta - i)}{\sin\theta}. \tag{75}$$

Исключая время из формул (74) и (75), получим дифференциальное уравнение конуса, представляющего место в пространстве оси OC:

$$d\psi = \frac{\sqrt{h}}{2}\frac{\sin(\theta - i)}{\sin\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta - \frac{h}{4}\sin^2(\theta - i)}}. \tag{76}$$

Это уравнение с помощью переменного u выражается так:

$$d\psi = \frac{\sqrt{h}}{2}\left[\cos i + \frac{1 - u^2\sin i}{2u}\right]^{-1}\frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \tag{76'}$$

Так как ось OC в случае С. В. Ковалевской есть полярная ось эллипсоида инерции, то мы будем называть рассмотренный конус *конусом полярной оси.* Все движение тела происходит так, что конус вертикальной линии, соединенный с телом, скользит через вертикальную линию, а ось неравных моментов инерции скользит по конусу полярной оси.

Ввиду того, что задача об определении в функциях времени элементов, характеризующих положение тяжелого твердого тела в пространстве в случае Н. Б. Делоне, разрешена в сочинении Г. Г. Аппельрота[18], мы не станем здесь заниматься разбором формул (74) и (75). Скажем только в заключение несколько слов о случае $i = 0$[19], в котором конус вертикальной линии имеет улиткообразный вид (уравнение (70)). Этот случай получается, если направим ось OC вертикально и сообщим телу около нее некоторую начальную угловую скорость. Формула (75) дает нам при $i = 0$ (начальное значение ψ и берем за нуль)

$$\psi = \frac{\sqrt{h}}{2} t, \tag{77}$$

откуда следует, что в случае $i = 0$ ***вертикальная плоскость, проходящая через ось неравных моментов инерции, вращается равномерно около вертикальной линии***[20].

Если вообразим в этой вращающейся плоскости колеблющийся около точки O физический маятник, для которого расстояние центра тяжести от точки привеса есть $\overline{x}$, а момент инерции Ma^2, то, обозначая через θ угол вертикальной прямой, перпендикулярной к этому маятнику, найдем, что

$$\frac{Ma^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = M\overline{x}g\sin\theta - \frac{Ma^2}{3}\frac{h}{4}\sin^2\theta + \text{const}.$$

Берем постоянное равным нулю в предположении, что в горизонтальном положении маятник не имеет скорости в плоскости OHC, и пишем согласно формуле (40):

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\sin\theta - \frac{h}{4}\sin^2\theta}. \tag{78}$$

Так как формула (78) совпадает с формулой (74) при $i = 0$, то заключаем, что в рассматриваемом случае конус полярной оси и конус, описанный вышеупомянутым маятником, будут вертикальной плоскостью OHC усекаться по взаимно перпендикулярным образующим.

---

[18]Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки, ч. II, § 5. Москва, 1893.

[19]Это соответствует в изложении Делоне случаю $3l_1 = 2l^2$.

[20]Это свойство впервые указано Г. Г. Аппельротом. (Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки, стр. 112. Москва, 1893).

Библиография

[1] *Георг Брандес.* Софья Ковалевская. — Собр. соч. 2-е изд. Киев, 1902, т. 1, 260 с.

[2] *Л. Воронцова.* Софья Ковалевская. М.: Мол. гвардия, 1957. 341 с.

[3] *В. В. Голубев* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., Гостехиздат, 1953.

[4] *В. В. Козлов.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М. МГУ. 1980.

[5] *Ф. В. Корвин–Круковский.* Софья Васильевна Корвин-Круковская, в замужестве Ковалевская. — Русская старина, 1891, т. 71, № 9, с. 623–636.

[6] *П. Я. Кочина.* Софья Васильевна Ковалевская. М. Наука. 1981.

[7] *А.–К. Леффлер.* Софья Ковалевская. Что я пережила с нею и что она сама рассказала мне о себе: Воспоминания А.–К. Леффлер, герцогини ди–Кайянелло / Пер. со швед. М. Лучицкой. СПб.: Изд. ред. журн. «Северный вестник», 1893. 315 с.

[8] *Е.Ф. Литвинова.* С.В. Ковалевская (женщина-математик), ее жизнь и научная деятельность. СПб.: Изд. Ф. Ф. Павленкова, 1894. 92 с.

[9] Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской. М. Наука. 1973.

[10] Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера. Научное наследство. т. 7. М. Наука. 1984.

[11] *Г. К. Суслов.* Теоретическая механика. Гостехиздат. 1946.

[12] *С. Я. Штрайх.* Ковалевская С. В. М.: Мол. гвардия, 1935. 237 с. (Серия ЖЗЛ).

[13] *С. Я. Штрайх.* Семья Ковалевских. М.: Сов. писатель, 1948. 391 с.

[14] *С. Я. Штрайх.* Сестры Корвин–Круковские. М.: Мир, 1933. 340 с.; 2-е изд., 1934.

[15] M. Audin. Toupies (uncours sur les systémes integrables). 1994. Prepublication de l'institut de recherche mathématique avancée. Strasbourg.

[16] Biography in Encyclopaedia Britannica.

[17] *R. Bölling (ed.).* Briefwechsel zwischen Karl Weierstrass und Sofja Kovalevskaja. Berlin. 1993.

[18] *R. Bölling.* Deine Sonia: A reading from a burned letter, The Mathematical Intelligencer 14 (3) (1992), 24–30.

[19] *P. J. Campbell, L. S. Grinstein (eds.)* Women of Mathematics (Westport, Conn., 1987), 103–113.

[20] *R. Cooke.* The mathematics of Sonya Kovalevskaya. New York. 1984.

[21] Dictionary of Scientific Biography.

[22] *D. H. Kennedy.* Little sparrow: a portrait of Sophia Kovalevsky. London. 1983.

[23] *A. H. Koblitz.* A Convergence of Lives. Sofia Kovalevskaia: Scientist, Writer, Revolutionary. Boston. 1983.

[24] *A. H. Koblitz*, A Convergence of Lives. Sofia Kovalevskaia: Scientist, Writer, Revolutionary. New Brunswick N. J. 1993. (new edition of 1983 book).

[25] *A. H. Koblitz.* Sofia Kovalevskaia and the Mathematical Community, The Mathematical Intelligencer 6 (1984), 20–29.

[26] *S. V. Kovalevskaia.* A Russian childhood: Sofya Kovalevskaya (New York, 1987).

[27] *G. Mittag–Leffler.* Weierstrass et Sonja Kowalevsky. — Acta Mathematica. T. 39. 1923. P. 133–198.

[28] *K. Rappaport.* S. Kovalevsky: A Mathematical Lesson. Amer. Math. Monthly 98. 10. 1981.

[29] *O. Stamfort.* Kovalevskaya. In H. Wussing and W. Arnold, Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin. 1983.

Новые книги

Редакция журнала «Регулярная и Хаотическая Динамика» совместно с издательским домом «Удмуртский университет» и Московским независимым университетом выпускает новые книги по физике и математике. Вашему вниманию предоставляется широкий выбор книг, от учебной литературы и трудов классиков, ставших библиографической редкостью, до современных научных исследований российских и зарубежных ученых. Издаваемые книги рассчитаны на самый широкий спектр читателей от студентов и аспирантов физико-математических специальностей до преподавателей вузов и научных работников.

Книги, уже изданные и планируемые к изданию в начале 1999 года:

Арнольд В. И.
Геометрические методы в теории дифференциальных уравнений.

Арнольд В. И.
Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Арнольд В. И., Авец А.
Эргодические проблемы классической механики.

Блашке В.
Дифференциальная геометрия.

Болсинов А. В., Фоменко А. Т.
Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. (т. 1, 2)

Борисов А. В., Мамаев И. С.
Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.

Ван-дер-Варден Б. Л.
Метод теории групп в квантовой механике.

Вейль Г.
Симметрия.

Гамов Г.
Приключения мистера Томпкинса.

Гамов Г., Ичас М.
Мистер Томпкинс внутри самого себя.

Гамов Г., Стерн М.
Занимательная математика.

Голубев В. В.
Талант без почвы.

Громов М.
Знак и геометрический смысл кривизны.

Дирак П. А. М.
Лекции по квантовой механике.

Журавлев В. А.
Термодинамика необратимых процессов в задачах и решениях.

Зоммерфельд А.
Механика.

Козлов В. В.
Методы качественного анализа в динамике твердого тела.

Козлов В. В.
Общая теория вихрей.

Курант Р., Роббинс Г.
Что такое математика.

Лейбниц И. Г.
Избранные труды по механике.

Маркеев А. П.
Теоретическая механика.

Марсден Дж., Ратью Т.
Введение в механику и симметрию.

Мах Э.
Механика. Историко-критический очерк ее развития.

Медников Л. Э., Мерзляков А. С.
Математические олимпиады.

Мозер Ю.
Избранные труды - 70.

Оден М.
Вращающиеся волчки. Курс интегрируемых систем.

Ольшанецкий М. А., Шапиро И. С.
Лекции по топологии для физиков.

Поляков А. М.
Калибровочные поля и струны.

Тьюринг А. М.
Может ли машина мыслить?

Уиттекер Э.
Аналитическая динамика.

Ферми Э.
Квантовая механика.

Ферми Э.
Термодинамика.

Харди Г.
Апология математика.

Шредингер Э.
Что такое жизнь с точки зрения физики.

Шредер М.
Фракталы, хаос, степенные законы.

Сборник статей.
Квантовые вычисления: за и против.

Наши книги Вы можете приобрести в магазинах Москвы или заказать наложенным платежом. По вопросам сотрудничества, издания и приобретения* книг обращайтесь по адресу:

Россия, 426034, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1, УдГУ,
Лаборатория динамического хаоса и нелинейности
тел. (3412) 43-04-98   факс: (3412) 25-85-22
e-mail: subscribe@uni.udm.ru
http://www.uni.udm.ru/rcd

*Заявки на приобретение книг наложенным платежом просьба присылать по e-mail'у.

Владимир Васильевич Голубев

Талант без почвы

Дизайнер С. А. Кузнецов
Компьютерная подготовка А. В. Тиняев
Компьютерная графика В. Г. Бахтиев
Корректура А. Г. Холмская
В. Г. Бахтиев

Лицензия ЛР №020411 от 16.02.97. Подписано к печати 19.02.99.
Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Усл. печ. л. 6,97. Уч. изд. л. 6,54.
Заказ №??. Тираж 1000 экз.
Издательский дом «Удмуртский университет»
426011, г. Ижевск, ул. Майская, 23.