А. Н. Ширяев

Основы стохастической финансовой математики

Том 2

Теория

Электронное издание

МЦНМО 2016

УДК 519.2
ББК 22.171
Ш64

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 14-21-00162 «Оптимальные статистические процедуры в классических и квантовых информационных системах».

Ширяев А. Н.
Основы стохастической финансовой математики : В 2 т.
Т. 2 : Теория
Электронное издание
М. : МЦНМО, 2016.
464 с.
ISBN 978-5-4439-2392-2

Подготовлено на основе книги: *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики : В 2 т. Т. 2 : Теория. М. : МЦНМО, 2016. 464 с.
ISBN 978-5-4439-0394-1; 978-5-4439-0396-5 (том 2)

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (495) 241-74-83
www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2392-2

Оглавление

Предисловие ко второму тому

Материал первого тома, состоящий из четырех глав:

Глава I. Основные понятия, структуры, инструменты, цели и задачи финансовой теории и финансовой инженерии,

Глава II. Стохастические модели. Дискретное время,

Глава III. Стохастические модели. Непрерывное время,

Глава IV. Статистический анализ финансовых данных,

— относился к «фактам» и «моделям» финансовой статистики, экономики, математики, инженерии и т. п.

В первой главе излагались разнообразные факты о финансовых рынках и их функционировании. Были изложены также основные положения ряда классических и неоклассических финансовых теорий, результаты которых помогают пониманию структуры «рационально» устроенных стохастических финансовых рынков и пониманию того, каким должно быть «рациональное» поведение инвесторов, трейдеров и т. п. на таких рынках. В целом эта глава, носящая описательный характер, призвана служить введением в финансовую математику и финансовую инженерию.

В четвертой главе приведены результаты статистического анализа распределений вероятностей временны́х рядов, описывающих эволюцию финансовых цен, индексов, обменных курсов и т. п. Выявленные свойства («отклонение от гауссовости», «вытянутость» и «тяжелые хвосты» у плотностей распределений вероятностей величин «возврата», «долгая память» и «высокочастотный» характер в поведении цен и т. п.) помогают построению адекватных моделей динамики финансовых показателей, что особенно важно, если иметь в виду задачи предсказания будущего движения этих показателей.

Вторая и третья главы содержат большой материал относительно разнообразных моделей распределений вероятностей, моделей случайных последовательностей и случайных процессов, многие из которых с успехом используются и в финансовой теории, и в финансовой инженерии.

Материал настоящего, второго тома, посвященного «Теории», также состоит из четырех глав:

Глава V. Теория арбитража в стохастических финансовых моделях. Дискретное время, Глава VI. Теория расчетов в стохастических финансовых моделях. Дискретное время,

Глава VII. Теория арбитража в стохастических финансовых моделях. Непрерывное время,

Глава VIII. Теория расчетов в стохастических финансовых моделях. Непрерывное время.

В основе всего изложения лежит концепция *арбитража*, которая помогает среди разнообразных моделей финансовых рынков выделить прежде всего «справедливо» устроенные, на которых отсутствуют арбитражные возможности.

Ключевым везультатом пятой главы является *первая фундаментальная теорема теории расчетов финансовых активов*, которая (с некоторыми оговорками) утверждает, что *безарбитражный рынок* — это такой рынок, для которого существует так называемая риск-нейтральная (или мартингальная) мера, относительно которой цены образуют *мартингал*.

С *полными* рынками, характеризуемыми тем, что на них возможно построение такого портфеля ценных бумаг, что его капитал будет (в заранее определенный момент времени в будущем) воспроизводить требуемое платежное поручение, связана *вторая фундаментальная теорема*.

В соответствии с этой теоремой на безарбитражном рынке полнота имеет место тогда и только тогда, когда существует только *одна* мартингальная мера.

В расширенном варианте второй фундаментальной теоремы описывается также и структура цен в полных безарбитражных моделях финансовых рынков.

Теории *расчетов* в стохастических финансовых моделях с дискретным временем, основанной на первой и второй фундаментальных теоремах, посвящается шестая глава. Основным здесь является понятие *хеджирования* как метода динамического управления портфелем ценных бумаг. Выведенные формулы для цены (стоимости) хеджирования и изложенные методы отыскания оптимальных хеджирующих стратегий на полных и неполных рынках применяются к расчетам опционов европейского и американского типов.

Седьмая и восьмая главы относятся к случаю непрерывного времени. Излагаются результаты *теории арбитража* в стохастических финансовых моделях, описываемых с привлечением понятий семимартингалов и случайных мер, и приводятся различные версии аналогов первой и второй фундаментальных теорем. Следует при этом подчеркнуть, что соответствующее изложение (седьмая глава) является более сложным по сравнению со случаем дискретного времени (пятая глава) и опирается на многие весьма глубокие результаты *стохастического исчисления*.

Последняя глава (восьмая) посвящена применению результатов теории арбитража для *расчетов* в финансовых моделях с непрерывным временем. При этом основное внимание уделяется расчетам разного рода *опционов*.

Изложение начинается с *формулы Башелье* для рациональной стоимости стандартного опциона (покупателя) европейского типа в линейной модели Башелье, явившейся прототипом известной *формулы Блэка и Шоулса*, для которой дается несколько выводов. Большой материал отводится расчетам опционов американского типа как в диффузионных моделях акций, так и в диффузионных моделях облигаций.

В заключение отметим, что оглавление дает достаточно полное представление об излагаемом материале. Отметим также, что нумерация страниц во втором томе (441—904) продолжает нумерацию страниц первого тома.

Москва
1995—1997

А. Ширяев
МИРАН и МГУ

Глава V

Теория арбитража в стохастических финансовых моделях. Дискретное время

1. Портфель ценных бумаг на (B, S)-рынке

§ 1a. Стратегии, удовлетворяющие балансовым условиям

1. Мы предполагаем, что интересующий нас рынок ценных бумаг функционирует в условиях «неопределенностей», для вероятностно-статистического описания которых вводится *фильтрованное вероятностное пространство*

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P}).$$

Поток σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ интерпретируется как «поток информаций» $\mathscr{F}_n$, доступных (всем участникам рынка) к моменту времени n (включительно), $n \geqslant 0$.

Рассматриваемый нами (B, S)-рынок (по определению) состоит из $d+1$ актива:

банковского счета (*«безрисковый» актив*) B

и

акций (*«рисковые» активы*) $S = (S^1, \ldots, S^d)$.

Предполагается, что динамика банковского счета описывается положительной стохастической последовательностью

$$B = (B_n)_{n\geqslant 0},$$

где при каждом $n \geqslant 1$ величины B_n являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми.

Динамика i-го рискового актива S^i описывается также положительной стохастической последовательностью

$$S^i = (S^i_n)_{n\geqslant 0},$$

где при каждом $n \geqslant 0$ величины S^i_n являются $\mathscr{F}_n$-измеримыми.

Из этих определений ясна принципиальная разница между банковским счетом и акциями.

$\mathscr{F}_{n-1}$-измеримость величины B_n означает, что значение банковского счета в момент времени n полностью *становится известным* (по получении всей информации) *уже в момент времени* $n-1$. В этом смысле значение B_n является *предсказуемым*.

Совсем иная ситуация с ценами акций: $\mathscr{F}_n$-измеримость величин S_n^i означает, что их значения *становятся известными только по получении* всей «информации $\mathscr{F}_n$» в момент времени n.

Эти отличия объясняют, почему банковский счет называют «безрисковым» активом, а акции — «рисковыми» активами.

Полагая

$$r_n = \frac{\Delta B_n}{B_{n-1}}, \quad \rho_n^i = \frac{\Delta S_n^i}{S_{n-1}^i}, \tag{1}$$

можем записать, что

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1}, \tag{2}$$

$$\Delta S_n^i = \rho_n^i S_{n-1}^i, \tag{3}$$

где (процентные ставки) r_n являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми, а ρ_n^i — $\mathscr{F}_n$-измеримыми.

Таким образом, для $n \geqslant 1$ имеем

$$B_n = B_0 \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + r_k) \tag{4}$$

и

$$S_n^i = S_0^i \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + \rho_k^i). \tag{5}$$

Согласно терминологии, принятой в § 1a гл. II, представления (4) и (5) называют представлениями типа «простых процентов» («simple return»).

2. Представим себе инвестора, который, оперируя на (B, S)-рынке, имеет возможность

a) *размещать средства на банковский счет и брать с него в долг*;

b) *покупать и продавать акции*.

При этом будем предполагать, что отсутствуют *операционные* издержки, связанные с переводом средств с одного актива на другой, и активы являются *безгранично делимыми* в том смысле, что можно купить или продать любую часть акции и положить на банковский счет или взять с него любую сумму.

Дадим ряд определений, относящихся к финансовому состоянию и действиям инвестора на таком (B, S)-рынке.

Определение 1. Стохастическая (предсказуемая) последовательность

$$\pi = (\beta, \gamma),$$

где $\beta = (\beta_n(\omega))_{n \geqslant 0}$, $\gamma = (\gamma_n^1(\omega), \ldots, \gamma_n^d(\omega))_{n \geqslant 0}$, и величины $\beta_n(\omega)$ и $\gamma_n^i(\omega)$ являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми ($\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$) при всех $n \geqslant 0$ и $i = 1, \ldots, d$, называется *портфелем* ценных бумаг инвестора на (B, S)-рынке.

Отметим здесь несколько важных моментов.

Величины $\beta_n(\omega)$ и $\gamma_n^i(\omega)$ могут принимать не только положительные и нулевые значения, но и *отрицательные*, что согласуется с п. a) и b) и означает взятие в *долг* с банковского счета и возможность *продажи* («short selling») акции.

Предположение о $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримости означает, что значения $\beta_n(\omega)$ и $\gamma_n^i(\omega)$, определяющие финансовое состояние инвестора в момент времени n («какая сумма на банковском счете, сколько акций имеет инвестор»), зависят от доступной информации не в момент времени n, а в момент времени $n-1$ (состояние портфеля «на завтра» полностью определяется тем, что имеется «сегодня»).

Момент $n=0$ играет особую роль (как, впрочем, и во всей теории случайных процессов, базирующейся на понятии фильтрованного вероятностного пространства). Эта «особая» роль сказывается в том, что предсказуемость в момент $n=0$ (если следовать формальной записи, это должна была бы быть «$\mathscr{F}_{-1}$-измеримость») считается совпадающей с $\mathscr{F}_0$-измеримостью. (Сделанное в вышеприведенном определении соглашение «$\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$» удобно с точки зрения единообразия изложения для всех моментов времени $n\geqslant 0$.)

Желая подчеркнуть эволюцию портфеля ценных бумаг во времени, вместо термина «портфель» часто говорят о «стратегии» (инвестора). Этой терминологии мы также будем придерживаться.

Всюду выше мы предполагали, что $n\geqslant 0$. Разумеется, все определения сохраняются, если время ограничивается некоторым «временны́м горизонтом N». В этом случае вместо предположения $n\geqslant 0$ надо считать, что $0\leqslant n\leqslant N$.

Определение 2. *Капиталом портфеля ценных бумаг* π называется стохастическая последовательность

$$X^\pi=(X_n^\pi)_{n\geqslant 0},$$

где

$$X_n^\pi=\beta_n B_n+\sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i. \tag{6}$$

Чтобы упростить дальнейшее изложение, мы будем часто придерживаться «бескоординатной» записи, обозначая для *векторов* $\gamma_n=(\gamma_n^1,\ldots,\gamma_n^d)$ и $S_n=(S_n^1,\ldots,S_n^d)$ скалярное произведение

$$(\gamma_n, S_n)\equiv\sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i$$

через $\gamma_n S_n$. (Если $d=1$, то естественно вместо γ_n^1 и S_n^1 писать просто γ_n и S_n.)

Итак, пусть

$$X_n^\pi=\beta_n B_n+\gamma_n S_n. \tag{7}$$

Воспользуемся тем, что для любых двух последовательностей $a=(a_n)_{n\geqslant 0}$ и $b=(b_n)_{n\geqslant 0}$ выполняется равенство

$$\Delta(a_n b_n)=a_n\Delta b_n+b_{n-1}\Delta a_n. \tag{8}$$

Применяя эту формулу («дискретного дифференцирования») к правой части равенства (7), находим, что

$$\Delta X_n^\pi = [\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n] + [B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n]. \tag{9}$$

Эта формула показывает, что изменение капитала ($\Delta X_n^\pi \equiv X_n^\pi - X_{n-1}^\pi$) складывается, вообще говоря, из двух величин — изменений на банковском счете и в ценах акций (т. е. $\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$) и изменений в составе самого портфеля (т. е. $B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n$). Но естественно, конечно, считать, что *реальное* изменение капитала происходит лишь за счет *реальных* изменений величин ΔB_n и ΔS_n, а не за счет изменений $\Delta\beta_n$ и $\Delta\gamma_n$. (Имея в виду эту вторую возможность, образно можно сказать, что от простого «перекладывания денег из одного кармана в другой» реального увеличения капитала не получить.)

Таким образом, мы приходим к заключению, что реальный «доход», реальная «прибыль» от обладания портфелем ценных бумаг π описывается последовательностью $G^\pi = (G_n^\pi)_{n\geqslant 0}$, выходящей из нуля, $G_0^\pi = 0$, и

$$G_n^\pi = \sum_{k=1}^n (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k). \tag{10}$$

Тем самым, «реальный» капитал в момент времени n есть

$$X_n^\pi = X_0^\pi + G_n^\pi, \tag{11}$$

что делает естественным следующее

Определение 3. Портфель ценных бумаг π называется *самофинансируемым*, если соответствующий капитал $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geqslant 0}$ может быть представлен в виде

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^n (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k), \quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

Из приведенной выше формулы ясно, что самофинансирование здесь равносильно следующему требованию «допустимости» портфеля π:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{13}$$

Наглядный смысл этого условия вполне понятен: изменение капитала ($B_{n-1}\Delta\beta_n$) за счет изменения *состава банковского счета* может осуществляться лишь за счет изменения ($S_{n-1}\Delta\gamma_n$) в *составе «пакета» акций*, и наоборот.

Класс самофинансируемых стратегий π в дальнейшем будем обозначать *SF* (от «self-financing» — самофинансирование).

Отметим также, что из проведенного выше анализа следует, что

$$(6) + (13) \iff (6) + (12).$$

3. Вполне понятно, что при оперировании с портфелем ценных бумаг π желательно было бы редуцировать число входящих в этот портфель активов или упростить, по крайней мере, их структуру. Один из мыслимых (и часто применяемых) подходов состоит в том, что «если a priori $B_n > 0$, $n \geqslant 1$, то можно сразу полагать $B_n \equiv 1$». Вытекает это из следующего замечания.

Наряду с (B,S)-рынком рассмотрим новый рынок $(\widetilde{B},\widetilde{S})$:

$$\widetilde{B} = (\widetilde{B}_n)_{n\geqslant 0}, \quad \widetilde{B}_n \equiv 1,$$

и

$$\widetilde{S} = (\widetilde{S}_n)_{n\geqslant 0}, \quad \widetilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n}.$$

Соответствующий портфелю $\pi = (\beta,\gamma)$ капитал $\widetilde{X}^\pi = (\widetilde{X}^\pi_n)_{n\geqslant 0}$, очевидно, таков, что

$$\widetilde{X}^\pi = \beta_n \widetilde{B}_n + \gamma_n \widetilde{S}_n = \beta_n + \gamma_n \widetilde{S}_n = \frac{1}{B_n}(\beta_n B_n + \gamma_n S_n) = \frac{X^\pi_n}{B_n}, \tag{14}$$

при этом самофинансируемость портфеля π на рынке (B,S) сохранится и на рынке $(\widetilde{B},\widetilde{S})$, так как (см. формулу (13))

$$\widetilde{B}_{n-1}\Delta\beta_n + \widetilde{S}_{n-1}\Delta\gamma_n = \frac{1}{B_{n-1}}(B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n) = 0. \tag{15}$$

Поскольку $\Delta\widetilde{B}_k \equiv 0$, в соответствии с соотношением (12) для $\pi \in SF$ получаем

$$\widetilde{X}^\pi_n = \widetilde{X}^\pi_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta\widetilde{S}_k, \tag{16}$$

или, в развернутой форме,

$$\widetilde{X}^\pi_n = \widetilde{X}^\pi_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{d} \gamma^i_k \Delta\widetilde{S}^i_k\right], \qquad \widetilde{S}^i_k = \frac{S^i_k}{B_k}. \tag{17}$$

Таким образом, из формул (14) и (16) мы находим, что нормированный капитал $\dfrac{X^\pi}{B} = \left(\dfrac{X^\pi_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ для $\pi \in SF$ подчиняется соотношению

$$\Delta\left(\frac{X^\pi_n}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right), \tag{18}$$

играющему, несмотря на его простоту, ключевую роль во многих последующих расчетах, опирающихся на концепцию «отсутствия арбитражных возможностей».

Из доказанного следует, что

$$(6)+(12) \;\Rightarrow\; (6)+(18).$$

Непосредственно проверяется, что здесь имеет место и обратная импликация. Тем самым, имеют место следующие соотношения, полезные и при конструировании самофинансируемых стратегий, и при проверке того, что некоторые стратегии являются самофинансируемыми:

$$(6)+(13) \iff (6)+(12) \iff (6)+(18).$$

Отметим также, что соотношение (18) в определенном смысле более логично с финансовой точки зрения, нежели соотношение

$$\Delta(X_n^\pi) = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n, \tag{19}$$

вытекающее из формулы (12). Дело в том, что при *сопоставлении* цен активов бóльшую значимость имеют не их абсолютные значения, а относительные. (Об этом уже говорилось в п. 4 § 2а гл. I.) Именно этой цели и служит рассмотрение нормированных величин $\widetilde{B} = \frac{B}{B}$ $(\equiv 1)$ и $\widetilde{S} = \left(\frac{S}{B}\right)$ вместо B и S.

То, что в качестве нормирующего (также говорят — *дисконтирующего*) актива выбран банковский счет — это некоторая условность, и, конечно, вместо B мог бы быть выбран, например, любой из активов $S^1, \ldots, S^d$ или их комбинация. Но то обстоятельство, что банковский счет является «предсказуемым» активом, вносит определенные упрощения в математический анализ. Например, из «предсказуемости» вытекает, что условное распределение $\operatorname{Law}\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\,\middle|\,\mathscr{F}_{n-1}\right)$ определяется по условному распределению $\operatorname{Law}(X_n^\pi \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$, поскольку при «условии $\mathscr{F}_{n-1}$» значения B_n становятся известными. К тому же, банковский счет в экономике играет своеобразную роль «нулевого отсчета», «стандарта», «среднего значения», по отношению к которому естественно сравнивать стоимости других ценных бумаг, «в среднем» ведущих себя так, как банковский счет.

4. Изложенный выше случай эволюции капитала X^π на (B, S)-рынке является случаем «без оттока и притока капитала», «без операционных издержек». Мыслимы, конечно, и другие схемы, в которых изменение капитала ΔX_n^π происходит не в соответствии с формулой (19), а более сложным образом, например, с учетом «дивидендов от акций», расходов «на потребление», на «операционные издержки» и т. п. Рассмотрим некоторые такие случаи.

Случай «с дивидендами». Пусть $D = (D_n)_{n\geqslant 0}$, $D_n = (D_n^1, \ldots, D_n^d)$, есть d-мерная последовательность с $\mathscr{F}_n$-измеримыми величинами D_n^i, $D_0^i = 0$, и $\delta_n^i \equiv \equiv \Delta D_n^i \geqslant 0$. Будем интерпретировать D_n^i как *суммарные дивиденды*, выплачиваемые акцией S_n^i. Тогда естественно считать, что изменение капитала $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geqslant 0}$ с учетом дивидендов определяется формулой

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n (\Delta S_n + \Delta D_n), \tag{20}$$

а сам капитал X_n^π, складывающийся из поступлений от банковского счета и акций, с учетом дивидендов будет иметь вид

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n (S_n + \Delta D_n). \tag{21}$$

Из формул (20) и (21) нетрудно вывести, что аналог условия самофинансируемости (13) принимает здесь следующую форму:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n - \delta_{n-1}\gamma_{n-1} = 0. \tag{22}$$

Более того,

$$(21) + (22) \iff (21) + (20), \tag{23}$$

и равенство (18) обобщается в следующем виде:

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n\left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{\Delta D_n}{B_n}\right]. \tag{24}$$

Случай «с потреблением и инвестированием». Будем предполагать, что $C = (C_n)_{n\geqslant 0}$ и $I = (I_n)_{n\geqslant 0}$ — неотрицательные неубывающие ($\Delta C_n \geqslant 0$, $\Delta I_n \geqslant 0$) процессы, $C_0 = 0$, $I_0 = 0$ и величины C_n и I_n $\mathscr{F}_n$-измеримые.

Пусть капитал $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geqslant 0}$ эволюционирует так, что

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n\Delta B_n + \gamma_n\Delta S_n + \Delta I_n - \Delta C_n. \tag{25}$$

Это представление объясняет, почему рассматриваемый случай назван «случаем с потреблением и инвестированием», $C = (C_n)_{n\geqslant 0}$ называют «процессом потребления», а $I = (I_n)_{n\geqslant 0}$ — «процессом инвестирования».

Понятно, что если капитал X_n^π записывать в виде $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$, то равенство (25) приводит к следующему ограничению («допустимости») на компоненты портфеля π:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = \Delta I_n - \Delta C_n. \tag{26}$$

Соотношение (18) здесь обобщается следующим образом:

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{\Delta(I_n - C_n)}{B_{n-1}}. \tag{27}$$

Объединяя оба случая («с дивидендами» и «с потреблением и инвестированием»), получаем, что для «допустимого» портфеля π (т. е. такого, что $\Delta X_n^\pi = \beta_n\Delta B_n + \gamma_n(\Delta S_n + \Delta D_n) + \Delta I_n - \Delta C_n$) выполняется равенство

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n\left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{\Delta D_n}{B_n}\right] + \frac{\Delta(I_n - C_n)}{B_{n-1}}. \tag{28}$$

Случай «с операционными издержками» (за покупку-продажу акции). Соотношение (13), рассмотренное выше, имеет явный финансовый смысл *бюджетного*, *балансового* ограничения, означая, скажем, что если $\Delta\gamma_n > 0$, то за покупку акции стоимостью S_{n-1} надо снять с банковского счета сумму $B_{n-1}\Delta\beta_n$, равную $S_{n-1}\Delta\gamma_n$. Если же $\Delta\gamma_n < 0$, т. е. акция продается, то на банковский счет поступает $B_{n-1}\Delta\beta_n = -S_{n-1}\Delta\gamma_n > 0$.

Представим теперь ситуацию, когда каждая покупка или продажа акции сопряжена с операционными издержками. При этом если покупаются акции стоимостью S_{n-1} ($\Delta\gamma_n > 0$), то в силу операционных издержек их стоимость

$S_{n-1}\Delta\gamma_n$ на самом деле приводит к тому, что с банковского счета снимается не величина $S_{n-1}\Delta\gamma_n$, а бо́льшая, скажем, $(1+\lambda)S_{n-1}\Delta\gamma_n$, где $\lambda>0$.

Если же акция продается ($\Delta\gamma_n<0$), то полученная при этом сумма за продажу $-S_{n-1}\Delta\gamma_n$ переводится на банковский счет не в этом размере, а в меньшем, скажем, $-(1-\mu)S_{n-1}\Delta\gamma_n$, где $\mu>0$.

Из всего этого становится понятным, что при наличии операционных издержек вместо балансового соотношения (13) портфель π должен удовлетворять следующему условию *допустимости*:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n+(1+\lambda)S_{n-1}\Delta\gamma_n I(\Delta\gamma_n>0)+(1-\mu)S_{n-1}\Delta\gamma_n I(\Delta\gamma_n<0)=0, \quad (29)$$

что может быть переписано в виде

$$B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\Delta\gamma_n+\lambda S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^+ +\mu S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^- =0, \quad (30)$$

где $(\Delta\gamma_n)^+=\max(0,\Delta\gamma_n)$, $(\Delta\gamma_n)^-=-\min(0,\Delta\gamma_n)$.

Если $\lambda=\mu$, то равенство (30) принимает следующую форму:

$$B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\big[\Delta\gamma_n+\lambda|\Delta\gamma_n|\big]=0. \quad (31)$$

Для получения аналога, соответствующего соотношению (18), заметим, что, с учетом равенства (30),

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)&=\frac{X_n^\pi}{B_n}-\frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}}=\\&=\frac{\beta_nB_n+\gamma_nS_n}{B_n}-\frac{\beta_{n-1}B_{n-1}+\gamma_{n-1}S_{n-1}}{B_{n-1}}=\\&=\Delta\beta_n+\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)+\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta\gamma_n=\\&=\frac{B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\Delta\gamma_n}{B_{n-1}}+\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)=\\&=-\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\big(\mu(\Delta\gamma_n)^-+\lambda(\Delta\gamma_n)^+\big)+\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right).\end{aligned}$$

Таким образом, при наличии операционных издержек, определяемых параметрами λ и μ и балансовыми соотношениями (29), эволюция нормированного капитала $\frac{X_n^\pi}{B_n}$, $X_n^\pi=\beta_nB_n+\gamma_nS_n$, описывается следующим соотношением:

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)-\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\big[\lambda(\Delta\gamma_n)^+ +\mu(\Delta\gamma_n)^-\big]. \quad (32)$$

Если $\lambda=\mu$, то

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)-\lambda\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}|\Delta\gamma_n|. \quad (33)$$

Можно дать несколько иной взгляд, эквивалентный предшествующему, на проблему с операционными издержками.

Введем обозначения: $\widehat{S}_n=\gamma_nS_n$, $\widehat{B}_n=\beta_nB_n$ — капиталы в акциях и на банковском счете в момент времени n для портфеля π.

Предположим, что

$$\begin{aligned} \Delta\widehat{S}_n &= \rho\widehat{S}_{n-1} + \Delta L_n - \Delta M_n, \\ \Delta\widehat{B}_n &= r\widehat{B}_{n-1} - (1+\lambda)\Delta L_n + (1-\mu)\Delta M_n, \end{aligned} \tag{34}$$

где L_n есть *кумулятивный* трансфер (перевод средств с банковского счета) в акции к моменту времени n, приводящий (за счет операционных издержек) к снятию с банковского счета (большей) суммы $(1+\lambda)L_n$. И, аналогично, M_n — кумулятивная сумма за продажу акций, переводимая на банковский счет в (меньшей) сумме $(1-\mu)\Delta M_n$, опять-таки вызванной операционными издержками.

Из соотношений (34) ясно, что для суммарного капитала $X_n^\pi = \widehat{B}_n + \widehat{S}_n$, стратегии π и трансферов (L, M), $L = (L_n)$, $M = (M_n)$, $L_0 = M_0 = 0$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} \Delta X_n^\pi &= r\widehat{B}_{n-1} + \rho\widehat{S}_{n-1} - (\lambda\Delta L_n + \mu\Delta M_n) = \\ &= r\beta_{n-1}B_{n-1} + \rho\gamma_{n-1}S_{n-1} - (\lambda\Delta L_n + \mu\Delta M_n) = \\ &= \beta_{n-1}\Delta B_n + \gamma_{n-1}\Delta S_n - (\lambda\Delta L_n + \mu\Delta M_n). \end{aligned}$$

Но

$$\Delta X_n^\pi = \beta_{n-1}\Delta B_n + \gamma_{n-1}\Delta S_n + B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n.$$

Тем самым, получаем, что

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n + \lambda\Delta L_n + \mu\Delta M_n = 0. \tag{35}$$

Полагая здесь

$$\Delta L_n = S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^+, \quad \Delta M_n = S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^-,$$

получаем, что равенство (35) равносильно (30).

Общий случай. Все четыре рассмотренных случая могут быть сведены к одному, в котором присутствуют и дивиденды, и потребление, и инвестирование, и операционные издержки.

Именно, используя введенные выше обозначения, будем предполагать, что капитал

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n(S_n + \Delta D_n) \tag{36}$$

эволюционирует так, что

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n\Delta B_n + \gamma_n(\Delta S_n + \Delta D_n) + \Delta I_n - \Delta C_n - S_{n-1}\big[\lambda(\Delta\gamma_n)^+ + \mu(\Delta\gamma_n)^-\big]. \tag{37}$$

Из формул (36) и (37) следует, что выполнено следующее балансовое соотношение:

$$\begin{aligned} B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n &= \\ &= -\big[\Delta C_n - \Delta I_n + \delta_{n-1}\gamma_{n-1} + \mu S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^- + \lambda S_{n-1}(\Delta\gamma_n)^+\big], \end{aligned} \tag{38}$$

определяющее условие допустимости портфеля π.

Поскольку

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\frac{B_{n-1}\Delta\beta_n+S_{n-1}\Delta\gamma_n}{B_{n-1}}+\frac{\gamma_n\delta_n}{B_n}-\frac{\gamma_{n-1}\delta_{n-1}}{B_{n-1}}+\gamma_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right),$$

с учетом соотношения (38) получаем, что для допустимого портфеля π выполняется равенство

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma_n\left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)+\frac{\Delta D_n}{B_n}\right]+\frac{\Delta(I_n-C_n)}{B_{n-1}}-\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\left[\lambda(\Delta\gamma_n)^+ +\mu(\Delta\gamma_n)^-\right]. \quad (39)$$

Если $\lambda=\mu$, то

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)=\gamma_n\left[\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)+\frac{\Delta D_n}{B_n}\right]+\frac{\Delta(I_n-C_n)}{B_{n-1}}-\frac{\lambda S_{n-1}|\Delta\gamma_n|}{B_{n-1}}. \quad (40)$$

5. Обратимся к формулам (18) и (27), предполагая, что последовательность $\frac{S}{B}=\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 1}$ является *мартингалом* (точнее, d-мерным мартингалом) относительно исходного потока $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ и вероятностной меры P.

Согласно соотношению (18) имеем

$$\frac{X_n^\pi}{B_n}=\frac{X_0^\pi}{B_0}+\sum_{k=1}^n\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \quad (41)$$

откуда ясно, что (в силу предсказуемости γ_k, $k\geqslant 1$) последовательность

$$\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}-\frac{X_0^\pi}{B_0}\right)_{n\geqslant 0} \quad (42)$$

является *мартингальным преобразованием*, а значит (см. § 1с гл. II), есть *локальный мартингал*.

Будем считать, что X_0^π и B_0 — константы. Тогда для всякого портфеля π, для которого

$$\inf_n\frac{X_n^\pi}{B_n}\geqslant C>-\infty,\quad C=\mathrm{Const}, \quad (43)$$

находим, что при всех $n\geqslant 1$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^n\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right)\geqslant C-\frac{X_0^\pi}{B_0}, \quad (44)$$

т. е. локальный мартингал

$$\left(\sum_{k=1}^n\gamma_k\Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right)\right)_{n\geqslant 1}$$

ограничен снизу, и по лемме из § 1с гл. II это на самом деле есть *мартингал*.

Таким образом, если портфель π таков, что его нормированный капитал удовлетворяет свойству (43) (для краткости будем писать $\pi\in\Pi_C$), то этот нормированный капитал $\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ является мартингалом и, в частности, для любого $n \geqslant 0$ выполняется равенство

$$\mathsf{E}\,\frac{X_n^\pi}{B_n} = \frac{X_0^\pi}{B_0}. \tag{45}$$

Это свойство можно прокомментировать следующим образом.

Пусть на (B,S)-рынке последовательность $\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ является мартингалом. (По терминологии § 2a гл. I такой рынок носит название «эффективного».) Тогда с помощью стратегий $\pi \in \Pi_C$, т. е. удовлетворяющих условию (43) с некоторой константой C, нельзя добиться того, чтобы (на «эффективном» рынке) средний нормированный капитал $\mathsf{E}\,\frac{X_n^\pi}{B_n}$ стал *больше* нормированного начального капитала $\frac{X_0^\pi}{B_0}$.

Точно так же и для стратегий $\pi \in \Pi^C$, т. е. стратегий, удовлетворяющих при некотором C условию

$$\sup_n \frac{X_n^\pi}{B_n} \leqslant C < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{46}$$

нельзя получить нарушение равенства (45).

Интуитивное объяснение может состоять в том, что для нарушения этого равенства в «локально мартингальном» случае надо, чтобы величины $\left|\frac{X_n^\pi}{B_n}\right|$ принимали «слишком большие значения». Это могло бы иметь место, например, в таких «физически нереализуемых» ситуациях, когда имеется неограниченный капитал или возможность получения неограниченного кредита. Однако стратегии классов Π_C и Π^C таких возможностей не допускают. (См. в этой связи также замечание в п. 5 § 1 гл. VII в [439].)

Для многих целей в финансовой математике интересен вопрос о том, сохраняется ли свойство (45) при замене детерминированного момента n на марковский момент $\tau = \tau(\omega)$. Этот вопрос интересен, например, для опционов американского типа (см. гл. VI), где в само понятие стратегии вводится момент остановки, характеризующий момент принятия некоторого решения, скажем, предъявления опциона к оплате.

Сразу можно отметить, что если $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)$ — стохастическая последовательность, являющаяся мартингалом, то

$$\mathsf{E}(Y_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = Y_{n-1}, \quad \mathsf{E}\,|Y_n| < \infty$$

и, значит,

$$\mathsf{E}\,Y_n = \mathsf{E}\,Y_0.$$

Для случайного же момента остановки $\tau = \tau(\omega) < \infty$, $\omega \in \Omega$, свойство

$$\mathsf{E}\,Y_\tau = \mathsf{E}\,Y_0, \tag{47}$$

вообще говоря, может уже не выполняться (ср. с § 3a гл. III, где рассматривается случай броуновского движения). Оно выполнено, если, скажем, τ

является ограниченным моментом, $\tau(\omega) \leqslant N < \infty$, $\omega \in \Omega$. По поводу *разных достаточных условий* сошлемся на § 3а данной главы и на § 2 гл. VII [439], где приведен ряд критериев выполнения свойства (47). (Образно говоря, эти критерии говорят о том, что для выполнения свойства (47) нельзя допускать «слишком больших значений τ» и/или «слишком больших значений $|Y_\tau|$».) Пример нарушения свойства (47) приведен далее в § 2b.

6. Выше, при оперировании с портфелем ценных бумаг, мы не накладывали никаких ограничений на возможные значения β_n и $\gamma_n = (\gamma_n^1, \dots, \gamma_n^d)$, считая, что $\beta_n \in \mathbb{R}$, $\gamma_n^i \in \mathbb{R}$.

Однако в реальной практике могут возникать самые *разнообразные ограничения*. Например, ограничение $\beta_n \geqslant 0$ означает, что в момент времени n не допускается взятие с банковского счета в долг. Если $\gamma_n \geqslant 0$, то недопустима «короткая продажа» (short-selling), т. е. взятие акции в долг.

Если на портфель накладывается условие

$$\frac{\gamma_n S_n}{X_n^\pi} \leqslant \alpha,$$

где α — некоторая константа, то это означает, что доля «рисковой» составляющей капитала (т. е. $\gamma_n S_n$) в суммарном капитале (X_n^π) должна быть не больше заданной величины α.

Другими примерами ограничений на портфель π могут служить, например, условия типа

$$\mathsf{P}(X_N^\pi \in A) \geqslant 1 - \varepsilon$$

(при некоторых заданных N, $\varepsilon > 0$ и множестве A) или

$$\mathsf{P}(X_N^\pi \geqslant f_N) = 1$$

для некоторых $\mathscr{F}_N$-измеримых функций $f_N = f_N(\omega)$.

Этот последний случай детально рассматривается в следующем параграфе в связи с понятием «хеджирования».

§ 1b. Понятие о «хеджировании». Верхние и нижние цены. Полные и неполные рынки

1. Будем предполагать, что финансовая активность на (B, S)-рынке ограничивается моментами $n = 0, 1, \dots, N$.

Пусть $f_N = f_N(\omega)$ — некоторая («целевая») неотрицательная $\mathscr{F}_N$-измеримая функция, имеющая смысл «платежного обязательства», «терминальной» выплаты и т. п.

Определение 1. Портфель ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$, $\beta = (\beta_n)$, $\gamma = (\gamma_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, называется *верхним* (x, f_N)-*хеджем* (*нижним* (x, f_N)-*хеджем*), если $X_0^\pi \equiv x$, $x \geqslant 0$, и $X_N^\pi \geqslant f_N$ (P-п. н.) (соответственно $X_N^\pi \leqslant f_N$ (P-п. н.)).

Говорят, что (x, f_N)-хедж π является *совершенным,* если $X_0^\pi \equiv x$, $x \geqslant 0$, и $X_N^\pi = f_N$ (P-п. н.).

Понятие *хеджа* (hedge — забор) играет в финансовой математике и финансовой практике исключительно важную роль некоторого *защитного* инструмента, позволяющего добиваться гарантированного капитала и преследующего цель *страхования* сделок на рынке ценных бумаг.

Вводимое ниже определение поможет в дальнейшем формализовать наши действия, с помощью которых можно добиться получения гарантированного капитала.

2. Пусть
$$H^*(x, f_N; \mathsf{P}) = \bigl\{\pi\colon\ X_0^\pi = x,\ X_N^\pi \geqslant f_N \ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\bigr\}$$
— класс верхних (x, f_N)-хеджей и
$$H_*(x, f_N; \mathsf{P}) = \bigl\{\pi\colon\ X_0^\pi = x,\ X_N^\pi \leqslant f_N \ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\bigr\}$$
— класс нижних (x, f_N)-хеджей.

Определение 2. Пусть f_N есть платежное обязательство.

Величина
$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \inf\bigl\{x \geqslant 0\colon\ H^*(x, f_N; \mathsf{P}) \neq \varnothing\bigr\}$$
называется *верхней ценой* (хеджирования платежного обязательства f_N).

Величина
$$\mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P}) = \sup\bigl\{x \geqslant 0\colon\ H_*(x, f_N; \mathsf{P}) \neq \varnothing\bigr\}$$
называется *нижней ценой* (хеджирования платежного обязательства f_N).

Замечание 1. Как обычно, доопределим $\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \infty$, если $H^*(x, f_N; \mathsf{P}) = \varnothing$ при всех $x \geqslant 0$. Множество $H_*(0, f_N; \mathsf{P})$ непусто (достаточно взять $\beta_n \equiv 0$, $\gamma_n \equiv 0$). Если $H_*(x, f_N; \mathsf{P}) \neq \varnothing$ при всех $x \geqslant 0$, то $\mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P}) = \infty$.

Замечание 2. В данных выше определениях не оговаривались «балансовые» или другие ограничения на портфель ценных бумаг. Одним из обычных ограничений такого типа является, например, условие *самофинансируемости* (см. формулу (13) в предыдущем параграфе). Разумеется, при конкретных рассмотрениях необходима спецификация требований на *допустимые* стратегии π.

Замечание 3. Может, конечно, оказаться, что (по крайней мере, для некоторых x) классы $H^*(x, f_N; \mathsf{P})$ или $H_*(x, f_N; \mathsf{P})$ являются пустыми. В этом случае целесообразно сравнивать качество разных портфелей, например, с точки зрения среднеквадратического отклонения
$$\mathsf{E}[X_N^\pi - f_N]^2.$$
(См. далее § 1d гл. VI.)

3. Остановимся на содержательной стороне введенных понятий «верхняя цена» и «нижняя цена».

Если вы *продаете* контракт (с функцией выплаты f_N), то, естественно, вы хотели бы его продать подороже. Однако вы должны учитывать и интересы покупателя, желающего купить *надежный* контракт по низкой цене. С учетом противоположности этих интересов вы, как продавец, должны определить для себя ту *минимально допустимую* цену продажи, при которой, с одной стороны, вы будете в состоянии выполнить условия контракта (т. е. выплатить f_N в момент N) и, с другой стороны, не будете иметь арбитражной возможности, т. е. безрискового дохода (или, как еще говорят, не будете иметь *free lunch* — «бесплатного ленча»), поскольку у покупателя нет, вообще говоря, никаких причин на это соглашаться.

Если же вы *покупаете* контракт, то вы, конечно, хотели бы его купить по малой цене, но все же такой, что она не создает для вас арбитражной возможности, т. е. получения вами безрискового дохода, поскольку и у продавца нет никаких причин на это соглашаться.

Покажем теперь, что введенные выше «верхние» и «нижние» цены $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P})$ и $\mathbb{C}_* = \mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P})$ обладают тем свойством, что интервалы $[0, \mathbb{C}_*)$ и $(\mathbb{C}^*, \infty)$ являются теми (максимальными) множествами цен, которые приводят к *арбитражным возможностям* для покупателя и для продавца соответственно.

Пусть контракт имеет стоимость $x > \mathbb{C}^*$ и нашелся покупатель, который его купил. Тогда продавец контракта может получить free lunch, поступив следующим образом.

Из полученной суммы x он изымает такое y, что $\mathbb{C}^* < y < x$, и покупает на эту сумму ценные бумаги в соответствии с портфелем $\pi^*(y)$, у которого $X_0^{\pi^*(y)} = y$ и $X_N^{\pi^*(y)} \geqslant f_N$ в момент N. Такой портфель заведомо существует в силу определения $\mathbb{C}^*$ и того, что $y > \mathbb{C}^*$. (По-другому эту операцию можно проинтерпретировать так: продавец *инвестирует* на (B, S)-рынке сумму y, покупая $\beta_0^*(y)$ облигаций и $\gamma_0^*(y)$ акций в момент $n = 0$ согласно портфелю $\pi^*(y) = (\beta_n^*(y), \gamma_n^*(y))_{0 \leqslant n \leqslant N}$, для которого, в частности, $\beta_0^*(y) B_0 + \gamma_0^*(y) S_0 = y$.)

В момент времени N получаемый от обладателя этим портфелем $\pi^*(y)$ капитал равен $X_N^{\pi^*(y)}$, и, следовательно, суммарный «доход-убыток» от этих двух операций (продажи контракта и покупки портфеля $\pi^*(y)$) равен

$$(x - f_N) + (X_N^{\pi^*(y)} - y) = (x - y) + (X_N^{\pi^*(y)} - f_N) \geqslant x - y > 0.$$

Здесь $x + X_N^{\pi^*(y)}$ — величина, которую продавец получает (в моменты $n = 0$ и N) от двух операций, а $f_N + y$ — величина, которую он должен выплатить в момент $n = N$ и затратить на приобретение портфеля $\pi^*(y)$ в момент $n = 0$.

Итак, $x - y$ образует чистый безрисковый (т. е. арбитражный) доход продавца контракта.

Обратимся теперь к арбитражной возможности для покупателя контракта.

Пусть покупатель купил контракт, обещающий ему платеж f_N по цене $x < \mathbb{C}_*$. Для получения free lunch покупатель выбирает некоторое y таким, что $x < y < \mathbb{C}_*$.

Согласно определению $\mathbb{C}_*$ найдется портфель $\pi_*(y)$, начальная стоимость которого (в момент $n=0$) есть y и который (в момент $n=N$) даст капитал $X_N^{\pi_*(y)} \leqslant f_N$. С учетом этого покупатель контракта, который уже заплатил x за получение в момент времени N обещанной (случайной) суммы f_N, поступает следующим образом.

Он инвестирует в момент $n=0$ величину $(-y)$ в соответствии с портфелем $\overline{\pi}(-y) = -\pi_*(y)$, где $\pi_*(y) = (\beta_{*n}(y), \gamma_{*n}(y))_{0 \leqslant n \leqslant N}$.

Таким образом,

$$\overline{\pi}(-y) = (-\beta_{*n}(y), -\gamma_{*n}(y))_{0 \leqslant n \leqslant N},$$

и, значит, распределение $(-y)$ по облигациям и акциям осуществляется в соответствии с соотношением

$$-y = -\beta_{*0}(y) B_0 - \gamma_{*0}(y) S_0.$$

Портфель $\overline{\pi}(-y)$ даст в момент времени N капитал

$$X_N^{\overline{\pi}(-y)} = X_N^{-\pi_*(y)} = -X_N^{\pi_*(y)},$$

и, следовательно, от произведенных двух операций (покупка контракта и инвестирование $(-y)$) суммарный «доход-убыток» равен

$$(f_N - x) + \bigl(X_N^{\overline{\pi}(-y)} - (-y)\bigr) = \bigl(f_N - X_N^{\pi_*(y)}\bigr) + (y - x) \geqslant y - x > 0,$$

что, как видим, является чистым (арбитражным) доходом покупателя контракта по цене $x < \mathbb{C}_*$.

В проведенных рассмотрениях производилось инвестирование отрицательной (!) величины $(-y)$. Каков реальный смысл этой операции?

На самом деле с подобного рода операциями «короткой продажи» (short selling) мы уже сталкивались, например, при рассмотрении опционов в п. 4 § 1c гл. I. Применительно же к настоящей ситуации с инвестированием $(-y)$ это просто означает, что на рынке ценных бумаг вы находите «спекулянта» (ср. с § 1a гл. VII), который соглашается (в момент $n=0$) заплатить вам величину y в обмен на обязательство выплатить ему в момент $n=N$ величину $X_N^{\pi_*(y)}$, которая (в силу случайного характера цен) может оказаться как больше y, так и меньше y.

Замечание. Проведенные рассуждения основывались (неявно) на допущении, что рынок является достаточно *ликвидным* в том смысле, что на нем есть целый «спектр» инвесторов, трейдеров, спекулянтов и т. п. с достаточно разнообразными интересами, взглядами и надеждами на повышение или понижение цен. Все это, между прочим, говорит о том, что в строго математических рассуждениях необходимо четко формулировать требования и ограничения на возможные операции на финансовых рынках. Вводимые далее условия *допустимости* на классы используемых стратегий (см., например, § 1a гл. VII) являются примером ограничений подобного типа, препятствующих, в частности, появлению на рынке арбитражных возможностей.

Таким образом, мы имеем два интервала цен, $[0, \mathbb{C}_*)$ и $(\mathbb{C}^*, \infty)$, которые приводят к арбитражным возможностям. Однако если назначаемая цена x принадлежит интервалу $[\mathbb{C}_*, \mathbb{C}^*]$, то здесь уже нет арбитражной возможности ни для продавца, ни для покупателя.

Эти обстоятельства оправдывают для интервала цен $[\mathbb{C}_*, \mathbb{C}^*]$ название интервала *приемлемых* или *взаимоприемлемых* цен.

Еще раз подчеркнем, что выбор *взаимоприемлемой* цены $x \in [\mathbb{C}_*, \mathbb{C}^*]$ приводит к тому, что ни покупатель, ни продавец не имеют безрискового дохода. Каждый из них в силу случайного характера движения цен может как выиграть, так и проиграть. И, тем самым, выигрыш, а тем более большой, надо рассматривать (ср. с п. 2 § 1c гл. I) как своего рода

«компенсацию за риск».

Следующий рисунок «резюмирует» сказанное относительно предпочтительных и приемлемых цен для продавца и покупателя:

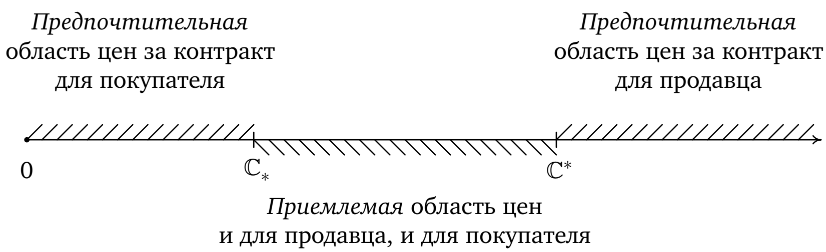


Рис. 51. Области предпочтительных и приемлемых цен для покупателя и продавца ($\mathbb{C}_* = \mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P})$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P})$)

4. Рассмотрим несколько подробнее тот случай, когда для данного x и платежного обязательства f_N существует *совершенный* (x, f_N)-хедж π, т. е. стратегия, для которой $X_0^\pi = x$ и $X_N^\pi = f_N$ (P-п. н.).

Равенство $X_N^\pi = f_N$ означает, что для хеджа π обязательство f_N *достижимо*, или, как еще говорят, *воспроизводимо*.

По многим причинам было бы желательно, чтобы всякое платежное обязательство (при некотором x) было достижимым. Если это действительно так, то классы $H^*(x, f_N; \mathsf{P})$ и $H_*(x, f_N; \mathsf{P})$ совпадают и верхние и нижние цены также *совпадут*:

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P}).$$

Иначе говоря, в этом случае *интервал* «приемлемых» цен сводится к *единственной* цене

$$C(f_N;\mathsf{P})\quad (=\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P})=\mathbb{C}_*(f_N;\mathsf{P})),$$

которая является *рациональной* (*справедливой*) ценой платежного обязательства f_N, устраивающей и покупателя, и продавца, поскольку отклонение от этой цены неминуемо приведет к тому, что один из них будет иметь, как было объяснено выше, *безрисковый* доход!

Этот частный случай ввиду его важности заслуживает специальной терминологии.

Определение 3. (B,S)-рынок ценных бумаг называется *N-совершенным* или *совершенным* (по отношению к моменту времени N), если *всякое* $\mathscr{F}_N$-измеримое (конечнозначное) платежное поручение f_N достижимо, или воспроизводимо, т. е. при некотором x найдется совершенный (x,f_N)-хедж π, т. е. портфель, для которого

$$X_N^\pi = f_N \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

В противном случае рынок называется *N-несовершенным* или *несовершенным, неполным* (по отношению к моменту времени N).

Вообще говоря, сформулированное условие совершенности является довольно сильным предположением, и его требование накладывает весьма жесткие ограничения на структуру (B,S)-рынков. В то же самое время во многих случаях нет надобности требовать существования совершенного хеджа для *всех* $\mathscr{F}_N$-измеримых функций f_N, а достаточно оперировать лишь, скажем, с *ограниченными* функциями или функциями из некоторого подкласса с теми или иными условиями интегрируемости и измеримости. (См., впрочем, теорему в § 4f.)

Определение 4. (B,S)-рынок ценных бумаг называется *N-полным* или *полным* (по отношению к моменту времени N), если всякое *ограниченное* $\mathscr{F}_N$-измеримое платежное поручение воспроизводимо.

Решение вопроса о том, когда рынок является совершенным или полным, для финансовой математики и финансовой инженерии представляет значительный интерес, поскольку устанавливает принципиальную возможность (или невозможность) построения портфеля π, для которого капитал X_N^π *воспроизводит* «платежное обязательство» f_N. (В случае невозможности точного воспроизведения f_N можно ставить, как уже отмечалось выше, например, задачу отыскания портфеля, на котором достигается $\inf \mathsf{E}[X_N^\pi - f_N]^2$, где inf берется по «допустимым» портфелям π; см. по этому поводу далее § 1d гл. VI).

В общем случае, без каких-либо дополнительных предположений о *структуре рынка* и *вероятностного пространства*, на котором этот рынок функционирует, трудно, видимо, дать какой-то удовлетворительный ответ. Однако для так называемых *безарбитражных* рынков (см. далее определения в § 2a) проблема их «полноты» допускает вполне исчерпывающее решение в терминах единственности так называемых *мартингальных* мер (см. теорему A в § 2b и теорему B в § 4a.)

В следующем параграфе мы рассматриваем одношаговую модель ($N = 1$) весьма просто устроенного (B, S)-рынка, на примере которой можно четко проследить, как естественным образом в расчетах цен $\mathbb{C}_*(f_N; \mathsf{P})$ и $\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P})$ возникают *мартингальные* (иначе говоря, *риск-нейтральные*) меры и каковы *общие принципы расчетов*, существенно основанные на использовании этих мер.

§ 1c. Верхние и нижние цены в одношаговой модели

1. Рассмотрим простую «одношаговую модель» (B, S)-рынка, состоящего из банковского счета $B = (B_n)$ и одной акции $S = (S_n)$, $n = 0, 1$. Предполагается, что константы B_0, S_0 положительны и (см. § 1a)

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0(1+r), \\ S_1 &= S_0(1+\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

где процентная ставка r есть константа ($r \geqslant 0$) и процентная ставка ρ является случайной величиной ($\rho > -1$).

Поскольку в эту модель вся «случайность» входит через значения ρ, достаточно оперировать лишь с распределением вероятностей $\mathsf{P} = \mathsf{P}(d\rho)$ на числовой прямой $\mathbb{R} = \{\rho : |\rho| < \infty\}$ с борелевской системой $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Будем предполагать, что носитель меры $\mathsf{P}(d\rho)$ сосредоточен на интервале $[a, b]$, где $-1 < a < b < \infty$. Если мера $\mathsf{P}(d\rho)$ сосредоточена в *двух* точках $\{a\}$ и $\{b\}$, то модель (1) является одношаговой *CRR*-моделью, о которой шла речь в § 1e гл. II.

2. Пусть $f = f(S_1)$ — функция платежного обязательства, и для простоты записи положим $\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \mathbb{C}^*(f; \mathsf{P})$, $\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \mathbb{C}_*(f; \mathsf{P})$. Поскольку $B_0 > 0$, без ограничения общности можно считать, что $B_0 = 1$.

В рассматриваемой одношаговой модели портфель π определяется парой чисел β и γ, значения которых должны выбираться в момент времени $n = 0$.

Согласно данным в предшествующем параграфе определениям

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) \tag{2}$$

и

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \sup_{(\beta,\gamma)\in H_*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0), \tag{3}$$

где

$$H^*(\mathsf{P}) = \bigl\{(\beta, \gamma) \colon \beta B_1 + \gamma S_1 \geqslant f(S_1),\ \mathsf{P}\text{-п. н.}\bigr\} \tag{4}$$

и

$$H_*(\mathsf{P}) = \bigl\{(\beta, \gamma) \colon \beta B_1 + \gamma S_1 \leqslant f(S_1),\ \mathsf{P}\text{-п. н.}\bigr\}. \tag{5}$$

Рассмотрим входящее в $H^*(\mathsf{P})$ ограничение

$$\beta(1+r)+\gamma S_0(1+\rho) \geqslant f\big(S_0(1+\rho)\big) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \tag{6}$$

и введем (на первый взгляд, искусственным образом) класс $\mathscr{P}(\mathsf{P}) = \{\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{P}}(d\rho)\}$ распределений на $[a, b]$, обладающих следующими двумя свойствами:

$$\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$$

(т. е. меры P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ взаимно абсолютно непрерывны: $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$) и

$$\int_a^b \rho\, \widetilde{\mathsf{P}}(d\rho) = r. \tag{7}$$

Будем предполагать, что этот класс $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ непуст. (Это, например, заведомо так в модели *CRR*, рассматриваемой далее в § 1d и детально в п. 6 § 3f.)

Отметим теперь важное обстоятельство, на котором основаны многие расчеты в финансовой математике:

если $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, *то в неравенстве* (6) *условие* «P-п. н.» *может быть заменено на условие* «$\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.».

Следовательно, если $(\beta, \gamma) \in H^*(\mathsf{P})$, то

$$\beta(1+r)+\gamma S_0(1+\rho) \geqslant f(S_0(1+\rho)) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}), \tag{8}$$

и поэтому, интегрируя обе части этого неравенства по мере $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, с учетом равенства (7) находим, что

$$\beta+\gamma S_0 \geqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \tag{9}$$

Из этого неравенства очевидным образом вытекает следующая *оценка снизу* для $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$:

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta+\gamma S_0) \geqslant \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \quad (= x^*). \tag{10}$$

Аналогичным образом получаем оценку сверху для $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$:

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant \inf_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \quad (= x_*). \tag{11}$$

Таким образом,

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant x_* \leqslant x^* \leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P}), \tag{12}$$

что доказывает (в предположении, что $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$) неравенство $\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P})$, которое из определений $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ и $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ сразу не столь уж очевидно.

Обратимся к свойству (7), записав его в виде

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{1+\rho}{1+r} = 1. \tag{13}$$

В силу соотношений (1) оно равносильно тому, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{S_1}{B_1} = \frac{S_0}{B_0}. \tag{14}$$

Полагая $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F}_1 = \sigma(\rho)$, видим, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \left(\frac{S_1}{B_1} \middle| \mathscr{F}_0 \right) = \frac{S_0}{B_0},$$

т. е. относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n=0,1}$ является *мартингалом*.

Именно это обстоятельство, имеющее место и в более общем случае, объясняет, почему меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ из класса $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ принято в финансовой математике называть *мартингальными мерами*.

Отметим, что появление таких мер при расчетах, скажем, верхних и нижних мер может на первый взгляд показаться несколько искусственным, поскольку на исходном стохастическом базисе уже есть «исходная» вероятностная мера и, казалось бы, все расчеты должны быть основаны лишь на этой мере. На самом деле так оно и есть, поскольку

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\ z(\rho) \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}, \tag{15}$$

где $z(\rho) = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$ — производная Радона—Никодима меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ относительно меры P.

Однако появление мартингальных мер носит более глубокий характер, поскольку их наличие самым непосредственным образом связано с *отсутствием арбитражных возможностей* на рассматриваемом (B, S)-рынке.

Этот вопрос будет детально обсуждаться ниже в разделе 2: «Рынок без арбитражных возможностей». Сейчас же мы займемся вопросом о том, когда в неравенствах (10) и (11) можно на самом деле гарантировать выполнение *равенств*.

3. Предположим, что функция $f_x = f(S_0(1+x))$ является выпуклой (вниз) и непрерывной на $[a, b]$. (Напомним, что всякая выпуклая на замкнутом множестве $[a, b]$ функция является непрерывной на открытом множестве (a, b), будучи, быть может, разрывной лишь в *концевых* точках интервала.)

Проведем через точки (a, f_a) и (b, f_b) прямую $y = y(x)$. Если уравнение этой прямой есть

$$y(x) = \mu S_0(1+x) + \nu, \tag{16}$$

то, очевидно,

$$\mu = \frac{f_b - f_a}{S_0(b-a)}, \quad \nu = \frac{(1+b)f_a - (1+a)f_b}{(b-a)}. \tag{17}$$

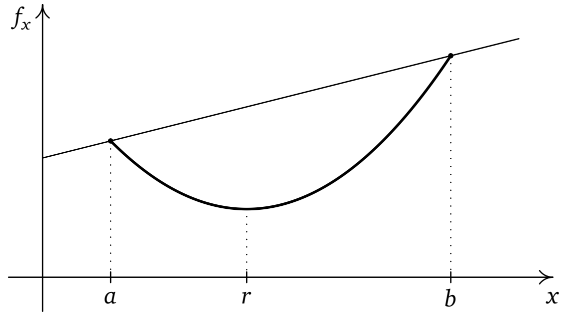


Рис. 52. Платежная функция $f_x = f(S_0(1+x))$

Введем стратегию $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$,

$$\beta^* = \frac{\nu}{1+r}, \quad \gamma^* = \mu. \tag{18}$$

Поскольку $(1+r)\beta^* + S_0(1+\rho)\gamma^* = \nu + \mu S_0(1+\rho) \geqslant f(\rho)$ для всех $\rho \in [a, b]$, получим, что $\pi^* \in H^*(\mathsf{P})$ и, значит,

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) \leqslant \beta^* + \gamma^* S_0 = \frac{\nu}{1+r} + \mu S_0. \tag{19}$$

Сделаем теперь следующее предположение относительно множества мартингальных мер $\mathscr{P}(\mathsf{P})$:

(A^*) существует подпоследовательность мер, скажем $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1}$, из $\mathscr{P}(\mathsf{P})$, слабо сходящаяся к мере P^*, сосредоточенной в *двух* точках a и b.

Если это предположение (A^*) выполнено, то из равенств

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_n} \frac{1+\rho}{1+r} = 1$$

получим, что

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{1+\rho}{1+r} = 1.$$

Отсюда находим, что вероятности $p^* = \mathsf{P}^*\{b\}$ и $q^* = \mathsf{P}^*\{a\}$ подчиняются двум условиям:

$$p^* + q^* = 1$$

и

$$bp^* + aq^* = r.$$

Следовательно,

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \quad q^* = \frac{b-r}{b-a}. \tag{20}$$

Далее, опять же из предположения слабой сходимости мер $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ к мере P^*, находим, что, с учетом неравенства (19),

$$\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_\rho}{1+r} \geqslant \lim_n \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_n}\,\frac{f_\rho}{1+r} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^*}\,\frac{f_\rho}{1+r} = p^*\frac{f_b}{1+r} + q^*\frac{f_a}{1+r} = \\ = \frac{r-a}{b-a}\,\frac{f_b}{1+r} + \frac{b-r}{b-a}\,\frac{f_a}{1+r} = \frac{\nu}{1+r} + \mu S_0 = \beta^* + \gamma^* S_0 \geqslant \\ \geqslant \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta+\gamma S_0) = \mathbb{C}^*(\mathsf{P}). \qquad (21)$$

Вместе с противоположным неравенством (10) получаем, что

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \inf_{(\beta,\gamma)\in H^*(\mathsf{P})} (\beta+\gamma S_0) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \qquad (22)$$

Анализируя сказанное, отметим, что непрерывность и выпуклость $f = f(S_0(1+\rho))$ как функции от $\rho\in[a,b]$ является довольно стандартным предположением и поэтому не вызывает серьезных возражений.

Более «тяжелым» является сделанное выше допущение (A^*) относительно слабой компактности семейства мартингальных мер с предельной мерой, сосредоточенной в двух точках a и b. На самом деле это не такое уж «страшное» предположение, если исходить из априорного допущения, что в окрестностях точек a и b есть ненулевые P-массы, т. е. для всякого $\varepsilon>0$ вероятности $\mathsf{P}[a,a+\varepsilon]$ и $\mathsf{P}[b-\varepsilon,b]$ положительны. Тогда если есть *хотя бы одна* такая мартингальная мера $\widetilde{\mathsf{P}}\sim\mathsf{P}$ (т. е. обладающая свойствами $\widetilde{\mathsf{P}}[a,a+\varepsilon]>0$, $\widetilde{\mathsf{P}}[b-\varepsilon,b]>0$, $\forall\varepsilon>0$, и $\int_a^b \rho\,\widetilde{\mathsf{P}}(d\rho)=r$), то требуемую последовательность мер $\{\widetilde{\mathsf{P}}_n\}$ можно построить с помощью «перекачивания» масс меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ в сужающиеся ($\varepsilon\downarrow 0$) окрестности $[a,a+\varepsilon]$ и $[b-\varepsilon,b]$ точек a и b с сохранением свойств эквивалентности $\widetilde{\mathsf{P}}_n\sim\widetilde{\mathsf{P}}$.

В следующем параграфе мы рассмотрим модель *CRR* (Кокса—Росса—Рубинштейна), в которой исходная мера P «сидит» в точках a и b и построение меры P^* не вызывает никаких затруднений. (В сущности, мы ее уже построили в формулах (20).)

Сформулируем полученный результат относительно $\mathbb{C}^*$ в виде следующего утверждения (см. также [93]).

Теорема 1. *Пусть функция платежного обязательства $f(S_0(1+\rho))$ является выпуклой и непрерывной по ρ на $[a,b]$ и выполнено условие слабой компактности (A^*). Тогда для верхней цены выполнено соотношение*

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \qquad (23)$$

При этом sup *достигается на мере P^* и*

$$\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) = \frac{r-a}{b-a}\,\frac{f_b}{1+r} + \frac{b-r}{b-a}\,\frac{f_a}{1+r}, \qquad (24)$$

где $f_\rho = f(S_0(1+\rho))$.

4. Обратимся теперь к нижней цене $\mathbb{C}_*$.

Согласно формулам (3) и (11) имеем

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \sup_{(\beta,\gamma)\in H_*(\mathsf{P})} (\beta + \gamma S_0) \leqslant \inf_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\rho}{1+r}, \tag{25}$$

где $f_\rho = f(S_0(1+\rho))$ и $\rho\in[a, b]$.

Если функция f_ρ выпукла вниз на $[a, b]$, то для точки $r\in(a, b)$ можно найти такое $\lambda = \lambda(r)$, что

$$f(S_0(1+\rho)) \geqslant f(S_0(1+r)) + (\rho - r)\lambda(r) \tag{26}$$

для всякого $\rho\in[a, b]$, где

$$y(r) = f(S_0(1+r)) + (\rho - r)\lambda(r)$$

есть «опорная прямая», проходящая через точку r и такая, что график функции f_ρ лежит выше этой прямой.

Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})$. Тогда из неравенства (26) следует, что

$$\inf_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \geqslant \frac{f(S_0(1+r))}{1+r}. \tag{27}$$

Определим

$$\begin{aligned}\beta_* &= \frac{f(S_0(1+r))}{1+r} - \lambda(r),\\ \gamma_* &= \frac{\lambda(r)}{S_0}.\end{aligned}$$

Тогда неравенство (26) примет следующий вид:

$$f(S_0(1+\rho)) \geqslant \beta_*(1+r) + \gamma_* S_0(1+\rho)$$

для $\rho\in[a, b]$. Из этого следует, что $\pi_* = (\beta_*, \gamma_*)\in H_*(\mathsf{P})$.

Следуя той же самой схеме, что и при доказательстве теоремы 1, предположим, что выполнено следующее условие:

(A_*) существует подпоследовательность мер, скажем, $\{\overline{\mathsf{P}}_n\}_{n\geqslant1}$ из $\mathscr{P}(\mathsf{P})$, слабо сходящаяся к мере P_*, сосредоточенной в *одной* точке r.

Тогда в предположении непрерывности функции f_ρ имеем

$$\begin{aligned}\inf_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\rho}{1+r} \leqslant \lim_n \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_n} \frac{f_\rho}{1+r} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_*} \frac{f_\rho}{1+\rho} = \frac{f(S_0(1+r))}{1+r} = \\ = \beta_* + S_0\gamma_* \leqslant \sup_{(\beta,\gamma)\in H_*(\mathsf{P})} (\beta + S_0\gamma) = \mathbb{C}_*(\mathsf{P}),\end{aligned}$$

что вместе с неравенством (26) доказывает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть функция f_ρ непрерывна, выпукла вниз на $[a, b]$ и выполнено условие слабой компактности (A_*). Тогда для нижней цены выполняется соотношение*

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \inf_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \tag{28}$$

При этом inf *достигается на мере* P_* *и*

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \frac{f_r}{1+r}. \tag{29}$$

Замечание. Пусть, например, $\mathsf{P}(d\rho) = \dfrac{d\rho}{b-a}$ — мера равномерного распределения на $[a, b]$. В этом случае условия (A^*) и (A_*) выполнены и, следовательно, верхние и нижние цены определяются формулами (24) и (29).

5. Проведенный выше «вероятностный» анализ верхних и нижних цен постулировал, что вся *неопределенность* в ценах акций подчиняется вероятностному описанию, что было воплощено в предположении, что ρ является *случайной* величиной с *распределением вероятностей* $\mathsf{P}(d\rho)$.

Но на ρ можно смотреть и просто как на некоторую «хаотическую» величину, принимающую значения в интервале $[a, b]$. В этом случае вместо классов $H^*(\mathsf{P})$ и $H_*(\mathsf{P})$ естественно ввести классы

$$\widehat{H}^* = \bigl\{(\beta, \gamma)\colon\ \beta(1+r) + \gamma S_0(1+\rho) \geqslant f(S_0(1+\rho)),\ \forall\, \rho \in [a, b]\bigr\}$$

и

$$\widehat{H}_* = \bigl\{(\beta, \gamma)\colon\ \beta(1+r) + \gamma S_0(1+\rho) \leqslant f(S_0(1+\rho)),\ \forall\, \rho \in [a, b]\bigr\},$$

в которых условие выполнения неравенств «P-п. н.» заменено на условие «при всех $\rho \in [a, b]$». Понятно, что для каждой вероятностной меры P выполнены условия

$$\widehat{H}^* \subseteq H^*(\mathsf{P}), \quad \widehat{H}_* \subseteq H_*(\mathsf{P}).$$

Заметим, что даже при отсутствии исходной вероятностной меры, ничто не препятствует тому, чтобы ввести (пусть и искусственным образом) на $[a, b]$ распределения вероятностей $\widehat{\mathsf{P}} = \widehat{\mathsf{P}}(d\rho)$ со свойством (ср. с формулой (7))

$$\int_a^b \rho\, \widehat{\mathsf{P}}(d\rho) = r.$$

Класс таких мер $\widehat{\mathscr{P}}$ заведомо непуст — к нему принадлежат рассмотренные выше мера P^*, сосредоточенная в двух точках a и b (см. (20)), и мера P_*, сосредоточенная в одной точке r.

По аналогии с формулами (2) и (3) определим

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = \inf_{(\beta,\gamma) \in \widehat{H}^*} (\beta + \gamma S_0) \quad (\geqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P}))$$

и

$$\widehat{\mathbb{C}}_* = \sup_{(\beta,\gamma) \in \widehat{H}_*} (\beta + \gamma S_0) \quad (\leqslant \mathbb{C}_*(\mathsf{P})).$$

Из приведенных выше рассмотрений (см. формулы (8), (9) и (10)) следует, что для всякой вероятностной меры P выполняются неравенства

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = \inf_{(\beta,\gamma)\in\widehat{H}^*} (\beta+\gamma S_0) \geqslant \sup_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \geqslant \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \tag{30}$$

и

$$\widehat{\mathbb{C}}_* = \sup_{(\beta,\gamma)\in\widehat{H}_*} (\beta+\gamma S_0) \leqslant \inf_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \leqslant \inf_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}. \tag{31}$$

Заметим теперь, что, поскольку класс $\widehat{\mathscr{P}}$ включает и «двухточечную» меру P^*, и «одноточечную» меру P_*, введенные выше, справедливы неравенства (ср. с (21))

$$\sup_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} = p^* \frac{f_b}{1+r} + q^* \frac{f_a}{1+r} \tag{32}$$

и

$$\inf_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} \leqslant \mathsf{E}_{\mathsf{P}_*} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r} = \frac{f_r}{1+r}. \tag{33}$$

Рассмотренная в доказательстве теоремы 1 стратегия π^*, очевидно, принадлежит классу $\widehat{H}^*$, и для нее (в предположении, что f_ρ является выпуклой вниз функцией на $[a,b]$) выполнено неравенство

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = \inf_{(\beta,\gamma)\in\widehat{H}^*} (\beta+\gamma S_0) \leqslant \beta^*+\gamma^* S_0 = p^* \frac{f_b}{1+r} + q^* \frac{f_a}{1+r},$$

что вместе с неравенствами (30) и (32) показывает (ср. с (23)), что

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = \sup_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}, \tag{34}$$

причем (ср. с (24))

$$\widehat{\mathbb{C}}^* = p^* \frac{f_b}{1+r} + q^* \frac{f_a}{1+r}, \tag{35}$$

где $f_\rho = f(S_0(1+\rho))$.

Аналогичным образом находим (ср. с (28) и (29)), что

$$\widehat{\mathbb{C}}_* = \inf_{\widehat{\mathsf{P}}\in\widehat{\mathscr{P}}} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}} \frac{f(S_0(1+\rho))}{1+r}, \tag{36}$$

причем

$$\widehat{\mathbb{C}}_* = \frac{f_r}{1+r}. \tag{37}$$

Тем самым, доказана следующая

Теорема 3. *В случае «хаотической» величины $\rho\in[a,b]$, входящей в модель* (1)*, для всякой выпуклой вниз функции $f=f(S_0(1+\rho))$, $\rho\in[a,b]$, верхняя и нижняя цены $\widehat{\mathbb{C}}^*$ и $\widehat{\mathbb{C}}_*$ определяются формулами* (34), (35) *и* (36), (37) *соответственно.*

Замечание. Сопоставление результатов теорем 1, 2 и 3 показывает, что если исходная вероятностная мера P достаточно «размыта», имея массы в окрестностях точек a, r и b, то класс мартингальных мер $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ так же «богат», как и класс $\widehat{\mathscr{P}}$, и в неравенствах $\widehat{\mathbb{C}}_* \leqslant \mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ и $\mathbb{C}^*(\mathsf{P}) \leqslant \widehat{\mathbb{C}}^*$ достигаются равенства.

§ 1d. Пример полного рынка — *CRR*-модель

1. Снова рассмотрим «одношаговую» модель (B, S)-рынка, предполагая, что

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0(1+r), \\ S_1 &= S_0(1+\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ является случайной величиной, принимающей всего лишь *два значения* a и b,

$$-1 < a < r < b. \tag{2}$$

Этот простой (B, S)-рынок носит название *одношаговой CRR-модели* в честь Кокса, Росса и Рубинштейна, рассмотревших ее в работе [82].

Мы предполагаем, что исходное распределение P случайной величины ρ таково, что

$$p = \mathsf{P}\{b\} > 0, \quad q = \mathsf{P}\{a\} > 0.$$

Тогда *единственной* (мартингальной) мерой, эквивалентной мере P и удовлетворяющей свойству (7) из предыдущего параграфа, является такая мера P^*, что

$$\mathsf{P}^*\{b\} = p^*, \quad \mathsf{P}^*\{a\} = q^*,$$

где (см. формулы (20) в § 1c)

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \quad q^* = \frac{b-r}{b-a}, \tag{3}$$

и что (см. формулы (11) и (12) в § 1c)

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant \mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{f_\rho}{1+r} \leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P}). \tag{4}$$

На самом же деле в рассматриваемом случае для *любого* платежного поручения $f = f(S_0(1+\rho))$ цены $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ и $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ совпадают, и, следовательно, их общее значение $\mathbb{C}(\mathsf{P})$ определяется формулой

$$\mathbb{C}(\mathsf{P}) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^*} \frac{f_\rho}{1+r} = p^* \frac{f_b}{1+r} + q^* \frac{f_a}{1+r}. \tag{5}$$

По существу, все необходимое для доказательства равенства $\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ уже содержится в предшествующих рассуждениях в § 1c.

Действительно, рассмотрим стратегию $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, введенную выше, с параметрами

$$\beta^* = \frac{\nu}{1+r}, \quad \gamma^* = \mu,$$

где ν и μ определены формулами (17) из § 1c.

В силу того что и для $\rho = a$, и для $\rho = b$ выполняется равенство

$$\beta^*(1+r)+\gamma^* S_0(1+\rho) = f(S_0(1+\rho)),$$

мы видим, что здесь платежное поручение является *достижимым*, и, значит, $\pi^* \in H^*(\mathsf{P}) \cap H_*(\mathsf{P})$. Поэтому

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) = \sup_{(\beta,\gamma)\in \widehat{H}_*(\mathsf{P})} (\beta+\gamma S_0) \geqslant \beta^* + \gamma^* S_0 \geqslant \inf_{(\beta,\gamma)\in \widehat{H}^*(\mathsf{P})} (\beta+\gamma S_0) = \mathbb{C}^*(\mathsf{P}).$$

Вместе с неравенствами (4) это доказывает требуемое совпадение цен $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ и $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ и формулу (5) для их общего значения $\mathbb{C}(\mathsf{P})$.

2. Еще раз отметим, что материал, изложенный в этом и предшествующем параграфах, выявляет следующие важные моменты, которые используют и в более общих случаях при применении мартингальных методов в финансовых расчетах, связанных с заданным платежным поручением:

(I) *если класс мартингальных мер непуст,*

$$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing, \tag{6}$$

то

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \leqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P})$$

(в силу неравенств (12), § 1c);

(II) *если*

$$H^*(\mathsf{P}) \cap H_*(\mathsf{P}) \neq \varnothing, \tag{7}$$

т. е. *платежное поручение достижимо, то*

$$\mathbb{C}_*(\mathsf{P}) \geqslant \mathbb{C}^*(\mathsf{P});$$

(III) *при одновременном выполнении условий* (6) *и* (7) *нижние и верхние цены* $\mathbb{C}_*(\mathsf{P})$ *и* $\mathbb{C}^*(\mathsf{P})$ *совпадают*.

В следующем разделе будет показано, что *непустота* класса мартингальных мер $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ самым непосредственным образом связана с *отсутствием арбитражных возможностей*.

Непустота же класса $H^*(\mathsf{P}) \cap H_*(\mathsf{P})$ (для любого платежного поручения f) оказывается связанной с вопросом *единственности* мартингальной меры, т. е. с вопросом о том, когда множество мер $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ состоит всего лишь из одной (мартингальной) меры, скажем, $\widetilde{\mathsf{P}}$, которая эквивалентна мере P ($\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$).

2. Рынок без арбитражных возможностей

§ 2а. Концепции «арбитраж» и «отсутствие арбитража»

1. С наглядной точки зрения «отсутствие арбитража» на рынке означает, что он является «честным», «рационально устроенным» в том смысле, что на нем нет возможности извлечения прибыли без «риска». (Сравните с концепцией «эффективного рынка», § 2а гл. I, в которой также присутствует ассоциация с его «рациональной устроенностью» и в которой, в сущности, просто постулируется, что цены на таком рынке обладают свойством мартингальности.)

Чтобы дать формальные определения, будем, как и в § 1а, считать заданным фильтрованное вероятностное пространство

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P}),$$

на котором функционирует (B, S)-рынок, состоящий из $d+1$ актива:

$$\textit{банковского счета } B = (B_n)_{n\geqslant 0}$$

с $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми величинами B_n, $B_n > 0$, и

$$d\textit{-мерного рискового актива } S = (S^1, \ldots, S^d),$$

где $S^i = (S^i_n)_{n\geqslant 0}$, S^i_n — $\mathscr{F}_n$-измеримые величины, $S^i_n > 0$.

Пусть $X^\pi = (X^\pi_n)_{n\geqslant 0}$ — капитал,

$$X^\pi_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \quad \Bigl(= \beta_n B_n + \sum_{i=1}^d \gamma^i_n S^i_n\Bigr),$$

отвечающий стратегии $\pi = (\beta, \gamma)$ с предсказуемыми последовательностями $\beta = (\beta_n)_{n\geqslant 0}$ и $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^d)$, $\gamma^i = (\gamma^i_n)_{n\geqslant 0}$.

Если π — *самофинансируемая* стратегия ($\pi \in SF$), то (см. формулу (12) в § 1а)

$$X^\pi_n = X^\pi_0 + \sum_{k=1}^n (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k), \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

и нормированный капитал $\widetilde{X}_n^\pi = \left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right), \tag{2}$$

играющим ключевую роль для всего последующего анализа.

2. Зафиксируем некоторое $N \geqslant 1$ и будем интересоваться значением капитала X_N^π той или иной стратегии $\pi \in SF$ в этот «терминальный» момент времени.

Определение 1. Говорят, что самофинансируемая стратегия π реализует *арбитражную возможность* (в момент N), если при нулевом начальном капитале,

$$X_0^\pi = 0, \tag{3}$$

ее капитал в момент N неотрицателен,

$$X_N^\pi \geqslant 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{4}$$

и с *положительной* P-вероятностью $X_N^\pi > 0$, т. е.

$$\mathsf{P}(X_N^\pi > 0) > 0, \tag{5}$$

или, что равносильно,

$$\mathsf{E}\, X_N^\pi > 0. \tag{6}$$

Обозначим SF_{arb} класс *арбитражных самофинансируемых* стратегий. Тогда, если $\pi \in SF_{\text{arb}}$ и $X_0^\pi = 0$, то

$$\mathsf{P}(X_N^\pi \geqslant 0) = 1 \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(X_N^\pi > 0) > 0.$$

Определение 2. Мы говорим, что на (B, S)-рынке *отсутствуют арбитражные возможности* или что рынок является *безарбитражным*, если $SF_{\text{arb}} = \varnothing$. Иначе говоря, если для некоторой стратегии π начальный капитал $X_0^\pi = 0$, то

$$\mathsf{P}(X_N^\pi \geqslant 0) = 1 \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(X_N^\pi = 0) = 1.$$

Наглядно данное определение означает, что для безарбитражной стратегии π диаграмма переходов из $X_0^\pi = 0$ в X_N^π, изображенная на рис. 53a (когда $X_N^\pi \geqslant 0$), должна быть на самом деле «вырожденной», т. е. той, которая изображена на рис. 53b, где пунктирные траектории соответствуют переходам $X_0^\pi = 0 \to X_N^\pi$ с *нулевой вероятностью*.

Таким образом, на безарбитражном рынке если $X_0^\pi = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = 0$, то диаграмма переходов должна иметь вид, представленный на рис. 54, означающий, что если $\mathsf{P}(X_N^\pi = 0) < 1$, то наряду с положительным «выигрышем», $\mathsf{P}(X_N^\pi > 0) > 0$, должны быть неминуемо и «проигрыши», $\mathsf{P}(X_N^\pi < 0) > 0$. Это можно образно переформулировать, сказав также, что на безарбитражном рынке каждая нетривиальная стратегия π (т. е. такая, что если $X_0^\pi = 0$, то

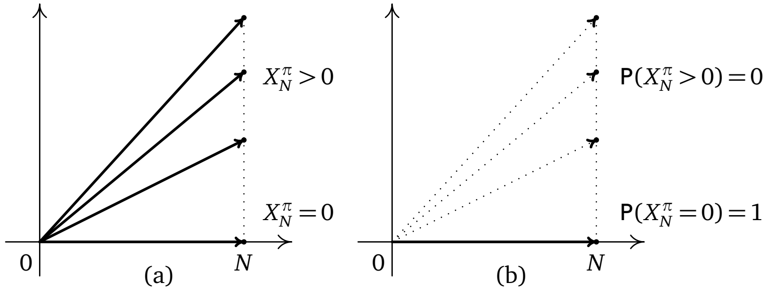


Рис. 53. К определению отсутствия арбитражных возможностей

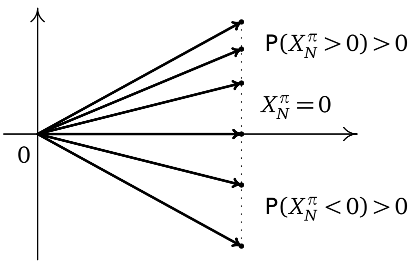


Рис. 54. Типичная картина переходов на *безарбитражном* рынке

$\mathsf{P}(X_N^\pi \neq 0) > 0)$ должна быть *рисковой*, т. е. такой, что *одновременно* $\mathsf{P}(X_N^\pi > > 0) > 0$ и $\mathsf{P}(X_N^\pi < 0) > 0$.

Помимо данного понятия *безарбитражности* в финансовой литературе и инженерии обращаются и к другим определениям (см., например, [251]). Примером может служить следующее определение (используемое в книге [251] и далее в § 2e).

Определение 3. a) (B, S)-рынок называется *безарбитражным в слабом смысле*, если для каждой такой самофинансируемой стратегии π, что $X_0^\pi = 0$ и $X_n^\pi \geqslant 0$ (P-п. н.), $n \leqslant N$, выполняется равенство $X_N^\pi = 0$ (P-п. н.).

b) (B, S)-рынок называется *безарбитражным в сильном смысле*, если для каждой такой самофинансируемой стратегии π, что $X_0^\pi = 0$ и $X_N^\pi \geqslant 0$ (P-п. н.), выполняется равенство $X_n^\pi = 0$ (P-п. н.), $n \leqslant N$.

Замечание. Отметим, что данные выше определения оперировали с событиями вида $\{X_N^\pi > 0\}$, $\{X_N^\pi \geqslant 0\}$ и $\{X_N^\pi = 0\}$, которые, очевидно, совпадают с событиями $\{\widetilde{X}_N^\pi > 0\}$, $\{\widetilde{X}_N^\pi \geqslant 0\}$, $\{\widetilde{X}_N^\pi = 0\}$ соответственно, где $\widetilde{X}_N^\pi = \dfrac{X_N^\pi}{B_N}$, если только $B_N > 0$.

Это обстоятельство объясняет, почему при рассмотрении вопросов о наличии «арбитража» и «отсутствии арбитража» на (B, S)-рынке можно сразу оперировать с $(\widetilde{B}, \widetilde{S})$-рынком, где $\widetilde{B}_n \equiv 1$ и $\widetilde{S}_n = \dfrac{S_n}{B_n}$. Иначе говоря, если предполагается, что $B_n > 0$, то без ограничения общности можно полагать $B_n \equiv 1$.

§ 2b. Мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей. I. Формулировка первой фундаментальной теоремы

1. В рассматриваемом нами случае дискретного времени $n = 0, 1, \ldots, N$ имеет место следующая замечательная теорема, которую ввиду ее важности называют *первой фундаментальной теоремой теории расчетов финансовых активов* (The first Fundamental Asset Pricing Theorem; [214], [215] и [92]).

Теорема А. *Пусть определенный на фильтрованном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$

$$(B, S)\text{-рынок}$$

состоит из банковского счета $B = (B_n)$, $B_n > 0$, *и конечного числа* d *активов* $S = (S^1, \ldots, S^d)$, $S^i = (S^i_n)$.

Предполагается, что рынок функционирует в моменты времени $n = 0, 1, \ldots, N$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ *и* $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$.

Для того чтобы (B, S)*-рынок был безарбитражным, необходимо и достаточно, чтобы нашлась хотя бы одна мера* $\widetilde{\mathsf{P}}$ *(называемая мартингальной или риск-нейтральной) эквивалентная мере* P, *относительно которой* d*-мерная нормированная последовательность*

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right),$$

$S_n = (S^1_n, \ldots, S^d_n)$, *является* $\widetilde{\mathsf{P}}$*-мартингалом: для всех* $i = 1, \ldots, d$ *и* $n = 0, 1, \ldots, N$ *выполняется неравенство*

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left|\frac{S^i_n}{B_n}\right| < \infty \tag{1}$$

и для $n = 1, \ldots, N$ *справедливо равенство*

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{S^i_n}{B_n}\,\middle|\,\mathscr{F}_{n-1}\right) = \frac{S^i_{n-1}}{B_{n-1}} \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}). \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы будет проводиться в несколько этапов: достаточность — в § 2c и необходимость — в § 2d. В § 2e будет приведено другое доказательство несколько более расширенного варианта этой теоремы. Сейчас же сделаем некоторые замечания относительно содержательности сформулированного критерия. □

Раньше уже отмечалось, что предположение отсутствия арбитража имеет вполне понятный экономический смысл и может рассматриваться как желательное свойство «рационально», «эффективно», «справедливо» функционирующего рынка. Ценность сформулированной теоремы (Харрисон и Крепс [214], Харрисон и Плиска [215] — в случае конечного Ω, Даланг, Мортон и Виллинджер [92] — в случае произвольного Ω) в том, что она открывает возможность проведения *аналитических* расчетов, связанных с финансовыми активами и операциями с ними на таких «безарбитражных» рынках. (Именно поэтому она и называется первой *фундаментальной теоремой теории расчетов*.) В сущности, это уже было продемонстрировано выше при расчетах верхних и нижних цен (§ 1b, c). Сформулированный критерий будет систематически использоваться далее, например, при рассмотрении форвардных и фьючерсных цен (§ 1e гл. VI), рациональных стоимостей опционов (разделы 4 и 5 гл. VI).

Эта теорема имеет также и концептуальную ценность, состоящую в том, что довольно-таки расплывчатая аргументация *концепции эффективного, рационально устроенного* рынка (§ 2a гл. I), преследующая цель как-то обосновать свойство мартингальности цен, становится логически строгой в рамках *концепции безарбитражности*, говорящей о том, что «рациональная устроенность» должна пониматься как отсутствие для инвесторов возможностей получения на рынке *безрискового* дохода.

2. При оперировании с последовательностями $X = (X_n)$, являющимися мартингалами, важно указывать не только меру P, но и поток σ-алгебр $(\mathscr{F}_n)$, относительно которых выполнены «мартингальные» свойства:

$$X_n - \mathscr{F}_n\text{-измеримые величины,}$$
$$\mathsf{E}\,|X_n| < \infty,$$
$$\mathsf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) = X_n \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Чтобы подчеркнуть эти обстоятельства, о рассматриваемом мартингале говорят, что он является P-мартингалом или $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$-мартингалом, и используют запись $X = (X_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P})$.

Отметим теперь, что если X является $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$-мартингалом, то он будет и $(\mathsf{P}, (\mathscr{G}_n))$-мартингалом относительно всякого «меньшего» потока $(\mathscr{G}_n)$, $\mathscr{G}_n \subseteq \mathscr{F}_n$, лишь бы только величины X_n были $\mathscr{G}_n$-измеримыми. Действительно, из $\mathscr{G}_n$-измеримости X_n и «телескопического» свойства условных математических ожиданий находим, что «мартингальное» свойство выполнено:

$$\mathsf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{G}_n) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)\,|\,\mathscr{G}_n\big) = \mathsf{E}(X_n\,|\,\mathscr{G}_n) = X_n \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Понятно, что если X является $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$-мартингалом, то «минимальным» потоком $(\mathscr{G}_n)$, относительно которого X остается мартингалом, является «естественный» поток, порожденный самим мартингалом, т. е. $\mathscr{G}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

В этой связи представляется сейчас целесообразным напомнить, что «слабо эффективный» рынок определялся (см. § 2a гл. I) как тот, на котором «поток информаций $(\mathscr{F}_n)$» порождался *прошлыми значениями цен* всех тех активов, которые «действуют» на рынке, иначе говоря, в этом случае поток $(\mathscr{F}_n)$ является «минимальным».

3. Естественно задаться вопросом о том, сохраняет ли свою силу теорема, когда $d=\infty$ или $N=\infty$.

Следующий контрпример В. Шахермайера (W. Schachermayer [424]) показывает, что в случае $d=\infty$ (и $N=1$) может иметь место «безарбитраж», но при этом *не будет* существовать «мартингальной» меры, т. е. при $d=\infty$ «необходимость» в сформулированной теореме, вообще говоря, может и не иметь места.

Пример 1. Пусть $\Omega=\{1,2,\ldots\}$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $\mathscr{F}=\mathscr{F}_1$ — σ-алгебра, порожденная конечными подмножествами Ω, и $\mathsf{P}=\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\delta_k$, т. е. $\mathsf{P}\{k\}=2^{-k}$.

Последовательность цен $S=(S_n^i)$ для $i=1,2,\ldots$ и $n=0,1$ определим следующим образом:

$$\Delta S_1^i(\omega)=\begin{cases} 1, & \omega=i,\\ -1, & \omega=i+1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для такой последовательности цен (B,S)-рынок с $B_0=B_1=1$ является безарбитражным. Действительно, всякий капитал $X_1^\pi(\omega)$ может быть представлен в виде

$$X_1^\pi=c_0+\sum_{i=1}^{\infty}c_iS_1^i=X_0^\pi+\sum_{i=1}^{\infty}c_i\Delta S_1^i,$$

где $X_0^\pi=c_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i$ (предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c_i|<\infty$). Но если $X_0^\pi=0$, т. е. $c_0+{}$ $+\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i=0$, то из условия $X_1^\pi\geqslant 0$ находим, что

$$X_1^\pi(1)=c_1\geqslant 0,\ X_1^\pi(2)=c_2-c_1\geqslant 0,\ \ldots,\ X_1^\pi(k)=c_k-c_{k-1}\geqslant 0,\ \ldots$$

Отсюда заключаем, что все c_i равны 0 и, значит, $X_1^\pi=0$ (P-п. н.). Однако мартингальная мера *не* может существовать.

В самом деле, *пусть существует* мера $\widetilde{\mathsf{P}}\sim\mathsf{P}$, относительно которой S является мартингалом. Тогда при любом $i=1,2,\ldots$ должны быть выполнены равенства

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\Delta S_1^i=0,$$

т. е. $\widetilde{\mathsf{P}}\{i\}=\widetilde{\mathsf{P}}\{i+1\}$ при любом $i=1,2,\ldots$ Но, очевидно, такой вероятностной меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ нет.

Следующий контрпример относится к справедливости достаточности в теореме в случае $N=\infty$. Именно, он показывает, что наличие мартингальной меры еще не гарантирует отсутствия арбитража, т. е. может иметь место арбитражная возможность в смысле, объясняемом ниже. (Обратим внимание на то, что в приводимом контрпримере цены S принимают *не* только положительные значения. В этом смысле он может показаться несколько искусственным.)

Пример 2. Пусть на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ определена последовательность $\xi = (\xi_n)_{n\geqslant 0}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathsf{P}(\xi_n = 1) = \mathsf{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$.

Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $B_n \equiv 1$, и пусть

$$X_n^\pi = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \gamma_k \Delta S_k \quad \Bigl(= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \gamma_k \xi_k\Bigr),$$

где

$$\gamma_k = \begin{cases} 2^{k-1}, & \text{если } \xi_1 = \ldots = \xi_{k-1} = -1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Хорошо известно, что X_n^π может рассматриваться как капитал некоего игрока в игре с «симметричным» противником, при которой его выигрыш-проигрыш определяется значениями величин ξ_k (выигрыш, если $\xi_k = 1$, и проигрыш, если $\xi_k = -1$) и при проигрыше происходит *удвоение ставки*.

Понятно, что если $\xi_1 = \ldots = \xi_k = -1$ (т. е. игрок все время был в проигрыше), то его капитал равен

$$X_k^\pi = -\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = -(2^k - 1),$$

т. е. является *чистым проигрышем*.

Однако если в следующий момент $k+1$ он будет в выигрыше, т. е. $\xi_{k+1} = 1$, то его суммарный капитал будет в этот момент $k+1$ равен

$$X_{k+1}^\pi = X_k^\pi + 2^k = -(2^k - 1) + 2^k = 1.$$

Поэтому если в понятие стратегии игрока включить (помимо выбора портфеля) еще и (случайный) *момент прекращения* игры τ, то игрок может иметь положительный выигрыш. Действительно, пусть

$$\tau = \inf\bigl\{k\colon X_k^\pi = 1\bigr\}.$$

Так как $\mathsf{P}(\tau = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, то $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$, и, значит, $\mathsf{E}\, X_\tau^\pi = 1$, поскольку $\mathsf{P}(X_\tau^\pi = 1) = 1$, хотя начальный капитал $X_0^\pi = 0$.

Тем самым, на рассматриваемом (B, S)-рынке с $B_k \equiv 1$ *имеется* арбитражная возможность, состоящая в том, что существует такой портфель π, что $X_0^\pi = 0$ и для некоторого τ математическое ожидание $\mathsf{E}\, X_\tau^\pi = 1$.

Заметим, между прочим, что использованная в этой игре возможность *удвоения ставки* при проигрыше подразумевает, что игрок или бесконечно богат, или имеет неограниченный кредит, беря деньги взаймы с банковского счета, что, конечно, мало реалистично и в том, и в другом случае!

Именно это обстоятельство и заставляет при рассмотрении вопросов теории арбитража накладывать на классы допустимых стратегий определенные разумные ограничения, вызываемые экономической целесообразностью. (См. по этому поводу далее § 1а гл. VII.)

§ 2c. Мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей. II. Доказательство достаточности

Мы должны доказать, что существование *мартингальной* меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, эквивалентной мере P, относительно которой последовательность

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{0\leqslant n\leqslant N}$$

является $(\widetilde{\mathsf{P}}, (\mathscr{F}_n))$-мартингалом, гарантирует на (B, S)-рынке *отсутствие арбитражных возможностей*.

Как было отмечено выше (см. конец § 2a), условие $B_n > 0$, $n \geqslant 0$, которое предполагается выполненным, позволяет считать, что $B_n \equiv 1$.

Воспользуемся формулой (2) из § 2a, согласно которой

$$X_n^\pi = X_0^\pi + G_n^\pi, \quad G_n^\pi = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k, \tag{1}$$

где $S = (S_n)$ является $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом.

Чтобы доказать требуемое утверждение, надо показать, что если стратегия $\pi \in SF$ такова, что $X_0^\pi = 0$ и $\mathsf{P}(X_N^\pi \geqslant 0) = 1$, т. е.

$$G_N^\pi \equiv \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta S_k \geqslant 0 \tag{2}$$

(P-п. н., или, что равносильно, $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.), то $G_N^\pi = 0$ (P-п. н., или, что равносильно, $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.).

Воспользуемся леммой из § 1c гл. II.

Относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $(G_n^\pi)_{0\leqslant n\leqslant N}$ является мартингальным преобразованием, а значит, и локальным мартингалом. Поскольку $G_N^\pi \geqslant 0$, по упомянутой лемме $(G_n^\pi)_{0\leqslant n\leqslant N}$ является на самом деле $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом, и, тем самым, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, G_N^\pi = G_0^\pi = 0$. Следовательно, $X_N^\pi = G_N^\pi = 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н. и P-п. н.).

§ 2d. Мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей. III. Доказательство необходимости (с использованием условного преобразования Эшера)

1. Нам надо теперь доказать, что отсутствие арбитражных возможностей приводит к тому, что на $(\Omega, \mathscr{F})$ *существует* вероятностная мера $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, относительно которой последовательность $S = (S_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ является $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом.

Существуют несколько доказательств этого результата, а также соответствующего его обобщения на случай непрерывного времени (см., например, [92], [100], [171], [215], [259], [443], [455]). Все они так или иначе аппелируют к идеям и результатам функционального анализа (теорема Хана—Банаха, теорема об отделимости в конечномерном евклидовом пространстве, методы гильбертова пространства и т. п.).

В то же самое время эти доказательства носят характер «доказательств существования» мартингальных мер, без *явной* их конструкции и уж, конечно, без явного описания *всех* мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, эквивалентных мере P.

В этом смысле интересно привести такое доказательство необходимости условий теоремы, которое давало бы и явную конструкцию если уж не всех мартингальных мер, то, по крайней мере, некоторого их подкласса, что существенно, если иметь в виду, что, например, отыскание верхних и нижних мер требует рассмотрения sup и inf по классу всех мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, эквивалентных исходной мере P (см. § 1c).

Именно на этом пути *явного* построения мартингальной меры и будет далее строиться доказательство. Мы будем следовать идеям работы Роджерса (L. C. G. Rogers) [407] и методам построения эквивалентных мер, основанным на условных преобразованиях Эшера.

2. Для пояснения идеи построения рассмотрим сначала одношаговую модель ($N=1$), считая для простоты, что $d=1$, $B_0=B_1=1$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$. Мы будем считать также, что $\mathsf{P}(S_1\neq S_0)>0$. В противном случае мы имели бы неинтересный *тривиальный* рынок и в качестве требуемой мартингальной меры могли бы взять исходную меру P.

В рассматриваемом случае всякий портфель π — это пара *чисел* (β,γ). Если $X_0^\pi=0$, то это означает, что допустимыми являются пары (β,γ), $\beta+\gamma S_0=$ $=0$.

Предположение отсутствия арбитража означает, что на таком (нетривиальном) рынке должны быть выполнены следующие два условия:

$$\mathsf{P}(\Delta S_1>0)>0 \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(\Delta S_1<0)>0. \tag{1}$$

Тем самым, рис. 54 из § 2a здесь превращается в такой:

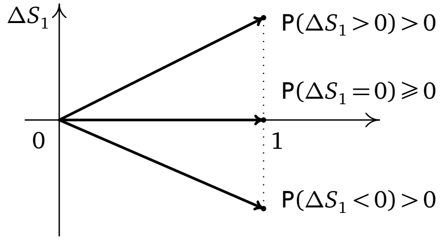


Рис. 55. Типичная безарбитражная ситуация. Случай $N=1$

Из условий (1) нам надо вывести, что существует такая мера $\widetilde{\mathsf{P}}\sim\mathsf{P}$, что

1) $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,|\Delta S_1|<\infty$,
2) $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\Delta S_1=0$.

Целесообразно сформулировать соответствующий результат безотносительно к «арбитражным» нуждам в виде следующего «чисто вероятностного» утверждения.

Лемма 1. *Пусть X — действительнозначная случайная величина с таким распределением вероятностей P на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, что*

$$\mathsf{P}(X > 0) > 0 \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(X < 0) > 0. \tag{2}$$

Тогда существует такая мера $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, что для любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, e^{aX} < \infty, \tag{3}$$

в частности

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, |X| < \infty, \tag{4}$$

и имеет место следующее свойство:

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, X = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Имея меру P, построим прежде всего вероятностную меру Q,

$$\mathsf{Q}(dx) = c\, e^{-x^2} \mathsf{P}(dx), \quad x \in \mathbb{R},$$

где c — нормирующая константа:

$$c^{-1} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\, e^{-X^2}.$$

Пусть для $a \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\varphi(a) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\, e^{aX} \tag{6}$$

и

$$Z_a(x) = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)}. \tag{7}$$

Ясно, что $\mathsf{Q} \sim \mathsf{P}$, и из конструкции меры Q следует, что $\varphi(a) < \infty$ для каждого $a \in \mathbb{R}$ и, очевидно, $\varphi(a) > 0$.

Понятно также, что $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\, Z_a(X) = 1$, $Z_a(x) > 0$. Поэтому для *всякого* $a \in \mathbb{R}$ можно определить *вероятностную* меру $\widetilde{\mathsf{P}}_a$:

$$\widetilde{\mathsf{P}}_a(dx) = Z_a(x) \mathsf{Q}(dx), \tag{8}$$

обладающую тем свойством, что $\widetilde{\mathsf{P}}_a \sim \mathsf{Q} \sim \mathsf{P}$.

Заметим теперь, что функция $\varphi = \varphi(a)$, определенная для $a \in \mathbb{R}$, является *строго выпуклой вниз*, поскольку $\varphi''(a) > 0$.

Положим

$$\varphi_* = \inf\{\varphi(a) \colon a \in \mathbb{R}\}.$$

Видим, что возможны два случая:

1) существует такое a_*, что $\varphi(a_*)=\varphi_*$

или

2) такого a_* нет.

В первом случае, очевидно, $\varphi'(a_*)=0$ и

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_{a_*}} X = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \frac{Xe^{a_* X}}{\varphi(a_*)} = \frac{\varphi'(a_*)}{\varphi(a_*)} = 0.$$

Тем самым, в этом случае в качестве искомой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ можно взять меру $\widetilde{\mathsf{P}}_{a^*}$.

Покажем теперь, что вторая возможность *исключается* предположением (2).

В самом деле, пусть $\{a_n\}$ — такая последовательность, что

$$\varphi_* < \varphi(a_n) \downarrow \varphi_*. \tag{9}$$

Предел этой последовательности равен $+\infty$ или $-\infty$, поскольку если это не так, то можно выбрать сходящуюся подпоследовательность и минимум будет достигаться в конечной точке, что несовместимо с предположением (2).

Пусть $u_n = \dfrac{a_n}{|a_n|}$ и $u = \lim u_n$ $(=\pm 1)$.

В силу предположения (2) имеем

$$\mathsf{Q}(uX > 0) > 0.$$

Отсюда вытекает, что можно найти такое $\delta > 0$, что

$$\mathsf{Q}(uX > \delta) = \varepsilon > 0, \tag{10}$$

причем в качестве δ можно выбрать точку непрерывности распределения Q, т. е. такую точку, что

$$\mathsf{Q}(uX = \delta) = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{Q}(a_n X > \delta |a_n|) = \mathsf{Q}(u_n X > \delta) \to \varepsilon, \quad n \to \infty,$$

и, значит, при достаточно больших n имеем

$$\varphi(a_n) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\, e^{a_n X} \geqslant \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\big[e^{a_n X} I(a_n X > \delta |a_n|)\big] \geqslant \frac{1}{2}\, \varepsilon \cdot \exp(\delta |a_n|) \to \infty,$$

что противоречит неравенству (9), где $\varphi_* \leqslant 1$.

Лемма доказана. □

Замечание. Изложенный выше способ построения вероятностных мер $\widetilde{\mathsf{P}}_a$, основанный на преобразовании Эшера $x \rightsquigarrow \dfrac{e^{ax}}{\varphi(a)}$, определяемом формулой (7), хорошо известен в актуарном деле со времен появления статьи Ф. Эшера [144], 1932 г. О применениях этого преобразования в финансовой математике см., например, работы [177] и [178], а по поводу применений в актуарной математике — книгу [52].

3. Из приведенного доказательства леммы нетрудно понять, как можно обобщить ее утверждение на векторный случай, рассматривая вместо случайной величины X упорядоченную последовательность $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$, состоящую из $\mathscr{F}_n$-измеримых случайных величин X_n, заданных на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}, \mathsf{P})$ с граничными условиями $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ и $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$.

Лемма 2. *Пусть при каждом* $1 \leqslant n \leqslant N$ *выполняются неравенства*

$$\mathsf{P}(X_n > 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0 \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(X_n < 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0. \tag{11}$$

Тогда на пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ *существует вероятностная мера* $\widetilde{\mathsf{P}}$, *эквивалентная* P, *относительно которой последовательность* $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ *является* $(\widetilde{\mathsf{P}}, (\mathscr{F}_n))$*-мартингал-разностью.*

Доказательство. Если это необходимо, то от меры P можно сразу перейти к новой вероятностной мере Q, для которой

$$\mathsf{Q}(d\omega) = c \exp\left\{-\sum_{i=0}^{N} X_i^2(\omega)\right\} \mathsf{P}(d\omega) \tag{12}$$

и относительно которой производящая функция $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \exp\left\{\sum_{i=0}^{N} a_i X_i\right\}$ является конечнозначной.

Искомая мера $\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)$ строится следующим образом (ср. с (8)).

Определим функции

$$\varphi_n(a;\omega) = \mathsf{E}(e^{aX_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega). \tag{13}$$

При каждом фиксированном ω эти функции (в силу неравенств (11)) строго выпуклы вниз по a. Как и в лемме 1, показывается, что существует (конечное) *единственное* значение $a_n = a_n(\omega)$, на котором достигается $\inf\limits_a \varphi_n(a;\omega)$.

Поскольку $\inf\limits_a$ совпадает с $\inf\limits_{a\in\mathbb{Q}}$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $\varphi_n(\omega) = \inf\limits_a \varphi_n(a;\omega)$ является $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримой функцией, что позволяет утверждать, что $a_n(\omega)$ также является $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримой функцией.

Действительно, если $[A, B]$ — замкнутый интервал, то

$$\{\omega\colon\, a_n(\omega) \in [A,B]\} = \bigcap_m \bigcup_{a\in\mathbb{Q}\cap[A,B]} \left\{\omega\colon\, \varphi_n(a;\omega) < \varphi_n(\omega) + \frac{1}{m}\right\} \in \mathscr{F}_{n-1},$$

что и доказывает $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримость величин $a_n(\omega)$.

Определим теперь рекуррентным образом последовательность Z_0, $Z_1(\omega)$, …, $Z_N(\omega)$, полагая $Z_0 = 1$ и

$$Z_n(\omega) = Z_{n-1}(\omega) \frac{\exp\{a_n(\omega) X_n(\omega)\}}{\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(\exp\{a_n X_n\} \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)}, \quad n \geqslant 1. \tag{14}$$

Понятно, что величины $Z_n(\omega)$ являются $\mathscr{F}_n$-измеримыми и образуют мартингал:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(Z_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = Z_{n-1} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Требуемую меру $\widetilde{\mathsf{P}}$ определим посредством формулы

$$\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega). \tag{15}$$

Как и в лемме 1, из данного определения легко выводится, что $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,|X_n| < \infty$, $0 \leqslant n \leqslant N$, и

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant N. \tag{16}$$

Согласно лемме 1 имеем $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,X_0 = 0$. Тем самым, по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ является мартингал-разностью, что и доказывает утверждение леммы. □

4. В том случае, когда $d = 1$, доказательство *необходимости* существования мартингальной меры $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$ (при условии отсутствия на рынке арбитража) вытекает из утверждения леммы 2.

В самом деле, положим $X_0 = S_0$, $X_1 = \Delta S_1, \ldots, X_N = \Delta S_N$. Отсутствие арбитража гарантирует, что без ограничения общности можно считать, что для всех $n = 1, \ldots, N$

$$\mathsf{P}(\Delta S_n > 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0 \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(\Delta S_n < 0 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) > 0. \tag{17}$$

Действительно, если $\mathsf{P}(\Delta S_n = 0) = 1$ при некотором n, то этот момент времени n можно просто исключить из рассмотрения, поскольку для любого самофинансируемого портфеля π соответствующий вклад в X_N^π, вносимый в этот момент времени, равен нулю.

Если же при некотором n имеем

$$\mathsf{P}(\Delta S_n \geqslant 0) = 1$$

или $\mathsf{P}(\Delta S_n \leqslant 0) = 1$, то по условиям отсутствия арбитража должно выполняться равенство $\mathsf{P}(\Delta S_n = 0) = 1$. (Если это не так, то легко построить стратегию π, дающую $X_N^\pi > 0$ с положительной вероятностью.) И тогда опять-таки соответствующий вклад в X_N^π равен нулю.

Тем самым, можно считать, что неравенства (17) выполнены для всех $n \leqslant N$, и требуемое доказательство *необходимости* непосредственно вытекает из лемм 1 и 2, примененных к $X_0 = S_0$, $X_n = \Delta S_n$, $1 \leqslant n \leqslant N$.

5. Обратимся теперь к общему случаю $d \geqslant 1$. В идейном плане доказательство то же, что и в случае $d = 1$, и его можно провести, опираясь на следующее обобщение леммы 2 на векторный случай.

Лемма 3. *Пусть $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ — последовательность d-мерных $\mathscr{F}_n$-измеримых векторов*

$$X_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ \vdots \\ X_n^d \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N,$$

которые заданы на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}, \mathsf{P})$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N=\mathscr{F}$.

Пусть X_n, $0\leqslant n\leqslant N$, *таковы, что если для ненулевого* $\mathscr{F}_{n-1}$*-измеримого вектора* ($\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$)

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma_n^1 \\ \vdots \\ \gamma_n^d \end{pmatrix}$$

с ограниченными компонентами ($|\gamma_n^i(\omega)|\leqslant c<\infty$, $\omega\in\Omega$) *выполняется неравенство*

$$\mathsf{P}\big((\gamma_n, X_n) > 0 | \mathscr{F}_{n-1}\big) > 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

то и

$$\mathsf{P}\big((\gamma_n, X_n) < 0 | \mathscr{F}_{n-1}\big) > 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

где (γ_n, X_n) — *скалярное произведение.*

Тогда на $(\Omega, \mathscr{F})$ *существует вероятностная мера* $\widetilde{\mathsf{P}}$, *эквивалентная мере* P, *относительно которой последовательность* $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ *является* d*-мерной мартингал-разностью:* $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,|X_n|<\infty$, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,X_0=0$ *и* $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(X_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=0$, $1\leqslant n\leqslant N$.

Доказательство. Если топологический *носитель* регулярной условной вероятности $\mathsf{P}(X_n\in\cdot\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(\omega)$, т. е. наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена эта мера, *не содержится* в собственном подпространстве пространства $\mathbb{R}^d$, то, как и в случае $d=1$, функции

$$\varphi_n(a;\omega) = \mathsf{E}(e^{(a, X_n)}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(\omega), \quad a\in\mathbb{R}^d,$$

являются строго выпуклыми и $\inf \varphi_n(a;\omega)$ достигается в единственной точке $a_n=a_n(\omega)\in\mathbb{R}^d$, причем величины $a_n(\omega)$ являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми.

Несколько более деликатной является ситуация, когда регулярное условное распределение $\mathsf{P}(X_n\in\cdot\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ содержится в собственном подпространстве пространства $\mathbb{R}^d$. В работе [407] показывается, что и в этом случае может быть выбрано единственное $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримое значение $a_n=a_n(\omega)$, на котором достигается $\inf\varphi_n(a;\omega)$.

Требуемую меру $\widetilde{\mathsf{P}}$ строим так же, как и в формулах (15) и (14), понимая под $a_n(\omega)X_n(\omega)$ (в формуле (14)) скалярное произведение векторов $a_n(\omega)$ и $X_n(\omega)$. $\square$

6. Данная выше конструкция мартингальной меры, основанная на *условном преобразовании Эшера*, давала лишь *одну* конкретную меру, хотя класс всех таких мер, эквивалентных исходной, может состоять и из более чем одной найденной меры. Следующий раздел будет посвящен изложению некоторых подходов, в основе которых лежит идея *преобразования Гирсанова* для конструкции семейств мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, абсолютно непрерывных или эквивалентных исходной мере P, относительно которых последовательность нормированных цен оказывается мартингалом.

Преобразование Эшера довольно давно используется в актуарных расчетах *страховой математики* (см., например, [52]). Менее известны эти преобразования как преобразования Эшера в *финансовой математике* (см., впрочем, уже упомянутые работы [177], [178]), где большую роль играет набор результатов относительно преобразований мер, часто называемых «теоремой Гирсанова».

На самом деле между этими преобразованиями много общего, и это более подробно будет рассмотрено в разделе 3 этой главы. Сейчас же только отметим, в связи с леммой 1, что если X — нормально распределенная случайная величина, $X \sim \mathscr{N}(0, 1)$, то $\varphi(a) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\, e^{aX} = e^{\frac{1}{2}a^2}$ и (см. формулу (7))

$$Z_a(x) = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)} = e^{ax - \frac{1}{2}a^2}.$$

Читатель, знакомый с теоремой Гирсанова, немедленно заметит, что «гирсановская» экспонента $e^{ax-\frac{1}{2}a^2}$, участвующая в этой теореме (см. далее § 3a), есть не что иное, как преобразование Эшера, определяемое формулой (7).

§ 2e. Расширенный вариант первой фундаментальной теоремы

1. Обозначим через $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ и $\mathscr{P}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ множества всех вероятностных мер $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, относительно которых дисконтируемые цены

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{0 \leqslant n \leqslant N}$$

являются *мартингалами* и *локальными мартингалами* соответственно.

Через $\mathscr{P}_b(\mathsf{P})$ обозначаем множество тех мер $\widetilde{\mathsf{P}}$ из $\mathscr{P}(\mathsf{P})$, для которых производные Радона—Никодима $\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$ являются *ограниченными сверху*:

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}(\omega) \leqslant C(\widetilde{\mathsf{P}}) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.) для некоторой константы } C(\widetilde{\mathsf{P}}).$$

Теореме A (первой фундаментальной теореме; § 2b) можно придать следующую форму: *условия*

(1) *(B, S)-рынок является безарбитражным*

и

(2) *множество мартингальных мер $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ непусто ($\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$)*

равносильны.

Приводимая ниже теорема A* представляет естественное расширение формулировки первой фундаментальной теоремы, давая разные эквивалентные характеризации безарбитражности и проясняя структуру множества мартингальных мер. (Мы приводим формулировку и доказательство этой теоремы, следуя работе [251].)

Введем прежде всего некоторые обозначения.

Пусть $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ и

$K(\mathsf{Q})$ — *топологический носитель* Q (т. е. наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера Q; [335, т. 5]);

$L(\mathsf{Q})$ — *замкнутая выпуклая оболочка* множества $K(\mathsf{Q})$;

$H(\mathsf{Q})$ — *наименьшая аффинная гиперплоскость*, содержащая $K(\mathsf{Q})$ (ясно, что $L(\mathsf{Q}) \subseteq H(\mathsf{Q})$);

$L^\circ(\mathsf{Q})$ — *«относительная» внутренность* множества $L(\mathsf{Q})$ (в топологии гиперплоскости $H(\mathsf{Q})$).

Если, например, мера Q сосредоточена в *одной* точке a, то $H(\mathsf{Q})$ совпадает с этой точкой и $L(\mathsf{Q}) = L^\circ(\mathsf{Q}) = \{a\}$. В противном случае $H(\mathsf{Q})$ имеет размерность между 1 и d. Если $H(\mathsf{Q})$ имеет размерность, равную 1, то $L(\mathsf{Q})$ является замкнутым сегментом, а $L^\circ(\mathsf{Q})$ — открытым.

Будем обозначать через $\mathsf{Q}_n(\omega, \cdot)$ и $\overline{\mathsf{Q}}_n(\omega, \cdot)$ регулярные условные распределения $\mathsf{P}(\Delta S_n \in \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ и $\mathsf{P}\left(\Delta\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right) \in \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)(\omega)$, $1 \leqslant n \leqslant N$.

Отметим, что, поскольку $B_n > 0$, $0 \leqslant n \leqslant N$, и B_n являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми, то множества $K(\mathsf{Q})$, $L(\mathsf{Q})$ и $L^\circ(\mathsf{Q})$ одни и те же для $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_n$ и $\mathsf{Q} = \overline{\mathsf{Q}}_n$. Поэтому, без ограничения общности и упрощения в обозначениях, в приводимых далее формулировках и доказательствах будет предполагаться, что $B_n \equiv 1$, $n \leqslant N$.

Теорема A* (расширенный вариант первой фундаментальной теоремы; [251]). *Пусть выполнены условия теоремы* A. *Следующие утверждения равносильны:*

a) *(B, S)-рынок является безарбитражным;*

a$'$) *(B, S)-рынок является слабо безарбитражным;*

a$''$) *(B, S)-рынок является сильно безарбитражным;*

b) *множество* $\mathscr{P}_b(\mathsf{P}) \neq \varnothing$;

c) *множество* $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$;

d) *множество* $\mathscr{P}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$;

e) *для всех* $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *и* P*-почти всех* $\omega \in \Omega$ *точка* $0 \in L^\circ(\overline{\mathsf{Q}}_n(\omega, \cdot))$.

Сделаем прежде всего ряд общих замечаний относительно сформулированных утверждений. По поводу определений безарбитражных, слабо и сильно безарбитражных рынков см. § 2а.

Из леммы в § 1с гл. II следует, что на самом деле $\mathscr{P}(\mathsf{P}) = \mathscr{P}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ и, тем самым,

$$\text{c)} \iff \text{d)}.$$

Далее, если свойства a), a$'$), a$''$), c) или e) выполнены относительно некоторой меры $\overline{\mathsf{P}}$, эквивалентной мере P, то они выполнены и относительно меры P. Если свойство b) выполнено относительно меры $\overline{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$ (т. е. $\mathscr{P}_b(\overline{\mathsf{P}}) \neq \varnothing$) и производная $\dfrac{d\overline{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$ ограничена, то свойство b) выполнено и относительно исходной меры P.

Заметим теперь, что всегда можно найти такую меру $\overline{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, что относительно нее все величины S_n, $n \leqslant N$, интегрируемы и производная $\frac{d\overline{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$ ограничена. Достаточно, например, положить

$$d\overline{\mathsf{P}} = C \exp\biggl(-\sum_{i=1}^{d}\sum_{n=1}^{N} |S_n^i|\biggr) d\mathsf{P},$$

где C — нормирующая константа.

Тем самым, при доказательстве теоремы сразу можно предполагать, что исходная мера P такова, что $\mathsf{E}\,|S_n| < \infty$, $n \leqslant N$.

Тогда, поскольку импликации

$$\text{a}'') \;\Rightarrow\; \text{a}) \;\Rightarrow\; \text{a}')$$

и

$$\text{b}) \;\Rightarrow\; \text{c})$$

очевидны, надо лишь доказать, что

$$\text{a}') \;\Rightarrow\; \text{e}) \;\Rightarrow\; \text{b})$$

и

$$\text{c}) \;\Rightarrow\; \text{a}'').$$

2. Введем ряд объектов, нужных для доказательства этих трех импликаций, и сформулируем два вспомогательных утверждения (леммы 1 и 2).

Пусть $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ — такая мера на $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|\, \mathsf{Q}(dx) < \infty. \tag{1}$$

(Далее в качестве Q будут браться регулярные условные распределения $\mathsf{Q}_n(\omega, dx)$, $n \leqslant N$, и для них условие (1) будет (P-п. н.) выполнено в силу предположения $\mathsf{E}\,|S_n| < \infty$, $n \leqslant N$.)

Пусть $x' = (x, v) \in E = \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ и $\mathsf{Q}' = \mathsf{Q}'(dx')$ — некоторая мера на борелевской σ-алгебре $\mathscr{E}$ пространства E, ассоциированная с мерой $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx)$ в том смысле, что Q есть «первый маргинал» меры Q', т. е. $\mathsf{Q}(dx) = \mathsf{Q}'(dx, (0, \infty))$.

Через $Z(\mathsf{Q}')$ будем обозначать семейство *положительных* борелевских функций $z = z(x, v)$ на E, удовлетворяющих неравенствам

$$\int_E |x| z(x, v)\, \mathsf{Q}'(dx; dv) < \infty, \tag{2}$$

$$\int_E z(x, v)\, \mathsf{Q}'(dx; dv) = 1 \tag{3}$$

и обладающих тем свойством, что функции $vz(x, v)$ ограничены.

Пусть $B(a,\varepsilon)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке a и радиусом ε. Обозначим через G множество всех таких семейств

$$g = \bigl(k, (a_i, \varepsilon_i, \alpha_i, \alpha_i')_{i=1,\ldots,k}\bigr), \tag{4}$$

что $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $a_i \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\alpha_i' > 0$.

Свяжем с $g \in G$ положительную функцию (на E)

$$z_g(x, v) = \frac{1}{\max(v, 1)} \sum_{i=1}^{k} \bigl[\alpha_i I_{B(a_i,\varepsilon_i)}(x) + \alpha_i' I_{B^c(a_i,\varepsilon_i)}(x)\bigr], \tag{5}$$

где $B^c = \mathbb{R}^d \setminus B$.

Если $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}'} z_g = 1$, то в силу неравенств (1) видим, что $z_g \in Z(\mathsf{Q}')$. Тем самым, для таких функций z_g определены векторы (барицентры)

$$\varphi(g) = \int_E x z_g(x, v)\, \mathsf{Q}'(dx, dv). \tag{6}$$

Обозначим

$$\Phi(\mathsf{Q}') = \bigl\{\varphi(g)\colon\ g \in G,\ \mathsf{E}_{\mathsf{Q}'} z_g = 1\bigr\}. \tag{7}$$

Лемма 1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$L(\mathsf{Q}) = \overline{\Phi}(\mathsf{Q}'), \tag{8}$$

$$L^\circ(\mathsf{Q}) \subseteq \Phi(\mathsf{Q}'). \tag{9}$$

Если $0 \ne L^\circ(\mathsf{Q})$, то найдется такой вектор γ в $\mathbb{R}^d$, что

$$\mathsf{Q}(x\colon\ (\gamma, x) \geqslant 0) = 1 \quad \textit{и} \quad \mathsf{Q}(x\colon\ (\gamma, x) > 0) > 0. \tag{10}$$

Доказательство. Установим сначала, что $L(\mathsf{Q}) \subseteq \overline{\Phi}(\mathsf{Q}')$.

Пусть $y \in K(\mathsf{Q})$. Покажем, что найдется такая последовательность точек y_n из $\Phi(\mathsf{Q}')$, что $y_n \to y$. Иначе говоря, каждая точка y из топологического носителя меры Q может быть получена как предел некоторой последовательности $y_n = \varphi(g_n)$, $g_n \in G$, $n \geqslant 1$.

Пусть $A_n = B(y, 1/n)$ — шар радиуса $1/n$ с центром в y. Положим

$$a_n = \mathsf{Q}''(A_n), \quad a_n^c = \mathsf{Q}''(A_n^c)$$

и

$$b_n = \int_{A_n} x\, \mathsf{Q}''(dx), \quad b_n^c = \int_{A_n^c} x\, \mathsf{Q}''(dx),$$

где

$$\mathsf{Q}''(A) = \int_E I_A \frac{1}{\max(v, 1)}\, \mathsf{Q}'(dx, dv), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d). \tag{11}$$

Выберем δ_n таким, что $\delta_n a_n + \dfrac{a_n^c}{n} = 1$.

Поскольку $y \in K(\mathsf{Q})$, $a_n > 0$. Ясно также, что $\sup\limits_n a_n^c < \infty$. Поэтому заведомо $\delta_n > 0$, по крайней мере для больших значений n.

Следовательно, если $g_n = \left(1, \left(y, \frac{1}{n}, \delta_n, \frac{1}{n}\right)\right)$, то для больших n выполняется равенство

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}'} z_{g_n} = \delta_n a_n + \frac{a_n^c}{n} = 1. \tag{12}$$

Положим $y_n = \varphi(g_n)$. Тогда $y_n = \delta_n b_n + \frac{b_n^c}{n}$, где $\sup\limits_n |b_n^c| < \infty$.

Поскольку $\delta_n a_n \to 1$ и $b_n - y a_n \to 0$, получаем, что $y_n \to y$.

Тем самым, $K(\mathsf{Q})$ содержится в замыкании $\overline{\Phi}(\mathsf{Q}')$ множества $\Phi(\mathsf{Q}')$:

$$K(\mathsf{Q}) \subseteq \overline{\Phi}(\mathsf{Q}'). \tag{13}$$

Заметим теперь, что множество $\Phi(\mathsf{Q}')$ является выпуклым множеством. Поэтому из условия (13) следует, что

$$L(\mathsf{Q}) \subseteq \overline{\Phi}(\mathsf{Q}'). \tag{14}$$

С другой стороны, всякая точка $y \in \Phi(\mathsf{Q}')$ есть среднее значение вероятностной меры, эквивалентной мере Q (см. формулы (6), (7) и (11)), и, значит, y принадлежит замкнутой выпуклой оболочке $L(\mathsf{Q})$ множества $K(\mathsf{Q})$.

Таким образом, $\Phi(\mathsf{Q}') \subseteq L(\mathsf{Q})$, и поэтому $\overline{\Phi}(\mathsf{Q}') \subseteq L(\mathsf{Q})$, что вместе с условием (14) устанавливает равенство $L(\mathsf{Q}) = \overline{\Phi}(\mathsf{Q}')$.

Воспользуемся теперь тем, что каждое выпуклое множество содержит внутренность его замыкания. Применяя это свойство к выпуклому множеству $\Phi(\mathsf{Q}')$ (в относительной топологии на $H(\mathsf{Q})$), находим, что $L^\circ(\mathsf{Q}) \subseteq \subseteq V(\mathsf{Q}')$.

Итак, свойства (8) и (9) установлены.

Перейдем к доказательству последнего утверждения леммы.

Пусть точка $0 \notin L^\circ(\mathsf{Q})$. Тогда возможны следующие три случая, разбираемые с помощью стандартной техники отделимости в выпуклом анализе; см., например, [406].

Случай 1: $0 \notin H(\mathsf{Q})$. В этом случае в качестве γ берем вектор, выходящий из нуля по направлению к множеству $H(\mathsf{Q})$ и ему ортогональный. Тогда $(\gamma, x) > > 0$ для $x \in H(\mathsf{Q})$, откуда, разумеется, следует свойство $\mathsf{Q}(x\colon (\gamma, x) > 0) = 1$.

Случай 2: $0 \in H(\mathsf{Q})$, но $0 \notin L(\mathsf{Q})$. Тогда понятно, что можно найти такой вектор $\gamma \in H(\mathsf{Q})$, что $(\gamma, x) > 0$ для всех $x \in L(\mathsf{Q})$, и, следовательно, $\mathsf{Q}(x\colon (\gamma, x) > > 0) = 1$.

Случай 3: $0 \in H(\mathsf{Q})$, но $0 \in L(\mathsf{Q}) \setminus L^\circ(\mathsf{Q})$. Тогда на $H(\mathsf{Q})$ оба множества $L(\mathsf{Q})$ и $K(\mathsf{Q})$ лежат по одну сторону гиперплоскости, скажем, H', содержащей 0 и имеющей размерность $q-1$, где q есть размерность $H(\mathsf{Q})$. (Если $q=1$, то H' сводится к точке $\{0\}$.) По определению $H(\mathsf{Q})$ есть минимальная гиперплоскость, содержащая $K(\mathsf{Q})$. Поэтому $K(\mathsf{Q})$ не содержится в H'.

Требуемый вектор γ строится в этом случае следующим образом.

Возьмем какой-то ненулевой вектор γ в $H(\mathsf{Q})$, ортогональный к H и такой, что $(\gamma, x) \geqslant 0$ для всех $x \in L(\mathsf{Q})$ и, значит, $\mathsf{Q}(x\colon (\gamma, x) \geqslant 0) = 1$.

Заметим теперь, что найдется такая точка $x \in K(\mathsf{Q})$, что скалярное произведение $(\gamma, x) > 0$. Поэтому с учетом того, что $K(\mathsf{Q})$ — топологический носитель меры Q, находим, что $\mathsf{Q}(x\colon (\gamma, x) > 0) > 0$.

Лемма 1 доказана. □

3. Следующий нужный нам результат относится к проблематике существования «измеримого выбора».

Лемма 2. *Пусть* $(E, \mathscr{E}, \mu)$ — *некоторое вероятностное пространство и* $(G, \mathscr{G})$ — *польское пространство с борелевской* σ*-алгеброй* $\mathscr{G}$.

Пусть A *является* $\mathscr{E} \otimes \mathscr{G}$*-измеримым подмножеством в* $E \times G$.

Тогда существует G*-значная* $\mathscr{E}/\mathscr{G}$*-измеримая функция* $Y = Y(x)$, $x \in E$, *называемая селектором, удовлетворяющая условию* $(x, Y(x)) \in A$ *для* μ*-почти всех* x, *принадлежащих* E*-проекции*

$$\pi(A) = \{x\colon \exists\, y \in G,\ (x, y) \in A\}.$$

Замечание 1. Прежде всего отметим, что в данной формулировке под *польским* пространством понимается *топологическое* пространство, которое является *сепарабельным* и таким, что на нем существует метрика, совместимая с рассматриваемой топологией, относительно которой это пространство является *полным*.

В литературе, посвященной проблематике «измеримого выбора», можно найти (см., например, [11]) разнообразные формулировки теорем о существовании измеримых селекторов при различных предположениях относительно измеримых пространств $(E, \mathscr{E})$ и $(G, \mathscr{G})$. Для наших целей проще всего будет здесь сослаться, например, на [102, гл. III, теорема 82] или [11, Приложение I, теорема 1], в соответствии с которыми имеет место (с некоторыми модификациями в формулировке) следующий результат.

Предложение. *Пусть* $(E, \mathscr{E})$ — *произвольное измеримое пространство и* $(G, \mathscr{G})$ — *польское пространство. Если* $A \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{G}$, *то существует такая универсально измеримая функция* $\widehat{Y} = \widehat{Y}(x)$, $x \in E$, *что* $(x, \widehat{Y}(x)) \in A$ *для всех* $x \in \pi(A)$.

Напомним, что G-значная функция $\widehat{Y} = \widehat{Y}(x)$, заданная на $(E, \mathscr{E})$, называется *универсально измеримой*, если она является $\widehat{\mathscr{E}}/\mathscr{G}$-измеримой, где $\widehat{\mathscr{E}} = \bigcap_\mu \mathscr{E}_\mu$ есть пересечение (по всем конечным мерам μ на $(E, \mathscr{E})$) σ-алгебр $\mathscr{E}_\mu$, каждая из которых есть пополнение $\mathscr{E}$ по мере μ.

Таким образом, из сформулированного предложения следует, что *существует* такая $\widehat{\mathscr{E}}/\mathscr{G}$-измеримая функция $\widehat{Y} = \widehat{Y}(x)$, $x \in E$, что для *всех* $x \in \pi(A)$ выполняется условие $(x, \widehat{Y}(x)) \in A$.

Поскольку $\widehat{\mathscr{E}} = \bigcap_\mu \mathscr{E}_\mu$, то для каждой конечной меры μ функция $\widehat{Y}$ будет, конечно, $\mathscr{E}_\mu/\mathscr{G}$-измеримой. Пользуясь тем, что $(G, \mathscr{G})$ — польское пространство, а $\mathscr{E}_\mu$ есть σ-алгебра, являющаяся пополнением $\mathscr{E}$ по мере μ, отсюда нетрудно заключить (аппроксимируя $\widehat{Y}$ простыми функциями), что существует такая $\mathscr{E}/\mathscr{G}$-измеримая функция Y, что $Y=\widehat{Y}$ (μ-п. н.).

Тем самым, утверждение леммы 2 следует из сформулированного выше предложения.

4. *Доказательство импликации* a$'$) $\Rightarrow$ e). Пусть рынок является безарбитражным, но свойство e) не имеет места. Тогда найдутся $n\in\{1,2,\dots,N\}$ и такое $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримое множество B с $\mathsf{P}(B)>0$, что для почти всех $\omega\in B$ точка 0 не принадлежит $L^\circ(\mathsf{Q}_n(\omega,\ \cdot))$.

Множество

$$A=\Big\{(\omega,\gamma)\in\Omega\times\mathbb{R}^d\colon\ \omega\in B,\ \mathsf{Q}_n\big(\omega,\{x\colon\ (\gamma,x)\geqslant 0\}\big)=1,\\ \mathsf{Q}_n\big(\omega,\{x\colon\ (\gamma,x)>0\}\big)>0\Big\}$$

является $\mathscr{F}_{n-1}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-измеримым, и его проекция $\pi(A)$ равна B согласно последнему утверждению в лемме 1.

По лемме 2 об измеримом выборе найдется такой $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримый вектор $g=g(\omega)$, что

$$\mathsf{Q}_n\big(\omega,\{x\colon\ (g(\omega),x)\geqslant 0\}\big)=1,\quad \mathsf{Q}_n\big(\omega,\{x\colon\ (g(\omega),x)>0\}\big)>0 \tag{15}$$

для P-почти всех $\omega\in B$.

Поскольку множество B является $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримым, функция $\widetilde{g}(\omega)=g(\omega)I_B(\omega)$ будет $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримой, и согласно формуле (15) выполняются неравенства $(\widetilde{g},\Delta S_n)\geqslant 0$ (P-п. н.) и $\mathsf{P}((\widetilde{g},\Delta S_n)>0)>0$.

Положим $\gamma_i=\widetilde{g}I_{i=n}$, $i=1,\dots,N$, и по ним определим *самофинансируемую* стратегию $\pi=(\beta,\gamma)$, у которой капитал X^π таков, что $X_0^\pi=0$ и $\Delta X_i^\pi=(\gamma_i,\Delta S_i)$. (Элементы β_i определяются, скажем, в случае $B_i\equiv 1$, из тех соображений, что капитал $X_i^\pi=(\gamma_i,S_i)+\beta_i$ должен быть в то же самое время равен $\sum\limits_{j=1}^{i}(\gamma_j,\Delta S_j)$.)

Ясно, что построенная стратегия π такова, что $X_0^\pi=0$, $X_i^\pi=0$ для $i<n$, $X_i^\pi=X_n^\pi\geqslant 0$ для всех $i\geqslant n$ и $\mathsf{P}(X_N^\pi>0)>0$, что противоречит условию a$'$).

5. *Доказательство импликации* e) $\Rightarrow$ b). Будем строить мартингальную меру $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}_b(\mathsf{P})$ по формуле $d\widetilde{\mathsf{P}}=\widetilde{Z}\,d\mathsf{P}$, где

$$\widetilde{Z}=\prod_{n=1}^{N}\widetilde{z}_n, \tag{16}$$

$\widetilde{z}_n$ — некоторые $\mathscr{F}_n$-измеримые функции $\widetilde{z}_n$.

Рассмотрим регулярную условную вероятность

$$\mathsf{Q}_n(\omega,dx)=\mathsf{P}(\Delta S_n\in dx\,|\,\mathscr{F}_{n-1})(\omega),$$

называемую также *переходной вероятностью* (из $(\Omega,\mathscr{F}_{n-1})$ в $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$).

Ниже по $\mathsf{Q}_n(\omega, dx)$ будут сконструированы специальным образом новые переходные вероятности $\mathsf{Q}'_n(\omega, dx, dv)$ (из $(\Omega, \mathscr{F}_{n-1})$ в $(E, \mathscr{E})$, $E = \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$), удовлетворяющие условию такие, что

$$\mathsf{Q}'_n\big(\omega, dx, (0, \infty)\big) = \mathsf{Q}_n(\omega, dx). \tag{17}$$

Воспользуемся теперь рассмотрениями из п. 2, выбирая там в качестве меры $\mathsf{Q}'(dx, dv)$ меру $\mathsf{Q}'_n(\omega, dx, dv)$ $(n = 1, \ldots, N,\ \omega \in \Omega)$.

Обозначим (см. формулы (5)—(7))

$$A = \left\{(\omega, g) \in \Omega \times G\colon \int_E z_g(x, v)\, \mathsf{Q}'_n(\omega, dx, dv) = 1,\ \varphi(g) = 0\right\}.$$

Заметим, что введенное выше пространство G, состоящее из элементов g, определенных соотношением (4), является польским пространством (с топологией прямого произведения). Пусть $\mathscr{G}$ — его борелевская σ-алгебра.

Множество A является $\mathscr{F}_{n-1} \otimes \mathscr{G}$-измеримым, и его проекция $\pi(A)$ на Ω совпадает (по предположению е)) с Ω, т. е. $\pi(A) = \Omega$.

Тогда по лемме 2 найдется такая G-значная $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримая функция $g_n = g_n(\omega)$, что $(\omega, g_n(\omega)) \in A$ для P-почти всех $\omega \in \Omega$.

Определим на $\Omega \times E$ функцию

$$z_n(\omega, x, v) = z_{g_n(\omega)}(x, v). \tag{18}$$

Эта функция является $\mathscr{F}_{n-1} \otimes \mathscr{E}$-измеримой и такой, что (P-п. н.)

$$\int_E z_n(\omega, x, v)\, \mathsf{Q}'(\omega, dx, dv) = 1 \tag{19}$$

и

$$\int_E x z_n(\omega, x, v)\, \mathsf{Q}'(\omega, dx, dv) = 0. \tag{20}$$

В силу соотношения (5) P-п. н.

$$\sup_v v z_n(\omega, x, v) < \infty.$$

Снова применяя лемму 2, находим, что существует такая $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримая положительная функция $V_{n-1} = V_{n-1}(\omega)$, что для всех (x, v) и P-почти всех $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$v z_n(\omega, x, v) \leqslant V_{n-1}(\omega). \tag{21}$$

Перейдем теперь к конструированию (индукцией назад) последовательности мер $\mathsf{Q}'_n = \mathsf{Q}'_n(\omega, dx, dv)$ и построенной для них соответствующей последовательности функций $z_n(\omega, x, v)$, $n = N, N-1, \ldots$

С этой целью возьмем $n = N$ и положим $V_N(\omega) = 1$, $\omega \in \Omega$. Пусть $\mathsf{Q}'_N = \mathsf{Q}'_N(\omega, dx, dv)$ — регулярная $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримая условная вероятность вектора $(\Delta S_N, V_N)$. Понятно, что «первый маргинал» этой меры есть в точности $\mathsf{Q}_N = \mathsf{Q}_N(\omega, dx)$.

Пусть $z_N(\omega, x, v)$ определяется по Q'_N в соответствии с описанной выше конструкцией (18) и $V_{N-1}(\omega)$ определяется по $z_N(\omega, x, v)$ в соответствии с неравенством (21). Тогда Q'_{N-1} определяем как регулярное $\mathscr{F}_{N-2}$-измеримое условное распределение вектора $(\Delta S_{N-1}, V_{N-1})$, и, вообще, если Q'_n определено, то затем определяем $z_n(\omega, x, v)$ согласно (18), а $V_{n-1}(\omega)$ — в соответствии с неравенством (21).

После этого определяем Q'_{n-1} как $\mathscr{F}_{n-2}$-условное распределение вектора $(\Delta S_{n-1}, V_{n-1})$ и т. д.

Обозначим

$$\widetilde{z}_n(\omega) = z_n\big(\omega, \Delta S_n(\omega), V_n(\omega)\big) \tag{22}$$

и

$$\widetilde{Z}(\omega) = \prod_{n=1}^{N} \widetilde{z}_n(\omega). \tag{23}$$

Тогда в силу соотношений (21) и (22) имеем

$$\widetilde{z}_n(\omega) \leqslant \frac{V_{n-1}(\omega)}{V_n(\omega)}. \tag{24}$$

Из соотношений (23), (24) с учетом равенства $V_N(\omega) = W_N(\omega) = 1$ находим, что

$$\widetilde{Z}(\omega) \leqslant V_0(\omega), \tag{25}$$

где $V_0(\omega) < \infty$ (P-п. н.). Но $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, поэтому $V_0(\omega)$ есть константа (P-п. н.).

Далее, из определения Q'_n и условий (19) и (20) находим, что (P-п. н.)

$$\mathsf{E}(\widetilde{z}_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega) = 1 \tag{26}$$

и

$$\mathsf{E}(\Delta S_n \widetilde{z}_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega) = 0. \tag{27}$$

Из равенства (26) следует, что $\mathsf{E}\,\widetilde{Z}(\omega) = 1$, и, значит, можно определить новую вероятностную меру $\widetilde{\mathsf{P}}$, полагая

$$\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = \widetilde{Z}(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega). \tag{28}$$

Из неравенства (25) ясно, что $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$.

Поскольку

$$\widetilde{\mathsf{E}}\,|\Delta S_n| = \mathsf{E}\,\widetilde{Z}|\Delta S_n| \leqslant V_0\,\mathsf{E}\,|\Delta S_n| < \infty$$

и по «формуле Байеса» (см. формулу (4) в § 3а) и свойству (27) имеем

$$\widetilde{\mathsf{E}}(\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(\Delta S_n \widetilde{z}_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0,$$

то по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $S = (S_n)$ является *мартингалом*.

Из проведенной конструкции меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ получаем, что $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}_b(\mathsf{P})$. Тем самым, импликация e) $\Rightarrow$ b) установлена.

6. *Доказательство импликации* c) $\Rightarrow$ a$''$). Пусть $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$. Тогда $S = (S_n)_{n \leqslant N}$ является $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом. Предположим, что π — самофинансируемая стратегия, $X_0^\pi = 0$ и $X_N^\pi \geqslant 0$.

Поскольку $\Delta X_n^\pi = \gamma_n \, \Delta S_n$, последовательность $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \leqslant N}$ является мартингальным преобразованием и, значит, по лемме из § 1c гл. II является мартингалом. Поэтому $\mathsf{E}\, X_N^\pi = \mathsf{E}\, X_0^\pi = 0$, и, значит, $X_N^\pi = 0$ (P-п. н.), что и доказывает импликацию c) $\Rightarrow$ a$''$).

Теорема A* доказана. □

Замечание 2. Если не предполагать, что $B_n \equiv 1$, $n \leqslant N$, то вместо оперирования с регулярными условными вероятностями

$$\mathsf{Q}_n(\omega, dx) = \mathsf{P}(\Delta S_n \in dx \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$$

надо иметь дело непосредственно с регулярными версиями условных вероятностей

$$\overline{\mathsf{Q}}_n(\omega, dx) = \mathsf{P}\left(\Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) \in dx \,\middle|\, \mathscr{F}_{n-1} \right)(\omega).$$

Соответствующие рассуждения с учетом того, что $B_n > 0$ и B_n — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримые величины, $n \leqslant N$, остаются теми же самыми, без каких-либо существенных изменений.

3. Конструкция мартингальных мер с помощью абсолютно непрерывной замены меры

§ 3a. Основные определения. Процесс плотности

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство, $n \geqslant 1$.

Говорят, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, определенная на $(\Omega, \mathscr{F})$, является *абсолютно непрерывной* относительно меры P (обозначение: $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$), если для всякого такого $A \in \mathscr{F}$, что $\mathsf{P}(A) = 0$, также и $\widetilde{\mathsf{P}}(A) = 0$:

$$\mathsf{P}(A) = 0 \Rightarrow \widetilde{\mathsf{P}}(A) = 0.$$

Меры P и $\widetilde{\mathsf{P}}$, заданные на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$, называются *эквивалентными* (обозначение: $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$), если $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$ и $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$.

Во многих случаях требование абсолютной непрерывности или эквивалентности мер оказывается слишком сильным, а зачастую и просто лишним, поскольку на самом деле хватает и более слабого понятия *локальной* абсолютной непрерывности в следующем смысле.

Пусть $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} | \mathscr{F}_n$ есть сужение вероятностной меры P на σ-алгебру $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}$. Иначе говоря, P_n — это мера, определенная на $(\Omega, \mathscr{F}_n)$ и такая, что для всякого $A \in \mathscr{F}_n$ выполняется равенство

$$\mathsf{P}_n(A) = \mathsf{P}(A).$$

Говорят, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ *локально абсолютно непрерывна* относительно меры P (обозначение: $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$), если для каждого $n \geqslant 1$ выполняется условие

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n.$$

Меры P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ называются *локально эквивалентными* (обозначение: $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$), если $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ и $\mathsf{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \widetilde{\mathsf{P}}$.

Если, скажем, $\Omega = \mathbb{R}^\infty$, т. е. имеется координатное пространство последовательностей $\omega = (x_1, x_2, \ldots)$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\omega\colon x_1, \ldots, x_n)$ — σ-алгебра, порожденная первыми n координатами, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$, и P, $\widetilde{\mathsf{P}}$ — вероятностные меры на

$(\Omega, \mathscr{F})$, то локальная абсолютная непрерывность $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ есть не что иное, как абсолютная непрерывность *конечномерных* распределений вероятностей.

Заметим, что если a priori предполагается, что $n \leqslant N < \infty$, то понятия локальной абсолютной непрерывности и (просто) абсолютной непрерывности совпадают. Так что введение понятия «локальности» представляет интерес для тех моделей, где временно́й параметр может принимать бесконечные значения, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Наряду с сужениями $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} | \mathscr{F}_n$ меры P на σ-алгебру $\mathscr{F}_n$ приходится рассматривать и сужения $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P} | \mathscr{F}_\tau$ меры P на σ-алгебру $\mathscr{F}_\tau$, состоящую из тех множеств $A \in \mathscr{F}$, для которых при каждом $n \geqslant 1$ выполняется условие $\{\tau(\omega) \leqslant n\} \cap A \in \mathscr{F}_n$. Подчеркнем, что, как обычно, $\mathscr{F}_\infty = \mathscr{F}$ (и $\mathscr{F}_{\infty-} = \bigvee \mathscr{F}_n$); см. [250, гл. I, § 1a].

2. Пусть $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$. Тогда $\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и, как известно (см., например, [439]), существуют *производные Радона—Никодима*, обозначаемые

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n} \quad \text{или} \quad \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}(\omega)$$

и определяемые как такие $\mathscr{F}_n$-измеримые функции $Z_n = Z_n(\omega)$, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n(A) = \int_A Z_n(\omega)\, \mathsf{P}_n(d\omega), \quad A \in \mathscr{F}_n. \tag{1}$$

Замечание. Производная Радона—Никодима $\dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$ *определяется*, и *единственным* образом, лишь с точностью до P_n-неразличимости, т. е. если для $Z_n(\omega)$ выполнено условие (1) и точно так же для $Z'_n(\omega)$ выполнено условие (1) (с заменой $Z_n(\omega)$ на $Z'_n(\omega)$), то $\mathsf{P}\big(Z_n(\omega) \neq Z'_n(\omega)\big) = 0$.

В этом смысле $Z_n(\omega)$ и $Z'_n(\omega)$ являются версиями производной Радона—Никодима. И когда мы говорим, что Z_n — производная Радона—Никодима, и пишем $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, то это подразумевает, что выбрана *какая-то версия*, с которой мы и оперируем. При этом выбираемую версию всегда можно, как нетрудно видеть, выбрать не только такой, что $\mathsf{P}\big(Z_n(\omega) \geqslant 0\big) = 1$, но и такой, что $Z_n(\omega) \geqslant 0$ для *всех* $\omega \in \Omega$ и каждого $n \geqslant 1$. Именно поэтому требование *неотрицательности* обычно просто включают в определение производной Радона—Никодима вероятностных мер.

В дальнейшем процесс с дискретным временем

$$Z = (Z_n)_{n \geqslant 1}$$

мы называем *процессом плотности* (мер $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ относительно P_n, $n \geqslant 1$, или такой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ относительно P, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$).

В следующей теореме для удобства ссылок собраны хотя и простые, но необходимые и важные свойства процесса плотности.

Теорема. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$.

1. *Процесс плотности* $Z = (Z_n)$ *является неотрицательным* $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$*-мартингалом с* $\mathsf{E}\, Z_n = 1$.

2. *Пусть* $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\infty-}$, *где* $\mathscr{F}_{\infty-} = \bigvee \mathscr{F}_n$. *Тогда следующие условия являются эквивалентными:*

a) $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$;

b) *процесс* $Z = (Z_n)$ *является равномерно интегрируемым* $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$*-мартингалом*;

c) $\widetilde{\mathsf{P}}\bigl(\sup\limits_n Z_n < \infty\bigr) = 1$.

3. *Пусть* $\tau = \inf\{n : Z_n = 0\}$ — *момент первого обращения процесса плотности в ноль. Тогда и для всех последующих моментов этот процесс «остается в нуле» в том смысле, что*

$$\mathsf{P}\bigl\{\omega : \exists n \geqslant \tau(\omega),\ Z_n(\omega) \neq 0\bigr\} = 0.$$

4. *Пусть* τ — *момент остановки. На множестве* $\{\tau < \infty\}$ *сужения* $\widetilde{\mathsf{P}}_\tau = \widetilde{\mathsf{P}} | \mathscr{F}_\tau$, $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P} | \mathscr{F}_\tau$ *на* σ*-алгебру* $\mathscr{F}_\tau$ (см. определение 2 в § 1f гл. II) *таковы, что* $\widetilde{\mathsf{P}}_\tau \ll \mathsf{P}_\tau$ *и* (P-п. н.)

$$Z_\tau = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_\tau}{d\mathsf{P}_\tau}. \tag{2}$$

5. *Имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathsf{P}}\bigl(\inf_n Z_n > 0\bigr) = 1. \tag{3}$$

6. *Если* $\mathsf{P}(Z_n > 0) = 1$ *при каждом* $n \geqslant 1$, *то* $\mathsf{P} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \widetilde{\mathsf{P}}$ *и*

$$\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\sim} \mathsf{P}.$$

Доказательство. 1. Из (1) для $A \in \mathscr{F}_n$

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n(A) = \mathsf{E}(I_A Z_n) = \widetilde{\mathsf{P}}_{n+1}(A) = \mathsf{E}(I_A Z_{n+1})$$

и, значит, $\mathsf{E}\, I_A Z_n = \mathsf{E}\, I_A Z_{n+1}$. Поэтому $\mathsf{E}(Z_{n+1} | \mathscr{F}_n) = Z_n$ (P-п. н.) для каждого $n \geqslant 1$. Ясно также, что $\mathsf{E}\, Z_n = \widetilde{\mathsf{P}}_n(\Omega) = 1$. Тем самым, Z является $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$-мартингалом.

2. Докажем импликацию a) $\Rightarrow$ b). Напомним следующий классический результат теории мартингалов ([109], см. также п. 4 § 3b гл. III для случая непрерывного времени).

Теорема Дуба о сходимости. *Пусть* $X = (X_n)$ — *такой супермартингал относительно меры* P *и потока* $(\mathscr{F}_n)$, *что существует интегрируемая случайная величина* Y, *удовлетворяющая условию* $X_n \geqslant \mathsf{E}(Y | \mathscr{F}_n)$ (P-п. н.) *для всех* $n \geqslant 1$.

Тогда X_n *сходится* (P-п. н.) *к конечному пределу, скажем,* X_∞:

$$\lim_n X_n = X_\infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

(Доказательство см. в [109] и во многих учебных пособиях, например [439, § 4 гл. VII].)

Для доказательства импликации a) $\Rightarrow$ c) достаточно заметить, что, поскольку $Z_n \geqslant 0$, в силу сформулированной теоремы Дуба с P-вероятностью единица существует конечный предел $\lim\limits_n Z_n$. Но $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, поэтому этот предел существует и конечен также и по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, а значит, $\widetilde{\mathsf{P}}\big(\sup\limits_n Z_n < \infty\big) = 1$.

Докажем импликацию c) $\Rightarrow$ b). *Равномерная интегрируемость* семейства случайных величин (ξ_n) означает, что

$$\lim_N \sup_n \mathsf{E}\big(|\xi_n| I(|\xi_n| > N)\big) = 0.$$

В рассматриваемом случае ($\xi_n = Z_n$) из свойства c) имеем

$$\mathsf{E}\big(Z_n I(Z_n > N)\big) = \widetilde{\mathsf{P}}(Z_n > N) \leqslant \widetilde{\mathsf{P}}\big(\sup_n Z_n > N\big) \to 0, \quad N \to \infty,$$

что и доказывает свойство b).

Докажем импликацию b) $\Rightarrow$ a). По теореме Дуба $Z_n \to Z_\infty$ (P-п. н.). Равномерная интегрируемость семейства (Z_n) обеспечивает тогда и сходимость в $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, т. е. $\mathsf{E}\,|Z_n - Z_\infty| \to 0$, $n \to \infty$.

Для множеств $A \in \mathscr{F}_m$ и $n \geqslant m$ имеем

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{E}\, I_A Z_m = \mathsf{E}\, I_A Z_n.$$

Но $\mathsf{E}\,|Z_n - Z_\infty| \to \infty$. Поэтому для каждого $A \in \mathscr{F}_m$ имеем

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{E}\, I_A Z_\infty.$$

Применяя обычную технику монотонных классов [439, § 2 гл. II], отсюда заключаем, что это равенство сохраняется на $\bigcup \mathscr{F}_n$ и на $\mathscr{F} = \sigma\big(\bigcup \mathscr{F}_n\big)$ $(\equiv \mathscr{F}_{-\infty} = \bigvee \mathscr{F}_n)$.

Таким образом, $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, и, более того,

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}} = Z_\infty,$$

где $Z_\infty = \lim Z_n$.

3. Для доказательства этого свойства нам нужен другой классический результат теории мартингалов ([109], см. снова п. 4 § 3b гл. III где рассмотрен случай непрерывного времени):

Теорема Дуба об остановке. *Пусть супермартингал $X = (X_n)$ таков, что существует интегрируемая случайная величина Y со свойством*

$$X_n \geqslant \mathsf{E}(Y \,|\, \mathscr{F}_n), \quad n \geqslant 1.$$

Тогда для любых двух марковских моментов σ и τ случайные величины X_σ и X_τ являются интегрируемыми и на множестве $\{\sigma \leqslant \tau\}$

$$\mathsf{E}(X_\tau \,|\, \mathscr{F}_\sigma) \leqslant X_\sigma \quad (\mathsf{P}\text{-}п.\ н.).$$

(Доказательство см. в [109], [439, § 2 гл. VII].)

Замечание. На множестве $\{\omega\colon \tau(\infty)=\infty\}$ значение $X_\tau(\omega)$ полагается равным $X_\infty(\omega)$, где $X_\infty(\omega)$ есть предел $\lim X_n(\omega)$, существующий по теореме Дуба о сходимости.

Наряду с моментом $\tau=\inf\{n\geqslant 1\colon Z_n=0\}$ введем моменты $\sigma_m=\inf\{n\geqslant \geqslant 1\colon Z_n>1/m\}$. Нетрудно убедиться, что τ и σ_m являются моментами остановки, т. е. множества $\{\tau\leqslant n\}$ и $\{\sigma_m\leqslant n\}$ принадлежат $\mathscr{F}_n$ для каждого $n\geqslant 1$ и всех $m\geqslant 1$. (Напомним, что, как всегда, $\tau(\omega)=\infty$, если $Z_n(\omega)>0$ при всех $n\geqslant 1$.)

Из теоремы Дуба об остановке

$$\mathsf{E}(Z_{\sigma_m}\,|\,\mathscr{F}_\tau)\leqslant Z_\tau=0 \text{ на множестве } \{\omega\colon\ \tau(\omega)<\infty\}.$$

Значит, $Z_{\sigma_m}I(\tau<\infty)=0$, $m\geqslant 1$, и, следовательно, $\sigma_m=\infty$ (P-п. н.), $m\geqslant 1$, что и означает выполнение требуемого свойства

$$\mathsf{P}\bigl\{\omega\colon\ \exists\, n\geqslant\tau(\omega),\ Z_n(\omega)\neq 0\bigr\}=0.$$

4. Пусть $A\in\mathscr{F}_\tau$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\bigl[I_A\cdot I_{\{\tau<\infty\}}\cdot Z_\tau\bigr]&=\sum_{n\geqslant 1}\mathsf{E}\bigl[I_A\cdot I_{\{\tau=n\}}\cdot Z_\tau\bigr]=\sum_{n\geqslant 1}\mathsf{E}\bigl[I_A\cdot I_{\{\tau=n\}}\cdot Z_n\bigr]=\\&=\sum_{n\geqslant 1}\widetilde{\mathsf{P}}\bigl(A\cap I(\tau=n)\bigr)=\widetilde{\mathsf{P}}\bigl(A\cap\{\tau<\infty\}\bigr),\end{aligned}$$

что и доказывает требуемое утверждение.

5. Обозначим

$$\tau_m=\inf\Bigl\{n\colon\ Z_n<\frac{1}{m}\Bigr\}.$$

Тогда в силу п. 4 имеем

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\tau_m<\infty)=\mathsf{E}\bigl(Z_{\tau_m}I(\tau_m<\infty)\bigr)\leqslant\frac{1}{m},$$

и, значит,

$$\widetilde{\mathsf{P}}\Bigl(\bigcap_m\{\tau_m<\infty\}\Bigr)=0,$$

что равносильно требуемому утверждению $\widetilde{\mathsf{P}}\bigl(\inf_n Z_n>0\bigr)=1$.

6. Если $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\ll}\mathsf{P}$ и $\mathsf{P}(Z_n>0)=1$, $n\geqslant 1$, то и $\widetilde{\mathsf{P}}(Z_n>0)=1$.

Для $A\in\mathscr{F}_n$ положим

$$\mathsf{Q}_n(A)=\int_A Z_n^{-1}\,\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega).$$

Тогда, поскольку $\widetilde{\mathsf{P}}_n(d\omega)=Z_n\,\mathsf{P}_n(d\omega)$, получаем

$$\mathsf{Q}_n(A)=\int_A Z_n^{-1}Z_n\,\mathsf{P}(d\omega)=\mathsf{P}_n(A),\quad n\geqslant 1.$$

Тем самым,

$$\mathsf{P}_n(A) = \int_A Z_n^{-1}\, \widetilde{\mathsf{P}}_n(d\omega),$$

и, значит, $\mathsf{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \widetilde{\mathsf{P}}$.

Итак, все утверждения 1—6 теоремы доказаны. □

3. Следующая техническая лемма полезна при пересчете *условных* математических ожиданий по разным мерам. В дальнейшем она будет многократно использоваться, и для удобства ссылок называться *леммой о пересчете*. Часто приводимую ниже формулу (4) называют *формулой Байеса* или *обобщенной формулой Байеса* [303, гл. 7].

Лемма. *Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n$ и Y — ограниченная (или $\widetilde{\mathsf{P}}$-интегрируемая) $\mathscr{F}_n$-измеримая случайная величина. Тогда для всякого $m \leqslant n$ выполняется равенство*

$$\widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_m) = \frac{1}{Z_m}\, \mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_m) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}). \tag{4}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в выражении, стоящем в правой части равенства (4), $\widetilde{\mathsf{P}}(Z_m > 0) = 1$ (см. утверждение 5 в вышеприведенной теореме). Далее, на множестве $\{\omega : Z_m(\omega) = 0\}$ также и $Z_n(\omega) = 0$, $n \geqslant m$ (P-п. н.). Учитывая это, будем на этом множестве правую часть в (4) считать равной нулю.

По определению $\widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_m)$ является такой $\mathscr{F}_m$-измеримой случайной величиной, что для любого $A \in \mathscr{F}_m$ выполняется равенство

$$\widetilde{\mathsf{E}}\bigl[I_A \cdot \widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_m)\bigr] = \widetilde{\mathsf{E}}[I_A \cdot Y], \tag{5}$$

так что надо лишь убедиться в том, что для $\mathscr{F}_m$-измеримой функции, стоящей в правой части равенства (4),

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left[I_A \cdot \frac{1}{Z_m}\, \mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_m)\right] = \widetilde{\mathsf{E}}[I_A \cdot Y]. \tag{6}$$

То, что это действительно выполнено, вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{E}}\left[I_A \cdot \frac{1}{Z_m}\, \mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_m)\right] &= \mathsf{E}\left[I_A \cdot \frac{1}{Z_m}\, \mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_m) \cdot Z_m\right] = \\
&= \mathsf{E}\bigl[I_A \cdot \mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_m)\bigr] = \\
&\overset{(\alpha)}{=} \mathsf{E}[I_A Y Z_n] \overset{(\beta)}{=} \mathsf{E}[I_A Y Z_m] = \widetilde{\mathsf{E}}[I_A Y],
\end{aligned}$$

где равенство (α) следует из определения условного математического ожидания $\mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_m)$, а (β) справедливо в силу $\mathscr{F}_m$-измеримости $I_A Y$ и мартингальности последовательности $Z = (Z_n)$. □

§ 3b. Дискретный вариант теоремы Гирсанова. I. Условно-гауссовский случай

1. Рассмотрение общих вопросов конструкции вероятностных мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, (локально) абсолютно непрерывных или эквивалентных исходной «базисной» мере P, входящей в определение фильтрованного пространства

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}, \mathsf{P}),$$

целесообразно начать с *дискретного* (во времени) *варианта* теоремы, установленной И. В. Гирсановым в работе [183] для *процессов диффузионного типа* и послужившей прототипом разнообразных теорем — для мартингалов, локальных мартингалов, случайных мер, семимартингалов и т. п. (См., например, гл. II в [250].)

Пусть $n\geqslant 1$ — временно́й параметр и $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ — последовательность $\mathscr{F}_n$-измеримых случайных величин с распределением

$$\mathrm{Law}(\varepsilon_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}; \mathsf{P}) = \mathscr{N}(0, 1). \tag{1}$$

В частности, это означает, что последовательность ε состоит из независимых, стандартных нормально распределенных величин, $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0, 1)$.

Пусть наряду с последовательностью $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ заданы предсказуемые последовательности $\mu=(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ и $\sigma=(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$, т. е. μ_n и σ_n являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми ($\mathscr{F}_0=\{\varnothing, \Omega\}$), причем будем считать, что $\sigma_n>0$, что оправдывается смыслом этого параметра как «волатильности» и тем, что наблюдения с $\sigma_n=0$ можно просто исключить из рассмотрения.

Положим $h=(h_n)_{n\geqslant 1}$, где

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n. \tag{2}$$

Из условия (1) следует, что (регулярное) условное распределение $\mathsf{P}(h_n \leqslant \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$ определяется формулой

$$\mathsf{P}(h_n \leqslant x \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}\, dy, \tag{3}$$

или, в символической форме,

$$\mathrm{Law}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}; \mathsf{P}) = \mathscr{N}(\mu_n, \sigma_n^2), \tag{4}$$

что дает основание назвать последовательность $h=(h_n)$ *условно-гауссовской* (по мере P), имеющей (условные) среднее и дисперсию

$$\mathsf{E}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mu_n, \tag{5}$$

$$\mathsf{D}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2. \tag{6}$$

Из формул (4) или (5) и (6) находим, что

$$\mathsf{E}(h_n - \mu_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \tag{5'}$$

$$\mathsf{D}(h_n - \mu_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2. \tag{6'}$$

Если обозначить

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} h_k, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k, \quad M_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \varepsilon_k,$$

то можно сказать, что в *условно-гауссовском случае* величины H_n представлены в виде

$$H_n = A_n + M_n,$$

где $A = (A_n)$ — *предсказуемая последовательность и* $M = (M_n)$ — *условно-гауссовский локальный мартингал с квадратической характеристикой*

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

Обозначим $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k$, $\Delta = 1$. Тогда равенство (2) можно переписать в разностной форме

$$\Delta H_n = \mu_n \Delta + \sigma_n \Delta W_n,$$

что естественно рассматривать как дискретный аналог *стохастического дифференциала* (см., например, [303, гл. 4] и § 3d гл. III)

$$dH_t = \mu_t \, dt + \sigma_t \, dW_t$$

некоторого процесса Ито $H = (H_t)$, порожденного винеровским процессом $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$, с локальным сносом $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ и локальной волатильностью $(\sigma_t)_{t \geqslant 0}$.

Применительно к рассматриваемому случаю условно-гауссовской последовательности (2) дискретный аналог теоремы Гирсанова (полученной, как уже отмечалось, И. В. Гирсановым в случае *непрерывного времени*) связан с вопросом о том, *можно ли найти такую меру* $\widetilde{\mathsf{P}}$, *абсолютно непрерывную или эквивалентную мере* P, *относительно которой последовательность* $h = (h_n)$ *становится* (*локальной*) *мартингал-разностью*. В этой связи полезно подчеркнуть, что правая часть равенства (2) содержит два члена: «снос» μ_n и «дискретную диффузию» $\sigma_n \varepsilon_n$, являющуюся (по мере P) мартингал-разностью. Сформулированный вопрос состоит, в сущности, в том, нельзя ли найти такую меру $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, относительно которой (h_n) не имеет «сносовой» компоненты, а является лишь «дискретной диффузией», т. е. (h_n) есть (локальная) мартингал-разность.

2. При конструировании меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ ключевую роль играет последовательность (положительных) случайных величин

$$Z_n = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\}, \quad n \geqslant 1. \tag{7}$$

Лемма. 1. *Последовательность* $Z=(Z_n)_{n\geqslant 1}$ *является* $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$*-мартингалом,* $\mathsf{E}\, Z_n = 1$*,* $n\geqslant 1$.

2. *Пусть* $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$ *и выполнено условие Новикова*

$$\mathsf{E}\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right) < \infty. \tag{8}$$

Тогда $Z=(Z_n)_{n\geqslant 1}$ — *равномерно интегрируемый мартингал с предельным* (P-п. н.) *значением* $Z_\infty = \lim Z_n$*, где*

$$Z_\infty = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\}, \tag{9}$$

и

$$Z_n = \mathsf{E}(Z_\infty \,|\, \mathscr{F}_n). \tag{10}$$

Доказательство. 1. Это утверждение очевидно, поскольку для любого $k\geqslant 1$ ($\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$) выполняется равенство

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{k-1}\right\} = 1, \tag{11}$$

что следует из $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримости $\dfrac{\mu_k}{\sigma_k}$ и условной гауссовости (1).

2. Доказательство равномерной интегрируемости семейства (Z_n) при условии (8) достаточно сложно и может быть найдено и в оригинальной работе А. А. Новикова [368], и во многих руководствах, например [303, гл. 7], [402].

Однако при несколько более сильном условии:

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\} < \infty \quad \textit{для некоторого } \varepsilon > 0 \tag{12}$$

доказательство равномерной интегрируемости семейства $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ сравнительно элементарно. Поэтому представляется целесообразным привести это доказательство, что мы и делаем в конце параграфа (см. п. 5). □

3. Зафиксируем некоторое $N\geqslant 1$ и будем рассматривать последовательность (h_n) только для $n\leqslant N$. Для простоты обозначений будем считать, что $\mathscr{F} = \mathscr{F}_N$, так что $\mathsf{P}_N = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_N = \mathsf{P}$.

Поскольку $Z_N > 0$ и $\mathsf{E}\, Z_N = 1$, на $(\Omega, \mathscr{F})$ можно ввести вероятностную меру $\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)$, полагая

$$\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega). \tag{13}$$

Подчеркнем, что здесь не только $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, но и $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$. Поэтому $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$.

Рассмотрим свойства последовательности $(h_n)_{n\leqslant N}$ относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$.

По формуле Байеса4 из § 3а для всякого $\lambda\in\mathbb{R}$ и $n\leqslant N$ имеем ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.)

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{E}}(e^{i\lambda h_n}\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) &= \mathsf{E}\Big(e^{\left(i\lambda\sigma_n-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)\varepsilon_n+i\lambda\mu_n-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2}\;\Big|\;\mathscr{F}_{n-1}\Big) = \\ &= \mathsf{E}\left(e^{\left(i\lambda\sigma_n-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)\varepsilon_n-\frac{1}{2}\left(i\lambda\sigma_n-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2} e^{\frac{1}{2}\left(i\lambda\sigma_n-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2+i\lambda\mu_n-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2}\;\Big|\;\mathscr{F}_{n-1}\right) = \\ &= e^{-\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}},\end{aligned} \tag{14}$$

где использовано то, что

$$\mathsf{E}\, e^{\left(i\lambda\sigma_n-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)\varepsilon_n-\frac{1}{2}\left(i\lambda\sigma_n-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2}=1$$

и σ_n^2 — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримые величины.

Полученное равенство

$$\widetilde{\mathsf{E}}(e^{i\lambda h_n}\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = e^{-\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}} \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}) \tag{15}$$

говорит о том, что относительно новой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $h=(h_n)$ осталась *условно-гауссовской*, но уже с *нулевым* «сносовым» членом:

$$\mathrm{Law}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1};\widetilde{\mathsf{P}}) = \mathscr{N}(0,\sigma_n^2), \tag{16}$$

и, таким образом, аналогом соотношений (5) и (6) здесь являются следующие:

$$\widetilde{\mathsf{E}}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = 0, \tag{17}$$

$$\widetilde{\mathsf{D}}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2. \tag{18}$$

С наглядной точки зрения можно сказать, что переход от меры P к мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ *аннулирует* («убивает») снос $\mu=(\mu_n)_{n\leqslant N}$ у последовательности $h=(h_n)_{n\leqslant N}$, *оставляя той же самой условную дисперсию*.

Из формулы (16) можно заключить также, что если $\widetilde{\varepsilon}=(\widetilde{\varepsilon}_n)_{n\leqslant N}$ — последовательность $\mathscr{F}_n$-измеримых величин с распределением

$$\mathrm{Law}\big(\widetilde{\varepsilon}_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1};\widetilde{\mathsf{P}}\big) = \mathscr{N}(0,1) \tag{19}$$

(такую последовательность всегда можно построить, быть может, правда, за счет расширения исходного вероятностного пространства), то

$$\mathrm{Law}\big(h_n,\ n\leqslant N\,|\,\widetilde{\mathsf{P}}\big) = \mathrm{Law}\big(\sigma_n\widetilde{\varepsilon}_n,\ n\leqslant N\,|\,\widetilde{\mathsf{P}}\big). \tag{20}$$

Отсюда видно, что по новой мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $(h_n)_{n\leqslant N}$ ведет себя как локальная мартингал-разность $(\sigma_n\widetilde{\varepsilon}_n)_{n\leqslant N}$, в то время как относительно исходной меры P аналогичное (20) свойство имеет такой вид:

$$\mathrm{Law}\big(h_n-\mu_n,\ n\leqslant N\,|\,\mathsf{P}\big) = \mathrm{Law}\big(\sigma_n\varepsilon_n,\ n\leqslant N\,|\,\mathsf{P}\big). \tag{21}$$

Изменим сейчас порядок рассмотрений.

Будем исходными считать меру $\widetilde{\mathsf{P}}$ и последовательность $h=(h_n)$, для которых имеет место свойство (20). Тогда при переходе от меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ к мере P (в соответствии с формулой (13)) получим свойство (21), которое можно интерпретировать как *появление* сноса у локальной мартингал-разности $(\sigma_n \widetilde{\varepsilon}_n)_{n\leqslant N}$. Именно эта интерпретация и оказывается наиболее удобной для формулировки соответствующего общего результата о преобразовании локальных мартингалов при абсолютно непрерывной замене меры (см. далее § 3d).

Перед тем как резюмировать полученные результаты, заметим следующее.

Пусть $\sigma_n^2(\omega)$ не зависят от ω $(=\sigma_n^2)$. Тогда из формулы (14) индуктивным образом находим, что для $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k\in\{1, \ldots, N\}$, выполняется равенство

$$\widetilde{\mathsf{E}}\Big(e^{i\sum\limits_{k=1}^{N}\lambda_k h_k}\Big) = \widetilde{\mathsf{E}}\Big(e^{i\sum\limits_{k=1}^{N-1}\lambda_k h_k}\,\widetilde{\mathsf{E}}(e^{i\lambda_N h_N}\,|\,\mathscr{F}_{N-1})\Big) = \\ = e^{-\frac{\lambda_N^2\sigma_N^2}{2}}\;\widetilde{\mathsf{E}}\Big(e^{i\sum\limits_{k=1}^{N-1}\lambda_k h_k}\Big) = \ldots = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{N}\lambda_k^2\sigma_k^2}.$$

Тем самым, относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $(h_n)_{n\leqslant N}$ является последовательностью *независимых* нормально распределенных, $h_n \sim \mathscr{N}(0, \sigma_n^2)$, случайных величин с нулевыми средними. (Это можно было также заключить из формул (17)—(20).)

Итак, сведем полученные результаты вместе в виде следующей теоремы, которую естественно назвать дискретным аналогом теоремы Гирсанова.

Теорема. *Пусть $h=(h_n)_{n\leqslant N}$ — такая условно-гауссовская последовательность, что*

$$\mathrm{Law}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1};\mathsf{P}) = \mathscr{N}(\mu_n, \sigma_n^2), \quad n\leqslant N.$$

Пусть $\mathscr{F}_N=\mathscr{F}$ и мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ определена формулой (13) *с плотностью Z_N, задаваемой формулой* (7).

Тогда

1) *относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $h=(h_n)_{n\leqslant N}$ является условно-гауссовской:*

$$\mathrm{Law}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1};\widetilde{\mathsf{P}}) = \mathscr{N}(0, \sigma_n^2), \quad n\leqslant N;$$

2) *если величины $\sigma_n^2=\sigma_n^2(\omega)$, $n\leqslant N$, не зависят от ω, то по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $h=(h_n)_{n\leqslant N}$ является последовательностью независимых гауссовских величин:*

$$\mathrm{Law}(h_n\,|\,\widetilde{\mathsf{P}}) = \mathscr{N}(0, \sigma_n^2), \quad n\leqslant N;$$

3) *если $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_n$ и выполнено условие* (8), *то свойства* 1 *и* 2 *остаются справедливыми для всех $n\geqslant 1$ с такой мерой $\widetilde{\mathsf{P}}$, что $\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega)=Z_\infty(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$, где $Z_\infty(\omega)$ определено формулой* (9).

4. Заметим, что в конструкции меры по формулам (13) и (7) непосредственно участвовали последовательности (μ_n) и (σ_n), входящие в определение h_n $(=\mu_n+\sigma_n\varepsilon_n)$. В этой связи, а также с целью установления связи с процедурой специального выбора значений $a_n(\omega)$ при рассмотрении преобразований Эшера (см. § 2d), рассмотрим семейство процессов $Z^{(b)}=(Z_n^{(b)})_{1\leqslant n\leqslant N}$, определяемое величинами

$$Z_n^{(b)}(\omega)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}b_k\varepsilon_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right\}, \tag{22}$$

где $b_k=b_k(\omega)$ — $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримые величины.

Поскольку $\mathsf{E}\,Z_N^{(b)}(\omega)=1$, на $\mathscr{F}_N=\mathscr{F}$ определена вероятностная мера

$$\widetilde{\mathsf{P}}^{(b)}(d\omega)=Z_N^{(b)}(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega). \tag{23}$$

Условное математическое ожидание относительно этой меры равно

$$\widetilde{\mathsf{E}}^{(b)}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=-b_n-\frac{\mu_n}{\sigma_n}. \tag{24}$$

Отсюда ясно, что выбор в теореме Гирсанова специальных значений $b_n=-\dfrac{\mu_n}{\sigma_n}$, $n\leqslant N$, диктуется тем, что именно при таком выборе последовательность $h=(h_n)_{n\leqslant N}$ становится *локальной мартингал-разностью*.

Далее, если $X_n=\mu_n+\varepsilon_n$, то

$$\varphi_n(a;\omega)\equiv\mathsf{E}(e^{aX_n}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=e^{\frac{1}{2}a^2-a\mu_n}.$$

Отсюда видим, что

$$\inf_a\varphi_n(a;\omega)=\varphi_n(a_n(\omega);\omega),$$

если $a_n(\omega)=\mu_n$, $n\leqslant N$.

Именно эти «экстремальные» значения $a_n(\omega)$ и были использованы в § 2d при построении с помощью преобразования Эшера меры, относительно которой последовательность (X_n) становится мартингал-разностью.

Тем самым, в рассматриваемом случае $(\sigma_n\equiv 1)$ и преобразование Гирсанова, и преобразование Эшера приводят к одной и той же мере $\widetilde{\mathsf{P}}$.

5. Приведем доказательство того, что при условии (12) семейство $Z=(Z_n)_{n\geqslant 1}$ с величинами Z_n, определенными формулой (7), является равномерно интегрируемым.

Пусть $\beta_n=-\dfrac{\mu_n}{\sigma_n}$. Тогда условие (12) примет следующий вид: *существует такое $\delta>0$, что*

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\right\}<\infty. \tag{25}$$

В соответствии с формулой (7) имеем

$$Z_n=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varepsilon_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\},\qquad n\geqslant 1. \tag{26}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $p > 1$. Положим

$$\psi_n^{(1)} = \exp\left\{(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varepsilon_k - \frac{p(1+\varepsilon)^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\}, \tag{27}$$

$$\psi_n^{(2)} = \exp\left\{\left(\frac{p(1+\varepsilon)^2}{2} - \frac{1+\varepsilon}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\}. \tag{28}$$

Для требуемой равномерной интегрируемости семейства $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ достаточно показать (см., например, [439, гл. II, § 6, лемма 3]), что при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\sup_n \mathsf{E}\, Z_n^{1+\varepsilon} < \infty. \tag{29}$$

Поскольку

$$Z_n^{1+\varepsilon} = \psi_n^{(1)}\psi_n^{(2)},$$

в силу неравенства Гёльдера $(1/p + 1/q = 1)$ получаем

$$\mathsf{E}\, Z_n^{1+\varepsilon} = \mathsf{E}\,\psi_n^{(1)}\psi_n^{(2)} \leqslant \left[\mathsf{E}\big(\psi_n^{(1)}\big)^p\right]^{1/p}\left[\mathsf{E}\big(\psi_n^{(2)}\big)^q\right]^{1/q} = \left[\mathsf{E}\big(\psi_n^{(2)}\big)^q\right]^{1/q}, \tag{30}$$

где мы воспользовались тем, что (см. формулу (11))

$$\mathsf{E}\big(\psi_n^{(1)}\big)^p = 1.$$

Положим $p = 1+\delta$, $q = (1+\delta)/\delta$, где $\delta > 0$ таково, что выполнено условие (25). Выберем $\varepsilon > 0$ таким, что

$$\varepsilon(1+\varepsilon) \leqslant \frac{\delta^2}{(1+\delta)(1+2\delta)}. \tag{31}$$

Тогда

$$\big(\psi_n^{(2)}\big)^q \leqslant \exp\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon q(1+\varepsilon)(1+q)+1}{2(q-1)}\right)\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right\} \leqslant \exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\right\},$$

и, значит, в силу условия (25),

$$\sup_n \mathsf{E}\, Z_n^{1+\varepsilon} \leqslant \left[\sup_n \mathsf{E}\big(\psi_n^{(2)}\big)^q\right]^{1/q} \leqslant \left[\mathsf{E}\exp\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\right]^{1/q} < \infty,$$

что и доказывает требуемую равномерную интегрируемость семейства (Z_n).

§ 3c. Мартингальность цен в случае условно-гауссовского и логарифмически условно-гауссовского распределений

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ — исходное фильтрованное вероятностное пространство, $n \geqslant 0$. Рассматривая вопрос о мартингальных мерах, относительно которых последовательность нормированных цен $\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)$ является мартингалом, обратимся сначала к несколько *идеализированной* модели (B, S)-рынка, считая, что $B = (B_n)$, $B_n \equiv 1$, и $S = (S_n)$, где

$$S_n = S_0 + H_n, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} h_k$, $S_0 = \mathrm{Const}$. Будем считать также, что $h = (h_n)$ является условно-гауссовской последовательностью, $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$, где μ_n и σ_n — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримые величины и $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ — последовательность независимых $\mathscr{N}(0, 1)$-распределенных $\mathscr{F}_n$-измеримых величин ε_n, $n \geqslant 1$ (см. подробнее предшествующий параграф).

Тем самым, сейчас допускается, что цены S_n могут принимать и *отрицательные* значения. В этом и состоит упомянутая выше идеализация. Впрочем, заметим, что именно подобная модель и рассматривалась Л. Башелье в [12]; подробнее по этому поводу см. § 2a гл. I.

Предположим, что $\mu_n \equiv 0$. Тогда

$$S_n = S_0 + \sum_{k \leqslant n} \sigma_k \varepsilon_k. \tag{2}$$

В силу $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримости величин σ_k и свойства $\mathsf{E}(\varepsilon_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) = 0$ из формулы (2) следует, что в рассматриваемом случае последовательность цен $S = (S_n)$ является мартингальным преобразованием и, следовательно, локальным мартингалом (см. теорему в § 1c гл. II). Если дополнительно предположить, что, скажем, $\mathsf{E}\,|\sigma_k \varepsilon_k| < \infty$, $k \geqslant 1$, то последовательность $S = (S_n)$ будет мартингалом относительно исходной меры P. (Общие условия, при которых локальный мартингал является мартингалом, рассмотрены в § 1c гл. II.)

Пусть теперь μ_n не равно тождественно нулю при всех $n \leqslant N$.

В этом случае дискретный вариант теоремы Гирсанова (§ 3b) дает способ построения мер $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ (см. формулы (8) и (6) в § 3b), относительно которых последовательности $(S_n)_{n \leqslant N}$ являются локальными мартингалами и (просто) мартингалами, если $\widetilde{\mathsf{E}}\,|\sigma_n \varepsilon_n| < \infty$ при всех $n \leqslant N$.

2. Рассмотрим теперь более реалистичную ситуацию, считая, что на (B, S)-рынке

$$S_n = S_0 e^{H_n} \tag{3}$$

и $B_n \equiv 1$, $n \leqslant N$.

В § 1a гл. II отмечалось, что представление (3) типа сложных процентов (compound return), удобное с точки зрения статистического анализа, не совсем удобно для целей стохастического анализа. Дело в том, что при исследовании последовательности $S = (S_n)$ на «мартингальность» было бы желательно иметь утверждение такого типа: «для того, чтобы последовательность $S = (S_n)$, представленная в виде (3), была мартингалом, достаточно, чтобы мартингалом была последовательность $H=(H_n)$». Однако это, вообще говоря, не так, что и объясняет обращение к представлению (simple return)

$$S_n = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})_n, \tag{4}$$

где (см. § 1a гл. II)

$$\widehat{H}_n = H_n + \sum_{k\leqslant n}(e^{\Delta H_k} - \Delta H_k - 1) \tag{5}$$

и $\mathscr{E}(\widehat{H}) = (\mathscr{E}(\widehat{H})_n)_{n\geqslant 0}$ — стохастическая экспонента, построенная по $\widehat{H} = (\widehat{H}_n)$ согласно формулам

$$\mathscr{E}(\widehat{H})_n = e^{\widehat{H}_n} \prod_{k\leqslant n}(1+\Delta\widehat{H}_k)e^{-\Delta\widehat{H}_k}, \quad n \geqslant 1, \tag{6}$$

и $\mathscr{E}(\widehat{H})_0 \equiv 1$.

И в формуле (5), и в (6) правые части можно, конечно, упростить и записать их в виде

$$\widehat{H}_n = \sum_{k\leqslant n}(e^{\Delta H_k} - 1), \tag{7}$$

$$\mathscr{E}(\widehat{H})_n = \prod_{k\leqslant n}(1+\Delta\widehat{H}_k). \tag{8}$$

Полезно, однако, отметить еще раз (см. § 1a гл. II и § 5c гл. III), что при рассмотрении аналогичных представлений для случая *непрерывного* времени «правильной» формой являются выражения типа (5) и (6), а не (7) и (8), что связано с проблемой сходимости соответствующих сумм $\sum_{s\leqslant t}$ и произведений $\prod_{s\leqslant t}$, имеющих в случае непрерывного времени уже, вообще говоря, *бесконечное* число членов при каждом $t>0$.

Преимущество представления (4) по сравнению с (3) состоит в том, что для него верно следующее утверждение.

Предложение. *Для того чтобы последовательность $S=(S_n)$, определенная формулой* (4), *была мартингалом, достаточно, чтобы последовательность $\widehat{H} = (\widehat{H}_n)_{n\geqslant 1}$ была локальным мартингалом с $\Delta\widehat{H}_n \geqslant -1$ для $n \geqslant 1$.*

Действительно, из формулы (6) или (8) для $n\geqslant 1$ получаем

$$\Delta\mathscr{E}(\widehat{H})_n = \mathscr{E}(\widehat{H})_{n-1}\Delta\widehat{H}_n. \tag{9}$$

Предположим, что $(\widehat{H}_n)$ является локальным мартингалом, а значит, как мартингальное преобразование (см. лемму в § 1c гл. II) допускает представление

$$\widehat{H}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta M_k \tag{10}$$

с $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримыми a_k и некоторым мартингалом $M=(M_n)$.

Из формул (9) и (10) видим, что

$$\Delta\mathscr{E}(\widehat{H})_n = a_n \mathscr{E}(\widehat{H})_{n-1}\Delta M_n,$$

т. е. $\mathscr{E}(\widehat{H})$ является мартингальным преобразованием, а значит, и локальным мартингалом.

Если $\Delta\widehat{H}_n \geqslant -1$, то заведомо $\mathscr{E}(\widehat{H})_n \geqslant 0$. Поэтому согласно лемме из § 1c гл. II локальный мартингал $\mathscr{E}(\widehat{H})$ является на самом деле (просто) мартингалом.

В рассматриваемом нами случае условие $\Delta\widehat{H}_n \geqslant -1$ выполнено, поскольку

$$\Delta\widehat{H}_n = e^{\Delta H_n} - 1 \geqslant -1.$$

3. Будем предполагать, что величины $h_n = \Delta H_n$ являются условно-гауссовскими, $h_n = \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n$. В этом случае последовательность $S = (S_n)$, $S_n = S_0 e^{H_n}$, естественно называть *логарифмически условно-гауссовской*, что отражено в названии § 3c.

Зададимся сначала вопросом о том, при каких условиях последовательность $S = (S_n)$ будет мартингалом относительно *исходной* меры P.

Для этого, как мы видели выше, достаточно, чтобы последовательность $\widehat{H} = (\widehat{H}_n)$, для которой $\Delta\widehat{H}_n = e^{\Delta H_n} - 1$, была локальным мартингалом, т. е. чтобы выполнялись условия $\mathsf{E}(|\Delta\widehat{H}_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$ и $\mathsf{E}(\Delta\widehat{H}_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0$, или, что равносильно,

$$\mathsf{E}(e^{\Delta\widehat{H}_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 1 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{11}$$

Поскольку мы предполагаем, что $\Delta H_n = \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n$, условию (11) можно придать форму

$$\mathsf{E}(e^{\mu_n + \sigma_n\varepsilon_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 1, \tag{12}$$

что равносильно тому, что

$$\mathsf{E}(e^{\sigma_n\varepsilon_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = e^{-\mu_n}. \tag{13}$$

Левая часть равна $e^{\frac{1}{2}\sigma_n^2}$. Тем самым, мы получаем условие

$$\mu_n + \frac{\sigma_n^2}{2} = 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad n \geqslant 1, \tag{14}$$

при котором логарифмически условно-гауссовская последовательность

$$S_n = S_0 \exp\left\{\sum_{k=1}^n (\mu_k + \sigma_k\varepsilon_k)\right\}, \quad n \geqslant 1,$$

является мартингалом относительно исходной меры P. Этот результат, конечно, можно было бы легко предвидеть, поскольку последовательность

$$\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^n \left(\sigma_k\varepsilon_k - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)\right\}\right)_{n\geqslant 1} \tag{15}$$

является, как мы уже отмечали выше, мартингалом.

4. Обратимся теперь к случаю, когда условие (14) не выполнено.

Пусть $n \leqslant N$. Будем строить на $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$ требуемую меру $\widetilde{\mathsf{P}}$ с помощью условного преобразования Эшера в виде

$$\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega),$$

где $Z_N(\omega) = \prod_{1\leqslant n\leqslant N} z_n(\omega)$ и ($\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$)

$$z_n(\omega) = \frac{e^{a_n h_n}}{\mathsf{E}(e^{a_n h_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1})}. \tag{16}$$

Здесь $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримые величины $a_k = a_k(\omega)$ будут выбраны так, чтобы последовательность $(S_n)_{n\leqslant N}$ была $(\widetilde{\mathsf{P}}, (\mathscr{F}_n))$-мартингалом.

В рассматриваемом случае, когда цены задаются формулами (3), это означает, что должны быть выполнены условия

$$\mathsf{E}[e^{(a_n+1)h_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] = \mathsf{E}[e^{a_n h_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}]. \tag{17}$$

Учитывая, что $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$, находим, что равенство (17) выполнено, если a_n выбраны так, что

$$\mu_n + \frac{\sigma_n^2}{2} = -a_n \sigma_n^2, \tag{18}$$

т. е.

$$a_n = -\frac{\mu_n}{\sigma_n^2} - \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Если при всех $n \leqslant N$ выполнено условие (14), то $a_n = 0$ и $Z_N = 1$, т. е. имеем $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P}$.

При выборе a_n согласно формуле (19) имеем

$$\mathsf{E}(e^{a_n h_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \exp\left\{-\frac{\mu_n^2}{2\sigma_n^2} + \frac{\sigma_n^2}{8}\right\}.$$

Тем самым,

$$z_n = \frac{e^{a_n h_n}}{\mathsf{E}(e^{a_n h_n} \,|\, \mathscr{F}_{n-1})} = \exp\left\{-\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\sigma_n}{2}\right)\varepsilon_n - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\sigma_n}{2}\right)^2\right\}$$

и

$$Z_N = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{N}\left[\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\sigma_n}{2}\right)\varepsilon_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\sigma_n}{2}\right)^2\right]\right\}. \tag{20}$$

Итак, последовательность $S = (S_n)_{n\leqslant N}$, где

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad H_n = h_1 + \ldots + h_n, \quad h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n,$$

является относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ мартингалом с $\widetilde{\mathsf{E}}\, S_n = S_0$, и ее плотность Z_N по мере P задается формулой (20). В том случае, когда для $n \leqslant N$ выполнено условие (14), мы имеем $\widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P}$ и последовательность $(S_n)_{n\leqslant N}$ является $(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$-мартингалом, т. е. мартингалом относительно исходной меры P.

§ 3d. Дискретный вариант теоремы Гирсанова. II. Общий случай

1. Как уже отмечалось выше, дискретный вариант теоремы Гирсанова для условно-гауссовского случая послужил прототипом соответствующих результатов для стохастических последовательностей $H=(H_n)$ с $h_n=\Delta H_n$ более общей структуры, нежели $h_n=\mu_n+\sigma_n\varepsilon_n$.

Чтобы найти «правильную» форму обобщений, проанализируем еще раз проведенное выше доказательство (в условно-гауссовском случае) того, что

$$\textit{если } \widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}, \textit{ то } \mathsf{E}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=\mu_n \ \Rightarrow\ \widetilde{\mathsf{E}}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=0,\ n\geqslant 1.$$

Доказательство этого свойства, данное в § 3b, существенно опиралось на формулу пересчета условных математических ожиданий (см. формулу (4) в § 3a), которая (в предположении $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$) применительно к $Y=H_n$, $\widetilde{\mathsf{E}}|H_n|<<\infty$, $m=n-1$, имеет такой вид:

$$\widetilde{\mathsf{E}}(H_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=\frac{1}{Z_{n-1}}\,\mathsf{E}(H_nZ_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}),\quad n\geqslant 1. \tag{1}$$

Здесь $\widetilde{\mathsf{E}}$ — усреднение по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, и правая часть считается равной нулю, если $Z_{n-1}(\omega)=0$. Также считаем, что $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $Z_0(\omega)\equiv 1$.

Покажем, как из формулы (1) можно легко вывести следующий результат:

$$\textit{если } \widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}, \textit{ то } H\in\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \ \Leftrightarrow\ HZ\in\mathscr{M}(\mathsf{P}), \tag{2}$$

где $\mathscr{M}(\mathsf{P})$ и $\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$ обозначают классы мартингалов по мерам P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ соответственно (см. § 1c гл. II).

В самом деле, если $H\in\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$, то $\widetilde{\mathsf{E}}(H_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=H_{n-1}$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.), и из формулы (1) следует, что $H_{n-1}Z_{n-1}=\mathsf{E}(H_nZ_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.). Это равенство, справедливое $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н., будет справедливым и P-п. н.

Действительно, на множестве $\{Z_{n-1}=0\}$ и левая, и правая его части равны нулю, поскольку на этом множестве и $Z_n=0$ (P-п. н.). На множестве же $\{Z_{n-1}>0\}$ меры P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ эквивалентны (в том смысле, что $\mathsf{P}(\{Z_{n-1}>0\}\cap A)==0 \Leftrightarrow \widetilde{\mathsf{P}}(\{Z_{n-1}>0\}\cap A)=0$ для $A\in\mathscr{F}_{n-1}$), и, значит, левая и правая части указанного соотношения совпадают и по мере P. Тем самым, импликация $\Rightarrow$ в утверждении (2) доказана.

Аналогично если $HZ\in\mathscr{M}(\mathsf{P})$, то $H_{n-1}Z_{n-1}=\mathsf{E}(H_nZ_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$ (P- и $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.). Так как $Z_{n-1}>0$ по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, получаем, что

$$H_{n-1}=\frac{1}{Z_{n-1}}\,\mathsf{E}(H_nZ_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}).$$

Отсюда и из формулы (1) следует, что $H\in\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

Интересно отметить, что формулу Байеса (4) из § 3a (и, в частности, формулу (1)) можно вывести из импликации $\Rightarrow$ в утверждении (2).

В самом деле, пусть $\mathscr{F}_n$-измеримая величина Y такова, что $\widetilde{\mathsf{E}}\,|Y|<\infty$ и $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$.

Образуем мартингал $(H_m, \mathscr{F}_m, \widetilde{\mathsf{P}})_{m\leqslant n}$ с $H_m = \widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_m)$. Тогда согласно утверждению (2) имеем

$$\mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_m) = H_m Z_m \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

В частности, $\mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = H_{n-1}Z_{n-1}$ (P- и $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.).

Отсюда следует, что, поскольку $\widetilde{\mathsf{P}}(Z_{n-1} > 0) = 1$, выполняется равенство

$$\frac{1}{Z_{n-1}} \mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = H_{n-1} \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}).$$

Вместе с равенством $H_{n-1} = \widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_{n-1})$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.) это доказывает требуемую формулу Байеса (4) из § 3a в лемме о пересчете:

$$\textit{если } \widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}, \textit{ то } \widetilde{\mathsf{E}}(Y \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \frac{1}{Z_{n-1}} \mathsf{E}(YZ_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}).$$

Таким образом, свойство (2) можно рассматривать как своеобразную «мартингальную» версию леммы о пересчете при абсолютно непрерывной замене меры.

2. Целесообразно результат (2), а также некоторую его локальную версию сформулировать в виде следующего предложения (ср. § 3b гл. III в [250]).

Лемма. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $Z = (Z_n)$ — *процесс плотности,*

$$Z_n = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n},$$

$\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}} \mid \mathscr{F}_n$, $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} \mid \mathscr{F}_n$.

Пусть $H = (H_n, \mathscr{F}_n)$ — *стохастическая последовательность.*

1. *Последовательность* H *является* $\widetilde{\mathsf{P}}$-*мартингалом* ($H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$) *в том и только том случае, когда последовательность* $HZ = (H_n Z_n, \mathscr{F}_n)$ *является* P-*мартингалом* ($HZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$), *т. е. справедливы импликации* (2):

$$H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff HZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P}).$$

2. *Если к тому же* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, *то последовательность* H *является локальным* $\widetilde{\mathsf{P}}$-*мартингалом* ($H \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$) *в том и только том случае, когда* HZ *является локальным* P-*мартингалом* ($HZ \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$):

$$H \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff HZ \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}). \tag{3}$$

Доказательство. 1. Это утверждение уже было доказано с привлечением формулы (1) (которая интересна и сама по себе). Но его можно доказать также и непосредственно, пользуясь лишь определением мартингала.

Возьмем $m \leqslant n$ и $A \in \mathscr{F}_m$. Тогда $\widetilde{\mathsf{E}}(I_A H_n) = \mathsf{E}(I_A Z_n H_n)$ и, значит,

$$\widetilde{\mathsf{E}}(I_A H_n) = \widetilde{\mathsf{E}}(I_A H_m) \iff \mathsf{E}(I_A Z_n H_n) = \mathsf{E}(I_A Z_n H_m).$$

Но $\mathsf{E}(I_A Z_n H_m) = \mathsf{E}(I_A Z_m H_m)$. Поэтому $H \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff HZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$.

2. Пусть (τ_n) — локализующая последовательность для $HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ и $\tau = \lim \tau_n$.

Покажем, что $HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}) \Rightarrow H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$ (даже только в предположении $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$).

Пусть (τ_n) — локализующая последовательность для HZ. Тогда если $\tau = \lim \tau_n$, то $\mathsf{P}(\tau = \infty) = 1$ и (в силу $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ и свойства 4 из теоремы в § 3a) $\widetilde{\mathsf{P}}(\tau < \infty) = \mathsf{E}\, Z_\tau I(\tau < \infty) = 0$.

Тем самым, $\widetilde{\mathsf{P}}(\tau = \infty) = 1$.

Заметим, что

$$(H^{\tau_n} Z)_k = H_k^{\tau_n} Z_k = (H_k Z_k)^{\tau_n} + H_{\tau_n}\big(Z_k - Z_{\tau_n} I(k \geqslant \tau_n)\big).$$

Отсюда видно, что $H^{\tau_n} Z$ является P-мартингалом, и по утверждению 1 имеем $H^{\tau_n} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. Но $\widetilde{\mathsf{P}}(\lim \tau_n = \infty) = 1$. Значит, $H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

Обратно, покажем, что в предположении $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ имеет место импликация $H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \Rightarrow HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$.

Пусть (σ_n) — локализующая последовательность для $H \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$. Следовательно, $\widetilde{\mathsf{P}}(\lim \sigma_n = \infty) = 1$ и $H^{\sigma_n} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. Тогда по свойству 1 имеем $H^{\sigma_n} Z \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$, и, поскольку (ср. с вышеприведенной формулой для $(H^{\tau_n} Z)_k$)

$$(HZ)_k^{\sigma_n} = H_k^{\sigma_n} Z_k - H_{\sigma_n}\big(Z_k - Z_{\sigma_n} I(k \geqslant \tau_n)\big),$$

получаем, что $(HZ)_k^{\sigma_n} \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$. Но в силу условия $\mathsf{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \widetilde{\mathsf{P}}$ имеем $\mathsf{P}(\lim \sigma_n = \infty) = 1$. Следовательно, $HZ \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$.

Лемма доказана. □

3. Свойства (1), (2) и (3) играют фундаментальную роль в вопросах проверки мартингальности последовательностей (H_n), $(\widehat{H}_n)$, (S_n) и т. д. относительно той или иной меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, поскольку дают возможность свести эту проверку к установлению свойств мартингальности последовательностей $(H_n Z_n)$, $(\widehat{H}_n Z_n)$, $(S_n Z_n)$ и т. д. относительно исходной, базисной меры P.

Этим, в сущности, мы уже пользовались при доказательстве дискретного аналога теоремы Гирсанова в условно-гауссовском случае, когда $H_n = h_1 + \ldots + h_n$ и $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$, $n \leqslant N$, а конструкция мер $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ осуществляется с помощью плотности

$$Z_N = \exp\Big\{-\sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}, \tag{4}$$

явно построенной по (μ_k) и (σ_k).

Однако в общем случае проблема построения соответствующих мер $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ становится значительно более сложной. Простота же вида плотности Z_N в условно-гауссовском случае обусловлена, в сущности, простотой задания величин H_n, для которых $\Delta H_n \equiv h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$.

Существуют разные формы обобщенной теоремы Гирсанова для случая дискретного времени.

Для лучшего понимания приводимых далее результатов как обобщений теоремы Гирсанова целесообразно несколько переформулировать приведенный выше результат (теорема в § 3b) для условно-гауссовского случая.

Положим

$$\alpha_n = \frac{Z_n}{Z_{n-1}} I(Z_{n-1} > 0). \tag{5}$$

Тогда

$$\alpha_n = \exp\left\{-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\varepsilon_n - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2\right\}, \tag{6}$$

и если $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k \varepsilon_k$, то $M = (M_n) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ и нетрудно показать, что

$$\mathsf{E}(\alpha_n \Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = -\mu_n. \tag{7}$$

Тем самым, не затрагивая сейчас вопросов интегрируемости, мы можем результат теоремы из § 3b для условно-гауссовского случая представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}) &\Leftrightarrow \mathsf{E}(\sigma_n \varepsilon_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad n \leqslant N,\\
&\Leftrightarrow \mathsf{E}(\mu_n + \sigma_n \varepsilon_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mu_n, \quad n \leqslant N,\\
&\Leftrightarrow \mathsf{E}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mu_n, \quad n \leqslant N,\\
&\Rightarrow \widetilde{\mathsf{E}}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad n \leqslant N,\\
&\Leftrightarrow \widetilde{\mathsf{E}}(\Delta M_n + \mu_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad n \leqslant N,\\
&\Leftrightarrow \widetilde{\mathsf{E}}\big(\Delta M_n - \mathsf{E}(\alpha_n \Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\big) = 0, \quad n \leqslant N.
\end{aligned}$$

Иначе говоря, из того, что $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$, вытекает, что относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$ последовательность $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n)_{n \leqslant N}$,

$$\widetilde{M}_n = M_n - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{8}$$

является локальным мартингалом:

$$M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}) \;\Rightarrow\; \widetilde{M} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}). \tag{9}$$

В только что изложенном материале важно выделить следующее обстоятельство, связанное с тем, что здесь при рассмотрении последовательности $H = (H_n)$, $\Delta H_n = \mu_n + \Delta M_n$, основной акцент сделан на «мартингальную» составляющую у H. По существу, мы «отслеживали», как при абсолютно непрерывной замене меры изменяется мартингальная часть. Как видим, относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность (M_n) уже не будет мартингалом —

она представима в виде

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) + \widetilde{M}_n,$$

где $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n)$ является $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом, а $A = (A_n)$ — некоторый «предсказуемый» снос, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1})$. Именно появление этого дополнительного «сносового» члена при абсолютно непрерывной замене меры и дает возможность «убивания» сносовых составляющих в исходных последовательностях $H = (H_n)$ посредством перехода к таким мерам $\widetilde{\mathsf{P}}$, что $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$ или $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$.

4. Изложенный взгляд на формулировку данного выше (для условно-гауссовского случая) дискретного варианта теоремы Гирсанова дает возможность сформулировать следующий общий результат для локальных мартингалов, *не конкретизируя*, что $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k \varepsilon_k$.

Теорема 1. *Пусть последовательность $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$, $M_0 = 0$. Предположим, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ с плотностями $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, $n \geqslant 1$, и пусть $\alpha_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}} I(Z_{n-1} > 0)$, $Z_0 \equiv 1$. Пусть также*

$$\mathsf{E}(|\Delta M_n| \alpha_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad n \geqslant 1. \tag{10}$$

Тогда определенный формулой (8) *процесс $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n)$ принадлежит $\mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$, т. е. является локальным $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом.*

Доказательство. Воспользуемся опять-таки (как и при доказательстве в условно-гауссовском случае, § 3b) формулой Байеса (4) из § 3a:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{E}}(M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) &= \mathsf{E}(M_n \alpha_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \\ &= \mathsf{E}(\alpha_n (M_n - M_{n-1}) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) + \mathsf{E}(\alpha_n M_{n-1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \\ &= \mathsf{E}(\alpha_n \Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) + M_{n-1}.\end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда в силу предположения (10) (P- и $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.) получаем

$$\widetilde{\mathsf{E}}(|M_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant \mathsf{E}(|\alpha_n \Delta M_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) + |M_{n-1}| < \infty.$$

Из формул (11) и (8) непосредственно находим, что $\widetilde{\mathsf{E}}(|\widetilde{M}_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$ и

$$\widetilde{\mathsf{E}}(\widetilde{M}_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \widetilde{M}_{n-1}, \tag{12}$$

т. е. $\widetilde{M}$ — обобщенный, а значит (§ 1c гл. II), и локальный $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингал. □

5. Пусть теперь исходная последовательность $H = (H_n)_{n \geqslant 1}$ задается следующим образом:

$$H_n = A_n + M_n, \tag{13}$$

где $A=(A_n)_{n\geqslant 1}$ — предсказуемая последовательность (A_n — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримые величины, $n\geqslant 1$; $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $A_0=0$) и $M=(M_n)_{n\geqslant 1}\in\mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$.

Поскольку для локального мартингала $\mathsf{E}(|\Delta M_n|\,|\mathscr{F}_{n-1})<\infty$, получаем, что $\mathsf{E}(|\Delta H_n|\,|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant|\Delta A_n|+\mathsf{E}(|\Delta M_n|\,|\mathscr{F}_{n-1})<\infty$, и, значит, для H_n, $n\geqslant 1$, справедливы представления

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(\Delta H_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}\bigl[\Delta H_k-\mathsf{E}(\Delta H_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\bigr], \tag{14}$$

которые мы называли *обобщенным разложением Дуба* (см. § 1b гл. II) последовательности $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$.

Как и в обычном разложении Дуба, представление вида (13) с предсказуемым (A_n) является единственным и, следовательно, в формуле (13)

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(\Delta H_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}), \tag{15}$$

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}[\Delta H_k-\mathsf{E}(\Delta H_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})]. \tag{16}$$

Предшествующая теорема 1 допускает следующее легкое обобщение.

Теорема 2. *Пусть $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ имеет обобщенное разложение Дуба* (14) *и выполнено условие* (10).

Тогда по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, удовлетворяющей условию $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\ll}\mathsf{P}$, последовательность $H=(H_n)_{n\geqslant 1}$ допускает представление

$$H_n=\widetilde{A}_n+\widetilde{M}_n, \tag{17}$$

или, что равносильно,

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\mathsf{E}}(\Delta H_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}[\Delta H_k-\widetilde{\mathsf{E}}(\Delta H_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})] \tag{18}$$

(обобщенное разложение Дуба)*, где*

$$\widetilde{A}_n=A_n+\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(\alpha_k\Delta M_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}), \tag{19}$$

а последовательность $\widetilde{M}=(\widetilde{M}_n)$,

$$\widetilde{M}_n=M_n-\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(\alpha_k\Delta H_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}), \tag{20}$$

является локальным $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом ($\widetilde{M}\in\mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$).

Доказательство следует из теоремы 1, примененной к $M=(M_n)_{n\geqslant 1}$, $M_n=H_n-A_n$. □

6. В условиях теоремы 2 предположим, что M и Z являются (локально) *квадратично* интегрируемыми мартингалами. В этом предположении определена их *предсказуемая квадратическая ковариация* $\langle M, Z\rangle = (\langle M, Z\rangle_n)_{n\geqslant 0}$, где

$$\langle M, Z\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta M_k \Delta Z_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{21}$$

которая в § 5b гл. III называлась взаимной «угловой скобкой» M и Z. Напомним также, что *квадратической ковариацией* (взаимной квадратной скобкой) между последовательностями $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ и $Y = (Y_n)_{n\geqslant 0}$ называлась последовательность $[X, Y] = ([X, Y]_n)_{n\geqslant 0}$ величин

$$[X, Y]_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \Delta Y_k. \tag{22}$$

Из формул (21) и (22) следует, что в случае (локально) квадратично интегрируемых мартингалов разность $[M, Z] - \langle M, Z\rangle$ является локальным мартингалом. (См. [250, гл. I, § 4e].) Будем предполагать также, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$. Тогда $Z_n > 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$- и P-п. н.) и

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\langle M, Z\rangle_n}{Z_{n-1}} = \frac{\mathsf{E}[\Delta M_n \Delta Z_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}]}{Z_{n-1}} &= \mathsf{E}[(\alpha_n - 1)\Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] = \\ &= \mathsf{E}[\alpha_n \Delta M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}].\end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что если квадратическая характеристика $\langle M\rangle$ ($\equiv \langle M, M\rangle$) такова, что $\langle M\rangle_n(\omega) = 0$, то и $\langle M, Z\rangle_n(\omega) = 0$. Поэтому левую часть формулы (23) можно представить в виде

$$\frac{\Delta\langle M, Z\rangle_n}{Z_{n-1}} = -a_n \Delta\langle M\rangle_n, \tag{24}$$

где $a_n = -\dfrac{\Delta\langle M, Z\rangle_n}{\Delta\langle M\rangle_n Z_{n-1}}$, считая $\dfrac{\Delta\langle M, Z\rangle_n}{\Delta\langle M\rangle_n}$ равным, скажем, единице, если $\Delta\langle M\rangle_n = 0$.

Таким образом, соотношение (19) можно записать в виде

$$\widetilde{A}_n = A_n - \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta\langle M\rangle_k. \tag{25}$$

Отсюда можно сделать интересный вывод о структуре (по мере P) исходной последовательности H: *если относительно меры* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ *эта последовательность становится локальным мартингалом* ($\widetilde{A} \equiv 0$), *то, необходимым образом,*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta\langle M\rangle_k + M_n, \quad n \geqslant 1, \tag{26}$$

или, в терминах приращений,

$$\Delta H_n = a_n \Delta\langle M\rangle_n + \Delta M_n, \quad n \geqslant 1. \tag{27}$$

7. До сих пор все наши рассуждения исходили из *наличия* меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ без конкретизации ее структуры или структуры последовательности $\alpha=(\alpha_n)$, определяющей производные Радона—Никодима:

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}=\prod_{k=1}^{n}\alpha_k, \quad n\geqslant 1. \tag{28}$$

Из формул (23) и (24) видим, что

$$a_n\Delta\langle M\rangle_n=\mathsf{E}[(1-\alpha_n)\Delta M_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}], \tag{29}$$

откуда можно увидеть, что у этого соотношения, рассматриваемого как *уравнение* относительно ($\mathscr{F}_n$-измеримых) величин α_n, есть следующее (вообще говоря, *неединственное*) решение:

$$\alpha_n=1-a_n\Delta M_n. \tag{30}$$

Разумеется, для наших целей нас устраивают только такие решения α_n, для которых $\mathsf{P}(\alpha_n>0)=1$, $n\geqslant 1$. Если это так, то

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}=\prod_{k=1}^{n}(1-a_k\Delta M_k)=\mathscr{E}\Bigl(-\sum_{k\leqslant\cdot}a_k\Delta M_k\Bigr)_n, \tag{31}$$

где $\mathscr{E}=(\mathscr{E}(R)_n)$ — стохастическая экспонента (см. § 1 гл. II):

$$\mathscr{E}(R)_n=e^{R_n}\prod_{k\leqslant n}(1+\Delta R_k)e^{-\Delta R_k}=\prod_{k\leqslant n}(1+\Delta R_k). \tag{32}$$

Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}$ — вероятностная мера, для которой ее сужения $\widetilde{\mathsf{P}}_n=\widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_n$ строятся по формулам (31). Относительно этой меры исходная последовательность $H=(H_n)$, подчиняющаяся соотношениям (27), становится *локальным мартингалом*, поскольку $\Delta\widetilde{A}_n=a_n\Delta\langle M\rangle_n+\mathsf{E}(\alpha_n\Delta M_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=0$, $n\geqslant 1$, и $\widetilde{A}_0=0$.

Как отмечалось выше, эта вероятностная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, называемая *мартингальной* (*риск-нейтральной*) *мерой*, вообще говоря, не единственна. Однако она имеет определенные преимущества: во-первых, *явно* строится по коэффициентам $a=(a_n)$; во-вторых, *обладает* некоторыми свойствами «минимальности», которые оправдывают для нее название *минимальной мартингальной меры*, [429]. (См. также п. 6 § 3d гл. VI.)

§ 3e. Целочисленные случайные меры и их компенсаторы. Преобразование компенсаторов при абсолютно непрерывной замене меры. Стохастические интегралы

1. Пусть $H=(H_n)_{n\geqslant 0}$ — стохастическая последовательность случайных величин $H_n=H_n(\omega)$, заданных на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0},\mathsf{P})$. Будем предполагать, что $H_0=0$ и $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$.

Распределение вероятностей последовательности H, обозначаемое $\mathrm{Law}(H)$, можно описывать двумя способами: или *безусловными* распределениями величин $H_1, H_2, \ldots, H_n$:

$$\mathrm{Law}(H_1, H_2, \ldots, H_n), \quad n \geqslant 1 \tag{1}$$

(или, что равносильно, $\mathrm{Law}(\Delta H_1, \Delta H_2, \ldots, \Delta H_n)$, $n \geqslant 1$), или же (регулярными) *условными* распределениями величин ΔH_n:

$$\mathsf{P}(\Delta H_n \in \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1}), \quad n \geqslant 1. \tag{2}$$

Второй способ в определенном смысле более предпочтителен, поскольку, имея условные распределения, можно, конечно, восстановить и безусловные. К тому же условные распределения более наглядно показывают зависимость величин ΔH_n от «прошлого».

Далее, знание условных (относительно $\mathscr{F}_{n-1}$) распределений дает представление о распределении ΔH_n при знании *всей* прошлой информации. Безусловные же распределения (1) дают возможность восстановить *только* условные вероятности $\mathsf{P}(\Delta H_n \in \cdot \,|\, \mathscr{F}^H_{n-1})$, где $\mathscr{F}^H_{n-1} = \sigma(\omega\colon H_1, \ldots, H_{n-1})$ и $\mathscr{F}^H_{n-1} \subseteq \mathscr{F}_{n-1}$ (включение может быть и строгим).

2. Пусть

$$X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0} \tag{3}$$

— некоторая d-мерная стохастическая последовательность, заданная на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$. Будем считать, что $X_0 = 0$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

С последовательностью X свяжем последовательность $\mu = (\mu_n(\cdot))_{n\geqslant 1}$ *целочисленных случайных мер*, определяемых следующим образом:

$$\mu_n(A; \omega) = I_A(\Delta X_n(\omega)), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),$$

т. е.

$$\mu_n(A; \omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta X_n(\omega) \in A, \\ 0, & \text{если } \Delta X_n(\omega) \notin A. \end{cases}$$

Пусть, далее, $\nu = (\nu_n(\,\cdot))_{n\geqslant 1}$ — последовательность, состоящая из *регулярных* условных распределений $\nu_n(\,\cdot)$ величин ΔX_n относительно $\mathscr{F}_{n-1}$, т. е. функций $\nu_n(A; \omega)$, определенных для $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ и $\omega \in \Omega$ и таких, что

1) $\nu_n(\cdot\,; \omega)$ для каждого $\omega \in \Omega$ есть вероятностная мера на $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$;
2) $\nu_n(A; \omega)$ для каждого $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ как функция от ω есть один из вариантов условной вероятности $\mathsf{P}(\Delta X_n \in A \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$:

$$\nu_n(A; \omega) = \mathsf{P}(\Delta X_n \in A \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

(Доказательство *существования* такой версии условных вероятностей см., например, в книге [439, гл. II, § 7].)

Для регулярных условных вероятностей условные математические ожидания $\mathsf{E}[f(\Delta X_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}](\omega)$ при неотрицательных или ограниченных функциях

f могут подсчитываться *интегрированием при каждом* ω по регулярным условным распределениям $\nu_n(\cdot)$:

$$\mathsf{E}[f(\Delta X_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}](\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\nu_n(dx;\omega) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Тем самым, в рассматриваемом нами случае

$$\nu_n(A;\cdot) = \mathsf{E}[\mu_n(A;\omega)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}](\cdot),$$

и, следовательно, для каждого $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ последовательность

$$\bigl(\mu_n(A)-\nu_n(A)\bigr)_{n\geqslant 1},$$

$\mu_n(A)=\mu_n(A;\omega)$, $\nu_n(A)=\nu_n(A;\omega)$, является *мартингал-разностью* относительно меры P и потока $(\mathscr{F}_n)$.

Если положить

$$\mu_{(0,n]}(A;\omega) = \sum_{k=1}^{n}\mu_k(A;\omega), \quad \nu_{(0,n]}(A;\omega) = \sum_{k=1}^{n}\nu_k(A;\omega),$$

то становится понятным, что при каждом $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ последовательность

$$\bigl(\mu_{(0,n]}(A;\omega)-\nu_{(0,n]}(A;\omega)\bigr)_{n\geqslant 1}$$

будет *мартингалом*. Это свойство объясняет, почему (случайную) меру $\nu_{(0,n]}(\cdot)$ называют *компенсатором* (случайной) меры $\mu_{(0,n]}(\cdot)$, а последовательность

$$\mu-\nu = \bigl(\mu_{(0,n]}(\cdot)-\nu_{(0,n]}(\cdot)\bigr)_{n\geqslant 1}$$

— *случайной мартингальной мерой*.

Полезно заметить, что представление

$$\mu = \nu + (\mu-\nu)$$

для меры $\mu=(\mu_{(0,n]})_{n\geqslant 1}$ с предсказуемой мерой $\nu=(\nu_{(0,n]})_{n\geqslant 1}$ может рассматриваться как ее *разложение Дуба* (§ 1b гл. II) на предсказуемую и мартингальную составляющие.

Замечание. С последовательностью $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ можно связать также целочисленные случайные меры *скачков* $\mu^X=(\mu^X_{(0,n]}(\cdot))_{n\geqslant 1}$, $\mu^X_{(0,n]}(A;\omega)= \sum_{k=1}^{n}\mu^X_k(A;\omega)$, где

$$\mu^X_k(A;\omega) = I\bigl(\Delta X_k(\omega)\in A,\ \Delta X_k(\omega)\neq 0\bigr).$$

Понятно, что если $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$, то $\mu_n(A;\omega)=\mu^X_n(A;\omega)$.

Вся разница в значениях этих мер связана лишь с событиями «отсутствия скачка», т. е. с событиями $\{\omega\colon \Delta X_n(\omega)=0\}$, и в том случае, когда $\mathsf{P}\{\omega\colon \Delta X_n(\omega)=0\}=0$, между мерами μ и μ^X, по существу, нет разницы.

Заметим, что в случае *непрерывного* времени при описании свойств скачкообразных компонент случайных процессов с привлечением целочисленных случайных мер *основную роль* играют именно случайные меры скачков μ^X, а не меры μ. (См. далее § 3а гл. VII и, подробнее, [250, гл. II, 1.16].)

3. В этом пункте будут рассмотрены стохастические интегралы

$$w*\mu, \quad w*\nu, \quad w*(\mu-\nu)$$

по введенным случайным мерам μ, ν и $\mu-\nu$.

Пусть $w=(w_k(\omega,x))_{k\geqslant 1}$ — последовательность $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-измеримых функций. Через $w*\mu$ обозначаем последовательность сумм интегралов Стилтьеса (при каждом ω):

$$(w*\mu)_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^d} w_k(\omega,x)\,\mu_k(dx;\omega).$$

В силу специфики рассматриваемых целочисленных случайных мер μ_k, принимающих лишь два значения, 0 и 1, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_k(\omega,x)\,\mu_k(dx;\omega)=w_k\big(\omega;\Delta X_k(\omega)\big).$$

Поэтому на самом деле

$$(w*\mu)_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n} w_k\big(\omega;\Delta X_k(\omega)\big).$$

Аналогичным образом посредством интегралов Стилтьеса определяются стохастические интегралы $w*\nu$ и $w*(\mu-\nu)$ по мерам ν и $\mu-\nu$. При этом для существования соответствующих интегралов надо наложить на функции $w_k(\omega,x)$ требования интегрируемости:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |w_k(\omega,x)|\nu_k(dx;\omega)<\infty$$

для всех (или почти всех) $\omega\in\Omega$ и $k\geqslant 1$.

Нетрудно видеть, что тогда

$$w*(\mu-\nu)=w*\mu-w*\nu.$$

(Предостережем читателя от автоматического переноса этого свойства на случай *общих* целочисленных случайных мер, например, мер скачков случайных процессов с *непрерывным* временем; может случиться, что интеграл $w*(\mu-\nu)$ определен, в то время как $w*\mu$ и $w*\nu$ равны $+\infty$ и, следовательно, их разность не имеет смысла; подробнее см. [250, гл. III].)

Если дополнительно предположить, что функции $w_k(\omega,x)$ являются $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримыми при каждом $x\in\mathbb{R}^d$, то $(w*\nu)_n$ будут предсказуемыми, т. е. $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми.

Если к тому же при каждом $k \geqslant 1$

$$\mathsf{E}\int_{\mathbb{R}^d} |w_k(\omega, x)| \nu_k(dx; \omega) < \infty, \tag{4}$$

то последовательность $w * (\mu - \nu) = (w * (\mu - \nu)_n)_{n \geqslant 1}$ будет, как нетрудно видеть, образовывать *мартингал*.

Заменяя условия (4) на условия

$$\mathsf{E}\int_{\mathbb{R}^d} |w_{k\wedge\tau_n}(\omega, x)| \nu_{k\wedge\tau_n}(dx; \omega) < \infty, \quad k \geqslant 1, \ n \geqslant 1, \tag{4$'$}$$

где (τ_n) — некоторая локализующая последовательность марковских моментов ($\tau_n \leqslant \tau_{n+1}$, $\tau_n \uparrow \infty$), получаем, что последовательность $w * (\mu - \nu)$ является *локальным мартингалом*.

4. Обратимся к разложению Дуба последовательности $H = (H_n)_{n \geqslant 1}$, предполагая, что $h_n = \Delta H_n$ таковы, что $\mathsf{E}\,|h_n| < \infty$, $n \geqslant 1$. Тогда (см. § 1b гл. II)

$$H_n = A_n + M_n, \tag{5}$$

где

$$A_n = \sum_{k \leqslant n} \mathsf{E}(h_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) \tag{6}$$

и

$$M_n = \sum_{k \leqslant n} [h_k - \mathsf{E}(h_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1})]. \tag{7}$$

С помощью введенных мер скачков $\mu = (\mu_n)_{n \geqslant 1}$ и их компенсаторов $\nu = (\nu_n)_{n \geqslant 1}$ величины A_n и M_n можно записать в таком виде:

$$A_n = \sum_{k \leqslant n} \int_{\mathbb{R}} x \nu_k(dx; \omega), \tag{8}$$

$$M_n = \sum_{k \leqslant n} \int_{\mathbb{R}} x\bigl(\mu_k(dx; \omega) - \nu_k(dx; \omega)\bigr). \tag{9}$$

Правые части формул (8) и (9) для краткости обозначают (см. [250, гл. II]) соответственно

$$(x * \nu)_n \tag{10}$$

и

$$(x * (\mu - \nu))_n. \tag{11}$$

Таким образом,

$$H_n = (x * \nu)_n + (x * (\mu - \nu))_n, \tag{12}$$

или, в *бескоординатной записи*,

$$H = x * \nu + x * (\mu - \nu). \tag{13}$$

Конечно, в рассматриваемом случае $H=x*\mu$, так что (13) есть не что иное, как равенство

$$x*\mu = x*\nu + x*(\mu-\nu),$$

столь же очевидное, как и разложение Дуба в предположении, что $\mathsf{E}\,|h_n|<\infty$, $n\geqslant 1$.

Вместо условия $\mathsf{E}\,|h_n|<\infty$, $n\geqslant 1$, предположим теперь, что (P-п. н.)

$$\mathsf{E}(|h_n|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) < \infty, \quad n\geqslant 1. \tag{14}$$

При этом условии, очевидно, определены (формулами (6) и (7)) последовательности $A=(A_n)$ и $M=(M_n)$, причем M является локальным мартингалом, поскольку $\mathsf{E}(|\Delta M_n|\,|\,\mathscr{F}_{n-1})<\infty$ и $\mathsf{E}(\Delta M_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=0$.

Тем самым, можно утверждать, что *при выполнении условия* (14) *имеет место обобщенное разложение Дуба последовательности* $H=(H_n)$:

$$H = A+M, \tag{15}$$

где $A=(A_n)$ и $M=(M_n)$ определены формулами (6) и (7).

При этом A — предсказуемая последовательность и M — локальный мартингал. С использованием мер μ и ν представление (15) может быть записано в виде (13).

Замечание. Напомним (см. § 1b гл. II), что $\mathsf{E}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$ в формулах (6) и (7) являются обобщенными условными математическими ожиданиями, определяемыми как $\mathsf{E}(h_n^+\,|\,\mathscr{F}_{n-1})-\mathsf{E}(h_n^-\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$ на множестве $\{\omega\colon\ \mathsf{E}(|h_n|\,|\,\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}$ и произвольно (скажем, равными нулю) на множестве $\{\omega\colon\ \mathsf{E}(|h_n|\,|\,\mathscr{F}_{n-1})= =\infty\}$.

В общем же случае, когда условие (14) может нарушаться, с целью получения аналога представления (15) или (13) поступают (как уже объяснялось в § 1b гл. II) следующим образом.

Пусть $\varphi=\varphi(x)$ — ограниченная функция «урезания», т. е. функция, равная x в окрестности нуля и имеющая компактный носитель. Типичным примером может служить «стандартная функция урезания»

$$\varphi(x) = x\,I(|x|\leqslant 1). \tag{16}$$

Тогда

$$H_n = \sum_{k=1}^n h_k = \sum_{k=1}^n \varphi(h_k) + \sum_{k=1}^n (h_k-\varphi(h_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\varphi(h_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}] + \sum_{k=1}^n \bigl[\varphi(h_k)-\mathsf{E}\bigl(\varphi(h_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\bigr)\bigr] + \sum_{k=1}^n (h_k-\varphi(h_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int \varphi(x)\, \nu_k(dx) + \sum_{k=1}^{n} \int \varphi(x)(\mu_k(dx) - \nu_k(dx)) + \\ + \sum_{k=1}^{n} \int (x - \varphi(x))\, \mu_k(dx). \quad (17)$$

Пользуясь теми же обозначениями, что и в формулах (12) и (13), мы получаем следующее представление:

$$H_n = (\varphi(x) * \nu)_n + (\varphi(x) * (\mu - \nu))_n + ((x - \varphi(x)) * \mu)_n, \quad (18)$$

или, в бескоординатной форме,

$$H = \varphi * \nu + \varphi * (\mu - \nu) + (x - \varphi) * \mu. \quad (19)$$

Определение. Представления (18) и (19) называют *каноническими представлениями* последовательности $H = (H_n)_{n \geqslant 0}$, $H_0 = 0$, с функцией урезания $\varphi = \varphi(x)$.

Полезно, имея в виду случай непрерывного времени, сравнить это определение с *каноническим представлением семимартингалов*, данным в § 2c гл. II, в монографии [250] и далее в § 3a гл. VI.

5. Пусть $H = (H_n)_{n \geqslant 1}$ имеет обобщенное разложение Дуба

$$H_n = A_n + M_n$$

и выполнено условие (10) из § 3d. Тогда в силу теоремы 2 из § 3d имеет место представление по мере $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$:

$$H_n = \left[A_n + \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \right] + \left[M_n - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\alpha_k \Delta M_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \right] \equiv \widetilde{A}_n + \widetilde{M}_n, \quad (20)$$

где $\widetilde{M} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

Запишем для H канонические представления по мерам P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ соответственно:

$$H = \varphi * \nu + \varphi * (\mu - \nu) + (x - \varphi) * \mu \quad (\text{по мере } \mathsf{P}) \quad (21)$$

и

$$H = \varphi * \widetilde{\nu} + \varphi * (\mu - \widetilde{\nu}) + (x - \varphi) * \mu \quad (\text{по мере } \widetilde{\mathsf{P}}), \quad (22)$$

где μ — мера скачков последовательности H.

Во многих проблемах стохастического анализа, основанного на канонических представлениях (21) и (22), важно знать, как *пересчитываются* компенсаторы $\widetilde{\nu}$ по компенсаторам ν и характеристикам процесса плотности $Z = (Z_n)$. В частности, интересен вопрос о том, *как преобразуются при замене меры «сносовые» члены $\varphi * \nu$ и $\varphi * \widetilde{\nu}$.*

Остановимся на этом подробнее. Предположим, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, и пусть

$$\nu_n(\cdot\,;\omega) = \mathsf{P}(h_n \in \cdot\,|\mathscr{F}_{n-1})(\omega)$$

и

$$\widetilde{\nu}_n(\cdot\,;\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}(h_n \in \cdot\,|\mathscr{F}_{n-1})(\omega)h$$

— регулярные варианты соответствующих условных вероятностей.

Формула Байеса (4) из § 3a, примененная к $Y = I_A(h_n)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $m = n-1$, и имеющая здесь следующий вид:

$$\widetilde{\mathsf{E}}(I_A(h_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\biggl(I_A(h_n)\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\,\bigg|\,\mathscr{F}_{n-1}\biggr), \tag{23}$$

делает весьма правдоподобной гипотезу о том, что для каждого $\omega \in \Omega$ *условные распределения* $\widetilde{\nu}_n(\cdot\,;\omega)$ *абсолютно непрерывны относительно* $\nu_n(\cdot\,;\omega)$, т. е. существует такая $\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$-измеримая (при каждом $\omega \in \Omega$) функция $Y_n = Y_n(x,\omega)$, что

$$\widetilde{\nu}_n(A;\omega) = \int_A Y_n(x,\omega)\,\nu_n(dx;\omega). \tag{24}$$

Если это действительно так, то

$$\frac{d\widetilde{\nu}_n(\cdot\,;\omega)}{d\nu_n(\cdot\,;\omega)}(x) = Y_n(x,\omega), \tag{25}$$

т. е. функция $Y_n(x,\omega)$ играет роль *плотности* одной меры (точнее — регулярного условного распределения) по другой.

Приведем доказательство справедливости формулы (24) (в предположении, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$), дав одновременно и явный вид для плотности $Y_n = Y_n(x,\omega)$, $n \geqslant 1$.

Рассмотрим условное математическое ожидание в правой части формулы (23). Согласно его определению для любого $B \in \mathscr{F}_{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned}
\int_B \mathsf{E}\biggl(I_A(h_n)\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\,\bigg|\,\mathscr{F}_{n-1}\biggr)(\omega)\;(\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) &= \\
&= \int_B I_A(h_n)\frac{Z_n(\omega)}{Z_{n-1}(\omega)}(\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) = \\
&= \int_B \biggl[\int_A \frac{Z_n(\omega)}{Z_{n-1}(\omega)}\,\mu_n(dx;\omega)\biggr](\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) = \\
&= \int_{B\times A} \frac{Z_n(\omega)}{Z_{n-1}(\omega)}\,\mu_n(dx;\omega)(\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega).
\end{aligned} \tag{26}$$

Пусть $M_n(dx, d\omega) = \mu_n(dx;\omega)(\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega)$ — косое произведение мер на $\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \otimes \mathscr{F}_{n-1}$ и пусть $\mathsf{E}_{M_n}(\cdot\,|\,\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \otimes \mathscr{F}_{n-1})$ — условное (относительно $\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \otimes \mathscr{F}_{n-1}$) математическое ожидание по мере $M_n = M_n(dx, d\omega)$, определяемое, как обычно (см., например, [439, гл. II, § 7]), с помощью теоремы Радона—Никодима.

Тогда из формулы (26) по теореме Фубини получаем

$$\begin{aligned}
&\int_B \mathsf{E}\biggl(I_A(h_n)\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\biggm|\mathscr{F}_{n-1}\biggr)(\omega)\ (\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) = \\
&\qquad = \int_{B\times A} \frac{Z_n(\omega)}{Z_{n-1}(\omega)}\, M_n(dx; d\omega) = \\
&\qquad = \int_{B\times A} \mathsf{E}_{M_n}\biggl(\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\biggm|\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}\biggr)(x,\omega)\, M_n(dx; d\omega) = \\
&\qquad = \int_B \biggl[\int_A \mathsf{E}_{M_n}\biggl(\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\biggm|\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}\biggr)(x,\omega)\, \mu_n(dx;\omega)\biggr](\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega) = \\
&\qquad = \int_B \biggl[\int_A \mathsf{E}_{M_n}\biggl(\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\biggm|\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}\biggr)(x,\omega)\nu_n(dx;\omega)\biggr](\mathsf{P}|\mathscr{F}_{n-1})(d\omega).
\end{aligned}$$

В силу произвольности $B\in\mathscr{F}_{n-1}$ отсюда находим, что (P-п. н.)

$$\mathsf{E}\biggl(I_A(h_n)\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\biggm|\mathscr{F}_{n-1}\biggr)(\omega) = \int_A Y_n(x,\omega)\nu_n(dx;\omega), \tag{27}$$

где

$$Y_n(x,\omega) = \mathsf{E}_{M_n}\biggl(\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\biggm|\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathscr{F}_{n-1}\biggr)(x,\omega). \tag{28}$$

Сопоставляя формулу (23), где $\widetilde{\mathsf{E}}(I_A(h_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = \int_A \widetilde{\nu}_n(dx;\omega)$, с соотношениями (27), (28) видим, что $\widetilde{\nu}_n(\cdot\,;\omega)\ll\nu_n(\cdot\,;\omega)$ для каждого $\omega\in\Omega$ и имеет место формула (25).

Из этой формулы получаем ответ на поставленный выше вопрос: *«сносовые» слагаемые $\varphi*\widetilde{\nu}$ и $\varphi*\nu$ в формулах* (22) *и* (21) *связаны* (по крайней мере, в предположении, что $(|\varphi(x)(Y-1)|*\nu)_n<\infty$, $n\geqslant 1$) *соотношением*

$$\varphi*\widetilde{\nu} = \varphi*\nu + \varphi(Y-1)*\nu. \tag{29}$$

§ 3f. Предсказуемые критерии отсутствия арбитражных возможностей на (B, S)-рынке

1. Согласно фундаментальной теореме теории расчетов финансовых активов (§ 2b) для отсутствия арбитражных возможностей на (B,S)-рынке, состоящем из банковского счета $B=(B_n)$ и d активов $S=(S^1,\dots,S^d)$, $S^i=(S^i_n)$, $0\leqslant n\leqslant N$, необходимо и достаточно, чтобы на исходном фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant N},\mathsf{P})$ нашлась вероятностная (мартингальная) мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, эквивалентная мере P, относительно которой d-мерная последовательность нормированных цен

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{0 \leqslant n \leqslant N}$$

является $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом.

Большой интерес представляет и описание класса $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ *всех* таких мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, поскольку, как мы уже видели в § 1c, при отыскании верхних и нижних цен приходится иметь дело с sup и inf по классу мер $\widetilde{\mathsf{P}} \in \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$.

При отыскании таких мер естественно начать с несколько более общего вопроса о конструкции мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, которые *локально* абсолютно непрерывны относительно меры P, с последующим выяснением того, не является ли построенная мера и такой, что $\mathsf{P} \sim \widetilde{\mathsf{P}}$.

2. Материал, изложенный в предыдущих параграфах, дает все необходимое из теории абсолютно непрерывной замены меры, чтобы рассмотреть проблему конструкции мер $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$.

Начнем со случая, когда $d = 1$, $B_n \equiv 1$ и $S = (S_n)$ — единственный «рисковый» актив,

$$S_n = S_0 e^{H_n}. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ и величины H_n являются $\mathscr{F}_n$-измеримыми. Как и раньше, будем обозначать $h_n = \Delta H_n$, $H_0 = 0$. Всюду далее предполагается, что $\mathscr{F}_0 = = \{\varnothing, \Omega\}$.

Пользуясь обозначениями и результатами § 3c, положим $\widehat{H}_0 = 0$ и

$$\widehat{H}_n = \sum_{k=1}^{n} (e^{\Delta H_k} - 1), \quad n \geqslant 1, \tag{2}$$

$$\mathscr{E}(\widehat{H})_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \Delta \widehat{H}_k), \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

Заметим, что

$$\Delta \mathscr{E}(\widehat{H})_n = \mathscr{E}(\widehat{H})_{n-1} \Delta \widehat{H}_n. \tag{4}$$

При конструировании мартингальной меры $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, относительно которой $S = (S_n)$ становится мартингалом, можно непосредственно пользоваться той схемой, которая была изложена выше: написать каноническое представление для $S = (S_n)$ (типа (13), § 3e) и затем найти те меры $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, при которых происходит «убивание» сносового члена. Так можно, конечно, поступить, но у нас имеется дополнительно свойство *положительности* цен, которое дает возможность рассматривать все в терминах их логарифмов (т. е. в терминах $H = (H_n)$), которые, как показывает статистический анализ, проще устроены, нежели сами цены $S = (S_n)$.

Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}$ — такая мера, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$.

Обозначим $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, где $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}|\mathscr{F}_n$, $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathscr{F}_n$. Всюду далее мы полагаем $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathsf{P}_0$. Тем самым, $Z_0 = 1$. Пусть $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ — некоторая последовательность $\mathscr{F}_n$-измеримых величин X_n, $n \geqslant 1$, и $X_0 = 0$.

Согласно лемме из § 3d

если $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, *то*

$$X \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff XZ \in \mathscr{M}(\mathsf{P}), \tag{5}$$

и

если $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, *то*

$$X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff XZ \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}). \tag{6}$$

Предположим, что $X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$. Согласно теореме из § 1c гл. II последовательность X есть мартингальное преобразование, и, значит, $\Delta X_n = a_n \Delta M_n$, где a_n — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримая величина и M — некоторый мартингал (по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$). Тем самым, $\Delta\mathscr{E}(X)_n = \mathscr{E}(X)_{n-1}\Delta X_n = a_n \mathscr{E}(X)_{n-1}\Delta M_n$. Отсюда следует, что $\mathscr{E}(X)$ также есть мартингальное преобразование, а следовательно, опять-таки по теореме из § 1c гл. II, $\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$. Таким образом,

$$X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \Rightarrow \mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}). \tag{7}$$

Если предположить, что $\mathscr{E}(X) \neq 0$, то, рассматривая

$$\Delta X_n = \Delta\mathscr{E}(X)_n / \mathscr{E}(X)_{n-1},$$

аналогичным образом находим, что

$$\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \Rightarrow X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}).$$

Таким образом, с учетом свойства (6) получаем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ *и* $\mathscr{E}(X) \neq 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.). *Тогда*

$$\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff XZ \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}).$$

Предположим теперь, что $\mathscr{E}(X) \geqslant 0$ и $\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. Тогда в силу леммы из § 1c гл. II имеем $\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. Поэтому с учетом свойства (5), имеет место следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ *и* $\mathscr{E}(X) \geqslant 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.). *Тогда*

$$\mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(X) \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(X)Z \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}).$$

Заметим, что в силу формулы (3) имеют место следующие импликации (понимаемые покоординатно):

$$\Delta X \neq -1 \iff \mathscr{E}(X) \neq 0,$$
$$\Delta X \geqslant -1 \iff \mathscr{E}(X) \geqslant 0$$

и

$$\Delta X > -1 \iff \mathscr{E}(X) > 0.$$

Применение утверждений лемм 1 и 2 к случаю $X = \widehat{H}$, где $\widehat{H}$ определено по H формулой (2), дает следующий результат.

Лемма 3. *Пусть* $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$, *где*

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad H_0 = 0, \tag{8}$$

и $\Delta\widehat{H}_n = e^{\Delta H_n} - 1$, $\widehat{H}_0 = 0$.

Тогда

$$S_n = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})_n \tag{9}$$

и

если $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, *то*

$$S \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(\widehat{H})Z \in \mathscr{M}(\mathsf{P}); \tag{10}$$

если $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, *то*

$$S \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \widehat{H}Z \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}). \tag{11}$$

3. Эти импликации указывают метод поиска мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, относительно которых $S \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

Относительно меры P последовательность $Z = (Z_n)$ является P-мартингалом. Согласно свойствам (10) и (11) надо описать те неотрицательные P-мартингалы Z, для которых $\mathsf{E}\, Z_n \equiv 1$ и которые обладают тем свойством, что $\mathscr{E}(\widehat{H})Z \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$, если $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, и $\widehat{H}Z \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$, если $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$.

В условно-гауссовском случае соответствующий класс мартингалов $Z = (Z_n)$ состоял из мартингалов вида

$$Z_n = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k \varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\} \tag{12}$$

(с $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми b_k; см., например, формулу (7) в § 3b), которые удовлетворяют разностным уравнениям

$$\Delta Z_n = Z_{n-1}\Delta N_n, \tag{13}$$

где

$$\Delta N_n = e^{b_n \varepsilon_n - \frac{1}{2} b_n^2} - 1 \tag{14}$$

образуют обобщенную мартингал-разность:

$$\mathsf{E}(|\Delta N_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) < \infty, \quad \mathsf{E}(\Delta N_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0.$$

Поэтому в общем случае естественный путь поиска процессов плотностей $Z=(Z_n)$ может состоять в следующем.

Будем искать интересующие нас плотности $Z=(Z_n)$, по которым будут затем строиться меры $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ по формуле $\widetilde{\mathsf{P}}_n(d\omega)=Z_n(\omega)\,\mathsf{P}_n(d\omega)$, в виде (13), т. е. считать, что

$$Z_n = \mathscr{E}(N)_n, \quad Z_0 = 1, \tag{15}$$

где N — некоторые подлежащие определению *локальные* мартингалы, $N_0=0$, $\Delta N_n \geqslant -1$ и $\mathsf{E}\,\mathscr{E}(N)_n=1$.

Вопрос о том, насколько широк класс получаемых таким образом мер $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, далеко не прост. Дело в том, что, во-первых, не прост вопрос о том, можно ли по семейству согласованных «конечномерных» распределений $\{\widetilde{\mathsf{P}}_n\}$ определить такую меру $\widetilde{\mathsf{P}}$, что $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathscr{F}_n=\widetilde{\mathsf{P}}_n$, $n\geqslant 1$. (Соответствующий контрпример см., например, в книге [439, § 3 гл. II].) Во-вторых, в принципе не прост вопрос о том, как устроены все мартингалы или локальные мартингалы на $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}, \mathsf{P})$. (См. по этому поводу [250, гл. III].)

Ниже мы пойдем по пути, который, хотя и не дает исчерпывающего ответа на вопрос о структуре всех мер $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ или $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, тем не менее, в техническом отношении достаточно прост и приводит к *широкому классу* таких мер. Сделаем прежде всего следующие замечания.

Как ясно из предыдущего, для заданной меры P все меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, которые обладают свойством $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, с точки зрения конечномерных распределений $\{\widetilde{\mathsf{P}}_n\}$ полностью описываются своими плотностями $Z=(Z_n)$. Из предположения $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ вытекает, что $\mathsf{P}(Z_n>0)=1$, и, значит, по $Z=(Z_n)$ можно определить новую последовательность $N=(N_n)$, полагая $N_0=0$ и

$$\Delta N_n = \frac{\Delta Z_n}{Z_{n-1}}. \tag{16}$$

Ясно, что $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$, и при этом между Z и N существует такое взаимно однозначное соответствие, что $Z_n=\mathscr{E}(N)_n$.

Тем самым, при построении мер $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойством $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ можно оперировать не с плотностями $Z=(Z_n)$, где $Z_n=\dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, а с соответствующей последовательностью $N=(N_n)$, которая должна удовлетворять свойству $\Delta N_n > -1$, с тем чтобы выполнялось условие $Z_n>0$ (P-п. н.), $n\geqslant 1$.

Итак, будем предполагать, что $S_0>0$, $S_n=S_0\mathscr{E}(\widehat{H})_n$, $n\geqslant 1$, и при этом $S_n>0$, что равносильно тому, что $\Delta\widehat{H}_n>-1$.

Пусть также $Z=(Z_n)$, $Z_n=\mathscr{E}(N)_n$, где $\Delta N_n>-1$ и, значит, $Z_n>0$ (P-п. н.).

Будем *предполагать*, что *существует* такая мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, что ее сужения $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathscr{F}_n$ таковы, что $\widetilde{\mathsf{P}}_n \sim \mathsf{P}_n$, $n\geqslant 1$, т. е. $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$.

Тогда в силу свойства (10),

$$S \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}) \iff \mathscr{E}(\widehat{H})\mathscr{E}(N) \in \mathscr{M}(\mathsf{P}). \tag{17}$$

4. Непосредственно проверяется, что имеет место следующая *формула Йора* (M. Yor; см., например, [402]):

$$\mathscr{E}(\widehat{H})\mathscr{E}(N) = \mathscr{E}(\widehat{H}+N+[\widehat{H},N]), \tag{18}$$

где

$$[\widehat{H},N]_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta\widehat{H}_k \Delta N_k.$$

Из предположений $\mathscr{E}(\widehat{H})>0$, $\mathscr{E}(N)>0$ и свойства (17) вытекает, что

$$\begin{aligned} S\in\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf P}) \iff \mathscr{E}(\widehat{H}+N+[\widehat{H},N])\in\mathscr{M}(\mathsf P) \iff \\ \iff \widehat{H}+N+[\widehat{H},N]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf P). \end{aligned}$$

Поэтому если $N\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf P)$, $\Delta N>-1$, $Z_n=\mathscr{E}(N)_n$ и $d\widetilde{\mathsf P}_n=Z_n\,d\mathsf P$, то

$$S\in\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf P}) \iff \widehat{H}+[\widehat{H},N]\in\mathscr{M}(\mathsf P).$$

Поскольку $\Delta(\widehat{H}+[\widehat{H},N])=\Delta\widehat{H}(1+\Delta N)$, условие $\widehat{H}+[\widehat{H},N]\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf P)$ равносильно требованию, чтобы последовательность

$$\Delta\widehat{H}(1+\Delta N) = (\Delta\widehat{H}_n(1+\Delta N_n))_n$$

была локальной $\mathsf P$-мартингал-разностью, или, что эквивалентно (см. лемму в § 1c гл. II), чтобы эта последовательность образовывала обобщенную $\mathsf P$-мартингал-разность, т. е. чтобы ($\mathsf P$-п. н.) для любого $n\geqslant 1$ выполнялись условия

$$\mathsf E\bigl[|\Delta\widehat{H}_n(1+\Delta N_n)|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}\bigr]<\infty \tag{19}$$

и

$$\mathsf E\bigl[\Delta\widehat{H}_n(1+\Delta N_n)|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}\bigr]=0. \tag{20}$$

Отметим, что условия (19) и (20) определены с привлечением условного математического ожидания $\mathsf E(\cdot\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$, и в этом смысле они выражены в «предсказуемых» терминах.

Условиям (19) и (20) можно придавать разную форму. Например, учитывая, что $\Delta Z_n=Z_{n-1}\Delta N_n$, $\Delta N_n>-1$ и $\Delta\widehat{H}_n=e^{\Delta H_n}-1$, находим, что неравенство (20) равносильно следующему условию на Z:

$$\mathsf E\left[e^{\Delta H_n}\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\,\middle|\,\mathscr{F}_{n-1}\right]=1. \tag{21}$$

Заметим, что это условие, конечно, можно было бы получить и непосредственно, поскольку согласно формуле Байеса (см. формулу (4) в § 3a или (1) в § 3d) в предположении, что $\widetilde{\mathsf P}\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathsf P$, мы имеем

$$\widetilde{\mathsf E}[e^{\Delta H_n}\,|\,\mathscr{F}_{n-1}]=\mathsf E\left[e^{\Delta H_n}\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\,\middle|\,\mathscr{F}_{n-1}\right]\quad (\mathsf P\text{-п. н.}), \tag{22}$$

и, значит, (20) равносильно тому, что $\widetilde{\mathsf E}(S_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=S_{n-1}$ ($\mathsf P$- и $\widetilde{\mathsf P}$-п. н.). Аналогичным образом, (19) $\iff\widetilde{\mathsf E}(S_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})<\infty$. В силу неотрицательности S_n, $n\geqslant 1$, отсюда следует, что *условия* (19) *и* (20) *обеспечивают то, что относительно меры* $\widetilde{\mathsf{P}}$, *построенной по последовательности* $N=(N_n)$, *последовательность* $S=(S_n)$ *является мартингалом*.

Метод, примененный выше, легко может быть распространен и на многомерный случай, когда $S=(S^1, \ldots, S^d)$ и мы интересуемся вопросом о том, когда

$$\frac{S}{B} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$$

относительно некоторой меры $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$.

Этим вопросом мы сейчас и займемся.

5. Выбор банковского счета $B=(B_n)$ в качестве нормирующей цены удобен тем, что для него величины B_n являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми, и это, как уже отмечалось выше, дает определенные технические упрощения. Однако, вообще говоря, нет никаких оснований не брать в роли счета *B цену любого другого актива*, вовсе не обязанного быть банковским счетом.

В этой связи рассмотрим сначала следующую ситуацию.

Пусть имеются два актива $S^0=(S^0_n)$ и $S^1=(S^1_n)$. Предполагается, что

$$S^i_n = S^i_0 e^{H^i_n}, \quad i=0,1,$$

и пусть $\Delta Z_n = Z_{n-1}\Delta N_n$, $\Delta \widehat{H}^i_n = e^{\Delta H^i_n} - 1$, $H^i_0 = 0$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{S^1}{S^0} = \left(\frac{S^1_n}{S^0_n}\right)_{n\geqslant 0},$$

считая S^1_0 и S^0_0 константами, и будем интересоваться вопросом о том, когда $\frac{S^1}{S^0} \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$. (Чтобы не возникали вопросы о существовании меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойством $\widetilde{\mathsf{P}}|\mathscr{F}_n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$, где $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ строятся так, что $\widetilde{\mathsf{P}}_n(d\omega) = Z_n(\omega)\mathsf{P}_n(d\omega)$, можно считать, что $n \leqslant N$ и $\mathscr{F} = \mathscr{F}_N$.)

Ясно, что (в бескоординатной записи)

$$\frac{S^1}{S^0} Z = \frac{S^1_0}{S^0_0} Z_0 \cdot \mathscr{E}(\widehat{H}^1) \cdot \mathscr{E}^{-1}(\widehat{H}^0) \cdot \mathscr{E}(N). \tag{23}$$

Непосредственно легко проверяется, что

$$\mathscr{E}^{-1}(\widehat{H}^0) = \mathscr{E}(-\widehat{H}^*), \tag{24}$$

где

$$\widehat{H}^*_n = \widehat{H}^0_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\Delta \widehat{H}^0_k)^2}{1+\Delta \widehat{H}^0_k} \quad \left(= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta \widehat{H}^0_k}{1+\Delta \widehat{H}^0_k}\right). \tag{25}$$

Поэтому $\frac{S^1}{S^0} Z$ есть произведение *трех* стохастических экспонент:

$$\frac{S^1}{S^0} Z = \frac{S^1_0}{S^0_0} Z_0 \cdot \mathscr{E}(\widehat{H}^1) \cdot \mathscr{E}(-\widehat{H}^*) \cdot \mathscr{E}(N), \tag{26}$$

откуда с помощью *формулы Йора* (18) последовательным образом находим, что

$$\mathscr{E}(\widehat{H}^1)\cdot\mathscr{E}(-\widehat{H}^*)\cdot\mathscr{E}(N)=\mathscr{E}\Bigg(\widehat{H}^1-\widehat{H}^0+N+\sum_{k\leqslant\cdot}\frac{(\Delta\widehat{H}^0_k-\Delta\widehat{H}^1_k)(\Delta\widehat{H}^0_k-\Delta N_k)}{1+\Delta\widehat{H}^0_k}\Bigg). \quad (27)$$

Отсюда видим, что необходимое и достаточное условие на N, которое обеспечивает, что $\dfrac{S^1}{S^0}\in\mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$, состоит в том, что

$$\widehat{H}^1-\widehat{H}^0+\sum_{k\leqslant\cdot}\frac{(\Delta\widehat{H}^0_k-\Delta\widehat{H}^1_k)(\Delta\widehat{H}^0_k-\Delta N_k)}{1+\Delta\widehat{H}^0_k}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}), \quad (28)$$

или, что равносильно,

$$\left(\frac{(\Delta\widehat{H}^1_k-\Delta\widehat{H}^0_k)(1+\Delta N_k)}{1+\Delta\widehat{H}^0_k}\right)_{k\geqslant1}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}). \quad (29)$$

Поскольку вопрос о мартингальности нормированного вектора цен

$$\frac{S}{S^0}=\left(\frac{S^1}{S^0},\ldots,\frac{S^d}{S^0}\right)$$

в случае d активов $S^1,\ldots,S^d$ сводится к покомпонентному рассмотрению, из формулы (29) получаем следующий общий результат.

Теорема 1. *Пусть на* $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N},\mathsf{P})$, $\mathscr{F}=\mathscr{F}_N$, *задан* $d+1$ *актив* $(S^0,S^1,\ldots,S^d)$ *с представлениями*

$$S^i_n=S^i_0e^{H^i_n},\quad H^i_0=0,\ \ i=1,\ldots,d,\quad 1\leqslant n\leqslant N,$$

или, что равносильно,

$$\Delta S^i_n=S^i_{n-1}\Delta\widehat{H}^i_n, \quad (30)$$

где

$$\Delta\widehat{H}^i_n=e^{\Delta H^i_n}-1,\quad \widehat{H}^i_0=0. \quad (31)$$

Предполагается, что константы $S^i_0>0$ *для всех* $i=0,1,\ldots,n$.

Пусть, далее, $Z=(Z_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *— такая последовательность случайных величин, что*

$$\Delta Z_n=Z_{n-1}\Delta N_n,\quad Z_0=1, \quad (32)$$

где $\Delta N_n>-1$.

Для того чтобы относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_N$,

$$\widetilde{\mathsf{P}}_N(d\omega)=Z_N(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega), \quad (33)$$

отношение $\dfrac{S}{S^0}$ *было* d*-мерным мартингалом, необходимо и достаточно вы-*

полнение следующих условий: для всех $i=1, \ldots, d$ *и* $1 \leqslant n \leqslant N$ (P-п. н.)

$$\mathsf{E}\left[\left|\frac{(\Delta\widehat{H}_n^i - \Delta\widehat{H}_n^0)(1+\Delta N_n)}{1+\Delta\widehat{H}_n^0}\right| \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] < \infty, \tag{34}$$

$$\mathsf{E}\left[\frac{(\Delta\widehat{H}_n^i - \Delta\widehat{H}_n^0)(1+\Delta N_n)}{1+\Delta\widehat{H}_n^0} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] = 0. \tag{35}$$

Следствие. *Предположим, что актив* $S^0 = (S_n^0)$ *является «безрисковым» в том смысле, что* S_n^0 — $\mathscr{F}_{n-1}$*-измеримые величины. (Например,* $S^0 = B$ — *банковский счет с постоянной процентной ставкой* $\Delta\widehat{H}_n^0 \equiv r$*.) Тогда, в силу того что* $\widehat{H}_n^0$ — $\mathscr{F}_{n-1}$*-измеримые величины, условиям* (34) *и* (35) *можно придать следующую форму: для* $i=1, \ldots, d$, $1 \leqslant n \leqslant N$ *выполняются соотношения*

$$\mathsf{E}\left[|\Delta\widehat{H}_n^i(1+\Delta N_n)| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] < \infty, \tag{36}$$

$$\mathsf{E}\left[\Delta\widehat{H}_n^i(1+\Delta N_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] = \Delta\widehat{H}_0. \tag{37}$$

В частности, если $\Delta\widehat{H}_n^0 \equiv 0$*, то эти условия принимают вид*

$$\mathsf{E}\left[|\Delta\widehat{H}_n^i(1+\Delta N_n)| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] < \infty, \tag{38}$$

$$\mathsf{E}\left[\Delta\widehat{H}_n^i(1+\Delta N_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] = 0, \tag{39}$$

что совпадает с ранее найденными условиями (19), (20).

Если к тому же $\Delta N_n \equiv 0$*, то эти условия сводятся к условиям*

$$\mathsf{E}\left[|\Delta\widehat{H}_n^i| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] < \infty, \tag{40}$$

$$\mathsf{E}[\Delta\widehat{H}_n^i \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] = 0, \tag{41}$$

причем (41) *равносильно условию* (ср. с формулой (11) в § 3c)

$$\mathsf{E}[e^{\Delta H_n^i} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] = 1,$$

являющемуся очевидным условием того, что $S^i \in \mathscr{M}(\mathsf{P})$.

6. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие полученные критерии. С этой целью заметим сначала следующее.

Пусть (B, S)-рынок состоит из двух активов: такого банковского счета $B = (B_n)$, что

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1},$$

где r_n — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримые величины, и акции $S = (S_n)$,

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1},$$

где ρ_n — $\mathscr{F}_n$-измеримые величины.

Тогда условия (36) и (37) принимают такой вид:

$$\mathsf{E}\left[|\rho_n(1+\Delta N_n)| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] < \infty, \tag{42}$$

$$\mathsf{E}\left[\rho_n(1+\Delta N_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] = r_n. \tag{43}$$

Если же считать, что (B,S)-рынок задается в форме

$$B_n = B_{n-1}e^{r_n}, \qquad S_n = S_{n-1}e^{\rho_n}, \tag{44}$$

то условия (36) и (37) будут записываться следующим образом:

$$\mathsf{E}\big[|(e^{\rho_n}-1)(1+\Delta N_n)|\,|\mathscr{F}_{n-1}\big] < \infty, \tag{45}$$

$$\mathsf{E}\big[(e^{\rho_n}-1)(1+\Delta N_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}\big] = e^{r_n}-1. \tag{46}$$

Пример 1. Рассмотрим одношаговую модель (44) с $n=0$ и 1, считая, что $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $Z_0=1$. Тогда $1+\Delta N_1=Z_1$, и, согласно равенству (46), имеем

$$\mathsf{E}\, e^{\rho_1} Z_1 = e^r.$$

Будем считать, что $\Omega=\mathbb{R}$, $\rho_1(x)=x$, $Z_1=Z(x)$, и пусть $F=F(x)$ — распределение вероятностей на Ω. Тогда приведенное условие равносильно тому, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x Z_1(x)\, dF(x) = e^r. \tag{47}$$

Таким образом, ясно, что отыскание *всех* распределений $\widetilde{F}=\widetilde{F}(x)$, эквивалентных $F=F(x)$ (в смысле эквивалентности порождаемых ими мер), равносильно описанию *всех положительных* решений $Z_1=Z_1(x)$ уравнения (47), подчиняющихся условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z_1(x)\, dF(x) = 1. \tag{48}$$

Если, например, $F\sim\mathscr{N}(m,\sigma^2)$, $\sigma^2>0$, то условия (45) и (46) принимают вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x Z_1(x)\varphi_{m,\sigma^2}(x)\, dx = e^r, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(x)\varphi_{m,\sigma^2}(x)\, dx = 1, \tag{49}$$

где $\varphi_{m,\sigma^2}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ — плотность нормального распределения.

Из соотношений (49) мы видим, что если «мартингальная» мера ищется *в классе нормальных распределений*, $\mathscr{N}(\widetilde{m},\widetilde{\sigma}^2)$, $\widetilde{\sigma}^2>0$, т. е.

$$Z_1(x) = \frac{\varphi_{\widetilde{m},\widetilde{\sigma}^2}(x)}{\varphi_{m,\sigma^2}(x)}, \tag{50}$$

то допустимые пары $(\widetilde{m},\widetilde{\sigma}^2)$ должны находиться из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x \varphi_{\widetilde{m},\widetilde{\sigma}^2}(x)\, dx = e^r,$$

равносильного тому, что

$$\widetilde{m}+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2} = r. \tag{51}$$

Иначе говоря, допустимыми являются все пары $(\widetilde{m}, \widetilde{\sigma}^2)$, $\widetilde{\sigma}^2 > 0$, удовлетворяющие условию (51). С этим условием при $r = 0$ мы уже сталкивались в § 3c (см. формулу (14)).

Отметим, что у системы уравнений (49) помимо решений $Z_1(x)$ вида (50) есть и другие решения, общий вид которых, видимо, неизвестен. Это замечание показывает, насколько может быть сложна проблема описания всех «мартингальных» мер даже для такой простой одношаговой схемы, которая была только что рассмотрена.

В этом отношении следующий случай может рассматриваться как «слишком простой», поскольку для него «мартингальная» мера оказывается *единственной* и легко находится.

Пример 2. *CRR-модель* (Кокс—Росс—Рубинштейн; [82]).

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta B_n &= rB_{n-1}, \\ \Delta S_n &= \rho_n S_{n-1}, \end{aligned} \tag{52}$$

где $n \leqslant N$ и B_0, S_0 — положительные константы.

В рассматриваемой модели предполагается, что (ρ_n) — последовательность *независимых одинаково распределенных* случайных величин, принимающих такие два значения b и a, что

$$-1 < a < r < b$$

и

$$\mathsf{P}_N(\rho_n = b) = p, \quad \mathsf{P}_N(\rho_n = a) = q, \tag{53}$$

где $0 < p < 1$, $p + q = 1$.

Поскольку вся «случайность» в рассматриваемую модель входит через величины ρ_n, $n \geqslant 1$, в качестве пространства элементарных событий можно рассматривать пространство $\Omega = \{a, b\}^N$, т. е. пространство последовательностей $(x_1, \ldots, x_N)$, где $x_i = a$ или b, и определять для $x = (x_1, \ldots, x_N)$ величины $\rho_n = \rho_n(x)$ координатным образом: $\rho_n(x) = x_n$.

Вероятностная мера $\mathsf{P}_N = \mathsf{P}_N(x_1, \ldots, x_N)$, относительно которой $\rho_1, \ldots, \rho_N$ независимы и выполнены свойства (53), определяется стандартным образом:

$$\mathsf{P}_N(x_1, \ldots, x_N) = p^{\nu_b(x_1, \ldots, x_N)} q^{N - \nu_b(x_1, \ldots, x_N)},$$

где $\nu_b(x_1, \ldots, x_N) = \sum\limits_{i=1}^{N} I_b(x_i)$ — число тех x_i, которые равны b.

Меру $\widetilde{\mathsf{P}}_N \sim \mathsf{P}_N$ будем строить последовательным образом: сначала $\widetilde{\mathsf{P}}_1$, затем $\widetilde{\mathsf{P}}_2, \ldots, \widetilde{\mathsf{P}}_N$ по формулам ($\mathsf{P}_n = \mathsf{P}_N \,|\, \mathscr{F}_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n)$)

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n(x_1, \ldots, x_n) = Z_n(x_1, \ldots, x_n)\, \mathsf{P}_n(x_1, \ldots, x_n),$$

где Z_n будут (шаг за шагом) находиться из формулы (43), которую, с учетом того, что $1+\Delta N_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}}$, можно записать в таком виде:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_n}\left[\rho_n \frac{Z_n}{Z_{n-1}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{n-1}\right] = r. \tag{54}$$

При $n=1$ (с $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$) из формулы (54) находим

$$pbZ_1(b) + qaZ_1(a) = r, \tag{55}$$

что вместе с условием нормировки

$$pZ_1(b) + qZ_1(a) = 1 \tag{56}$$

однозначным образом дает значения

$$Z_1(b) = \frac{r-a}{b-a}\cdot\frac{1}{p}, \quad Z_1(a) = \frac{b-r}{b-a}\cdot\frac{1}{q}. \tag{57}$$

Обозначим

$$\widetilde{p} = \frac{r-a}{b-a}, \quad \widetilde{q} = \frac{b-r}{b-a}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{P}}_1(b) &= Z_1(b)\,\mathsf{P}_1(b) = \widetilde{p}, \\ \widetilde{\mathsf{P}}_1(a) &= Z_1(a)\,\mathsf{P}_1(a) = \widetilde{q}. \end{aligned} \tag{58}$$

Для отыскания $\widetilde{\mathsf{P}}_2$ (и аналогично $\widetilde{\mathsf{P}}_3, \ldots, \widetilde{\mathsf{P}}_N$) снова воспользуемся формулой (54). Используя свойство независимости ρ_1 и ρ_2 относительно меры P_2, из формулы (52) находим, что

$$bp\frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} + aq\frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = r. \tag{59}$$

Дополнительное условие для определения значений $Z_2(b,b)$ и $Z_2(b,a)$ находим из условия мартингальности

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2}[Z_2(\rho_1,\rho_2)\,|\,\rho_1 = b] = Z_1(b),$$

что дает равенство

$$p\frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} + q\frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = 1. \tag{60}$$

Сопоставляя формулы (59) и (60) с (55) и (56) соответственно, видим, что

$$\frac{Z_2(b,b)}{Z_1(b)} = \frac{r-a}{b-a}\cdot\frac{1}{p} = \frac{\widetilde{p}}{p}, \quad \frac{Z_2(b,a)}{Z_1(b)} = \frac{\widetilde{q}}{q}.$$

Аналогичным же образом находим, что

$$\frac{Z_2(a,b)}{Z_1(a)} = \frac{\widetilde{p}}{p}, \quad \frac{Z_2(a,a)}{Z_1(a)} = \frac{\widetilde{q}}{q}.$$

Значит,

$$\widetilde{\mathsf{P}}_2(a,a) = Z_2(a,a)q^2 = Z_1(a)\frac{\widetilde{q}}{q}\cdot q^2 = \widetilde{q}^{\,2},$$

$$\widetilde{\mathsf{P}}_2(a,b) = \widetilde{q}\,\widetilde{p}, \quad \widetilde{\mathsf{P}}_2(b,a) = \widetilde{p}\,\widetilde{q}, \quad \widetilde{\mathsf{P}}_2(b,b) = \widetilde{p}^{\,2}.$$

Отсюда ясно, что по мере $\widetilde{\mathsf{P}}_2$ величины ρ_1 и ρ_2 *одинаково распределены* и *независимы*, причем $\widetilde{\mathsf{P}}_2(\rho_i = b) = \widetilde{p}$, $\widetilde{\mathsf{P}}_2(\rho_i = a) = \widetilde{q}$, $i = 1, 2$.

Последующие шаги в отыскании $\widetilde{\mathsf{P}}_3, \ldots, \widetilde{\mathsf{P}}_N$ аналогичны и приводят к следующему результату.

Теорема 2. *В CRR-модели, определенной формулами* (52) *и* (53)*, мартингальная мера* $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ *существует, единственна и определяется формулой*

$$\widetilde{\mathsf{P}}_N(x_1, \ldots, x_N) = \widetilde{p}^{\,\nu_b(x_1,\ldots,x_N)} \widetilde{q}^{\,N-\nu_b(x_1,\ldots,x_N)}, \tag{61}$$

где

$$\widetilde{p} = \frac{r-a}{b-a}, \quad \widetilde{q} = \frac{b-r}{b-a}. \tag{62}$$

Замечание. Отметим, что a priori не очевидно, что мартингальная мера $\widetilde{\mathsf{P}}_N$ будет *прямым произведением* одномерных распределений,

$$\widetilde{\mathsf{P}}_N = \underbrace{\widetilde{\mathsf{P}}_1 \otimes \ldots \otimes \widetilde{\mathsf{P}}_1}_{N},$$

т. е., что величины $\rho_1, \ldots, \rho_N$, независимые и одинаково распределенные относительно исходной меры P_N, будут также независимыми и одинаково распределенными и по «мартингальной» мере $\widetilde{\mathsf{P}}_N$.

4. Полные и совершенные безарбитражные рынки

§ 4a. Мартингальный критерий полноты рынка. I. Формулировка второй фундаментальной теоремы. Доказательство необходимости

1. В соответствии с определениями, введенными в § 1b, (B, S)-рынок, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$, где $0 \leqslant n \leqslant N$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$, называется *полным* (*совершенным*) или N-*полным* (N-*совершенным*), если всякое $\mathscr{F}_N$-измеримое *ограниченное* (*конечное*) платежное поручение $f_N = f_N(\omega)$ достижимо. Иначе говоря, найдется самофинансируемый портфель π и начальный капитал x, для которых $X_0^\pi = x$ и

$$X_N^\pi = f_N \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Будем обозначать через $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ совокупность всех мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, относительно которых нормированные цены $\frac{S}{B}$ являются мартингалами. Предполагается (см. § 1a, 2a), что $B = (B_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ — *безрисковый* актив и $S = (S_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ — многомерный *рисковый* актив, причем $S_n = (S_n^1, \ldots, S_n^d)$ и $d < \infty$.

Актив B обычно интерпретируют как *банковский счет*; активы S^i называют *акциями*.

В дальнейшем предполагается, что $B_n > 0$, $n \geqslant 0$. Отсюда следует, что без ограничения общности можно считать, что $B_n \equiv 1$, $n \geqslant 0$.

Следующая теорема настолько важна, что ее естественно назвать *второй фундаментальной теоремой теории расчетов финансовых активов* (The second Fundamental Asset Pricing Theorem; [214], [215]).

Теорема B. *Полнота безарбитражного финансового (B, S)-рынка ($N < \infty$, $d < \infty$) имеет место тогда и только тогда, когда множество $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ мартингальных мер состоит только из одной меры.*

Таким образом, если отсутствие арбитража означает, что

$$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing,$$

то полнота безарбитражного рынка может быть (условно) записана в виде

$$|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1.$$

Сделаем некоторые замечания относительно доказательства этой теоремы.

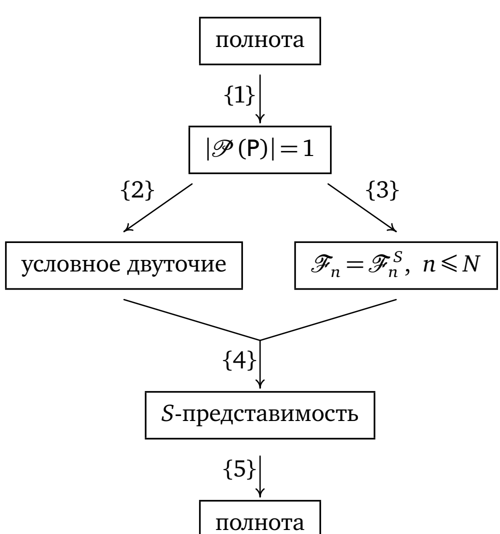
В стохастическом исчислении хорошо известно (см., например, [250, гл. III]), что *единственность* мартингальной меры самым непосредственным образом связана с вопросами *представимости* локальных мартингалов относительно некоторых базисных мартингалов. В техническом отношении соответствующие результаты (особенно для случая непрерывного времени; см. далее § 2d гл. VII) относят к числу трудных, поскольку их доказательства существенно опираются на идеи и технику стохастического анализа семимартингалов и случайных мер.

В то же самое время в случае *дискретного* времени можно дать сравнительно элементарное изложение всего этого круга вопросов, связанных с проблемой «представимости» локальных мартингалов и имеющих к ней самое прямое отношение, — проблемой полноты (B, S)-рынка. Мы начнем изложение со случая $d=1$ (§ 4a—4e). Общему случаю $d \geqslant 1$ посвящен § 4f.

2. Идея доказательства теоремы B в случае $d=1$ состоит в том, чтобы установить справедливость нижеследующей цепочки импликаций, в которой понятия «условное двуточие» и «S-представимость» объясняются ниже в § 4b, 4e, а равенство $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n^S$ означает, что σ-алгебра $\mathscr{F}_n$ совпадает с точностью до множеств P-меры нуль с σ-алгеброй

$$\mathscr{F}_n^S = \sigma(S_1, \ldots, S_n),$$

порожденной случайными величинами $S_1, \ldots, S_n$:



Импликация $\{1\}$, т. е. *необходимость* в теореме B, доказывается сравнительно просто. Возьмем множество $A\in\mathscr{F}_N$ и положим $f_N=I_A(\omega)$. В соответствии с предполагаемой полнотой, существуют самофинансируемая стратегия π и начальный капитал x, удовлетворяющие условиям $X_N^\pi=f_N$ (P-п. н.), $X_0^\pi=x$.

Если π — самофинансируемая стратегия, то

$$X_n^\pi=X_0^\pi+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Delta S_k.$$

Пусть P_i, $i=1,2,$ — две мартингальные меры из семейства $\mathscr{P}(\mathsf{P})$. Тогда $(X_n^\pi)_{n\leqslant N}$ является мартингальным преобразованием и, поскольку $X_N^\pi=I_A$, согласно лемме из § 1c гл. II последовательность $X^\pi=(X_n^\pi)_{n\leqslant N}$ является мартингалом по каждой из мартингальных мер P_i, $i=1,2$.

Тогда для $i=1,2$ имеем

$$x=X_0^\pi=\mathsf{E}_{\mathsf{P}_i}(X_N^\pi\,|\,\mathscr{F}_0)=\mathsf{E}_{\mathsf{P}_i}I_A=\mathsf{P}_i(A),$$

и, следовательно, $\mathsf{P}_1(A)=\mathsf{P}_2(A)$, $A\in\mathscr{F}_N$.

Тем самым, меры P_1 и P_2 на самом деле совпадают, что и доказывает, что множество $\mathscr{P}(\mathsf{P})$, являющееся непустым в силу безарбитражности (B,S)-рынка, состоит не более чем из одного элемента ($|\mathscr{P}(\mathsf{P})|=1$).

Необходимость (импликация $\{1\}$) в теореме B установлена.

В следующем параграфе будут рассмотрены вопросы представимости, участвующие в импликациях $\{4\}$ и $\{5\}$.

§ 4b. О представимости локальных мартингалов. I («S-представимость»)

С точки зрения «общей теории мартингалов и стохастического исчисления» (см. [102], [103], [250], [304]) предположение полноты равносильно, в сущности, так называемому свойству S-представимости локальных мартингалов. (По поводу общих вопросов представимости см. [250, гл. III].)

Определение. Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathsf{P})$ заданы

d-мерный (базисный) мартингал $S=(S_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P})$

и

(одномерный) локальный мартингал $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P})$.

Говорят, что *локальный мартингал X допускает на* $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathsf{P})$ *S-представление,* или *представление относительно* P*-мартингала S,* если найдутся такие предсказуемые последовательности $\gamma=(\gamma_n)$, $\gamma_n=(\gamma_n^1, \ldots, \gamma_n^d)$, что P-п. н. для всякого $n\geqslant 1$ выполняется равенство

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k \quad \biggl(= X_0 + \sum_{k=1}^{n}\Bigl(\sum_{j=1}^{d} \gamma_k^j \Delta S_k^j\Bigr)\biggr), \tag{1}$$

т. е. X есть «мартингальное преобразование», полученное из P-мартингала S «интегрированием» предсказуемой последовательности γ; см. § 1c гл. II.

Следующая лемма относится к импликации {5}, приведенной в цепочке импликаций на с. 548.

Лемма. *Пусть (B,S) — безарбитражный рынок с конечным временны́м горизонтом N, $B_n\equiv 1$, $n\leqslant N$, $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ — семейство мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, эквивалентных мере P (на $(\Omega,\mathscr{F})$ с $\mathscr{F}=\mathscr{F}_N$), относительно которых $S=(S_n)_{n\geqslant 0}$ является $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом.*

Для того, чтобы этот рынок был полным, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая мера $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})$, что всякий ограниченный мартингал $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})$ ($|X_n(\omega)|\leqslant C$, $n\leqslant N$, $\omega\in\Omega$) допускает на $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\widetilde{\mathsf{P}})$ S-представление, или представление относительно $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингала S.

Доказательство. 1. Пусть (безарбитражный) рынок является полным. В качестве искомой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ возьмем произвольную меру из $\mathscr{P}(\mathsf{P})$. Пусть $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})_{n\leqslant N}$ — некоторый мартингал, $|X_n(\omega)|\leqslant C$, $n\leqslant N$, $\omega\in\Omega$.

Положим в определении полноты $f_N=X_N$. Предположение полноты означает, что существуют самофинансируемый портфель π и начальный капитал x, удовлетворяющие условиям (P- и $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.)

$$X_n^{\pi} = x + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta S_k \tag{2}$$

и $X_N^{\pi}=f_N=X_N$. Но поскольку $|f_N|\leqslant C$, последовательность $X^{\pi}=(X_n^{\pi})_{n\leqslant N}$ является P-мартингалом (лемма из § 1c гл. II), и, следовательно, $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалы X^{π} и X с одним и тем же терминальным значением f_N на самом деле совпадают (P- и $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.). Тем самым, мартингал X допускает S-представление.

2. Пусть теперь $f_N=f_N(\omega)$ — некоторая $\mathscr{F}_N$-измеримая ограниченная функция, $|f_N|\leqslant C<\infty$ (P-п. н.). Надо показать, что найдутся такой самофинансируемый портфель π и такой начальный капитал x, что соответствующий капитал $X_N^{\pi}=f_N$ (P-п. н.).

По предположению существует мера $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})$, относительно которой всякий ограниченный $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингал допускает S-представление.

В качестве такого мартингала возьмем $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})_{n\leqslant N}$, $X_n=\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(f_N\,|\,\mathscr{F}_n)$. Но $|f_N|\leqslant C$, следовательно, X — это ограниченный мартингал (Леви), и для него справедливо представление (1) с некоторыми $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримыми величинами γ_k^j, $j=1,\ldots,d$, $k\leqslant N$.

Построим по этим величинам портфель $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$, $\gamma^* = \gamma$ и $\beta_n^* = X_n - \sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j$.

Из формулы (1) следует, что β_n^* являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми величинами. При этом

$$\sum_{j=1}^{d} S_{n-1}^j \Delta\gamma_n^{*j} + \Delta\beta_n^* = \sum_{j=1}^{d} S_{n-1}^j \Delta\gamma_n^j + \left(\Delta X_n - \Delta\left(\sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{d} S_{n-1}^j \Delta\gamma_n^j + \sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j \Delta S_n^j - \Delta\left(\sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j\right) = 0.$$

Тем самым, π^* — самофинансируемый портфель, причем

$$X_n^{\pi^*} = \beta_n^* + \sum_{j=1}^{d} \gamma_n^j S_n^j = X_n$$

и, в частности, $X_N^{\pi^*} = X_N = f_N$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-, P-п. н.), т. е. (B, S)-рынок является полным.

Лемма доказана. □

Замечание. Если не предполагать, что $B_n \equiv 1$, $n \leqslant N$, то все утверждения останутся справедливыми с заменой $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингала $S = (S_n)_{n \leqslant N}$ на $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингал $\dfrac{S}{B} = \left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n \leqslant N}$.

§ 4c. О представимости локальных мартингалов. II (μ-представимость, $(\mu-\nu)$-представимость)

1. Вопрос о том, когда имеет место S-представимость, является, как мы видели в предшествующем параграфе, тесно связанным с полнотой соответствующего рынка и тем фактом, что эволюция капитала X^π описывается соотношением (2).

В § 4d будет показано, что в CRR-модели имеет место S-представимость и, следовательно, в этом случае рынок является полным. Вообще же говоря, полнота, а значит, и S-представимость, являются *скорее исключением, нежели правилом*. И в этом смысле интересно рассмотреть сейчас еще один вид «представимости локальных мартингалов» с использованием понятий случайных мер μ и мартингальных случайных мер $\mu - \nu$; см. § 3e. Из дальнейшего станет ясно, что μ-представление и $(\mu - \nu)$-представление выполнены гораздо чаще, нежели S-представление. Поэтому часто оправданно сначала получать μ- или $(\mu - \nu)$-представление, а затем уже пытаться использовать их для превращения в S-представление.

2. Будем предполагать, что заданная на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, стохастическая последовательность $S=(S^1, \ldots, S^d)$ является d-мерным мартингалом (относительно исходной меры P и потока $(\mathscr{F}_n)$).

Пусть
$$\mathscr{F}_n^S = \sigma(S_k^j,\ k \leqslant n,\ j=1, \ldots, d)$$
— σ-алгебра, порожденная ценами, $n \geqslant 1$, и
$$X = (X_n, \mathscr{F}_n^S, \mathsf{P})$$
— локальный мартингал.

Приращения $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ являются $\mathscr{F}_n^S$-измеримыми, и поэтому найдется такая борелевская функция $f_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^d$, что
$$\Delta X_n(\omega) = f_n\big(\Delta S_1(\omega), \ldots, \Delta S_n(\omega)\big), \quad \omega \in \Omega.$$
(В силу предположения $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ вектор S_0 является неслучайным, и между $(S_1, \ldots, S_n)$ и $(\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n)$ существует взаимно однозначное соответствие.)

Определим для каждого $n \geqslant 1$ функцию
$$W_n(\omega, x) = f_n\big(\Delta S_1(\omega), \ldots, \Delta S_{n-1}(\omega), x\big).$$
Эта функция является, очевидно, измеримой по (ω, x), $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-измеримой по x при каждом $\omega \in \Omega$ и $\mathscr{F}_{n-1}^S$-измеримой при каждом $x \in \mathbb{R}^d$.

Пусть $\mu_n(A; \omega) = I(\Delta S_n(\omega) \in A)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, есть целочисленная случайная мера, построенная по приращениям $\Delta S_n(\omega)$, $n \geqslant 1$. Тогда
$$\Delta X_n(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} W_n(\omega, x)\, \mu_n(dx; \omega), \tag{1}$$
и, следовательно, для X получаем так называемое *μ-представление*:
$$X_n(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} W_k(\omega, x)\, \mu_k(dx; \omega), \tag{2}$$
или, в более компактной форме,
$$X = X_0 + W * \mu \tag{3}$$
(см. § 3e).

Заметим теперь, что, поскольку по предположению X является локальным мартингалом, $\mathsf{E}(|\Delta X_n| \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) < \infty$, $\mathsf{E}(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) = 0$, $n \geqslant 1$. Поэтому если
$$\nu_n(A; \omega) = \mathsf{E}\big(\mu_n(A;\ \cdot) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S\big)(\omega), \tag{4}$$
то видим, что
$$\int_{\mathbb{R}^d} W_k(\omega, x)\, \nu_k(dx; \omega) = \mathsf{E}(\Delta X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}^S)(\omega) = 0.$$

Тем самым, наряду с (2) и (3) получаем так называемое $(\mu-\nu)$-*представление*: x

$$X_n(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} W_k(\omega, x)\,\big(\mu_k(dx;\omega) - \nu_k(dx;\omega)\big), \tag{5}$$

или, в более компактной форме,

$$X = X_0 + W * (\mu - \nu). \tag{6}$$

Возможно, покажется странным, что вместо естественного представления (3) мы рассматриваем также получаемое из него тривиальным образом представление (6), называя его $(\mu-\nu)$-представлением и придавая, тем самым, ему определенную значимость.

Объяснение состоит в следующем.

Во-первых, в более общих ситуациях (непрерывное время, более общие, нежели $(\mathscr{F}_n^S)$, потоки σ-алгебр и т. п.) соответствующие представления локальных мартингалов возможны именно на основе привлечения стохастических интегралов типа $W*(\mu-\nu)$. (См., например, [250, гл. III, 4.23 и 4.24].) Во-вторых, в пользу выражений типа $W*(\mu-\nu)$, а не $W*\mu$, говорит то обстоятельство, что функции W в этих представлениях определяются, вообще говоря, неоднозначно и в выражениях $W*(\mu-\nu)$ они часто могут быть выбраны достаточно простыми.

В качестве иллюстрации приведем такой пример.

Возьмем некоторое множество $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ и образуем мартингал $X^{(A)} = (X_n^{(A)}, \mathscr{F}_n^S, \mathsf{P})$, $X_0^{(A)} = 0$ и

$$\Delta X_n^{(A)}(\omega) = \mu_n(A;\omega) - \nu_n(A;\omega) = I(\Delta S_n(\omega) \in A) - \mathsf{E}\big(I(\Delta S_n) \in A \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S\big)(\omega).$$

Если положить $W_n^{(A)}(\omega, x) = I_A(x)$, то

$$\Delta X_n^{(A)}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} W_n^{(A)}(\omega, x)\big(\mu_n(dx;\omega) - \nu_n(dx;\omega)\big),$$

откуда

$$X^{(A)} = W^{(A)} * (\mu - \nu).$$

С другой стороны, если положить

$$W_n(\omega, x) = I_A(x) - \mathsf{E}\big(I_A(\Delta S_n) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S\big)(\omega),$$

то найдем, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} W_n(\omega, x)\,\mu_n(dx;\omega) = \mu_n(A;\omega) - \nu_n(A;\omega) = \Delta X_n^{(A)}(\omega)$$

и, значит,

$$X^{(A)} = W * \mu.$$

Понятно, что функция $W^{(A)}$ проще устроена, нежели функция W.

Проведенные рассуждения показывают, между прочим, что значение $W*\mu$ не изменится, если вместо функций $W_n(\omega, x)$ рассматривать функции $W_n(\omega, x)+g_n'(x)$, где $g_n'(x)$ таковы, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n'(x)\,\mu_n(dx;\omega)=0.$$

В свою очередь, значение $W*(\mu-\nu)$ не изменится, если вместо $W_n(\omega, x)$ рассматривать функции $W_n(\omega, x)+g_n''(\omega)$, поскольку

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n''(x)\big(\mu_n(dx;\omega)-\nu_n(dx;\omega)\big)=0.$$

В следующем параграфе будет показано, как в *CRR*-модели Кокса—Росса—Рубинштейна из $(\mu-\nu)$-представления легко выводится S-представление.

§ 4d. *S*-представимость в биномиальной *CRR*-модели

1. Как следует из § 3f (п. 5, пример 2), в *CRR*-модели мартингальная мера *существует* (а значит, рынок является безарбитражным) и к тому же (в предположении координатно заданного вероятностного пространства) является *единственной* мартингальной мерой, что равносильно, как утверждает теорема B, полноте соответствующего рынка.

Интересно поэтому понять, почему *единственность* мартингальной меры в этой конкретной модели обеспечивает S-представимость, а значит, и полноту рынка в соответствии с леммой из § 4b.

Напомним сначала некоторые обозначения.

Согласно § 1e гл. II определенные на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})_{n\geqslant 0}$, модели (B, S)-рынков описываются двумя последовательностями $B=(B_n)_{n\geqslant 0}$ и $S=(S_n)_{n\geqslant 0}$,

$$B_n = B_{n-1}(1+r_n), \tag{1}$$

$$S_n = S_{n-1}(1+\rho_n), \tag{2}$$

где r_n — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримые и ρ_n — $\mathscr{F}_n$-измеримые величины, а константы $B_0>$ >0, $S_0>0$.

Поскольку

$$\frac{S_n}{B_n}=\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\cdot\frac{1+\rho_n}{1+r_n}, \tag{3}$$

ясно, что $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ будет мартингалом относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, если, во-первых,

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left|\frac{1+\rho_n}{1+r_n}\right|<\infty,$$

где $\widetilde{\mathsf{E}}$ — усреднение по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, и, во-вторых,

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{1+\rho_n}{1+r_n}\,\middle|\,\mathscr{F}_{n-1}\right)=1. \tag{4}$$

В силу $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримости величин r_n условие (4) сводится к тому, что

$$\widetilde{\mathsf{E}}(\rho_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = r_n. \tag{5}$$

2. В биномиальной *CRR*-модели предполагается, что $r_n \equiv r$, где r — некоторая константа, и $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность *независимых одинаково* распределенных случайных величин, принимающих два значения b и a с положительными вероятностями

$$p = \mathsf{P}(\rho_n = b), \quad q = \mathsf{P}(\rho_n = a), \tag{6}$$

$p+q=1$. (Условимся считать, что $a<b$.) Будем предполагать также, что $\mathscr{F}_n = \sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $n\geqslant 1$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Если требовать «мартингальность» последовательности $\dfrac{S}{B} = \left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ относительно такой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, то для $\widetilde{p}_n = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = b)$ и $\widetilde{q}_n = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = a)$ из равенства $\widetilde{\mathsf{E}}\,\rho_n = r$ получаем условие

$$b\widetilde{p}_n + a\widetilde{q}_n = r,$$

приводящее вместе с условием нормировки $\widetilde{p}_n + \widetilde{q}_n = 1$ к значениям

$$\widetilde{p}_n = \widetilde{p} \equiv \frac{r-a}{b-a}, \quad \widetilde{q}_n = \widetilde{q} \equiv \frac{b-r}{b-a}, \tag{7}$$

для положительности которых надо, чтобы выполнялось равенство $a<r<b$.

Мы будем предполагать также, что $a > -1$. Тогда $S_n > 0$ для всех $n \geqslant 1$, поскольку $S_0 > 0$.

Пусть $X = (X_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})_{n\geqslant 0}$ — мартингал, где $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ и $\mathscr{F}_n = \sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, если $n \geqslant 1$.

Для $n\geqslant 1$ положим $\mu_n(A;\omega) = I(\rho_n(\omega)\in A)$, $\widetilde{\nu}_n(A) = \widetilde{\mathsf{E}}\,\mu_n(A;\omega)$. Поскольку ρ_n принимают лишь два значения, меры $\mu_n(\cdot\,;\omega)$ и $\widetilde{\nu}_n(\cdot)$ сосредоточены в двух точках a и b. При этом

$$\mu_n(\{a\};\omega) = I(\rho_n(\omega) = a), \quad \widetilde{\nu}_n(\{a\}) = \widetilde{q}$$

и

$$\mu_n(\{b\};\omega) = I(\rho_n(\omega) = b), \quad \widetilde{\nu}_n(\{b\}) = \widetilde{p}.$$

Пусть функции $g_n = g_n(x_1, \ldots, x_n)$ таковы, что

$$X_n(\omega) = g_n\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_n(\omega)\bigr),$$

и, значит,

$$\Delta X_n(\omega) = g_n\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_n(\omega)\bigr) - g_{n-1}\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)\bigr).$$

Поскольку $\widetilde{\mathsf{E}}(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0$, имеем

$$\widetilde{p}\cdot g_n\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b\bigr) + \widetilde{q}\cdot g_n\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a\bigr) = \\ = g_{n-1}\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)\bigr)$$

или, что равносильно,

$$\frac{g_n\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),b\big)-g_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega)\big)}{\widetilde{q}}=$$
$$=\frac{g_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega)\big)-g_n\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),a\big)}{\widetilde{p}}. \quad (8)$$

С учетом формулы (7) этому соотношению можно придать следующий вид:

$$\frac{g_n\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),b\big)-g_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega)\big)}{b-r}=$$
$$=\frac{g_n\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),a\big)-g_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega)\big)}{a-r}. \quad (9)$$

Обратимся теперь к μ-представлению. Согласно формуле (1) из § 4c

$$\Delta X_n(\omega)=W_n\big(\omega,\rho_n(\omega)\big)=\int W_n(\omega,x)\,\mu_n(dx;\omega), \quad (10)$$

где

$$W_n(\omega,x)=g_n\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),x\big)-g_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega)\big).$$

Если положить

$$W_n'(\omega,x)=\frac{W_n(\omega,x)}{x-r}, \quad (11)$$

то из равенства (10) найдем, что

$$\Delta X_n(\omega)=\int (x-r)W_n'(\omega,x)\,\mu_n(dx;\omega). \quad (12)$$

Заметим, что в силу равенства (9) функция $W_n'(\omega,x)$ *не зависит* от x. Поэтому, обозначая правую (или, что равносильно, левую) часть равенства (9) через $\gamma_n'(\omega)$, находим, что

$$\Delta X_n(\omega)=\gamma_n'(\omega)\int (x-r)\,\mu_n(dx;\omega)=\gamma_n'(\omega)(\rho_n-r). \quad (13)$$

Тем самым, для $X=(X_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})$ получаем представление

$$X_n(\omega)=X_0(\omega)+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k'(\omega)(\rho_k(\omega)-r). \quad (14)$$

Поскольку

$$\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)=\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\cdot\frac{\rho_n-r}{1+r},$$

имеем

$$\rho_n-r=(1+r)\frac{B_{n-1}}{S_{n-1}}\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right), \quad (15)$$

и, следовательно,

$$X_n(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(\omega) \Delta\left(\frac{S_k(\omega)}{B_k}\right), \tag{16}$$

где

$$\gamma_k(\omega) = \gamma'_k(\omega)(1+r)\frac{B_{k-1}}{S_{k-1}} \tag{17}$$

— $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримые функции.

Относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $\left(\dfrac{S_k}{B_k}\right)_{k\geqslant 0}$ является мартингалом. Поэтому (16) есть не что иное, как S-представление $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингала X относительно (базисного) $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингала $\left(\dfrac{S_k}{B_k}\right)_{k\geqslant 0}$.

Применяя лемму из § 4b, находим, что (B, S)-рынок, описываемый *CRR*-моделью, является *полным* при любом конечном горизонте N.

3. Замечание. Полезно отметить, что в проведенном в § 3f (п. 5, пример 2) доказательстве того, что в *CRR*-модели мартингальная мера является единственной, существенно было использовано то, что исходное вероятностное пространство является координатным: $\Omega = \{x\}$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i = a$ или b; $\mathscr{F}_n = \sigma(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$. Из дальнейшего будет следовать (см. § 4f), что в случае произвольного фильтрованного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ и предположения *единственности* мартингальной меры автоматически следует, что это пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ должно быть таким, что (с точностью до множеств P-меры нуль) $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 1$.

§ 4e. Мартингальный критерий полноты рынка. II. Доказательство достаточности в случае $d = 1$

1. В соответствии с диаграммой импликаций из § 4a для доказательства достаточности в теореме B (т. е. «$|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1$» ⇒ «полнота») надо установить справедливость импликаций {2}, {3} и {4} в диаграмме из п. 2 § 4a. (Напомним, что импликация {5} была установлена в лемме из § 4b и предполагается, что $d = 1$.)

Начнем с доказательства импликации {4}, предполагая, что $B_n \equiv 1$, $n \geqslant 1$ (и, значит, $r_n \equiv 0$, $n \geqslant 1$), что, как уже отмечалось, не ограничивает общности.

С этой целью заметим, что в предшествующем параграфе при доказательстве S-представимости для *CRR*-модели ключевым моментом явилось то, что распределения вероятностей $\mathrm{Law}(\rho_n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}})$, $n \geqslant 1$, были сосредоточены в двух точках (a и b, $a < b$).

Иначе говоря, важным было то, что эти распределения являются «двуточечными». Оказывается, соответствующие рассуждения остаются в силе и для более общих моделей, лишь бы только (регулярные) *условные* распределения $\mathrm{Law}(\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}; \widetilde{\mathsf{P}})$, или, что равносильно, *условные* распределения

$\mathrm{Law}(\rho_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}; \widetilde{\mathsf{P}})$, где $\rho_n = \dfrac{\Delta S_n}{S_{n-1}}$, являлись «двуточечными» и σ-алгебры $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 1$.

Формально под свойством «условной двуточечности» мы понимаем то, что найдутся две такие предсказуемые последовательности $a = (a_n)$ и $b = (b_n)$ случайных величин $a_n = a_n(\omega)$ и $b = b_n(\omega)$, $n \geqslant 1$, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = a_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega) + \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = b_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega) = 1 \tag{1}$$

и $a_n(\omega) \leqslant 0$, $b_n(\omega) \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$, $n \geqslant 1$. (В случае «слипания» значений $a_n(\omega)$ и $b_n(\omega)$, очевидно, $a_n(\omega) = b_n(\omega) = 0$; этот вырожденный и неинтересный случай соответствует тому, что $\Delta S_n(\omega) = 0$, и, без потери общности, может быть сразу исключен из рассмотрения.)

Пусть $\widetilde{p}_n(\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = b_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$, $\widetilde{q}_n(\omega) = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_n = a_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$.

Свойство мартингальности последовательности $S = (S_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})$ приводит к условиям $\widetilde{\mathsf{E}}(\rho_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0$, $n \geqslant 1$, из которых следует, что

$$b_n(\omega)\widetilde{p}_n(\omega) + a_n(\omega)\widetilde{q}_n(\omega) = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) получаем (ср. с формулой (7) из § 4d)

$$\widetilde{p}_n(\omega) = \frac{-a_n(\omega)}{b_n(\omega) - a_n(\omega)}, \quad \widetilde{q}_n(\omega) = \frac{b_n(\omega)}{b_n(\omega) - a_n(\omega)}. \tag{3}$$

(Если $a_n(\omega) = b_n(\omega) = 0$, то условимся считать, что $\widetilde{p}_n(\omega) = \widetilde{q}_n(\omega) = \frac{1}{2}$.)

Пусть $X = (X_n, \mathscr{F}_n^S, \widetilde{\mathsf{P}})$ — локальный мартингал и функции $g_n = g_n(x_1, \ldots, x_n)$ таковы, что $X_n(\omega) = g_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_n(\omega))$. По аналогии с формулой (8) из § 4c видим, что

$$\begin{aligned} &\frac{g_n\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b_n(\omega)\bigr) - g_{n-1}\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)\bigr)}{\widetilde{q}_n(\omega)} = \\ &\qquad = \frac{g_{n-1}\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)\bigr) - g_n\bigl(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a_n(\omega)\bigr)}{\widetilde{p}_n(\omega)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Далее, следуя тем же самым выкладкам, что и в формулах (9)—(17) из § 4c, находим, что для X имеет место S-представление

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(\omega) \Delta S_k(\omega) \tag{5}$$

с $\mathscr{F}_{k-1}^S$-измеримыми функциями $\gamma_k(\omega)$, $k \geqslant 1$.

Итак, импликация {4} доказана.

Обратимся теперь к доказательству импликации {2}, в соответствии с которой единственность мартингальной меры влечет за собой (в случае $d = 1$) «условное двуточие».

Поскольку с регулярными условными вероятностями $\widetilde{\mathsf{P}}(\Delta S_n \in \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ можно оперировать (для каждого $\omega \in \Omega$) как с обычными вероятностями, требуемое утверждение об «условном двуточии» равносильно следующему.

I. Пусть $\mathsf{Q}=\mathsf{Q}(dx)$ — такое вероятностное распределение на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, что $\int_{\mathbb{R}} |x|\, \mathsf{Q}(dx) < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} x\, \mathsf{Q}(dx) = 0$ («мартингальное свойство»). Пусть $\mathscr{P}(\mathsf{Q})$ — семейство всех мер $\widetilde{\mathsf{Q}}=\widetilde{\mathsf{Q}}(dx)$, эквивалентных мере $\mathsf{Q}=\mathsf{Q}(dx)$ и обладающих свойством $\int_{\mathbb{R}} |x|\, \widetilde{\mathsf{Q}}(dx) < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} x\, \widetilde{\mathsf{Q}}(dx) = 0$.

Если семейство $\mathscr{P}(\mathsf{Q})$ состоит только лишь из одной (исходной) меры Q, то, необходимым образом, эта мера должна быть «двуточечной»: существуют такие $a \leqslant 0$ и $b \geqslant 0$, что

$$\mathsf{Q}(\{a\}) + \mathsf{Q}(\{b\}) = 1,$$

с возможным их «слипанием» в нулевую точку ($a=b=0$).

Этому утверждению можно придать также следующую эквивалентную форму.

II. Пусть $Z(\mathsf{Q})$ — класс таких функций $z=z(x)$, $x\in\mathbb{R}$, что

$$\mathsf{Q}\{x\colon\ 0 < z(x) < \infty\} = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x| z(x)\, \mathsf{Q}(dx) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} x z(x)\, \mathsf{Q}(dx) = 0.$$

Предположим, что для меры Q этот класс функций $Z(\mathsf{Q})$ состоит лишь из функций, Q-неотличимых от единицы ($\mathsf{Q}\{x\colon z(x) \neq 1\} = 0$). Тогда, необходимым образом, мера Q сосредоточена не более чем в двух точках.

Наконец, это утверждение может быть переформулировано и так.

III. Пусть $\xi = \xi(x)$ — координатно заданная случайная величина с распределением $\mathsf{Q}=\mathsf{Q}(dx)$ на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Пусть $\mathsf{E}\,|\xi| < \infty$, $\mathsf{E}\,\xi = 0$ и мера Q обладает тем свойством, что если $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$ и $\widetilde{\mathsf{E}}\,|\xi| < \infty$, $\widetilde{\mathsf{E}}\,\xi = 0$, то $\widetilde{\mathsf{Q}} = \mathsf{Q}$.

Тогда носитель меры Q сосредоточен не более чем в двух точках (скажем, $a \leqslant 0$ и $b \geqslant 0$) с возможным их «слипанием» в «нулевую» точку ($a=b=0$).

Для доказательства этих (равносильных) утверждений заметим, что всякое распределение вероятностей $\mathsf{Q}=\mathsf{Q}(dx)$ на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ может быть представлено в виде «смеси»

$$c_1 \mathsf{Q}_1 + c_2 \mathsf{Q}_2 + c_3 \mathsf{Q}_3$$

трех распределений: Q_1 — чисто дискретного, Q_2 — абсолютно непрерывного и Q_3 — сингулярного, с неотрицательными константами c_1, c_2 и c_3, в сумме дающими единицу.

Идея доказательства становится весьма прозрачной уже в чисто дискретном случае, когда мера Q предполагается сосредоточенной в *трех* точках, скажем, x_-, x_0 и x_+, упорядоченных так, что $x_- \leqslant x_0 \leqslant x_+$, с ненулевыми массами p_-, p_0 и p_+.

Условие $\mathsf{E}\,\xi = 0$ означает, что

$$x_- p_- + x_0 p_0 + x_+ p_+ = 0. \tag{6}$$

Если $x_0 = 0$, то равенство (6) принимает вид $x_- p_- + x_+ p_+ = 0$.

Положим

$$\widetilde{p}_- = \frac{p_-}{2}, \quad \widetilde{p}_0 = \frac{1}{2} + \frac{p_0}{2}, \quad \widetilde{p}_+ = \frac{p_+}{2}, \tag{7}$$

что соответствует «перекачиванию» части масс p_- и p_+ в точках x_- и x_+ в точку $x_0 = 0$.

Из формул (7) ясно, что мера $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_-, \widetilde{p}_0, \widetilde{p}_+\}$, «сидящая» в трех точках x_-, x_0 и x_+, является вероятностной, $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$ и $\widetilde{\mathsf{E}}\,\xi = 0$, причем $\widetilde{\mathsf{Q}} \neq \mathsf{Q}$, что противоречит единственности меры Q.

Тем самым, случай, когда $x_0 = 0$, а мера Q сосредоточена в *трех* точках, не может иметь места.

Пусть теперь $x_0 \neq 0$. Идея «перекачивания» масс из точек x_- и x_+ в точку x_0 с целью построения меры $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$ может быть реализована, например, следующим образом.

Положим

$$\widetilde{p}_- = p_- - \varepsilon_-, \quad \widetilde{p}_0 = p_0 + (\varepsilon_- + \varepsilon_+), \quad \widetilde{p}_+ = p_+ - \varepsilon_+.$$

При достаточно малых ε_- и ε_+ мера $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_-, \widetilde{p}_0, \widetilde{p}_+\}$ является вероятностной, и надо показать, что возможен такой выбор положительных ε_- и ε_+, что $\widetilde{\mathsf{E}}\,\xi = 0$, т. е.

$$x_- p_- + x_0 p_0 + x_+ p_+ = (x_- p_- + x_0 p_0 + x_+ p_+) - (\varepsilon_- x_- + (\varepsilon_- + \varepsilon_+) x_0 - \varepsilon_+ x_+) = 0.$$

Поскольку $\mathsf{E}\,\xi = x_- p_- + x_0 p_0 + x_+ p_+ = 0$, положительные ε_- и ε_+ надо выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} = \frac{x_0 - x_-}{x_+ - x_0}.$$

Если обозначить $\lambda = \dfrac{x_0 - x_-}{x_+ - x_0}$ (>0), то понятно, что выбором сначала достаточно малого ε_- и затем по нему значения $\varepsilon_+ = \lambda \varepsilon_-$ можно добиться того, что $\widetilde{p}_- > 0$, $\widetilde{p}_0 > 0$ и $\widetilde{p}_+ > 0$.

Тем самым, мера $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_-, \widetilde{p}_0, \widetilde{p}_+\}$ является вероятностной, $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$, $\widetilde{\mathsf{Q}} \neq \mathsf{Q}$ и $\widetilde{\mathsf{E}}\,\xi = 0$, что снова противоречит единственности мартингальной меры Q, и, значит, у распределения Q все *три* значения p_-, p_0 и p_+ не могут быть положительными.

Проведенную конструкцию нетрудно перенести и на тот случай, когда чисто дискретная мартингальная мера Q сосредоточена в конечном или счетном множестве точек $\{x_i,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ с соответствующими вероятностями $\{p_i,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, упорядоченных так, что $\ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$

Если в множестве $\{x_i,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ есть нулевое значение, скажем, $x_0 = 0$, то надо положить

$$\widetilde{p}_i = \frac{p_i}{2}, \quad i \neq 0,$$

и

$$\widetilde{p}_0 = \frac{1 - \sum\limits_{i \neq 0} p_i}{2}.$$

Тогда $\sum\limits_i \widetilde{p}_i = 1$ и $\widetilde{\mathsf{E}}\, \xi = \sum\limits_i x_i \widetilde{p}_i = \frac{1}{2} \sum\limits_i x_i p_i = 0$.

Мера $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ является вероятностной, $\widetilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$, $\widetilde{\mathsf{Q}} \neq \mathsf{Q}$ и $\widetilde{\mathsf{E}}\, \xi = 0$, что несовместимо с предположением единственности мартингальной меры.

Пусть теперь в множестве $\{x_i,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ все $x_i \neq 0$. Построим новое распределение $\widetilde{\mathsf{Q}} = \{\widetilde{p}_i,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, полагая $\widetilde{p}_i = p_i$ для $i = \pm 2, \pm 3, \ldots$, и, как и выше, положим

$$\widetilde{p}_{-1} = p_{-1} - \varepsilon_{-1}, \quad \widetilde{p}_{+1} = p_{+1} - \varepsilon_{+1}, \quad \widetilde{p}_0 = p_0 + (\varepsilon_{-1} + \varepsilon_{+1}).$$

Тогда

$$\widetilde{\mathsf{E}}\, \xi = \mathsf{E}\, \xi - \varepsilon_{-1} x_{-1} + (\varepsilon_{-1} + \varepsilon_{+1}) x_0 - \varepsilon_{+1} x_{+1} = \varepsilon_{+}(x_0 - x_{+1}) + \varepsilon_{-1}(x_0 - x_{-1}),$$

и тот же самый выбор ε_{-1} и ε_{+1}, что и в рассмотренном выше случае трех точек (x_{-}, x_0, x_{+}), приводит к конструкции новой мартингальной меры $\widetilde{\mathsf{Q}}$, отличной от Q, но ей эквивалентной, что противоречит предположению единственности мартингальной меры Q.

Аналогичным образом рассматриваются и те случаи, когда у распределения Q есть абсолютно непрерывные и/или сингулярные компоненты.

2. Обратимся теперь к доказательству импликации {3}, устанавливающей, что единственность мартингальной меры влечет за собой, что σ-алгебры $\mathscr{F}_n$ должны быть порождены ценами S:

$$\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n^S \equiv \sigma(S_0, \ldots, S_n), \quad n \leqslant N.$$

Будем вести доказательство по индукции. (Заметим, что σ-алгебры $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_0^S$ совпадают, поскольку по предположению $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ и S_0 является неслучайной величиной.)

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})_{n \leqslant N}$ — фильтрованное вероятностное пространство, $S = (S_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P})_{n \leqslant N}$ — последовательность цен (акций), где $S_n = (S_n^1, \ldots, S_n^d)$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что мартингальной мерой является сама мера P.

Предполагая, что $\mathscr{F}_{n-1} = \mathscr{F}_{n-1}^S$, рассмотрим множество $A \in \mathscr{F}_n$. Положим

$$z = 1 + \frac{1}{2}\bigl(I_A - \mathsf{E}(I_A \,|\, \mathscr{F}_n^S)\bigr). \tag{8}$$

Ясно, что $\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant \frac{3}{2}$ и $\mathsf{E}\, z = 1$. Поэтому мера P', $\mathsf{P}'(d\omega) = z(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega)$, является вероятностной мерой и $\mathsf{P}' \sim \mathsf{P}$. Пусть $z_i = \mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_i)$. По формуле Байеса (см.

формулу (4) в § 3а) имеем

$$\mathsf{E}'(\Delta S_i \,|\, \mathscr{F}_{i-1}) = \mathsf{E}\biggl(\frac{z_i}{z_{i-1}} \Delta S_i \biggm| \mathscr{F}_{i-1}\biggr). \tag{9}$$

Заметим, что в силу предположения $\mathscr{F}_{n-1} = \mathscr{F}_{n-1}^S$ из формулы (8) следует, что $\mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 1$. При этом z является $\mathscr{F}_n$-измеримой функцией. Поэтому $\frac{z_i}{z_{i-1}} = 1$, если $i \neq n$, и, значит, $\mathsf{E}'(\Delta S_i \,|\, \mathscr{F}_{i-1}) = 0$ при всех $i \neq n$.

Поскольку $\frac{z_n}{z_{n-1}} = z$, $\mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) = 1$ и ΔS_n — $\mathscr{F}_n^S$-измеримые величины, в силу (9) получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}'(\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) &= \mathsf{E}(z\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(z\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) = \\
&= \mathsf{E}\bigl(\mathsf{E}(z\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_n^S) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S\bigr) = \\
&= \mathsf{E}\bigl(\Delta S_n \, \mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_n^S) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S\bigr) = \mathsf{E}(\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}^S) = 0,
\end{aligned}$$

где мы воспользовались также тем, что $\mathsf{E}(z \,|\, \mathscr{F}_n^S) = 1$ согласно равенству (8).

Таким образом, последовательность цен $(S_n, \mathscr{F}_n)_{n \leqslant N}$ относительно меры P' является мартингалом.

Предположение *единственности* мартингальной меры P приводит, следовательно, к тому, что $z = 1$ (P-п. н.), и, значит, в силу (8) для всякого $A \in \mathscr{F}_n$ выполняется равенство

$$I_A = \mathsf{E}(I_A \,|\, \mathscr{F}_n^S) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Отсюда следует, что с точностью до множеств P-меры нуль $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n^S$.

Индукцией по n находим, что эти соотношения верны при всех $n \leqslant N$, что доказывает импликацию {3}.

3. Итак, единственность мартингальной меры P обеспечивает справедливость импликаций {2} и {3}, влекущих S-представимость, из которой вытекает полнота рынка (в силу леммы из § 4а). Тем самым, достаточность в утверждении теоремы B (в случае $d = 1$) доказана.

Замечание 1. Полезно отметить, что приведенное доказательство теоремы B показывает, что дискретный во времени полный безарбитражный рынок (с $N < \infty$, $d = 1$) является на самом деле *дискретным и по фазовой переменной* в том смысле, что σ-алгебра $\mathscr{F}_N$ является *чисто атомистической* (относительно меры P), состоящей не более чем из 2^N атомов, что является непосредственным следствием «условного двуточия». (В случае произвольного $d < \infty$ число атомов в $\mathscr{F}_N$ не более чем $(d+1)^N$.)

Замечание 2. То обстоятельство, что в случае $N < \infty$, $d < \infty$ полный безарбитражный рынок таков, что σ-алгебра $\mathscr{F}_N$ состоит из не более чем $(d+1)^N$ элементов, приводит к тому, что на этих рынках понятия *полноты* и *совершенности* совпадают.

§ 4f. Расширенный вариант второй фундаментальной теоремы

1. Приведенное выше доказательство теоремы B относилось к случаю $d=1$. (Это предположение явно использовалось при установлении импликаций {2} и {4}.) В общем случае, когда $d \geqslant 1$, представляется целесообразным дать расширенную формулировку этой теоремы, включающую в себя помимо утверждения об эквивалентности полноты и единственности мартингальной меры также и ряд других равносильных характеризаций.

Предварительно введем некоторые обозначения.

Будем полагать $\overline{S}_n = \dfrac{S_n}{B_n}$ (дисконтированные цены),

$$\mathsf{Q}_n(\cdot\,;\omega) = \mathsf{P}(\Delta S_n \in \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega), \quad \overline{\mathsf{Q}}_n(\cdot\,;\omega) = \mathsf{P}(\Delta \overline{S}_n \in \cdot \,|\, \mathscr{F}_{n-1})(\omega).$$

Напомним, что векторы $a_1, \ldots, a_k$, где $a_i \in \mathbb{R}^d$, $2 \leqslant k \leqslant d+1$, называются *аффинно независимыми*, если существует такое $i \in \{1, \ldots, k\}$, что $k-1$ векторов $(a_j - a_i)$, $j=1, \ldots, k$, $j \neq i$, являются *линейно независимыми*. Если это свойство выполнено для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$, то оно будет верным и для любого $i=1, \ldots, k$. Заметим, что свойство аффинной независимости d-мерных векторов $a_1, \ldots, a_k$ равносильно тому, что наименьшая аффинная гиперплоскость, содержащая $a_1, \ldots, a_k$, имеет размерность $k-1$.

Теорема B* (расширенный вариант второй фундаментальной теоремы; [251]). *Пусть (B,S)-рынок ($B=(B_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$, $B_n>0$, B_n — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримые величины, $S=(S_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$, $S_n=(S_n^1, \ldots, S_n^d)$, $S_n^i \geqslant 0$, S_n^i — $\mathscr{F}_n$-измеримые величины) является безарбитражным; $N<\infty$, $d<\infty$.*

Тогда следующие условия равносильны:

(a) *рынок является полным;*

(b) *рынок является совершеным;*

(c) *множество мартингальных мер $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ содержит в точности одну меру;*

(d) *множество локально мартингальных мер $\mathscr{P}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ содержит в точности одну меру;*

(e) *в множестве $\mathscr{P}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ существует мера P' такая, что всякий мартингал $M=(M_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}')_{0\leqslant n\leqslant N}$ допускает $\overline{S}$-представление*

$$M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta \overline{S}_i, \quad n \leqslant N,$$

с $\mathscr{F}_{i-1}$-измеримыми γ_i;

(f) *с точностью до множеств P-меры нуль $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ и найдутся $(d+1)$-предсказуемые $\mathbb{R}^d$-значные процессы $(a_{1,n}, \ldots, a_{d+1,n})$, $1\leqslant n\leqslant N$, являющиеся аффинно независимыми (для всех n и ω) и такие, что* (P-п. н.) *носители мер $\mathsf{Q}_n(\cdot\,;\omega)$ содержатся в множестве $\{a_{1,n}(\omega), \ldots, a_{d+1,n}(\omega)\}$;*

(g) *с точностью до множеств P-меры нуль $\mathscr{F}_n = \sigma(\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_n)$ и найдутся $(d+1)$-предсказуемые $\mathbb{R}^d$-значные процессы $(\overline{a}_{1,n}, \ldots, \overline{a}_{d+1,n})$, $1\leqslant n\leqslant N$, являющиеся аффинно независимыми (для всех n и ω) и такие, что* (P-п. н.) *носители мер $\overline{\mathsf{Q}}_n(\cdot\,;\omega)$ содержатся в множестве $(\overline{a}_{1,n}, \ldots, \overline{a}_{d+1,n})$.*

В рассматриваемых случаях σ-алгебра $\mathscr{F}_N$ является чисто атомической (относительно меры P*) с не более чем $(d+1)^N$ атомами.*

Доказательство в случае $d=1$ было изложено в предыдущих параграфах. В общем случае $d \geqslant 1$ соответствующее доказательство содержится в работе [251]. Отсылая читателя за всеми техническими деталями, вызванными векторностью цен $S=(S^1, \ldots, S^d)$, $d \geqslant 1$, остановимся здесь лишь на схеме доказательства и отличиях в случаях $d=1$ и $d>1$.

Во-первых, заметим, что равносильность свойств (f) и (g) является простым следствием того, что $\overline{a}_{i,n}$ и $a_{i,n}$ связаны соотношением

$$\overline{a}_{i,n} = \frac{a_{i,n}}{B_n} + S_{n-1}\left(\frac{1}{B_n} - \frac{1}{B_{n-1}}\right).$$

Далее, очевидным образом (b) $\Rightarrow$ (a), и в силу теоремы A* (§ 2e) (d) $\Longleftrightarrow$ (c).

Поэтому для доказательства теоремы надо установить справедливость следующих импликаций:

$$\begin{aligned}
(a) &\Rightarrow (d),\\
(c) &\Rightarrow (g),\\
(g) &\Rightarrow (b),\\
(a)+(g) &\Rightarrow (e),\\
(e) &\Rightarrow (a).
\end{aligned}$$

Импликация (a) $\Rightarrow$ (d) доказывается точно так же, как и в случае $d=1$ (см. п. 2 § 4a), с заменой мартингальных мер P_i, $i=1, 2$, на локально мартингальные.

В импликации (c) $\Rightarrow$ (g) утверждение о том, что $\mathscr{F}_n = \sigma(\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_n)$, доказано в п. 2 § 4e при установлении справедливости импликации {3}. (Соответствующее доказательство было, на самом деле, проведено для любого $d \geqslant 1$.)

Наиболее трудоемкой частью в доказательстве справедливости импликации (c) $\Rightarrow$ (g) является установление структуры носителей мер $\overline{\mathsf{Q}}_n(\cdot\,;\omega)$. В случае $d=1$ носители мер были «двуточечными». В общем случае $d \geqslant 1$ носители этих мер состоят самое большее из $d+1$ точки (в $\mathbb{R}^d$). Эта часть доказательства подробно изложена в книге [251] и здесь опускается. (В идейном плане доказательство такое же, как и в случае $d=1$, и проводится следующим образом. Пусть сама мера P является мартингальной. Если носитель $\overline{\mathsf{Q}}_n(\cdot\,;\omega)$ состоит из более чем $d+1$ точки, то можно, снова используя идею «перекачивания» масс, построить новую меру P', $\mathsf{P}'(d\omega) = z(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$, которая при подходящем выборе $\mathscr{F}_N$-измеримой функции $z(\omega)$ оказывается мартингальной мерой, $\mathsf{P}' \sim \mathsf{P}$ и $\mathsf{P}' \neq \mathsf{P}$. Это, однако, противоречит предположению о *единственности* мартингальной меры. Аналогичной конструкцией устанавливается также и свойство аффинной независимости $\mathbb{R}^d$-значных векторов $(\overline{a}_{1,n}, \ldots, \overline{a}_{d+1,n})$.)

Обратимся к импликации (g) $\Rightarrow$ (b). Пусть f_N — $\mathscr{F}_N$-измеримая случайная величина и мартингальной является сама исходная мера P. Из (g) следует, что, на самом деле, f_N является случайной величиной, принимающей конечное число значений.

Требуется доказать, что f_N можно представить в виде

$$f_N = x + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \overline{S}_k. \tag{1}$$

Поскольку последовательность $\overline{X}_n \equiv x + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta \overline{S}_i$, $n \leqslant N$, является P-мартингалом, необходимым образом должны быть выполнены следующие соотношения: $x = \mathsf{E}\, f_N$ и

$$\gamma_n \Delta \overline{S}_n = \mathsf{E}(f_N \,|\, \mathscr{F}_n) - \mathsf{E}(f_N \,|\, \mathscr{F}_{n-1}). \tag{2}$$

Тем самым, для получения представления (1) мы полагаем $x = \mathsf{E}\, f_N$ и затем показываем (как и в случае $d = 1$), что из условия (g) вытекает возможность построения $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримых функций γ_n с требуемым свойством (2). (Подробнее см. [251].)

Обратимся к импликации (a) + (g) ⇒ (e). В силу п. (g) σ-алгебра $\mathscr{F}_N$ является чисто атомической. Тем самым, все $\mathscr{F}_N$-измеримые случайные величины принимают лишь конечное число значений и, значит, являются ограниченными.

Пусть $\mathsf{P}' \in \mathscr{P}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ и $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}')_{n \leqslant N}$ — мартингал. Согласно п. (a), существуют такое $x \in \mathbb{R}$ и такой предсказуемый процесс $\gamma = (\gamma_n)$, что $M_N = x + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta \overline{S}_i$.

Последовательность $M' = (M'_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}')_{n \leqslant N}$, $M'_n = x + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta \overline{S}_i$, является P'-локальным мартингалом и, следовательно, мартингалом, в силу того что все случайные величины здесь ограничены. Поскольку $M_N = M'_N$, мартингалы M и M' совпадают (P'-п. н.), откуда следует утверждение (e).

Наконец, для доказательства импликации (e) ⇒ (a) достаточно лишь заметить следующее (ср. с леммой в § 4a).

Пусть всякий мартингал $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}')$, $\mathsf{P}' \in \mathscr{P}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$, допускает S-представление $M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta \overline{S}_i$.

Пусть f_N — $\mathscr{F}_N$-измеримая ограниченная функция. Рассмотрим мартингал $M_n = \mathsf{E}'(f_N | \mathscr{F}_n)$, $n \leqslant N$, где E' есть усреднение по мере P'. По предположению

$$f_N = M_N = M_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta \overline{S}_i \quad (\mathsf{P}'\text{-п. н.}).$$

Следовательно, f_N можно представить в виде

$$f_N = x + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta \overline{S}_i \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

где $x = M_0$ и $\gamma = (\gamma_i)_{i \leqslant N}$ — предсказуемая последовательность, что и означает полноту рынка.

Этим завершается рассмотрение всех сформулированных выше импликаций, требуемых в доказательстве теоремы B*. □

2. Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие как теорему B*, так и теорему A*.

Пример 1 ($d=1$). В *CRR*-модели (см. § 4d) с $B_n \equiv 1$, $n \leqslant N$, предполагается, что $(\rho_n)_{n\leqslant N}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения a и b, $a<b$.

Поскольку $\Delta S_n = S_{n-1}\rho_n$, имеем $\Delta S_n = S_{n-1}a$ или $\Delta S_n = S_{n-1}b$. В соответствии с теоремой A* для *отсутствия арбитражной возможности* параметры a и b должны быть такими, что множество (a, b) содержит точку 0. Отсюда следует, что $a<0<b$. Для положительности цен S надо потребовать, чтобы также выполнялось условие $a>-1$.

В рассматриваемом случае $\Delta S_n = S_{n-1}\rho_n$ и, следовательно, ΔS_n принимает два значения: $S_{n-1}b$ («движение цен вверх») и $S_{n-1}a$ («движение цен вниз»). Поэтому носители условных распределений $\mathsf{Q}_n(\cdot\,;\omega)$ сосредоточены в двух точках: $S_{n-1}(\omega)a$ и $S_{n-1}(\omega)b$, а само «дерево» цен $(S_0, S_1, S_2, \ldots)$ и движение по нему имеет (см. приводимый далее рис. 56) «однородную марковскую» структуру: если $(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ — реализация цен, то с вероятностью $p=\mathsf{P}(\rho_n=b)$ происходит переход в значение $S_n=S_{n-1}B$, а с вероятностью $q=\mathsf{P}(\rho_n=a)$ — в значение $S_n=S_{n-1}A$, где $B=1+b$ и $A=1+a$.

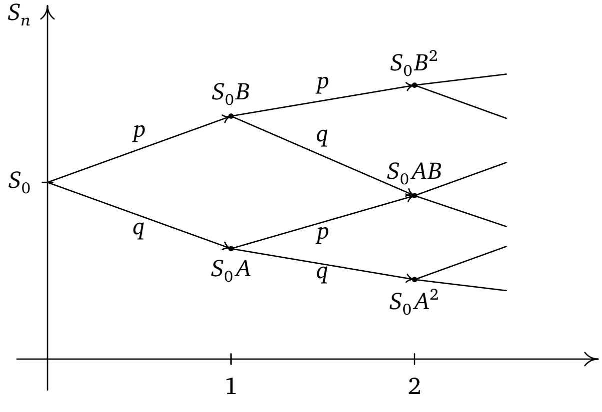


Рис. 56. «Дерево цен» $(S_0, S_1, S_2, \ldots)$ в *CRR*-модели Кокса—Росса—Рубинштейна

В предположении $-1<a<0<b$ существует единственная мартингальная мера, и, следовательно, соответствующий (B,S)-рынок является безарбитражным и полным.

Из теоремы B* следует, что в случае $d=1$ *каждый* полный безарбитражный рынок имеет весьма сходную «двоичную» структуру ветвления цен.

Именно, при заданной «истории» $(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ имеем $S_n = S_{n-1}(1+\rho_n)$, где величины $\rho_n = \rho_n(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ принимают всего лишь *два* значения: $a_n = a_n(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ и $b_n = b_n(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$.

В рассмотренной выше модели Кокса—Росса—Рубинштейна величины a_n и b_n были константами ($a_n = a$, $b_n = b$). В общем же случае эти значения зависят от предшествующей истории движения цен, но опять-таки для положительности цен, полноты и безарбитражности должны быть выполнены условия $-1 < a_n < 0 < b_n$.

Пример 2 ($d=2$, $N=1$)**.** Пусть $B_0 = B_1 = 1$ и $S = (S^1, S^2)$ — цены двух акций, $S_0^1 = S_0^2 = 2$. Будем рассматривать одношаговую модель ($N=1$), и пусть

$$\Delta S_1 = \begin{pmatrix} \Delta S_1^1 \\ \Delta S_1^2 \end{pmatrix}$$

— вектор приращений цен, $\Delta S_1^i = S_1^i - S_0^i = S_1^i - 2$, $i = 1, 2$.

В соответствии с теоремой B* для полноты соответствующего безарбитражного рынка нужно, чтобы носитель меры $\mathsf{P}(\Delta S_1 \in \cdot)$ был сосредоточен в трех точках на плоскости, скажем,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

причем соответствующие три вектора в $\mathbb{R}^2$ должны быть аффинно независимыми. Как уже отмечалось выше, это равносильно тому, что векторы $\begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ b_1 - b_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_2 - a_3 \\ b_2 - b_3 \end{pmatrix}$ являются линейно независимыми.

Например, пусть вероятность каждого из векторов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

равна $\frac{1}{3}$. Эти векторы аффинно независимы, и мартингальной мерой является мера, приписывающая этим векторам вероятности $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно.

Глава VI

Теория расчетов в стохастических финансовых моделях. Дискретное время

1. Расчеты, связанные с хеджированием европейского типа на безарбитражных рынках

§ 1a. Риск и методы его редуцирования

1. Теория Г. Марковитца ([332], 1952 г.), воплощенная им в «средне-дисперсионном анализе» (см. § 2b гл. I), дает подход к расчету риска инвестирования и методам редуцирования его *несистематической* компоненты, основанный на идее *диверсификации* при (оптимальном) составлении портфеля ценных бумаг.

В финансовой теории возникают и иные оптимизационные задачи, которые ввиду «неопределенности окружающей среды» можно отнести (как и в случае, рассмотренном Г. Марковитцем) к проблемам теории *стохастической оптимизации*. При этом сразу следует отметить, что финансовая проблематика выдвинула целый ряд нетрадиционных, нестандартных оптимизационных задач *хеджирования* (относительно понятия «хедж» см. § 1b гл. V), «нестандартность» которых заключается в том, что *оптимальное* хеджирование как *управление* должно обеспечивать выполнение некоторых свойств с *вероятностью единица*, а не, скажем, *в среднем*, как это обычно принято в теории стохастической оптимизации. (По поводу задач со *среднеквадратичным* критерием см. далее § 1d.)

Рассмотрению хеджирования как метода динамического управления портфелем ценных бумаг далее уделяется особое внимание. Важно подчеркнуть, что этот метод оказывается ключевым при расчетах, например, таких (производных) финансовых инструментов, как опционы (см. разделы 4 и 5). Но можно сказать и больше — именно при расчетах опционных контрактов была осознана важность и выработаны основы методологии хеджирования как защитного финансового средства.

2. Напомним, что с *хеджированием* мы уже сталкивались выше в § 1b гл. V где в простейшем случае *одношаговой* модели были даны формулы как для величины начального капитала, позволяющей добиться требуемой цели, так и для самого оптимального (хеджирующего) портфеля.

Отыскание соответствующих расчетных формул, связанных с хеджированием, представляет большой интерес и в *многоэтапных задачах*, в которых цель инвестора — добиться того, чтобы получаемый в заранее определенный момент времени N капитал был с вероятностью единица (или, в более общих рассмотрениях, лишь с некоторой положительной вероятностью) не меньше того значения, которое будет в этот момент времени у заданного, вообще говоря, случайного целевого функционала.

Подобного рода задачи самым непосредственным образом связаны с расчетами в *опционах европейского типа*, и эта связь основана на замечательной по своей простоте и эффективности идее Ф. Блэка и М. Шоулса [44] о том, что (на полных безарбитражных рынках)

> *динамика процесса цен опционов должна воспроизводиться динамикой капитала оптимальной хеджирующей стратегии в соответствующей инвестиционной проблеме.*

В случае *опционов американского типа*, помимо хеджирования как «контроля» со стороны продавца опциона, появляется новый «оптимизационный» элемент.

В самом деле, приобретя опцион европейского типа, его покупатель *пассивен* — он не предпринимает каких-либо финансовых действий, а лишь только выжидает момента исполнения опциона N. Другое дело — опцион американского типа, где покупатель уже играет роль *активного* трейдера, поскольку по условиям контракта он может сам (на основе знания текущего состояния цен на рынке) выбирать *момент* исполнения опциона, в рамках, разумеется, ограничений, предусмотренных контрактом.

Конечно, продавец такого опциона при составлении соответствующего хеджирующего портфеля должен учитывать возможность выбора покупателем разных моментов предъявления опциона к исполнению. При этом понятно, что *противоположность* интересов покупателя и продавца приводит к оптимизационным проблемам *минимаксного* характера.

Настоящий раздел (§ 1a—1d) посвящен проблематике хеджирования европейского типа. Эта терминология навеяна аналогией с опционами европейского типа и подчеркивает, что речь идет о хеджировании платежных поручений в заранее *фиксированный* момент времени. Вопросы хеджирования американского типа рассматриваются в следующем разделе (см. там, в частности, § 2c, в котором даны соответствующие определения).

3. Как отмечено выше, в опционах американского типа управление покупателя сводится к выбору момента прекращения действия контракта, или, как принято говорить, к выбору *момента остановки*.

При этом если, например, $f = (f_0, f_1, \ldots, f_N)$ — система платежных функций, $f_i = f_i(\omega)$, $i = 0, 1, \ldots, N$, и покупатель выбирает момент остановки $\tau = \tau(\omega)$, то он получает величину $f_\tau = f_{\tau(\omega)}(\omega)$.

Представим f_τ в следующем виде:

$$f_\tau = f_0 + \sum_{k=1}^{\tau} \Delta f_k = f_0 + \sum_{k=1}^{N} I(k \leqslant \tau) \Delta f_k. \tag{1}$$

Заметим, что событие $\{k \leqslant \tau\} \in \mathscr{F}_{k-1}$. Тем самым, равенство (1) может быть переписано как

$$f_\tau = f_0 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta f_k, \tag{2}$$

где $\alpha_k = I(k \leqslant \tau)$ является $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримой случайной величиной.

По-другому можно сказать, что контрактные условия опционов американского типа разрешают для покупателя выбор предсказуемого управления $\alpha = (\alpha_k)_{k \leqslant N}$ только вида $\alpha_k = I(k \leqslant \tau)$.

В принципе же легко себе вообразить, что контрактные условия могут разрешать покупателю выбор и иных (предсказуемых) функций управления $\alpha = (\alpha_k)_{k \leqslant N}$. Примером такого *контролируемого* (покупателем) *опциона* может служить, скажем, «Passport option» (см. [6]), в котором платежная функция имеет следующий вид:

$$f_N(\alpha) = \left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta S_k\right]^+, \tag{3}$$

где $|\alpha_k| \leqslant 1$, а $S = (S_k)_{k \leqslant N}$ — значения цен акций.

И тогда становится понятным, что продавец опциона должен образовывать свой (хеджирующий) портфель $\pi = \pi(\alpha(\omega), \omega)$ так, чтобы для любого (допустимого) для покупателя управления $\alpha = \alpha(\omega)$ капитал $X_N^{\pi(\alpha(\omega),\omega)}$ в терминальный момент N был бы (P-п. н.) не меньше $f_N(\alpha(\omega))$.

4. В случае *полных* рынков хеджирование (инвестора, продавца опциона) и управление, осуществляемое, скажем, покупателем опциона, являются теми двумя основными «оптимизационными» компонентами, с которыми обычно приходится иметь дело при расчетах, связанных с производными финансовыми инструментами.

В случае же *неполных* рынков к этим двум компонентам добавляется еще третья, которая определяется «действиями Природы».

Суть дела здесь состоит в следующем. На полных безарбитражных рынках существует лишь *одна* мартингальная мера. Однако на неполных безарбитражных рынках «Природа» предоставляет целый *спектр* безарбитражных мер, а значит, и *разные* формы реализации безарбитражных финансовых рынков.

Какая конкретно из этих мер и реализаций действует, ни покупатель, ни продавец, скажем, того или иного опциона, не знают. Поэтому, если нет каких-либо дополнительных соображений, стратегии (хеджирование, выбор момента остановки и т. п.) и продавца, и покупателя должны строиться с учетом возможного «наихудшего действия Природы».

Формально, в приводимых далее рассмотрениях это будет выражаться в том, что во многих формулах появится sup по классу всех тех мартингальных мер, которые можно рассматривать как состояния «Природы».

§ 1b. Основная формула для цены хеджирования. I. Полные рынки

1. Будем рассматривать полный безарбитражный (B, S)-рынок при $N < \infty$, $d < \infty$ (в схеме, принятой в § 2b гл. V). Согласно утверждению (f) расширенного варианта второй фундаментальной теоремы (§ 4f гл. V), такой *дискретный во времени* рынок является также *дискретным и по фазовой переменной,* и все рассматриваемые $\mathscr{F}_N$-измеримые случайные величины являются конечнозначными, поскольку σ-алгебра $\mathscr{F}_N$ состоит из не более чем $(d+1)^N$ атомов. Тем самым, в рассматриваемом случае не возникает никаких проблем при интегрировании, и понятия полноты и совершенности равносильны.

Определение. *Ценой совершенного хеджирования* европейского типа ($\mathscr{F}_N$-измеримого платежного поручения f_N) называется величина (ср. с § 1b гл. V)

$$\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) = \inf\bigl\{x\colon \exists \pi \text{ с } X_0^\pi = x \text{ и } X_N^\pi = f_N \ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\bigr\}. \tag{1}$$

По предположению рассматриваемый рынок является *безарбитражным* и *полным,* поэтому

1) *существует* мартингальная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, эквивалентная мере P и такая, что последовательность $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n\leqslant N}$ является мартингалом (первая фундаментальная теорема),

и

2) эта мера является *единственной,* и всякое платежное поручение f_N воспроизводимо, т. е. *найдется* такой («совершенный») хедж π, что $X_N^\pi = f_N$ (вторая фундаментальная теорема).

Отсюда следует, что если π является *совершенным* (x, f_N)-хеджем, т. е. $X_0^\pi = x$ и $X_N^\pi = f_N$ (P-п. н.), то (см. формулу (18) в § 1a гл. V)

$$\frac{f_N}{B_N} = \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^N \gamma_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) \tag{2}$$

и, значит,

$$\widetilde{\mathsf{E}}\,\frac{f_N}{B_N} = \frac{x}{B_0},$$

то есть

$$x = B_0\,\widetilde{\mathsf{E}}\,\frac{f_N}{B_N}. \tag{3}$$

Заметим, что правая часть формулы (3) *не зависит* от структуры рассматриваемого (x, f_N)-хеджа π. Иначе говоря, если π' — другой хедж, то начальные цены x и x' совпадают.

Следовательно, имеет место

Теорема 1 (основная формула для цены совершенного хеджирования европейского типа на полных рынках)**.** *На безарбитражных полных рынках цена* $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$ *совершенного хеджирования определяется формулой*

$$\boxed{\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) = B_0 \ \widetilde{\mathsf{E}} \, \frac{f_N}{B_N}}\,. \tag{4}$$

2. Проблематика хеджирования требует не только определения значения цены $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$, но также и описания *портфеля* совершенного хеджа.

Стандартный прием отыскания такого портфеля состоит здесь в следующем (ср. с § 4a гл. V).

Образуем мартингал $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})_{n \leqslant N}$, $M_n = \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)$. Поскольку рассматриваемый рынок является *полным*, в силу второй фундаментальной теоремы (или в силу леммы из § 4b гл. V) для M имеет место $\frac{S}{B}$-представление

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) \tag{5}$$

с $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримыми γ_k.

Положим $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ с $\gamma^* = \gamma$ из (5) и $\beta_n^* = M_n - \frac{\gamma_n S_n}{B_n}$. Нетрудно проверить, что этот портфель является самофинансируемым (см., впрочем, доказательство леммы в § 4b гл. V). Далее, по построению

$$\frac{X_0^{\pi^*}}{B_0} = M_0 \tag{6}$$

и

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n}\right) = \gamma_n^* \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) = \Delta M_n.$$

Следовательно, при всех $0 \leqslant n \leqslant N$ имеем

$$\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n} = M_n = \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) \tag{7}$$

и, в частности,

$$X_N^{\pi^*} = f_N \quad (\widetilde{\mathsf{P}}\text{- и } \mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Итак, построенный с помощью $\frac{S}{B}$-представления портфель π^* является совершенным хеджем (для f_N).

Резюмируем полученные результаты в виде следующего предложения.

Теорема 2 (основные формулы для совершенного хеджа и его капитала)**.** *На безарбитражных полных рынках существует самофинансируемый совершенный хедж* $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ *с начальным капиталом*

$$X_0^{\pi^*} = \mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) \quad \left(= B_0 \ \widetilde{\mathsf{E}} \, \frac{f_N}{B_N}\right),$$

осуществляющий совершенное воспроизведение f_N*:*

$$X_N^{\pi^*} = f_N \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Динамика капитала $X_n^{\pi^*}$ *определяется формулами*

$$X_n^{\pi^*} = B_n \ \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}\right), \quad 0 \leqslant n \leqslant N,$$

компоненты $\gamma^* = (\gamma_n^*)$ — *из «* $\dfrac{S}{B}$*-представления»*

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}\right) = \widetilde{\mathsf{E}} \, \frac{f_N}{B_N} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^* \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \quad 1 \leqslant n \leqslant N,$$

а компоненты $\beta^* = (\beta_n^*)$ — *из условия*

$$X_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n.$$

3. Рассмотрим вопрос о цене хеджирования в несколько более общей схеме, предполагая, что задана не одна платежная функция f_N, а целая *последовательность* платежных функций $f_0, f_1, \ldots, f_N$, где f_i являются $\mathscr{F}_i$-измеримыми для $0 \leqslant i \leqslant N$.

Пусть $\tau = \tau(\omega)$ — некоторый *фиксированный* марковский момент со значениями в $\{0, 1, \ldots, N\}$ и f_τ — терминальная (конечная) платежная функция, построенная по τ и $f_0, f_1, \ldots, f_N$.

Теорема 3. *Если безарбитражный* (B, S)*-рынок является* N*-полным, то он будет и* τ*-полным, т. е. найдутся такой самофинансируемый портфель* π *и такой начальный капитал* x*, что* $X_0^\pi = x$ *и* $X_\tau^\pi = f_\tau$ (P-п. н.).

Доказательство этого утверждения просто: образуем новое платежное поручение $f_N^* = f_{\tau \wedge N}$; совершенный хедж π^* для платежной функции f_N^* будет совершенным хеджем и для исходной платежной функции f_τ.

При этом соответствующая цена хеджирования

$$\mathbb{C}(f_\tau; \mathsf{P}) = \min\bigl\{x \colon \exists \pi, X_0^\pi = x \text{ и } X_\tau^\pi = f_\tau \ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\bigr\}$$

определяется формулой

$$\mathbb{C}(f_\tau; \mathsf{P}) = B_0 \ \widetilde{\mathsf{E}} \, \frac{f_\tau}{B_\tau}. \tag{8}$$

$\square$

4. В связи с «основной формулой» (4) возникает такой вопрос.

Пусть рассматривается *полный безарбитражный* $(\widetilde{B}, S)$-рынок и мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ является мартингальной мерой для нормированных цен $\frac{S}{\widetilde{B}}$. Полезно сейчас это свойство переформулировать следующим эквивалентным образом: *векторный процесс* $\left(\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{B}}, \frac{S^1}{\widetilde{B}}, \ldots, \frac{S^d}{\widetilde{B}}\right)$, *т. е. процесс* $\left(1, \frac{S^1}{\widetilde{B}}, \ldots, \frac{S^d}{\widetilde{B}}\right)$, *является* $\widetilde{\mathsf{P}}$*-мартингалом*.

Теперь предположим, что нашлись другой (положительный) дисконтирующий процесс $\overline{B} = (\overline{B}_n)_{n \leqslant N}$ и мера $\overline{\mathsf{P}}$, эквивалентная исходной мере P, для которой нормированный процесс

$$\left(\frac{\widetilde{B}}{\overline{B}}, \frac{S^1}{\overline{B}}, \ldots, \frac{S^d}{\overline{B}}\right)$$

является $\overline{\mathsf{P}}$*-мартингалом*.

Естественно, конечно, ожидать, что значение цены $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$, определенной формулой (1), *не зависит* от выбора соответствующих пар $(\widetilde{B}, \widetilde{\mathsf{P}})$ и $(\overline{B}, \overline{\mathsf{P}})$.

Именно с этим связан интересующий нас сейчас вопрос о том: почему действительно имеет место равенство

$$\widetilde{B}_0 \; \widetilde{\mathsf{E}} \, \frac{f_N}{\widetilde{B}_N} = \overline{B}_0 \, \overline{\mathsf{E}} \, \frac{f_N}{\overline{B}_N} \tag{9}$$

и даже более общий факт — совпадение «процессов-цен»

$$\left(\widetilde{B}_n \, \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\widetilde{B}_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)\right)_{n \leqslant N} \quad \text{и} \quad \left(\overline{B}_n \, \overline{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\overline{B}_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)\right)_{n \leqslant N}. \tag{10}$$

С этой целью предположим, что $\overline{\mathsf{E}} \, \frac{\widetilde{B}_N}{\overline{B}_N} = 1$ (это не ограничивает общности рассмотрений). Тогда можно ввести новую меру $\widehat{\mathsf{P}}$ (на $\mathscr{F}_N$), полагая

$$d\widehat{\mathsf{P}} = \widehat{Z}_N \, d\widetilde{\mathsf{P}},$$

где $\widehat{Z}_n = \overline{Z}_n \frac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}$, $\overline{Z}_n = \frac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}$, $\overline{\mathsf{P}}_n = (\overline{\mathsf{P}} \,|\, \mathscr{F}_n)$ и $\widetilde{\mathsf{P}}_n = (\widetilde{\mathsf{P}} \,|\, \mathscr{F}_n)$, $n \leqslant N$.

Мера $\widehat{\mathsf{P}}$ является вероятностной, и по формуле Байеса (лемма в § 3a гл. V)

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\widetilde{B}_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) &= \frac{1}{\widehat{Z}_n} \; \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\widetilde{B}_N} \, \widehat{Z}_N \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \\
&= \frac{1}{\overline{Z}_n \cdot \dfrac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}} \; \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\overline{B}_N} \cdot \frac{\overline{B}_N}{\widetilde{B}_N} \cdot \widehat{Z}_N \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \\
&= \frac{1}{\overline{Z}_n \cdot \dfrac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}} \; \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\overline{B}_N} \cdot \overline{Z}_N \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \frac{1}{\dfrac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}} \, \overline{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\overline{B}_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \frac{S_n}{\widetilde{B}_n},
\end{aligned}$$

поскольку $\overline{\mathsf{E}}\left(\frac{S_N}{\overline{B}_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \frac{S_n}{\overline{B}_n}$.

Следовательно, последовательность $\left(\dfrac{S_n}{\widetilde{B}_n}\right)_{n\leqslant N}$ является мартингалом не только по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, но и по мере $\widehat{\mathsf{P}}$.

Но если рассматриваемый рынок является *полным*, то мартингальная мера должна быть *единственной* и, значит, $\widehat{\mathsf{P}}=\widetilde{\mathsf{P}}$, т. е. $\widehat{Z}_n=1$, $n\leqslant N$, что в силу определения $\widehat{Z}_n$ приводит к равенствам

$$\overline{Z}_n=\frac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}=\frac{\overline{B}_n}{\widetilde{B}_n},\quad n\leqslant N, \tag{11}$$

из которых вытекает, что

$$\overline{B}_n\ \overline{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\overline{B}_N}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right)=\frac{\overline{B}_n}{\overline{Z}_n}\ \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\overline{B}_N}\overline{Z}_N\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right)=\widetilde{B}_n\ \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{\widetilde{B}_N}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right).$$

Тем самым, формулы (9) и (10) доказаны, и, следовательно, значение цены $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ на полных рынках действительно не зависит от выбора дисконтирующих процессов $(\widetilde{B},\overline{B},\ldots)$. В § 1b гл. VII процедура дисконтирования будет рассмотрена (и более подробно) для случая непрерывного времени. Сейчас же только отметим, что во многих случаях правильный выбор дисконтирующего процесса может значительным образом редуцировать аналитические трудности при отыскании цен $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ и соответствующих совершенных хеджей. См., например, по этому поводу расчеты, относящиеся к «русскому опциону» в § 5d и § 2c гл. VIII.

5. Итак, на полных безарбитражных рынках вопрос о значении цены совершенного хеджирования полностью решается формулой (4), если в качестве дисконтирующего процесса выбран процесс B. При этом если $\widetilde{\mathsf{P}}$ есть соответствующая мартингальная мера (т. е. $\dfrac{S}{B}$ — мартингал), то переход к новому дисконтирующему процессу $\overline{B}$ меняет и мартингальную меру: ею станет мера $\overline{\mathsf{P}}$, которая в соответствии с равенствами (11) определяется формулой

$$d\overline{\mathsf{P}}=\frac{\overline{B}_N}{B_N}\,d\widetilde{\mathsf{P}}. \tag{12}$$

В случае же неполных рынков, когда существует несколько мартингальных мер, вопрос о том, что *называть* ценой хеджирования, уже не является столь же простым, поскольку для двух разных мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}}_1$ и $\widetilde{\mathsf{P}}_2$, а следовательно, и разных состояний безарбитражности выражения $\widetilde{B}_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_1}\dfrac{f_N}{\widetilde{B}_N}$ и $\widetilde{B}_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_2}\dfrac{f_N}{\widetilde{B}_N}$, вообще говоря, не совпадают (см. далее § 1c).

6. В качестве иллюстрации проведенных выше рассмотрений, связанных с разными дисконтирующими процессами и пересчетами условных математических ожиданий относительно разных мер, рассмотрим следующий пример.

Пусть f_N — цена платежного поручения в долларах (USD). Если рассматривается полный безарбитражный (долларовый) рынок, то соответствующая цена совершенного хеджа будет равна $\widetilde{B}_0\ \widetilde{\mathsf{E}}\,\dfrac{f_N}{\widetilde{B}_N}$, где $\widetilde{B}=(\widetilde{B}_n)_{n\leqslant N}$ — долларовый банковский счет.

Рассмотрим теперь рынок, на котором цены определяются в немецких марках (DEM). Тогда в марках величина f_N (USD) будет равна $f_N S_N$ (DEM), где

$$S_N=\left(\frac{\mathrm{DEM}}{\mathrm{USD}}\right)_N$$

— величина обменного курса в момент времени N.

Если $\overline{B}=(\overline{B}_n)_{n\leqslant N}$ — банковский счет в марках и соответствующий рынок является полным и безарбитражным, то цена платежного поручения $f_N S_N$ будет равна (в DEM)

$$\overline{B}_0\,\overline{\mathsf{E}}\,\frac{S_N f_N}{\overline{B}_N},$$

что в пересчете в доллары составит

$$S_0^{-1}\overline{B}_0\,\overline{\mathsf{E}}\,\frac{S_N f_N}{\overline{B}_N}.$$

Выясним, при каких условиях должно выполняться естественно ожидаемое совпадение долларовой цены с ценой $\widetilde{B}_0\ \widetilde{\mathsf{E}}\,\dfrac{f_N}{\widetilde{B}_N}$, или, в более общем виде, равенство

$$S_n^{-1}\overline{B}_n\ \overline{\mathsf{E}}\biggl(\frac{S_N f_N}{\overline{B}_N}\,\bigg|\,\mathscr{F}_n\biggr)=\widetilde{B}_n\ \widetilde{\mathsf{E}}\biggl(\frac{f_N}{\overline{B}_N}\,\bigg|\,\mathscr{F}_n\biggr). \tag{13}$$

Обменный курс $S=(S_n)_{n\leqslant N}$, где $S_n=\left(\dfrac{\mathrm{DEM}}{\mathrm{USD}}\right)_n$, рассматриваемый на DEM-рынке, предполагаемом безарбитражным, должен быть таким, что $\left(\dfrac{S_n}{\overline{B}_n}\right)_{n\leqslant N}$ является $\overline{\mathsf{P}}$-мартингалом. Поэтому $\overline{\mathsf{E}}\biggl(\dfrac{S_N}{\overline{B}_N}\,\bigg|\,\mathscr{F}_n\biggr)=\dfrac{S_n}{\overline{B}_n}$, и если выполнено условие $Z_n=\dfrac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}$, то по формуле Байеса,

$$\frac{S_n}{\overline{B}_n}=\frac{1}{Z_n}\ \widetilde{\mathsf{E}}\biggl(\frac{S_N}{\overline{B}_N}Z_N\,\bigg|\,\mathscr{F}_n\biggr)\quad(\widetilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}). \tag{14}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{S_n}{\widetilde{B}_n}\cdot\biggl(\frac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n}Z_n\biggr)=\widetilde{\mathsf{E}}\biggl(\frac{S_N}{\widetilde{B}_N}\cdot\frac{\widetilde{B}_N}{\overline{B}_N}\cdot Z_N\,\bigg|\,\mathscr{F}_n\biggr). \tag{15}$$

Если и USD-рынок является безарбитражным, то $\left(\dfrac{S_n}{\widetilde{B}_n}\right)_{n\leqslant N}$ является $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом, и, значит,

$$\frac{S_n}{\widetilde{B}_n}=\widetilde{\mathsf{E}}\biggl(\frac{S_N}{\widetilde{B}_N}\,\bigg|\,\mathscr{F}_n\biggr). \tag{16}$$

Из формул (15) и (16) и предположения полноты USD-рынка, а значит, и единственности меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, следует, что

$$\frac{\widetilde{B}_N}{\overline{B}_N} \cdot \frac{d\overline{\mathsf{P}}}{d\widetilde{\mathsf{P}}} = 1 \tag{17}$$

(ср. с (12)) и что

$$\frac{\widetilde{B}_n}{\overline{B}_n} \cdot \frac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n} = 1 \tag{18}$$

для всех $n \leqslant N$.

Так как $Z = (Z_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})_{n\leqslant N}$ с $Z_n = \dfrac{d\overline{\mathsf{P}}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}$ является мартингалом, то из равенства (18) следует, что процесс $\left(\dfrac{\overline{B}_n}{\widetilde{B}_n}\right)_{n\leqslant N}$ также должен быть $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом. Это свойство мартингальности, гарантирующее совпадение цен платежного поручения f_N (в долларах) на USD- и DEM-рынках, можно было бы предвидеть и без проведенных вычислений, если $\overline{B} = (\overline{B}_n)_{n\leqslant N}$ понимать как одну из основных ценных бумаг на долларовом рынке с банковским счетом $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_n)_{n\leqslant N}$.

§ 1c. Основная формула для цены хеджирования. II. Неполные рынки

1. Как установлено в предыдущем параграфе, на полных безарбитражных рынках цена (стоимость) $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$ совершенного хеджирования определяется формулой

$$\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) = B_0\, \widetilde{\mathsf{E}}\, \frac{f_N}{B_N}, \tag{1}$$

где $\widetilde{\mathsf{E}}$ — усреднение по (единственной) мартингальной мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, относительно которой $\dfrac{S}{B}$ является мартингалом.

Аналогичный вопрос о стоимости хеджирования возникает, разумеется, и для неполных рынков. Однако, поскольку на таких рынках совершенный хедж для самофинансируемых портфелей уже может и не существовать, приходится видоизменять определение цены (стоимости) хеджирования и также несколько расширять класс *самофинансируемых* стратегий, с которыми мы оперировали в случае полных рынков.

Напомним, что капитал X^π самофинансируемой стратегии $\pi = (\beta, \gamma)$ для полных рынков мог быть, в сущности, определен двумя способами: или как

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n, \tag{2}$$

или же как

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k), \tag{3}$$

подробнее см. § 1a.

В определенном отношении представление капитала в виде (3) более предпочтительно, поскольку оно наглядно иллюстрирует *динамику образования капитала*: X_0^π есть вклад начального капитала в X_n^π, а приращение капитала —

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n. \tag{4}$$

Для рассматриваемых сейчас вопросов хеджирования на неполных рынках целесообразно наряду с *портфелем* $\pi = (\beta, \gamma)$ ввести также *процесс потребления* $C = (C_n)_{n\geqslant 0}$, являющийся неотрицательным неубывающим процессом с $\mathscr{F}_n$-измеримыми компонентами C_n и $C_0 = 0$.

Этот случай, в сущности, уже рассматривался в § 1а гл. V под названием «случай с потреблением», при этом предполагалось, что вместо уравнения (4) динамика прироста капитала $X^{\pi,C}$, соответствующего портфелю π и потреблению C, описывается соотношениями

$$\Delta X_n^{\pi,C} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - \Delta C_n, \tag{5}$$

где $\Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$ есть вклад, определяемый значениями портфеля и «рыночными» изменениями $\Delta \beta_n$ и ΔS_n, а ΔC_n характеризует «отток» капитала на потребление (включая, например, и расходы, связанные с самим фактом изменения портфеля).

Таким образом, будем сейчас предполагать, что капитал $X^{\pi,C}$ *стратегии* (π, C) определяется (по аналогии с (3)) формулами

$$X_n^{\pi,C} = X_0^{\pi,C} + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k) - C_n, \quad n \geqslant 1, \tag{6}$$

которые равносильны тому, что

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\pi,C}}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) - \frac{\Delta C_n}{B_{n-1}}, \quad n \geqslant 1.$$

Замечание 1. Если положить $\beta'_k = \beta_k - \dfrac{\Delta C_k}{\Delta B_k}$, то из формул (6) находим, что

$$X_n^{\pi,C} = X_0^{\pi,C} + \sum_{k=1}^{n} (\beta'_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k).$$

Эта формула весьма схожа с (3). Однако, если в формуле (3) величины β_k являются $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримыми, то β'_k являются $\mathscr{F}_k$-измеримыми.

Замечание 2. На неполных рынках совершенное хеджирование, т. е. такое, что капитал $X_N^\pi = f_N$ (P-п. н.) при некотором $\pi = (\beta, \gamma)$, вообще говоря, невозможно. В то же самое время не исключено, что при расширении класса допустимых стратегий можно добиться того, чтобы терминальный капитал *воспроизводил* (P-п. н.) платежное поручение f_N. Как станет ясно из доказательства приводимой ниже теоремы, введение «потребления» позволяет найти стратегию (π, C), для которой $X_N^{\pi,C} = f_N$ (P-п. н.). Это есть одна из «технических» причин введения наряду с портфелем π также и потребления C. Но с другой стороны, введение класса стратегий с «потреблениями», на которые накладываются к тому же ограничения типа $\Delta C_n \geqslant c > 0$, имеет ясный экономический подтекст.

2. Определение. Будем называть *верхней ценой хеджирования европейского типа* ($\mathscr{F}_N$-измеримого платежного поручения f_N) величину

$$\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P}) = \inf\bigl\{x\colon \exists\,(\pi, C) \text{ с } X_0^{\pi,C} = x \text{ и } X_N^{\pi,C} \geqslant f_N \ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\bigr\}. \tag{7}$$

Замечание 3. Наряду с верхней ценой хеджирования можно ввести также и *нижнюю цену* хеджирования (см. определение в § 1b). В дальнейшем будет рассматриваться только верхняя цена, которая часто будет называться просто *ценой*.

Пусть $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ — совокупность всех мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, эквивалентных мере P. Предполагается, что $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$.

Центральный результат теории расчетов на *неполных безарбитражных* рынках дается в следующем предложении, обобщающем формулу (1).

Теорема 1 (основная формула для цены хеджирования европейского типа на неполных рынках). *Пусть f_N — неотрицательная ограниченная $\mathscr{F}_N$-измеримая функция. На неполных безарбитражных рынках верхняя цена $\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P})$ определяется формулой*

$$\boxed{\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P}) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_N}{B_N}}\,, \tag{8}$$

где $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}$ — усреднение по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$.

С частным случаем этого результата мы уже сталкивались выше (теорема 1 в § 1c гл. V; см. также [93]) для случая одношаговой модели.

Ключевым моментом в доказательстве формулы (8) является так называемое *опциональное разложение* (см. далее § 2d), доказательство которого в техническом отношении довольно сложно. Первыми работами, в которых было доказано «опциональное разложение» и получена формула (8), являются работы Н. Эль Каруи и М. Кинез (N. El Karoui, M. Quenez [136]) и Д. О. Крамкова [281]; по поводу обобщений и различных доказательств см. также [99], [163], [164].

3. Доказательство теоремы. Пусть (π, C) является (x, f_N)-хеджем, т. е. $X_0^{\pi,C} = x$ и $X_N^{\pi,C} \geqslant f_N$ (P-п. н.).

Тогда (ср. с формулой (2) в § 1b)

$$0 \leqslant \frac{f_N}{B_N} \leqslant \frac{X_N^{\pi,C}}{B_N} = \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \, \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\Delta C_k}{B_{k-1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \, \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{9}$$

и, значит, для *любой* меры $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ выполняется неравенство

$$B_0 \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N} \leqslant x, \tag{10}$$

поскольку $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \, \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) = 0$, что следует из леммы в § 1c гл. II и вытекающего из формулы (9) неравенства $\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \, \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) \geqslant -\frac{x}{B_0}$.

Отсюда

$$\sup_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} B_0 \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N} \leqslant \mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}). \tag{11}$$

Для доказательства противоположного неравенства положим

$$Y_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right), \tag{12}$$

где существенный супремум Y_n есть, по определению, $\mathscr{F}_n$-измеримая случайная величина, которая, с одной стороны, удовлетворяет для любой меры $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ неравенству

$$Y_n \geqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \tag{13}$$

и, с другой стороны, обладает тем свойством («минимальности»), что если есть другая величина $\overline{Y}_n$, также мажорирующая правую часть неравенства (13), то $Y_n \leqslant \overline{Y}_n$ (P-п. н.).

Как показывается в § 2b, последовательность $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)_{n \leqslant N}$ является супермартингалом относительно *любой* (!) меры $\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, т. е.

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(Y_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) \leqslant Y_n \quad (\mathsf{Q}\text{-п. н.}). \tag{14}$$

Напомним, что из классического разложения Дуба (§ 1b гл. II) следует, что для каждой *конкретной* меры Q можно найти мартингал $M^{\mathsf{Q}} = (M_n^{\mathsf{Q}}, \mathscr{F}_n, \mathsf{Q})_{0 \leqslant n \leqslant N}$, $M_0^{\mathsf{Q}} = 0$, и предсказуемый неубывающий процесс $A^{\mathsf{Q}} = (A_n^{\mathsf{Q}}, \mathscr{F}_{n-1}, \mathsf{Q})_{1 \leqslant n \leqslant N}$, $A_0^{\mathsf{Q}} = 0$, для которых выполнено равенство

$$Y_n = Y_0 + M_n^{\mathsf{Q}} - A_n^{\mathsf{Q}}. \tag{15}$$

Весьма замечательным является тот факт, что если $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)$ есть супермартингал относительно *любой* меры Q из семейства $\mathscr{P}(\mathsf{P})$, то для Y имеет место *универсальное* (т. е. не зависящее от Q) *разложение*

$$Y_n = Y_0 + \overline{M}_n - \overline{C}_n, \tag{16}$$

где $\overline{M} = (\overline{M}_n, \mathscr{F}_n)$ есть мартингал относительно *любой* меры $\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, а $\overline{C} = (\overline{C}_n, \mathscr{F}_n)$ — некоторый неубывающий процесс с $\overline{C}_0 = 0$.

Подчеркнем, что если в разложении Дуба (15) процесс A^{Q} был предсказуемым (т. е. A_n^{Q} — $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримые величины), то в разложении (16) процесс $\overline{C} = (\overline{C}_n, \mathscr{F}_n)$ является только лишь *опциональным* (т. е. $\overline{C}_n$ — $\mathscr{F}_n$-измеримые величины).

Именно с этим обстоятельством и связано то, что разложение (16) называется *опциональным разложением*.

Применительно к супермартингалу $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)$, определенному формулой (12), можно конкретизировать структуру мартингала $\overline{M} = (\overline{M}_n, \mathscr{F}_n)$:

$$\overline{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma}_k \, \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{17}$$

где $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_n, \mathscr{F}_{n-1})$ — некоторый предсказуемый процесс. (Подчеркнем, что этот факт является далеко не тривиальным и доказывается в ходе доказательства опционального разложения; см. § 2d.)

По процессам $\overline{\gamma}$, $\overline{C}$ и Y_0, определяемым формулами (16) и (17), построим теперь портфель $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ и процесс потребления $\widetilde{C}$ с такими свойствами, что для соответствующего капитала $X^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}}$ выполняются соотношения $X_0^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = B_0 \sup\limits_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \dfrac{f_N}{B_N}$ и $X_N^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} \geqslant f_N$. Отсюда, конечно, будет следовать, что

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) \leqslant X_0^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = B_0 \sup_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_N}{B_N},$$

и вместе с формулой (11) это приведет к равенству (8).

Требуемый портфель $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ и процесс потребления $\widetilde{C}$ определим следующим образом:

$$\widetilde{\gamma}_n = \overline{\gamma}_n, \quad \widetilde{\beta}_n = Y_n - \widetilde{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}, \tag{18}$$

$$\widetilde{C}_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} \, \Delta \overline{C}_k, \tag{19}$$

где $\overline{\gamma}$ и $\overline{C}$ берутся из опционального разложения супермартингала Y.

Для так определенных $\widetilde{\pi}$ и $\widetilde{C}$ начальный капитал равен

$$X_0^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_0 B_0 + \widetilde{\gamma}_0 S_0 = Y_0 B_0.$$

В случае схемы с «потреблением» мы считаем (см. п. 4 в § 1а гл. V), что приращение капитала осуществляется по формуле

$$\Delta X_n^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n \, \Delta B_n + \widetilde{\gamma}_n \, \Delta S_n - \Delta \widetilde{C}_n, \tag{20}$$

из которой, как уже отмечалось, следует (ср. также с формулой (27) в § 1a гл. V), что

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n}\right)=\widetilde{\gamma}_n\,\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)-\frac{\Delta\widetilde{C}_n}{B_{n-1}}. \tag{21}$$

В силу формул (16)—(19) имеем

$$\Delta\left(\frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n}\right)=\Delta Y_n, \tag{22}$$

и, поскольку $\dfrac{X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_0}=Y_0$, получаем, что

$$\frac{X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_N}=Y_N=\frac{f_N}{B_N}. \tag{23}$$

Таким образом, $X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}=f_N$, и, следовательно, построенная стратегия $(\widetilde{\pi},\widetilde{C})$ с начальным капиталом

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}=B_0Y_0=B_0\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_N}{B_N}$$

позволяет в точности осуществить *совершенное хеджирование*:

$$X_N^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}=f_N.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P})\leqslant B_0\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_N}{B_N}.$$

Вместе с формулой (11) это доказывает (в предположении наличия опционального разложения) требуемую формулу (8).

Теорема 1 доказана, и в ходе ее доказательства установлено также следующее предложение (ср. с теоремой 2 в § 1b).

Теорема 2 (основные формулы для совершенного хеджа, его капитала и потребления). *На безарбитражных рынках существуют такой самофинансируемый хедж $\pi^*=(\beta^*,\gamma^*)$ и такое потребление C^*, что соответствующий капитал $X_n^{\pi^*}=\beta_n^*B_n+\gamma_n^*S_n$ эволюционирует в соответствии с «балансовым» условием $\Delta X_n^{\pi^*}=\beta_n^*\Delta B_n+\gamma_n^*\Delta S_n-\Delta C_n^*$, при этом*

$$X_0^{\pi^*}=\mathbb{C}^*(f_N;\mathsf{P})\quad\left(=\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})}B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_N}{B_N}\right)$$

и

$$X_N^{\pi^*}=f_N\quad(\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Динамика капитала $X_n^{\pi^*}$ определяется формулами

$$X_n^{\pi^*}=B_n\operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{f_N}{B_N}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right),$$

компоненты $\gamma^* = (\gamma_n^*)$ *и* $C^* = (C_n^*)$ — *из опционального разложения*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf P}\in\mathscr P(\mathsf P)} \mathsf E_{\widetilde{\mathsf P}}\Big(\frac{f_N}{B_N}\,\Big|\,\mathscr F_n\Big) = \sup_{\widetilde{\mathsf P}\in\mathscr P(\mathsf P)} \mathsf E_{\widetilde{\mathsf P}}\,\frac{f_N}{B_N} + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k^*\,\Delta\Big(\frac{S_k}{B_k}\Big) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta C_k^*}{B_{k-1}},$$

а компоненты $\beta^* = (\beta_n^*)$ — *из условия* $X_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n$.

§ 1d. О расчетах цены хеджирования при среднеквадратичном критерии

1. Пусть $f_N = f_N(\omega)$ — некоторое $\mathscr F_N$-измеримое платежное поручение. На полных безарбитражных рынках трейдер имеет возможность при некотором начальном капитале x и некоторой стратегии π *в точности воспроизвести* f_N в том смысле, что с вероятностью единица $X_N^\pi(x) = f_N$.

В случае же неполных (безарбитражных или арбитражных) рынков ситуация резко усложняется и надеяться на точное воспроизведение f_N уже не приходится.

В § 1с был рассмотрен вопрос о том, как рассчитывать цену хеджирования $\mathbb C^*(f_N; \mathsf P)$ на неполных рынках в предположении, что *хеджирующая стратегия* (π, C) — это та стратегия, для которой $X_N^{\pi,C} \geqslant f_N$ ($\mathsf P$-п. н.).

В настоящем параграфе оптимальное хеджирование будет пониматься в ином смысле, а именно — как возможность с «наибольшей точностью» воспроизвести f_N (без обращения к «потреблению» C).

Вопрос о выборе меры точности воспроизведения является в определенном отношении довольно-таки условным и определяется «целевыми установками», возможностью получения точного решения соответствующей оптимизационной задачи и т. п.

Далее качество воспроизведения измеряется среднеквадратическим отклонением

$$R_N(\pi, x) = \mathsf E[X_N^\pi(x) - f_N]^2, \tag{1}$$

что позволяет в ряде случаев найти те «оптимальные» x^* и π^*, на которых достигается минимум $\mathsf E[X_N^\pi(x) - f_N]^2$:

$$\inf_{(\pi,x)} R_N(\pi; x) = R_N(\pi^*; x^*). \tag{2}$$

2. Будем предполагать, что $(\Omega, \mathscr F, (\mathscr F_n)_{n\leqslant N}, \mathsf P)$ — заданное фильтрованное вероятностное пространство, $\mathscr F_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr F_N = \mathscr F$. Пусть $S = (S_n^1, \ldots, S_n^d)_{n\leqslant N}$ — последовательность цен d-мерного актива и $\mathsf E\, f_N^2 < \infty$.

Если предположить, что относительно исходной меры $\mathsf P$ последовательность цен является *мартингалом*, и к тому же квадратично интегрируемым, то в классе стратегий π, для которых $\mathsf E(X_N^\pi(x))^2 < \infty$, оптимизационная задача (2) допускает простое рассмотрение. (Подчеркнем, что *единственность* мартингальной меры $\mathsf P$, а значит, и полнота не предполагаются.)

Пусть $\pi=(\gamma^1, \ldots, \gamma^d)$, где $\gamma^i=(\gamma^i_n)_{n\leqslant N}$, и

$$X^\pi_n(x) = x+\sum_{k=1}^n(\gamma_k, \Delta S_k) = x+\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^d \gamma^i_k\,\Delta S^i_k\right) \tag{3}$$

— капитал стратегии π с предсказуемыми величинами γ^i, $i=1, \ldots, d$.

Поскольку последовательность $(X^\pi_n(x))_{n\leqslant N}$ является мартингалом, имеем

$$\mathsf{E}\, X^\pi_N(x) = x. \tag{4}$$

Если положить $\xi=X^\pi_N(x)-f_N$, то в силу очевидного равенства $\mathsf{E}\,\xi^2=(\mathsf{E}\,\xi)^2+$ $+\mathsf{E}(\xi-\mathsf{E}\,\xi)^2$ находим, что

$$R_N(\pi; x) = \big[\mathsf{E}(f_N-x)\big]^2+\mathsf{E}\big[(X^\pi_N(x)-x)-(f_N-\mathsf{E}\,f_N)\big]^2. \tag{5}$$

Ниже будет показано, что для каждой пары (π, x), $\mathsf{E}(X^\pi_N(x))^2<\infty$, найдется такая пара (π^*, x), что $R_N(\pi; x)\geqslant R_N(\pi^*; x)$, причем π^* обладает тем свойством, что $X^{\pi^*}_N(x)-x$ *не зависит* от x. Отсюда и из формулы (5) будет вытекать, что $\inf\limits_x\big[\inf\limits_\pi R_N(\pi; x)\big]$ достигается на значении

$$x^* = \mathsf{E}\,f_N. \tag{6}$$

Положим (считая, что $0/0=0$)

$$\gamma^{*i}_n = \frac{\mathsf{E}(f_N\,\Delta S^i_n|\mathscr{F}_{n-1})}{\mathsf{E}((\Delta S^i_n)^2|\mathscr{F}_{n-1})} \tag{7}$$

для $i=1, \ldots, d$ и образуем мартингал $L^*=(L^*_n)_{n\leqslant N}$,

$$L^*_n = \mathsf{E}\left[f_N-\sum_{k=1}^N(\gamma^*_k, \Delta S_k)\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right]-x. \tag{8}$$

Ясно, что для f_N имеет место разложение

$$f_N = x+\sum_{k=1}^N(\gamma^*_k, \Delta S_k)+L^*_N. \tag{9}$$

Используя определение (7), можно непосредственно убедиться в том, что

$$\mathsf{E}\big(\Delta L^*_n\cdot(\gamma^*_n, \Delta S_n)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}\big) = 0. \tag{10}$$

Заметим, что это свойство равносильно тому, что два квадратично интегрируемых мартингала $(L^*_n)_{n\leqslant N}$ и $\Big(\sum\limits_{k=1}^n(\gamma^*_n, \Delta S_k)\Big)_{n\leqslant N}$ являются «ортогональными» в том смысле, что их произведение также является мартингалом. В этой связи полезно отметить, что в общей теории мартингалов разложение (9) называют разложением Кунита—Ватанабе.

Из формул (9) и (10) находим, что для любой пары (π, x) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} R_N(\pi; x) &= \mathsf{E}\Big[f_N - \Big(x + \sum_{k=1}^{N}(\gamma_k, \Delta S_k)\Big)\Big]^2 = \mathsf{E}\Big[\sum_{k=1}^{N}(\gamma_k^* - \gamma_k, \Delta S_k) + L_N^*\Big]^2 = \\ &= \mathsf{E}\Big[\sum_{k=1}^{N}(\gamma_k^* - \gamma_k, \Delta S_k)\Big]^2 + \mathsf{E}[L_N^*]^2 \geqslant \\ &\geqslant \mathsf{E}[L_N^*]^2 = \mathsf{E}\Big[f_N - \Big(x + \sum_{k=1}^{N}(\gamma_k^*, \Delta S_k)\Big)\Big]^2 = \\ &= R_N(\pi^*; x) \geqslant R_N(\pi^*; x^*), \end{aligned} \tag{11}$$

причем здесь первое неравенство превращается в равенство при $\gamma = \gamma^*$.

Итак, доказана следующая

Теорема. *Пусть исходная мера* P *является мартингальной. Тогда в задаче* (2) *оптимальный (по среднеквадратичному критерию) хедж* $\pi^* = (\gamma^{*1}, \dots, \gamma^{*d})$ *задается формулами* (7), $x^* = \mathsf{E}\, f_N$ *и*

$$R_N(\pi^*; x^*) = \mathsf{E}\Big[f_N - \Big(x^* + \sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{d}\gamma_k^{*i}\,\Delta S_k^i\Big)\Big)\Big]^2. \tag{12}$$

Замечание. В том случае, когда мера P *не* является мартингальной (для цен S), вопросы существования *оптимальной* пары (x^*, π^*) и методы ее отыскания становятся довольно-таки непростыми. По этому поводу см., например, работы Г. Фёльмера, М. Швайцера, Д. Зондермана [167], [168], [430], а также работы [194] и [195].

Отметим также, что понятие *минимальной* мартингальной меры, о которой вскользь было упомянуто в конце § 3d гл. V, возникло именно в связи с рассматриваемой проблемой хеджирования при среднеквадратичном критерии.

§ 1e. Форвардные и фьючерсные контракты

1. В настоящем параграфе будет показано, как идеи безарбитражности позволяют рассчитывать форвардные и фьючерсные договорные цены для форвардов и фьючерсов, представляющих, наряду с опционами, важные инструменты инвестирования на финансовых рынках.

В соответствии с определениями, данными в § 1c гл. I, форварды и фьючерсы представляют собой контракты (сделки) о купле-продаже некоторого актива с поставкой его в определенный момент в будущем по заранее оговариваемой (форвардной или фьючерсной) цене.

Между форвардами и фьючерсами есть существенная разница, хотя и тот, и другой являются сделками о купле-продаже.

Форварды представляют, в сущности, просто некоторую договоренность о купле-продаже между двумя заинтересованными сторонами, без каких-либо посредников.

Фьючерсы также являются сделкой о купле-продаже, но они заключаются на бирже при посредничестве клиринговой палаты, которая производит взаиморасчеты между договаривающимися сторонами и является гарантом выполнения сторонами условий сделки.

2. Предположим, что рыночная цена актива, о купле-продаже которого идет речь, описывается стохастической последовательностью $S=(S_k)_{k\leqslant N}$, где N — момент закрытия контракта, который отождествляется с моментом поставки.

Понятно, что если сделка совершается в момент времени N, когда рыночная цена актива есть S_N, то при любом разумном определении форвардных и фьючерсных цен их значение должно быть равно S_N. Иное дело, конечно, если контракт заключается в момент времени $n<N$, и кардинальный вопрос здесь состоит в том, что (на безарбитражном рынке) понимать под *справедливой договорной ценой*.

С целью формализации будем считать, что рассматривается описанная в § 1a гл. V схема (B,S)-рынка, где $B=(B_n)$ — банковский счет и $S=(S_n)$ — интересующий договаривающиеся стороны актив. (Если считать, что рассматриваемый актив является *одной* из компонент d-мерного вектора рисковых активов, то в предположениях безарбитражности это ничего не изменит в последующих выводах.)

Обратимся теперь к описанному в п. 4 § 1a случаю с «дивидендами», в котором капитал покупателя $X=(X_n^\pi)_{n\leqslant N}$, отвечающий стратегии $\pi=(\beta,\gamma)$, определяется формулой

$$X_n^\pi=\beta_nB_n+\gamma_n\Delta D_n, \tag{1}$$

а его изменение — формулой

$$\Delta X_n^\pi=\beta_n\,\Delta B_n+\gamma_n\,\Delta D_n, \tag{2}$$

где γ_n — «число» единиц покупаемого актива S, и $D=(D_n,\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}$ — процесс суммарных дивидендов (со знаком), связанных с активом S $(D_0=0)$.

Опишем структуру дивидендов в рассматриваемых случаях форвардных и фьючерсных контрактов и получим «справедливые» цены для них.

3. Пусть форвардный контракт заключается в момент времени n и обе договаривающиеся стороны согласились, основываясь на «информации» $\mathscr{F}_n$, в том, что цена поставки (иначе говоря, форвардная цена) равна $\mathbb{F}_n(N)$.

Тогда по самому механизму действия форвардного контракта процесс суммарных дивидендов (со знаком) имеет следующую структуру:

$$D_k=0,\quad n\leqslant k<N, \tag{3}$$

и

$$D_N = S_N - \mathbb{F}_n(N). \tag{4}$$

Из формул (1) и (2) следует (см. также формулу (24) в § 1a гл. V), что

$$\Delta\left(\frac{X_k^\pi}{B_k}\right) = \gamma_k \frac{\Delta D_k}{B_k}, \tag{5}$$

откуда

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \sum_{k=n+1}^{N} \gamma_k \frac{\Delta D_k}{B_k}, \quad n < N. \tag{6}$$

Ясно, что для форвардного контракта, заключаемого в момент n, $\gamma_k = 0$, $k \leqslant n$, и $\gamma_k = \gamma_{n+1}$ для всех $k \geqslant n+1$, где γ_k можно трактовать как «число» единиц покупаемого актива S.

Из формулы (6) получаем

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \gamma_{n+1} \frac{S_N - \mathbb{F}_n(N)}{B_N}, \tag{7}$$

и сразу можно сделать следующий вывод.

Пусть рассматриваемый (B, S)-рынок является *безарбитражным и полным*. Обозначим через $\widetilde{\mathsf{P}}$ ту единственную мартингальную меру, относительно которой $\left(\dfrac{S_n}{B_n}\right)_{n \leqslant N}$ образует мартингал.

Предположим теперь, что $\mathscr{F}_n$-измеримые цены $\mathbb{F}_n(N)$ таковы, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{S_N - \mathbb{F}_n(N)}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad n \leqslant N, \tag{8}$$

т. е. пусть

$$\mathbb{F}_n(N) = \frac{\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\dfrac{S_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)}{\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\dfrac{1}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)}. \tag{9}$$

Тогда из формулы (7) видим, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{X_N^\pi}{B_N} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{X_n^\pi}{B_n}, \tag{10}$$

и, значит, форвардный контракт, заключаемый в момент времени n по цене $\mathbb{F}_n(N)$, определяемой формулой (9), является безарбитражным (т. е. если $X_n^\pi = 0$ и $\mathsf{P}(X_N^\pi \geqslant 0) = 1$, то $\mathsf{P}(X_N^\pi = 0) = 1$, см. определение 2 в § 2a гл. V), и в этом смысле значение $\mathbb{F}_n(N)$, называемое *форвардной ценой*, естественно должно рассматриваться как справедливая цена форвардного контракта.

Заметим, что предположение безарбитражности (B, S)-рынка приводит к тому, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{S_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \frac{S_n}{B_n}.$$

Тем самым, из формулы (9) находим, что *безарбитражные форвардные цены* $\mathbb{F}_n(N)$ *определяются формулами*

$$\boxed{\mathbb{F}_n(N) = \frac{S_n}{\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\Big(\frac{B_n}{B_N}\Big|\mathscr{F}_n\Big)}, \quad n \leqslant N}\,. \tag{11}$$

4. Обратимся теперь к фьючерсным контрактам. Пусть этот контракт заключается в момент времени n с $\mathscr{F}_n$-измеримой контрактной (фьючерсной) ценой $\Phi_n(N)$. После заключения контракта в силу вступает механизм взаиморасчетов, осуществляемый клиринговой палатой, который в упрощенном виде (без упоминания деталей относительно маржинального счета, величины вносимого на этот счет залога и т. п.) может быть описан в терминах дивидендов (со знаком) следующим образом.

Если в момент $n+1$ окажется, что рыночная фьючерная цена стала равной $\Phi_{n+1}(N)$, причем $\Phi_{n+1}(N) < \Phi_n(N)$, то покупатель вносит на счет продавца сумму $\Phi_n(N) - \Phi_{n+1}(N)$. Если же $\Phi_{n+1}(N) > \Phi_n(N)$, то, наоборот, продавец вносит на счет покупателя сумму $\Phi_{n+1}(N) - \Phi_n(N)$.

Будем обозначать $\delta_0 = \Phi_0(N)$ и

$$\delta_n = \Phi_n(N) - \Phi_{n-1}(N), \quad n \geqslant 1.$$

Пусть также

$$D_n = \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_n, \tag{12}$$

так что $\Delta D_n = \delta_n$, $n \geqslant 1$.

Из формулы (6) находим (ср. с (7)), что

$$\frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_n^\pi}{B_n} + \gamma_{n+1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\Delta D_k}{B_k}. \tag{13}$$

Отсюда, как и в случае форвардных контрактов, заключаем, что если $\widetilde{\mathsf{P}}$ — единственная мартингальная мера для (B, S)-рынка, то условие

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\Big(\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\Delta D_k}{B_k}\Big|\mathscr{F}_n\Big) = 0 \tag{14}$$

на цены $\Phi_0(N), \ldots, \Phi_{n+1}(N)$ будет заведомо гарантировать отсутствие арбитража у фьючерсного контракта, заключаемого в момент времени n.

Потребуем, чтобы по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ последовательность $D = (D_n)_{n \leqslant N}$ образовывала мартингал. В этом случае для любого $n \geqslant 0$ будет выполнено условие (14). На самом деле из положительности предсказуемых величин B_k следует и обратное.

Мартингальность последовательности $D = (D_n)_{n \leqslant N}$ означает, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(D_N \,|\, \mathscr{F}_n) = D_n. \tag{15}$$

Но $D_n = \delta_0 + \ldots + \delta_n = \Phi_n(N)$ и $D_N = \Phi_N(N) = S_N$. Тем самым, из формулы (15) находим, что выбор фьючерсных цен в виде

$$\boxed{\Phi_n(N) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(S_N \mid \mathscr{F}_n), \quad n \leqslant N} \tag{16}$$

обеспечивает безарбитражность соответствующих фьючерсных контрактов.

Замечание. Пусть $B = (B_n)_{n \leqslant N}$ является детерминированной последовательностью. Тогда, очевидно,

$$\Phi_n(N) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{S_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) \cdot B_N = \frac{S_n}{B_n} \cdot B_N,$$

и, сопоставляя это равенство с формулой (11), получаем хорошо известный факт: *в случае детерминированных $B = (B_n)$ форвардные и фьючерсные цены совпадают*.

2. Расчеты, связанные с хеджированием американского типа на безарбитражных рынках

§ 2a. Задачи об оптимальной остановке. Супермартингальная характеризация

1. Приведенная в § 1c супермартингальная характеризация последовательности $Y = (Y_n)$ относительно каждой из мер семейства $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ не покажется неожиданной, если операцию взятия ess sup в формуле (12) из § 1c интерпретировать как оптимизационную задачу выбора «наилучшей» вероятностной меры. При таком понимании интересующее нас супермартингальное свойство есть не что иное, как одно из утверждений широко известного «принципа оптимальности», которому удовлетворяет процесс-цена (функция Беллмана) в *стохастических оптимизационных* задачах.

Частным случаем таких задач является задача об оптимальной остановке некоторой стохастической последовательности $f = (f_n)_{n \leqslant N}$, с рассмотрения которой целесообразно начать изложение круга вопросов относительно «супермартингальных характеризаций» в оптимизационных проблемах. Выделение этого случая отдельно представляется целесообразным также в связи с рассматриваемыми далее опционами американского типа (в которых покупатель опциона имеет *право выбора* момента исполнения, что и может рассматриваться здесь как «оптимизационный элемент»), а также в связи с тем, что на этом случае четко прослеживается то, что класс объектов, по которому берется ess sup, должен быть «достаточно богатым».

2. Пусть $f = (f_n, \mathscr{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ — некоторая стохастическая последовательность на $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}, \mathsf{P})$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$. Будем предполагать, что $\mathsf{E}\,|f_n| < \infty$ при всех $n \leqslant N < \infty$.

Интересующая нас задача состоит: 1) в отыскании функций (цен)

$$V_n^N = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}\, f_\tau, \tag{1}$$

где sup берется по классу $\mathfrak{M}_n^N$ всех таких моментов остановки τ, что $n \leqslant \tau \leqslant$

$\leqslant N$, и 2) в отыскании *оптимального момента остановки* (таковой в данной ситуации существует).

Рассматриваемая сейчас задача об оптимальной остановке сформулирована не в общем случае (см. далее п. 4), в котором допускается $N=\infty$ (тогда $\mathfrak{M}_n^\infty$ — это класс всех *конечных* моментов остановки $\tau \geqslant n$), а лишь для случая *конечного* «горизонта» N. Основная причина состоит в том, что этот случай разбирается сравнительно элементарно и в то же самое время в нем «работает» метод индукции назад, являющийся одним из основных приемов отыскания и цен V_n^N, и соответствующих оптимальных моментов остановки.

3. Введем последовательность $\gamma^N = (\gamma_n^N)_{0\leqslant n\leqslant N}$ следующим *искусственным* образом:

$$
\begin{aligned}
\gamma_N^N &= f_N,\\
\gamma_n^N &= \max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1}^N \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Положим также

$$
\tau_n^N = \min\bigl\{n \leqslant i \leqslant N\colon\ f_i = \gamma_i^N\bigr\}
$$

для $0\leqslant n\leqslant N$.

Следующий результат является одним из центральных в теории задач об оптимальной остановке на конечном временно́м интервале $0\leqslant n\leqslant N$; ср. [75, гл. 3], [441, гл. 2].

Теорема 1. *Последовательность $\gamma^N = (\gamma_n^N)_{n\leqslant N}$, определенная рекуррентными соотношениями* (2), *и моменты τ_n^N, $0\leqslant n\leqslant N$, обладают следующими свойствами:*

(a) $\tau_n^N \in \mathfrak{M}_n^N$;
(b) $\mathsf{E}(f_{\tau_n^N} \,|\, \mathscr{F}_n) = \gamma_n^N$;
(c) $\mathsf{E}(f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n) \leqslant \mathsf{E}(f_{\tau_n^N} \,|\, \mathscr{F}_n) = \gamma_n^N$ *для любого* $\tau \in \mathfrak{M}_n^N$;
(d) $\gamma_n^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}(f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n)$ *и, в частности,* $\gamma_0^N = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}\, f_\tau = \mathsf{E}\, f_{\tau_0^N}$;
(e) $V_n^N = \mathsf{E}\,\gamma_n^N$.

Доказательство. Для упрощения записи в этом доказательстве и до конца п. 3 будем всюду опускать индекс N и писать γ_n, V_n, $\mathfrak{M}_n$, τ_n вместо γ_n^N, V_n^N, $\mathfrak{M}_n^N$, τ_n^N.

Свойство (a) следует из определения τ_n. Свойства (b) и (c) очевидны для $n=N$. Дальше будем рассуждать индукцией назад.

Пусть эти свойства уже установлены для $n=N, N-1, \ldots, k$. Покажем, что тогда они выполнены и для $n=k-1$.

Пусть $\tau\in\mathfrak{M}_{k-1}$ и $A\in\mathscr{F}_{k-1}$. Положим $\overline{\tau} = \max(\tau, k)$. Ясно, что $\overline{\tau}\in\mathfrak{M}_k$, и тогда для $A\in\mathscr{F}_{k-1}$ с учетом того, что $\{\tau\geqslant k\}\in\mathscr{F}_{k-1}$, находим

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\bigl[I_A f_\tau\bigr] &= \mathsf{E}\bigl[I_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau\bigr] + \mathsf{E}\bigl[I_{A\cap\{\tau\geqslant k\}} f_\tau\bigr] =\\
&= \mathsf{E}\bigl[I_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_{k-1}\bigr] + \mathsf{E}\bigl[I_{A\cap\{\tau\geqslant k\}}\, \mathsf{E}(f_\tau \,|\, \mathscr{F}_{k-1})\bigr] =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{E}\big[I_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_{k-1}\big] + \mathsf{E}\big[I_{A\cap\{\tau\geqslant k\}}\, \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(f_{\tilde\tau}\,|\,\mathscr{F}_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\big)\big] \leqslant \\
&\leqslant= \mathsf{E}\big[I_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_{k-1}\big] + \mathsf{E}\big[I_{A\cap\{\tau\geqslant k\}}\, \mathsf{E}\big(\gamma_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\big)\big] \leqslant \\
&\leqslant \mathsf{E}\big[I_A \gamma_{k-1}\big],
\end{aligned} \tag{3}
$$

где последнее неравенство следует из формулы (2).

Тем самым, $\mathsf{E}(f_\tau\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) \leqslant \gamma_{k-1}$. Требуемые утверждения (b) и (c) будут установлены для $n=k-1$, если показать, что

$$
\mathsf{E}(f_{\tau_{k-1}}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) = \gamma_{k-1}. \tag{4}
$$

С этой целью обратимся к цепочке неравенств в (3) и покажем, что для $\tau=\tau_{k-1}$ на самом деле в (3) мы имеем всюду равенства.

Действительно, на множестве $\{\tau_{k-1}\geqslant k\}$ по определению τ_{k-1} имеем $\tau = \tau_k$, и поскольку по предположению индукции $\mathsf{E}(f_{\tau_k}\,|\,\mathscr{F}_k)=\gamma_k$, в формуле (3) получаем

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[I_A f_{\tau_{k-1}}\big] &= \mathsf{E}\big[I_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}\big] + \mathsf{E}\big[I_{A\cap\{\tau_{k-1}\geqslant k\}}\, \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(f_{\tau_k}\,|\,\mathscr{F}_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\big)\big] = \\
&= \mathsf{E}\big[I_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}\big] + \mathsf{E}\big[I_{A\cap\{\tau_{k-1}\geqslant k\}}\, \mathsf{E}(\gamma_k\,|\,\mathscr{F}_k)\big] = \\
&= \mathsf{E}\big[I_A \gamma_{k-1}\big],
\end{aligned}
$$

где последнее равенство следует из того, что (по определению) $\gamma_{k-1} = \max(f_{k-1}, \mathsf{E}(\gamma_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}))$ и $\gamma_{k-1} = f_{k-1}$ на $\{\tau_{k-1} = k-1\}$ и $f_{k-1} < \gamma_{k-1}$ на множестве $\{\tau_{k-1} > k-1\}$ (значит, на этом множестве $\gamma_{k-1} = \mathsf{E}(\gamma_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})$).

Итак, утверждения (b) и (c) доказаны, а следовательно, доказано и утверждение (d). Наконец, для всякого $\tau\in\mathfrak{M}_k$ из утверждения (c) следует, что

$$
\mathsf{E}\, f_\tau \leqslant \mathsf{E}\, f_{\tau_k} = \mathsf{E}\,\gamma_k,
$$

а значит, $V_k = \sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}_k} \mathsf{E}\, f_\tau = \mathsf{E}\, f_{\tau_k} = \mathsf{E}\,\gamma_k$, т. е. имеет место утверждение (e). □

Замечание 1. В приведенном доказательстве был использован тот факт, что если $\tau\in\mathfrak{M}_{k-1}$, то момент $\tilde\tau = \max(\tau, k)$ содержится в $\mathfrak{M}_k$. В рассматриваемом нами случае просто предполагается, что класс $\mathfrak{M}_k$ содержит такие моменты. В этом смысле можно сказать, что классы $\mathfrak{M}_k$, $k\leqslant N$, являются «достаточно богатыми». (См. по этому поводу конец п. 1.)

Следствие 1. *Последовательность $\gamma=(\gamma_n)_{n\leqslant N}$ является супермартингалом. При этом γ — наименьший супермартингал, мажорирующий последовательность $f=(f_n)_{n\leqslant N}$ в том смысле, что если $\tilde\gamma=(\tilde\gamma_n)_{n\leqslant N}$ есть также супермартингал и $\tilde\gamma_n\geqslant f_n$ для всех $n\leqslant N$, то $\gamma_n\leqslant\tilde\gamma_n$* ($\mathsf{P}$-п. н.), *$n\leqslant N$.*

В самом деле, то, что $\gamma=(\gamma_n)_{n\leqslant N}$ является супермартингалом, мажорирующим $f=(f_n)_{n\leqslant N}$, следует из рекуррентных соотношений (2).

Далее, ясно, что $\tilde\gamma_N\geqslant f_N$ и для $n<N$ выполняется неравенство

$$
\tilde\gamma_n \geqslant \max\big(f_n, \mathsf{E}(\tilde\gamma_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)\big). \tag{5}
$$

Поскольку $\gamma_N = f_N$, получаем, что $\widetilde{\gamma}_N \geqslant f_N$ и

$$\widetilde{\gamma}_{N-1} \geqslant \max\bigl(f_{N-1}, \mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1})\bigr) \geqslant$$
$$\geqslant \max\bigl(f_{N-1}, \mathsf{E}(\gamma_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1})\bigr) = \gamma_{N-1}.$$

Аналогичным образом показывается, что $\widetilde{\gamma}_n \geqslant \gamma_n$ для любого $n \leqslant N-1$.

Следствие 2. Результат, сформулированный в предыдущем следствии, может быть переформулирован так: *если $\gamma = (\gamma_n)_{n\leqslant N}$ есть решение рекуррентной системы уравнений*

$$\gamma_n = \max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr), \quad n < N, \tag{6}$$

$\gamma_N = f_N$, то $\gamma_n \leqslant \widetilde{\gamma}_n$, $n \leqslant N$, для всякой последовательности $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n\leqslant N}$, удовлетворяющей системе неравенств

$$\widetilde{\gamma}_n \geqslant \max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr), \quad n < N, \tag{7}$$

$\widetilde{\gamma}_N \geqslant f_N$.

Покажем, что среди всех таких решений $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n\leqslant N}$ *наименьшее* решение, обозначаемое $\gamma = (\gamma_n)_{n\leqslant N}$, существует и удовлетворяет системе равенств (6) с $\gamma_N = f_N$.

Положим $\overline{\gamma}_N = f_N$, и пусть

$$\overline{\gamma}_n = \max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\overline{\gamma}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr) \tag{8}$$

для $n < N$. Ясно, что $\overline{\gamma}_n \geqslant f_n$ для всех $n \leqslant N$ и $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_n)_{n\leqslant N}$ является супермартингалом. По предположению $\gamma = (\gamma_n)_{n\leqslant N}$ обладает свойством минимальности, значит,

$$\max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\overline{\gamma}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr) = \overline{\gamma}_n = \gamma_n. \tag{9}$$

Поэтому для $n < N$ имеем

$$\max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\overline{\gamma}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr) = \overline{\gamma}_n \geqslant \gamma_n \geqslant \max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr)$$

и для $n = N$ получаем

$$f_N = \overline{\gamma}_N \geqslant \gamma_N \geqslant f_N.$$

Следовательно, $\gamma_N = \overline{\gamma}_N = f_N$, и в силу равенства (9) для всех $n < N$ имеем

$$\gamma_n = \overline{\gamma}_n.$$

Тем самым, *наименьший супермартингал $\gamma = (\gamma_n)_{n\leqslant N}$, мажорирующий последовательность $f = (f_n)_{n\leqslant N}$*, удовлетворяет уравнениям (6) с $\gamma_N = f_N$.

Следствие 3. *Момент*

$$\tau_0^N = \min\{0 \leqslant i \leqslant N\colon\ f_i = \gamma_i^N\}$$

является оптимальным моментом остановки в классе $\mathfrak{M}_0^N$:

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}\, f_\tau = \mathsf{E}\, f_{\tau_0^N} \ (= \gamma_0^N).$$

4. Рассмотрим вопрос об обобщении теоремы 1 на случай, когда $N = \infty$. Точнее, будем предполагать, что $\mathfrak{M}_n^* \equiv \mathfrak{M}_n^\infty$ — класс всех тех *конечных* марковских моментов $\tau = \tau(\omega)$, для которых $\tau(\omega) \geqslant n$, $\omega \in \Omega$. Через $\mathfrak{M}^*$ будем обозначать класс $\mathfrak{M}_0^\infty$.

Пусть, далее, $f = (f_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ — стохастическая последовательность, заданная на $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$,

$$V_n^* = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E} f_\tau, \tag{10}$$

$$\gamma_n^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E}(f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n), \tag{11}$$

$$\tau_n^* = \inf\{k \geqslant n\colon\ f_k = \gamma_k\}. \tag{12}$$

Естественно, конечно, ожидать, что (при определенных условиях) $\gamma_n^* = \lim\limits_{N\to\infty} \gamma_n^N$ и что в формуле (2) возможен предельный переход, который тогда даст для $\gamma^* = (\gamma_n^*)$ уравнения

$$\gamma_n^* = \max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1}^* \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr). \tag{13}$$

Аналогично также естественно ожидать, что момент τ_n^*, определенный в формуле (12), является оптимальным моментом в классе $\mathfrak{M}_n^*$ в том смысле, что

$$V_n^* = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E} f_\tau = \mathsf{E} f_{\tau_n^*} \tag{14}$$

и

$$V_n^* = \mathsf{E}\,\gamma_n^*. \tag{15}$$

В общей теории оптимальных правил остановки, излагаемой, например, в книгах [75] и [441], показывается, что при определенных условиях (но не всегда!) сформулированные результаты действительно имеют место.

Отсылая за подробностями к упомянутым монографиям, приведем лишь один достаточно общий результат в этом направлении.

Теорема 2. *Пусть $f = (f_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ — стохастическая последовательность,* $\mathsf{E} \sup\limits_n f_n^- < \infty$.

1. *Последовательность $\gamma^* = (\gamma_n^*)_{n\geqslant 0}$,*

$$\gamma_n^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E}(f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n), \tag{16}$$

удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$\gamma_n^* = \max\bigl(f_n, \mathsf{E}(\gamma_{n+1}^* \,|\, \mathscr{F}_n)\bigr) \tag{17}$$

и, следовательно, является супермартингалом, мажорирующим последовательность $f = (f_n)$.

2. *Последовательность $\gamma^* = (\gamma_n^*)_{n\geqslant 0}$ является наименьшим супермартингалом, мажорирующим последовательность $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$.*

3. *Пусть* $\tau_n^* = \inf\{k \geqslant n\colon f_k = \gamma_k^*\}$. *Тогда если* $\mathsf{E}\sup\limits_n |f_n| < \infty$ *и* $\mathsf{P}(\tau_n^* < \infty) = 1$, *то* τ_n^* *является оптимальным моментом остановки:*

$$V_n^* \equiv \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E}\, f_\tau = \mathsf{E}\, f_{\tau_n^*}, \tag{18}$$

$$\gamma_n^* \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathfrak{M}_n^*} \mathsf{E}(f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathsf{E}(f_{\tau_n^*} \,|\, \mathscr{F}_n). \tag{19}$$

4. *Для каждого* $n \geqslant 0$ (P-п. н.)

$$\gamma_n^N \uparrow \gamma_n^* \tag{20}$$

при $N \to \infty$.

5. Как было отмечено выше, в случае конечного временнóго горизонта ($N < \infty$) решение задачи об оптимальной остановке может быть осуществлено методом индукции назад с последовательным вычислением величин $\gamma_N^N, \gamma_{N-1}^N, \ldots, \gamma_0^N$, что возможно, поскольку $\gamma_N^N = f_N$, а γ_n^N удовлетворяют рекуррентным соотношениям (13).

В случае же бесконечного временнóго горизонта ($N = \infty$) задача отыскания последовательности функций $\gamma = (\gamma_n)_{n \geqslant 0}$ становится более деликатной, поскольку вместо условия в момент времени N приходится обращаться к дополнительным характеризациям и свойствам цен V_n, $n \geqslant 0$. Например, иногда удается использовать при отыскании нужного решения системы уравнений (17) то соображение, что требуемое решение должно быть *наименьшим* решением из множества всех решений.

Техника решения задач об оптимальной остановке наиболее развита и продвинута в марковском случае.

Для соответствующего изложения предположим, что существует *однородный марковский процесс* $X = (x_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}_x)$ с дискретным временем $n = 0, 1, \ldots$, *фазовым* пространством состояний $(E, \mathscr{B})$ и семейством вероятностных мер P_x на $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$ для каждого начального состояния $x \in E$ (подробнее см. [126], [441]).

Пусть T — *оператор перехода* за один шаг ($Tf(x) = \mathsf{E}_x\, f(x_1)$ для измеримых функций $f = f(x_1)$, $\mathsf{E}_x\, |f(x_1)| < \infty$, $x \in E$, где E_x — усреднение по мере P_x, $x \in E$).

Пусть также $g = g(x)$ — некоторая $\mathscr{B}$-измеримая функция, $x \in E$.

В качестве рассмотренных ранее функций f_n возьмем функции $g(x_n)$, $n \geqslant 0$, и пусть $\mathsf{E}_x[\sup g^-(x_n)] < \infty$, $x \in E$. Положим

$$s(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^*} \mathsf{E}_x\, g(x_\tau), \tag{21}$$

где $\mathfrak{M}^* = \{\tau\colon \tau(\omega) < \infty,\ \omega \in \Omega\}$ — класс всех конечных марковских моментов.

Рассматриваемая задача об оптимальной остановке для марковского процесса X состоит в отыскании функции $s(x)$, оптимальных моментов τ^* (т. е. таких, что $s(x) = \mathsf{E}_x\, g(x_{\tau^*})$, $x \in E$) или ε-оптимальных моментов τ_ε^* (т. е. таких, что $s(x) - \varepsilon \leqslant \mathsf{E}_x\, g(X_{\tau_\varepsilon^*})$, $x \in E$), если таковые существуют.

Понятно, в чем состоит преимущество марковской ситуации — в этом случае рассмотренные выше условные математические ожидания $\mathsf{E}_x(\,\cdot\,|\mathscr{F}_n)$ становятся зависящими от «прошлой истории $\mathscr{F}_n$» лишь через значение процесса в момент времени n, т. е. только от x_n. В частности, рассмотренные выше функции γ_n, γ_n^N становятся лишь функциями от x_n.

Приведем марковскую версию теорем 1 и 2, которой далее (в гл. VI) мы будем пользоваться, например, при анализе опционов американского типа.

Теорема 3. *Пусть $g = g(x)$ — $\mathscr{B}(\mathbb{R})$-измеримая функция, $\mathsf{E}_x\, g^-(x_k) < \infty$, $x \in E$, $k \leqslant N$,*

$$s_N(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_x\, g(x_\tau), \tag{22}$$

где $\mathfrak{M}_0^N = \{\tau : 0 \leqslant \tau \leqslant N\}$, $N \geqslant 0$.

Пусть

$$Qg(x) = \max\bigl(g(x), Tg(x)\bigr) \tag{23}$$

и

$$\tau_0^N = \min\bigl\{0 \leqslant m \leqslant N\colon\ s_{N-m}(x_m) = g(x_m)\bigr\}. \tag{24}$$

Тогда

(a)

$$s_N(x) = Q^N g(x); \tag{25}$$

(b)

$$s_N(x) = \max\bigl(g(x), Ts_{N-1}(x)\bigr), \tag{26}$$

где $s_0(x) = g(x)$;

(c) *в классе $\mathfrak{M}_0^N$ марковский момент τ_0^N является оптимальным:*

$$\mathsf{E}_x\, g(x_{\tau_0^N}) = s_N(x), \quad x \in E; \tag{27}$$

(d) *последовательность $\gamma^N = (\gamma_m^N, \mathscr{F}_m)_{m \leqslant N}$, $\gamma_m^N = s_{N-m}(x_m)$, образует супермартингал при каждом $N \geqslant 0$.*

Доказательство этой теоремы и ее обобщений дается во второй главе монографии [441], посвященной «марковскому подходу» к задачам об оптимальной остановке. Ее можно, конечно, вывести и как частный случай из доказанной выше теоремы 1, за исключением разве лишь того, что все равно придется отдельно исследовать структуру операторов $Qg(x)$ и их итераций $Q^n g(x)$. (См. по этому поводу подробнее § 2.2 в книге [441].) □

Из результатов приведенной теоремы вытекает следующая интерпретация структуры оптимальных моментов остановки в классе $\mathfrak{M}_0^N = \{\tau : 0 \leqslant \tau \leqslant N\}$ для фиксированного $N < \infty$.

Пусть

$$D_n^N = \{x\colon\ s_{N-n}(x) = g(x)\}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \tag{28}$$

и
$$C_n^N = E \setminus D_n^N. \tag{29}$$

В соответствии с теоремой 3 оптимальный момент τ_0^N может быть записан в виде
$$\tau_0^N = \min\{0 \leqslant n \leqslant N\colon\ x_n \in D_n^N\}. \tag{30}$$

Иначе говоря, последовательность областей $D_0^N, D_1^N, \ldots, D_N^N = E$ образует последовательность *областей остановки* наблюдений, а последовательность областей $C_0^N, C_1^N, \ldots, C_N^N = \varnothing$ образует последовательность *областей продолжения* наблюдений.

Заметим, что
$$D_0^N \subseteq D_1^N \subseteq \ldots \subseteq D_N^N = E$$

и
$$C_0^N \supseteq C_1^N \supseteq \ldots \supseteq C_N^N = \varnothing.$$

Поэтому если $x_0 \in D_0^N$, то наблюдения не совершаются и $\tau_0^N = 0$. Если же $x_0 \in C_0^N$, то производится наблюдение, и если $x_1 \in D_1^N$, то происходит остановка наблюдений, а если $x_1 \in C_1^N$, то совершается следующее наблюдение и т. д. В заключительный (терминальный) момент времени N наблюдение заведомо заканчивается (в этом случае $D_N^N = E$).

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что в качественном отношении мало что изменится, если вместо цены $s_N(x)$, определяемой формулой (21), рассматривать цены «с дисконтированием и платой за наблюдения»:

$$s_N(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_x \left[\beta^\tau g(x_\tau) - \sum_{k=1}^{\tau} c(x_{k-1}) \right] \tag{21$'$}$$

(если $\tau = 0$, то выражение в квадратных скобках считается равным $g(x)$; $0 < \beta \leqslant 1$, $c(x) \geqslant 0$ для $x \in E$).

Формула (25) сохраняет свою силу для

$$Qg(x) = \max\bigl(g(x), \beta Tg(x) - c(x)\bigr). \tag{23$'$}$$

Реккуррентное уравнение (26) примет следующий вид:

$$s_N(x) = \max\bigl(g(x), \beta T s_{N-1}(x) - c(x)\bigr), \tag{26$'$}$$

$s_0(x) = g(x)$. Подробнее см. [441, гл. II].

Пример 1. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ — бернуллиевские величины, $\mathsf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathsf{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$.

Пусть $x_n = x + (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)$, $x \in E = \{0, \pm 1, \ldots\}$ и

$$s_N(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_x\, \beta^\tau x_\tau.$$

Если $\beta=1$, то $Qg(x)=g(x)$ для $g(x)=x$ при всех $x\in E$ и в качестве оптимального момента остановки можно взять момент $\tau_0^N\equiv 0$.

Если же $0<\beta<1$, то для функции $g(x)=x$ находим, что $Q^n g(x)=x$ при $x=0,1,2,\dots$ и $Q^n g(x)=\beta^n x$ при $x=-1,-2,\dots$ Поэтому здесь $s_N(x)=$ $=\max(x,\beta^N x)$. При этом оптимальный момент равен

$$\tau_0^N=\min\bigl\{0\leqslant n\leqslant N:\ x_n\in\{0,1,2,\dots\}\bigr\}.$$

(Если $x_n\in\{-1,-2,\dots\}$ при всех $0\leqslant n\leqslant N$, то τ_0^N полагается равным N.)

Заметим, что в случае $0<\beta<1$ выполняется равенство

$$s_N(x)\uparrow x^+=\max(0,x),\quad N\to\infty.$$

6. Обратимся теперь к задаче об оптимальной остановке в случае бесконечного горизонта ($N=\infty$). Положим

$$s(x)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^*}\mathsf{E}_x\,g(x_\tau),\tag{31}$$

где $\mathfrak{M}^*=\{\tau:0\leqslant\tau(\omega)<\infty\}$ — класс всех конечных марковских моментов.

Для формулирования соответствующей теоремы относительно структуры *цены* $s=s(x)$, $x\in E$, и оптимальных (или ε-оптимальных) моментов остановки целесообразно напомнить следующее

Определение (см., например, [441]). Функция $f=f(x)$, $\mathsf{E}_x\,|f(x_1)|<\infty$, $x\in$ $\in E$, удовлетворяющая свойству

$$f(x)\geqslant Tf(x)\tag{32}$$

называется *эксцессивной функцией* для однородного марковского процесса $X=(x_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P}_x)_{n\geqslant 0}$, $x\in E$.

Если к тому же $f(x)\geqslant g(x)$, то функция $f=f(x)$ называется *эксцессивной мажорантой* функции $g=g(x)$.

Понятно, что если функция $f=f(x)$ есть эксцессивная мажоранта функции $g=g(x)$, то

$$f(x)\geqslant\max\bigl(g(x),Tf(x)\bigr).\tag{33}$$

Следующая теорема раскрывает роль эксцессивных мажорант в задачах об оптимальной остановке однородных марковских процессов

$$X=(x_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P}_x)_{n\geqslant 0},\quad x\in E.$$

Теорема 4. *Пусть функция $g=g(x)$ такова, что $\mathsf{E}_x\bigl[\sup_n g^-(x_n)\bigr]<\infty$, $x\in E$. Тогда*

(a) *цена $s=s(x)$ является наименьшей эксцессивной мажорантой функции $g=g(x)$);*

(b) *цена* $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty} Q^n g(x)$ $(=\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x))$, *и* $s(x)$ *удовлетворяет уравнению* (ср. с (33))

$$s(x)=\max\bigl(g(x), Ts(x)\bigr); \tag{34}$$

(c) *если* $\mathsf{E}_x\bigl[\sup\limits_n |g(x_n)|\bigr]<\infty$, $x\in E$, *то для каждого* $\varepsilon>0$ *момент*

$$\tau_\varepsilon^*=\inf\bigl\{n\geqslant 0:\ s(x_n)\leqslant g(x_n)+\varepsilon\bigr\} \tag{35}$$

является ε*-оптимальным, т. е.*

$$s(x)-\varepsilon\leqslant \mathsf{E}_x\, g(x_{\tilde\tau_\varepsilon}),\quad x\in E; \tag{36}$$

(d) *пусть* $\mathsf{E}_x\bigl[\sup\limits_n |g(x_n)|\bigr]<\infty$ *и*

$$\tau^*=\inf\bigl\{n\geqslant 0:\ s(x_n)=g(x_n)\bigr\},$$

т. е. $\tau^*=\tau_0^*$; *если* $\mathsf{P}_x(\tau^*<\infty)=1$, $x\in E$, *то момент* τ^* *является оптимальным:*

$$s(x)=\mathsf{E}_x\, g(x_{\tau^*}),\quad x\in E; \tag{37}$$

(e) *если множество* E *конечно, то момент* τ^* *является оптимальным.*

По поводу доказательства этой теоремы и ее применений см. гл. 2 в [441]. В разделе 5 будут даны применения к расчетам в опционах американского типа.

Замечание 3. По аналогии с (21′) естественно рассмотреть также задачу об оптимальной остановке при наличии дисконтирования ($0<\beta\leqslant 1$) и платы за наблюдение ($c(x)\geqslant 0$).

Положим

$$s(x)=\sup \mathsf{E}_x\Biggl[\beta^\tau g(x_\tau)-\sum_{k=0}^{\tau-1}\beta^k c(x_k)\Biggr], \tag{31′}$$

где sup берется по классу

$$\mathfrak{M}^*_{(\beta,c)}=\Biggl\{\tau\in\mathfrak{M}^*:\ \mathsf{E}_x\sum_{k=0}^{\tau-1}\beta^k c(x_k)<\infty,\ x\in E\Biggr\},$$

и пусть $g(x)\geqslant 0$.

В этих предположениях цена $s(x)$ является (см. [441, гл. 2]) наименьшей (β,c)-эксцессивной мажорантой функции $g(x)$, т. е. наименьшей среди таких функций $f(x)$, что $f(x)\geqslant g(x)$ и

$$f(x)\geqslant \beta Tf(x)-c(x). \tag{33′}$$

При этом

$$s(x)=\max\bigl(g(x), \beta Ts(x)-c(x)\bigr) \tag{34′}$$

и

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} Q_{(\beta,c)} g(x),$$

где

$$Q_{(\beta,c)} g(x) = \max\bigl(g(x), \beta Tg(x) - c(x)\bigr).$$

Пример 2. Пусть $x_n = x + (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)$, $x \in E = \{0, \pm 1, \ldots\}$ и $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ — бернуллиевская последовательность из примера 1. Для $x \in E$ положим

$$s(x) = \sup \mathsf{E}_x (|x_\tau| - c\tau), \tag{38}$$

где sup берется по тем моментам остановки τ, для которых $\mathsf{E}_x\, \tau < \infty$. Для таких τ имеем

$$\mathsf{E}_x\, x_\tau^2 = x^2 + \mathsf{E}_x\, \tau \tag{39}$$

и, значит,

$$\mathsf{E}_x (|x_\tau| - c\tau) = cx^2 + \mathsf{E}_x (|x_\tau| - c|x_\tau|^2). \tag{40}$$

Поэтому

$$s(x) = cx^2 + \sup \mathsf{E}_x\, g(x_\tau),$$

где $g(x) = |x| - c|x|^2$ и sup берется по тем τ, для которых $\mathsf{E}_x\, \tau < \infty$.

Поскольку функция $g(x)$ достигает максимального значения при $x = \pm\frac{1}{2c}$, в случае целочисленных $\frac{1}{2c}$ видим, что

$$s(x) \leqslant cx^2 + \frac{1}{4c}. \tag{41}$$

Определим момент $\tau_c = \inf\Bigl\{n : |x_n| = \frac{1}{2c}\Bigr\}$. Если $|x| \leqslant \frac{1}{2c}$, то заведомо $|x_{\tau_c}| \leqslant \leqslant \frac{1}{2c}$ и, значит,

$$\frac{1}{(2c)^2} \geqslant \mathsf{E}_x\, x^2_{(\tau_c \wedge N)} = x^2 + \mathsf{E}_x (\tau_c \wedge N).$$

Отсюда предельным переходом по $N \to \infty$ (по теореме о монотонной сходимости) находим, что $\mathsf{E}_x\, \tau_c \leqslant \frac{1}{(2c)^2} < \infty$. Поэтому для τ_c имеет место соотношение (39), из которого следует, что если $|x| \leqslant \frac{1}{2c}$, то на самом деле $\mathsf{E}_x\, \tau_c = = \frac{1}{(2c)^2} - x^2$.

Поскольку для τ_c и $|x| \leqslant \frac{1}{2c}$ имеем

$$\mathsf{E}_x (|x_{\tau_c}| - c\tau_c) = \frac{1}{2c} - c\left(\frac{1}{(2c)^2} - x^2\right) = cx^2 + \frac{1}{4c},$$

из формулы (41) видим, что момент τ_c является (для всех тех x, для которых $|x| \leqslant \frac{1}{2c}$) оптимальным моментом остановки.

§ 2b. Полные и неполные рынки. I. Супермартингальная характеризация цен хеджирования

1. Вернемся к изложенному в § 1c доказательству формулы (8) для цены хеджирования на неполных рынках.

Как было отмечено, доказательство этой формулы основывается на следующих двух фактах: *супермартингальном свойстве* последовательности $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$ относительно любой меры из семейства $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ и возможности получения *опционального разложения* для $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$.

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о супермартингальном свойстве не только последовательности $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$, определенной формулами (12) в § 1c, но и более общей последовательности, задаваемой приводимой ниже формулой (1), что позволяет исследовать вопросы, связанные с хеджированием американского типа (см. замечание в § 1a).

Вопрос о справедливости опционального разложения для $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$ рассматривается в § 2d.

2. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}, \mathsf{P})$ — исходное вероятностное пространство, и пусть (B, S) — рынок, состоящий из банковского счета $B = (B_n)_{n\leqslant N}$, который считаем таким, что $B_n \equiv 1$, и d-мерной акции $S = (S^1, \ldots, S^d)$, $S^i = (S^i_n)_{n\leqslant N}$. Будем полагать $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$.

Пусть $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ — непустое множество мартингальных мер, эквивалентных мере P, и $f = (f_0, f_1, \ldots, f_N)$ — последовательность таких $\mathscr{F}_n$-измеримых неотрицательных функций f_n, $n \leqslant N$, что $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, f_k < \infty$, $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, $0 \leqslant k \leqslant N$.

Определим
$$Y_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\ \tau\in\mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(f_\tau \mid \mathscr{F}_n). \tag{1}$$

Теорема. *Относительно каждой меры из $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ последовательность $Y = (Y_n)_{n\leqslant N}$ является супермартингалом.*

Доказательство в идейном отношении такое же, как и проведенное в предшествующем параграфе доказательство того, что последовательность $\gamma = (\gamma_n)_{n\leqslant N}$ является супермартингалом.

Реализация же этого доказательства проходит следующим образом.

Выберем в множестве $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ некоторую («базисную») меру. Чтобы не вводить новых обозначений, предположим, что ею является (мартингальная) мера P, и будем проверять свойство супермартингальности Y относительно меры P.

Если $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, то обозначим
$$\widetilde{Z}_N = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}, \quad \widetilde{Z}_n = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}} | \mathscr{F}_n, \quad \mathsf{P}_n = \mathsf{P} | \mathscr{F}_n.$$

При $n = 0$ считаем, что $\widetilde{Z}_0 = 1$.

Определим

$$\widetilde{\rho}_n = \frac{\widetilde{Z}_n}{\widetilde{Z}_{n-1}}. \tag{2}$$

Поскольку $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, при любом $n \leqslant N$ имеем

$$\mathsf{P}(\widetilde{Z}_{n-1} > 0) = \widetilde{\mathsf{P}}(\widetilde{Z}_{n-1} > 0) = 1.$$

Если положить $\widetilde{m}_n = \widetilde{\rho}_n - 1$, $\widetilde{M}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{m}_k$, $\widetilde{M}_0 = 0$, то получим, что

$$\Delta \widetilde{Z}_n = \widetilde{Z}_{n-1}\, \Delta \widetilde{M}_n. \tag{3}$$

Из формулы (3) можно заключить, что

$$\widetilde{Z}_n = \mathscr{E}(\widetilde{M})_n \equiv \prod_{k=1}^{n} (1 + \Delta \widetilde{M}_k) = \prod_{k=1}^{n} \widetilde{\rho}_k, \tag{4}$$

где $\mathscr{E}(\widetilde{M})$ есть стохастическая экспонента (см. § 1a гл. II).

Из всего сказанного следует, что, взяв в качестве «базисной» меру P, мы можем меру $\widetilde{\mathsf{P}}$ и ее ограничения $\widetilde{\mathsf{P}}_n$, $n \leqslant N$, полностью характеризовать любой из последовательностей $(\widetilde{Z}_n)$, $(\widetilde{M}_n)$ и $(\widetilde{\rho}_n)$.

По формуле Байеса ((4), § 3a гл. V) для всякого момента остановки τ (относительно $(\mathscr{F}_n)$) и $n \leqslant N$ имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n) = \frac{1}{\widetilde{Z}_n}\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(f_\tau \widetilde{Z}_\tau \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(\widetilde{\rho}_{n+1} \ldots \widetilde{\rho}_\tau f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n) = \\ = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(\overline{\rho}_1 \ldots \overline{\rho}_n \cdot \overline{\rho}_{n+1} \ldots \overline{\rho}_\tau f_\tau \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(f_\tau \overline{Z}_\tau \,|\, \mathscr{F}_n),\end{aligned} \tag{5}$$

где $\overline{\rho}_1 = \ldots = \overline{\rho}_n = 1$, $\overline{\rho}_k = \widetilde{\rho}_k$, $k > n$, и $\overline{Z}_k = \overline{\rho}_1 \ldots \overline{\rho}_k$.

Интересно отметить, что если определить меру $\overline{\mathsf{P}}$ соотношением $d\overline{\mathsf{P}} = \overline{Z}_N\, d\mathsf{P}$, то найдем, что

$$\overline{\mathsf{P}}(A) = \begin{cases} \mathsf{P}(A), & A \in \mathscr{F}_k,\ k \leqslant n, \\ \widetilde{\mathsf{P}}(A), & A \in \mathscr{F}_k,\ k > n. \end{cases} \tag{6}$$

Ясно, что $\overline{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$.

С учетом введенных обозначений определение (1) может быть переписано в виде

$$Y_n = \operatorname{ess\,sup} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(f_\tau \overline{Z}_\tau \,|\, \mathscr{F}_n),$$

где ess sup берется по классу $\mathfrak{M}_n^N$ таких моментов остановки τ, что $n \leqslant \tau \leqslant N$, и по P-мартингалам $\overline{Z} \in \mathscr{Z}_n^N$, где $\mathscr{Z}_n^N$ — класс тех положительных мартингалов $\overline{Z} = (\overline{Z}_k)_{k \leqslant N}$, у которых $\overline{Z}_0 = \ldots = \overline{Z}_n = 1$, или, что равносильно, $\overline{Z}_0 = \overline{\rho}_1 = \ldots = \overline{\rho}_n = 1$.

Множества $\mathfrak{M}_k^N$, $\mathscr{Z}_k^N$, $k \leqslant N$, удовлетворяют, очевидно, соотношениям

$$\mathfrak{M}_k^N \subseteq \mathfrak{M}_{k-1}^N, \quad \mathscr{Z}_k^N \subseteq \mathscr{Z}_{k-1}^N,$$

играющим существенную роль при установлении свойства супермартингальности последовательности $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)_{n\leqslant N}$.

Из определения ess sup по множествам $\mathfrak{M}_k^N$, $\mathscr{Z}_k^N$ вытекает (см., например, [75, гл. 1]), что найдется такая последовательность моментов $\tau^{(i)}$ и мартингалов $\overline{Z}^{(i)}$ из этих множеств, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_k^N,\,\overline{Z}\in\mathscr{Z}_k^N} \mathsf{E}(f_\tau \overline{Z}_\tau \,|\, \mathscr{F}_k) = \lim_i\uparrow \mathsf{E}(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}^{(i)}_{\tau^{(i)}} \,|\, \mathscr{F}_k), \tag{7}$$

где $\lim\limits_i\uparrow$ означает предел возрастающей последовательности.

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_\mathsf{P}(Y_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) &= \mathsf{E}_\mathsf{P}\Bigl(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_k^N,\,\overline{Z}\in\mathscr{Z}_k^N} \mathsf{E}(f_\tau \overline{Z}_\tau \,|\, \mathscr{F}_k) \Bigm| \mathscr{F}_{k-1}\Bigr) = \\
&= \mathsf{E}_\mathsf{P}\Bigl(\lim_i\uparrow \mathsf{E}_\mathsf{P}(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}^{(i)}_{\tau^{(i)}} \,|\, \mathscr{F}_k) \Bigm| \mathscr{F}_{k-1}\Bigr) = \\
&= \lim_i\uparrow \mathsf{E}_\mathsf{P}(f_{\tau^{(i)}} \overline{Z}^{(i)}_{\tau^{(i)}} \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) \leqslant \\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_k^N,\,\overline{Z}\in\mathscr{Z}_k^N} \mathsf{E}_\mathsf{P}(f_\tau \overline{Z}_\tau \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) \leqslant \\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_{k-1}^N,\,\overline{Z}\in\mathscr{Z}_{k-1}^N} \mathsf{E}_\mathsf{P}(f_\tau \overline{Z}_\tau \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) = Y_{k-1},
\end{aligned}$$

что и устанавливает супермартингальное свойство ($\mathsf{E}_\mathsf{P}(Y_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) \leqslant Y_{k-1}$). Теорема доказана. □

Замечание 1. Результат теоремы 1 может быть распространен и на тот случай «управлений с остановкой», когда вместо f_τ рассматриваются функционалы вида $\sum\limits_{k=1}^{\tau} \alpha_k\, \Delta g_k + f_\tau$, где $g = (g_0, g_1, \ldots, g_N)$ — некоторая последовательность $\mathscr{F}_n$-измеримых функций g_n, а $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ — «управление», принадлежащее достаточно «богатому» классу предсказуемых последовательностей. (В этой связи см. п. 2 в § 1a.)

§ 2c. Полные и неполные рынки. II. Основные формулы для цены хеджирования

1. Основная формула для цены $\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P})$ хеджирования европейского типа на безарбитражном (B, S)-рынке утверждает (§ 1c), что

$$\mathbb{C}^*(f_N; \mathsf{P}) = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} B_0\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, \frac{f_N}{B_N}. \tag{1}$$

Обратимся теперь к более сложному финансовому инструменту — хеджированию американского типа на (B, S)-рынке, предполагая, что *множество мартингальных мер* $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ *непусто*.

Как уже не раз отмечалось, при рассмотрении, например, опционов американского типа приходится предполагать, что задана не одна платежная функция f_N, а целая система функций $f=(f_n)_{n\leqslant N}$, смысл которых состоит в следующем: если покупатель предъявляет опцион к исполнению в момент времени n, то соответствующая выплата (продавцом покупателю) определяется $\mathscr{F}_n$-измеримой функцией $f_n=f_n(\omega)$.

При этом, конечно, продавец опциона должен выбирать только такие стратегии π, для которых капитал $X^\pi=(X_n^\pi)_{n\leqslant N}$ обладает тем свойством, что для *любого* момента остановки $\tau=\tau(\omega)$, выбираемого покупателем в качестве момента предъявления опциона к исполнению, должно быть выполнено *условие хеджирования*

$$X_\tau^\pi \geqslant f_\tau \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{2}$$

гарантирующее соблюдение продавцом контрактных условий.

2. Чтобы уточнить постановку соответствующих задач хеджирования, введем ряд определений.

Следуя § 2a, будем обозначать $\mathfrak{M}_n^N=\{\tau=\tau(\omega)\colon n\leqslant\tau(\omega)\leqslant N,\ \omega\in\Omega\}$.

Если $\pi=(\beta,\gamma)$, $\beta=(\beta_n)_{n\leqslant N}$, $\gamma=(\gamma_n)_{n\leqslant N}$ — портфель ценных бумаг с капиталом

$$X_n^\pi=\beta_n B_n+\gamma_n S_n, \quad n\leqslant N, \tag{3}$$

то будем предполагать, что этот портфель является *самофинансируемым* в смысле выполнения следующего «балансового» условия:

$$\Delta X_n^\pi=\beta_n\Delta B_n+\gamma_n\Delta S_n-\Delta C_n, \tag{4}$$

где $C=(C_n)_{n\geqslant 0}$ — такой неубывающий процесс, что $C_0=0$ и C_n — $\mathscr{F}_n$-измеримые величины. (Ср. со случаем с «потреблением» в § 1a, гл. V.)

Для того чтобы подчеркнуть зависимость капитала X_n^π от «потребления», будем его обозначать (как и в § 1c) через $X_n^{\pi,C}$.

Определение 1. *Верхней ценой хеджирования американского типа* (системы $\mathscr{F}_n$-измеримых платежных функций f_n, $n\leqslant N$) будем называть величину

$$\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P})=\inf\{x\colon \exists\,(\pi,C),\ X_0^{\pi,C}=x \text{ и } X_\tau^{\pi,C}\geqslant f_\tau\ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\ \forall\,\tau\in\mathfrak{M}_0^N\}. \tag{5}$$

Определение 2. Стратегия (π,C) называется *совершенной*, если $X_n^{\pi,C}\geqslant f_n$ для любого $n\leqslant N$ и $X_N^{\pi,C}=f_N$ (P-п. н.).)

Теорема 1 (основная формула для цены хеджирования американского типа). *Пусть $\mathscr{P}(\mathsf{P})\neq\varnothing$ и $f=(f_n)_{n\leqslant N}$ — такая последовательность неотрицательных платежных функций, что $\sup\limits_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})}\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\dfrac{f_n}{B_n}<\infty$, $n\leqslant N$.*

Тогда для верхней цены справедливо равенство

$$\boxed{\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P})=\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\ \tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\frac{f_\tau}{B_\tau}}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Все необходимое для доказательства этой формулы было подготовлено предшествующим изложением.

Как и в случае хеджирования европейского типа, установим сначала неравенство

$$\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\ \tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_\tau}{B_\tau} \leqslant \widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P}). \tag{8}$$

Если множество хеджей пусто, то $\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P})=\infty$ (по определению 1), и формула (8) тогда очевидна.

Пусть теперь π — некоторый самофинансируемый хедж (с «потреблением» C), удовлетворяющий условию $X_0^{\pi,C}=x<\infty$.

По аналогии с формулой (9) из § 1с находим, что для всякого $\tau\in\mathfrak{M}_0^N$ выполняется равенство

$$\frac{f_\tau}{B_\tau} \leqslant \frac{X_\tau^{\pi,C}}{B_\tau} = \frac{x}{B_0}+\sum_{k=1}^{\tau}\gamma_k\,\Delta\biggl(\frac{S_k}{B_k}\biggr)-\sum_{k=1}^{\tau}\frac{\Delta C_k}{B_{k-1}}. \tag{9}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\,\Delta\biggl(\frac{S_k}{B_k}\biggr)\geqslant-\frac{x}{B_0}.$$

Поэтому согласно утверждению 2 леммы из § 1с гл. II последовательность

$$\biggl(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\,\Delta\biggl(\frac{S_k}{B_k}\biggr)\biggr)_{n\leqslant N}$$

является мартингалом относительно любой из мер $\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})$.

Применяя к этому мартингалу теорему Дуба об остановке (см. § 3а гл. V), из формулы (9) находим, что

$$\sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_\tau}{B_\tau} \leqslant \frac{x}{B_0}, \tag{10}$$

и, следовательно, имеет место формула (8).

Более сложно доказывается, что в формуле (8) справедливо и противоположное неравенство, для чего достаточно указать такой портфель $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ и такое «потребление» $\widetilde{C}$, что для капитала $X^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ выполнены «балансовые» условия

$$\Delta X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n\,\Delta B_n+\widetilde{\gamma}_n\,\Delta S_n-\Delta\widetilde{C}_n,\quad n\leqslant N, \tag{11}$$

начальный капитал равен

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}),\ \tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_\tau}{B_\tau} \tag{12}$$

и (P-п. н.)

$$X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_\tau,\quad \forall\,\tau\in\mathfrak{M}_0^N. \tag{13}$$

С этой целью образуем последовательность $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n)_{n \leqslant N}$,

$$\widetilde{Y}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}),\ \tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right). \tag{14}$$

Из теоремы в § 2b следует, что по отношению к любой мере $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ последовательность $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n)_{n \leqslant N}$ является *супермартингалом*. А из теоремы из § 2d вытекает справедливость для супермартингала $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n)_{n \leqslant N}$ *опционального* разложения (P-п. н. для каждой меры $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$)

$$\widetilde{Y}_n = \widetilde{Y}_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\gamma}_k \, \Delta\left(\frac{S_n}{B_n} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta \widetilde{C}_k}{B_{k-1}}, \tag{15}$$

где $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n \leqslant N}$ — некоторая предсказуемая последовательность и $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_n)_{n \leqslant N}$ — такая неубывающая последовательность, что $\widetilde{C}_0 = 0$ и $\widetilde{C}_n$ — $\mathscr{F}_n$-измеримые величины.

Найдя из разложения (15) $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{C}$, определим затем $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)_{n \leqslant N}$, полагая

$$\widetilde{\beta}_n = \widetilde{Y}_n - \widetilde{\gamma}_n \frac{S_n}{B_n}. \tag{16}$$

Для стратегии $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ ее капитал равен

$$X_n^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n B_n + \widetilde{\gamma}_n S_n, \tag{17}$$

и в силу формулы (15) имеет место «балансовое» условие (11). Поскольку $X_n^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = B_n \widetilde{Y}_n$, из формулы (14) для капитала $X_n^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}}$ имеем следующее представление:

$$X_n^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}),\ \tau \in \mathfrak{M}_n^N} B_n \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right). \tag{18}$$

Из этой формулы заключаем, что

1) начальный капитал стратегии $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ определяется формулой (12);
2) стратегия $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ является *хеджирующей* в том смысле, что $X_n^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} \geqslant f_n$, $n \leqslant N$, или, что равносильно, в смысле выполнения свойства (13);
3) стратегия $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$ обладает следующим свойством *воспроизводимости*: $X_N^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = f_N$ (P-п. н.). □

Теорема доказана, и в процессе ее доказательства установлено также следующее предложение (ср. с теоремой 2 в § 1c).

Теорема 2 (основные формулы для хеджирования, потребления и капитала)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда найдутся такой хедж* $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ *и такое потребление* $\widetilde{C}$, *что соответствующий капитал* $X_n^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n B_n + \widetilde{\gamma}_n S_n$ *эволюционирует в соответствии с «балансовыми» условиями* (11), *при этом* $X_0^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}}$ *определяется формулой* (12), *динамика* $X_n^{\widetilde{\pi}, \widetilde{C}}$ *определяется формулой* (18), *компоненты* $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)$ *и потребление* $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_n)$ *находятся из опционального разложения* (15), *а* $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)$ — *из формулы* (16).

3. В связи с предположением $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$, сделанным в теоремах 1 и 2 этого параграфа, и предположением безарбитражности в теоремах 1 и 2 в § 1b, отметим следующее обстоятельство (на примере хеджирования в опционах).

Обычное определение *безарбитражности* (см. определение 2 в § 2a гл. V) «привязано» к некоторому конкретному моменту N, который, скажем, в случае опционов европейского типа является моментом предъявления опциона к исполнению.

В случае же опционов американского типа приходится уже иметь дело не с конкретным моментом N, а с целым классом $\mathfrak{M}_0^N$ моментов остановки τ, и поэтому в теоремах 1 и 2 вместо предположения $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$ логичнее было бы предполагать, что рынок является *безарбитражным в сильном смысле* (см. определение 3 в § 2a гл. V).

В рассматриваемом случае дискретного времени ($n \leqslant N < \infty$) и конечного числа акций ($d < \infty$) понятия «безарбитражности», «безарбитражности в сильном смысле» и «$\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$» равносильны согласно расширенной версии первой фундаментальной теоремы (§ 1e гл. V).

Объяснение же того, что в формулировке теоремы предпочтение было отдано условию $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$, состоит в следующем.

Во-первых, условие $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$ часто можно проверить (в том числе и в случае непрерывного времени); во-вторых, термин «безарбитражность в сильном смысле» не является широко используемым, и вопрос об эквивалентности различных определений безарбитражности и условия $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$, особенно в случае непрерывного времени, является далеко не простым. (См. по этому поводу далее § 1a, 1c гл. VII.)

4. С точки зрения продавца того или иного опциона американского типа, его стратегия (π, C) должна быть, прежде всего, такой, чтобы удовлетворялись контрактные условия. Это накладывает на капитал $X^{\pi,C}$ то ограничение, что для каждого $\tau \in \mathfrak{M}_0^N$ должно быть выполнено условие хеджирования: $X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_\tau$ (P-п. н.).

Естественно теперь задаться вопросом о том, каким должен быть момент $\tau = \tau(\omega)$, в который покупателю *разумно* предъявлять опцион к исполнению.

Будем рассматривать случай *безарбитражного полного* рынка, что в интересующей нас ситуации (дискретное время $n \leqslant N < \infty$, число акций $d < \infty$) равносильно существованию единственной мартингальной меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ (вторая фундаментальная теорема).

Прежде чем дать ответ на поставленный вопрос, переформулируем и уточним результаты теорем 1 и 2 для интересующего нас сейчас случая.

Теорема 3. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}}$ — *единственная мартингальная мера* ($|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1$) *и* $f = (f_n)_{n \leqslant N}$ — *последовательность неотрицательных платежных функций с* $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \dfrac{f_n}{B_n} < \infty$, $n \leqslant N$.

1. *Для верней цены выполняется равенство*

$$\boxed{\widetilde{\mathbb{C}}(f_N;\mathsf{P}) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_\tau}{B_\tau}}\,. \tag{19}$$

2. *Существует самофинансируемая стратегия* $(\widetilde{\pi},\widetilde{C})$*, капитал которой* $X^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ *удовлетворяет «балансовому» условию*

$$\Delta X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \widetilde{\beta}_n\,\Delta B_n + \widetilde{\gamma}_n\,\Delta - \Delta\widetilde{C}_n; \tag{20}$$

$$X_0^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_\tau}{B_\tau} \quad (=\widetilde{\mathbb{C}}^*(f_N;\mathsf{P})); \tag{21}$$

$$X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \geqslant f_\tau \quad \forall\,\tau\in\mathfrak{M}_0^N. \tag{22}$$

Динамика капитала $X^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}$ *определяется формулами*

$$X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = B_n \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\biggl(\frac{f_\tau}{B_\tau}\,\bigg|\,\mathscr{F}_n\biggr). \tag{23}$$

3. *Компоненты* $\widetilde{\gamma}=(\widetilde{\gamma}_n)$ *и* $\widetilde{C}=(\widetilde{C}_n)$ *определяются из разложения Дуба супермартингала* $\widetilde{Y}=(\widetilde{Y}_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}})_{n\leqslant N}$,

$$\widetilde{Y}_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\biggl(\frac{f_\tau}{B_\tau}\,\bigg|\,\mathscr{F}_n\biggr),$$

которое имеет следующий вид:

$$\widetilde{Y}_n = \widetilde{Y}_0 + \sum_{k=1}^n \widetilde{\gamma}_k\,\Delta\biggl(\frac{S_k}{B_k}\biggr) - \widetilde{C}_n, \tag{24}$$

а компоненты $\widetilde{\beta}=(\widetilde{\beta}_n)_{n\leqslant N}$ *— из формул*

$$\widetilde{\beta}_n = \widetilde{Y}_n - \widetilde{\gamma}_n\frac{S_n}{B_n}. \tag{25}$$

4. *В задаче об оптимальной остановке*

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_\tau}{B_\tau} \tag{26}$$

момент остановки

$$\widetilde{\tau} = \min\biggl\{0\leqslant n\leqslant N\colon\ Y_n = \frac{f_n}{B_n}\biggr\} \tag{27}$$

является оптимальным:

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_\tau}{B_\tau} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,\frac{f_{\widetilde{\tau}}}{B_{\widetilde{\tau}}}. \tag{28}$$

При этом момент $\widetilde{\tau}$ *обладает тем свойством, что*

$$X_{\widetilde{\tau}}^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} = f_{\widetilde{\tau}} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{29}$$

а последовательность $(\widetilde{Y}_n)_{n\leqslant N}$ *является наименьшим* $\widetilde{\mathsf{P}}$*-супермартингалом, мажорирующим последовательность* $(f_n)_{n\leqslant N}$.

Доказательство. Утверждения 1—3 следуют из теорем 1 и 2. Нужно лишь отметить, что в силу единственности мартингальной меры здесь нет необходимости обращаться к опциональному разложению, а достаточно воспользоваться непосредственно *разложением Дуба* супермартингала $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})_{n\leqslant N}$ (см. § 1b гл. II):

$$\widetilde{Y}_n = \widetilde{M}_n - \widetilde{C}_n. \tag{30}$$

Из расширенного варианта второй фундаментальной теоремы (§ 4f гл. V) следует, что мартингал $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})$ может быть представлен в виде

$$\widetilde{M}_n = \widetilde{Y}_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\gamma}_k \, \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right), \tag{31}$$

что вместе с равенством (30) приводит к требуемому представлению (24).

Что же касается утверждения 4, то оно представляет частный случай результатов, сформулированных в следствиях 1 и 3 к теореме 1 в § 2a. □

5. Обратимся теперь непосредственно к вопросу о «рациональности», «разумности» выбора покупателем момента $\widetilde{\tau}$ как того момента, в который следует предъявлять опцион к исполнению (на основании той текущей информации, которая содержится в потоке $(\mathscr{F}_n)$).

И покупатель, и продавец в своих действиях исходят из того, что определяемая формулой (19) цена $\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P})$ есть *взаимоприемлемая* стоимость опционного контракта. (См. в этой связи п. 4 в § 1b гл. V.)

Рассмотрим все те стратегии $(\overline{\pi}, \overline{C})$, которые имеют начальный капитал $X_0^{\overline{\pi},\overline{C}} = \widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P})$ и осуществляют хеджирование: $X_n^{\overline{\pi},\overline{C}} \geqslant f_n$, $n \leqslant N$. Будем класс этих стратегий обозначать $\Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}))$.

К этому классу заведомо принадлежит стратегия $(\widetilde{\pi}, \widetilde{C})$, капитал которой обладает свойством *минимальности*:

$$f_n \leqslant X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \leqslant X_n^{\overline{\pi},\overline{C}}, \quad n \leqslant N, \tag{32}$$

для всякой стратегии $(\overline{\pi}, \overline{C}) \in \Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}))$. Действительно, из «балансового» условия следует, что $\overline{Y}_n = \dfrac{X_n^{\overline{\pi},\overline{C}}}{B_n}$, $n \leqslant N$, является $\widetilde{\mathsf{P}}$-*супермартингалом*, мажорирующим $\dfrac{f_n}{B_n}$, $n \leqslant N$. А согласно утверждению 4 теоремы 3 последовательность $\widetilde{Y}_n$, $n \leqslant N$, является *наименьшим* $\widetilde{\mathsf{P}}$-супермартингалом, мажорирующим $\dfrac{f_n}{B_n}$, $n \leqslant N$.

Тем самым, $\widetilde{Y}_n \leqslant \overline{Y}_n$, $n \leqslant N$, что вместе с тем фактом, что

$$\frac{f_n}{B_n} \leqslant \widetilde{Y}_n = \frac{X_n^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}}}{B_n},$$

доказывает неравенства (32).

Из этих неравенств вытекает, что для всякого момента остановки τ выполняются неравенства

$$f_\tau \leqslant X_\tau^{\widetilde{\pi},\widetilde{C}} \leqslant X_\tau^{\overline{\pi},\overline{C}}, \tag{33}$$

и понятно, что покупатель опциона должен так выбирать момент τ, чтобы для всякой потенциально возможной стратегии $(\overline{\pi}, \overline{C}) \in \Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}))$ продавец не получил бы с положительной вероятностью «безарбитражный доход» $X_\tau^{\overline{\pi}, \overline{C}} - f_\tau > 0$. Иначе говоря, покупатель должен использовать только такие моменты остановки τ, для которых

$$f_\tau = X_\tau^{\overline{\pi}, \overline{C}} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \quad \forall\, (\overline{\pi}, \overline{C}) = \Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P})). \tag{34}$$

Приведенная аргументация оправдывает следующее

Определение. Моменты остановки τ, удовлетворяющие свойству (34), называются *рациональными моментами* предъявления опционов к исполнению. (Класс таких моментов обозначается $\mathfrak{R}_0^N$.)

Теорема 4. *Всякий момент* $\overline{\tau}$, *являющийся решением задачи об оптимальной остановке* (26), *есть рациональный момент. При этом момент* $\widetilde{\tau}$, *определенный формулой* (27), *принадлежит* $\mathfrak{R}_0^N$ *и в этом классе является минимальным:* $\widetilde{\tau} \leqslant \overline{\tau}$ (P-п. н.) *для всякого* $\overline{\tau} \in \mathfrak{R}_0^N$.

Доказательство. Пусть $(\overline{\pi}, \overline{C}) = \Pi(\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}))$. Тогда, учитывая $\widetilde{\mathsf{P}}$-супермартингальное свойство последовательности $\overline{Y}_n = \dfrac{X_n^{\overline{\pi}, \overline{C}}}{B_n}$, $n \leqslant N$, находим, что

$$\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}) = X_0^{\overline{\pi}, \overline{C}} \geqslant B_0\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{X_{\overline{\tau}}^{\overline{\pi}, \overline{C}}}{B_{\overline{\tau}}} \geqslant B_0\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_{\overline{\tau}}}{B_{\overline{\tau}}} = B_0 \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_\tau}{B_\tau} = \widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P}).$$

Тем самым,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{X_{\overline{\tau}}^{\overline{\pi}, \overline{C}}}{B_{\overline{\tau}}} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \frac{f_{\overline{\tau}}}{B_{\overline{\tau}}},$$

что вместе со свойством $X_{\overline{\tau}}^{\overline{\pi}, \overline{C}} \geqslant f_{\overline{\tau}}$ доказывает, что на самом деле, $X_{\overline{\tau}}^{\overline{\pi}, \overline{C}} = f_{\overline{\tau}}$ (P-п. н.), т. е. $\overline{\tau}$ есть рациональный момент. Свойство минимальности момента $\overline{\tau}$ следует из [441, теорема 2.12]. □

Замечание. Полезно еще раз подчеркнуть, что решение задачи об оптимальной остановке (26) одновременно дает значение *рациональной стоимости* $\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P})$ и определяет *рациональный момент* $\widetilde{\tau}$ предъявления покупателем опциона к исполнению. При этом, как правило, нельзя *по отдельности* найти $\widetilde{\mathbb{C}}(f_N; \mathsf{P})$ или $\widetilde{\tau}$, и находятся они *одновременно* из решения задачи (26).

§ 2d. Опциональное разложение

1. Будем предполагать, что на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n \leqslant N}, \mathsf{P})$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ заданы $\mathbb{R}$-значный процесс $X = (X_n)_{n \leqslant N}$ и $\mathbb{R}^d$-значный процесс $S = (S_n)_{n \leqslant N}$, $S_n = (S_n^1, \ldots, S_n^d)$, согласованные с потоком $(\mathscr{F}_n)_{n \leqslant N}$, т. е. такие, что X_n и S_n^i являются $\mathscr{F}_n$-измеримыми для $n \leqslant N$ и $i = 1, \ldots, d$.

Через $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ будем обозначать множество таких вероятностных мер $\widetilde{\mathsf{P}}$ на $(\Omega, \mathscr{F})$, что $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$ и относительно каждой из них процесс S является *мартингалом*. Предполагается, что $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$. Меры $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ называются *мартингальными* (для S).

Что же касается процесса $X = (X_n)_{n \leqslant N}$, то основное предположение будет состоять в том, что относительно каждой из мер $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ он является *супермартингалом*.

Если рассматривать X по отношению к какой-то конкретной мере $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, то согласно разложению Дуба (§ 1b гл. II)

$$X_n = X_0 + M_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})} - C_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})}, \tag{1}$$

где $M^{(\widetilde{\mathsf{P}})} = (M_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})}, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}})$ — мартингал и $C^{(\widetilde{\mathsf{P}})} = (C_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})}, \mathscr{F}_{n-1}, \widetilde{\mathsf{P}})$ — неубывающий предсказуемый процесс, $M_0^{(\widetilde{\mathsf{P}})} = 0$, $C_0^{(\widetilde{\mathsf{P}})} = 0$. Компоненты $M^{(\widetilde{\mathsf{P}})}$ и $C^{(\widetilde{\mathsf{P}})}$ в разложении (1) зависят от рассматриваемой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, что и подчеркивается введением в их обозначение зависимости от этой меры.

В приводимой ниже теореме дается иное, так называемое *опциональное* разложение процесса X, интересное тем, что оно носит универсальный характер в том смысле, что компоненты этого разложения (см. формулу (2)) одни и те же для всех мер $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$.

Теорема. *Процесс X, являющийся супермартингалом относительно любой из мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, допускает (опциональное) разложение*

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k, \Delta S_k) - C_n, \quad n \leqslant N, \tag{2}$$

с предсказуемым $\mathbb{R}^d$-значным процессом $\gamma = (\gamma_k)_{k \leqslant N}$ и неубывающим процессом $C = (C_n)_{n \leqslant N}$ с $\mathscr{F}_n$-измеримыми величинами C_n.

Прежде чем переходить к доказательству, отметим, что между разложениями (1) и (2) есть принципиальная разница: в формуле (1) величины $C_n^{(\widetilde{\mathsf{P}})}$ являются $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримыми, а в формуле (2) величины C_n являются $\mathscr{F}_n$-измеримыми. Именно с последним обстоятельством и связано, как уже сказано, то, что разложение (2) называется *опциональным*.

Замечание. В рассматриваемом сейчас случае дискретного времени опциональность процесса $C = (C_n)_{n \leqslant N}$ по отношению к $(\mathscr{F}_n)_{n \leqslant N}$ означает просто его *согласованность*, или *адаптированность*, с фильтрацией $(\mathscr{F}_n)_{n \leqslant N}$, т. е. $\mathscr{F}_n$-измеримость величин C_n, $n \geqslant 0$. По поводу понятий опциональности см. § 5a гл. III и [250, гл. I, § 1c].

Первые версии сформулированной теоремы для случая непрерывного времени были даны, как уже отмечалось в § 1c, в работах [136] и [281].

Вскоре появилось несколько работ как для непрерывного, так и для дискретного времени ([99], [163]—[165]), в которых ослаблялись, в частности, предположения, сделанные в работах [136] и [281], и давались различные варианты доказательств.

Приводимое ниже доказательство следует схеме, предложенной в работах [163], [164] Г. Фёльмером и Ю. М. Кабановым и основанной на идее получения величин γ_k в формуле (2) как *множителей Лагранжа* для некоторой *оптимизационной задачи с ограничениями*. (В доказательстве будут использоваться также некоторые результаты из § 2е гл. V.)

2. В соответствии с работами [163] и [164] требуемое разложение (2) будет установлено, если показать, что величины $\Delta X_n \equiv X_n - X_{n-1}$ для каждого $n = 1, \ldots, N$ могут быть представлены в виде

$$\Delta X_n = (\gamma_n, \Delta S_n) - c_n \tag{3}$$

с некоторой $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримой $\mathbb{R}^d$-значной величиной γ_n и некоторой неотрицательной $\mathscr{F}_n$-измеримой величиной c_n.

Для получения такого представления для ΔX_n на самом деле достаточно лишь только показать, что (при сформулированных предположениях на X и S) найдется такая $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримая $\mathbb{R}^d$-значная величина γ_n, что

$$\Delta X_n - (\gamma_n, \Delta S_n) \leqslant 0, \tag{4}$$

поскольку тогда в качестве требуемой величины c_n надо просто взять величину $(\gamma_n, \Delta S_n) - \Delta X_n$.

Заметим также, что если $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$, то

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} |\Delta S_n| < \infty, \quad \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0 \tag{5}$$

и

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} |\Delta X_n| < \infty, \quad \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant 0. \tag{6}$$

Если P_n и $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ являются сужениями мер P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ на $\mathscr{F}$ и $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, то по лемме о пересчете (§ 3а гл. V)

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(z_n \Delta S_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}), \tag{7}$$

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(z_n \Delta X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}), \tag{8}$$

где $z_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}}$.

Отсюда нетрудно увидеть, что требуемое утверждение (4) будет вытекать из следующего общего предложения (в котором надо будет положить $\xi = \Delta X_n$ и $\eta = \Delta S_n$), имеющего и самостоятельный чисто вероятностный интерес.

Лемма. *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *заданы действительная случайная величина* ξ *и* $\mathbb{R}^d$*-значный вектор* $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^d)$.

Пусть $\mathscr{G}$ является σ-подалгеброй $\mathscr{F}$ и Z — множество всех таких случайных величин $z > 0$, что P-п. н.

$$\mathsf{E}(z \mid \mathscr{G}) = 1, \quad \mathsf{E}(|\xi| z \mid \mathscr{G}) < \infty, \quad \mathsf{E}(|\eta| z \mid \mathscr{G}) < \infty \tag{9}$$

и

$$\mathsf{E}(z\eta \mid \mathscr{G}) = 0. \tag{10}$$

Если $Z \neq \varnothing$ и для всех $z \in Z$ выполняется неравенство

$$\mathsf{E}(z\xi \mid \mathscr{G}) \leqslant 0, \tag{11}$$

то найдется такой $\mathscr{G}$-измеримый $\mathbb{R}^d$-значный вектор λ^*, что P-п. н.

$$\xi + (\lambda^*, \eta) \leqslant 0. \tag{12}$$

Доказательство. 1. Идея доказательства становится весьма прозрачной в том случае, когда $\mathscr{G}$ является тривиальной σ-подалгеброй, т. е. $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\}$. В этом случае искомый вектор λ^* является *неслучайным* и может быть выбран, как показывается ниже, множителем Лагранжа в некоторой оптимизационной задаче.

В том же случае, когда σ-подалгебра $\mathscr{G}$ не является тривиальной, те же самые рассмотрения, но проводимые для *каждого* ω, снова дают вектор λ^*, определенный, вообще говоря, неоднозначно, который уже будет зависеть от ω. И вся проблема после этого состоит в том, чтобы доказать, что возможен *$\mathscr{G}$-измеримый выбор* λ^*.

Напомним, что такая же проблема уже возникала в § 2е гл. V при доказательстве расширенного варианта первой фундаментальной теоремы (при доказательстве импликаций a$'$) $\Rightarrow$ e) и e) $\Rightarrow$ b)) и для ее решения привлекались некоторые общие результаты о существовании «измеримого селектора» (лемма 2 в § 2е гл. V).

Та же техника может быть применима в рассматриваемой сейчас схеме и для доказательства существования $\mathscr{G}$-измеримого селектора λ^*. Отсылая за деталями соответствующих рассуждений к работам [163] и [164], отметим, что эта проблема измеримого выбора не возникает в случае дискретного пространства Ω.

2. Итак, будем предполагать, что $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\}$.

Обозначим через $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(dx, dy)$ меру на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, порождаемую величинами ξ и $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^d)$:

$$\mathsf{Q}(dx, dx) = \mathsf{P}(\xi \in dx, \eta \in dy).$$

Без ограничения общности можно считать, что семейство случайных величин $\eta^1, \ldots, \eta^d$ образует (P-п. н.) *линейно независимую систему*, т. е. такую, что если при некоторых $a^1, \ldots, a^d$ выполнено равенство $a^1\eta^1 + \ldots + a^d\eta^d = 0$ (P-п. н.), то $a^1 = \ldots = a^d = 0$. В самом деле, в выражение (12) компоненты $\eta^1, \ldots, \eta^d$ входят линейным образом, и если бы они образовывали линейно зависимую систему, то проблема сводилась бы к рассмотрению вектора η меньшей размерности.

Как и в § 2е гл. V, будем обозначать через $L^\circ(\mathsf{Q})$ «относительную» внутренность замкнутой выпуклой оболочки $L(\mathsf{Q})$ топологического носителя $K(\mathsf{Q})$ меры Q.

Пусть $x' = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^{d+1}$, и $Z(\mathsf{Q})$ — семейство таких борелевских функций $z = z(x') > 0$ таких, что $\mathsf{E_Q}\, z = 1$, $\mathsf{E_Q}\, |x'| z < \infty$.

Пусть
$$\Phi(\mathsf{Q}) = \bigl\{\varphi(z)\colon \varphi(z) = \mathsf{E_Q}\, x'z,\ z \in Z(\mathsf{Q})\bigr\}$$
— семейство барицентров (меры $d\mathsf{Q}' = z\, d\mathsf{Q}$).

Из леммы 1 из § 2е гл. V следует, что $L^\circ(\mathsf{Q}) \subseteq \Phi(\mathsf{Q})$ (на самом деле $L^\circ(\mathsf{Q}) = \Phi(\mathsf{Q})$) и если $0 \notin L^\circ(\mathsf{Q})$, то найдется такой вектор γ' в $\mathbb{R}^{d+1}$, что
$$\mathsf{Q}\bigl\{x'\colon (\gamma', x') \geqslant 0\bigr\} = 1, \quad \mathsf{Q}\bigl\{x'\colon (\gamma', x') > 0\bigr\} > 0. \tag{13}$$

Для доказательства существования вектора λ^* со свойством (12) рассмотрим отдельно два случая:

(i) $0 \notin L^\circ(\mathsf{Q})$,
(ii) $0 \in L^\circ(\mathsf{Q})$.

Случай (i). Согласно формуле (13) найдутся такие числа γ и $\gamma^1, \ldots, \gamma^d$ такие, что (P-п. н.)
$$\gamma\xi + (\gamma^1\eta^1 + \ldots + \gamma^d\eta^d) \geqslant 0 \tag{14}$$
и с положительной P-вероятностью
$$\gamma\xi + (\gamma^1\eta^1 + \ldots + \gamma^d\eta^d) > 0. \tag{15}$$

Покажем, что $\gamma \neq 0$. В самом деле, если $\gamma = 0$, то $\gamma^1\eta^1 + \ldots + \gamma^d\eta^d \geqslant 0$ (P-п. н.). Поскольку по предположению существует мартингальная мера $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, относительно которой $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}(\gamma^1\eta^1 + \ldots + \gamma^d\eta^d) = 0$, получаем, что ($\widetilde{\mathsf{P}}$- и P-п. н.) $\gamma^1\eta^1 + \ldots + \gamma^d\eta^d = 0$.

В силу предполагаемой линейной независимости величин $\eta^1, \ldots, \eta^d$ отсюда следовало бы, что $\gamma^1 = \ldots = \gamma^d = 0$. Однако это противоречит неравенству (15).

Тем самым, $\gamma \neq 0$, и из предположения $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, \xi \leqslant 0$, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, \eta^i = 0$ и формулы (14) находим, что $\gamma < 0$.

Полагая $\lambda^i = \dfrac{\gamma_i}{\gamma}$, $i = 1, \ldots, d$, из формулы (14) получаем неравенство
$$\xi + (\lambda^1\eta^1 + \ldots + \lambda^d\eta^d) \leqslant 0,$$
что и доказывает в случае (i) требуемое свойство (12) с $\lambda^* = (\lambda^1, \ldots, \lambda^d)$.

Случай (ii) несколько более сложен и именно для его рассмотрения будет использована идея обращения к множителям Лагранжа из работ [163] и [164].

Пусть

$$\varphi_\xi(z) = \mathsf{E}_\mathsf{Q}\, xz, \quad \varphi_\eta(z) = \mathsf{E}_\mathsf{Q}\, yz$$

— компоненты барицентра $\varphi(z)$.

Обозначим

$$Z_0(\mathsf{Q}) = \bigl\{z \in Z(\mathsf{Q})\colon\ \varphi_\eta(z) = 0\bigr\}$$

и

$$\Phi_0(\mathsf{Q}) = \bigl\{\varphi(z) = (\varphi_\xi(z), \varphi_\eta(z))\colon\ z \in Z_0(\mathsf{Q})\bigr\}.$$

Согласно условиям леммы $Z_0(\mathsf{Q}) \neq \varnothing$ и

$$z \in Z_0(\mathsf{Q}) \ \Rightarrow\ \varphi_\xi(z) \leqslant 0. \tag{16}$$

Если $0 \in L^\circ(\mathsf{Q})$, то в силу уже отмеченного свойства $L^\circ(\mathsf{Q}) \subseteq \Phi(\mathsf{Q})$, и из § 2e гл. V находим, что существует такое $z_0 \in Z_0(\mathsf{Q})$, что $\varphi_\xi(z_0) = 0$. Поэтому в рассматриваемом случае (ii) имеем

$$\sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z) = 0, \tag{17}$$

что можно проинтерпретировать следующим образом: в предположении (ii) в *оптимизационной задаче*

$$\textit{найти } f^* \equiv \sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z) \tag{18}$$

значение f^* равно нулю.

Следуя работам [163] и [164], переформулируем задачу (18) как *оптимизационную задачу с ограничениями*:

$$\textit{найти } f^* \equiv \sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z) \textit{ при дополнительном ограничении } \varphi_\eta(z) = 0. \tag{19}$$

Согласно принципам вариационного исчисления, решение задачи (19) должно быть равносильно, при некотором *ненулевом* векторе λ^* (множитель Лагранжа), решению следующей *оптимизационной задачи*:

$$\textit{найти } f^* \equiv \sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} \bigl(\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z)\bigr). \tag{20}$$

(Для простоты записи здесь и далее скалярное произведение (a, b) векторов a и b обозначается ab.)

Приведем доказательство равносильности задач (19) и (20), что интересно и само по себе, хотя для наших целей вполне достаточно, на самом деле, только того, что в предположении (ii) имеет место неравенство

$$\sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} \bigl(\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z)\bigr) \leqslant 0, \tag{21}$$

по крайней мере для какого-то ненулевого вектора λ^*.

Пусть

$$A = \bigl\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\colon\ x < \varphi_\xi(z),\ y = \varphi_\eta(z) \text{ для некоторого } z \in Z(\mathsf{Q})\bigr\}.$$

Это множество является непустым и выпуклым. При этом в силу предположения (ii), точка $(0,0) \notin A$, и, значит, ее можно «отделить» гиперплоскостью от множества A, т. е. *найдется такой ненулевой вектор* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, *что*

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y \leqslant 0 \tag{22}$$

для всех (x, y) *из замыкания множества* A. (См., например, [241, § 0.1]; отметим, что и в случае (i) также, в сущности, были использованы идеи отделимости.)

Заметим, что в множество A заведомо входят точки $(x, 0)$ с любыми отрицательными значениями x. Поэтому в формуле (22) имеем $\lambda_1 \geqslant 0$.

Если, далее, предположить, что $\lambda_1 = 0$, то из формулы (21) найдем, что для любых $z \in Z(\mathsf{Q})$ выполнено условие

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(\lambda_2 y) z = \lambda_2 \, \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \, yz = \lambda_2 \varphi_\eta(z) \leqslant 0. \tag{23}$$

Поэтому в силу произвольности $z \in Z(\mathsf{Q})$ находим, что $\lambda_2 y \leqslant 0$ (Q-п. н.), т. е. $\lambda_2 \eta \leqslant 0$ (P-п. н.).

Поскольку $\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$, для некоторой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ из $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ выполнено равенство $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \, \lambda_2 \eta = 0$, и вместе со свойством $\lambda_2 \eta \leqslant 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.) это приводит к линейной зависимости ($\lambda_2 \eta = 0$), что было исключено сделанным выше предположением. Тем самым, $\lambda_2 = 0$.

Следовательно, если $\lambda_1 = 0$, то и $\lambda_2 = 0$, что противоречит тому, что вектор (λ_1, λ_2) в формуле (21) является ненулевым.

Итак, заведомо $\lambda_1 > 0$.

Положим $\lambda^* = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Тогда из формулы (21) и определения множества A заключаем, что для любого $z \in Z(\mathsf{Q})$ и любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$(\varphi_\xi(z) - \varepsilon) + \lambda^* \varphi_\eta(z) \leqslant 0.$$

Предельным переходом по $\varepsilon \to 0$ отсюда получаем неравенство

$$\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z) \leqslant 0, \quad z \in Z(\mathsf{Q}),$$

равносильное тому, что

$$\sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z)) \leqslant 0. \tag{24}$$

Заметим теперь, что очевидным образом для любого $\lambda \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$\sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda \varphi_\eta(z)) \geqslant \sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda \varphi_\eta(z)) = \sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z). \tag{25}$$

Если выполнено свойство (ii), то правая часть формулы (25) равна нулю, а левая часть равна нулю при $\lambda = \lambda^*$. Тем самым, в предположении (ii) имеем

$$\sup_{z \in Z_0(\mathsf{Q})} \varphi_\xi(z) = 0 \iff \sup_{z \in Z(\mathsf{Q})} (\varphi_\xi(z) + \lambda^* \varphi_\eta(z)) = 0,$$

что устанавливает эквивалентность задач (19) и (20) и интерпретируется следующим образом: в оптимизационной задаче (19) множитель Лагранжа «снимает» ограничение $\varphi_\eta(z)=0$.

Вернемся к неравенству (24), или, что равносильно, к неравенству

$$\varphi_\xi(z)+\lambda^*\varphi_\eta(z)\leqslant 0,\quad z\in Z(\mathsf{Q}),\tag{26}$$

которое перепишем в виде

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\, z(x+\lambda^* y)\leqslant 0,\quad z\in Z(\mathsf{Q}).$$

В силу того что пространство $Z(\mathsf{Q})$ достаточно «богато», отсюда заключаем, что $x+\lambda^* y\leqslant 0$ (Q-п. н.), что и доказывает требуемое свойство (12) в предположении $\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega\}$. $\square$

В общем же случае, как уже отмечалось выше, надо вместо $\mathsf{Q}(dx,dy)$ рассматривать *регулярные* условные распределения

$$\mathsf{Q}(\omega;dx,dy)=\mathsf{P}(\xi\in dx,\eta\in dy\,|\,\mathscr{G})(\omega)$$

и проводить доказательство существования $\lambda^*=\lambda^*(\omega)$ для «каждого ω». На заключительном этапе надо будет установить возможность выбора $\mathscr{G}$-измеримой версии $\lambda^*=\lambda^*(\omega)$, $\omega\in\Omega$, обращаясь к общим результатам об измеримом выборе, примером которых может служить лемма 2 из § 2е гл. V. Соответствующие детали см. в работах [163] и [164].

3. Схема серий «больших» безарбитражных рынков и асимптотический арбитраж

§ 3a. Модель «больших» финансовых рынков

1. С понятием «больших» рынков и концепцией асимптотического арбитража мы сталкивались в § 2d гл. I при изложении основных положений *арбитражной теории расчетов* (APT), инициированной С. Россом.

Подобно тому как теория Г. Марковитца (§ 2b гл. I) базировалась на анализе *среднего значения* и *дисперсии* капитала разных портфелей ценных бумаг, так и в теории С. Росса асимптотический арбитраж определяется с помощью этих характеристик.

В настоящем разделе асимптотический арбитраж будет определяться несколько иначе и более соответствовать той концепции арбитража, которая рассматривалась в § 2a гл. V и которая по своему духу более соответствует «мартингальному» подходу, пронизывающему все наше изложение.

2. Расширяя принятую ранее модель (B, S)-рынка, состоящего из банковского счета $B=(B_k)_{k\leqslant n}$ и d-мерной акции $S=(S_k)_{k\leqslant n}$, $S_k=(S_k^1, \ldots, S_k^d)$, заданных на некотором *фильтрованном* вероятностном пространстве

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k)_{k\leqslant n}, \mathsf{P}),$$

будем сейчас предполагать, что имеется *схема серий* n-рынков

$$(B^n, S^n) = (B_k^n, S_k^n)_{k\leqslant k(n)},$$

$S_k^n=(S_k^{n,1}, \ldots, S_k^{n,d(n)})$, каждый из которых действует на своем фильтрованном вероятностном пространстве

$$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}_k^n)_{k\leqslant k(n)}, \mathsf{P}^n). \tag{1}$$

Предполагается, что $n\geqslant 1$ и $\mathscr{F}_0^n=\{\varnothing, \Omega^n\}$, $\mathscr{F}^n=\mathscr{F}_{k(n)}^n$, $k(n)<\infty$, $d(n)<\infty$.

Поскольку основной наш интерес будет относиться к рассмотрению тех случаев, когда $k(n)\to\infty$ и/или $d(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, именно в этом смысле и употребляется термин «большие» рынки.

Замечание. При рассмотрении схемы серий фильтрованных вероятностных пространств индекс n будет соответствовать *номеру серии*, а индекс k будет играть роль *временнóго параметра*.

3. Пусть $X^{\pi(n)} = (X_k^{\pi(n)})_{k \leqslant k(n)}$ — капитал некоторого самофинансируемого портфеля $\pi(n)$ на (B^n, S^n)-рынке.

Напомним, что согласно принятому изложению предполагается, что величины B_k^n положительны и $\mathscr{F}_{k-1}^n$-измеримы. Как это уже объяснялось в конце § 2b гл. V, без ограничения общности можно полагать $B_k^n \equiv 1$, что соответствует переходу к рассмотрению дисконтированных цен. В этом случае

$$X_k^{\pi(n)} = X_0^{\pi(n)} + \sum_{l=1}^{k} (\gamma_l^n, \Delta S_l^n),$$

где $(\gamma_l^n, \Delta S_l^n) = \sum\limits_{i=1}^{d(n)} \gamma_l^{n,i} \Delta S_l^{n,i}$.

Определение 1. Будем говорить, что в *схеме серий* $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$ n-рынков (B^n, S^n) последовательность стратегий $\pi = (\pi(n))_{n \geqslant 1}$ реализует *асимптотический арбитраж*, если

$$\lim_n X_0^{\pi(n)} = 0, \tag{2}$$

$$X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant -c(n) \quad (\mathsf{P}^n\text{-п. н.}), \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

где $0 \leqslant c(n) \downarrow 0$, $n \to \infty$, и

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_n \mathsf{P}^n (X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant \varepsilon) > 0. \tag{4}$$

Если пользоваться введенными обозначениями и понятиями, то можно сказать (несколько обобщая рассмотрения из § 2d гл. II), что *асимптотический арбитраж в APT* имеет место тогда, когда найдутся подпоследовательность $(n') \subseteq (n)$ и последовательность стратегий $(\pi(n'))$, для которых $X_0^{\pi(n')} = 0$, $\mathsf{E}\, X_{k(n')}^{\pi(n')} \to \infty$, $\mathsf{D}\, X_{k(n')}^{\pi(n')} \to 0$, $n' \to \infty$.

Данное выше определение асимптотического арбитража (4) с «мартингальной» точки зрения является более предпочтительным и более удобным, нежели определение теории *APT*, что может быть объяснено следующим образом.

Во-первых, определение (4) можно рассматривать как естественное обобщение принятого ранее (§ 2a гл. V) определения арбитражных возможностей, которое, как мы знаем из первой фундаментальной теоремы, самым непосредственным образом связывает теорию арбитража с теорией мартингалов и стохастическим исчислением.

Во-вторых, в случае определения (4), а также и ряда других родственных определений (см. [260], [261], [273]) удается получать эффективные критерии отсутствия асимптотического арбитража, выраженные, в том числе, в терминах таких объектов, хорошо известных в статистике случайных процессов, как интеграл Хеллингера, процесс Хеллингера (см. [250, гл. V]).

4. Определение 2. $(\mathbb{B}, \mathbb{S})$-рынок, представляющий совокупность $\{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$ n-рынков, называется *локально безарбитражным*, если для каждого $n \geqslant 1$ рынки (B^n, S^n) являются безарбитражными (§ 2a гл. V).

Основной вопрос, рассматриваемый ниже, состоит в отыскании условий, при которых в локально безарбитражном $(\mathbb{B}, \mathbb{S})$-рынке *не* возникает асимптотический арбитраж (в смысле данного выше определения 1).

Возникновение асимптотического арбитража при $n \to \infty$ может быть обусловлено разными причинами: за счет увеличения числа акций ($d(n) \to \infty$), за счет увеличения временнóго интервала ($k(n) \to \infty$; см. пример 2 в § 2b гл. V), за счет того, что может нарушаться асимптотическая эквивалентность мер. Появление асимптотического арбитража может быть связано и с комбинационным действием названных причин.

В связи с упомянутой асимптотической эквивалентностью мер, а также с соответствующими асимптотическими понятиями абсолютной непрерывности и сингулярности последовательностей вероятностных мер, отметим, что они допускают точную формулировку с привлечением понятий контингуальности и полной асимптотической разделимости (см. [250, гл. V], где описаны также и критерии их выполнимости в терминах интегралов и процессов Хеллингера).

На важность этих понятий для проблем асимптотического арбитража на больших рынках впервые было указано в работе Ю. М. Кабанова и Д. О. Крамкова [261], в которой были введены понятия *асимпотического арбитража первого и второго рода*. (Введенный в определении 1 асимптотический арбитраж совпадает, в сущности, с асимптотическим арбитражем первого рода.) Значительное продвижение в теории асимптотического арбитража было затем получено в работах И. Клейн и В. Шахермайера [273] и Ю. М. Кабанова и Д. О. Крамкова [260].

§ 3b. Критерии отсутствия асимптотического арбитража

1. Пусть $X^{\pi(n)} = (X_k^{\pi(n)})_{k \leqslant k(n)}$ — капитал некоторого самофинансируемого портфеля $\pi(n)$ на (B^n, S^n)-рынке, $B_k^n \equiv 1$:

$$X_k^{\pi(n)} = X_0^{\pi(n)} + \sum_{l=1}^{k} (\gamma_l^n, \Delta S_l^n). \tag{1}$$

Если Q^n — такая мера на $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$, что $\mathsf{Q}^n \ll \mathsf{P}^n$, то по формуле Байеса (формула (4) в § 3a гл. V) находим, что (Q^n-п. н.)

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}^n}\big(X_{k(n)}^{\pi(n)} \,|\, \mathscr{F}_k^n\big) = \frac{1}{Z_k^n}\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\big(X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n \,|\, \mathscr{F}_k^n\big), \tag{2}$$

где $Z_k^n = \dfrac{d\mathsf{Q}_k^n}{d\mathsf{P}_k^n}$, $\mathsf{Q}_k^n = \mathsf{Q}^n \,|\, \mathscr{F}_k^n$, $\mathsf{P}_k^n = \mathsf{P}^n \,|\, \mathscr{F}_k^n$. (Предполагается, что условное математическое ожидание в левой части формулы (2) определено.)

Будем предполагать, что каждый n-рынок (B^n, S^n), $n \geqslant 1$, является *безарбитражным* и, следовательно, в соответствии с первой фундаментальной теоремой (§ 2b, 2e гл. V) семейство мартингальных мер $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ непусто.

Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}^n \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ и $\pi(n)$ — стратегия, для которой

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\big(X_{k(n)}^{\pi(n)}\big)^- < \infty. \tag{3}$$

Тогда в силу леммы из § 1c гл. II находим, что последовательность $X^{\pi(n)} = (X_k^{\pi(n)})_{k \leqslant k(n)}$ относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ является мартингалом. Следовательно, $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\big|X_{k(n)}^{\pi(n)}\big| < \infty$, и для $k \leqslant k(n)$ имеем

$$X_k^{\pi(n)} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\big(X_{k(n)}^{\pi(n)} \,|\, \mathscr{F}_k^n\big). \tag{4}$$

Понятно, что $\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\big|X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n\big| = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\big|X_{k(n)}^{\pi(n)}\big| < \infty$, и в силу формул (2) и (4) получаем

$$X_k^{\pi(n)} Z_k^n = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\big(X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n \,|\, \mathscr{F}_k^n\big) \quad (\widetilde{\mathsf{P}}^n\text{- и } \mathsf{P}^n\text{-п. н.}). \tag{5}$$

Таким образом, предположение (3) обеспечивает в рассматриваемом случае дискретного времени $k \leqslant k(n) < \infty$, что

$$(X_k^{\pi(n)}, \mathscr{F}_k^n, \widetilde{\mathsf{P}}^n)_{k \leqslant k(n)} \quad \text{и} \quad (X_k^{\pi(n)} Z_k^n, \mathscr{F}_k^n, \mathsf{P}^n)_{k \leqslant k(n)}$$

являются мартингалами. (Ср. с леммой из § 3d гл. V.)

В частности,

$$X_0^{\pi(n)} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\, X_{k(n)}^{\pi(n)}, \tag{6}$$

$$X_0^{\pi(n)} = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\, X_{k(n)}^{\pi(n)} Z_{k(n)}^n. \tag{7}$$

Каждое из этих равносильных соотношений может быть использовано для получения условий того, что рассматриваемая стратегия $\pi(n)$ является *безарбитражной*, а последовательность стратегий $\pi = (\pi(n))_{n \geqslant 1}$ — *асимптотически безарбитражной*. (Отметим, что, в сущности, именно эти соотношения и были использованы в § 2c гл. V при доказательстве достаточности в первой фундаментальной теореме.)

Замечание. Для справедливости формул (4)—(7) нет надобности требовать, чтобы выполнялось условие $\widetilde{\mathsf{P}}^n \sim \mathsf{P}^n$; достаточно лишь условия $\widetilde{\mathsf{P}}^n \ll \mathsf{P}^n$. Однако свойство $\mathsf{P}^n \ll \widetilde{\mathsf{P}}^n$ все равно приходится предполагать выполненным, если выводить отсутствие арбитража, скажем, из формулы (7).

Действительно, пусть стратегия $\pi(n)$ такова, что $X_0^{\pi(n)} = 0$, $X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant 0$ (P^n-п. н.), и $A = \big\{X_{k(n)}^{\pi(n)} > 0\big\}$. Тогда из формулы (7) ясно, что ничего нельзя сказать о вероятности $\mathsf{P}^n(A)$ множества A, если на этом множестве $Z_{k(n)}^n = 0$. Поэтому-то для вывода из предположения $\mathsf{P}^n\big(X_{k(n)}^{\pi(n)} \geqslant 0\big) = 1$ и равенства

$0 = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} X^{\pi(n)}_{k(n)} Z^n_{k(n)}$ того свойства, что $\mathsf{P}^n\big(X^{\pi(n)}_{k(n)} = 0\big) = 1$, и приходится предполагать, что $\mathsf{P}^n(Z^n_{k(n)} > 0) = 1$. (Согласно утверждению f теоремы из § 3a гл. V отсюда вытекает абсолютная непрерывность $\mathsf{P}^n \ll \widetilde{\mathsf{P}}^n$.)

Тем самым, заложенное в понятии мартингальной меры $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ требование ее *эквивалентности* мере P^n обеспечивает, в частности, свойство

$$0 < Z^n_{k(n)} < \infty \quad (\mathsf{P}^n\text{-п. н.}). \tag{8}$$

2. Отыскание критериев отсутствия асимптотического арбитража начнем для простоты со стационарного случая, понимая под этим, что $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n),\ n \geqslant 1\}$-рынок имеет следующую специальную структуру.

Существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0}, \mathsf{P})$, $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_k$ и $(d+1)$-мерный процесс $(B, S) = (B_k, S_k)_{k\geqslant 0}$, где B_k — $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримые величины, $S_k = (S^1_k, \ldots, S^d_k)$ — $\mathscr{F}_k$-измеримые величины и такие, что каждый из n-рынков $(B^n, S^n) = (B_k, S_k)_{k\leqslant k(n)}$, $k(n) = n$.

Понятно, что (пользуясь языком схемы серий) можно считать, что рынок (B^n, S^n) задан на своем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}^n_k)_{k\leqslant n}, \mathsf{P}^n)$, для которого $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}_n$, $\mathscr{F}^n_k = \mathscr{F}_k$, $k \leqslant n$, и $\mathsf{P}^n = \mathsf{P} \,|\, \mathscr{F}^n$.

По-другому можно сказать также, что в стационарном случае число акций $d(n)$ не меняется с n ($d(n) \equiv d$) и каждый $(n+1)$-й рынок (B^{n+1}, S^{n+1}) есть «продолжение» n-го рынка (B^n, S^n).

Будем обозначать через $\widetilde{\mathbb{P}} = \{(\widetilde{\mathsf{P}}_k)_{k\geqslant 1}\}$ семейство последовательностей $(\widetilde{\mathsf{P}}_k)_{k\geqslant 1}$ мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}}_k$, обладающих свойством согласованности: $\widetilde{\mathsf{P}}_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_k = \widetilde{\mathsf{P}}_k$, $k \geqslant 1$.

Для каждой такой последовательности мер $(\widetilde{\mathsf{P}}_k)_{k\geqslant 1}$ определим сопутствующую последовательность $Z = (Z_k)_{k\geqslant 0}$ производных Радона—Никодима $Z_k = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_k}{d\mathsf{P}_k}$, $k \geqslant 1$, $Z_0 = 1$.

Пусть

$$\mathbb{Z}_k = \left\{ Z_k :\ Z_k = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_k}{d\mathsf{P}_k},\ \widetilde{\mathsf{P}}_k \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^k) \right\}$$

и

$$\mathbb{Z}_\infty = \left\{ Z_\infty :\ Z_\infty = \varlimsup_k \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_k}{d\mathsf{P}_k},\ (\widetilde{\mathsf{P}}_k)_{k\geqslant 1} \in \widetilde{\mathbb{P}} \right\}.$$

Заметим, что, хотя и не предполагается существование такой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ на $(\Omega, \mathscr{F})$, что $\widetilde{\mathsf{P}}_k = \widetilde{\mathsf{P}} \,|\, \mathscr{F}_k$, тем не менее, в силу свойства $\widetilde{\mathsf{P}}_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_k = \widetilde{\mathsf{P}}_k$ последовательность $(Z_k, \mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0}$ относительно меры P является (положительным) мартингалом. Поэтому по теореме Дуба о сходимости (§ 3a гл. V) P-п. н. существует $\lim Z_k$ $(= Z_\infty)$, при этом $0 \leqslant \mathsf{E}\, Z_\infty \leqslant 1$.

Теорема 1 (стационарный случай). *На локально безарбитражном рынке* $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n),\ n \geqslant 1\}$ *условие*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_k \inf_{Z_k \in \mathbb{Z}_k} \mathsf{P}(Z_k < \varepsilon) = 0 \tag{9}$$

является необходимым и достаточным, а условие

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \inf_{Z_\infty\in\mathbb{Z}_\infty} \mathsf{P}(Z_\infty<\varepsilon)=0 \tag{10}$$

— достаточным для отсутствия асимптотического арбитража.

Доказательство достаточности условия (9) сравнительно просто и приводится ниже. (Достаточность условия (10) будет следовать из того, что (10) $\Rightarrow$ (9).) Доказательство *необходимости* несколько сложнее. Оно опирается на некоторые результаты о *контигуальности* вероятностных мер и дается в следующем § 3c (п. 9).

Пусть $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1}\in\widetilde{\mathbb{P}}$ и $\pi=(\pi(n))_{n\geqslant 1}$ — последовательность стратегий на $(\mathbb{B},\mathbb{S})=\{(B^n,S^n),\ n\geqslant 1\}$-рынке, удовлетворяющих условию (3) из § 3a. Тогда выполнено условие (3), и, значит, имеет место свойство (6), которое в рассматриваемом стационарном случае принимает вид

$$X_0^{\pi(n)}=\mathsf{E}\,Z_nX_n^{\pi(n)}. \tag{11}$$

Взяв $\varepsilon>0$, отсюда находим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,Z_nX_n^{\pi(n)}\ \mathsf{E}\,Z_nX_n^{\pi(n)}\big[I(-c(n)\leqslant X_n^{\pi(n)}<0)+{}&\\ +I(0\leqslant X_n^{\pi(n)}<\varepsilon)+I(X_n^{\pi(n)}\geqslant\varepsilon)\big]&\geqslant\\ \geqslant -c(n)+\mathsf{E}\,Z_nX_n^{\pi(n)}I(Z_n\geqslant\varepsilon)I(X_n^{\pi(n)}\geqslant\varepsilon)&\geqslant\\ \geqslant -c(n)+\varepsilon^2\,\mathsf{P}(X_n^{\pi(n)}\geqslant\varepsilon,\ Z_n\geqslant\varepsilon)&\geqslant\\ \geqslant -c(n)+\varepsilon^2\big[\mathsf{P}(X_n^{\pi(n)}\geqslant\varepsilon)-\mathsf{P}(Z_n<\varepsilon)\big]&,\end{aligned}$$

и, значит,

$$X_0^{\pi(n)}+c(n)+\varepsilon^2\mathsf{P}(Z_n<\varepsilon)\geqslant\varepsilon^2\mathsf{P}(X_n^{\pi(n)}\geqslant\varepsilon). \tag{12}$$

Если выполнены условия (2) и (3) из § 3a, то из формулы (12) в силу произвольности последовательности $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1}\in\widetilde{\mathbb{P}}$ видим, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varlimsup_n\ \inf_{Z_n\in\mathbb{Z}_n}\mathsf{P}(Z_n<\varepsilon)\geqslant\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varlimsup_n\ \mathsf{P}(X_n^{\pi(n)}\geqslant\varepsilon). \tag{13}$$

Отсюда ясно, что при наличии предположения (9) и, очевидно, условия (10) последовательность стратегий $\pi=(\pi(n))_{n\geqslant 1}$ со свойствами (2)— (4) из § 3a не может реализовывать асимптотический арбитраж. □

Следствие. *Пусть* $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant 1}$ — некоторая *последовательность из* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *и* $Z_\infty=\varlimsup\dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$. *Тогда условие* $\mathsf{P}(Z_\infty>0)=1$ *гарантирует отсутствие асимптотического арбитража.*

3. Перейдем к рассмотрению общего случая, считая, что каждый из безарбитражных n-рынков (B^n,S^n), $n\geqslant 1$, задан на своем фильтрованном вероятностном пространстве

$$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,(\mathscr{F}_k^n)_{k\leqslant k(n)},\mathsf{P}^n),\qquad \mathscr{F}_{k(n)}^n=\mathscr{F}^n.$$

Если $\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}$ — некоторая мартингальная мера,

$$\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \sim \mathsf{P}^n_{k(n)} \quad \text{и} \quad Z^n_{k(n)} = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}}{d\mathsf{P}^n_{k(n)}},$$

то аналогично формуле (12) находим, что

$$X_0^{\pi(n)} + c(n) + \varepsilon^2\, \mathsf{P}^n(Z^n_{k(n)} < \varepsilon) \geqslant \varepsilon^2\, \mathsf{P}^n(X^{\pi(n)}_{k(n)} \geqslant \varepsilon). \tag{14}$$

Обозначим

$$\mathbb{Z}^n_{k(n)} = \left\{ Z^n_{k(n)} \colon Z^n_{k(n)} = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}}{d\mathsf{P}^n_{k(n)}},\ \widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \in \mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n),\ n \geqslant 1\}$ — *«большой» локально безарбитражный рынок.*

Условие

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim_{n}} \inf_{Z^n_{k(n)} \in \mathbb{Z}^n_{k(n)}} \mathsf{P}^n(Z^n_{k(n)} < \varepsilon) = 0 \tag{15}$$

является необходимым и достаточным для отсутствия асимптотического арбитража.

Доказательство достаточности условия (15) следует из формулы (14) так же, как и в стационарном случае. Доказательство *необходимости* см. в п. 9 следующего § 3c. □

§ 3c. Асимптотический арбитраж и контигуальность

1. Из всего предшествующего изложения в этой главе, относящегося к *теории арбитража*, понятно, сколь значительна в этой теории роль проблематики абсолютной непрерывности вероятностных мер. Нижеследующее изложение показывает, что для *теории асимптотического арбитража* ключевую роль играет понятие *контигуальности вероятностных мер*, являющееся одним из важных концептуальных понятий в асимптотических вопросах математической статистики.

Чтобы ввести понятие контигуальности наиболее естественным путем, рассмотрим сначала стационарный случай (определение и обозначения см. в п. 2 § 3b).

Пусть $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)_{n \geqslant 1}$ — некоторая последовательность (согласованных) мартингальных мер из $\widetilde{\mathbb{P}}$. Предположим, что на $(\Omega, \mathscr{F})$ *существует* также такая мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, что $\widetilde{\mathsf{P}} | \mathscr{F}_n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$, $n \geqslant 1$.

Напомним (см. § 3а гл. V), что меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ и P назывались *локально эквивалентными* ($\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$), если $\widetilde{\mathsf{P}}_n \sim \mathsf{P}_n$, $n \geqslant 1$.

Важно при этом подчеркнуть, что из свойства $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ *не следует*, вообще говоря, ни одно из следующих свойств: $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$, $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$.

Согласно следствию из предыдущего параграфа, если

$$\mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1, \tag{1}$$

где $Z_\infty = \overline{\lim}\, Z_n$, $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, то асимптотический арбитраж отсутствует.

Согласно импликациям a) $\Leftrightarrow$ b) в теореме из § 3а гл. V условие (1) равносильно (в рассматриваемом предположении $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$) тому, что $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$. Таким образом, условие $\mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}}$ (как, разумеется, и условие (1)) может рассматриваться как именно то дополнительное (к свойству $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$) требование на поведение вероятностных мер n-рынков, которое препятствует появлению при $n \to \infty$ асимптотического арбитража.

В том же случае, когда на $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1})$, $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$, *отсутствует* мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойством $\widetilde{\mathsf{P}} | \mathscr{F}_n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$, $n \geqslant 1$, для формулирования соответствующего аналога утверждения

$$\mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1 \iff \mathsf{P} \ll \widetilde{\mathsf{P}} \tag{2}$$

важным оказывается следующее

Определение 1. Пусть на измеримых пространствах $(E^n, \mathscr{E}^n)$ заданы вероятностные меры Q^n и $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$, $n \geqslant 1$.

Последовательность мер $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n)_{n\geqslant 1}$ называется *контигуальной* по отношению к последовательности $(\mathsf{Q}^n)_{n\geqslant 1}$ (обозначение: $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n)$), если для всех последовательностей множеств $A^n \in \mathscr{E}^n$ со свойством $\mathsf{Q}^n(A^n) \to 0$, $n \to \infty$, имеет место также и свойство $\widetilde{\mathsf{Q}}^n(A^n) \to 0$, $n \to \infty$.

Замечание 1. Когда пространство $(E^n, \mathscr{E}^n)$ и меры Q^n и $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$ не зависят от n ($(E^n, \mathscr{E}^n) \equiv (E, \mathscr{E})$, $\mathsf{Q}^n \equiv \mathsf{Q}$, $\widetilde{\mathsf{Q}}^n \equiv \widetilde{\mathsf{Q}}$), свойство контигуальности $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n)$ превращается в обычное свойство абсолютной непрерывности $\widetilde{\mathsf{Q}} \ll \mathsf{Q}$ мер Q и $\widetilde{\mathsf{Q}}$ на $(E, \mathscr{E})$.

Теорема 1 (стационарный случай)**.** *Пусть $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)$ — некоторая последовательность мартингальных мер из $\widetilde{\mathbb{P}}$. Тогда*

$$\mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1 \iff (\mathsf{P}_n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}_n). \tag{3}$$

Выполнение условия контигуальности $(\mathsf{P}_n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}_n)$ гарантирует отсутствие асимптотического арбитража.

Если $(\widetilde{\mathsf{P}}_n)$ — единственная мартингальная последовательность, то условие $(\mathsf{P}_n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}_n)$ является необходимым и достаточным для отсутствия асимптотического арбитража.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из теоремы 1 предыдущего параграфа и приводимой ниже леммы 1, содержащей некоторые полезные критерии контигуальности, для формулировки которых понадобятся дополнительные обозначения и определения. $\square$

2. Пусть Q и $\widetilde{\mathsf{Q}}$ — две вероятностные меры на измеримом пространстве $(E, \mathscr{E})$ и $\overline{\mathsf{Q}} = \frac{1}{2}(\mathsf{Q} + \widetilde{\mathsf{Q}})$, $\mathfrak{z} = \frac{d\mathsf{Q}}{d\overline{\mathsf{Q}}}$, $\tilde{\mathfrak{z}} = \frac{d\widetilde{\mathsf{Q}}}{d\overline{\mathsf{Q}}}$, $Z = \frac{\tilde{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}}$. (Версии производных Радона—Никодима $\mathfrak{z}$ и $\tilde{\mathfrak{z}}$ могут быть выбраны так, что $\mathfrak{z} + \tilde{\mathfrak{z}} \equiv 2$.)

Напомним теперь, что согласно *разложению Лебега* (см., например, [439, гл. III, § 9]) мера $\widetilde{\mathsf{Q}}$ может быть представлена в виде

$$\widetilde{\mathsf{Q}} = \widetilde{\mathsf{Q}}_1 + \widetilde{\mathsf{Q}}_2,$$

где

$$\widetilde{\mathsf{Q}}_1(A) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\, Z I_A, \quad \widetilde{\mathsf{Q}}_2(A) = \widetilde{\mathsf{Q}}(A \cap (Z = \infty)).$$

Поскольку $\mathsf{Q}(Z < \infty) = 1$, имеем $\widetilde{\mathsf{Q}}_1 \ll \mathsf{Q}$ и $\widetilde{\mathsf{Q}}_2 \perp \mathsf{Q}$.

Таким образом, Z есть не что иное, как производная Радона—Никодима абсолютно непрерывной компоненты меры $\widetilde{\mathsf{Q}}$ по мере Q. (Именно в этом смысле следует понимать используемое для Z обозначение $\frac{d\widetilde{\mathsf{Q}}}{d\mathsf{Q}}$.)

Определение 2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и

$$H(\alpha; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{Q}}}\, \mathfrak{z}^{\alpha}\, \tilde{\mathfrak{z}}^{1-\alpha}, \tag{4}$$

$$H(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = H\Big(\frac{1}{2}; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}\Big), \tag{5}$$

$$\rho(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = \sqrt{1 - H(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})}. \tag{6}$$

Величина $H(\alpha; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})$ называется *интегралом Хеллингера порядка* α между мерами Q и $\widetilde{\mathsf{Q}}$, $H(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})$ — *интегралом Хеллингера*, а $\rho(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})$ — *расстоянием Хеллингера* между мерами Q и $\widetilde{\mathsf{Q}}$.

Доказывается (см. [250, гл. IV, § 1a]), что значение $H(\alpha; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}})$ на самом деле не зависит от выбора доминирующей меры $\overline{\mathsf{Q}}$. Это свойство объясняет часто используемую символическую запись

$$H(\alpha; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = \int_E (d\mathsf{Q})^{\alpha}\, (d\widetilde{\mathsf{Q}})^{1-\alpha}, \tag{7}$$

$$H(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = \int_E \sqrt{d\mathsf{Q}\, d\widetilde{\mathsf{Q}}}, \tag{8}$$

$$\rho(\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = \frac{1}{2} \int_E \big(\sqrt{d\mathsf{Q}} - \sqrt{d\widetilde{\mathsf{Q}}}\,\big)^2. \tag{9}$$

Пример. Пусть $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_1 \times \mathsf{Q}_2 \times \ldots$, $\widetilde{\mathsf{Q}} = \widetilde{\mathsf{Q}}_1 \times \widetilde{\mathsf{Q}}_2 \times \ldots$, где Q_k и $\widetilde{\mathsf{Q}}_k$ — гауссовские меры на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ с плотностями

$$q_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k}\, e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}},$$

$$\tilde{q}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k}\, e^{-\frac{(x-\tilde{\mu}_k)^2}{2\sigma_k^2}}.$$

Тогда

$$H(\alpha; \mathsf{Q}_k, \widetilde{\mathsf{Q}}_k) = \int_{\mathbb{R}} (d\mathsf{Q}_k)^{\alpha} (d\widetilde{\mathsf{Q}}_k)^{1-\alpha} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d\widetilde{\mathsf{Q}}_k}{d\mathsf{Q}_k} \right)^{1-\alpha} d\mathsf{Q}_k =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} q_k^{\alpha}(x) \widetilde{q}_k^{1-\alpha}(x)\, dx = \exp\left\{ -\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \left(\frac{\mu_k - \widetilde{\mu}_k}{\sigma_k} \right)^2 \right\}$$

и, следовательно,

$$H(\alpha; \mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}) = \exp\left\{ -\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_k - \widetilde{\mu}_k}{\sigma_k} \right)^2 \right\}. \tag{10}$$

Лемма 1. *Пусть* $(E^n, \mathscr{E}^n)$ — *измеримые пространства, наделенные вероятностными мерами* Q^n *и* $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$*,* $n \geqslant 1$*. Следующие утверждения являются равносильными* ($\mathfrak{z}^n = \frac{d\mathsf{Q}^n}{d\overline{\mathsf{Q}}^n}$, $Z^n = \frac{d\widetilde{\mathsf{Q}}^n}{d\mathsf{Q}^n}$, $\overline{\mathsf{Q}}^n = \frac{1}{2}(\mathsf{Q}^n + \widetilde{\mathsf{Q}}^n)$):

a) $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n)$;

b) $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim\limits_{n}}\ \widetilde{\mathsf{Q}}^n(\mathfrak{z}^n < \varepsilon) = 0$;

c) $\lim\limits_{N \uparrow \infty} \overline{\lim\limits_{n}}\ \widetilde{\mathsf{Q}}^n(Z^n > N) = 0$;

d) $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \underline{\lim\limits_{n}}\, H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 1$.

Доказательство леммы см. в [250, гл. V, лемма 1.6]. □

Доказательство утверждения (3) в вышеприведенной теореме 1 следует непосредственно из эквивалентности утверждений a) и c) в лемме 1, применяемой к $\mathsf{Q}^n = \widetilde{\mathsf{P}}_n$ и $\widetilde{\mathsf{Q}}^n = \mathsf{P}_n$:

$$(\mathsf{P}_n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}_n) \iff \lim_{N \uparrow \infty} \overline{\lim_{n}}\ \mathsf{P}\left(\frac{d\mathsf{P}_n}{d\widetilde{\mathsf{P}}_n} > N \right) = 0 \iff$$
$$\iff \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim_{n}}\ \mathsf{P}\left(\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n} < \varepsilon \right) = 0 \iff$$
$$\iff \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathsf{P}(Z_\infty < \varepsilon) = 0 \iff \mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1,$$

где Z_∞ есть $\lim \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$, существующий P-п. н. □

Утверждение об отсутствии асимптотического арбитража при выполнении условия контигуальности $(\mathsf{P}_n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}_n)$ вытекает из следствия к теореме 1 из § 3b и установленного свойства (3).

3. Обобщение теоремы 1 на общий (нестационарный) случай не вызывает каких-либо затруднений.

Будем придерживаться схемы, изложенной в п. 3 в § 3b.

Теорема 2. *Пусть* $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})_{n\geqslant 1}$ — *некоторая цепочка мартингальных мер на* (B^n, S^n)*-рынках* $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)} \sim \mathsf{P}^n_{k(n)})$.

Условие $(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})$ *гарантирует отсутствие асимптотического арбитража.*

Доказательство. Из равносильности условий a) и c) в лемме 1 заключаем, что

$$(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}) \iff \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim_n}\ \mathsf{P}^n(Z^n_{k(n)} < \varepsilon) = 0, \tag{11}$$

где $Z^n_{k(n)} = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}}{d\mathsf{P}^n_{k(n)}}$ и, напомним, $\mathsf{P}^n_{k(n)} = \mathsf{P}^n \,|\, \mathscr{F}^n_{k(n)}$.

Требуемое утверждение об отсутствии асимптотического арбитража при выполнении условия контигуальности $(\mathsf{P}^n_{k(n)}) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})$ следует из формулы (11) и теоремы 2 из § 3b. □

4. До сих пор условия отсутствия асимптотического арбитража формулировались в терминах асимптотических свойств отношений правдоподобия $Z^n_{k(n)}$ (теоремы 1 и 2 в § 3b) или в терминах контигуальности (теоремы 1 и 2 в настоящем параграфе). Приведенная выше лемма 1 в качестве необходимого и достаточного условия контигуальности $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n)$ дает условие, выраженное в терминах асимптотических свойств *интегралов Хеллингера* порядка $\alpha \in (0, 1)$:

$$(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n) \iff \lim_{\alpha\downarrow 0} \underline{\lim_n}\ H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 1. \tag{12}$$

В ряде случаев оперирование с такими интегралами не представляет трудностей и быстро приводит к установлению отсутствия асимптотического арбитража. (См. далее примеры в п. 5.)

В этом смысле простейшим является случай прямого произведения мер.

Именно, будем предполагать, что

$$E^n = E^n_1 \times \ldots \times E^n_{k(n)}, \qquad \mathscr{E}^n = \mathscr{E}^n_1 \times \ldots \times \mathscr{E}^n_{k(n)},$$
$$\mathsf{Q}^n = \mathsf{Q}^n_1 \times \ldots \times \mathsf{Q}^n_{k(n)}, \quad \widetilde{\mathsf{Q}}^n = \widetilde{\mathsf{Q}}^n_1 \times \ldots \times \widetilde{\mathsf{Q}}^n_{k(n)},$$

где Q^n_k и $\widetilde{\mathsf{Q}}^n_k$ — вероятностные меры на $(E^n_k, \mathscr{E}^n_k)$.

Ясно, что в таком случае

$$H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = \prod_{k=1}^{k(n)} H(\alpha; \mathsf{Q}^n_k, \widetilde{\mathsf{Q}}^n_k) = \prod_{k=1}^{k(n)} \bigl[1 - \bigl(1 - H(\alpha; \mathsf{Q}^n_k, \widetilde{\mathsf{Q}}^n_k)\bigr)\bigr] \tag{13}$$

и

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \underline{\lim_n}\ H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 1 \iff \lim_{\alpha\downarrow 0} \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{k(n)} \bigl(1 - H(\alpha; \mathsf{Q}^n_k, \widetilde{\mathsf{Q}}^n_k)\bigr) = 0. \tag{14}$$

Тем самым, в рассматриваемом случае прямого произведения

$$(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\mathsf{Q}^n) \iff \lim_{\alpha\downarrow 0} \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{k(n)} \bigl(1-H(\alpha; \mathsf{Q}_k^n, \widetilde{\mathsf{Q}}_k^n)\bigr) = 0. \tag{15}$$

5. Приведем некоторые примеры, с одной стороны, показывающие эффективность критериев отсутствия асимптотического арбитража, основанных на интегралах Хеллингера порядка α, и, с другой стороны, проясняющие рассуждения и выводы теории *APT*, изложенной в § 2d гл. I. Примеры 1 и 2 являются частными случаями примеров, рассмотренных в работе [260].

Пример 1 («большой стационарный» рынок с $d(n)=1$ и $k(n)=n$). Будем считать, что имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, где $\Omega = \{-1,1\}^\infty$ — пространство двоичных последовательностей $x=(x_1,x_2,\dots)$, $x_i=\pm 1$, с такой мерой P, что $\mathsf{P}\{x\colon (x_1,\dots,x_n)\}=2^{-n}$. Пусть $\varepsilon_i(x)=x_i$, $i=1,2,\dots$ Тем самым, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots)$ есть последовательность бернуллиевских случайных величин, $\mathsf{P}(\varepsilon_i=\pm 1)=\frac{1}{2}$.

Каждый (B^n,S^n)-рынок, действующий на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F}^n,\mathsf{P}^n)$, $\mathscr{F}^n=\mathscr{F}_n=\sigma(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ и $\mathsf{P}^n=\mathsf{P}|\mathscr{F}^n$, предполагается таким, что $B_k^n\equiv 1$ и $S^n=(S_1,\dots,S_n)$, где

$$S_k = S_{k-1}(1+\rho_k), \quad S_0=1, \tag{16}$$

$\rho_k=\mu_k+\sigma_k\varepsilon_k$, $\sigma_k>0$, $\max(-\sigma_k,\sigma_k-1)<\mu_k<\sigma_k$. (Ср. с условием (2) в § 1d гл. V.)

Перепишем равенство (16) в виде

$$S_k = S_{k-1}(1+\sigma_k(\varepsilon_k-b_k)), \tag{17}$$

где $b_k=-(\mu_k/\sigma_k)$. (Заметим, что $|b_k|<1$.)

Из формулы (17) и теоремы 2 из § 3f гл. V вытекает, что в рассматриваемом случае *существует* и притом *единственная* мартингальная мера, имеющая структуру прямого произведения, $\widetilde{\mathsf{P}}^n=\widetilde{\mathsf{P}}_1^n\times\widetilde{\mathsf{P}}_2^n\times\dots\times\widetilde{\mathsf{P}}_n^n$, относительно которой величины $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ независимы и

$$\widetilde{\mathsf{P}}^n(\varepsilon_k=1)=\frac{1}{2}(1+b_k), \quad \widetilde{\mathsf{P}}^n(\varepsilon_k=-1)=\frac{1}{2}(1-b_k).$$

Поскольку

$$H(\alpha;\widetilde{\mathsf{P}}^n,\mathsf{P}^n)=\prod_{k=1}^n\left[\frac{(1+b_k)^\alpha+(1-b_k)^\alpha}{2}\right], \tag{18}$$

из формул (12) и (15) выводим, что

$$(\mathsf{P}^n)\lhd(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \iff \lim_{\alpha\downarrow 0}\underline{\lim_n}\prod_{k=1}^n\left[\frac{(1+b_k)^\alpha+(1-b_k)^\alpha}{2}\right]=1 \iff$$

$$\iff \lim_{\alpha\downarrow 0}\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^n\left[1-\frac{(1+b_k)^\alpha+(1-b_k)^\alpha}{2}\right]=0.$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$(\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n) \iff \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty.$$

Вспоминая, что $b_k = -\dfrac{\mu_k}{\sigma_k}$, и применяя теорему 1, находим, что условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\dfrac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2 < \infty$ является *необходимым* и *достаточным* для отсутствия асимптотического арбитража на рассматриваемом «большом стационарном» рынке.

Пример 2 («большой» рынок с $k(n) \equiv 1$ и $d(n) = n$)**.** Будем рассматривать одношаговую модель (B^n, S^n)-рынков, предполагая, что $B^n = (B_k^n)$, $S^n = (S_k^0, S_k^1, \ldots, S_k^{n-1})$, где $k = 0, 1$ и $B_0^n = B_1^n = 1$, а

$$S_1^i = S_0^i(1+\rho^i), \quad S_0^i > 0, \tag{19}$$

где

$$\rho^0 = \mu_0 + \sigma_0 \varepsilon_0, \tag{20}$$

$$\rho^i = \mu_i + \sigma_i(c_i \varepsilon_0 + \bar{c}_i \varepsilon_i), \quad i \geqslant 1. \tag{21}$$

Предполагается также, что $\sigma_i > 0$, $\bar{c}_i > 0$, $c_i^2 + \bar{c}_i^2 = 1$ и $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ — последовательность независимых бернуллиевских случайных величин, принимающих два значения ± 1 с вероятностями $\dfrac{1}{2}$.

В связи с теориями *CAPM* и *APT* полезно сейчас представлять S_k^i, $i \geqslant 1$, как стоимость некоторой акции в момент k, торгуемой на «большом», «глобальном» рынке, а S_k^0 — как индекс этого рынка (скажем, индекс S&P 500 на рынке акций тех пятисот компаний, по которым составляется этот индекс; см. п. 6 в § 1b гл. I).

Пусть $\beta_i = \dfrac{c_i \sigma_i}{\sigma_0}$, $i \geqslant 1$,

$$b_0 = -\frac{\mu_0}{\sigma_0}, \quad b_i = \frac{\mu_0 \beta_i - \mu_i}{\sigma_i \bar{c}_i}, \tag{22}$$

причем $|b_0| \neq 1$, $|b_i| \neq 1$, $i \geqslant 1$.

В этих обозначениях из формул (19)—(21) находим, что

$$S_1^0 = S_0^0\big(1 + \sigma_0(\varepsilon_0 - b_0)\big), \tag{23}$$

и для $i \geqslant 1$ получаем

$$S_1^i = S_0^i\big(1 + \sigma_i c_i(\varepsilon_0 - b_0) + \sigma_i \bar{c}_i(\varepsilon_i - b_i)\big). \tag{24}$$

Если следовать изложенной выше схеме серий (B^n, S^n)-рынков, то можно считать, что каждый из них определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$, где $\mathscr{F}^n = \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$, $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}^n$ и Ω, P те же, что и в предыдущем примере.

Из формул (23) и (24) легко устанавливается, что в рассматриваемой схеме для каждого $n \geqslant 1$ заведомо *существует* (по крайней мере одна) мартингальная мера. Действительно, в качестве такой меры можно взять меру $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ (снова имеющую структуру прямого произведения), устроенную так, что относительно нее величины $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ независимы,

$$\widetilde{\mathsf{P}}^n(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2}(1+b_i), \quad \widetilde{\mathsf{P}}^n(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}(1-b_i).$$

Непосредственно видим, что

$$H(\alpha; \widetilde{\mathsf{P}}^n, \mathsf{P}^n) = \prod_{i=0}^{n-1} \left[\frac{(1+b_i)^\alpha + (1-b_i)^\alpha}{2} \right]. \tag{25}$$

Как и в предыдущем примере, отсюда заключаем, что

$$(\mathsf{P}^n) \vartriangleleft (\widetilde{\mathsf{P}}^n) \iff \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 < \infty,$$

и, следовательно, в силу теоремы 2 условие

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_0 \beta_i - \mu_i}{\sigma_i \bar{c}_i} \right)^2 < \infty \tag{26}$$

(в дополнение к условиям $\left|\dfrac{\mu_0}{\sigma_0}\right| < 1$, $\left|\dfrac{\mu_o \beta_i - \mu_i}{\sigma_i \bar{c}_i}\right| < 1$, $i \geqslant 1$) гарантирует отсутствие асимптотического арбитража. (Ср. (26) с формулами (4) из § 2c гл. I и (19) из § 2d гл. I.)

Замечание 2. Следует подчеркнуть принципиальную разницу в рассмотренных примерах. В первом из них, где временнóй параметр $k \leqslant n$, существует *единственная* мартингальная мера $\widetilde{\mathsf{P}}^n$, что и дало возможность утверждать (в силу теоремы 1), что условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2 < \infty$ является необходимым и достаточным для отсутствия асимптотического арбитража.

Во втором же примере, где n играет роль номера серии, мера $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ не является единственной для $n \geqslant 1$, что и поясняет тот факт, что условие (26) является лишь достаточным для отсутствия асимптотического арбитража. (Как показывается в работе [260], необходимым и достаточным является условие $\varliminf\limits_{i} [\min(1+b_i, 1-b_i)] > 0$.)

Пример 3. Рассмотрим стационарный логарифмически-гауссовский (§ 3c гл. V) рынок $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n), n \geqslant 1\}$, $B_k^n \equiv 1$, $S^n = (S_0, S_1, \ldots, S_n)$, где

$$S_k = S_0 e^{h_1 + \ldots + h_k}, \quad S_0 > 0. \tag{27}$$

Предполагается, что $h_k = \mu_k + \sigma_k \varepsilon_k$, $k \geqslant 1$, где $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ — последовательность независимых нормально распределенных, $\mathscr{N}(0, 1)$, случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, и $\sigma_k > 0$, $k \geqslant 1$.

Пусть $\mathscr{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} | \mathscr{F}_n$, $n \geqslant 1$. В § 3c гл. V было показано, что если

$$Z_n = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2}\right)\varepsilon_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2}\right)^2\right\}, \tag{28}$$

то по мере $\widetilde{\mathsf{P}}_n$, $d\widetilde{\mathsf{P}}_n = Z_n\, d\mathsf{P}_n$, последовательность цен $(S_k)_{k\leqslant n}$ образует мартингал, при этом $\mathrm{Law}(h_k \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_n) = \mathscr{N}(\widetilde{\mu}_k, \sigma_k)$,

$$\widetilde{\mu}_k = -\frac{\sigma_k^2}{2}, \quad k \leqslant n.$$

Отсюда легко найти, пользуясь формулой (10), что

$$H(\alpha; \widetilde{\mathsf{P}}_n, \mathsf{P}_n) = \exp\left\{-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2}\right)^2\right\}. \tag{29}$$

Из формулы (12) следует, что

$$(\mathsf{P}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n) \iff \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2}\right)^2 < \infty,$$

и, значит, из теоремы 1 вытекает, что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} + \frac{\sigma_k}{2}\right)^2 < \infty \tag{30}$$

гарантирует отсутствие асимптотического арбитража.

Замечание 3. Если $\dfrac{\mu_k}{\sigma_k} + \dfrac{\sigma_k}{2} = 0$, т. е.

$$\mu_k = -\frac{\sigma_k^2}{2}, \tag{31}$$

то исходная вероятностная мера P является мартингальной для последовательности $S = (S_k)_{k\geqslant 0}$.

Отметим, что условие (30) является также необходимым и достаточным для контигуальности $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd (\mathsf{P}^n)$. Тем самым, это условие необходимо и достаточно для взаимной контигуальности последовательностей мер (P^n) и $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)$, обозначаемой $(\mathsf{P}^n) \lhd\rhd (\widetilde{\mathsf{P}}^n)$.

6. Кратко остановимся на понятии *полной асимптотической разделимости*, являющейся естественным асимптотическим аналогом понятия сингулярности.

Определение 3. Пусть на измеримых пространствах $(E^n, \mathscr{E}^n)$ заданы вероятностные меры Q^n и $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$, $n \geqslant 1$.

Говорят, что последовательности $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n)_{n\geqslant 1}$ и $(\mathsf{Q}^n)_{n\geqslant 1}$ удовлетворяют свойству *полной асимптотической разделимости* (обозначение: $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \vartriangle (\mathsf{Q}^n)$), если существует подпоследовательность $n_k \uparrow \infty$ при $k \uparrow \infty$ и для каждого k существуют множества $A^{n_k} \in \mathscr{E}^{n_k}$ такие, что $\mathsf{Q}^{n_k}(A^{n_k}) \to 1$ и $\widetilde{\mathsf{Q}}^{n_k}(A^{n_k}) \to 0$ при $k \uparrow \infty$.

Лемма 2. *Пусть* $(E^n, \mathscr{E}^n)$ — *измеримые пространства, наделенные вероятностными мерами* Q^n *и* $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$, $n \geqslant 1$. *Следующие утверждения являются равносильными* ($\mathfrak{z}^n = \dfrac{d\mathsf{Q}^n}{d\overline{\mathsf{Q}}^n}$, $Z^n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{Q}}^n}{d\mathsf{Q}^n}$, $\overline{\mathsf{Q}}^n = \dfrac{1}{2}(\mathsf{Q}^n + \widetilde{\mathsf{Q}}^n)$):

a) $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \vartriangle (\mathsf{P}^n)$;

b) $\underline{\lim}_n \widetilde{\mathsf{Q}}^n(\mathfrak{z}^n \geqslant \varepsilon) = 0$ *для всех* $\varepsilon > 0$;

c) $\overline{\lim}_n \widetilde{\mathsf{Q}}^n(Z^n \leqslant N) = 0$ *для всех* $N > 0$;

d) $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \underline{\lim}_n H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 0$;

e) $\underline{\lim}_n H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 0$ *для всех* $\alpha \in (0, 1)$;

f) $\underline{\lim}_n H(\alpha; \mathsf{Q}^n, \widetilde{\mathsf{Q}}^n) = 0$ *для некоторого* $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство леммы см. в [250, гл. V, лемма 1.9]. □

7. Проведенный в примерах 1—3 анализ отсутствия асимптотического арбитража показывает эффективность обращения к критериям, выраженным в терминах асимптотических свойств интегралов Хеллингера порядка $\alpha > 0$.

В случае *фильтрованных* вероятностных пространств (как в примерах 1 и 3) полезным оказывается обращение к так называемому *процессу Хеллингера*, в терминах свойств которого также можно давать критерии абсолютной непрерывности, контигуальности и других «взаимных» свойств вероятностных мер.

Нижеследующее изложение можно рассматривать как введение в круг вопросов, связанных с процессом Хеллингера, на примере случая *дискретного* времени. (Подробнее см. [250, гл. IV, V].)

Предположим, что заданы две вероятностные меры P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ на фильтрованном измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0})$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_n$.

Обозначим через $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}|\mathscr{F}_n$ и $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{P}}|\mathscr{F}_n$ их сужения на $\mathscr{F}_n$, $n \geqslant 1$, $\mathsf{Q} = \dfrac{1}{2}(\mathsf{P} + \widetilde{\mathsf{P}})$, $\mathsf{Q}_n = \mathsf{Q}|\mathscr{F}_n$.

Пусть $\mathfrak{z}_n = \dfrac{d\mathsf{P}_n}{d\mathsf{Q}_n}$, $\tilde{\mathfrak{z}}_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{Q}_n}$, $\beta_n = \dfrac{\mathfrak{z}_n}{\mathfrak{z}_{n-1}}$ и $\widetilde{\beta}_n = \dfrac{\tilde{\mathfrak{z}}_n}{\tilde{\mathfrak{z}}_{n-1}}$ (считая $\dfrac{0}{0} = 0$; напомним, что $\mathfrak{z}_n = 0$, если $\mathfrak{z}_{n-1} = 0$, и также $\tilde{\mathfrak{z}}_n = 0$, если $\tilde{\mathfrak{z}}_{n-1} = 0$).

В этих обозначениях интеграл Хеллингера $H_n(\alpha) \equiv H(\alpha; \mathsf{P}_n, \widetilde{\mathsf{P}}_n)$ порядка α может быть записан в виде

$$H_n(\alpha) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\, \mathfrak{z}_n^{\alpha}\, \tilde{\mathfrak{z}}_n^{1-\alpha}. \tag{32}$$

Обратимся к процессу $Y(\alpha) = (Y_n(\alpha))_{n\geqslant 0}$, где

$$Y_n(\alpha) = \mathfrak{z}_n^{\alpha}\, \tilde{\mathfrak{z}}_n^{1-\alpha}. \tag{33}$$

Пусть $f_\alpha(u, v) = u^\alpha v^{1-\alpha}$. Эта функция является выпуклой вниз (для $u \geqslant 0$, $v \geqslant$

$\geqslant 0)$, и в силу неравенства Иенсена для $m \leqslant n$ (Q-п. н.) имеем

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(Y_n(\alpha) \,|\, \mathscr{F}_m) \leqslant Y_m(\alpha). \tag{34}$$

Таким образом, последовательность $Y(\alpha) = (Y_n(\alpha), \mathscr{F}_n, \mathsf{Q})$ является (ограниченным) супермартингалом, который согласно разложению Дуба (гл. II, § 1b) может быть представлен в виде

$$Y_n(\alpha) = M_n(\alpha) - A_n(\alpha), \tag{35}$$

где $M(\alpha) = (M_n(\alpha), \mathscr{F}_n, \mathsf{Q})$ — мартингал и $A(\alpha) = (A_n(\alpha), \mathscr{F}_{n-1}, \mathsf{Q})$ — предсказуемый неубывающий процесс, $A_0(\alpha) = 0$.

Конкретная структура (см. формулу (33)) процесса $Y(\alpha)$ позволяет для предсказуемого процесса $A(\alpha)$ дать представление следующего вида:

$$A_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}(\alpha)\, \Delta h_k(\alpha) \tag{36}$$

с некоторым неубывающим предсказуемым процессом $h(\alpha) = (h_k(\alpha))_{k \geqslant 0}$, $h_0(\alpha) = 0$.

Такой процесс определяется, вообще говоря, неоднозначно. Например, следующие процессы:

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(1 - \beta_k^{\alpha} \widetilde{\beta}_k^{1-\alpha} \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{37}$$

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(\varphi_\alpha(\beta_k, \widetilde{\beta}_k) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{38}$$

где $\varphi_\alpha(u, v) = \alpha u + (1-\alpha)v - u^\alpha v^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяют сформулированным требованиям, что непосредственно устанавливается проверкой того, что для них процесс $M(\alpha) = (M_n(\alpha), \mathscr{F}_n, \mathsf{Q})$,

$$M_n(\alpha) = Y_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}(\alpha)\, \Delta h_k(\alpha), \tag{39}$$

является мартингалом. (См. также в этой связи [250, гл. IV, § 1e].)

Определение 4. Всякий неубывающий предсказуемый процесс $h(\alpha) = (h_k(\alpha))_{k \geqslant 0}$, $h_0(\alpha) = 0$, для которого процесс $M(\alpha) = (M_k(\alpha), \mathscr{F}_k, \mathsf{Q})_{k \geqslant 0}$, определяемый формулой (39), является мартингалом, называется *процессом Хеллингера порядка* $\alpha \in (0, 1)$.

Замечание 4. Пусть $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, т. е. $\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n$, $n \geqslant 0$, $Z_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$ и $\rho_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}}$. Тогда процессы $h_n(\alpha)$, задаваемые формулами (37) и (38), могут быть представлены в следующем виде:

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(1-\rho_k^{1-\alpha} \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{40}$$

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(\varphi_\alpha(1, \rho_k) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}). \tag{41}$$

Замечание 5. Рассмотрим схему прямого произведения, считая $\Omega = E_1 \times \times E_2 \times \ldots$, $\mathscr{F} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 \otimes \ldots$, $\mathsf{P} = \mathsf{Q}_1 \times \mathsf{Q}_2 \times \ldots$, $\widetilde{\mathsf{P}} = \widetilde{\mathsf{Q}}_1 \times \widetilde{\mathsf{Q}}_2 \times \ldots$, где Q_i и $\widetilde{\mathsf{Q}}_i$ — вероятностные меры на $(E_i, \mathscr{E}_i)$.

В этом случае $\mathscr{F}_n = \mathscr{E}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{E}_n$, $\mathsf{P}_n = \mathsf{Q}_1 \times \ldots \times \mathsf{Q}_n$, $\widetilde{\mathsf{P}}_n = \widetilde{\mathsf{Q}}_1 \times \ldots \times \widetilde{\mathsf{Q}}_n$. Тогда предположение $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathsf{Q}}_n \ll \mathsf{Q}_n$, $n \geqslant 1$, и имеем $\rho_n = = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{Q}}_n}{d\mathsf{Q}_n}$.

Поскольку $\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\, \rho_n = 1$, то видим, что правые части формул (36) и (37) совпадают, и определяемый ими процесс Хеллингера $h(\alpha) = (h_n(\alpha))$,

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(1-\rho_k^{1-\alpha}), \quad n \geqslant 1,$$

является *детерминированным* и

$$h_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} (1 - H(\alpha; \mathsf{Q}_k, \widetilde{\mathsf{Q}}_k)). \tag{42}$$

Если $H_n(\alpha) = H(\alpha; \mathsf{P}_n, \widetilde{\mathsf{P}}_n)$, то в рассматриваемом случае прямого произведения

$$H_n(\alpha) = H_{n-1}(\alpha) H(\alpha; \mathsf{Q}_n; \widetilde{\mathsf{Q}}_n) = H_{n-1}(\alpha)\big[1 - (1 - H(\alpha; \mathsf{Q}_n, \widetilde{\mathsf{Q}}_n))\big].$$

С учетом обозначения (42), отсюда получаем

$$\Delta H_n(\alpha) = -H_{n-1}(\alpha)\, \Delta h_n(\alpha).$$

С разностными уравнениями такого типа мы уже имели дело в гл. II (см. формулу (11) в § 1а), где их решения записывались с помощью *стохастической экспоненты*:

$$H_n(\alpha) = H_0(\alpha) \mathscr{E}(-h(\alpha))_n,$$

где

$$\mathscr{E}(-h(\alpha))_n = e^{-h_n(\alpha)} \prod_{k=1}^{n} (1 - \Delta h_k(\alpha)) e^{\Delta h_k(\alpha)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1 - \Delta h_k(\alpha)) \quad \Bigg(= \prod_{k=1}^{n} H(\alpha; \mathsf{Q}_k, \widetilde{\mathsf{Q}}_k) \Bigg),$$

что полностью согласуется с тем, что в рассматриваемом случае

$$H_n(\alpha) = H_0(\alpha) \prod_{k=1}^{n} H(\alpha; \mathsf{Q}_k, \widetilde{\mathsf{Q}}_k).$$

Следующие результаты (в схеме серий) раскрывают роль этого понятия в проблематике контигуальности и полной асимптотической разделимости последовательностей вероятностных мер $(\mathsf{P}^n)_{n\geqslant 1}$ и $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)_{n\geqslant 1}$, задаваемых на фильтрованных измеримых пространствах $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}^n_k)_{k\leqslant k(n)})$, $n \geqslant 1$, $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}^n_{k(n)}$, $\mathscr{F}^n_0 = \{\varnothing, \Omega^n\}$.

По аналогии с формулой (39) и с очевидными изменениями в обозначениях, вызванными схемой серий, пусть

$$h^n_{k(n)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{k(n)} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}^n}\big(1-(\beta^n_k)^{\alpha}(\widetilde{\beta}^n_k)^{1-\alpha} \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}\big) \tag{42$'$}$$

— процесс Хеллингера порядка $\alpha \in (0, 1)$, отвечающий мерам P^n и $\widetilde{\mathsf{P}}^n$.

Лемма 3. *Следующие условия являются эквивалентными:*

a) $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \triangleleft (\mathsf{P}^n)$;
b) $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_0) \triangleleft (\mathsf{P}^n_0)$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \varlimsup_{n} \widetilde{\mathsf{P}}^n(h^n_{k(n)}(\alpha) > \varepsilon) = 0. \tag{43}$$

Следствие. *Пусть рассматривается стационарный случай, когда* P *и* $\widetilde{\mathsf{P}}$ — *две вероятностные меры, заданные на измеримом фильтрованном пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0})$, $\mathsf{P}_N = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_N$, $\widetilde{\mathsf{P}}_N = \widetilde{\mathsf{P}}\,|\,\mathscr{F}_N$.

Для любого $N \geqslant 1$ *абсолютная непрерывность* $\widetilde{\mathsf{P}}_N \ll \mathsf{P}_N$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{\mathsf{P}}_0 \ll \mathsf{P}_0 \quad \textit{и} \quad h_N(\alpha) \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{P}}} 0, \quad \alpha \downarrow 0. \tag{44}$$

Лемма 4. *Если для любого* $L \geqslant 0$ *выполняется равенство*

$$\varlimsup_{n} \widetilde{\mathsf{P}}^n\Big(h^n_{k(n)}\Big(\frac{1}{2}\Big) > L\Big) = 1, \tag{45}$$

то $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \,\triangle\, (\mathsf{P}^n)$.

Следствие. *В стационарном случае условие* $\widetilde{\mathsf{P}}_0 \perp \mathsf{P}_0$ *или условие*

$$\widetilde{\mathsf{P}}\Big(h_N\Big(\frac{1}{2}\Big) = \infty\Big) = 1 \tag{46}$$

достаточны для $\widetilde{\mathsf{P}}_N \perp \mathsf{P}_N$.

Особенно просто в стационарном случае критерии для $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$ и $\widetilde{\mathsf{P}} \perp \mathsf{P}$ выглядят при дополнительном предположении, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ (т. е. $\widetilde{\mathsf{P}}_n \ll \mathsf{P}_n$, $n \geqslant 0$):

$$\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P} \iff \widetilde{\mathsf{P}}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\big[(1-\sqrt{\alpha_n}\,)^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\big] < \infty\Big\} = 1,$$

$$\widetilde{\mathsf{P}} \perp \mathsf{P} \iff \widetilde{\mathsf{P}}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\big[(1-\sqrt{\alpha_n}\,)^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\big] = \infty\Big\} = 1,$$

где $\alpha_n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_n}{d\mathsf{P}_n}$.

Доказательство лемм 3, 4 и следствий из них см. в [250, гл. V, § 2c; гл. IV, § 2c]. □

8. Обратимся к доказательству *необходимости* условий (9) и (15) в теоремах 1 и 2 из предыдущего параграфа.

С этой целью полезно обратиться к следующему обобщению понятия контигуальности, введенному в книге [260] в связи с вопросами асимптотического арбитража на *неполных* рынках.

Будем предполагать, что при каждом $n \geqslant 0$ на измеримом пространстве $(E^n, \mathscr{E}^n)$ задана вероятностная мера $\widetilde{\mathsf{Q}}^n$ и некоторое *семейство* $\mathbb{Q}^n = \{\mathsf{Q}^n\}$ вероятностных мер Q^n. (В дальнейшем в качестве $\mathbb{Q}^n$ будут браться семейства $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ *мартингальных* мер.)

С каждым семейством $\mathbb{Q}^n = \{\mathsf{Q}^n\}$ мер Q^n свяжем их *верхнюю огибающую* $\sup \mathsf{Q}^n$ — такую функцию множеств $A \in \mathscr{E}^n$, что

$$(\sup \mathsf{Q}^n)(A) = \sup_{\mathsf{Q}^n \in \mathbb{Q}^n} \mathsf{Q}^n(A). \tag{47}$$

Будем обозначать через $\operatorname{conv} \mathbb{Q}^n$ выпуклую оболочку семейства $\mathbb{Q}^n$.

Определение 5. Последовательность мер $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n)_{n\geqslant 1}$ называется *контигуальной с последовательностью верхних огибающих* $(\sup \mathsf{Q}^n)_{n\geqslant 1}$ (обозначение: $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\sup \mathsf{Q}^n)$), если для всякой последовательности множеств $A^n \in \mathscr{E}^n$, $n \geqslant 1$, $(\sup \mathsf{Q}^n)(A^n) \to 0$, выполнено также и свойство $\widetilde{\mathsf{Q}}^n(A^n) \to 0$.

Для $\mathsf{Q} \in \operatorname{conv} \mathbb{Q}^n$ пусть

$$\mathfrak{z}^n(\mathsf{Q}) = \frac{d\mathsf{Q}}{d\overline{\mathsf{Q}}^n}, \quad Z^n(\mathsf{Q}) = \frac{d\widetilde{\mathsf{Q}}^n}{d\mathsf{Q}},$$

где $\overline{\mathsf{Q}}^n = \frac{1}{2}(\mathsf{Q} + \widetilde{\mathsf{Q}}^n)$.

Следующий результат из книги [260] является непосредственным обобщением утверждений леммы 1.

Лемма 5. *Имеет место равносильность следующих условий:*

a) $(\widetilde{\mathsf{Q}}^n) \lhd (\sup \mathsf{Q}^n)$;

b) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \varlimsup\limits_{n} \inf\limits_{\mathsf{Q}\in\operatorname{conv}\mathbb{Q}^n} \widetilde{\mathsf{Q}}^n(\mathfrak{z}^n(\mathsf{Q})<\varepsilon)=0;$

c) $\lim\limits_{N\uparrow\infty} \varlimsup\limits_{n} \inf\limits_{\mathsf{Q}\in\operatorname{conv}\mathbb{Q}^n} \widetilde{\mathsf{Q}}^n(Z^n(\mathsf{Q})>N)=0;$

d) $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} \varliminf\limits_{n} \sup\limits_{\mathsf{Q}\in\operatorname{conv}\mathbb{Q}^n} \mathsf{H}(\alpha;\mathsf{Q},\widetilde{\mathsf{Q}}^n)=1.$

9. Переходя непосредственно к доказательству необходимости условий (9) и (15) в теоремах 1 и 2 из § 3b, будем полагать $\widetilde{\mathsf{Q}}^n=\mathsf{P}^n$ $(\equiv \mathsf{P}^n_{k(n)})$ и в качестве семейства $\mathbb{Q}^n$ будем брать, как это уже отмечалось, семейство $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ всех мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}$, $n\geqslant 1$.

Ясно, что в рассматриваемом случае $\operatorname{conv}\mathbb{Q}^n$ совпадает с самим семейством $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ и поэтому условие c) в лемме 5 принимает следующий вид:

$$\lim_{N\uparrow\infty} \varlimsup_{n} \inf_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)})} \mathsf{P}^n_{k(n)}\left(\frac{d\mathsf{P}^n_{k(n)}}{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}}>N\right)=0,$$

что равносильно (поскольку $\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}\sim\mathsf{P}^n_{k(n)}$) условию

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varlimsup_{n} \inf_{Z^n_{k(n)}\in\mathbb{Z}^n_{k(n)}} \mathsf{P}^n_{k(n)}(Z^n_{k(n)}<\varepsilon)=0, \tag{48}$$

где

$$\mathbb{Z}^n_{k(n)}=\left\{Z^n_{k(n)}\colon Z^n_{k(n)}=\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}}{d\mathsf{P}^n_{k(n)}},\ \widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)})\right\}.$$

Поскольку (48) есть в точности условие (15) из § 3b, в силу эквивалентности условий a) и c) в лемме 5 можно утверждать, что достаточность в теореме 2 из § 3b может быть сформулирована также следующим образом: *выполнение условия*

$$(\mathsf{P}^n_{k(n)})\vartriangleleft(\sup\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}) \tag{49}$$

влечет отсутствие асимптотического арбитража.

Поэтому (опять-таки в силу эквивалентности условий a) и c) в лемме 5) для установления необходимости в теореме 2 из § 3b надо показать, что *отсутствие асимптотического арбитража влечет выполнение условия* (49).

Доказательство будем вести «от противного».

Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, предположим, что множества $A^n\in\mathscr{F}^n_{k(n)}$ таковы, что

$$(\sup\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})(A^n)\to 0, \tag{50}$$

но $\mathsf{P}^n_{k(n)}\to\alpha>0$.

Покажем, что в этом предположении *имеет место* асимптотический арбитраж.

С этой целью образуем процесс

$$X^n_k=\operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}\in\mathscr{P}(\mathsf{P}^n_{k(n)})} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)}}(I_{A^n}\,|\,\mathscr{F}^n_k),\qquad k\leqslant k(n). \tag{51}$$

Согласно теореме из § 2b процесс $X^n = (X_k^n)$ по каждой из мер $\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n \in \in \mathscr{P}(\mathsf{P}_{k(n)}^n)$ является супермартингалом, и в соответствии с теоремой из § 2d для этого процесса имеет место *опциональное* разложение:

$$X_k^n = X_0^n + \sum_{j=1}^k (\gamma_j^n, \Delta S_j^n) - C_k^n, \tag{52}$$

где $C_0^n = 0$, C_k^n — $\mathscr{F}_k^n$-измеримые величины и γ_k^n — $\mathscr{F}_{k-1}^n$-измеримые величины.

Основываясь на разложении (52), определим (при каждом $n \geqslant 1$) стратегию $\pi^n = (\beta^n, \gamma^n)$, $\beta^n = (\beta_k^n)_{k\geqslant 0}$ и $\gamma^n = (\gamma_k^n)_{k\geqslant 0}$, так, чтобы ее капитал $X_k^{\pi^n}$ совпадал с $X_0^n + \sum\limits_{j=1}^n (\gamma_j^n, \Delta S_j^n)$.

С этой целью достаточно выбрать β_0^n и γ_0^n так, чтобы $\beta_0^n + (\gamma_0^n, S_0^n) = X_0^n$ (для простоты полагаем всюду $B_k^n \equiv 1$), величины γ_k^n при $k \geqslant 1$ взять из разложения (52), а β_k^n определить из условия самофинансирования.

Для так определенных стратегий π^n очевидно, что $X_k^{\pi^n} = X_k^n + C_k^n \geqslant 0$ при всех $k \leqslant k(n)$ и

$$X_0^{\pi^n} = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n \in \mathscr{P}(\mathsf{P}_{k(n)}^n)} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n} I_{A^n} = \sup_{\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n \in \mathscr{P}(\mathsf{P}_{k(n)}^n)} \widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n(A^n) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

в соответствии с предположением (50).

Тем самым, для стратегии $\pi = (\pi^n)_{n\geqslant 1}$ выполнены условия (2) и (3) из определения 1 в § 3а.

Для завершения доказательства осталось теперь лишь заметить, что для построенной стратегии $\pi = (\pi^n)_{n\geqslant 1}$ выполнено и условие (4) из этого же определения 1, поскольку

$$\overline{\lim_n}\, \mathsf{P}^n(X_{k(n)}^n \geqslant 1) \geqslant \overline{\lim_n}\, \mathsf{P}^n(X_{k(n)}^n = 1) = \lim_n \mathsf{P}^n(A^n) = \alpha > 0.$$

Тем самым, необходимость в теореме 2, а также и в теореме 1 установлена.

Следствие. Чтобы еще раз подчеркнуть важность понятия контигуальности в проблемах асимптотического арбитража в моделях «больших» финансовых рынков, переформулируем теорему 2 в следующем (равносильном) виде: *на «большом» локально безарбитражном рынке* $(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{(B^n, S^n),\ n \geqslant \geqslant 1\}$ *условие* $(\mathsf{P}_{k(n)}^n) \lhd (\sup \widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n)$ *необходимо и достаточно для отсутствия асимптотического арбитража.*

Понятно, что в случае *полных* рынков это условие превращается в обычное условие контигуальности

$$(\mathsf{P}_{k(n)}^n) \lhd (\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n) \tag{53}$$

семейства $(\mathsf{P}_{k(n)}^n)_{n\geqslant 1}$ исходных вероятностных мер $\mathsf{P}_{k(n)}^n$ по отношению к семейству $(\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n)_{n\geqslant 1}$ мартингальных мер $\widetilde{\mathsf{P}}_{k(n)}^n$ (единственных при каждом $n \geqslant \geqslant 1$).

Замечание 6. В теоремах 1 и 2 достаточные условия отсутствия асимптотического арбитража формулировались в терминах выполнения свойства контигуальности (53) для *некоторой* цепочки мартингальных мер $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})$.

Интересно отметить, что на самом деле справедлив и обратный результат, установленный в [260]: если имеет место асимптотический арбитраж, то *найдется* цепочка мартингальных мер $(\widetilde{\mathsf{P}}^n_{k(n)})_{n\geqslant 1}$, для которой выполнено свойство контигуальности (53).

§ 3d. Некоторые аспекты аппроксимации и сходимости в схеме серий безарбитражных рынков

1. В рассмотренных в § 3a, b, c моделях «больших» финансовых рынков предполагалось, что имеется *схема серий* n-рынков (B^n, S^n), $n\geqslant 1$, каждый из которых является безарбитражным, и изучался вопрос об отсутствии *асимптотического арбитража*. Важно при этом отметить, что относительно *существования* какого-либо «предельного» рынка, скажем (B, S), не делалось никаких предположений.

В настоящем параграфе будет рассматриваться та ситуация, когда помимо «допредельных» n-рынков (B^n, S^n), заданных на вероятностных пространствах $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$, $n\geqslant 1$, имеется также и «предельный» рынок (B, S), заданный на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, причем при $n\to\infty$ имеет место (слабая) сходимость

$$\mathrm{Law}(B^n, S^n \,|\, \mathsf{P}^n) \to \mathrm{Law}(B, S \,|\, \mathsf{P}). \tag{1}$$

Основные вопросы, которыми мы будем далее интересоваться, состоят в выяснении того, что можно сказать (в предположении (1)) также и о сходимости

$$\mathrm{Law}(B^n, S^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(B, S \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}), \tag{2}$$

где $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ и $\widetilde{\mathsf{P}}$ — те или иные мартингальные меры из классов $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ и $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ соответственно, и каким образом выбрать подходящие меры $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ и $\widetilde{\mathsf{P}}$, для которых можно гарантировать сходимость (2).

В связи с последним вопросом целесообразно напомнить, что мы уже имели дело с *разными* способами построения мартингальных мер, основанными, например, на преобразованиях Гирсанова и Эшера. Напомним также, что понятие *минимальной* мартингальной меры, о котором шла речь в § 3d гл. V, возникло (в работах Г. Фёльмера и М. Швайцера; см., например, [167] и [429]) именно в связи с вопросами о том, какие мартингальные меры из $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ следует рассматривать в качестве наиболее «естественных» кандидатов при образовании цепей мер $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)_{n\geqslant 1}$, используемых для финансовых расчетов. (В этой связи не будет лишним подчеркнуть, что, скажем, расчеты цен хеджирования, рациональных стоимостей опционных контрактов осуществляются с привлечением *именно мартингальных мер* $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ и $\widetilde{\mathsf{P}}$, а не исходных (также говорят — *физических*) мер P^n и P; см., например, основную формулу для цены хеджирования европейского типа на неполных рынках (8) в § 1c или формулу (20) в § 4b.)

2. Переходя к рассмотрению поставленных вопросов, целесообразно напомнить, что в финансовой литературе весьма четко выделяются и своей простотой, и своей популярностью следующие две «классические» модели (B, S)-рынков:

- *модель Кокса—Росса—Рубинштейна*

(или биномиальная модель; § 1e гл. II) в случае дискретного времени и

- *модель Блэка—Мертона—Шоулса*

(или стандартная диффузионная модель, основанная на геометрическом броуновском движении; § 4b гл. III) в случае непрерывного времени.

При этом хорошо известно, что первая модель (с малым временны́м шагом $\Delta > 0$) является вполне удовлетворительной аппроксимацией второй модели, и результаты расчетов (скажем, для стандартных опционов), полученные для первой модели, близки к результатам расчетов для второй модели (B, S)-рынка, для которой

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t}, \tag{3}$$

где $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ — стандартный винеровский процесс.

В соответствии с известным из теории предельных теорем (см., например, [39] и [250]) *принципом инвариантности* винеровский процесс может возникать в результате предельных переходов в самых разнообразных схемах случайных блужданий. Поэтому нет ничего удивительного в том, что, скажем, для биномиальных моделей (B^n, S^n)-рынков (с дискретным временны́м интервалом $\Delta = 1/n$), заданных на некоторых вероятностных пространствах $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$, будет иметь место сходимость к (B, S)-модели Блэка—Мертона—Шоулса в том смысле, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость (1), где P — вероятностная мера, относительно которой процесс $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ является винеровским.

Заметим, что вопрос о справедливости сходимости (1) и для приведенных двух классических моделей, и для других моделей финансовых рынков — это, как следует из сказанного, только часть общей *проблемы сходимости* (B^n, S^n)-рынков к «предельному» (B, S)-рынку. Не менее важен также и вопрос о сходимости при $n \to \infty$ законов

$$\mathrm{Law}(B^n, S^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(B, S \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}), \tag{4}$$

где $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ и $\widetilde{\mathsf{P}}$ — *мартингальные* (риск-нейтральные) меры для (B^n, S^n)- и (B, S)-моделей соответственно.

При этом здесь важно иметь в виду следующие обстоятельства, связанные с *полнотой* и *неполнотой* рассматриваемых (безарбитражных) рынков.

Если (B^n, S^n)-рынки являются полными, то (по крайней мере при выполнении условий второй фундаментальной теоремы; § 4a гл. V) каждое из множеств $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ мартингальных мер состоит лишь из *одной* мартингальной меры, и вопрос о справедливости утверждения (4) при наличии сходимости (1) самым непосредственным образом связан с вопросами *контигуальности* семейств мер $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)$ и (P^n), находя свое достаточно полное разрешение в рамках *стохастического принципа инвариантности*, подробно изученного, например, в разделе 3 гл. X монографии [250].

Положение дел, однако, сильно усложняется, если рассматриваемые безарбитражные (B^n, S^n)-рынки являются *неполными*.

В этом случае множества мартингальных мер $\mathscr{P}(\mathsf{P}^n)$ состоят, вообще говоря, более чем из одного элемента, и тогда возникает непростой вопрос о выборе той *цепи* $(\widetilde{\mathsf{P}}^n)_{n\geqslant 1}$ соответствующих мартингальных мер, для которой можно гарантировать выполнение сходимости (4).

В соответствии с определением слабой сходимости утверждение (4) может быть переформулировано как утверждение о сходимости

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n} f(B^n, S^n) \to \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} f(B, S) \tag{4'}$$

для непрерывных ограниченных функционалов, определенных на пространстве (càdlàg) траекторий рассматриваемых процессов, в нашем контексте обычно предполагаемых семимартингалами.

Заметим, что если $Z^n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}^n}{d\mathsf{P}^n}$, $Z = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}$, то, поскольку

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n} f(B^n, S^n) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} Z^n f(B^n, S^n)$$

и

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} f(B, S) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}} Zf(B, S),$$

понятно, что вопрос о сходимости (4′) самым тесным образом связан с вопросом о сходимости

$$\operatorname{Law}(B^n, S^n, Z^n \,|\, \mathsf{P}^n) \to \operatorname{Law}(B, S, Z \,|\, \mathsf{P}), \tag{5}$$

относящимся к проблематике «функциональной сходимости» теории предельных теорем для случайных процессов. Подробнее см. [39] и [250].

Полезно отметить, что сходимость (4′) будет следовать из (5), если семейство случайных величин $\{Z^n f(B^n, S^n);\ n \geqslant 1\}$ является *равномерно интегрируемым*, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \varlimsup_{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\Big(|Z^n f(B^n, S^n)|\, I(|Z^n f(B^n, S^n)| > N)\Big) = 0.$$

3. В качестве примера рассмотрим вопрос о справедливости свойств (1) и (2) для «допредельных» моделей Кокса—Росса—Рубинштейна и «предельной» модели Блэка—Мертона—Шоулса, являющихся и безарбитражными, и полными.

Пусть $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathsf{P}^n)$ — вероятностное пространство, на котором задан биномиальный (B^n, S^n)-рынок, определяемый по типу «простых процентов» (§ 1a гл. II) с *кусочно постоянными траекториями* (§ 2a гл. IV): для $0 \leqslant t \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$ и $n \geqslant 1$ положим

$$B_t^n = B_0^n \prod_{k=1}^{[nt]} (1 + r_k^n), \tag{6}$$

$$S_t^n = S_0^n \prod_{k=1}^{[nt]} (1 + \rho_k^n), \tag{7}$$

где

$$r_k^n = \frac{r}{n}, \quad r \geqslant 0, \tag{8}$$

— *банковские процентные ставки* и

$$\rho_k^n = \frac{\mu}{n} + \xi_k^n, \quad \mu \geqslant 0, \tag{9}$$

— *рыночные процентные ставки*.

В *однородной* модели Кокса—Росса—Рубинштейна величины $\xi_1^n, \ldots, \xi_n^n$ являются *независимыми* и *одинаково распределенными*,

$$\mathsf{P}^n\left(\xi_k^n = \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = p, \quad \mathsf{P}^n\left(\xi_k^n = -\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = q, \tag{10}$$

где a, b, p и q — положительные константы, $p + q = 1$.

Из формул (9) и (10) находим, что

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\, \rho_k^n = \frac{\mu}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}(pb - qa), \tag{11}$$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n} (\rho_k^n)^2 = \frac{1}{n}(pb^2 + qa^2) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \tag{12}$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\, \rho_k^n = \frac{pq}{n}(b + a)^2 + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \tag{13}$$

При достаточно больших n величины $1 + \rho_k^n > 0$ и

$$\begin{aligned} S_t^n &= S_0^n \exp\left\{\sum_{k=1}^{[nt]} \ln(1 + \rho_k^n)\right\} = \\ &= S_0^n \exp\left\{\sum_{k=1}^{[nt]} \left(\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Предположим, что выполнено условие

$$pb - qa = 0. \tag{15}$$

Тогда, обозначая

$$\sigma^2 = pb^2 + qa^2 \tag{16}$$

и замечая, что $pq(b+a)^2 = \sigma^2$ и

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\, \rho_k^n = \frac{\mu}{n}, \quad \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}(\rho_k^n)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad \mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\, \rho_k^n = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{17}$$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] \to \sigma^2 t \tag{19}$$

при $n \to \infty$.

В рассматриваемом случае очевидным образом выполнено *условие Линдеберга*:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left[|\ln(1+\rho_k^n)|^2\, I(|\ln(1+\rho_k^n)| > \varepsilon)\right] = 0 \quad \text{для } \varepsilon > 0. \tag{20}$$

Поэтому из функциональной центральной предельной теоремы ([250, теорема 5.4, гл. VII]) вытекает, что (с $S_0^n \to S_0$)

$$\operatorname{Law}(S_t^n;\, t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}^n) \to \operatorname{Law}(S_t;\, t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}), \tag{21}$$

где

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\} \tag{22}$$

и $W = (W_t)_{t\leqslant 1}$ — некоторый винеровский (по мере P) процесс.

Тем самым, если $B_0^n \to B_0$, то

$$\operatorname{Law}(B_t^n, S_t^n;\, t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}^n) \to \operatorname{Law}(B_t, S_t;\, t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}), \tag{23}$$

т. е. имеет место сходимость (1).

Обратимся теперь к аналогу свойства (23) при замене мер P^n и P на мартингальные меры $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ и $\widetilde{\mathsf{P}}$.

Если для $k = 1, \ldots, n$ выполняются равенства

$$\widetilde{\mathsf{P}}^n\left(\xi_k^n = \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = \widetilde{p}^n, \quad \widetilde{\mathsf{P}}^n\left(\xi_k^n = -\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = \widetilde{q}^n$$

и относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ величины $\xi_1^n, \ldots, \xi_n^n$ являются независимыми, то условие мартингальности

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\left(\frac{S_k^n}{B_k^n}\,\middle|\,\mathscr{F}_{k-1}^n\right) = \frac{S_{k-1}^n}{B_{k-1}^n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

приводит к соотношениям

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\ \rho_k^n = r_k^n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

которые, очевидно, равносильны условию

$$b\widetilde{p}^n - a\widetilde{q}^n = \frac{r-\mu}{\sqrt{n}}. \tag{24}$$

Учитывая требование $\widetilde{p}^n + \widetilde{q}^n = 1$, отсюда находим

$$\begin{aligned} \widetilde{p}^n &= \frac{a}{a+b} + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{r-\mu}{a+b}, \\ \widetilde{q}^n &= \frac{b}{a+b} - \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{r-\mu}{a+b}. \end{aligned} \tag{25}$$

(Ср. с примером 2 в § 3f гл. V, где устанавливается также *единственность* мартингальной меры $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ и свойство *независимости* величин $\xi_1^n, \ldots, \xi_k^n$ по этой мере.)

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\ \rho_k^n &= \frac{r}{n}, \\ \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}(\rho_k^n)^2 &= \frac{\widetilde{\sigma}^2}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big), \\ \mathsf{D}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\ \rho_k^n &= \frac{\widetilde{\sigma}^2}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big), \end{aligned}$$

где $\widetilde{\sigma}^2 = ab$.

Заметим, что условия $p+q=1$ и $pb-qa=0$ приводят к тому, что $ab = pb^2 + qa^2$. Иначе говоря, $\sigma^2 = \widetilde{\sigma}^2$, и, значит,

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\Big[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\Big] \to \Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t, \quad \sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{D}_{\widetilde{\mathsf{P}}^n}\Big[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\Big] \to \sigma^2 t.$$

Условие Линдеберга (20) выполняется и при замене мер P^n на $\widetilde{\mathsf{P}}^n$. Поэтому, снова применяя функциональную центральную предельную теорему (с $S_0^n \to S_0$), находим, что

$$\mathrm{Law}(S_t^n;\ t \leqslant 1\,|\,\widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(S_t;\ t \leqslant 1\,|\,\widetilde{\mathsf{P}}), \tag{26}$$

где

$$S_t = S_0 \exp\Big\{\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma \widetilde{W}_t\Big\},$$

$\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\leqslant 1}$ — винеровский процесс по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, являющейся единственной мартингальной мерой, определяемой теоремой Гирсанова (§ 3е гл. III):

$$d\widetilde{\mathsf{P}} = \exp\Big\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu-r}{\sigma}\Big)^2\Big\}\,d\mathsf{P}.$$

При этом $\widetilde{W}_t = W_t + \dfrac{\mu-r}{\sigma}t$.

Тем самым, справедлива следующая

Теорема. *Если в «допредельных» моделях Кокса—Росса—Рубинштейна, определяемых формулами* (6)—(10)*, параметры* $a > 0$*,* $b > 0$*,* $p > 0$ *и* $q > 0$ *таковы, что* $pb - qa = 0$ *и* $p + q = 1$*, то одновременно имеют место сходимости* (21) *и* (26) *к «предельной» модели Блэка—Мертона—Шоулса.*

4. Теперь несколько видоизменим «допредельные» модели Кокса—Росса—Рубинштейна, отказавшись от «стеснительного» условия $pb-qa=0$, но, тем не менее, сохраняя возможность применения функциональной предельной теоремы.

С этой целью будем считать, что для нечетных значений $k=1, 3, \ldots$ величины ρ_k^n снова определяются формулами (9), а при четных $k=2, 4, \ldots$ имеем

$$\rho_k^n = \frac{\mu}{n} + \eta_k^n, \quad \mu > 0,$$

где

$$\mathsf{P}^n\left(\eta_k^n = -\frac{b}{\sqrt{n}}\right) = p, \quad \mathsf{P}^n\left(\eta_k^n = \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = q.$$

Тогда для $k=2, 4, \ldots$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\, \rho_k^n &= \frac{\mu}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}(pb-aq), \\
\mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\, (\rho_k^n)^2 &= \frac{1}{n}(pb^2+qa^2) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \\
\mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\, \rho_k^n &= \frac{pq}{n}(a+b)^2 + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Поэтому с учетом (для нечетных k) формул (11)—(13) находим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] &\to \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \\
\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{D}_{\mathsf{P}^n}\left[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\right] &\to \sigma^2 t,
\end{aligned}$$

где

$$\sigma^2 = pq(a+b)^2.$$

Тем самым, в рассматриваемой *неоднородной* модели Кокса—Росса—Рубинштейна справедлив тот же результат, что и в *однородном* случае:

$$\operatorname{Law}(S_t^n;\, t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}^n) \to \operatorname{Law}(S_t;\, t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}), \tag{27}$$

где процесс $S=(S_t)_{t\leqslant 1}$ определяется формулой (22) с $\sigma^2=pq(a+b)^2$.

Пусть теперь $\widehat{\mathsf{P}}^n$ — мартингальные меры, относительно которых величины $\rho_1^n, \ldots, \rho_n^n$ снова образуют последовательность независимых случайных величин,

$$\widehat{\mathsf{P}}^n\left(\xi_k^n = \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = \widehat{p}_k^n, \quad \widehat{\mathsf{P}}^n\left(\xi_k^n = -\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = \widehat{q}_k^n,$$

где $\widehat{p}_k^n = \widetilde{p}^n$ и $\widehat{q}_k^n = \widetilde{q}^n$ для нечетных k, и

$$\widehat{\mathsf{P}}^n\Big(\eta_k^n = -\frac{b}{\sqrt{n}}\Big) = \widehat{p}_k^n, \quad \widehat{\mathsf{P}}^n\Big(\eta_k^n = \frac{a}{\sqrt{n}}\Big) = \widehat{q}_k^n,$$

где $\widehat{p}_k^n$ и $\widehat{q}_k^n$ для четных k определяются (из требования мартингальности) по формулам $\widehat{p}_k^n = \widehat{p}^n$, $\widehat{q}_k^n = \widehat{q}^n$,

$$\begin{aligned} \widehat{p}^n &= \frac{a}{a+b} - \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{r-\mu}{a+b}, \\ \widehat{q}^n &= \frac{b}{a+b} + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{r-\mu}{a+b}. \end{aligned}$$

Тогда для *всех* $k = 1, \ldots, n$ имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}^n}\, \rho_k^n &= \frac{r}{n}, \\ \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}^n}(\rho_k^n)^2 &= \frac{ab}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big), \\ \mathsf{D}_{\widehat{\mathsf{P}}^n}\, \rho_k^n &= \frac{ab}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}_{\widehat{\mathsf{P}}^n}\Big[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\Big] &\to \Big(r - \frac{\widehat{\sigma}^2}{2}\Big)t, \\ \sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{D}_{\widehat{\mathsf{P}}^n}\Big[\rho_k^n - \frac{(\rho_k^n)^2}{2}\Big] &\to \widehat{\sigma}^2 t, \end{aligned}$$

где $\widehat{\sigma}^2 = ab$, и с учетом снова выполненного условия Линдеберга находим, что (с $S_0^n \to S_0$)

$$\mathrm{Law}(S_t^n;\, t \leqslant 1 \,|\, \widehat{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(S_t;\, t \leqslant 1 \,|\, \widehat{\mathsf{P}}), \tag{28}$$

где

$$S_t = S_0 \exp\Big\{\Big(r - \frac{\widehat{\sigma}^2}{2}\Big)t + \widehat{\sigma}\widehat{W}_t\Big\}$$

и $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t\leqslant 1}$ — винеровский процесс относительно меры $\widehat{\mathsf{P}}$,

$$d\widehat{\mathsf{P}} = \exp\Big\{-\frac{\mu - r}{\widehat{\sigma}}W_1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu - r}{\widehat{\sigma}}\Big)^2\Big\}\, d\mathsf{P}.$$

Обратим внимание на то, что, вообще говоря, $ab \neq pq(a+b)^2$, и, значит, $\widehat{\sigma}^2 \neq \sigma^2$. Тем самым, если в «предельной» модели волатильность есть σ^2 и параметры $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$ и $q > 0$ выбраны так, что $p + q = 1$ и $\sigma^2 = pq(a+b)^2$, то будет иметь место функциональная сходимость (27), однако в формуле (28) «предельная» волатильность $\widehat{\sigma}^2$ может оказаться (в отсутствие ранее использованного «стеснительного» условия $pb - aq = 0$) *отличной* от σ^2.

Приведенный пример *неоднородной* модели Кокса—Росса—Рубинштейна показывает, что при выборе этих моделей в качестве *аппроксимационных* для модели Блэка—Мертона—Шоулса с параметрами (μ, σ^2) надо быть достаточно осторожным, подбирая параметры (p, q, a, b) «допредельных» моделей, поскольку даже при наличии сходимости (27) относительно исходных вероятностных мер вполне может случиться, что соответствующая сходимость относительно мартингальных мер (сходимость к модели Блэка—Мертона—Шоулса с параметрами (μ, σ^2)) не имеет места. А это, в свою очередь, приводит к тому, что рациональные стоимости (хеджирования) $\mathbb{C}_1^n$ в «допредельных» моделях могут *не сходиться* к (ожидаемой) стоимости $\mathbb{C}_1$ в «предельной» модели.

Понятно, что аналогичная ситуация может возникнуть и в других аппроксимационных схемах.

5. В связи с рассмотренными выше случаями сходимости процессов $S^n = (S_t^n)_{t\leqslant 1}$ к процессу $S = (S_t)_{t\leqslant 1}$ — как относительно исходных вероятностных мер (P^n и P), так и относительно мартингальных мер ($\widetilde{\mathsf{P}}^n$ и $\widetilde{\mathsf{P}}$), — естественно привести некоторые общие результаты в этом направлении.

С этой целью, считая, для простоты рассмотрений, что $B_t^n \equiv 1$, $B_t \equiv 1$, $t \leqslant 1$, $n \geqslant 1$, отметим, прежде всего, что из слабой сходимости законов $\mathrm{Law}(S^n \,|\, \mathsf{P}^n)$ даже в предположении контигуальности $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd (\mathsf{P}^n)$, вообще говоря, не следует слабая сходимость $\mathrm{Law}(S^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n)$, хотя, тем не менее, последовательность $(\mathrm{Law}(S^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n))_{n\geqslant 1}$ будет *плотной* (подробнее см. раздел 3 в гл. X монографии [250]) и, следовательно, в принципе может иметь *несколько* предельных мер (по разным подпоследовательностям).

Один из стандартных приемов, позволяющих гарантировать *единственность* предельной вероятностной меры, состоит в том, чтобы помимо условия слабой сходимости законов $\mathrm{Law}(S^n \,|\, \mathsf{P}^n)$ и контигуальности $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd (\mathsf{P}^n)$ требовать также слабой сходимости *совместных* законов $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \mathsf{P}^n)$, где $Z^n = (Z_t^n)_{t\leqslant 1}$ и $Z_t^n = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t^n}{d\mathsf{P}_t^n}$ — плотности мер $\widetilde{\mathsf{P}}_t^n$ по мерам P_t^n ($\widetilde{\mathsf{P}}_t^n$ и P_t^n — сужения мер $\widetilde{\mathsf{P}}^n$ и P^n на σ-алгебры $\mathscr{F}_t^n$, входящие в стохастический базис $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}_t^n)_{t\leqslant 1}, \mathsf{P}^n)$, на котором определены процессы $S^n = (S_t^n)_{t\leqslant 1}$).

Тогда из обобщенной версии так называемой *третьей леммы Ле Кама* (см. [250, гл. X, теорема 3.3]) следует, что *последовательность законов* $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n)$ *слабо сходится к некоторой вероятностной мере, абсолютно непрерывной относительно меры, являющейся слабым пределом последовательности* $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \mathsf{P}^n)$, $n \geqslant 1$. *Если к тому же* $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \mathsf{P}^n) \to \mathrm{Law}(S, Z \,|\, \mathsf{P})$, *то* $\mathrm{Law}(S^n, Z^n \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \mathrm{Law}(S, Z \,|\, \widetilde{\mathsf{P}})$, *где мера* $\widetilde{\mathsf{P}}$ *такова, что* $d\widetilde{\mathsf{P}} = Z\, d\mathsf{P}$.

6. С целью иллюстрации этих результатов обратимся снова к рассмотренной выше модели Кокса—Росса—Рубинштейна (6)—(7), полагая для простоты $r = 0$, $B_0^n = 1$ и придавая этой модели тот вид, который использовался в п. 7

§ 3d гл. V при описании конструкции *минимальной* мартингальной меры. (См. также работу [392].)

Пусть $H_k^n = \sum\limits_{l=1}^{k} \rho_l^n$. Тогда если $pb - qa = 0$, то последовательность $M^n = (M_k^n)_{k \leqslant n}$, $M_k^n = \sum\limits_{l=1}^{k} \xi_l^n$, будет квадратично интегрируемым мартингалом с квадратической характеристикой $\langle M^n \rangle = (\langle M^n \rangle_k)_{k \leqslant n}$, где $\langle M^n \rangle_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \mathsf{D}\, \xi_l^n = \sigma^2 k$, $\sigma^2 = pb^2 + qa^2$ $(= ab)$.

Если положить $a_k^n = \dfrac{\mu}{\sigma^2}$, то разложению Дуба (§ 1b гл. II) последовательности $H^n = (H_k^n)_{k \leqslant n}$ можно придать (в терминах приращений) следующий вид:

$$\Delta H_k^n = a_k^n \, \Delta \langle M^n \rangle_k + \Delta M_k^n. \tag{29}$$

Пусть $b\mu < \sigma^2$. Тогда (минимальная) мера $\widetilde{\mathsf{P}}^n$,

$$d\widetilde{\mathsf{P}}^n = \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k^n \, \Delta M_k^n) \, d\mathsf{P}^n \tag{30}$$

(ср. с (31) в § 3d гл. V), будет *вероятностной* и к тому же (единственной) *мартингальной* мерой для последовательности $H^n = (H_k^n)_{k \leqslant n}$, что следует из изложения в п. 7 § 3d гл. V или может быть установлено прямой проверкой.

Положим

$$Z_t^n = \prod_{k=1}^{[nt]} (1 - a_k^n \, \Delta M_k^n x) = \mathscr{E}\Big(-\sum_{k \leqslant \cdot} a_k^n \, \Delta M_k^n\Big)_{[nt]} \tag{31}$$

и представим S_t^n в виде

$$\begin{aligned} S_t^n &= S_0^n \prod_{k=1}^{[nt]} (1 + \Delta H_k^n) = S_0^n \mathscr{E}(H^n)_{[nt]} = \\ &= S_0^n \mathscr{E}\Big(\sum_{k \leqslant \cdot} a_k^n \, \Delta \langle M^n \rangle_k + M_\cdot^n\Big)_{[nt]}. \end{aligned} \tag{32}$$

Пусть также $M = (M_t)_{t \leqslant 1}$ — квадратично интегрируемый мартингал (на некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \leqslant 1}, \mathsf{P})$) с квадратической характеристикой $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \leqslant 1}$, $a = (a_t)_{t \leqslant 1}$ — некоторый предсказуемый процесс, $a^2 \cdot \langle M \rangle_1 < \infty$ (т. е. $\int_0^1 a_t^2 \, d\langle M \rangle_t < \infty$),

$$H_t = \int_0^t a_s \, d\langle M \rangle_s + M_t \tag{33}$$

и

$$Z_t = \mathscr{E}\Big(-\int_0^\cdot a_s \, dM_s\Big)_t, \qquad S_t = S_0 \mathscr{E}(H)_t. \tag{34}$$

Структура выражений в формулах (31)—(34) подсказывает, что же надо потребовать от введенных объектов для того, чтобы иметь слабую сходимость

$$\operatorname{Law}(S_t^n, Z_t^n; t \leqslant 1 | \mathsf{P}^n) \to \operatorname{Law}(S_t, Z_t; t \leqslant 1 | \mathsf{P}). \tag{35}$$

Так, если $a^n = (a_t^n)_{t \leqslant 1}$, $M^n = (M_t^n)_{t \leqslant 1}$ и $\langle M^n \rangle = (\langle M^n \rangle_t)_{t \leqslant 1}$ — кусочно постоянные процессы, построенные по $(a_k^n)_{k \leqslant n}$, $(M_k^n)_{k \leqslant n}$ и $(\langle M^n \rangle_k)_{k \leqslant n}$, то для сходимости (35), очевидно, достаточно сходимости законов

$$\operatorname{Law}\left(M_t^n, \sum_{k=1}^{[nt]} a_k^n \,\Delta M_k^n, \sum_{k=1}^{[nt]} a_k^n \,\Delta \langle M^n \rangle_k; t \leqslant 1 \,\middle|\, \mathsf{P}^n\right)$$

к законам

$$\operatorname{Law}\left(M_t, \int_0^t a_s \, dM_s, \int_0^t a_s \, d\langle M \rangle_s; t \leqslant 1 \,\middle|\, \mathsf{P}\right)$$

и сходимости $S_0^n \to S_0$.

Разнообразные условия такой сходимости *мартингалов* и *стохастических интегралов* можно найти, например, в книге [250, гл. IX] и в работе [254]. В частности, из теорем 2.6 и 2.11 в [254] вытекает, что требуемая сходимость имеет место, если

$$\operatorname{Law}(M_t^n, a_t^n; t \leqslant 1 | \mathsf{P}^n) \to \operatorname{Law}(M_t, a_t; t \leqslant 1 | \mathsf{P})$$

и выполнено следующее условие *равномерной малости* скачков мартингалов:

$$\sup_n \mathsf{E}_{\mathsf{P}^n}\Bigl[\sup_{t \leqslant 1} |\Delta M_t^n|\Bigr] < \infty.$$

Для модели (6)—(7) это условие, очевидно, выполнено, и в качестве предельного процесса $M = (M_t)_{t \leqslant 1}$ может быть взят (как это следует из п. 3) процесс с $M_t = \sigma W_t$, где $W = (W_t)_{t \leqslant 1}$ — стандартный винеровский процесс и $\sigma^2 = pb^2 + qa^2$. Тогда $H_t = \mu t + \sigma W_t$ и $S_t = S_0 \mathscr{E}(H)_t$. Поскольку $d\mathscr{E}(H)_t = \mathscr{E}(H)_t \, dH_t$, получаем, что $dS_t = S_t(\mu \, dt + \sigma \, dW_t)$. Значит, как и следовало ожидать, процесс $S = (S_t)_{t \leqslant 1}$ есть не что иное, как геометрическое броуновское движение:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}.$$

Из формулы (34) находим также, что

$$Z_t = \exp\left\{-\frac{\mu}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 t\right\}.$$

В рассматриваемом случае имеет место контигуальность $(\widetilde{\mathsf{P}}^n) \lhd (\mathsf{P}^n)$, что устанавливается так же, как и в примере 1 в п. 5, § 3c. Поэтому из сформулированной обобщенной версии «третьей леммы Ле Кама» вытекает, что

$$\operatorname{Law}(S_t^n;\ t \leqslant 1 | \widetilde{\mathsf{P}}^n) \to \operatorname{Law}(S_t;\ t \leqslant 1 | \widetilde{\mathsf{P}}),$$

где $d\widetilde{\mathsf{P}} = Z_1 d\mathsf{P}$.

Поскольку по теореме Гирсанова (§ 3e гл. III) процесс $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t \leqslant 1}$, $\widetilde{W}_t = W_t + \dfrac{\mu}{\sigma} t$, является по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ винеровским, имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(\mu t + \sigma W_t;\, t \leqslant 1 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) &= \mathrm{Law}(\sigma \widetilde{W}_t;\, t \leqslant 1 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) = \\ &= \mathrm{Law}(\sigma W_t;\, t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathrm{Law}(S_t;\, t \leqslant 1 \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}) = \mathrm{Law}(S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t};\, t \leqslant 1 \,|\, \mathsf{P}),$$

что было уже ранее установлено в п. 3 прямым применением функциональной центральной предельной теоремы (см. формулу (26)).

4. Опционы европейского типа на биномиальном (B, S)-рынке

§ 4a. О проблематике расчетов опционных контрактов

1. В соответствии с традицией и классификацией, изложенной в § 1a гл. I, в теории финансов принято выделять и различать следующие два вида финансовых инструментов и, в частности, ценных бумаг:

- *основные*, или *первичные*,

и

- *производные*, или *вторичные*.

В предшествующих главах *обменным курсам валют* и *основным ценным бумагам*, к числу которых относятся банковский счет, акции, облигации, было уделено много внимания — рассмотрены различные *модели* их динамики, приведены результаты *статистического анализа*, выявившего, в частности, такие феномены временны́х финансовых данных, как, например, *кластерность*, *фрактальность*, наличие *долгой памяти* и т. п.

Значительное внимание было уделено и вопросам *теории*, дающей базу для расчетов в *производных ценных бумагах* и опирающейся на концепцию безарбитражности «справедливо» устроенных финансовых рынков.

В первой главе отмечалось, что обращение к *производным ценным* бумагам имеет смысл не только ввиду их спекулятивного интереса. Важное значение производных ценных бумаг состоит в том, что они играют роль *хеджирующих*, т. е. *защитных* финансовых инструментов от возможного риска, вызванного неопределенностью в будущем движении цен.

Если, скажем, «сегодняшняя» цена акции компании A есть $S_0 = 100$ и инвестор ожидает поднятия ее цены ($S_1 = 120$), то он может (в момент $n = 0$) купить акцию и затем (в момент $n = 1$) ее продать, имея доход $S_1 - S_0 = 120 - 100 = 20$.

Конечно, возможно и падение цен ($S_0 = 100 \downarrow S_1 = 80$), и тогда покупка-продажа приведет к потере: $S_1 - S_0 = 80 - 100 = -20$.

Тем самым, в рассматриваемой ситуации, когда возможно следующее движение цен:

$$S_0 = 100 \begin{array}{l} \nearrow \; S_1 = 120 \\ \\ \searrow \; S_1 = 80 \end{array}$$

«большой» выигрыш ($=20$, или 20% от $S_0=100$) сопряжен и с «большим» риском потерь ($=-20$, что составляет 20% потерь покупной стоимости $S_0 = 100$).

Но помимо описанной стратегии поведения инвестора на рынке *основных* ценных бумаг (в данном случае покупка-продажа акции), у него имеется, например, еще следующая возможность на рынке *производных* ценных бумаг: купить опцион-колл (опцион покупателя) с моментом исполнения $n=1$, дающий ему право (см. § 1с гл. I) купить в момент $n=1$ акцию по цене, скажем, $K=100$.

Тогда если $S_0 = 100$ и $S_1 = 120$, то инвестор покупает акцию по (оговоренной заранее) цене $K = 100$ и немедленно ее продает (как говорят, на спотовом, или кассовом рынке[1]) по рыночной цене $S_1 = 120$, получая прибыль $(S_1 - K)^+ = 20$.

Разумеется, за приобретение такого опциона, дающего право покупки по оговариваемой цене ($K=100$), надо заплатить некоторую «премию» эмитенту опциона. Пусть эта премия $\mathbb{C}_1 = 10$. Тогда в случае поднятия цен акций ($S_0 = 100 \uparrow S_1 = 120$) *чистый доход* покупателя опциона будет равен 10. В случае же падения цен ($S_0 = 100 \downarrow S_1 = 80$) покупатель опциона не предъявляет его к исполнению (неразумно покупать акцию по цене $K = 100$, когда ее можно купить по меньшей рыночной цене $S_1 = 80$), неся *потери*, равные той «премии» ($=10$), которую он заплатил за опцион.

Таким образом, обращение к опциону-колл (как одному из видов производных ценных бумаг) *редуцирует риск* инвестора (потери в 20 единиц сводятся теперь к потерям лишь в 10 единиц), но, конечно, и возможный доход стал меньше (10 вместо 20).

В этом смысле можно сказать, что стратегия спекулянта, рассчитывающего на повышение цен (т. е. «быка» по терминологии § 1с гл. I), основанная на покупке опциона-колл, обладает большей «защитной» силой от возможных потерь, нежели стратегия, основанная на непосредственной покупке-продаже акции.

Рассмотрим теперь «медведя» — спекулянта, рассчитывающего на *падение* цены (в рассматриваемом случае акции). В принципе, на многих рынках не

1 В финансовой литературе часто используется (см., например, [50]) следующая терминология: те сделки (контракты), которые (как опционы, фьючерсы, форварды и т. п.) связаны с будущими поставками, будущими действиями и т. д., принято называть *срочными* (forward, forward delivery); те же, которые предусматривают немедленную поставку, называют *спотовыми* (spot) или *кассовыми*.

запрещены сделки на продажу акций, которых у продавца фактически может и не быть. Представим, что заключена такая сделка о продаже акции в момент $n = 1$ по цене 100. Если цена S_1 станет равной 80, на что и рассчитывал «медведь», то он покупает акцию на рынке по этой рыночной цене $S_1 = 80$, и проведенная сделка принесет ему доход в 20 единиц. Если же $S_1 = 120$, то потери «медведя» станут равными 20 единицам. Иначе говоря, опять же возможен «большой» доход, но возможны и «большие» потери.

Как и у «быка», у «медведя» имеется возможность обратиться к рынку *производных* ценных бумаг. Он может, например, купить опцион-пут (пусть снова по цене в 10 единиц и с $K = 100$), дающий ему право продать акцию, которой у него может и не быть, по цене $K = 100$. Тогда если $S_1 = 80$, то он покупает по этой «рыночной» цене акцию и продает по цене $K = 100$, оговоренной условиями опционного контракта. С учетом заплаченной премии чистый доход составит $20 - 10 = 10$ единиц в случае падения цен ($S_0 = 100 \downarrow S_1 = 80$). Если же происходит поднятие цен, то «медведь» несет потери в 10 единиц. Таким образом, приобретение опциона-пут уменьшает *спекулятивный риск*, соответственно уменьшая и возможный *спекулятивный доход*.

Приведенные выше числовые характеристики были взяты довольно-таки призвольно, хотя в целом они правильно иллюстрируют и «спекулятивную», и «защитную» роль производных ценных бумаг.

2. Один из кардинальных вопросов, связанных с опционами, состоит в том, как рассчитывать ту *справедливую, рациональную* стоимость «премии», которую следует платить за приобретение опционного контракта. Этот вопрос интересует и покупателя, и эмитента-продавца ценной бумаги, для которого также важен вопрос о том, как распорядиться полученной «премией», чтобы *гарантировать* выполнение условий, оговариваемых при заключении контракта. Разумеется, эмитента интересует также и вопрос о его суммарных доходах и потерях при «выбрасывании» на рынок опционных контрактов.

Отметим, что теория расчетов тех или иных *производных* ценных бумаг зависит от того, какими моделями описываются *основные* ценные бумаги, какие гипотезы заложены относительно структуры и функционирования рынка ценных бумаг. В этом отношении простейшим является (B, S)-рынок, описываемый биномиальной *CRR*-моделью, т. е. моделью Кокса—Росса—Рубинштейна (см. § 1е гл. II). Хотя эта модель проста, тем не менее, на ее примере проще всего понять общие принципы и проиллюстрировать технику расчетов, основанную на идеях «безарбитражности». При этом опционам уделяется первостепенное внимание не только потому, что они интересны и сами по себе, но и потому, что многие другие проблемы, связанные с решениями на рынке ценных бумаг, или могут быть переформулированы на языке опционов, или могут требовать хорошо развитой техники расчетов опционных контрактов, в основе которой лежит простая, но плодотворная идея «хеджирования».

§ 4b. Расчет рациональной стоимости и хеджирующих стратегий. I. Случай общих платежных функций

1. В *CRR*-модели (B, S)-рынка, состоящего из двух активов: $B=(B_n)$ — банковского счета и $S=(S_n)$ — акции, — предполагается, что

$$\begin{aligned} \Delta B_n &= rB_{n-1}, \\ \Delta S_n &= \rho_n S_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

где (ρ_n) — последовательность *независимых случайных величин*, принимающих два значения a и b, $a<b$, и r — процентная ставка, $-1<a<r<b$.

Помимо требований (1) предполагается, что заданная на исходном фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ последовательность $\rho=(\rho_n)$ такова, что

$$\mathsf{P}(\rho_n = b) = p, \quad \mathsf{P}(\rho_n = a) = q,$$

$p+q=1$, $0<p<1$, причем при каждом n величины ρ_n являются $\mathscr{F}_n$-измеримыми.

В рассматриваемой модели вся случайность, образно говоря, «входит» через величины ρ_n, и поэтому в качестве пространства элементарных событий Ω можно брать или пространство $\Omega_N=\{a, b\}^N$, т. е. пространство последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $x_n=a$ или b, если $n\leqslant N$, или пространство $\Omega_\infty=\{a, b\}^\infty$, т. е. пространство последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$, $x_n = a$ или b, если $n\in\{1, 2, \ldots\}$. При этом $\rho_n(x)=x_n$, и в силу дискретности рассматриваемых пространств Ω_N и Ω_∞ вероятностные меры P_N или P на соответствующих борелевских множествах полностью определяются своими конечномерными распределениями $\mathsf{P}_n=\mathsf{P}_n(x_1, \ldots, x_n)$, где $n\leqslant N$ или $n<\infty$.

Если $\nu_b(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} I_b(x_i)$ — число тех x_i, $i\leqslant n$, которые равны b, то, очевидно,

$$\mathsf{P}_n(x_1, \ldots, x_n) = p^{\nu_b(x_1,\ldots,x_n)} q^{n-\nu_b(x_1,\ldots,x_n)}. \tag{2}$$

По-другому можно сказать, что $\mathsf{P}_n=\mathsf{Q}\otimes\ldots\otimes\mathsf{Q}$ (n раз) — прямое произведение таких мер Q, что $\mathsf{Q}(\{b\})=p$, $\mathsf{Q}(\{a\})=q$, где $p>0$, $q>0$, $p+q=1$. Согласно § 1d гл. V *CRR*-модель является *безарбитражной* и *полной*, а согласно первой и второй фундаментальным теоремам для каждого $n\geqslant 1$ *существует* и притом *единственная* мартингальная мера $\widetilde{\mathsf{P}}_n \sim \mathsf{P}_n$, имеющая следующую простую структуру (ср. с (2)):

$$\widetilde{\mathsf{P}}_n(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{p}^{\nu_b(x_1,\ldots,x_n)} \widetilde{q}^{n-\nu_b(x_1,\ldots,x_n)}, \tag{3}$$

где

$$\widetilde{p} = \frac{r-a}{b-a}, \quad \widetilde{q} = \frac{b-r}{b-a}. \tag{4}$$

Из формулы (3) следует, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}_n$, как и мера P_n, имеет структуру прямого произведения: $\widetilde{\mathsf{P}}_n=\widetilde{\mathsf{Q}}\otimes\ldots\otimes\widetilde{\mathsf{Q}}$ (n раз), где $\widetilde{\mathsf{Q}}(\{b\})=\widetilde{p}$, $\widetilde{\mathsf{Q}}(\{a\})=\widetilde{q}$.

2. Будем рассматривать *опционы европейского типа* с временем исполнения $N<\infty$ и функцией выплат (платежным поручением) f_N, зависящей, вообще говоря, от всех предшествующих значений $S_0, S_1, \ldots, S_N$, или, что равносильно, от значений $S_0, \rho_1, \ldots, \rho_N$. (Различные определения, относящиеся к опционам, приведены в § 1c гл. I.)

Как уже отмечалось, и для продавца (эмитента), и для покупателя опционного контракта прежде всего важен вопрос о том, что понимать под «справедливой» (иначе говоря, «рациональной») стоимостью этого контракта.

Согласно изложению в § 1b гл. V на *полных безарбитражных* рынках, к числу которых относится рассматриваемый биномиальный (B,S)-рынок, *справедливой* (*рациональной*) ценой естественно считать величину (совершенного хеджирования европейского типа)

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})=\inf\bigl\{x\geqslant 0\colon\ \exists\pi,\,X_0^\pi=x \text{ и } X_N^\pi=f_N\ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\bigr\},\tag{5}$$

где $X^\pi=(X_n^\pi)_{0\leqslant n\leqslant N}$ — капитал, отвечающий самофинансируемой стратегии $\pi=(\beta,\gamma)$. (Подробнее см. § 1b гл. V и § 1b в настоящей главе.)

При этом $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$ может быть подсчитано по формуле (4) из § 1b:

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})=B_0\,\widetilde{\mathsf{E}}\,\frac{f_N}{B_N},\tag{6}$$

где $\widetilde{\mathsf{E}}$ есть усреднение по мартингальной мере $\widetilde{\mathsf{P}}_N$.

Для модели (1) имеем $B_N=B_0(1+r)^N$. Тем самым, здесь

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})=\widetilde{\mathsf{E}}\,\frac{f_N}{(1+r)^N},\tag{7}$$

и с принципиальной точки зрения этой формулой полностью решается вопрос о рациональной стоимости опционного контракта с функцией выплат f_N.

Весьма замечательно, что в рассматриваемой модели продавец опциона, получив от покупателя премию $\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P})$, может составить такой портфель $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$, чтобы его капитал $X^{\widetilde{\pi}}=(X_n^{\widetilde{\pi}})_{n\leqslant N}$ в момент времени N в точности *воспроизводил* платежное поручение f_N. При этом, как отмечалось, например, в § 1b, стандартный прием отыскания портфеля $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ состоит здесь в следующем.

Образуем мартингал $M=(M_n,\mathscr{F}_n,\widetilde{\mathsf{P}}_N)_{n\leqslant N}$,

$$M_n=\widetilde{\mathsf{E}}\biggl(\frac{f_N}{B_N}\biggm|\mathscr{F}_n\biggr).$$

Согласно $\dfrac{S}{B}$-представлению, найдется такая предсказуемая последовательность $\widetilde{\gamma}=(\widetilde{\gamma}_i)_{i\leqslant N}$, что

$$M_n=M_0+\sum_{k=1}^n\widetilde{\gamma}_k\Delta\biggl(\frac{S_k}{B_k}\biggr),\quad n\leqslant N.\tag{8}$$

Полагая $\widetilde{\beta}_k = M_k - \frac{\widetilde{\gamma}_k S_k}{B_k}$, получаем (см. § 4b гл. V и § 1b в настоящей главе) самофинансируемый хедж $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$, капитал которого

$$X_k^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_k B_k + \widetilde{\gamma}_k S_k = B_k \, \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_k \right)$$

таков, что

$$X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) \tag{9}$$

и выполнено свойство «совершенности»

$$X_N^{\widetilde{\pi}} = f_N.$$

Поскольку

$$\Delta\left(\frac{S_k}{B_k} \right) = \frac{S_{k-1}(\rho_k - r)}{B_k}, \tag{10}$$

из формулы (8) видим, что

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(\rho)} (\rho_k - r) = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(\rho)} \Delta m_k^{(\rho)}, \tag{11}$$

где $\widetilde{\alpha}_k^{(\rho)}$ и $\widetilde{\gamma}_k$ связаны соотношением

$$\widetilde{\gamma}_k = \frac{\widetilde{\alpha}_k^{(\rho)} B_k}{S_{k-1}}, \tag{12}$$

а последовательность $m^{(\rho)} = (m_n^{(\rho)}, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}}_N)_{n \leqslant N}$,

$$m_n^{(\rho)} = \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - r), \tag{13}$$

образует мартингал.

Из дальнейшего станет ясно, что наряду с последовательностью $\rho = (\rho_n)$ целесообразно ввести также последовательность $\delta = (\delta_n)$, полагая

$$\delta_n = \frac{\rho_n - a}{b - a}. \tag{14}$$

При этом понятно, что

$$\rho_n = \begin{cases} b, \\ a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \delta_n = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \tag{15}$$

и $\mathscr{F}_n = \sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \sigma(\delta_1, \ldots, \delta_n)$.

Поскольку

$$\delta_k - \widetilde{p} = \frac{\rho_k - r}{b - a}, \tag{16}$$

наряду с формулами (8) и (11) имеем также представление

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(\delta)} m_k^{(\delta)}, \tag{17}$$

где последовательность $m^{(\delta)} = (m_k^{(\delta)}, \mathscr{F}_k, \widetilde{\mathsf{P}}_N)$,

$$m_l^{(\delta)} = \sum_{l=1}^{n} (\delta_n - \widetilde{p}), \tag{18}$$

является мартингалом и

$$\widetilde{\alpha}_k^{(\delta)} = (b-a)\widetilde{\alpha}_k^{(\rho)}. \tag{19}$$

Резюмируем изложенные результаты в виде следующего утверждения.

Теорема 1. 1. *В CRR-модели* (1) *для любого N и любого $\mathscr{F}_N$-измеримого платежного поручения f_N справедливая цена $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$ определяется формулой*

$$\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) = \widetilde{\mathsf{E}}\ \frac{f_N}{(1+r)^N}, \tag{20}$$

где $\widetilde{\mathsf{E}}$ — усреднение по мартингальной мере $\widetilde{\mathsf{P}}_N$.

2. *Существует совершенный самофинансируемый хедж $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$, капитал которого $X^{\widetilde{\pi}} = (X_n^{\widetilde{\pi}})_{n \leqslant N}$ таков, что*

$$X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}), \quad X_N^{\widetilde{\pi}} = f_N$$

и

$$X_n^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{(1+r)^N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right). \tag{21}$$

3. *Компоненты $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_n)_{n \leqslant N}$ и $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_n)_{n \leqslant N}$ хеджа $\widetilde{\pi}$ таковы, что*

$$\widetilde{\beta}_n = M_n - \frac{\widetilde{\gamma}_n S_n}{B_n},$$

где $\widetilde{\gamma}_n$, $n \leqslant N$, определяются из $\dfrac{S}{B}$-представления (8) *для мартингала $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}}_N)_{n \leqslant N}$,*

$$M_n = \widetilde{\mathsf{E}}\left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right).$$

3. Как видно из формулировки теоремы, отыскание совершенного хеджа $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ самым непосредственным образом связано с возможностью получения для мартингала $M = (M_n, \mathscr{F}_n, \widetilde{\mathsf{P}}_N)_{n \leqslant N}$ одного из эквивалентных между собой представлений (8), (11) или (17). В нижеследующей теореме описывается один достаточно интересный случай, когда удается получить такое представление.

Теорема 2. *Пусть платежная функция имеет вид*

$$f_N = B_N\, g(\Delta_N), \tag{22}$$

где $g = g(\Delta_N)$ — некоторая функция от $\Delta_N = \delta_1 + \ldots + \delta_N$.

Тогда в представлении (17) *коэффициенты равны*

$$\widetilde{\alpha}_k^{(\delta)} = G_{N-k}(\Delta_{k-1}; \widetilde{p}), \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{23}$$

где $\Delta_0 = 0$ *и*

$$G_n(x; \widetilde{p}) = \sum_{k=0}^{n} \big[g(x+k+1) - g(x+k)\big] C_n^k \, \widetilde{p}^k \, \widetilde{q}^{n-k}. \tag{24}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $M_n = \widetilde{\mathsf{E}}(M_N \,|\, \mathscr{F}_n)$, где $M_N = \frac{f_N}{B_N}$.

Поскольку $\Delta M_n = \widetilde{\alpha}_n^{(\delta)} \, \Delta m_n^{(\delta)}$, для $\widetilde{\alpha}_n^{(\delta)} = \widetilde{\alpha}_n^{(\delta)}(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$ находим, что

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_n^{(\delta)} &= \frac{\widetilde{\mathsf{E}}(M_N \,|\, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, 1) - \widetilde{\mathsf{E}}(M_N \,|\, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1})}{1 - \widetilde{p}} = \\ &= \frac{\widetilde{\mathsf{E}}\big(g(\Delta_N) \,|\, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, 1\big) - \widetilde{\mathsf{E}}\big(g(\Delta_N) \,|\, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}\big)}{1 - \widetilde{p}}. \end{aligned} \tag{25}$$

На множестве $\{\omega \colon \Delta_{n-1} = x, \ \delta_n = 1\}$ имеем

$$\widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \,|\, \mathscr{F}_n) = \widetilde{\mathsf{E}} \ g(x + 1 + \Delta_N - \Delta_n)$$

и

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) &= \widetilde{\mathsf{E}} \ g(x + \Delta_N - \Delta_{n-1}) = \\ &= \widetilde{p} \ \widetilde{\mathsf{E}} \ g(x + 1 + \Delta_N - \Delta_n) + (1 - \widetilde{p}) \ \widetilde{\mathsf{E}} \ g(x + \Delta_N - \Delta_n). \end{aligned}$$

Тем самым, на этом множестве

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \,|\, \mathscr{F}_n) - \widetilde{\mathsf{E}}(g(\Delta_N) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) &= \\ &= (1 - \widetilde{p}) \ \widetilde{\mathsf{E}}\big[g(x + 1 + \Delta_N - \Delta_n) - g(x + \Delta_N - \Delta_n)\big] = \\ &= (1 - \widetilde{p}) \sum_{k=0}^{N-n} \big[g(x+1+k) - g(x+k)\big] C_{N-n}^k \, \widetilde{p}^k (1 - \widetilde{p})^{N-n-k} = \\ &= (1 - \widetilde{p}) G_{N-n}(x; \widetilde{p}), \end{aligned}$$

что с учетом равенства (25) приводит к требуемому представлению (23).

Теорема доказана. □

§ 4c. Расчет рациональной стоимости и хеджирующих стратегий. II. Случай марковских платежных функций

1. Будем предполагать, что платежная функция f_N имеет следующий «марковский» вид: $f_N = f(S_N)$, где $f = f(x)$ — некоторая неотрицательная функция от $x \geqslant 0$.

Пусть

$$X_n^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\mathsf{E}}\big[f(S_N)(1+r)^{-(N-n)} \,|\, \mathscr{F}_n\big] \tag{1}$$

— капитал совершенного хеджа $\widetilde{\pi}$ в момент времени n и, в частности,

$$\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P}) = X_0^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\mathsf{E}}\big[f(S_N)(1+r)^{-N}\big]. \tag{2}$$

Обозначим

$$F_n(x;p) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(x(1+b)^k(1+a)^{n-k}\Big)C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}. \tag{3}$$

Тогда, поскольку

$$\prod_{n<k\leqslant N}(1+\rho_k) = (1+b)^{\Delta_N-\Delta_n}(1+a)^{(N-n)-(\Delta_N-\Delta_n)}, \tag{4}$$

где $\Delta_n = \delta_1+\ldots+\delta_n$, $\delta_k = \dfrac{\rho_k-a}{b-a}$, получаем, что

$$\widetilde{\mathsf{E}}\, f\bigg(x\prod_{n<k\leqslant N}(1+\rho_k)\bigg) = F_{N-n}(x;\widetilde{p}), \tag{5}$$

где $\widetilde{p} = \dfrac{r-a}{b-a}$.

Учитывая, наконец, что

$$S_N = S_n\prod_{n<k\leqslant N}(1+\rho_k), \tag{6}$$

из формулы (5) получаем следующий результат.

Теорема 1. *В CRR-модели с марковской платежной функцией* $f_N = f(S_N)$ *капитал* $X^{\widetilde{\pi}} = (X_n^{\widetilde{\pi}})_{n\leqslant N}$ *совершенного хеджа* $\widetilde{\pi}$ *определяется формулами*

$$X_n^{\widetilde{\pi}} = (1+r)^{-(N-n)}F_{N-n}(S_n;\widetilde{p}). \tag{7}$$

В частности, рациональная стоимость опциона задается формулой

$$\mathbb{C}(f_N;\mathsf{P}) \equiv X_0^{\widetilde{\pi}} = (1+r)^{-N}F_N(S_0;\widetilde{p}). \tag{8}$$

2. Обратимся теперь к вопросу о *структуре* совершенного хеджа $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$.

Положим

$$g(x) = \frac{f(S_0(1+b)^x(1+a)^{N-x})}{B_N}. \tag{9}$$

Тогда согласно теореме 2 из предшествующего параграфа в представлении

$$M_N = M_0 + \sum_{k=1}^{N}\widetilde{\alpha}_k^{(\delta)}(\delta_k-\widetilde{p})$$

для

$$M_N = \frac{X_N^{\widetilde{\pi}}}{B_N} = \frac{f(S_N)}{B_N}$$

предсказуемые функции имеют вид

$$\widetilde{\alpha}_i^{(\delta)} = G_{N-i}(\Delta_{i-1};\widetilde{p}), \tag{10}$$

где

$$G_{N-i}(x;\widetilde{p}) = \frac{1}{B_N}\sum_{k=0}^{N-i} C_{N-i}^k\,\widetilde{p}^k(1-\widetilde{p})^{N-i-k}\times$$
$$\times\left[f\left(S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{x+k+1}\right)-f\left(S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{x+k}\right)\right]. \quad (11)$$

Если здесь положить $x=\Delta_{i-1}$, то с учетом равенства

$$S_{i-1} = S_0(1+a)^{i-1}\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\Delta_{i-1}}$$

и обозначения (3) из формулы (11) получим, что

$$G_{N-i}(\Delta_i;\widetilde{p}) = \frac{1}{B_N}\big[F_{N-i}(S_{i-1}(1+b);\widetilde{p})-F_{N-i}(S_{i-1}(1+a);\widetilde{p})\big]. \quad (12)$$

Заметим теперь, что согласно формулам (12) и (16) из § 4b выполняются равенства

$$\widetilde{\gamma}_i = \frac{\widetilde{\alpha}_i^{(\delta)}B_i}{S_{i-1}(b-a)} = \frac{G_{N-i}(\Delta_{i-1};\widetilde{p})B_i}{S_{i-1}(b-a)}. \quad (13)$$

Из формул (12) и (13) находим, что

$$\widetilde{\gamma}_i = (1+r)^{-(N-i)}\cdot\frac{F_{N-i}(S_{i-1}(1+b);\widetilde{p})-F_{N-i}(S_{i-1}(1+a);\widetilde{p})}{S_{i-1}(b-a)}. \quad (14)$$

Как и в § 4b, обозначим

$$\widetilde{\beta}_i = M_i - \frac{\widetilde{\gamma}_i S_i}{B_i}.$$

В силу самофинансируемости стратегии $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ имеем

$$\Delta\widetilde{\beta}_i\cdot B_{i-1}+\Delta\widetilde{\gamma}_i\cdot S_{i-1}=0.$$

Поэтому

$$X_{i-1}^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_{i-1}B_{i-1}+\widetilde{\gamma}_{i-1}S_{i-1} = \widetilde{\beta}_i B_{i-1}+\widetilde{\gamma}_i S_{i-1},$$

и, значит,

$$\widetilde{\beta}_i = \frac{X_{i-1}^{\widetilde{\pi}}}{B_{i-1}} - \frac{\widetilde{\gamma}_i S_{i-1}}{B_{i-1}}.$$

С учетом формул (7) и (14) находим, что

$$\widetilde{\beta}_i = \frac{F_{N-i+1}(S_{i-1};\widetilde{p})}{B_N} - \frac{G_{N-i}(\Delta_{i-1};\widetilde{p})(1+r)}{b-a} =$$
$$= \frac{1}{B_N}\Big\{F_{N-i+1}(S_{i-1};\widetilde{p}) -$$
$$-\frac{1+r}{b-a}\big[F_{N-i}(S_{i-1}(1+b);\widetilde{p})-F_{N-i}(S_{i-1}(1+a);\widetilde{p})\big]\Big\}. \quad (15)$$

Резюмируем полученные результаты.

Теорема 2. *В CRR-модели с $f_N = f(S_N)$ компоненты $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta}_i)_{i\leqslant N}$ и $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_i)_{i\leqslant N}$ совершенного хеджа $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ определяются формулами* (14) *и* (15).

Следствие 1. *Предсказуемые функции $\widetilde{\beta}_i$ и $\widetilde{\gamma}_i$ зависят от «прошлого» лишь через значение S_{i-1}:*

$$\widetilde{\beta}_i = \widetilde{\beta}_i(S_{i-1}), \quad \widetilde{\gamma}_i = \widetilde{\gamma}_i(S_{i-1}).$$

Следствие 2. *Пусть неотрицательная функция $f = f(x)$ является неубывающей. Тогда из формул* (3) *и* (14) *следует, что для совершенного хеджа $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ функции $\widetilde{\gamma}_i \geqslant 0$ для всех $i \leqslant N$.*

Замечание. Если интерпретировать отрицательность величин $\widetilde{\gamma}_i$ как взятие акции взаймы (так называемый short-selling), то результат следствия 2 означает, что в случае неубывающих функций $f(x)$ совершенный хедж является хеджем без short-selling'а.

§ 4d. Стандартные опционы покупателя и продавца

1. Для стандартного опциона покупателя, или опциона-колл,

$$f(S_N) = (S_N - K)^+,$$

где N — момент исполнения (maturity time) и K — цена исполнения (strike price). Полученные в предшествующем параграфе формулы для рациональной стоимости и совершенного хеджа, естественно, здесь упрощаются.

Согласно определению (3) из § 4c имеем

$$F_n(S_0; \widetilde{p}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \widetilde{p}^k (1-\widetilde{p})^{n-k} \max\left\{0,\ S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K\right\}. \tag{1}$$

Пусть

$$K_0 = K_0\left(a, b, N; \frac{S_0}{K}\right)$$

— наименьшее целое число, для которого

$$S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{K_0} > K. \tag{2}$$

Будем для краткости в случае $f_N = (S_N - K)^+$ обозначать $\mathbb{C}(f_N; \mathsf{P})$ через $\mathbb{C}_N$ или через $\mathbb{C}_N^{(K)}$, если нужно подчеркнуть зависимость от K.

Если $K_0 > N$, то $F_N(S_0; \widetilde{p}) = 0$, и, следовательно, в этом случае (см. (8), § 4c) рациональная цена $\mathbb{C}_N = 0$, что и понятно, поскольку тогда заведомо $S_N < K$ и покупка опциона не может принести никакого дохода, а потому и цена его равна нулю.

Будем поэтому предполагать, что $K_0 \leqslant N$. Тогда

$$\mathbb{C}_N = (1+r)^{-N} F_N(S_0; \widetilde{p}) = S_0 \sum_{k=K_0}^{N} C_N^k\, \widetilde{p}^k (1-\widetilde{p})^{N-k} \Big(\frac{1+a}{1+r}\Big)^N \Big(\frac{1+b}{1+a}\Big)^k - \\ - K(1+r)^{-N} \sum_{k=K_0}^{N} C_N^k\, \widetilde{p}^k (1-\widetilde{p})^{N-k}. \quad (3)$$

Положим

$$p^* = \frac{1+b}{1+r}\, \widetilde{p}, \quad (4)$$

$$\mathbb{B}(j, N; p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k\, p^k (1-p)^{N-k}. \quad (5)$$

С этими обозначениями получаем следующий результат Дж. Кокса, Р. Росса и М. Рубинштейна [82].

Теорема. *Для стандартного опциона европейского типа с функцией выплат $f(S_N) = (S_N - K)^+$ справедливая (рациональная) стоимость равна*

$$\mathbb{C}_N = S_0 \mathbb{B}(K_0, N; p^*) - K(1+r)^{-N} \mathbb{B}(K_0, N; \widetilde{p}), \quad (6)$$

где

$$K_0 = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N} \Big/ \ln \frac{1+a}{1+b} \right]. \quad (7)$$

Если $K_0 > N$, то $\mathbb{C}_N = 0$.

2. Поскольку

$$(K - S_N)^+ = (S_N - K)^+ - S_N + K,$$

рациональная (справедливая) стоимость для опциона-пут, которую мы обозначим $\mathbb{P}_N$, определяется формулой

$$\mathbb{P}_N = \widetilde{\mathsf{E}}(1+r)^{-N}(K - S_N)^+ = \\ = \mathbb{C}_N - \widetilde{\mathsf{E}}(1+r)^{-N} S_N + K(1+r)^{-N}. \quad (8)$$

Здесь $\widetilde{\mathsf{E}}(1+r)^{-N} S_N = S_0$. Поэтому справедливо следующее тождество, называемое *паритетом колл-пут*:

$$\mathbb{P}_N = \mathbb{C}_N - S_0 + K(1+r)^{-N}. \quad (9)$$

3. Предположим, что $f = f(S_N)$ — некоторая функция выплат и $\mathbb{C}_N^{(f)} = B_0\, \widetilde{\mathsf{E}}\, \dfrac{f(S_N)}{B_N}$ — соответствующая рациональная стоимость.

Следующее интересное наблюдение (см., например, [121], [122]) показывает, как знание рациональных стоимостей $\mathbb{C}_N^{(K)}$ для функций выплат

$(S_N-K)^+$, $K\geqslant 0$, может быть использовано при отыскании значений $\mathbb{C}_N^{(f)}$ для опционов с *другими* функциями выплат f.

Предположим, что функция $f=f(x)$, $x\geqslant 0$, такова, что ее первая производная имеет вид $f'(x)=\int_0^x \mu(dy)$, где $\mu=\mu(dy)$ — конечная мера (со знаком) на $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$. (Если у функции $f(y)$ существует «обычная» вторая производная, то $\mu(dy)=f''(y)\,dy$.) Тогда непосредственно проверяется, что

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\int_0^\infty (x-K)^+\,\mu(dK)$$

и, значит,

$$f(S_N)=f(0)+S_Nf'(0)+\int_0^\infty (S_N-K)^+\,\mu(dK) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Взяв математическое ожидание по мартингальной мере $\widetilde{\mathsf{P}}_N$, находим, что

$$\widetilde{\mathsf{E}}\,\frac{f(S_N)}{B_N}=\frac{f(0)}{B_N}+\frac{S_0}{B_0}f'(0)+\int_0^\infty \widetilde{\mathsf{E}}\,\frac{(S_N-K)^+}{B_N}\,\mu(dK),$$

и, следовательно, согласно формуле (6) из § 1b имеем

$$\mathbb{C}_N^{(f)}=(1+r)^{-N}f(0)+S_0f'(0)+\int_0^\infty \mathbb{C}_N^{(K)}\,\mu(dK). \tag{10}$$

Заметим, что если $f(x)=(x-K_*)^+$, $K_*>0$, то мера $\mu(dK)$ сосредоточена в точке K_*, т. е. $\mu_*(dK)=\delta_{\{K_*\}}(dx)$, и, как и должно было быть, $\mathbb{C}_N^{(f)}=\mathbb{C}_N^{(K_*)}$.

4. Формулы (6) и (9) решают вопрос о *значениях рациональной стоимости* опционов покупателя и продавца. Для эмитента, выпускающего эти опционы, представляет большой практический интерес также и расчет совершенного хеджа $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$, который может быть проведен с помощью формул (15) и (14) предыдущего параграфа. Не останавливаясь на подробном анализе этих формул, ограничимся далее лишь рассмотрением одного простого примера, идея которого взята из работы [162]. (См. также [443] и сходный иллюстративный пример, рассмотренный в начале этой главы.)

Пример. Рассмотрим две валюты, скажем, $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$. Пусть S_n — стоимость 100 единиц валюты $\mathbb{A}$, измеряемой в единицах валюты $\mathbb{B}$, причем $n=0$ и 1. Предположим, что $S_0=150$ и ожидается, что в момент времени $n=1$ цена S_1 может стать равной 180 (повышение курса валюты $\mathbb{A}$) или 90 (понижение курса валюты $\mathbb{A}$).

Записывая

$$S_1=S_0(1+\rho_1), \tag{11}$$

находим, что ρ_1 принимает два значения b и a, где $b=\frac{1}{5}$ и $a=-\frac{2}{5}$, что соответствует повышению и понижению курса валюты $\mathbb{A}$.

Пусть $B_0 = 1$ (в единицах валюты $\mathbb{B}$) и $r = 0$. Тем самым, предполагается (для простоты расчетов), что помещение средств на банковский счет не приносит прибыли, но и взятие займа не облагается процентами при его возврате.

Пусть $N = 1$ и $f(S_1) = (S_1 - K)^+$, где $K = 150(\mathbb{B})$, т. е. $K = 150$ единиц валюты $\mathbb{B}$. Таким образом, при повышении курса валюты $\mathbb{A}$ покупатель опциона-колл получит $180 - 150 = 30$ (единиц валюты $\mathbb{B}$). При понижении же курса $f(S_1) = 0$.

Пока ничего не было сказано о вероятностях того, что $\rho_1 = b$ и $\rho_1 = a$. Если предположить, что повышение и понижение курса $\mathbb{A}$ происходят с вероятностью $\frac{1}{2}$, то $\mathsf{E}\, f(S_1) = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$, и по классическим воззрениям, идущим со времен Бернулли и Гюйгенса (см., например, [186, с. 397–402]), разумной платой за приобретение такого опциона была бы величина $\mathsf{E}\, f(S_1) = 15$ единиц валюты $\mathbb{B}$.

Однако следует подчеркнуть, что это значение существенно *зависит* от вероятностного предположения о том, каковы вероятности $p = \mathsf{P}(\rho_1 = b)$ и $1 - p = \mathsf{P}(\rho_1 = a)$. Если $p = \frac{1}{2}$, то мы видим, что $\mathsf{E}\, f(S_1) = 15$ ($\mathbb{B}$). Но если $p \neq \frac{1}{2}$, то значение $\mathsf{E}\, f(S_1)$ изменится.

Если к тому же учесть, что в реальных ситуациях *практически нет каких-либо определенных соображений о точных значениях p*, то становится понятным, что классический подход к определению разумной цены не может считаться удовлетворительным.

В этом смысле изложенная выше теория расчета рациональной стоимости действует в предположении, что p может быть *любым* числом, удовлетворяющим условию $0 < p < 1$, а в качестве того значения, относительно которого можно все рассчитывать (по классической схеме), надо брать значение

$$\widetilde{p} = \frac{r - a}{b - a}.$$

В рассматриваемом примере

$$\widetilde{p} = \frac{0 + \frac{2}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Если $N = 1$, то соответствующее значение $K_0 = K_0(a, b, 1; S_0/K) = 1$ при $a = -\frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, $S_0 = K = 150$, и поэтому согласно формуле (3) имеем

$$\mathbb{C}_1 = S_0\, \widetilde{p}\, (1 + b) - K\, \widetilde{p} = S_0\, \widetilde{p}\, b = 150 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = 20.$$

Таким образом, покупатель, приобретая опционы, должен заплатить премию $\mathbb{C}_1$, равную 20 (в единицах валюты $\mathbb{B}$), которую можно теперь рассматривать как *начальный капитал* $X_0 = 20$ ($\mathbb{B}$) продавца опциона (эмитента), с которым тот выступает на рынке в качестве *инвестора*.

Представим капитал X_0 в его обычном (для (B, S)-рынка) виде: $X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$. Если считать, что $B_0 = 1$ и $S_0 = 150$, то капитал $X_0 = 20$ ($\mathbb{B}$) может быть записан в виде $20 = 0 + \frac{2}{15} \cdot 150$. Иначе говоря, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = \frac{2}{15}$, и содержательное значение этого портфеля (β_0, γ_0) понятно: на банковском счете в валюте $\mathbb{B}$ у элемента имеется 0 единиц, а $\gamma_0 \cdot S_0 = \frac{2}{15} \cdot 150 = 20$ — это те 20 единиц валюты $\mathbb{B}$, которые могут быть превращены в валюту $\mathbb{A}$.

Пусть эмитент имеет возможность также брать (с банковского счета B в валюте $\mathbb{B}$) средства в долг, который, разумеется, должен быть возвращен. Тогда начальный капитал $X_0 = 20$ ($\mathbb{B}$) может быть представлен, например, в таком виде: $X_0 = -30 + \frac{1}{3} \cdot 150$, что соответствует портфелю $(\beta_0, \gamma_0) = \left(-30, \frac{1}{3}\right)$, означающему, что с банковского счета взято 30 единиц валюты $\mathbb{B}$, но зато уже $\frac{1}{3} \cdot 150 = 50$ единиц валюты $\mathbb{B}$ эмитент может обменять на валюту $\mathbb{A}$, получая 33,33 единицы.

Предположим, что эмитент, выступающий как инвестор на рассматриваемом (B, S)-рынке, выбирает портфель $(\beta_1, \gamma_1) = (\beta_0, \gamma_0)$. Рассмотрим вопрос о том, что дает данный портфель в момент $N = 1$.

В силу сделанного предположения $B_1 = B_0 = 1$ на банковском счете будет $\beta_1 B_1 = -30$ единиц валюты $\mathbb{B}$.

Если происходит «повышение» валюты $\mathbb{A}$ ($180\,\mathbb{B} = 100\,\mathbb{A}$), имеющейся у эмитента, то 33,33 единицы этой валюты дадут 60 единиц валюты $\mathbb{B}$, из которых 30 единиц составляют долг на банковском счете. Вернув 30 единиц долга, эмитент будет иметь еще $60 - 30 = 30$ единиц валюты $\mathbb{B}$, которые он и выплатит покупателю опциона, полностью выполнив условия контракта.

Если же происходит «понижение» валюты $\mathbb{A}$, то 33,33 единицы этой валюты дадут 30 единиц валюты $\mathbb{A}$, которые эмитент вернет на банковский счет. Покупателю опциона ничего выплачивать не надо (он проиграл!), и, тем самым, эмитент полностью «чист».

Произведенный выбор портфеля $(\beta_1, \gamma_1) = \left(-30, \frac{1}{3}\right)$ может показаться несколько искусственным. Однако именно к этим значениям приводит изложенная выше теория.

В самом деле согласно формуле (14) из § 4c оптимальное значение $\gamma_1 = \gamma_1(S_0)$ совершенного хеджа подсчитывается следующим образом:

$$\gamma_1(S_0) = \frac{F_0(S_0(1+b); \widetilde{p}) - F_0(S_0(1+a); \widetilde{p})}{S_0(b-a)} = \frac{f(S_0(1+b)) - f(S_0(1+a))}{S_0(b-a)} =$$
$$= \frac{f(S_0(1+b))}{S_0(b-a)} = \frac{(S_0(1+b) - K)^+}{S_0(b-a)} = \frac{b}{b-a} = \frac{1/5}{1/5 + 2/5} = \frac{1}{3}.$$

Значение $\beta_1 = \beta_0$ определяется из условия

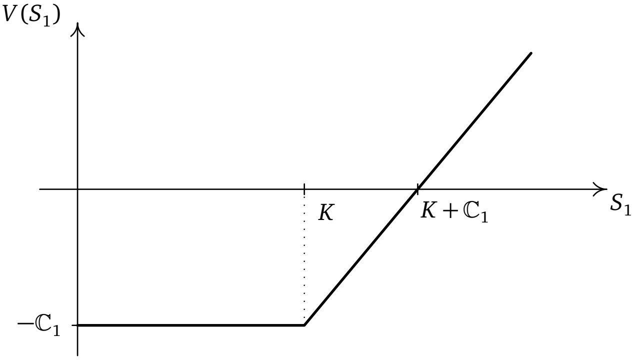
$$X_0 = \beta_0 + \gamma_0 S_0.$$

Поскольку $X_0 = 20$, $\gamma_0 = \frac{1}{3}$ и $S_0 = 150$, получаем $\beta_1 = \beta_0 = -30$, что и было принято выше.

Из приведенных рассмотрений ясно, что чистый доход $V(S_1)$ покупателя опциона (как функция от S_1 при заданном K) задается формулой

$$V(S_1) = (S_1 - K)^+ - \mathbb{C}_1,$$

график которой представлен на следующем рисунке:



Естественно, конечно, задаться вопросом, а каков же доход продавца опциона.

Нетрудно видеть, что в рассмотренном выше примере этот доход равен нулю и в случае «повышения», и в случае «понижения» валюты $\mathbb{A}$. Тогда надо объяснить, почему же на фондовом рынке находятся те, кто выпускает подобные опционы и другие ценные бумаги.

Дело в том, что на самом деле ситуация более сложная и, прежде всего, потому, что существуют операционные издержки, комиссионные, налоги и т. п., что увеличивает, разумеется, ту величину премии, которая была рассчитана выше. Так что, например, комиссионные могут рассматриваться как доход продавца опциона. Впрочем, надо также принимать во внимание и то обстоятельство, что эмитент обладает (быть может, на короткий период времени) дополнительными средствами, слагающимися из премий, которые он может использовать для приумножения своего капитала.

Можно задаться также вопросом о том, почему на фондовом рынке существуют и пользуются спросом самые разнообразные опционы и другие ценные бумаги.

Одно из объяснений состоит в том, что на рынке всегда есть те, которые рассчитывают или на понижение, или на повышение обменных курсов, цен акций и т. п. А раз это так, то, естественно, должен быть и тот, кто воспользуется этой ситуацией. Именно это и делают эмитенты, выпуская в свет опционы-колл (в расчете на присутствие на рынке «быков»), или опционы-пут (в расчете на наличие на рынке «медведей»), или их комбинации в сочетании с другими видами ценных бумаг.

§ 4e. Стратегии, основанные на опционах (комбинации, спрэды, сочетания)

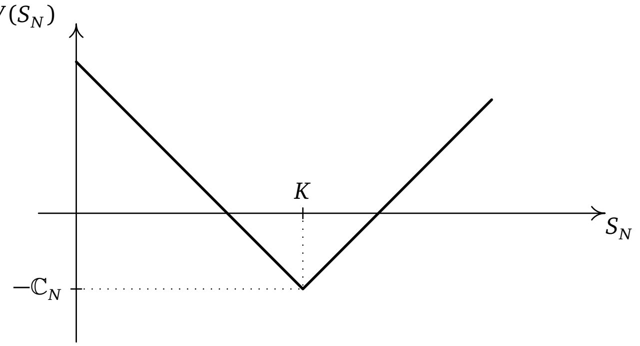
1. На практике известны самые разнообразные опционы и их комбинации. В § 1с гл. I приводились названия некоторых опционов (с последействием, азиатские и т. п.). Ввиду необычности и замысловатости многие опционы получили название «экзотических» (см., например, [414]).

Приведем также названия и некоторые характеристики ряда популярных стратегий, основанных *на разных видах опционов*. Обычно эти стратегии подразделяются на две группы: *комбинации* и *спрэды*. Различие между ними состоит в том, что комбинации строятся из *разных* видов опционов, а спрэды — из опционов *одного и того же* вида. (Подробнее см., например, [50], где содержится также информация о соответствующих расчетах и приведен список книг, в которых отражены вопросы *финансовой инженерии*, важными инструментами которой являются рассматриваемые стратегии, основанные на опционах.)

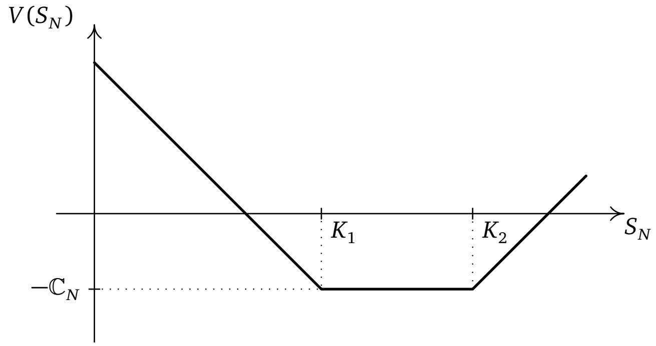
2. Комбинации (combinations). *Стрэддл* (straddle) — комбинация опционов-колл и опционов-пут на одни и те же акции с одинаковыми ценами исполнения K и временем исполнения N. Для этой комбинации функция выигрыша-проигрыша $V(S_N)$ $(= f(S_N) - \mathbb{C}_N)$ покупателя определяется формулой

$$V(S_N) = |S_N - K| - \mathbb{C}_N.$$

График этой функции представлен на следующем рисунке:



Стрэнгл (strangle) — комбинация опционов-колл и опционов-пут с одной и той же датой исполнения N, но разными ценами исполнения K_1 и K_2. Типичная картина функции $V(S_N)$ для покупателя имеет такой вид:



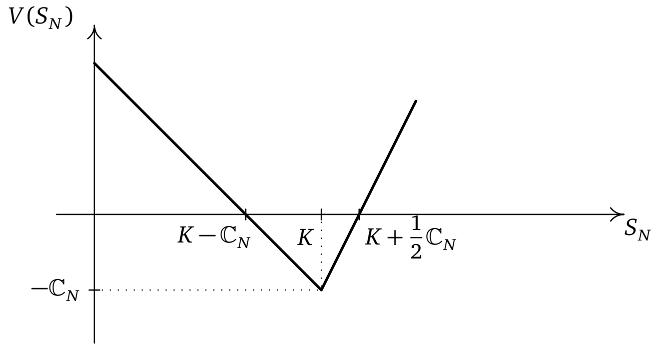
Аналитически функция $V(S_N)$ может быть записана в следующей форме:

$$V(S_N) = |S_N - K_2| I(S_N > K_2) + |S_N - K_1| I(S_N < K_1) - \mathbb{C}_N.$$

Стрэп (strep) — комбинация из одного опциона-пут и двух опционов-колл с одной и той же датой исполнения N, но, вообще говоря, разными ценами исполнения K_1 и K_2. Если $K_1 = K_2 = K$, то функция $V(S_N)$ имеет вид

$$V(S_N) = 2|S_N - K| I(S_N > K) + |S_N - K| I(S_N < K) - \mathbb{C}_N.$$

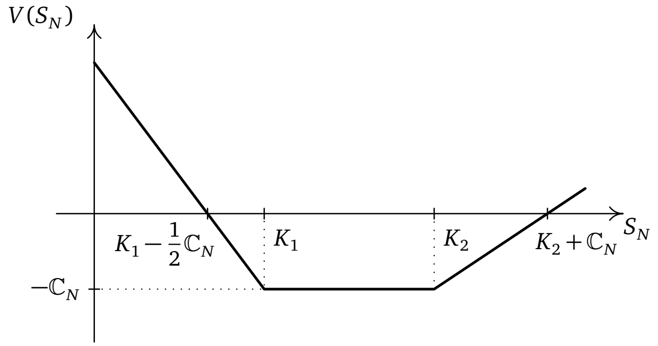
В этом случае картина поведения функции $V(S_N)$ имеет «несимметричный» характер:



Стрип (strip) — комбинация из одного опциона-колл и двух опционов-пут с одинаковыми датами исполнения N, но, вообще говоря, разными ценами исполнения K_1 и K_2. Соответствующая функция $V(S_N)$ имеет следующий вид:

$$V(S_N) = |S_N - K_2| I(S_N > K_2) + 2|S_N - K_1| I(S_N < K_1) - \mathbb{C}_N;$$

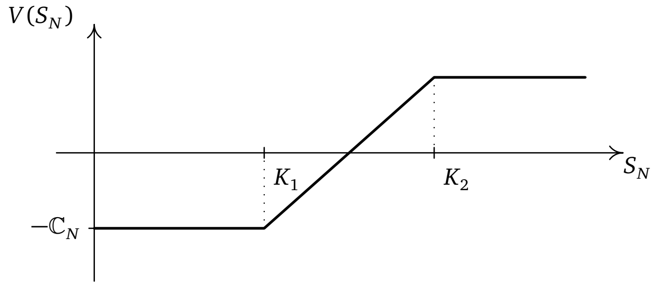
график функции $V(S_N)$ изображен на приводимом рисунке:



3. Спрэды (spreads). *Спрэд «быка»* — стратегия, состоящая из покупки опциона-колл с ценой исполнения K_1 и продажи опциона-колл с (более высокой) ценой исполнения $K_2 > K_1$. В этом случае

$$V(S_N) = |K_2 - K_1| I(S_N \geqslant K_2) + |S_N - K_1| I(K_1 < S_N < K_2) - \mathbb{C}_N,$$

и график этой функции имеет такой вид:

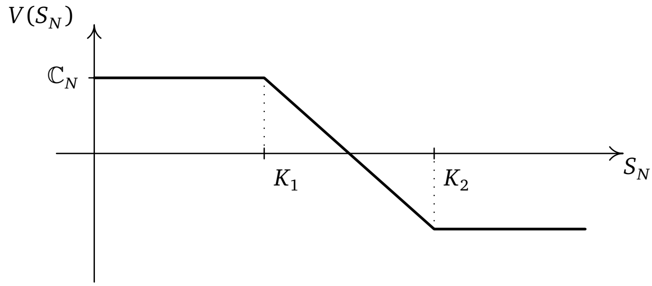


К спрэду «быка» инвесторам целесообразно обращаться тогда, когда они рассчитывают на повышение курса (скажем, акций), ограничивая при этом и величину своих потерь. Однако эта комбинация ограничивает также и величину выигрыша.

Спрэд «медведя» — стратегия, состоящая из продажи опциона-колл с ценой исполнения K_1 и покупки опциона-колл с более высокой ценой исполнения $K_2 > K_1$. Для этой комбинации

$$V(S_N) = -|K_2 - K_1| I(S_N \geqslant K_2) + |S_N - K_1| I(K_1 < S_N < K_2) + \mathbb{C}_N.$$

Соответствующий график имеет вид



Обращение к подобной комбинации имеет смысл тогда, когда инвесторы рассчитывают на понижение курса, стремясь, в то же самое время, ограничить потери, которые могут произойти при повышении курса.

По поводу других видов спрэда см. § 24 в монографии [50].

4. Помимо описанных выше комбинаций из стандартных опционов (колл и пут) на рынке ценных бумаг встречаются и различные *сочетания* — стратегии, состоящие, например, из одновременной покупки *опциона* (как производной ценной бумаги) и *акции* (как основной ценной бумаги). К подобного рода стратегиям инвесторы прибегают тогда, когда они стремятся обезопасить себя от падения курса акций ниже определенного уровня. Если такое падение происходит, то инвестор, обладая опционом-пут, сможет продать акции по более высокой цене (исполнения), а не по (низкой) спотовой цене. (См. § 22 в [50].)

5. Опционы американского типа на биномиальном (B, S)-рынке

§ 5a. О проблематике расчетов опционов американского типа

1. При рассмотрении опционов американского типа основные вопросы «теории расчетов» (как в случае дискретного времени, так и в случае непрерывного времени) сводятся к следующему:

1) какова рациональная (справедливая, взаимоприемлемая) стоимость опционных контрактов с заданной системой платежных функций;
2) каков рациональный момент предъявления покупателю опциона к исполнению;
3) какова оптимальная хеджирующая стратегия продавца опциона, обеспечивающая выполнение контрактных условий?

В настоящем параграфе, посвященном расчетам опционов американского типа в случае *дискретного времени*, главное внимание будет уделено первым двум группам вопросов 1 и 2. В принципиальном отношении решение вопросов 3, состоящих в отыскании хеджирующих стратегий, дается в теоремах 2 и 3 в § 2c.

2. Будем придерживаться *CRR*-модели (B, S)-рынка, описанной в § 4b, т. е. предполагать, что $\Delta B_n = rB_{n-1}$, $\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}$, где $\rho = (\rho_n)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathsf{P}(\rho_n = b) = p$, $\mathsf{P}(\rho_n = a) = q$, где $-1 < a < r < b$, $p + q = 1$, $0 < p < 1$.

Дополнительное предположение, позволяющее существенно упростить дальнейший математический анализ, будет состоять в том, что при некотором $\lambda > 1$ выполняются равенства

$$b = \lambda - 1 \quad \text{и} \quad a = \lambda^{-1} - 1. \tag{1}$$

Тем самым, вместо *двух* параметров a и b, определяющих эволюцию значений цен S_n, $n \geqslant 1$, будем предполагать заданным всего лишь *один* параметр $\lambda > 1$, по которому a и b находятся согласно формулам (1).

Тогда, очевидно,

$$S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}, \tag{2}$$

где $\mathsf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathsf{P}(\rho_i = b) = p$, $\mathsf{P}(\varepsilon_i = -1) = \mathsf{P}(\rho_i = a) = q$. (Ср. с § 1e гл. II.)

Если предположить также, что S_0 принадлежит множеству $E = \{\lambda^k,\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$, то видим, что и при любом $n \geqslant 1$ состояния S_n будут принадлежать тому же самому множеству E.

Последовательность $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$, описываемую соотношениями (2) с $S_0 \in E$, принято называть (ср. с § 1e гл. II) *геометрическим случайным блужданием* по множеству состояний $E = \{\lambda^k,\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$.

Пусть $x \in E$ и P_x обозначает распределение вероятностей последовательности $(S_n)_{n \geqslant 0}$ относительно меры P в предположении, что $S_0 = x$: $\mathsf{P}_x = \mathrm{Law}((S_n)_{n \geqslant 0} \,|\, \mathsf{P}, S_0 = x)$.

В соответствии со стандартной терминологией теории случайных процессов можно сказать, что рассматриваемая последовательность $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ с семейством вероятностей P_x, $x \in E$, образует *однородное марковское случайное блуждание*, или *однородный марковский процесс* (с дискретным временем).

Пусть T — *оператор перехода* за один шаг, т. е. пусть для функций $g = g(x)$, определенных на E,

$$Tg(x) = \mathsf{E}_x\, g(S_1), \quad x \in E, \tag{3}$$

где E_x — усреднение по мере P_x.

В рассматриваемом случае (2) имеем

$$Tg(x) = pg(\lambda x) + (1 - p) g\Big(\frac{x}{\lambda}\Big). \tag{4}$$

3. (B, S)-рынок, описываемый *CRR*-моделью, является и безарбитражным, и полным, при этом единственной мартингальной мерой является такая мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, что

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\varepsilon_i = 1) = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_i = b) = \frac{r - a}{b - a}, \quad \widetilde{\mathsf{P}}(\varepsilon_i = -1) = \widetilde{\mathsf{P}}(\rho_i = a) = \frac{b - r}{b - a}.$$

(См., например, § 1d гл. V.)

Согласно изложенной в главе V «безарбитражно-мартингальной» идеологии все вероятностные расчеты должны производиться не относительно исходной меры P, а относительно мартингальной меры $\widetilde{\mathsf{P}}$. Чтобы не вводить новых обозначений, с самого начала будем предполагать, что $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{P}}$ и, значит,

$$p = \frac{r - a}{b - a}, \quad q = \frac{b - r}{b - a}. \tag{5}$$

С учетом предположения (1) находим, что

$$p = \frac{\alpha^{-1} - \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \quad q = \frac{\lambda - \alpha^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \tag{6}$$

где $\alpha = (1 + r)^{-1}$.

Пусть $f = (f_0, f_1, \ldots)$ — *система* платежных функций, заданных, как обычно, на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

В соответствии с § 2а будем обозначать через $\mathfrak{M}_n^N$ класс всех таких моментов остановки τ, что $n \leqslant \tau \leqslant N$. Через $\mathfrak{M}_n^\infty$ обозначается класс всех таких *конечных* моментов остановки, что $\tau \geqslant n$.

В случае опционов американского типа покупатель опциона имеет возможность самостоятельно выбирать тот момент τ, в который он закрывает контракт, получая при этом платеж, равный f_τ. Если предполагать, что контракт заключается в момент $n = 0$ и *крайней* датой его закрытия является момент времени $n = N$, то можно сказать, что покупатель американского типа имеет возможность выбрать в качестве момента прекращения действия контракта любой момент τ из класса $\mathfrak{M}_0^N$. При этом, разумеется, продавец опциона должен в своих действиях учитывать *наихудшие* для него возможности, создаваемые и выбором покупателем момента τ, и (на неполных рынках) выбором «Природой» одной из возможных мартингальных мер. Тем самым, в соответствии с § 1а при составлении своей стратегии продавец опциона американского типа должен, естественно, придерживаться стратегий, осуществляющих хеджирование американского типа.

Рассматриваемый нами (B, S)-рынок является полным, и для верхней цены хеджирования американского типа (см. формулу (5) в § 2с)

$$\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P}) = \inf\bigl\{y\colon \exists\, \pi,\ X_0^\pi = y,\ X_\tau^\pi \geqslant f_\tau\ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\ \forall \tau \in \mathfrak{M}_0^N\bigr\}, \tag{7}$$

которую естественно считать ценой рассматриваемого опциона американского типа, имеет место формула (см. формулу (19) в § 2с)

$$\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P}) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} B_0\, \mathsf{E}\, \frac{f_\tau}{B_\tau}. \tag{8}$$

Напомним, что здесь E — усреднение по (мартингальной) мере P.

4. В проведенном выше изложении основной акцент делается на то, *как* и при *каких* условиях *продавец* опциона может выполнить контрактные условия.

Из общей теории хеджирования американского типа (раздел 2) следует, что определяемая формулой (8) стоимость (премия) $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P})$ опционного контракта является той *минимально допустимой* стоимостью, при которой продавец еще может выполнить условия этого контракта.

Покупатель опциона это понимает, и в этом смысле цена $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P})$ является взаимоприемлемой для обеих договаривающихся сторон. При этом согласно общей теории продавец опциона может так организовать свой хеджирующий портфель $\overline{\pi}$, чтобы его капитал $X_\tau^{\overline{\pi}}$ был не меньше f_τ для любого $\tau \in \mathfrak{M}_0^N$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, *как покупатель*, согласившийся на стоимость контракта, равную $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P})$, должен наиболее разумным образом выбрать момент остановки действия контракта, или, попросту говоря, когда предъявить опцион к исполнению.

Понятно, что если покупатель прекращает действие контракта в момент σ, когда $X_\sigma^{\overline{\pi}} > f_\sigma$, то это дает продавцу чистый доход $X_\sigma^{\overline{\pi}} - f_\sigma$ при выполнении им в то же самое время контрактного условия о выплате покупателю f_σ. Поэтому покупателю следовало бы выбирать момент σ так, чтобы выполнялось равенство $X_\sigma^{\overline{\pi}} = f_\sigma$. Такой момент действительно *существует*, и, как следует из теоремы 4 из § 2c, им является момент τ_0^N, получающийся в результате решения задачи об оптимальной остановке

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} B_0 \, \mathsf{E} \, \frac{f_\tau}{B_\tau}. \tag{9}$$

5. Из формулы (8) видим, что отыскание цены $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P})$ сводится к решению задачи об оптимальной остановке стохастической последовательности $f_0, f_1, \ldots, f_N$.

В § 5b, c мы будем рассматривать, следуя в основном работе [443], стандартные опционы покупателя и продавца с функциями $f_n = (S_n - K)^+$ и $f_n = (K - S_n)^+$ (и несколько более общими функциями $f_n = \beta^n (S_n - K)^+$ и $f_n = \beta^n (K - S_n)^+$) соответственно. Вместе со свойством «марковости» последовательности $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ эта специальная структура функций f_n позволяет для решения рассматриваемых задач об оптимальной остановке пользоваться далее «марковской версией» теории оптимальных правил остановки, описанной в п. 5 § 2a.

§ 5b. Расчеты для стандартного опциона покупателя

1. Пусть рассматривается стандартный опцион покупателя, или опцион-колл с функциями выплат в момент времени n

$$f_n(x) = \beta^n (x - K)^+, \quad x \in E, \tag{1}$$

где $0 < \beta \leqslant 1$, $E = \{x = \lambda^k : k = 0, \pm 1, \ldots\}$, $\lambda > 1$.

Для $0 \leqslant n \leqslant N$ обозначим

$$V_n^N(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_x (\alpha\beta)^\tau (S_\tau - K)^+, \tag{2}$$

где $S_{n+k} = S_n \lambda^{\varepsilon_{n+1} + \ldots + \varepsilon_{n+k}}$, $S_n = x$.

Полезно отметить, что

$$V_n^N(x) = (\alpha\beta)^n V_0^{N-n}(x), \tag{3}$$

и в соответствии с (8) из § 5a интересующая нас цена (в предположении, что $S_0 = x$) равна

$$\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P}) = V_0^N(x). \tag{4}$$

Согласно теореме 3 из § 2а и замечанию к ней

$$V_0^N(x) = Q^N g(x), \tag{5}$$

где $g(x)=(x-K)^+$ и

$$Qg(x) = \max\bigl(g(x), \alpha\beta Tg(x)\bigr). \tag{6}$$

При этом в классе $\mathfrak{M}_0^N$ оптимальный момент, обозначаемый τ_0^N, существует и может быть взят в виде

$$\tau_0^N = \min\bigl\{0 \leqslant n \leqslant N\colon\ V_0^{N-n}(S_n) = g(S_n)\bigr\}. \tag{7}$$

Если обозначить

$$\begin{aligned} D_n^N &= \bigl\{x \in E\colon\ V_0^{N-n}(x) = g(x)\bigr\} = \\ &= \bigl\{x \in E\colon\ V_n^N(x) = (\alpha\beta)^n g(x)\bigr\}, \end{aligned} \tag{8}$$

то видим, что

$$\tau_0^N = \min\bigl\{0 \leqslant n \leqslant N\colon\ S_n \in D_n^N\bigr\}. \tag{9}$$

Таким образом, имея последовательность областей остановки

$$D_0^N \subseteq D_1^N \subseteq \ldots \subseteq D_N^N = E \tag{10}$$

и последовательность областей продолжения наблюдений

$$C_0^N \supseteq C_1^N \supseteq \ldots \supseteq C_N^N = \varnothing, \tag{11}$$

$C_n^N = E \setminus D_n^N$, можно сформировать следующее правило для покупателя опциона относительно момента прекращения действия опционного контракта.

Если $S_0 \in D_0^N$, то $\tau_0^N = 0$ — иначе говоря, покупатель должен сразу соглашаться на предлагаемую функцию выплаты $(S_0-K)^+$.

Если же $S_0 \in C_0^N = E \setminus D_0^N$, что является типичной ситуацией, то покупатель ждет следующего значения S_1, и в зависимости от того, принадлежит ли S_1 области D_1^N или C_1^N, принимает решение о том, что $\tau_1^N = 1$ или $\tau_1^N > 1$, и т. д.

В рассматриваемом сейчас случае стандартного опциона покупателя нетрудно *качественным* образом описать структуру множеств D_n^N и C_n^N, $0 \leqslant n \leqslant N$, и тем самым описать стратегию покупателя относительно выбора момента предъявления опциона к исполнению.

2. Из формул (4)—(7) видим, что отыскание функций $V_0^N(x)$ и момента τ_0^N сводится к последовательному отысканию функций $V_0^n(x) = Q^n g(x)$ для $n = 1, 2, \ldots, N$.

По предположению $0 < \beta \leqslant 1$. Покажем, что случай $\beta = 1$ рассматривается элементарным образом.

Действительно, последовательность $(\alpha^n S_n)_{n\geqslant 0}$ является мартингалом относительно любой меры P_x, $x \in E$, следовательно, $(\alpha^n(S_n-K))_{n\geqslant 0}$ будет *субмартингалом*, и в силу неравенства Иенсена для выпуклой функции $x \rightsquigarrow x^+$ последовательность $(\alpha^n(S_n-K)^+)_{n\geqslant 0}$ также есть субмартингал.

Значит, по теореме Дуба об остановке (§ 3a гл. V), для любого марковского момента τ, $0 \leqslant \tau \leqslant N$, имеем

$$\mathsf{E}_x\, \alpha^\tau (S_\tau - 1)^+ \leqslant \mathsf{E}_x\, \alpha^N (S_N - 1)^+. \tag{12}$$

Отсюда непосредственно следует, что в качестве оптимального момента остановки в задаче

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^N} \mathsf{E}_x\, \alpha^\tau (S_\tau - K)^+$$

можно взять момент $\tau_0^N = N$, и, значит, если $S_0 = x$, то

$$\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P}) = V_0^N(x) = \mathsf{E}_x\, \alpha^N (S_N - K)^+. \tag{13}$$

Таким образом, имеет место (в несколько образной интерпретации) следующий результат Р. Мертона (R. Merton [346]):

если дисконтирующий фактор $\beta = 1$, то стандартные опционы-колл американского и европейского типа совпадают.

При этом соответствующее значение $V_0^N(x)$ определяется по формуле (6) в § 4d.

3. Рассмотрим теперь более интересный случай $0 < \beta < 1$.

Теорема 1. *Для каждого $N \geqslant 0$ существует такая последовательность чисел $x_n^N \in E \cup \{0\}$, $0 \leqslant n \leqslant N$, что*

$$\begin{aligned} D_n^N &= \bigl\{x \in E\colon\ x \in [x_n^N, \infty)\bigr\}, \\ C_n^N &= \bigl\{x \in E\colon\ x \in (0, x_n^N)\bigr\} \end{aligned}$$

и

$$\tau_0^N = \min\bigl\{0 \leqslant n \leqslant N\colon\ S_n \in D_n^N\bigr\} = \min\bigl\{0 \leqslant n \leqslant N\colon\ S_n \in [x_n^N, \infty)\bigr\}.$$

При этом

$$0 = x_N^N \leqslant x_{N-1}^N \leqslant \ldots \leqslant x_0^N \tag{14}$$

и

$$V_0^N(x) = \begin{cases} g(x), & x \in D_0^N = [x_0^N, \infty), \\ Q^N g(x), & x \in C_0^N = (0, x_0^N). \end{cases} \tag{15}$$

Рациональная стоимость равна $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f; \mathsf{P}) = V_0^N(S_0)$.

Доказательство. Для простоты выкладок будем полагать $K = 1$ и последовательно рассматривать $N = 1, 2, \ldots$, анализируя $Q^n g(x)$ для $n \leqslant N$.

Пусть $N = 1$ и начальная точка $x = 1$, т. е. $x = \lambda^0$. Согласно формуле (4) из § 5a для функции $g(x) = (x-1)^+$ находим (с учетом предположения $\lambda > 1$), что

$$\begin{aligned} Tg(1) &= pg(\lambda) + (1-p)g(\lambda^{-1}) = p(\lambda - 1) > 0, \\ Qg(1) &= \max(g(1), \alpha\beta Tg(1)) = \max(0, \alpha\beta p(\lambda - 1)) = \alpha\beta p(\lambda - 1) > 0. \end{aligned}$$

Тем самым, применение оператора Q «поднимает» значение функции $g = g(x)$ в точке $x = 1$ до значения $Qg(1) = \alpha\beta p(\lambda - 1)$.

Аналогичным образом находим, что

$$Tg(\lambda) = p(\lambda^2 - 1), \quad Qg(\lambda) = (\lambda - 1)\max\Bigl(1, \beta\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-1}\Bigr).$$

Отсюда видно, что если $\beta \leqslant \dfrac{\lambda-1}{\lambda-\alpha}$, то применение оператора Q не изменит значения $g(\lambda) = \lambda - 1$. Но если $\beta > \dfrac{\lambda-1}{\lambda-\alpha}$, то оператор Q «поднимет» $g(\lambda) = \lambda - 1$ до значения $\beta(\lambda - \alpha)$ $(> \lambda - 1)$.

Пусть теперь $x = \lambda^k$, $k > 1$. В этом случае

$$Tg(\lambda^k) = \lambda^k\alpha^{-1} - 1, \quad Qg(\lambda^k) = \max\bigl(\lambda^k - 1, \beta(\lambda^k - \alpha)\bigr).$$

Заметим, что

$$Qg(\lambda^k) = g(\lambda^k) \iff \lambda^k - 1 \geqslant \beta(\lambda^k - \alpha) \iff \lambda^k(1-\beta) \geqslant 1 - \alpha\beta. \tag{16}$$

Поскольку

$$\lambda^k(1-\beta) \geqslant 1-\alpha\beta \iff \lambda^{k+1}(1-\beta) \geqslant 1-\alpha\beta,$$

получаем

$$Qg(\lambda^k) = g(\lambda^k) \Rightarrow Qg(\lambda^{k+1}) = g(\lambda^{k+1}),$$

что может быть проинтерпретировано следующим образом: если $\lambda^k \in D_0^1$, то и точки $\lambda^{k+1}, \lambda^{k+2}, \ldots$ принадлежат D_0^1.

Из формулы (16) следует, что при достаточно большом k значение λ^k заведомо принадлежит D_0^1.

Пусть $x_0^1 = \min\{x \in E\colon Qg(x) = g(x)\}$. Тогда из сказанного следует, что $[x_0^1, \infty) \subseteq D_0^1$. Более того, можно утверждать, что $[x_0^1, \infty) = D_0^1$.

В самом деле, рассмотрим точки $x = \lambda^k$ с $k \leqslant -1$. Тогда $Tg(x) = 0$, $Qg(x) = 0$ и, следовательно, как мгновенная остановка в этих точках, так и продолжение наблюдений (на один шаг) все равно дадут нулевой доход. Поэтому точки $x = \lambda^k$, $k \leqslant -1$, можно отнести к области продолжения наблюдений C_0^1. К этой же области заведомо принадлежит точка $x = \lambda^0 = 1$ и те точки $x = \lambda^k$, $k > 1$, для которых $\lambda^k < x_0^1$.

Итак, если $N = 1$, то

$$\tau_0^1 = \begin{cases} 0, & \text{если } S_0 \in [x_0^1, \infty), \\ 1, & \text{если } S_0 \in (0, x_0^1). \end{cases}$$

Последующие рассмотрения для $N = 2, 3, \ldots$ проводятся аналогичным образом с той лишь разницей, что если раньше мы исследовали, как оператор Q «поднимает» $g(x)$, то теперь надо вместо этой функции брать последовательно функции $Qg(x), Q^2g(x), \ldots$, каждая из которых, как и $g = g(x)$, выпукла вниз (см. рис. 58 ниже) и для достаточно больших x совпадает с $g(x)$. Из этих свойств следует, что для каждого N найдутся такие x_n^N, что $D_n^N = [x_n^N, \infty)$.

Не вдаваясь в детали этого несложного анализа, заметим лишь, что в случае $N=2$ сразу ясно, что $D_1^2=D_0^1$ и, значит, $x_1^2=x_0^1$. Рассмотрение множества $D_0^2=\{x\colon Q^2g(x)=g(x)\}=\{x\colon g(x)\geqslant TQg(x)\}$ показывает, что существует такое значение x_0^2, что $[x_0^2,\infty)=D_0^2$. При этом $0=x_2^2\leqslant x_1^2\leqslant x_0^2$ и τ_0^2 имеет следующую структуру:

$$\tau_0^2=\begin{cases}0, & \text{если } S_0\in[x_0^2,\infty),\\ 1, & \text{если } S_0\in(0,x_0^2),\ \ S_1\in[x_1^2,\infty),\\ 2, & \text{если } S_0\in(0,x_0^2),\ \ S_1\in(0,x_1^2).\end{cases}$$

Приводимые ниже рис. 57 и 58 дают наглядное представление о структуре областей остановки (D_n^N) и областей продолжения наблюдений (C_n^N), а также о виде функции $V_0^N(x)=Q^Ng(x)$. □

4. Как следует из изложенного выше, отыскание рациональных стоимостей $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})$ в случае $S_0=x$ сводится к отысканию функций $V_0^N(x)=Q^Ng(x)$, которые могут быть рассчитаны рекуррентным образом с использованием соотношений

$$Q^ng(x)=\max(Q^{n-1}g(x),\alpha\beta TQ^{n-1}g(x))=\max(g(x),\alpha\beta TQ^{n-1}g(x)).\qquad(17)$$

(См. [441, 2.2.1].)

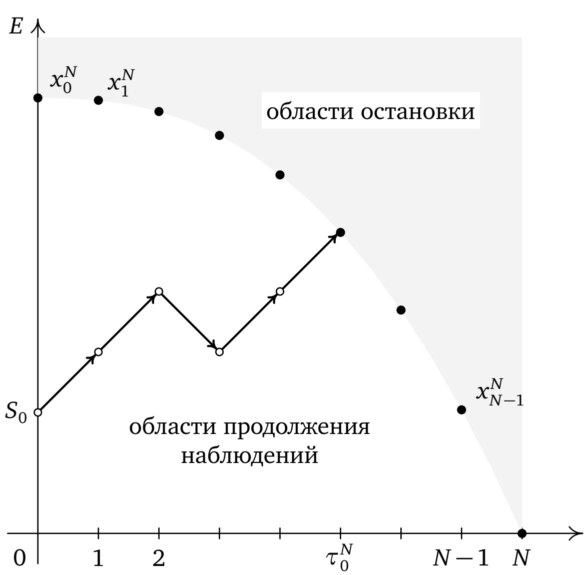


Рис. 57. Опцион-колл. Области остановки $D_0^N=[x_0^N,\infty)$, $D_1^N=[x_1^N,\infty)$, …, $D_N^N=[0,\infty)$, и продолжения наблюдений $C_0^N=(0,x_0^N)$, $C_1^N=(0,x_1^N)$, …, $C_N^N=\varnothing$. Траектория $(S_0,S_1,\dots)$ выходит из областей продолжения наблюдений в момент τ_0^N

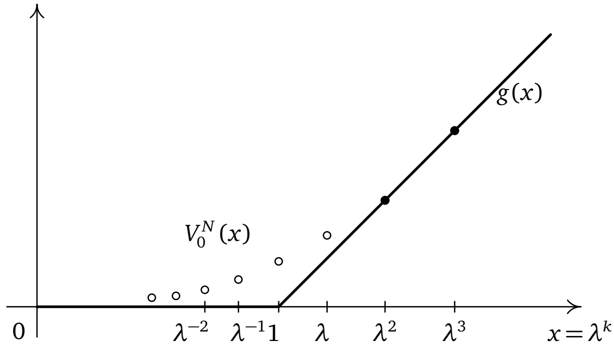


Рис. 58. Графики функций $g(x)=(x-1)^+$ и $V_0^N(x)=Q^N g(x)$ для дисконтируемого опциона-колл с функциями выплат $f_n=\beta^n g(x)$, $0<\beta<1$, $0\leqslant n\leqslant N$, $\lambda>1$

Ясно, что $V_0^N(x)\leqslant V_0^{N+1}(x)$, и, следовательно, существует

$$V^*(x) = \lim_{N\to\infty} V_0^N(x). \tag{18}$$

Согласно теореме 4 из § 6а гл. V функция $V^*=V^*(x)$ является *наименьшей $\alpha\beta$-эксцессивной мажорантой* функции $g=g(x)$, т. е. $V^*=V^*(x)$ есть наименьшая среди функций $U=U(x)$ со свойствами $U(x)\geqslant g(x)$ и $U(x)\geqslant(\alpha\beta)TU(x)$. При этом $V^*=V^*(x)$ удовлетворяет уравнению

$$V^*(x) = \max\bigl(g(x), (\alpha\beta)TV^*(x)\bigr), \tag{19}$$

вытекающему из равенств (17) и (18).

В силу той же теоремы функция $V(x)$ есть не что иное, как решение задачи об оптимальной остановке в классе $\mathfrak{M}_0^\infty=\{\tau=\tau(\omega)\colon 0\leqslant\tau(\omega)<\infty,\ \omega\in\Omega\}$:

$$V^*(x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x(\alpha\beta)^\tau g(S_\tau). \tag{20}$$

Знание функции $V^*=V^*(x)$ представляет интерес и с той точки зрения, что $V^*(S_0)$ есть, в то же самое время, значение рациональной стоимости

$$\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P}) = \inf\bigl\{y\colon \exists\pi,\ X_0^\pi = y,\ X_\tau^\pi \geqslant \beta^\tau g(S_\tau)\ \forall\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty\bigr\} \tag{21}$$

для системы платежных функций $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$,

$$f_n(x) = \beta^n(x-K)^+, \tag{22}$$

в предположении, что покупатель может выбрать в качестве момента исполнения *любой* момент τ из множества $\mathfrak{M}_0^\infty$. (Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы из § 1c.)

Рассмотрение опционов с моментами исполнения из множества $\mathfrak{M}_0^\infty$, а не из $\mathfrak{M}_0^N$ с некоторым конечным N, может показаться малоинтересным с практической точки зрения. Однако следует иметь в виду, что наличие дисконтирующего фактора β, $0<\beta<1$, не позволяет соответствующим оптимальным моментам остановки быть «слишком большими». В то же самое время, *аналитическое* решение задач типа (20) много проще, нежели решение задач типа (2) с конечным N, и при достаточно больших N по функции $V^*(x)$ можно судить, по крайней мере приближенно, и о значениях функций $V_0^N(x)$.

5. Обратимся к отысканию функции $V^*(x)$, удовлетворяющей, как мы знаем, уравнению (19).

Заметим, что $D_0^N \supseteq D_0^{N+1}$ и, значит, $x_0^N \leqslant x_0^{N+1}$. Поэтому существует $\lim\limits_{N\to\infty} x_0^N = x^*$, и в силу формулы (19) искомая функция $V^*(x)$ должна иметь следующий вид:

$$V^*(x) = \begin{cases} g(x), & x \geqslant x^*, \\ (\alpha\beta)TV^*(x), & x < x^*. \end{cases} \tag{23}$$

Подчеркнем, что здесь *неизвестны* и «граничная» точка x^*, и сама функция $V^*(x)$, и обе они должны быть определены. Задачи подобного типа относятся к числу «задач со свободными границами», или, как их еще называют, «задач Стефана» (см., например, [441]).

Вообще говоря, решение $(x^*, V^*(x))$ задачи (23) может быть неединственным, и для выделения «правильного» решения могут понадобиться дополнительные условия. Ниже показывается, из каких соображений находятся эти дополнительные условия.

Обозначим $C^* = (0, x^*)$ и $D^* = [x^*, \infty)$. Тогда в области C^* функция $V^*(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \alpha\beta\, T\varphi(x), \tag{24}$$

т. е., в силу формулы (4) из § 5a, уравнению

$$\varphi(x) = \alpha\beta\Big[p\varphi(\lambda x) + (1-p)\varphi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\Big]. \tag{25}$$

Согласно общей теории уравнений в конечных разностях (см. [174]) решения этого уравнения надо искать в виде $\varphi(x) = x^\gamma$. Следуя этому, находим, что γ должно быть корнем уравнения

$$1 = \beta\big[\alpha p\lambda^\gamma + \alpha(1-p)\lambda^{-\gamma}\big]. \tag{26}$$

Напомним, что $p = \dfrac{r-a}{b-a}$, $b = \lambda - 1$, $a = \lambda^{-1} - 1$. При этом p определялось из условия (см. формулу (4) в § 4d гл. V)

$$\mathsf{E}\, \frac{1+\rho_1}{1+r} = 1,$$

которое есть не что иное, как соотношение

$$\alpha\lambda p + \alpha(1-p)\lambda^{-1} = 1. \tag{27}$$

Из сопоставления формул (26) и (27) видим, что если $\beta = 1$, то уравнение (26) имеет один корень $\gamma_1 = 1$ и второй корень γ_2, удовлетворяющий условию

$$\lambda^{\gamma_2} = \frac{1-p}{\lambda p}. \tag{28}$$

Поскольку

$$\frac{1-p}{\lambda p} = \frac{\alpha\lambda - 1}{\lambda - \alpha} < 1,$$

получаем, что $\gamma_2 < 0$.

Итак, если $\beta = 1$, то общее решение уравнения (26) имеет вид

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2 x^{\gamma_2}, \tag{29}$$

где $\gamma_2 < 0$.

По смыслу рассматриваемой задачи искомая функция $V^*(x)$ должна быть неотрицательной неубывающей функцией. Отсюда следует, что $c_2 = 0$. Поэтому

$$V^*(x) = \begin{cases} x-1, & x \geqslant x^*, \\ c_1 x, & x < x^*, \end{cases} \tag{30}$$

где x^* и c_1 еще подлежат определению.

Из субмартингального свойства последовательности $(\alpha^n (S_n - 1)^+)_{n\geqslant 0}$ относительно любой меры P_x, $x \in E$, вытекает, что $x^* = \infty$, поскольку в случае $\beta = 1$ для каждой точки $x \geqslant 1$ имеем

$$\alpha T g(x) > g(x),$$

и, значит, заведомо выгоднее сделать по крайней мере одно наблюдение, нежели сразу остановиться.

Далее, в формуле (30) константа $c_1 \geqslant 1$, поскольку если предположить, что $c_1 < 1$, мы получим, что $x^* < \infty$.

С другой стороны, константа c_1 не может быть больше единицы в силу того (дополнительного) свойства, что $V^*(x)$ должна быть *наименьшей* α-эксцессивной мажорантой функции $g(x)$, а таковой в классе функций $V^*(x) = c_1 x$ при $c_1 \geqslant 1$, очевидно, является функция со значением $c_1 = 1$.

Таким образом, при $\beta = 1$ и $g(x) = (x-1)^+$ имеем $V^*(x) = \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, \alpha^\tau g(S_\tau) = x$ и оптимальный момент остановки (в классе $\mathfrak{M}_0^\infty$) не существует. Отметим, однако, что для всякого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in E$ можно найти такой конечный момент остановки $\tau_{x,\varepsilon}$, что

$$\mathsf{E}_x\, \alpha^{\tau_{x,\varepsilon}} g(S_{\tau_{x,\varepsilon}}) \geqslant V^*(x) - \varepsilon.$$

(Подробнее см. [441, гл. III].)

6. Пусть теперь $0 < \beta < 1$. В этом случае уравнение (26) имеет два таких корня $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 < 0$, что величины $y_1 = \lambda^{\gamma_1}$ и $y_2 = \lambda^{\gamma_2}$, определяемые как решения квадратного уравнения

$$y = \beta[\alpha p y^2 + \alpha(1-p)], \tag{31}$$

имеют следующий вид:

$$y_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad y_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \tag{32}$$

где $A = (\alpha\beta p)^{-1}$, $B = (1-p)p^{-1}$.

Таким образом, если $0 < \beta < 1$, то общее решение $\varphi(x)$ уравнения (25) представимо в такой форме:

$$\varphi(x) = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2}. \tag{33}$$

По тем же самым причинам, что и в случае $\beta = 1$, константа c_2 здесь равна нулю, и из формулы (23) следует, что искомая функция имеет вид

$$V^*(x) = \begin{cases} x-1, & x \geqslant x^*, \\ c^* x^{\gamma_1}, & x < x^*, \end{cases} \tag{34}$$

где x^* и c^* — константы, подлежащие определению. (См. далее формулы (40)—(43).)

Для отыскания неизвестных значений x^* и c^* воспользуемся тем, что искомая функция $V^*(x)$ должна быть *наименьшей* $\alpha\beta$*-эксцессивной мажорантой* функции $g(x) = (x-1)^+$, $x \in E$.

Следующие рассуждения показывают, как в классе функций

$$\overline{V}_{\bar{c}}(x; \bar{x}) = \begin{cases} x-1, & x \geqslant \bar{x}, \\ \bar{c} x^{\gamma_1}, & x < \bar{x}, \end{cases} \tag{35}$$

где $x, \bar{x} \in E$, $\bar{c} > 0$ и $\gamma_1 > 1$, найти *наименьшую мажоранту* функции $g(x) = (x-1)^+$. (Затем надо будет, разумеется, убедиться в том, что так найденная функция является $\alpha\beta$*-эксцессивной*.)

С этой целью заметим, что при достаточно больших $\bar{c}$ функция $\varphi_{\bar{c}}(x) = \bar{c} x^{\gamma_1}$ заведомо больше функции $g(x)$ при всех $x \in E$. Поэтому из формулы (35) становится понятным, как отыскать среди функций $\overline{V}_{\bar{c}}(x; \bar{x})$ наименьшую мажоранту функции $g(x)$.

Возьмем достаточно большое $\bar{c}$, для которого заведомо $\varphi_{\bar{c}}(x) > g(x)$ для всех $x \in E$, и начнем уменьшать $\bar{c}$ до тех пор, пока при некотором значении $\bar{c}_1$ функция $\varphi_{\bar{c}_1}(x)$ не «встретит» в некоторой точке, скажем $\bar{x}_1$, функцию $g(x)$.

Из выпуклости функций $\varphi_{\bar{c}}(x)$, $x \in E$, следует, что, в принципе, может существовать еще одна такая точка $\bar{x}_2 \in E$, что $\bar{x}_2 > \bar{x}_1$ и $\varphi_{\bar{c}_1}(\bar{x}_2) = g(\bar{x}_2)$.

В рассматриваемом нами случае фазовое пространство $E = \{x = \lambda^k,\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$ дискретно. Однако если считать, что $\lambda = 1 + \Delta$, $\Delta > 0$, причем Δ *мало*, то и расстояние между точками $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ также будет малым, и, более того, при $\Delta \downarrow 0$ эти точки будут «сливаться» в одну точку, скажем, $\tilde{x}$.

Очевидно, что эта точка $\tilde{x}$ есть не что иное, как то значение из множества $(0, \infty)$, где функция $\varphi_{\tilde{c}}(x) = \tilde{c} x^{\gamma_1}$ *касается* при некотором $\tilde{c}$ функции $g(x) = (x-1)^+$, $x \in (0, \infty)$.

Из сказанного ясно, что $\widetilde{c}$ и $\widetilde{x}$ определяются из системы двух уравнений

$$\varphi_{\widetilde{c}}(\widetilde{x}) = g(\widetilde{x}), \tag{36}$$

$$\left.\frac{d\varphi_{\widetilde{c}}(x)}{dx}\right|_{x=\widetilde{x}-} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=\widetilde{x}+}, \tag{37}$$

из которых находим, что

$$\widetilde{x} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}, \quad \widetilde{c} = \frac{(\gamma_1 - 1)^{\gamma_1 - 1}}{\gamma_1^{\gamma_1}}. \tag{38}$$

При этом понятно, что функция

$$\widetilde{V}(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant \widetilde{x}, \\ \widetilde{c}x^{\gamma_1}, & x < \widetilde{x}, \end{cases} \tag{39}$$

будет при достаточно малых $\Delta > 0$ давать и хорошую аппроксимацию наименьшей функции среди функций вида (35). (Ср. с формулой (37) в § 2a гл. VIII.)

Замечание. Отметим особо условие «гладкого склеивания» (37), которое появилось в предшествующих рассмотрениях вполне естественным образом. В задачах об оптимальной остановке это условие часто играет роль *дополнительного* условия, позволяющего выделять «нужное» решение. (См. [441] и далее гл. VIII.)

Описанный выше *качественный* метод отыскания наименьшей мажоранты функции $g(x)$ при более кропотливом анализе приводит (см. [443]) к следующим «оптимальным» значениям x^* и c^* для параметров $\bar{x}$ и $\bar{c}$, при которых соответствующая функция $V^*(x) = \overline{V}_{c^*}(x; x^*)$ является не только наименьшей мажорантой функции $g(x)$, но и $\alpha\beta$*-эксцессивной*:

$$c^* = \min(c_1^*, c_2^*), \tag{40}$$

где

$$c_1^* = (\lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]} - 1)\lambda^{-\gamma_1[\log_\lambda \widetilde{x}]}, \tag{41}$$

$$c_2^* = (\lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]} - 1)\lambda^{-\gamma_1[\log_\lambda \widetilde{x}] - \gamma_1} \tag{42}$$

и

$$x^* = \begin{cases} \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]}, & \text{если } c^* = c_1^*, \\ \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]+1}, & \text{если } c^* = c_2^* \end{cases} \tag{43}$$

($[y]$ — целая часть числа y и $\widetilde{x}$ определено в формуле (38)).

Свойство $\alpha\beta$-эксцессивности найденной функции $V^*(x)$ для $x < x^*$ очевидно, поскольку для этих значений $\alpha\beta TV^*(x) = V^*(x)$ по самой конструкции этой функции. Если же $x \geqslant x^*$, то справедливость неравенства $\alpha\beta TV^*(x) \leqslant V^*(x)$ устанавливается непосредственной проверкой с учетом формул (40)—(43) и того, что для этих значений x выполнено $V^*(x) = x - 1$.

7. Согласно теореме 4 из § 2а найденная функция $V^*(x)$ есть в точности $\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x(\alpha\beta)^\tau g(S_\tau)$, при этом момент

$$\tau^* = \inf\{n\colon V^*(S_n) = g(S_n)\} = \inf\{n\colon S_n \geqslant x^*\}$$

будет оптимальным моментом остановки, если только $\mathsf{P}_x(\tau^* < \infty) = 1$, $x \in E$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_x(\tau^* > N) = \mathsf{P}_x(\max_{n\leqslant N} S_n < x^*) = \\ = \mathsf{P}_x(S_0 \max_{n\leqslant N} \lambda^{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n} < x^*),\end{aligned} \tag{44}$$

и, поскольку $\mathsf{P}(\varepsilon_i = 1) = p$, $\mathsf{P}(\varepsilon_i = -1) = q$, при $p \geqslant q$ вероятность в правой части стремится к нулю при $N \to \infty$.

В силу соотношений (5) неравенство $p \geqslant q$ равносильно тому, что

$$r \geqslant \frac{a+b}{2}. \tag{45}$$

С учетом того, что $b = \lambda - 1$ и $a = \lambda^{-1} - 1$, находим, что $\mathsf{P}_x(\tau^* < \infty) = 1$ при любом $x < x^*$, если

$$r \geqslant \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} - 1. \tag{46}$$

Если же $x \geqslant x^*$, то и без условия (46) имеем $\mathsf{P}_x(\tau^* = 0) = 1$.

Резюмируя, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \beta < 1$ *и выполнено условие* (46).

Рациональная стоимость $\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f; \mathsf{P})$ *для опциона-колл американского типа с функциями выплат* $f_n = \beta^n (S_n - 1)^+$, $n \geqslant 0$, *определяется формулой*

$$\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f; \mathsf{P}) = V^*(S_0),$$

где

$$V^*(S_0) = \begin{cases} S_0 - 1, & S_0 \geqslant x^*, \\ c^* S_0^{\gamma_1}, & S_0 < x^*, \end{cases}$$

а константы c^* *и* x^* *находятся по формулам* (40)—(43). *Оптимальным моментом предъявления опциона к исполнению является момент* $\tau^* = \inf\{n\colon S_n \geqslant x^*\}$. *При этом*

$$V^*(S_0) = \mathsf{E}_{S_0}(\alpha\beta)^{\tau^*}(S_{\tau^*} - 1)^+.$$

§ 5c. Расчеты для стандартного опциона продавца

1. Для стандартного опциона продавца, или опциона-пут, функции выплат имеют следующий вид:

$$f_n(y) = \beta^n (K - y)^+, \quad x \in E, \tag{1}$$

где $0<\beta\leqslant 1$, $E=\{y=\lambda^k: k=0, \pm 1, \ldots\}$, $\lambda>1$.

По аналогии с обозначениями из предшествующего параграфа будем полагать

$$V_n^N(y) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n^N} \mathsf{E}_y (\alpha\beta)^\tau (K-S_\tau)^+, \tag{2}$$

$$V^*(y) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_y (\alpha\beta)^\tau (K-S_\tau)^+. \tag{3}$$

Интерес к вычислению этих величин связан с тем, что

$$V_0^N(y) = \widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P}), \quad y=S_0, \tag{4}$$

и

$$V^*(y) = \widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P}), \quad y=S_0, \tag{5}$$

где $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})$ и $\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P})$ для системы $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ функций $f_n=f_n(y)$, задаваемых формулами (1), определяются формулами (7) из § 5a и (21) из § 5b соответственно.

Теорема 1. *Для каждого* $N\geqslant 0$ *существует такая последовательность* y_n^N, $0\leqslant n\leqslant N$, *со значениями в* $E\cup\{+\infty\}$, *что*

$$D_n^N = \bigl\{y\in E:\ y\in(0, y_n^N]\bigr\}, \tag{6}$$

$$C_n^N = \bigl\{y\in E:\ y\in(y_n^N, \infty)\bigr\} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned}\tau_0^N &= \min\bigl\{0\leqslant n\leqslant N:\ S_n\in D_n^N\bigr\} = \\ &= \min\bigl\{0\leqslant n\leqslant N:\ S_n\in(0, y_n^N]\bigr\}.\end{aligned}$$

При этом

$$y_0^N\leqslant\ldots\leqslant y_{N-1}^N\leqslant y_N^N=\infty \tag{8}$$

и

$$V_0^N(y) = \begin{cases} g(y), & y\in D_0^N=(0, y_0^N],\\ Q^N g(y), & y\in C_0^N=(y_0^N,\infty).\end{cases} \tag{9}$$

Рациональная стоимость определяется формулой $\widetilde{\mathbb{C}}_N(f;\mathsf{P})=V_0^N(S_0)$.

Доказательство аналогично доказательству, проведенному в § 5b для случая опциона-колл, и основано на анализе множества точек $y\in E$, в которых происходит «подъем» функции $g(y)$ под действием операторов Q^n. □

Полезно при этом отметить, что под действием оператора Q заведомо происходит «поднятие» функции $g(y)$ в точке $y=K$ (выше для простоты полагалось $K=1$) и $Qg(y)=g(y)=0$ для $y>K$. Поэтому эти значения $y\in E$ можно относить как к областям остановки наблюдений, так и к областям продолжения наблюдений. Формулы (6) и (7) показывают, что такие точки были отнесены к областям продолжения наблюдений.

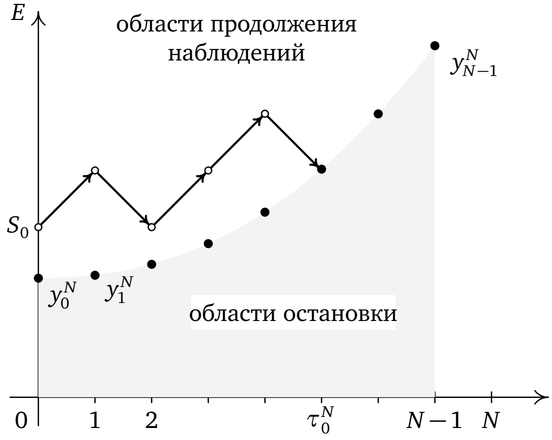


Рис. 59. Опцион-пут. Области остановки $D_0^N = (0, y_0^N]$, …, $D_{N-1}^N = (0, y_{N-1}^N]$, $D_N^N = (0, \infty)$, и продолжения наблюдений $C_0^N = (y_0^N, \infty)$, …, $C_{N-1}^N = (y_{N-1}^N, \infty)$, $C_N^N = \varnothing$. Траектория $(S_0, S_1, S_2, \dots)$ выходит из областей продолжения наблюдений в момент τ_0^N

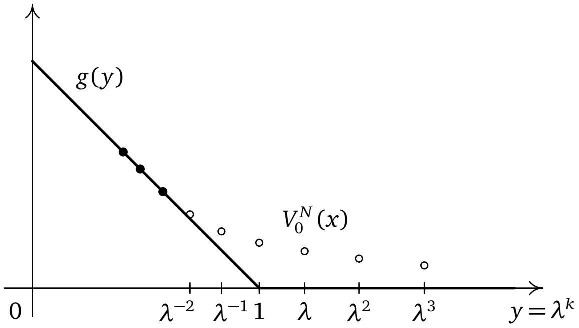


Рис. 60. Графики функций $g(y)=(1-y)^+$ и $V_0^N(y)=Q^N g(y)$ для опциона-пут с функциями выплат $f_n=\beta^n g(y)$, $0<\beta\leqslant 1$, $0\leqslant n\leqslant N$, $\lambda>1$

2. Рассмотрим вопрос об отыскании функции $V^*(y)$ $(=\lim_{N\to\infty} V_0^N(y))$, значения $y^*=\lim_{N\to\infty} y_0^N$ и оптимального момента τ^*:

$$V^*(y) = \mathsf{E}_y\,(\alpha\beta)^{\tau^*}(K-S_{\tau^*})^+, \tag{10}$$

снова полагая для простоты $K=1$.

Обозначим $C^*=(y^*, \infty)$, $D^*=(0, y^*]$. Как и в § 5b, находим, что функция $V^*(y)$ в области C^* есть решение уравнения

$$\varphi(y) = \alpha\beta\Big[p\varphi(\lambda y)+(1-p)\varphi\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\Big].$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $c_1 y^{\gamma_1}+c_2 y^{\gamma_2}$, $\gamma_1>1$ и $\gamma_2<0$ (см. формулы (31), (32) в § 5b).

Поскольку $V^*(y) \leqslant 1$, имеем $c_1 = 0$, и, значит, функцию $V^*(y)$ следует искать в классе функций

$$\overline{V}_{\bar{c}}(y; \bar{y}) = \begin{cases} 1 - y, & y \leqslant \bar{y}, \\ \bar{c} y^{\gamma_2}, & y > \bar{y}, \end{cases} \tag{11}$$

где «оптимальные» значения c^* и y^* параметров $\bar{c}$ и $\bar{y}$ должны быть определены из вышеупомянутых (п. 6 § 5b) дополнительных соображений, что $V^*(y) = \overline{V}_{c^*}(y; y^*)$ должна быть *наименьшей $\alpha\beta$-эксцессивной мажорантой функции* $g(y) = (1 - y)^+$.

Следуя изложенной в § 5b схеме отыскания *приближенных* (при малых $\Delta = 1 - \lambda > 0$) значений $\widetilde{c}$ и $\widetilde{y}$ (для параметров c^* и y^*), находим, что они должны определяться из системы двух уравнений

$$\begin{gathered} \varphi_{\widetilde{c}}(\widetilde{y}) = g(\widetilde{y}), \\ \frac{d\varphi_{\widetilde{c}}(y)}{dy}\bigg|_{y=\widetilde{y}+} = \frac{dg(y)}{dy}\bigg|_{y=\widetilde{y}-}. \end{gathered} \tag{12}$$

Решая эту систему, получаем

$$\widetilde{y} = \left|\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}\right|, \qquad \widetilde{c} = \frac{|\gamma_2|^{|\gamma_2|}}{|\gamma_2 - 1|^{|\gamma_2 - 1|}}. \tag{13}$$

С помощью значений $\widetilde{y}$ и $\widetilde{c}$, полученных в «предельной» схеме $(\lambda \downarrow 1)$, можно дать формулы (см. [443]) для величин y^* и c^* и в исходной «допредельной» $(\lambda > 1)$ схеме:

$$c^* = \min(c_1^*, c_2^*), \tag{14}$$

где

$$c_1^* = (1 - \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{y}]})\lambda^{-\gamma_2 [\log_\lambda \widetilde{y}]}, \tag{15}$$

$$c_2^* = (1 - \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{y}]+1})\lambda^{-\gamma_2 [\log_\lambda \widetilde{y}] - \gamma_2} \tag{16}$$

и

$$y^* = \begin{cases} \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{y}]}, & \text{если } c^* = c_1^*, \\ \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{y}]+1}, & \text{если } c^* = c_2^*. \end{cases} \tag{17}$$

Свойство $\alpha\beta$-эксцессивности наименьшей мажоранты $V^*(y)$ функции $g(y) = (1 - y)^+$ устанавливается прямой проверкой.

Наконец, заметим, что условие

$$r \leqslant \frac{a + b}{2} = \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} - 1 \tag{18}$$

(ср. с формулами (45) в § 5b) обеспечивает выполнение свойства $\mathsf{P}_y(\tau^* < \infty) = 1$, $y \in E$, для момента $\tau^* = \inf\{n : S_n \leqslant y^*\}$. (Если $y \leqslant y^*$, то $\mathsf{P}_y(\tau^* = 0) = 1$.)

Тем самым, при выполнении условия (14) момент τ^* является оптимальным в том смысле, что выполнено свойство (10) для всех $y \in E$.

Теорема 2. *Пусть* $0<\beta\leqslant 1$ *и выполнено условие* (18).

Рациональная стоимость $\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P})$ *для опциона-пут американского типа с функциями выплат* $f_n=\beta^n(1-S_n)^+$, $n\geqslant 0$, *определяется формулой*

$$\widetilde{\mathbb{C}}_\infty(f;\mathsf{P}) = V^*(S_0), \tag{19}$$

где

$$V^*(S_0) = \begin{cases} 1-S_0, & S_0 \leqslant y^*, \\ c^* S_0^{\gamma_2}, & S_0 > y^*, \end{cases} \tag{20}$$

а константы c^* *и* y^* *находятся по формулам* (14)—(17). *Оптимальным моментом предъявления опциона к исполнению является момент* $\tau^* = \inf\{n\colon S_n\leqslant y^*\}$. *При этом*

$$V^*(S_0) = \mathsf{E}_{S_0}(\alpha\beta)^{\tau^*}(1-S_{\tau^*})^+.$$

§ 5d. Опционы с последействием. Расчеты в «русском опционе»

1. Для рассмотренных выше стандартных опционов колл и пут платежные функции f_n имели *марковскую* структуру:

$$f_n = \beta^n(S_n-K)^+ \quad \text{и} \quad f_n = \beta^n(K-S_n)^+. \tag{1}$$

И с теоретической точки зрения, и с точки зрения финансовой инженерии определенный интерес представляют также и различные опционы с *последействием*. Примером таких опционов могут служить опционы со следующими платежными функциями:

$$f_n = \beta^n\Bigl(aS_n - \min_{0\leqslant r\leqslant n} S_r\Bigr)^+, \tag{2}$$

$$f_n = \beta^n\Bigl(\max_{0\leqslant r\leqslant n} S_r - aS_n\Bigr)^+ \tag{3}$$

или с функциями

$$f_n = \beta^n\left(aS_n - \sum_{k=0}^n S_k\right)^+, \tag{4}$$

$$f_n = \beta^n\left(\sum_{k=0}^n S_k - aS_n\right)^+, \tag{5}$$

где $0\leqslant\beta\leqslant 1$, $a\geqslant 0$.

Опционы с платежными функциями (4) и (5) называют опционами (колл и пут) *азиатского типа*. Опционы (колл и пут) с платежными функциями (2) и (3) в случае $a=0$ рассматривались в работах [434], [435], где они получили название *русских опционов*. См. также работы [118], [283]. Последующее изложение будет следовать работе [283].

2. Будем рассматривать *CRR*-модель, для которой ρ_n принимают два значения: $\lambda-1$ и $\lambda^{-1}-1$, где $\lambda>1$. При этом для определенности рассмотрим *опцион-пут* американского типа с платежной функцией (3), где β, $0<\beta<1$, играет роль дисконтирующего фактора.

Согласно общей теории (см. раздел 2)х рациональная стоимость $\widehat{\mathbb{C}}$ такого опциона рассчитывается по формуле

$$\widehat{\mathbb{C}} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}\,\alpha^\tau f_\tau, \tag{6}$$

где $\alpha=(1+r)^{-1}$ и E — усреднение по мартингальной мере P такой, что p и q определяются формулами (6) из § 5a.

Поскольку

$$\widehat{\mathbb{C}} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}(\alpha\beta)^\tau\Big(\max_{0\leqslant r\leqslant\tau} S_r - aS_\tau\Big)^+ \tag{7}$$

и $S_n=S_0\lambda^{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n}$, величина $\widehat{\mathbb{C}}$ заведомо конечна ($\widehat{\mathbb{C}}\leqslant S_0$), если выполнено условие

$$\alpha\beta\lambda \leqslant 1. \tag{8}$$

Положим $Y_n=\max\limits_{k\leqslant n} S_k$. Ясно, что

$$Y_n = \max\{Y_{n-1}, S_n\}, \tag{9}$$

при этом последовательность $(S_n,Y_n)_{n\geqslant0}$ является марковской, и, в принципе, решение задачи об оптимальной остановке (7) может основываться на общих результатах об оптимальных правилах остановки для двумерных марковских цепей (см. [441] и § 2a).

Замечательным здесь является, однако, то обстоятельство, что рассматриваемая *двумерная* марковская задача может быть сведена к некоторой *одномерной* марковской задаче, если воспользоваться идеями замены меры и подходящего выбора дисконтирующего актива (numéraire). (По этому поводу см. также далее § 1b гл. VII.)

Пусть $\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty$. Тогда, вспоминая, что $B_n=B_0\alpha^{-n}$ с $\alpha=(1+r)^{-1}$, находим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\alpha\beta)^\tau\Big(\max_{0\leqslant r\leqslant\tau} S_r - aS_\tau\Big)^+ &= \mathsf{E}(\alpha\beta)^\tau\left(\frac{\max\limits_{0\leqslant r\leqslant\tau} S_r}{S_\tau} - a\right)^+ S_\tau = \\ &= S_0\,\mathsf{E}\left[\beta^\tau\left(\frac{Y_\tau}{S_\tau}-a\right)^+\cdot\frac{S_\tau/S_0}{B_\tau/B_0}\right].\end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим $Z_n=\dfrac{S_n/S_0}{B_n/B_0}$. Тогда видим, что $Z_n>0$, относительно меры P последовательность $Z=(Z_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P})_{n\geqslant0}$ есть мартингал и $\mathsf{E}\,Z_n=1$.

Для $A\in\mathscr{F}_n$ положим

$$\widehat{\mathsf{P}}_n(A) = \mathsf{E}(Z_n I_A).$$

Понятно, что набор мер $(\widehat{\mathsf{P}}_n)_{n\geqslant0}$ является согласованным (в том смысле, что $\widehat{\mathsf{P}}_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n=\widehat{\mathsf{P}}_n$, $n\geqslant0$), и по теореме Ионеску Тулчи о продолжении меры (см., например, [439, гл. II, § 9]) существует такая мера $\widehat{\mathsf{P}}$ (в пространстве $\Omega = \{-1, 1\}^\infty$), что $\widehat{\mathsf{P}}|\mathscr{F}_n = \widehat{\mathsf{P}}_n$, $n \geqslant 0$.

Тогда

$$\mathsf{E}(\alpha\beta)^\tau \Big(\max_{0\leqslant r\leqslant\tau} S_r - aS_\tau\Big)^+ = S_0 \widehat{\mathsf{E}} \beta^\tau \left(\frac{Y_\tau}{S_\tau} - a\right)^+. \tag{11}$$

Положим здесь

$$X_n = \frac{Y_n}{S_n} \tag{12}$$

и заметим, что

$$X_{n+1} = \max\left(\frac{X_n}{\lambda^{\varepsilon_{n+1}}},\ 1\right), \tag{13}$$

причем все X_n принимают значения в множестве $\widehat{E} = \{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\}$.

Относительно новой меры $\widehat{\mathsf{P}}$ последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ снова оказывается последовательностью *независимых одинаково распределенных* случайных величин,

$$\widehat{p} = \widehat{\mathsf{P}}(\varepsilon_n = 1) = \mathsf{E}\, I_{(\varepsilon_n = 1)} \alpha\lambda^{\varepsilon_1} = \alpha\lambda p \tag{14}$$

и

$$\widehat{q} = \widehat{\mathsf{P}}(\varepsilon_n = -1) = \frac{\alpha}{\lambda}(1-p). \tag{15}$$

Будем рассматривать последовательность $(X_n)_{n\geqslant 0}$, определяемую рекуррентными соотношениями (13), в предположении, что $X_0 = x \in \widehat{E}$. Пусть $\widehat{\mathsf{P}}_x$ — распределение этой последовательности. Тогда последовательность $X = (X_n, \widehat{\mathscr{F}}_n, \widehat{\mathsf{P}}_x)$ с $x \in \widehat{E}$, $\widehat{\mathscr{F}}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, $n \geqslant 0$, является марковской, и, следовательно, для отыскания цены $\widehat{\mathbb{C}}$ надо рассмотреть задачу об оптимальной остановке

$$\widehat{V}(x) = \sup_{\tau\in\widehat{\mathfrak{M}}_0^\infty} \widehat{\mathsf{E}}_x \beta^\tau (X_\tau - a)^+, \quad x \in \widehat{E}, \tag{16}$$

где $\widehat{\mathfrak{M}}_0^\infty$ — класс конечных моментов остановки $\tau = \tau(\omega)$, удовлетворяющих соотношению $\{\omega\colon \tau(\omega) \leqslant n\} \in \widehat{\mathscr{F}}_n$, $n \geqslant 0$.

Интересующая нас цена $\widehat{\mathbb{C}}$ связана с решением $\widehat{V}(1)$ этой задачи формулой

$$\widehat{\mathbb{C}} = S_0 \widehat{V}(1). \tag{17}$$

Замечание 1. Поскольку в формуле (7) sup берется по классу $\mathfrak{M}_0^\infty$, строго говоря, для справедливости формулы (17) надо было бы в определении $\widehat{V}(x)$ (см. формулу (16)) sup брать не по классу $\widehat{\mathfrak{M}}_0^\infty$, а по более широкому классу $\mathfrak{M}_0^\infty$. Однако на самом деле оба эти супремума совпадают, что следует и из общей теории оптимальных правил остановки для марковских последовательностей (см. [441]) и, в сущности, доказывается ниже (см. далее замечание 2).

3. Пусть $g(x) = (x-a)^+$, $x \in \widehat{E}$, и

$$\widehat{V}_0^N(x) = \sup_{\tau\in\widehat{\mathfrak{M}}_0^N} \widehat{\mathsf{E}}_x \beta^\tau g(X_\tau),$$

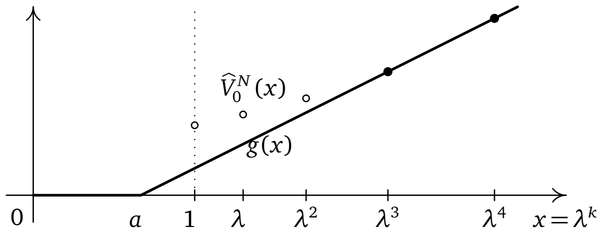


Рис. 61. Графики функций $g(x)=(x-a)^+$ и $\widehat{V}_0^N(x)=\widehat{Q}^N g(x)$ в случае $0<a<1$

где $\widehat{\mathfrak{M}}_0^N$ — класс моментов остановки τ из $\widehat{\mathfrak{M}}_0^\infty$ со свойством $\tau(\omega)\leqslant N$, $\omega\in\Omega$. (См. рис. 61.)

Обозначим также

$$\widehat{T}f(x) = \widehat{\mathsf{E}}_x f(X_1) = \widehat{p}f\Big(\frac{x}{\lambda}\wedge 1\Big)+(1-\widehat{p})f(\lambda x), \tag{18}$$

$$\widehat{Q}f(x) = \max\big(f(x), \beta\widehat{T}f(x)\big). \tag{19}$$

Из теоремы 3 в § 2a и замечания к ней следует, что

$$\widehat{V}_0^N(x) = \widehat{Q}^N g(x), \tag{20}$$

и оптимальный момент $\widehat{\tau}_0^N\in\widehat{\mathfrak{M}}_0^N$ имеет следующую структуру (ср. с формулой (9) в § 5b):

$$\widehat{\tau}_0^N = \min\big\{0\leqslant n\leqslant N\colon X_n\in\widehat{D}_n^N\big\}, \tag{21}$$

где

$$\widehat{D}_n^N = \big\{x\in\widehat{E}\colon \widehat{V}_0^{N-n}(x) = g(x)\big\}. \tag{22}$$

Ясно, что $\widehat{D}_0^N\subseteq\widehat{D}_1^N\subseteq\ldots\subseteq\widehat{D}_N^N=\widehat{E}\equiv\{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\}$.

Точно так же, как и в § 5b, рассматривая последовательно функции $\widehat{Q}g(x), \ldots, \widehat{Q}^N g(x)$ и сопоставляя их с $g(x)$, находим, что области остановки $\widehat{D}_n^N$ имеют следующий вид:

$$\widehat{D}_n^N = \big\{x\in\widehat{E}\colon x\in[\widehat{x}_n^N, \infty)\big\}, \tag{23}$$

где

$$1=\widehat{x}_N^N\leqslant\widehat{x}_{N-1}^N\leqslant\ldots\leqslant\widehat{x}_0^N. \tag{24}$$

В качественном отношении области остановки $\widehat{D}_n^N$ и области продолжения наблюдений $\widehat{C}_n^N=\widehat{E}\setminus\widehat{D}_n^N$ такие же, как и на рис. 57 в § 5b (с очевидной заменой в обозначениях: $S_i\to X_i$, $E\to\widehat{E}$, …, $x_N^N=0\to\widehat{x}_N^N=1$).

Замечание 2. Если

$$V_0^N(x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^N}\widehat{\mathsf{E}}_x\beta^\tau g(X_\tau),$$

то из теоремы 3 в § 2a вытекает, что $V_0^N(x)=\widehat{Q}^N g(x)$. Сопоставляя это равенство с (20), видим, что $\widehat{V}_0^N(x)=V_0^N(x)$, $x\in\widehat{E}$, и что момент $\widehat{\tau}_0^N$, определяемый формулой (21), будет оптимальным не только в классе $\widehat{\mathfrak{M}}_0^N$, но и в более широком классе $\mathfrak{M}_0^N$.

4. Поскольку $g(x) \geqslant 0$, согласно теореме 4 из § 2b имеем $\widehat{V}(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \widehat{V}_0^N(x)$. Положим

$$\widehat{\tau} = \inf\{n \geqslant 0\colon\ \widehat{V}(X_n) = g(X_n)\} = \inf\{n \geqslant 0\colon\ X_n \in \widehat{D}\},$$

где $\widehat{D} = \{x \in E : x \in [x, \infty)\}$ и $\widehat{x} = \lim\limits_{N\to\infty} \widehat{x}_0^N$.

Согласно той же самой теореме момент $\widehat{\tau}$ будет оптимальным моментом остановки для задачи (16), лишь бы только выполнялось условие $\widehat{\mathsf{P}}_x(\widehat{\tau} < \infty) = 1$, $x \in \widehat{E}$. Отложив пока рассмотрение этого свойства момента $\widehat{\tau}$, обратимся к отысканию значения $\widehat{x}$ и функции $\widehat{V}(x)$.

Функция $\widehat{V}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{V}(x) = \max\bigl(g(x), \beta \widehat{T}\widehat{V}(x)\bigr), \quad x \in \widehat{E}, \tag{25}$$

и, следовательно, в области продолжения наблюдений $\widehat{C} = \widehat{E} \setminus \widehat{D}$ она является одним из решений уравнения

$$\varphi(x) = \beta \widehat{T} \varphi(x), \quad x \in \widehat{C}, \tag{26}$$

или, в развернутой форме, уравнения

$$\varphi(x) = \beta\Bigl[\widehat{p}\varphi\Bigl(\frac{x}{\lambda} \vee 1\Bigr) + (1-\widehat{p})\varphi(\lambda x)\Bigr], \quad x \in \widehat{C}. \tag{27}$$

В частности, при $x = 1$ имеем

$$\varphi(1) = \beta\bigl[\widehat{p}\varphi(1) + (1-\widehat{p})\varphi(\lambda)\bigr] \tag{28}$$

и при $x \geqslant \lambda$ имеем

$$\varphi(x) = \beta\Bigl[\widehat{p}\varphi\Bigl(\frac{x}{\lambda}\Bigr) + (1-\widehat{p})\varphi(\lambda x)\Bigr]. \tag{29}$$

Естественно искать решение уравнения (29) в виде x^γ (ср. с п. 5 в § 5b). Тогда для γ получаем уравнение

$$\frac{1}{\beta} = \widehat{p}\lambda^{-\gamma} + (1-\widehat{p})\lambda^{\gamma}, \tag{30}$$

имеющее два таких решения $\gamma_1 < 0$ и $\gamma_2 > 1$, что величины $y_1 = \lambda^{\gamma_1}$ и $y_2 = \lambda^{\gamma_2}$ определяются из формул

$$y_1 = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad y_2 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \tag{31}$$

где

$$A = \frac{1}{(1-\widehat{p})\beta}, \quad B = \frac{\widehat{p}}{1-\widehat{p}}. \tag{32}$$

При $x \geqslant \lambda$ общее решение $\varphi(x)$ уравнения (29) может быть представлено в виде $c\psi_b(x)$, где $\psi_b(x) = bx^{\gamma_1} + (1-b)x^{\gamma_2}$.

Поскольку $\psi_b(1)=1$, получаем, что константа $c=\varphi(1)$.

Подставляя $\varphi(\lambda)=\varphi(1)\psi_b(\lambda)$ в уравнение (28) и учитывая, что по смыслу задачи $\varphi(1)\neq 0$, для неизвестного значения b получаем уравнение

$$1=\beta\bigl\{\widehat{p}+(1-\widehat{p})[b\lambda^{\gamma_1}+(1-b)\lambda^{\gamma_2}]\bigr\}, \tag{33}$$

решение которого есть

$$\widehat{b}=\frac{(1-\widehat{p})\lambda^{\gamma_2}+\widehat{p}-\beta^{-1}}{(1-\widehat{p})(\lambda^{\gamma_2}-\lambda^{\gamma_1})}. \tag{34}$$

Пользуясь тем, что γ_1 и γ_2 определяются из уравнения (30), нетрудно установить, что $0<\widehat{b}<1$.

Пусть $\widehat{V}_{c_0}(x)=c_0\psi_{\widehat{b}}(x)$, $x<x_0$, где c_0 и x_0 — пока неопределенные константы. Понятно, что искомая функция $\widehat{V}(x)$ является функцией семейства

$$\widehat{V}_{c_0}(x;x_0)=\begin{cases}(x-a)^+, & x\geqslant x_0,\\ \widehat{V}_{c_0}(x), & x<x_0.\end{cases} \tag{35}$$

При этом оптимальные значения констант c_0 и x_0, обозначаемые $\widehat{c}$ и $\widehat{x}$, могут быть найдены из тех соображений, что требуемая функция $\widehat{V}(x)=\widehat{V}(x;\widehat{x})$ должна быть *наименьшей β-эксцессивной мажорантой* функции $g(x)$, т. е. наименьшей функцией, удовлетворяющей *одновременно* двум неравенствам:

$$\begin{aligned}\widehat{V}(x)&\geqslant g(x),\\ \widehat{V}(x)&\geqslant \beta\widehat{T}\widehat{V}(x)\end{aligned} \tag{36}$$

для всех $x\in\widehat{E}=\{1,\lambda,\lambda^2,\dots\}$.

Доказать существование решения этой задачи и найти *точные* значения $\widehat{c}$ и $\widehat{x}$ можно точно так же, как и в случае стандартного опциона-колл (см. п. 6 § 5b и [283]). В этом случае, когда $\Delta=\lambda-1$ близко к нулю, для $\widehat{c}$ и $\widehat{x}$ в качестве приближенных значений могут быть взяты величины $\widetilde{c}$ и $\widetilde{x}$, получаемые следующим образом. (Ср. с соответствующей процедурой в § 5b, с.)

Будем считать, что функции $\psi_{\widehat{b}}(x)$, $\widehat{V}_{c_0}(x)$, $g(x)$, $\widehat{V}_{c_0}(x;x_0)$, заданные на множестве $\widehat{E}=\{1,\lambda,\lambda^2,\dots\}$, определены теми же самыми выражениями и на множестве $[1,\infty)$. Тогда соответствующие аппроксимационные значения $\widetilde{c}$ и $\widetilde{x}$ определяются из тех дополнительных соображений, что

$$\begin{aligned}\widehat{V}_{\widetilde{c}}(\widetilde{x})&=g(\widetilde{x}),\\ \frac{d\widehat{V}_{\widetilde{c}}(x)}{dx}\bigg|_{x=\widetilde{x}-}&=\frac{dg(x)}{dx}\bigg|_{x=\widetilde{x}+}.\end{aligned} \tag{37}$$

Учитывая, что

$$\widehat{V}_{\widetilde{c}}(x)=\widetilde{c}\psi_{\widehat{b}}(x)=\widetilde{c}\,[\widehat{b}x^{\gamma_1}+(1-\widehat{b})x^{\gamma_2}],$$

$g(x)=(x-a)^+$ и заведомо $\widetilde{x}>a$, находим, что $\widetilde{c}$ и $\widetilde{x}$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{aligned} \widetilde{c}\,[\widehat{b}\widetilde{x}^{\gamma_1}+(1-\widehat{b})\widetilde{x}^{\gamma_2}] &= \widetilde{x}-a, \\ \widetilde{c}\,[\widehat{b}\gamma_1\widetilde{x}^{\gamma_1-1}+(1-\widehat{b})\gamma_2\widetilde{x}^{\gamma_2-1}] &= 1. \end{aligned} \tag{38}$$

В частности, при $a=0$ имеем

$$\widetilde{x}=\left(\frac{\widehat{b}}{1-\widehat{b}}\,\frac{1-\gamma_1}{\gamma_2-1}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}, \tag{39}$$

$$\widetilde{c}=\frac{\widetilde{x}}{\gamma_1\widehat{b}\widetilde{x}^{\gamma_1}+\gamma_2(1-\widehat{b})\widetilde{x}^{\gamma_2}}. \tag{40}$$

Из проведенных рассмотрений следует, что при достаточно малых $\Delta>0$ значение $\widehat{V}_{\widetilde{c}}(1)$ близко к $\widehat{V}(1)$. Тем самым, с учетом формулы (17) и того, что $\widehat{V}_{\widetilde{c}}(1)=\widetilde{c}$, находим, что при малых $\Delta>0$ цена описывается приближенной формулой $\widehat{\mathbb{C}}\approx S_0\cdot\widetilde{c}$. (Более подробный анализ см. в [283]. Ср. также с § 2d гл. VIII.)

Глава VII

Теория арбитража в стохастических финансовых моделях. Непрерывное время

1. Портфель ценных бумаг в семимартингальных моделях

§ 1a. Допустимые стратегии. I. Самофинансируемость. Векторный стохастический интеграл

В настоящей главе для случая непрерывного времени будут рассматриваться модели двух рынков ценных бумаг:

- (B, S)-*рынка, состоящего из банковского счета* B *и конечного числа акций* $S = (S^1, \ldots, S^d)$,

и

- $(B, \mathscr{P})$-*рынка, состоящего также из банковского счета* B *и, вообще говоря, континуального числа облигаций* $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}(t, T);\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ T > 0\}$.

Разделы 1—4 относятся к (B, S)-рынкам, а $(B, \mathscr{P})$-рынок имеет свои особенности, и его рассмотрение выносится в отдельный раздел 5.

1. Пусть финансовый рынок состоит из $d+1$ актива $X = (X^0, X^1, \ldots, X^d)$ и функционирует в условиях неопределенности, вероятностно-статистическая природа которой описывается фильтрованным вероятностным пространством (стохастическим базисом) $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathsf{P})$, где $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ — поток поступающей информации.

Наше основное предположение относительно активов $X^i = (X^i_t)_{t \geqslant 0}$, $i = 0, 1, \ldots, d$, состоит в том, что они являются положительными *семимартингалами* (см. § 5a гл. III).

По аналогии со случаем дискретного времени всякий предсказуемый (см. § 5a гл. III) $(d+1)$-мерный процесс $\pi = (\pi^0, \pi^1, \ldots, \pi^d)$, $\pi^i = (\pi^i_t)_{t \geqslant 0}$, будем называть *портфелем* ценных бумаг и говорить, что π определяет *стратегию* (инвестора, трейдера и т. п.) на рассматриваемом рынке, состоящем из $d+1$ актива.

Процесс $X^\pi = (X^\pi_t)_{t\geqslant 0}$ со значениями

$$X^\pi_t = \sum_{i=0}^{d} \pi^i_t X^i_t, \tag{1}$$

или, в векторной записи,

$$X^\pi_t = (\pi_t, X_t), \tag{2}$$

будем называть *капиталом* или *процесс-капиталом* портфеля π. Значение $x = X^\pi_0$ есть величина *начального капитала*, что иногда подчеркивается обозначением $X^\pi = X^\pi(x)$.

2. В § 1a гл. V для случая дискретного времени было введено понятие *самофинансируемых стратегий* π и объяснена их роль как тех стратегий, для которых эволюция соответствующего капитала X^π может осуществляться лишь только за счет изменений в рыночных стоимостях (ценах) активов X^i без какого-либо оттока или притока капитала извне.

Для случая непрерывного времени определение самофинансируемости становится несколько более деликатным, что связано, в конечном счете, с проблемой описания того класса функций, которые допускают *интегрирование* по рассматриваемым семимартингалам.

Напомним, что в случае дискретного времени (см. § 1a гл. V) портфель $\pi = (\pi^0, \pi^1, \ldots, \pi^d)$ называется самофинансируемым ($\pi \in SF$), если при каждом $n \geqslant 1$ выполняется равенство

$$X^\pi_n = X^\pi_0 + \sum_{k=1}^{n} (\pi_k, \Delta X_k), \tag{3}$$

или, в развернутой форме,

$$X^\pi_n = X^\pi_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{d} \pi^i_k \, \Delta X^i_k. \tag{4}$$

Точно так же и в случае непрерывного времени естественно было бы говорить, что π есть *самофинансируемый портфель* или *самофинансируемая стратегия* ($\pi \in SF$), если при каждом $t > 0$ выполняется равенство

$$X^\pi_t = X^\pi_0 + \int_0^t (\pi_s, dX_s) \tag{5}$$

или, что то же самое,

$$X^\pi_t = X^\pi_0 + \int_0^t \sum_{i=0}^{d} \pi^i_s \, dX^i_s, \tag{6}$$

что в символической форме будем записывать как

$$dX^\pi_t = (\pi_t, dX_t).$$

При этом, конечно, надо, в первую очередь, дать *определение* векторных стохастических интегралов (5).

Один из способов сделать это состоит в том, чтобы положить просто по определению

$$\int_0^t (\pi_s, dX_s) \equiv \sum_{i=0}^d \int_0^t \pi_s^i \, dX_s^i, \tag{7}$$

т. е. векторный стохастический интеграл понимать как *сумму обычных* стохастических интегралов.

Подобный способ определения вполне оправдан (и мы его придерживаемся) для «простых» функций, что, в сущности, является наиболее естественной (если и не единственной) конструкцией, соответствующей самой идее интегрирования.

Однако оказывается, определением (7) *не охватываются* все те случаи, когда векторный стохастический интеграл $\int_0^t (\pi_s, dX_s)$ может быть вполне корректно определен, например, предельным переходом от соответствующих интегралов $\int_0^t (\pi_s^{(n)}, dX_s)$ для «простых» процессов $\pi(n) = (\pi_s(n))_{s\geqslant 0}$, $n \geqslant 1$, которые аппроксимируют (в подходящем смысле) процесс $\pi = (\pi_s)_{s\geqslant 0}$.

Суть дела здесь состоит в следующем.

Во-первых, даже обычные (скалярные) стохастические интегралы $\pi^i \cdot X_t^i \equiv \int_0^t \pi_s^i \, dX_s^i$ определяются, вообще говоря, для более широкого класса предсказуемых процессов π^i, а не только для локально ограниченных, как это было изложено в § 5а гл. III. (Привлекательная особенность *локальной ограниченности* процессов π^i состоит в том, что если $X^i \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$, то стохастический интеграл $\pi^i \cdot X^i$ *также* принадлежит классу $\mathscr{M}_{\text{loc}}$; см. свойство с в п. 7 § 5а гл. III.)

Во-вторых, покомпонентное определение (7) никак не учитывает возможную «интерференцию» участвующих семимартингалов, которая, в принципе, может привести к расширению класса векторных процессов $\pi = (\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^d)$, аппроксимируемых «простыми» векторными процессами $\pi(n)$, $n \geqslant 1$.

3. Поясним основные идеи и результаты векторного стохастического интегрирования, учитывающего отмеченные обстоятельства, отсылая за деталями доказательств к специальной литературе (см., например, [74], [172], [248, гл. II], [249], [250], [303], [304], [347]).

Пусть $X = (X^1, \dots, X^d)$ — d-мерный семимартингал с (некоторым) разложением

$$X = X_0 + A + M, \tag{8}$$

где $A = (A^1, \dots, A^d)$ — процесс ограниченной вариации и $M = (M^1, \dots, M^d)$ — локальный мартингал ($A \in \mathscr{V}$, $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$).

Очевидным образом можно найти такой согласованный с потоком $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ неубывающий процесс $C = (C_t)_{t\geqslant 0}$, $C_0 = 0$, и согласованные процессы $c^i=(c^i_t)$ и $c^{ij}=(c^{ij}_t)$, $i, j=1, \dots, d$, что

$$A^i_t = \int_0^t c^i_s\, dC_s, \quad t>0, \tag{9}$$

а квадратические вариации равны

$$[M^i, M^j]_t = \int_0^t c^{ij}_s\, dC_s. \tag{10}$$

(По поводу определения процессов $[M^i, M^j]$ и выполненного для них свойства $[M^i, M^j]^{1/2}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ см. § 5b гл. III.)

Пусть $\pi=(\pi^1, \dots, \pi^d)$ — предсказуемый процесс.

Будем говорить, что

$$\pi\in L_{\mathrm{var}}(A), \tag{11}$$

если (для всех $\omega\in\Omega$) выполняется неравенство

$$\int_0^t \left|\sum_{i=1}^d \pi^i_s c^i_s\right| dC_s<\infty, \quad t>0. \tag{12}$$

Будем писать также

$$\pi\in L^q_{\mathrm{loc}}(M) \quad (q\geqslant 1), \tag{13}$$

если процесс

$$\left[\left(\sum_{i,j=1}^d \pi^i c^{ij}\pi^j\right)\cdot C\right]^{q/2}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}},$$

т. е. если для некоторой последовательности марковских моментов $\tau_n\uparrow\infty$, $n\to\infty$, выполняется неравенство

$$\mathsf{E}\left[\int_0^{\tau_n}\left(\sum_{i,j=1}^d \pi^i_s c^{ij}_s \pi^j_s\right) dC_s\right]^{q/2}<\infty. \tag{14}$$

Если для *некоторого* представления $X=X_0+A+M$ предсказуемый процесс $\pi\in L_{\mathrm{var}}(A)\cap L^q_{\mathrm{loc}}(M)$, то говорят, что

$$\pi\in L^q(X) \tag{15}$$

или что $\pi\in L^q(X; \mathsf{P}, \mathbb{F})$, если нужно подчеркнуть роль меры P и потока $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0}$, относительно которых ведутся все рассмотрения.

Подчеркнем, что принадлежность π классу $L^q(X)$ не зависит от конкретного выбора доминирующего процесса $C=(C_t)_{t\geqslant0}$. (См., например, [249].)

И в скалярном, и в векторном случае одно из стандартных определений стохастических интегралов $\int_0^t(\pi_s, dX_s)$, $t>0$, для $\pi\in L^q(X)$ состоит в том, чтобы положить по определению

$$\int_0^t(\pi_s, dX_s)\equiv\int_0^t(\pi_s, dA_s)+\int_0^t(\pi_s, dM_s), \tag{16}$$

где

$$\int_0^t (\pi_s, dA_s) \equiv \sum_{i=1}^d \int_0^t \pi_s^i c_s^i \, dC_s \tag{17}$$

— сумма (потраекторных) интегралов Лебега—Стилтьеса и

$$\int_0^t (\pi_s, dM_s) \tag{18}$$

— стохастический интеграл по локальному мартингалу $M = (M^1, \ldots, M^d)$.

Определение интегралов Лебега—Стилтьеса по процессу ограниченной вариации (для $\pi \in L_{\mathrm{var}}(A)$ и каждого $\omega \in \Omega$) не вызывает трудностей.

Основная же проблема здесь заключается в том, чтобы

a) дать определение (векторных) интегралов (18) по локальному мартингалу M (для $\pi \in L^q_{\mathrm{loc}}(M)$)

и

b) доказать корректность определения (16), т. е., иначе говоря, установить независимость значений так получаемых интегралов $\int_0^t (\pi_s, dX_s)$ от конкретного семимартингального разложения (8).

Замечание 1. «Естественное» определение (16) содержит ряд «подводных камней».

Так, из него автоматически вовсе не следует, например, свойство *линейности*:

$$a \int_0^t (\pi'_s, dX_s) + b \int_0^t (\pi''_s, dX_s) = \int_0^t (a\pi'_s + b\pi''_s, dX_s).$$

A priori не ясно, является ли свойство интегрируемости инвариантным относительно замены меры P на некоторую эквивалентную меру $\widetilde{\mathsf{P}}$, т. е. верно ли, что $L^q(X; \mathsf{P}, \mathbb{F}) = L^q(X; \widetilde{\mathsf{P}}, \mathbb{F})$ и значения соответствующих интегралов совпадают (по крайней мере, P-п. н.).

Не ясна также инвариантность данного определения интегралов относительно редукции исходного потока σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. А именно, пусть $\mathbb{F}$-семимартингал X оказался таким, что X_t — $\mathscr{G}$-измеримые величины, где $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)_{t\geqslant 0}$ — поток σ-алгебр, удовлетворяющий *обычным условиям* (§ 5а гл. III) и $\mathscr{G}_t \subseteq \mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$. Как хорошо известно (см., например, [249] и [250]), $\mathbb{F}$-семимартингал X будет тогда и $\mathbb{G}$-семимартингалом. Поэтому естественно ожидать, что если процесс π является $\mathbb{G}$-согласованным, то

$$\pi \in L^q(X; \mathsf{P}, \mathbb{F}) \;\Rightarrow\; \pi \in L^q(X; \mathsf{P}, \mathbb{G})$$

и значение стохастического интеграла не зависит от того, на каком стохастическом базисе, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F})$ или $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{G})$, рассматриваются процессы π и X.

В работах [74], [248], [249] устанавливается, что на самом деле все эти три свойства благополучным образом выполняются (для любого $q \geqslant 1$).

4. Опишем конструкцию интегралов (18) по локальному мартингалу M для $\pi \in L^q_{\mathrm{loc}}(M)$.

Если $\pi \in L^2(M)$, т. е.

$$\|\pi\|_{L^2(M)} \equiv \left[\mathsf{E} \int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^d \pi^i_s c^{ij}_s \pi^j_s \right) dC_s \right]^{1/2} < \infty, \tag{19}$$

то стохастический интеграл $(\pi \cdot M)_t \equiv \int_0^t (\pi_s, dM_s)$ определяется так же, как и в скалярном случае для квадратично интегрируемых мартингалов (см. п. 4 § 5а гл. III).

А именно, сначала находится такая последовательность простых предсказуемых вектор-процессов $\pi(n) = (\pi^1(n), \ldots, \pi^d(n))$, $n \geqslant 1$, что

$$\|\pi - \pi(n)\|_{L^2(M)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{20}$$

Для таких процессов $\pi(n)$ стохастические интегралы $(\pi(n) \cdot M)_t$ определяются покомпонентно по формуле (7).

Согласно неравенству Буркхольдера—Дэвиса—Ганди (см., например, [248, 2.34], [304, § 9 гл. 1]), имеем

$$\mathsf{E} \sup_{u \leqslant t} \left| \int_0^u \big(\pi_s(n), dM_s\big) \right|^2 \leqslant C_2 \|\pi(n)\|_{L^2(M)}, \quad t > 0, \tag{21}$$

где C_2 — некоторая *универсальная* константа.

Из соотношений (20) и (21) заключаем, что

$$\mathsf{E} \sup_{u \leqslant t} \left| \int_0^u \big(\pi_s(n) - \pi_s(m), dM_s\big) \right|^2 \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

В силу полноты пространства L^2 случайных величин находим, что при каждом $t \geqslant 0$ найдется случайная величина, обозначаемая $(\pi \cdot M)_t$ или $\int_0^t (\pi_s, dM_s)$ и называемая векторным стохастическим интегралом от $\pi \in$ $\in L^2(M)$ по локальному мартингалу M, для которой

$$\mathsf{E} \sup_{u \leqslant t} \left| \int_0^u \big(\pi_s(n), dM_s\big) - \int_0^u \big(\pi_s, dM_s\big) \right|^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда нетрудно вывести (ср. с доказательством теоремы 4.40 в [250, гл. I]), что величины $\int_0^t (\pi_s, dM_s)$, $t \geqslant 0$, могут быть выбраны так, что процесс $\left(\int_0^t (\pi_s, dM_s)\right)_{t \geqslant 0}$ оказывается согласованным с потоком $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ и имеет траектории, непрерывные справа и с левосторонними пределами в каждый момент $t > 0$.

Стандартным приемом локализации данное определение стохастического интеграла для $\pi \in L^2(M)$ распространяется затем и на предсказуемые процессы $\pi \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, т. е. на те процессы, для которых выполнено свойство (14) с $q = 2$.

Значительно более сложно проводится конструкция стохастических интегралов по локальным мартингалам M для процессов π из класса $L^1_{\mathrm{loc}}(M)$, т. е. для процессов со свойством

$$\left[\left(\sum_{i,j=1}^{d} \pi^i_s c^{ij}_s \pi^j_s\right)\cdot C\right]^{1/2} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}.$$

Даже в скалярном случае ($d=1$), когда это условие принимает следующий вид:

$$(\pi^2\cdot[M,M])^{1/2}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}},$$

конструкция стохастического интеграла $\pi\cdot M$ требует применения довольно-таки изощренной техники, базирующейся на далеко не тривиальных свойствах локальных мартингалов (см. § 2 гл. 2 в монографии [304]).

Замечание 2. В связи с условием $(\pi^2\cdot[M,M])^{1/2}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ полезно отметить, что оно заведомо выполнено для локально ограниченных процессов π, поскольку, как было отмечено выше в п. 3, всякий локальный мартингал M обладает тем свойством, что $[M,M]^{1/2}\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

По поводу разных методов определения *векторных* стохастических интегралов $(\pi\cdot M)_t\equiv\int_0^t(\pi_s, dM_s)$ для локальных мартингалов M и $\pi\in L_{\mathrm{loc}}(M)$ $(\equiv L^1_{\mathrm{loc}}(M))$, а также стохастических интегралов $(\pi\cdot X)_t\equiv\int_0^t(\pi_s, dX_s)$ для семимартингалов X и $\pi\in L(X)$ $(\equiv L^1(X))$ см. работы [74], [248]—[250], где устанавливается справедливость следующих естественно ожидаемых свойств (X и Y — семимартингалы):

a) если ρ является предсказуемым ограниченным процессом и $\pi\in L(X)$, то $\rho\pi\in L(X)$, $\rho\in L(\pi\cdot X)$ и $(\rho\pi)\cdot X=\rho\cdot(\pi\cdot X)$;
b) если $X\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, то $L_{\mathrm{loc}}(X)\subseteq L(X)$;
c) если $X\in\mathscr{V}$, то $L_{\mathrm{var}}(X)\subseteq L(X)$;
d) $L(X)\cap L(Y)\subseteq L(X+Y)$ и если $\pi\in L(X)\cap L(Y)$, то $\pi\cdot X+\pi\cdot Y=\pi\cdot(X+Y)$;
e) $L(X)$ является векторным пространством и $\pi'\cdot X+\pi''\cdot X=(\pi'+\pi'')\cdot X$, где $\pi',\pi''\in L(X)$.

В работах [248], [249] обсуждается также вопрос о «максимальности» класса $L(X)$ как того класса процессов π, для которых выполняются свойства a)—e). «Максимальность» этого класса подтверждается и результатом Ж. Мемэна [343], согласно которому пространство $\{\pi\cdot X\colon \pi\in L(X)\}$ является замкнутым в пространстве семимартингалов относительно *топологии М. Эмери* [74], [138].

5. Если процесс $\pi=(\pi^1,\dots,\pi^d)$ является *локально ограниченным* и $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, векторный стохастический процесс-интеграл $\left(\int_0^t(\pi_s, dM_s)\right)_{t\geqslant 0}$ является *локальным мартингалом* [74], [249]. В скалярном случае это свойство отмечалось в п. 7 (свойство c) § 5а гл. III.

Интересно отметить, что если свойство локальной ограниченности *не выполнено,* то даже в скалярном случае стохастический интеграл $\int_0^t \pi_s \, dM_s$ по локальному мартингалу M *не является*, вообще говоря, локальным мартингалом, что показывает следующий

Пример (М. Эмери [137]). На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ рассмотрим два независимых момента остановки σ и τ, имеющих экспоненциальное распределение с единичным параметром. Положим

$$M_t = \begin{cases} 0, & t < \min(\sigma, \tau), \\ 1, & t \geqslant \min(\sigma, \tau) = \sigma, \\ -1, & t \geqslant \min(\sigma, \tau) = \tau. \end{cases} \tag{22}$$

Если $\mathscr{F}_t = \sigma(M_s, s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, то нетрудно убедиться в том, что $M = (M_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})$ является *мартингалом.*

Рассмотрим детерминированный (и, значит, предсказуемый) процесс $\pi = (\pi_t)_{t \geqslant 0}$, $\pi_0 = 0$, $\pi_t = 1/t$, $t > 0$.

Мартингал M является процессом ограниченной вариации, и процесс π интегрируем по отношению к M (в смысле Лебега—Стилтьеса), поскольку с вероятностью единица случайная величина $\min(\sigma, \tau)$ является строго положительной.

В силу упомянутого в п. 4 свойства b) интеграл $\int_0^t \pi_s \, dM_s$ по мартингалу M совпадает с интегралом Лебега—Стилтьеса.

Пусть $Y_t = \int_0^t \pi_s \, dM_s$, $t \geqslant 0$. Из формулы (22) находим, что

$$Y_t = \begin{cases} 0, & t < \min(\sigma, \tau), \\ \dfrac{1}{\min(\sigma, \tau)}, & t \geqslant \min(\sigma, \tau) = \sigma, \\ -\dfrac{1}{\min(\sigma, \tau)}, & t \geqslant \min(\sigma, \tau) = \tau. \end{cases} \tag{23}$$

Процесс $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ *не является* мартингалом, поскольку $\mathsf{E}\,|Y_t| = \infty$, $t > 0$. Этот процесс не является также и локальным мартингалом, поскольку для любого момента остановки $T = T(\omega)$, не равного тождественно нулю, $\mathsf{E}\,|Y_T| = \infty$. (Подробнее см. [137].)

6. В связи с приведенным примером М. Эмери возникает естественный вопрос о достаточных условиях, при которых векторный стохастический интеграл $\left(\int_0^t (\pi_s, dX_s)\right)_{t \geqslant 0}$ является локальным мартингалом, если таковым является процесс X. Одно такое условие, состоящее в локальной ограниченности процесса π, было уже упомянуто выше.

Следующий результат Ж.-П. Анселя и К. Стрикера (J.-P. Ansel, C. Stricker [9, Corollaire 3.5]) дает условия, выраженные в терминах ограничений не на π, а на значения самого стохастического интеграла (что оказывается удобным, как будет видно далее, для рассмотрения вопросов арбитража).

Теорема ([9]). *Пусть* $X=(X^1, \ldots, X^d)$ *есть* P*-локальный мартингал и* $\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^d)$ — *такой предсказуемый процесс, что стохастический интеграл* $\pi \cdot X$ *определен и ограничен снизу некоторой константой* ($\pi \cdot X_t \geqslant C,\ t \geqslant 0$). *Тогда* $\pi \cdot X$ *является локальным мартингалом.*

7. Вернемся к вопросу о самофинансируемых стратегиях.

Определение 1. Пусть $X=(X^0, X^1, \ldots, X^d)$ является $(d+1)$-мерным неотрицательным семимартингалом, описывающим цены $d+1$ актива. Стратегия $\pi=(\pi^0, \pi^1, \ldots, \pi^d)$ будет называться *допустимой* (по отношению к X), если $\pi \in L(X)$.

Определение 2. Допустимая стратегия $\pi \in L(X)$ называется *самофинансируемой*, если ее капитал $X^\pi = (X_t^\pi)_{t\geqslant 0}$, определенный формулой (1), допускает представление (5).

Класс допустимых самофинансируемых стратегий будет обозначаться SF или $SF(X)$; ср. с § 1a гл. V.

Для дискретного времени самофинансируемость (см. формулы (3) или (4)) равносильна тому, что

$$\sum_{i=0}^{d} (X_{k-1}^i, \Delta \pi_k^i) = 0, \quad k \geqslant 1$$

(формула (13) в § 1a гл. V).

Рассмотрим вопрос о том, что могло бы быть аналогом этого соотношения в случае непрерывного времени, предполагая выполненным свойство (7).

С этой целью предположим, что мы рассматриваем те стратегии $\pi = (\pi^0, \pi^1, \ldots, \pi^d)$, у которых компоненты являются (предсказуемыми) процессами *ограниченной вариации* ($\pi^i \in \mathscr{V},\ i=0,1,\ldots,d$). Примером таких стратегий являются, например, *простые* функции, с которых начиналась конструкция стохастических интегралов (§ 5a гл. III).

В этом предположении ($\pi^i \in \mathscr{V}$) находим, что

$$d(\pi_t^i X_t^i) = \pi_t^i\, dX_t^i + X_{t-}^i\, d\pi_t^i$$

(см. свойство b в п. 4 § 5b гл. III), и, следовательно, условие самофинансируемости (5) равносильно условию

$$\sum_{i=0}^{d} \int_0^t X_{s-}^i\, d\pi_s^i = 0, \quad t > 0, \tag{24}$$

или, в символической форме,

$$(X_{t-}, d\pi_t) = 0. \tag{25}$$

В том более общем случае, когда $\pi = (\pi^0, \pi^1, \ldots, \pi^d)$ является *предсказуемым семимартингалом*, находим (по формуле Ито; § 5с гл. III), что

$$\begin{aligned} d(\pi_t^i X_t^i) &= \pi_{t-}^i\, dX_t^i + X_{t-}^i\, d\pi_t^i + d[X^i, \pi^i]_t = \\ &= \pi_t^i\, dX_t^i - \Delta\pi_t^i\, dX_t^i + X_{t-}^i\, d\pi_t^i + d\langle X^{ic}, \pi^{ic}\rangle_t + \Delta\pi_t^i\, \Delta X_t^i = \\ &= \pi_t^i\, dX_t^i + X_{t-}^i\, d\pi_t^i + d\langle X^{ic}, \pi^{ic}\rangle_t. \end{aligned} \tag{26}$$

Тем самым, условие самофинансируемости семимартингальной (предсказуемой) стратегии π принимает следующую форму:

$$\sum_{i=0}^{d} X_{t-}^i\, d\pi_t^i + d\langle X^{ic}, \pi^{ic}\rangle_t = 0. \tag{27}$$

В частности, если $\pi \in \mathscr{V}$, то $\langle X^{ic}, \pi^{ic}\rangle = 0$ и из (27) получаем равенство (25).

8. Основная причина того, что в финансовой математике при рассмотрении моделей с непрерывным временем ограничиваются, главным образом, классом семимартингалов, состоит в том, что для них есть, как мы видим, понятие (векторного) *стохастического интеграла*, с помощью которого определяется эволюция капитала и дается понятие самофинансируемости. (Это обстоятельство было с полной отчетливостью отмечено в работах [214] и [215] М. Харрисона, Д. Крепса и С. Плиски, впервые обративших внимание на роль семимартингалов и стохастического исчисления для них при описании динамики цен активов.)

Но это, разумеется, не означает, что семимартингалами «все заканчивается». Стохастический интеграл во многих случаях определяется и для несемимартингалов, например, для фрактального броуновского движения и, вообще, для широкого класса гауссовских процессов. Конечно, при этом приходится специально исследовать вопрос о том, какие функции подлежат интегрированию.

Напомним еще раз, что в случае (скалярных) семимартингалов стохастический интеграл определен для *всех локально ограниченных предсказуемых* функций (§ 5а гл. III). При этом оказывается важным, в том числе и для расчетов в финансовой математике, то́ свойство стохастических интегралов по локальным мартингалам, что для таких функций эти интегралы являются также *локальными мартингалами*.

Положение, однако, сильно усложняется, когда приходится оперировать с локально *неограниченными* функциями. Так, приведенный выше пример М. Эмери показывает, что в случае локально неограниченных функций π стохастический процесс-интеграл $\int_0^{\cdot} (\pi_s, dM_s)$ даже по мартингалу M не является, вообще говоря, локальным мартингалом.

Это обстоятельство контрастирует со случаем дискретного времени, где всякое «мартингальное преобразование» $\sum\limits_{k \leqslant \cdot} (\pi_k, \Delta M_k)$ является локальным мартингалом. (См. теорему в § 1с гл. II.)

В этой связи представляются целесообразными следующие определения.

Определение 3. Пусть $X=(X_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})_{t\geqslant 0}$ — семимартингал. Говорят, что X является *мартингальным преобразованием порядка* d ($X\in\mathscr{M}T^d$), если найдутся такой *мартингал* $M=(M^1, \ldots, M^d)$ и такой предсказуемый процесс $\pi=(\pi^1, \ldots, \pi^d)\in L_{\mathrm{loc}}(M)$, что

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\pi_s, dM_s), \quad t\geqslant 0. \tag{28}$$

(Ср. с определением 7 в § 1c гл. II.)

Определение 4. Пусть $X=(X_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})_{t\geqslant 0}$ — семимартингал. Говорят, что X является *локально мартингальным преобразованием порядка* d ($X\in\mathscr{M}T^d_{\mathrm{loc}}$), если найдутся такой *локальный мартингал* $M=(M^1, \ldots, M^d)$ и такой предсказуемый процесс $\pi=(\pi^1, \ldots, \pi^d)\in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$, что имеет место представление (28).

В случае дискретного времени классы $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, $\mathscr{M}T^d$ и $\mathscr{M}T^d_{\mathrm{loc}}$ *совпадают* для любого $d\geqslant 1$ (см. теорему в § 1c гл. II). В случае же непрерывного времени это, вообще говоря, уже не так, что показывает приведенный пример М. Эмери.

9. Введенное выше понятие самофинансируемости, выражающее то свойство, что на рынке нет ни притока, ни оттока капитала, является одной из возможных форм финансовых ограничений на портфель и на операции на рынке ценных бумаг. В случае дискретного времени в § 1a гл. V рассматривались и другие виды ограничений.

Для случая непрерывного времени соответствующие балансовые условия переформулируются почти автоматически.

Скажем, если считать, что $X^0=B$ — банковский счет и $X^1=S$ — акция, то по аналогии с п. 4 из § 1a гл. V балансовые условия в случае, когда акция выплачивает *дивиденды*, будут выглядеть следующим образом:

$$dX_t^\pi = \beta_t\, dB_t + \gamma_t(dS_t + dD_t), \tag{29}$$

где D_t — суммарные дивиденды, выплаченные на временно́м интервале $[0, t]$. При этом

$$d\left(\frac{X_t^\pi}{B_t}\right) = \gamma_t\left(d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) + \frac{dD_t}{B_t}\right). \tag{30}$$

Соответствующим образом переформулируются условия в случаях с потреблением и с операционными издержками. См. формулы (25)—(35) и (36)—(40) в § 1a гл. V.

§ 1b. Дисконтирующие процессы

1. При сопоставлении стоимостей (цен) разных активов обычно выбирается некоторый «стандартный», «базисный» актив, в единицах которого и производится сравнение других ценных бумаг. Например, при рассмотрении рынка S&P 500, состоящего из пятисот активов (см. § 1b гл. I и, подробнее, например, [310]), в качестве «базисного» естественно брать индекс S&P 500, составленный (некоторым взвешенным образом) по стоимостям этих (пятисот) активов.

В гл. I (см. § 2c) была кратко изложена популярная модель ценообразования *CAPM*, в которой в качестве «базисного» актива часто берется банковский счет (безрисковый актив), а показателем «качества» и «риска», с помощью которого производится сравнение разных активов A, служит их бета $\beta(A)$.

В дальнейшем при рассмотрении $d+1$ актива $X^0, X^1, \ldots, X^d$ условимся в качестве «базисного» выбирать, скажем, актив X^0, выделяющийся обычно тем, что это «просто устроенный» актив. Важно, однако, подчеркнуть, что, в принципе, в качестве такого актива может выбираться *любой* процесс $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, лишь бы только он был строго положительным.

Есть также и чисто аналитические причины в выборе подходящего процесса Y, состоящие в том, что за счет удачного выбора такого процесса, называемого *дисконтирующим* процессом (в англо-французской финансовой литературе используется также термин «numéraire»; см., например, [175]), иногда проще оперировать с процессом $\frac{X^\pi}{Y}$, а не с X^π непосредственно; см. по этому поводу замечание в конце § 2a гл. V.

2. Если $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — некоторый положительный процесс, определенный наряду с $X = (X^0, X^1, \ldots, X^d)$ на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$, то для $i = 0, 1, \ldots, d$ положим

$$\overline{X}^i = \frac{X^i}{Y}, \quad \overline{X}^\pi = \frac{X^\pi}{Y}. \tag{1}$$

Если π — самофинансируемый портфель (по отношению к X), то естественно выяснить, будет ли он самофинансируемым по отношению к дисконтируемому портфелю $\overline{X} = (\overline{X}^0, \overline{X}^1, \ldots, \overline{X}^d)$. С этой целью предположим, что выполнено свойство (7) из § 1a и что процесс $Y^{-1} = \frac{1}{Y}$ является предсказуемым процессом ограниченной вариации ($Y^{-1} \in \mathscr{V}$). Тогда

$$d\overline{X}^i_t = Y^{-1}_t\, dX^i_t + X^i_{t-}\, dY^{-1}_t \tag{2}$$

и

$$d\overline{X}^\pi_t = Y^{-1}_t\, dX^\pi_t + X^\pi_{t-}\, dY^{-1}_t. \tag{3}$$

Поэтому из условия самофинансируемости (6) в § 1a видим, что

$$\sum_{i=0}^d \pi^i_t\, d\overline{X}^i_t = Y^{-1}_t \sum_{i=0}^d \pi^i_t\, dX^i_t + \Bigl(\sum_{i=0}^d \pi^i_t X^i_{t-}\Bigr) dY^{-1}_t =$$
$$= Y^{-1}_t\, dX^\pi_t + \Bigl(\sum_{i=0}^d \pi^i_t X^i_{t-}\Bigr) dY^{-1}_t. \tag{4}$$

Предположим, что (P-п. н.) для $t > 0$ выполняется равенство

$$\sum_{s\leqslant t}\sum_{i=0}^{d} |\pi_s^i \, \Delta X_s^i \, \Delta Y_s^{-1}| < \infty. \tag{5}$$

Тогда

$$\Bigl(\sum_{i=0}^{d} \pi_t^i X_{t-}^i\Bigr)\, dY_t^{-1} = \Bigl(\sum_{i=0}^{d} \pi_t^i X_t^i\Bigr)\, dY_t^{-1} - \Bigl(\sum_{i=0}^{d} \pi_t^i \, \Delta X_t^i\Bigr)\, \Delta Y_t^{-1}$$

и из формулы (4) находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d} \pi_t^i \, d\overline{X}_t^i &= Y_t^{-1}\, dX_t^{\pi} + X_t^{\pi}\, dY_t^{-1} - \Bigl(\sum_{i=0}^{d} \pi_t^i \, \Delta X_t^i\Bigr)\, \Delta Y_t^{-1} = \\ &= Y_t^{-1}\, dX_t^{\pi} + X_{t-}^{\pi}\, dY_t^{-1} + \Bigl(\Delta X_t^{\pi} - \sum_{i=0}^{d} \pi_t^i \, \Delta X_t^i\Bigr)\, \Delta Y_t^{-1} \\ &= Y_t^{-1}\, dX_t^{\pi} + X_{t-}^{\pi}\, dY_t^{-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

поскольку $dX_t^{\pi} = \sum\limits_{i=0}^{d} \pi_t^i \, dX_t^i$ и по свойствам стохастических интегралов $\Delta X_t^{\pi} = \sum\limits_{i=0}^{d} \pi_t^i \, \Delta X_t^i$ (см. свойство f в п. 7 § 5а гл. III).

Из формул (3) и (6) получаем соотношение

$$d\overline{X}_t^{\pi} = \sum_{i=0}^{d} \pi_t^i \, d\overline{X}_t^i, \tag{7}$$

которое означает, что для дисконтируемого портфеля $\overline{X} = (\overline{X}^0, \overline{X}^1, \ldots, \overline{X}^d)$ свойство самофинансируемости выполнено.

Замечание. В проведенном доказательстве сохранения свойства самофинансируемости при дисконтировании предполагалось, что Y является *положительным предсказуемым процессом*, $Y^{-1} \in \mathscr{V}$ и *выполнено свойство* (5). По поводу других возможных условий, гарантирующих сохранение самофинансируемости, см., например, [175].

Классическим примером дисконтирующего процесса является банковский счет $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$:

$$B_t = B_0 \, \exp\Bigl(\int_0^t r(s)\, ds\Bigr), \tag{8}$$

где $r = (r(t))_{t\geqslant 0}$ — некоторая, вообще говоря, *стохастическая* процентная ставка, предполагаемая обычно положительным процессом. Банковский счет является удобным «стандартом», позволяющим сравнивать «качество» других активов, таких как, например, акции, облигации.

3. Пусть Y^1 и Y^2 — два дисконтирующих актива и $t \in [0, T]$ — временно́й параметр. Будем предполагать, что относительно некоторой меры P^1 на $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ нормированный процесс $\dfrac{X}{Y^1}$ является ($(d+1)$-мерным) мартингалом.

Выясним, когда можно утверждать, что существует мера $\mathsf{P}^2 \sim \mathsf{P}^1$, относительно которой нормированный процесс $\dfrac{X}{Y^2}$ также является мартингалом. (Ср. с изложением в разделе 4 гл. V.)

С этой целью предположим, что относительно меры P^1 процесс $\dfrac{Y^2}{Y^1}$ является (положительным) мартингалом.

Для $A \in \mathscr{F}_T$ положим

$$\mathsf{P}^2(A) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(I_A\, \frac{Y_T^2}{Y_T^1}\bigg/\frac{Y_0^2}{Y_0^1}\right). \tag{9}$$

Ясно, что P^2 является вероятностной мерой на $(\Omega, \mathscr{F}_T)$, причем $\mathsf{P}^2 \sim \mathsf{P}^1$.

По формуле Байеса (см. формулу (4) в § 3a гл. V)

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\mathsf{P}^2}\left(\frac{X_T^i}{Y_T^2}\,\bigg|\,\mathscr{F}_t\right) &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(\frac{X_T^i}{Y_T^2}\cdot\frac{Y_T^2}{Y_T^1}\,\bigg|\,\mathscr{F}_t\right)\cdot\frac{Y_t^1}{Y_t^2} = \\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(\frac{X_T^i}{Y_T^1}\,\bigg|\,\mathscr{F}_t\right)\cdot\frac{Y_t^1}{Y_t^2} = \\
&= \frac{X_t^i}{Y_t^1}\cdot\frac{Y_t^1}{Y_t^2} = \frac{X_t^i}{Y_t^2} \quad (\mathsf{P}^2\text{-},\ \mathsf{P}^1\text{-п. н.}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда следует, что по мере P^2, построенной по формуле (9), нормированный процесс $\dfrac{X}{Y^2}$ является мартингалом.

Полезно отметить, что если f_T — $\mathscr{F}_T$-измеримая неотрицательная случайная величина, то из формул (9) и (10) вытекает, что (в предположении, что $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$)

$$Y_0^1\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(\frac{f_T}{Y_T^1}\right) = Y_0^2\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}^2}\left(\frac{f_T}{Y_T^2}\right) \tag{11}$$

и (P^2-, P^1-п. н.)

$$Y_0^1\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}^1}\left(\frac{f_T}{Y_T^1}\,\bigg|\,\mathscr{F}_t\right) = Y_0^2\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}^2}\left(\frac{f_T}{Y_T^2}\,\bigg|\,\mathscr{F}_t\right). \tag{12}$$

§ 1c. Допустимые стратегии. II. Некоторые специальные классы

1. В соответствии с определением 2 в § 1a капитал $X^\pi = (X_t^\pi)_{t \leqslant T}$ допустимой стратегии $\pi \in SF(X)$ представляется в виде

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t (\pi_s, dX_s), \quad t \leqslant T, \tag{1}$$

где $\int_0^t (\pi_s, dX_s)$ — векторный стохастический интеграл по (неотрицательному) *семимартингалу* $X = (X^0, X^1, \dots, X^d)$.

В дальнейшем будем считать актив X^0 положительным ($X_t^0>0$, $t\leqslant T$) и брать его в качестве дисконтирующего процесса. При этом, чтобы не оперировать с «дробными» выражениями $\left(\text{типа } \dfrac{X_t^i}{X_t^0}\right)$, будем сразу полагать $X_t^0\equiv 1$, считая, тем самым, что исходный семимартингал $X=(1, X^1, \dots, X^d)$ является $(d+1)$-мерным *продисконтированным* активом.

2. Введем в рассмотрение некоторые специальные классы допустимых стратегий, роль которых будет полностью раскрыта при рассмотрении «мартингальных критериев» отсутствия арбитражных возможностей (см. далее разделы 4 и 5).

Определение 1. Для всякого $a\geqslant 0$ положим

$$\Pi_a(X) = \bigl\{\pi \in SF(X)\colon\ X_t^\pi \geqslant -a,\ t\in[0,T]\bigr\}. \tag{2}$$

Смысл условия *a-допустимости* $X_t^\pi\geqslant -a$, $t\in[0,T]$, вполне понятен: величина $a\geqslant 0$ ограничивает те максимальные потери от стратегии π, которые допускаются теми или иными экономическими соображениями.

Если $a>0$, то для капитала X^π допускаются отрицательные значения, что можно интерпретировать как взятие средств в долг (будь то взятие с банковского счета или, например, «короткая продажа» акции).

В случае $a=0$ суммарный капитал $X_t^\pi=\sum\limits_{i=0}^{d}\pi_t^i X_t^i$ должен оставаться неотрицательным при всех $0\leqslant t\leqslant T$.

Классы $\Pi_a(X)$, $a\geqslant 0$, были введены уже в первых работах [214], [215] по *теории арбитража* и впоследствии стали рассматриваться как наиболее естественные классы стратегий, для которых (как в известной «Петербургской игре»; см., например, [186, 2-е изд.]) не допускается неограниченное во времени удвоение ставки при проигрыше (ср. с примером 2 в § 2b гл. V).

Именно с классами $\Pi_a(X)$, $a\geqslant 0$, и некоторыми их расширениями связаны работы, касающиеся необходимых и достаточных условий отсутствия арбитражных возможностей, среди которых, в первую очередь, отметим серию работ Ф. Делбаена и В. Шахермайера (см., например, статьи [100], [101] и историко-библиографическую информацию в них).

3. Классы $\Pi_a(X)$, $a\geqslant 0$, являются далеко не единственными «естественными» классами допустимых стратегий.

Следующее определение систематически используется в работе К. А. Сина (C. A. Sin [447]).

Определение 2. Пусть $g=(g^0, g^1, \dots, g^d)$ — $(d+1)$-мерный вектор с неотрицательными компонентами, $g(X_t)=(g, X_t)$ $\left(=\sum\limits_{i=0}^{d} g^i X_t^i\right)$.

Положим

$$\Pi_g(X) = \{\pi \in SF(X) \colon X_t^\pi \geqslant -g(X_t),\ t \in [0, T]\}. \tag{3}$$

Как и в случае определения 1, наглядный смысл условия $X_t^\pi \geqslant -g(X_t)$, $t \in \in [0, T]$, ясен: в каждый момент времени t величиной $g(X_t)$ ограничиваются те максимальные потери или тот максимальный долг, которые допускаются «экономикой», имеющей капитал g^0 на банковском счете и g^i акций каждого из i активов, $i = 1, \ldots, d$.

Понятно, что если $g^0 \geqslant a$, то $\Pi_a(X) \subseteq \Pi_g(X)$.

4. Для последующего изложения вопросов *теории арбитража* в семимартингальных моделях полезно ввести некоторые классы «тестовых» $\mathscr{F}_T$-измеримых платежных функций $\psi = \psi(\omega)$, которые могут быть мажорированы доходом $\int_0^T (\pi_s, dX_s)$ от стратегий π из введенных выше классов допустимых стратегий.

Определение 3. Для $a \geqslant 0$ пусть

$$\Psi_a(X) = \left\{\psi \in L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) \colon \psi \leqslant \int_0^T (\pi_s, dX_s)\right.$$
$$\left.\text{для некоторой стратегии } \pi \in \Pi_a(X)\right\}$$

и

$$\Psi_+(X) = \left\{\psi \in L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) \colon \psi \leqslant \int_0^T (\pi_s, dX_s)\right.$$
$$\left.\text{для некоторой стратегии } \pi \in \Pi_+(X)\right\},$$

где $\Pi_+(X) = \bigcup\limits_{a \geqslant 0} \Pi_a(X)$.

Определение 4. Для $g = (g^0, g^1, \ldots, g^d)$, $g^i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, d$, положим

$$\Psi_g(X) = \left\{\psi \in L_g(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) \colon \psi \leqslant \int_0^T (\pi_s, dX_s)\right.$$
$$\left.\text{для некоторой стратегии } \pi \in \Pi_g(X)\right\},$$

где $L_g(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$ — множество таких $\mathscr{F}_T$-измеримых случайных величин ψ таких, что $|\psi| \leqslant g(X_T)$.

5. Как обычно, в пространстве $L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$ случайных величин ψ (правильнее было бы говорить о классах эквивалентности случайных величин; см., например, [439, гл. II, § 10]) вводится норма

$$\|\psi\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_\omega |\psi| = \inf\{0 \leqslant c < \infty \colon \mathsf{P}(|\psi| > c) = 0\},$$

относительно которой это пространство становится полным (и, следовательно, по определению банаховым).

Замыкания множеств $\Psi_a(X)$, $a \geqslant 0$, и $\Psi_+(X)$ по норме $\|\cdot\|_\infty$ будем обозначать $\overline{\Psi}_a(X)$ и $\overline{\Psi}_+(X)$.

В пространстве $\Psi_g(X)$ будем рассматривать норму $\|\cdot\|_g$, определяемую формулой

$$\|\psi\|_g \equiv \left\| \frac{\psi}{g(X_T)} \right\|_\infty.$$

Замыкание $\Psi_g(X)$ по этой норме обозначается $\overline{\Psi}_g(X)$.

2. Семимартингальные модели без арбитражных возможностей. Полнота

§ 2a. Концепция отсутствия арбитража и ее разновидности

1. В случае дискретного времени ($n \leqslant N < \infty$) и конечного числа активов ($d < \infty$) расширенный вариант первой фундаментальной теоремы (§ 2e гл. V) утверждает, что для (B, S)-рынков

$$ELMM \iff EMM \iff NA. \tag{1}$$

Здесь NA есть свойство *отсутствия арбитража* ($NA =$ No Arbitrage) в смысле определения 2 из § 2a гл. V. Свойства EMM и $ELMM$ означают существование *эквивалентной мартингальной меры* (Equivalent Martingale Measure) и существование *эквивалентной локально мартингальной меры* (Equivalent Local Martingale Measure) соответственно.

Тем самым, если на рассматриваемом рынке арбитраж отсутствует, то импликация $NA \Rightarrow EMM$ говорит о наличии мартингальной меры ($\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$), что, как было показано в предшествующей главе, дает возможность при расчетах воспользоваться хорошо развитой техникой теории мартингалов.

Если же, с другой стороны, модель (B, S)-рынка такова, что для нее существует по крайней мере одна мартингальная мера, то импликация $EMM \Rightarrow NA$ позволяет утверждать, что мы имеем дело с «честно» функционирующим рынком (в том смысле, что на нем отсутствуют арбитражные возможности).

Первые две импликации $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$ в формуле (1) также важны с принципиальной точки зрения, показывая, что в рассматриваемой ситуации классы мартингальных и локально мартингальных мер на самом деле *совпадают*.

Понятно, что и в случае непрерывного времени (и, по крайней мере, для семимартингальных моделей) желательно иметь утверждения типа (1). Однако, оказывается, в этом случае ситуация становится более сложной, хотя, по существу, «отсутствие арбитража» (при соответствующем определении) имеет место тогда и только тогда, когда существует эквивалентная мера с некоторыми (уточняемыми далее) «мартингальными» свойствами.

Из дальнейшего изложения станет ясно, что для удовлетворительного ответа на вопрос о справедливости утверждений типа (1) приходится прибегать к различным версиям понятия «отсутствие арбитража», которые, в конечном счете, определяются тем, какие классы стратегий допускаются к рассмотрению.

В этой связи напомним, что в случае дискретного времени для справедливости утверждений (1) на стратегии $\pi = (\beta, \gamma)$ никаких, в сущности, ограничений (кроме стандартных предположений предсказуемости и самофинансирования) не требовалось.

Другое дело — случай непрерывного времени, где уже для формулирования свойства самофинансируемости приходится прибегать к векторным стохастическим интегралам $\int_0^t (\pi_s, dX_s)$, для существования которых на (предсказуемые) стратегии π приходится накладывать условие допустимости: $\pi \in L(X)$.

Конечно, если к рассмотрению допускать лишь только «простые» стратегии, являющиеся конечными линейными комбинациями «элементарных» стратегий (§ 5а гл. III), то никаких «технических» сложностей, связанных с определением векторных интегралов (см. § 1а), не возникает.

К сожалению, в случае непрерывного времени из факта безарбитражности в классе «простых» стратегий *не удается*, вообще говоря, установить существование мартингальных мер или мер с теми или иными свойствами «мартингальности». (Класс «простых» стратегий оказывается для этого слишком «бедным»!)

2. Перейдем теперь к основным определениям, относящимся к отсутствию арбитражных возможностей в семимартингальных моделях $X = (1, X^1, \ldots, X^d)$, $X^i = (X_t^i)_{t \leqslant T}$, $i = 1, \ldots, d$.

Следующее понятие можно считать *классическим* (ср. с определением 2 из § 2а гл. V).

Определение 1. Говорят, что (в момент времени T) выполнено *свойство NA*, если для всякой такой стратегии $\pi \in SF(X)$, что $X_0^\pi = 0$, имеет место импликация

$$\mathsf{P}(X_T^\pi \geqslant 0) = 1 \ \Rightarrow \ \mathsf{P}(X_T^\pi = 0) = 1. \tag{2}$$

Определение 2. Говорят, что выполнены свойства NA_a и NA_+, если соответственно

$$\Psi_a(X) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\} \tag{3}$$

и

$$\Psi_+(X) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}, \tag{4}$$

где $\Psi_a(X)$ и $\Psi_+(X)$ определены в § 1с и $L_\infty^+(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$ — подмножество неотрицательных случайных величин пространства $L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$.

Нетрудно показать, что условие (4) равносильно условию

$$\Psi_{+}^{0}(X) \cap L_{\infty}^{+}(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}, \tag{5}$$

где

$$\Psi_{+}^{0}(X) = \Big\{\psi \in L_{\infty}(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})\colon\ \psi = \int_0^T (\pi_s, dX_s) \\ \text{для некоторой стратегии } \pi \in \Pi_{+}(X)\Big\}. \tag{6}$$

Определение 3. Говорят, что выполнено свойство $\overline{NA}_{+}$, если

$$\overline{\Psi}_{+}(X) \cap L_{\infty}^{+}(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}. \tag{7}$$

Свойство $\overline{NA}_{+}$, являющееся усилением свойства NA_{+}, систематически используется в работах Ф. Делбаена и В. Шахермайера (см., например, [100], [101]), где оно названо свойством *NFLVR* — No Free Lunch with Vanishing Risk (отсутствие бесплатного ленча с исчезающим риском).

Объяснение названия *NFLVR* состоит в следующем.

Когда рассматривается вопрос о выполнении NA_{+}-версии отсутствия арбитража, в качестве «тестовых» функций ψ берутся лишь *неотрицательные* функции, которые либо мажорируются, либо совпадают с «доходом» $\int_0^T (\pi_s, dX_s)$ от стратегий $\pi \in \Pi_{+}(X)$.

Но когда рассматривается $\overline{NA}_{+}$-версия отсутствия арбитражных возможностей, в качестве «тестовых» берутся (снова неотрицательные) функции $\psi \in \overline{\Psi}_{+}(X) \cap L_{\infty}^{+}(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P})$, в том числе и те, которые могут возникать как *пределы* (по норме $\|\cdot\|_{\infty}$) некоторых элементов ψ^k, $k \geqslant 1$, из $\Psi_{+}(X)$, принимающих, вообще говоря, и *отрицательные* значения (в частности, ими могут быть и $\int_0^T (\pi_s^k, dX_s)$, мажорирующие при некоторых π^k функции ψ^k).

Поскольку $\|\psi^k - \psi\|_{\infty} \to 0$, $k \to \infty$, можно считать, что $\psi^k \geqslant -1/n$ (для всех $\omega \in \Omega$), что и интерпретируется как *исчезающий риск* (*VR* — Vanishing Risk).

Весьма замечательно, что $\overline{NA}_{+}$-версия отсутствия арбитражных возможностей допускает, как установлено в книге [101], прозрачное необходимое и достаточное («мартингальное») условие. См. далее теорему 2 в § 2с.

3. Приведем также версии отсутствия арбитража, связанные с использованием стратегий из класса $\Pi_g(X)$.

Определение 4. Пусть $g = (g^0, g^1, \ldots, g^d)$, где $g^i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Говорят, что выполнены свойства NA_g и $\overline{NA}_g$, если соответственно

$$\Psi_g(X) \cap L_{\infty}^{+}(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}$$

и

$$\overline{\Psi}_g(X) \cap L_{\infty}^{+}(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathsf{P}) = \{0\}.$$

В работе [447] свойство $\overline{NA}_g$ названо свойством *NFFLVR* — No Feasible Free Lunch with Vanishing Risk (отсутствие *возможного* бесплатного ленча с исчезающим риском; feasible — возможный, вероятный, подходящий, осуществимый и т. д.).

§ 2b. Мартингальные критерии отсутствия арбитражных возможностей. I. Достаточные условия

1. Будем предполагать, что финансовый рынок состоит из $d+1$ актива $X=(1, X^1, \ldots, X^d)$, где $X^i=(X_t^i)_{t\leqslant T}$ — неотрицательные семимартингалы, заданные на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}, \mathsf{P})$, $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing, \Omega\}$.

Напомним, что если существует такая вероятностная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ на $(\Omega, \mathscr{F}_T)$, что $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, и относительно этой меры семимартингал X является *мартингалом* ($X \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}})$) или *локальным мартингалом* ($X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$), то говорят, что выполнено свойство *EMM* или свойство *ELMM* соответственно.

Следующие теоремы 1 и 2, дающие *достаточные* условия отсутствия арбитражных возможностей, являются, пожалуй, наиболее полезными результатами *теории арбитража* в семимартингальных моделях для расчетов в финансовой математике и финансовой инженерии.

Теорема 1. *В семимартингальной модели $X=(1, X^1, \ldots, X^d)$ для любого $a\geqslant 0$ и $g=(g^0, g^1, \ldots, g^d)$, $g^i\geqslant 0$, $i=0, 1, \ldots, d$, имеют место импликации*

$$ELMM \;\Rightarrow\; NA_a, \tag{1}$$

$$EMM \;\Rightarrow\; NA_g. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть имеется стратегия $\pi \in \Pi_g(X)$ и X^π — ее капитал:

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t (\pi_s, dX_s), \qquad t \leqslant T. \tag{3}$$

Предположим, что $\widetilde{\mathsf{P}}$ — мартингальная мера, эквивалентная мере P. Как говорилось в замечании 1 в § 1a, свойство интегрируемости π по X инвариантно относительно замены меры P на ей эквивалентную меру $\widetilde{\mathsf{P}}$. Тем самым, если $\pi \in \Pi_g(X)$, то векторный стохастический интеграл в формуле (3) определен и по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$.

Идея доказательства того, что для стратегии $\pi \in \Pi_g(X)$, $X_0^\pi=0$, отсутствует арбитраж (в смысле выполнения свойства NA_g), состоит в том, чтобы показать, что относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ процесс X^π является *супермартингалом*.

Действительно, если супермартингальное свойство выполнено, то

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, X_T^\pi \leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, X_0^\pi = 0 \tag{4}$$

и, следовательно, из условия $X_T^\pi \geqslant 0$ (P- и $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.) сразу получаем требуемое соотношение $X_T^\pi = 0$ (P- и $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.).

Итак, установим $\widetilde{\mathsf{P}}$-супермартингальное свойство процесса X^π.

Если $\pi \in \Pi_g(X)$, то (P- и $\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.)

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t (\pi_s, dX_s) \geqslant -(g, X_t). \tag{5}$$

В силу свойства линейности векторных стохастических интегралов из неравенства (5) находим, что

$$\int_0^t (\pi_s + g, dX_s) \geqslant -X_0^\pi - (g, X_0). \tag{6}$$

Относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ процесс X по предположению является мартингалом, и согласно результату Ж.-П. Анселя и К. Стрикера (см. п. 6 в § 1а) векторный стохастический интеграл в неравенстве (6), будучи равномерно ограниченным снизу, является локальным мартингалом, а значит, и (по лемме Фату) супермартингалом.

Таким образом,

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t (\pi_s + g, dX_s) - (g, X_t - X_0), \tag{7}$$

где стохастический интеграл есть $\widetilde{\mathsf{P}}$-супермартингал, а $(g, X_t - X_0)_{t \leqslant T}$ является $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингалом. Следовательно, для $\pi \in \Pi_g(X)$ процесс X относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ есть супермартингал, что вместе с (4) доказывает требуемое утверждение (2).

Для доказательства утверждения (1) нужно лишь заметить, что из неравенства (6) с $g = (a, 0, \ldots, 0)$ следует, что стохастический интеграл (по локальному мартингалу) снова является локальным мартингалом. Поскольку $X^0 \equiv 1$, для $g = (a, 0, \ldots, 0)$ имеем $(g, X_t - X_0) = 0$. Поэтому правая часть формулы (7) является $\widetilde{\mathsf{P}}$-локальным мартингалом, и доказательство утверждения (1) завершается так же, как и в случае импликации (2). □

Следствие. *Из формулы* (1) *вытекает, что*

$$ELMM \;\Rightarrow\; NA_+. \tag{8}$$

2. Утверждения (1), (2) и (8) допускают усиление в следующей форме.

Теорема 2. *В семимартингальной модели $X = (1, X^1, \ldots, X^d)$ выполняется импликация*

$$ELMM \;\Rightarrow\; \overline{NA}_+, \tag{9}$$

и если $g = (g^0, g^1, \ldots, g^d)$ с $g^i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, d$, то

$$EMM \;\Rightarrow\; \overline{NA}_g. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \overline{\Psi}_g(X)$, причем $\psi \geqslant 0$. Тогда существует такая последовательность $(\psi^k)_{k\geqslant 1}$ функций из $\Psi_g(X)$, что

$$\|\psi - \psi^k\|_g = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \left| \frac{\psi(\omega) - \psi^k(\omega)}{g(X_T(\omega))} \right| \leqslant \frac{1}{k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что для всех $\omega \in \Omega$ выполняются равенства

$$-\frac{1}{k} \leqslant \frac{\psi(\omega) - \psi^k(\omega)}{g(X_T(\omega))} \leqslant \frac{1}{k} \tag{11}$$

и, значит,

$$-\frac{g(X_T(\omega))}{k} \leqslant \psi(\omega) - \frac{g(X_T(\omega))}{k} \leqslant \psi^k(\omega). \tag{12}$$

Поскольку $\psi^k \in \Psi_g(X)$, найдется такая стратегия $\pi^k \in \Pi_g(X)$, что

$$\psi^k \leqslant \int_0^T (\pi_s^k, dX_s). \tag{13}$$

Вместе с оценками (12) это приводит к неравенству

$$-\frac{g(X_T)}{k} \leqslant \int_0^T (\pi_s^k, dX_s), \tag{14}$$

которое показывает, что для последовательности стратегий $(\pi^k)_{k\geqslant 1}$ отрицательная часть дохода («риск»), описываемая стохастическими интегралами, стремится к нулю с ростом k («исчезающий риск»).

Неравенство (14), очевидно, равносильно тому, что

$$-\frac{(g, X_0)}{k} \leqslant \int_0^T \Big(\pi_s^k + \frac{g}{k}, dX_s\Big). \tag{15}$$

Поскольку $|\psi - \psi^k| \leqslant g(X_T)/k$, с учетом неравенств (13), (15) и леммы Фату находим, что

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, \psi &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \lim \psi^k = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \lim \left(\psi^k + \frac{(g, X_T - X_0)}{k} \right) = \\ &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \varliminf \left(\psi^k + \frac{(g, X_T - X_0)}{k} \right) \leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \varliminf \left(\int_0^T \Big(\pi_s^k + \frac{g}{k}, dX_s\Big) \right) \leqslant \\ &\leqslant \varliminf \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \int_0^T \Big(\pi_s^k + \frac{g}{k}, dX_s\Big) \leqslant 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где последнее неравенство следует из $\widetilde{\mathsf{P}}$-супермартингального свойства стохастических интегралов $\int_0^t \Big(\pi_s^k + \frac{g}{k},\ dX_s\Big)$, $t \leqslant T$.

Таким образом, $\mathsf{P}(\psi = 0) = \widetilde{\mathsf{P}}(\psi = 0) = 1$, что и доказывает импликацию (10).

Для доказательства импликации (9) предположим, что $\psi \in \overline{\Psi}_+(X)$ и $\psi \geqslant 0$. Тогда найдется такая последовательность функций $(\psi^k)_{k\geqslant 1}$ из $\Psi_+(X)$, что

$$\|\psi - \psi^k\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_\omega |\psi(\omega) - \psi^k(\omega)| \leqslant \frac{1}{k} \to 0, \tag{17}$$

причем

$$\psi^k \leqslant \int_0^T (\pi_s^k, dX_s) \tag{18}$$

для $\pi^k \in \Pi_{a_k}(X)$ при некоторых $a_k \geqslant 0$.

Из формул (17) и (18) получаем

$$-\frac{1}{k} \leqslant \int_0^T (\pi_s^k, dX_s). \tag{19}$$

Далее, как и в формуле (16), находим, что

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, \psi = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \lim \psi^k = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \varliminf \psi^k \leqslant \\ \leqslant \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \varliminf \int_0^T (\pi_s^k, dX_s) \leqslant \varliminf \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}} \int_0^T (\pi_s^k, dX_s) \leqslant 0, \end{aligned}$$

где последнее неравенство вновь следует из $\widetilde{\mathsf{P}}$-супермартингального свойства стохастических интегралов $\int_0^t (\pi_s^k, dX_s)$, $t \leqslant T$.

Теорема доказана. □

§ 2c. Мартингальные критерии отсутствия арбитражных возможностей. II. Необходимые и достаточные условия (сводка некоторых результатов)

1. В настоящем параграфе будут приведены *формулировки* ряда результатов относительно *необходимых* и *достаточных* условий отсутствия (в той или иной форме) арбитражных возможностей.

Снова напомним, что в случае дискретного времени выполняется свойство *EMM* ⟺ *NA*, которое и послужило прототипом разнообразных версий в общих семимартингальных моделях.

При этом если импликация *EMM* ⇒ *NA* доказывалась просто, то установление обратного утверждения *EMM* ⇐ *NA*, требующее или *конкретного* построения, или доказательства *существования* мартингальной меры, основано (даже, казалось бы, в простом случае дискретного времени!) на далеко не простых конструкциях (см. раздел 2 гл. V).

Поэтому не должно показаться странным, что в случае непрерывного времени доказательство соответствующих результатов, принадлежащих, главным образом, Ф. Делбаену и В. Шахермайеру [100], [101], довольно-таки сложно, и мы ограничиваемся лишь *сводкой* ряда интересных результатов, отсылая за деталями доказательств к указываемой специальной литературе.

Теорема 1 ([100]). 1. *Пусть семимартингал* $X = (1, X^1, \ldots, X^d)$ *имеет ограниченные компоненты. Тогда*

$$\boxed{EMM \iff \overline{NA}_+}. \tag{1}$$

2. *Пусть семимартингал* $X = (1, X^1, \ldots, X^d)$ *имеет локально ограниченные компоненты. Тогда*

$$\boxed{ELMM \iff \overline{NA}_+}. \tag{2}$$

2. Для формулировки результата относительно необходимых и достаточных условий выполнения свойства $\overline{NA}_+$ в *общих семимартингальных* моделях введем, следуя работе [101], понятие σ-мартингалов и σ-мартингальных мер.

С этой целью напомним, что в случае *дискретного времени* всякий локальный мартингал X является в то же самое время *мартингальным преобразованием*, т. е. (см. теорему в § 1c гл. II) $X = X_0 + \gamma \cdot M$, где γ — некоторая предсказуемая последовательность, а M — мартингал.

Если проанализировать доказательство теоремы в § 1c гл. II, то можно заметить, что всякий локальный мартингал X может быть представлен как мартингальное преобразование $X = X_0 + \gamma \cdot M$, в котором γ является *положительной* предсказуемой последовательностью.

Имея это в виду и следуя работе [101], будем мартингальные преобразования с положительными значениями γ называть σ-мартингалами. А в том случае, когда для стохастической последовательности X найдется мера $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, относительно которой X становится σ-мартингалом, будем говорить, что выполнено свойство $E\sigma MM$.

С этими новыми понятиями первой фундаментальной теореме (§ 2b, c гл. V; см. также формулу (1) в § 2a) можно придать следующую форму:

$$\boxed{EMM \iff ELMM \iff E\sigma MM \iff NA}, \tag{3}$$

которая полезна с той точки зрения, что она подсказывает, на каком пути можно искать обобщение первой фундаментальной теоремы для *непрерывного времени*.

Большой удачей авторов работы [101] было осознание того, что для отыскания необходимых и достаточных условий $\overline{NA}_+$-версии отсутствия арбитражных возможностей в общих *семимартингальных* моделях надо обратиться именно к σ-мартингалам и σ-мартингальным мерам.

Дадим соответствующие определения.

Определение 1. Семимартингал $X = (X^1, \ldots, X^d)$ называется *σ-мартингалом*, если существуют такой $\mathbb{R}^d$-значный мартингал $M = (M_t)_{t \leqslant T}$ и такой M-интегрируемый *предсказуемый положительный* одномерный процесс $\gamma = (\gamma_t)_{t \leqslant T}$, что $X = X_0 + \gamma \cdot M$.

Определение 2. Если существует мера $\widetilde{\mathsf{P}} \sim \mathsf{P}$, относительно которой семимартингал X является σ-мартингалом, то говорят, что $\widetilde{\mathsf{P}}$ является *σ-мартингальной мерой* и выполнено свойство $E\sigma MM$.

Замечание 1. Термин «σ-мартингал», как было отмечено, введен в работе [101]. Ранее эти процессы назывались (см., например, [73], [137]) *семимартингалами класса* (Σ_m). Подчеркнем, что σ-мартингалы являются частным случаем мартингальных преобразований (см. определение 3 в § 1a).

Следующий результат можно назвать кульминационным в поисках необходимых и достаточных условий отсутствия арбитражных возможностей в $\overline{NA}_+$-версии.

Теорема 2 ([101]). *В общих семимартингальных моделях*

$$\boxed{E\sigma MM \iff \overline{NA}_+}\,. \tag{4}$$

Замечание 2. Пример М. Эмери (п. 5 § 1a) показывает, что σ-мартингал не обязан быть локальным мартингалом.

Для наглядности и прояснения связи утверждений теорем 1 и 2 с соответствующим результатом для случая дискретного времени (см. (3)) переформулируем их следующим образом.

Следствие. *В общих семимартингальных моделях* $X = (1, X^i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$, $X^i = (X^i_t)_{t \leqslant T}$, $i = 1, \ldots, d$, $T < \infty$, *выполняются импликации*

$$\boxed{EMM \Rightarrow ELMM \Rightarrow E\sigma MM \Rightarrow \overline{NA}_+}\,. \tag{5}$$

В случае локально ограниченных семимартингалов $X = (1, X^i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$, $X^i = (X^i_t)_{t \leqslant T}$, $i = 1, \ldots, d$, $T < \infty$, *выполняются импликации*

$$\boxed{EMM \Rightarrow ELMM \Rightarrow E\sigma MM \Rightarrow \overline{NA}_+}\,. \tag{6}$$

В случае ограниченных семимартингалов $X = (1, X^i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$, $X^i = (X^i_t)_{t \leqslant T}$, $i = 1, \ldots, d$, $T < \infty$, *выполняются импликации*

$$\boxed{EMM \iff ELMM \iff E\sigma MM \iff \overline{NA}_+}\,. \tag{7}$$

3. Обратимся теперь к вопросу о необходимых и достаточных условиях отсутствия арбитража в его $\overline{NA}_g$-версии.

Теорема 3 ([447]). *В общих семимартингальных моделях* $X = (1, X^1, \ldots, X^d)$, $X^i = (X^i_t)_{t \leqslant T}$, $i = 1, \ldots, d < \infty$, *условие* $\overline{NA}_g$ *для* $g = (g^0, g^1, \ldots, g^d)$, $g^i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, d$, *равносильно условию EMM*:

$$\boxed{EMM \iff \overline{NA}_g}\,. \tag{8}$$

Импликация $\Rightarrow$ была установлена выше. Идея доказательства обратной импликации заключается в следующем.

Пусть $X = (1, X^1, \ldots, X^d)$ — семимартингал. Как показывается в книге [447], X удовлетворяет условию $\overline{NA}_g$ в том и только том случае, когда *дисконтируемые* цены $\frac{X}{g(X)}$ удовлетворяют условию $\overline{NA}_+$. Поскольку $\frac{X}{g(X)}$ является *ограниченным* семимартингалом, из утверждения (7) вытекает существование эквивалентной меры, что доказывает утверждение (8).

В заключение приведенной сводки результатов остановимся на следующих двух контрпримерах.

Пример 1 ($EMM \not\Rightarrow NA$)**.** Рассмотрим (B, S)-рынок, $B_t \equiv 1$ и $S_t = W_t$, где $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартный винеровский процесс (линейная модель Башелье; см. § 1a гл. VIII). Для самофинансируемой стратегии $\pi = (\beta, \gamma)$ капитал равен

$$X_t^\pi = \beta_t + \gamma_t S_t = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_u \, dS_u.$$

Положим $\tau = \inf\{t : S_t = 1\}$ и $\gamma_u = I(u < \tau)$. Тогда $X_\tau^\pi = X_0^\pi + S_\tau$ и, значит, если $X_0^\pi = 0$, то $X_\tau^\pi = 1$ (P-п. н.).

Понятно, что в рассматриваемом случае существует мартингальная (а именно, винеровская) мера, однако, выбор самофинансируемой стратегии $\pi = (\beta, \gamma)$ с $\gamma_u = I(u < \tau)$ показывает, что здесь имеет место арбитражная возможность.

Пример 2 ($ELMM \not\Rightarrow NA$, $ELMM \Rightarrow \overline{NA}_+$, но $\not\Rightarrow NA_g$)**.** Пусть $X_t^0 \equiv 1$, $t \in [0, 1]$, и

$$X_t^1 = \begin{cases} Y_{\operatorname{tg}(\pi t/2)}, & 0 \leqslant t < 1, \\ 0, & t = 1, \end{cases}$$

где

$$Y_t = \exp\Bigl(W_t - \frac{1}{2}\Bigr)$$

и $W = (W_t)_{t\leqslant 1}$ — винеровский процесс.

Процесс X^1 является локальным мартингалом. Поскольку $\int_0^1 \gamma_s \, dX_s^1 = 1$ для $\gamma_s \equiv 1$, отсюда следует, что имеет место арбитраж в классическом смысле. В то же самое время из утверждения (2) следует, что имеет место свойство $\overline{NA}_+$. Что же касается свойства NA_g, то оно здесь не выполнено. Действительно, как в книге [447], положим $\pi_t^0 = 1$, $\pi_t^1 = -1$.

Тогда $X_0^\pi = 0$, $X_t^\pi = 1 - X_t^1 \geqslant -g(X_t)$, где $g(X_t) = 1 + X_t^1$, и $X_1^\pi = 1$.

§ 2d. Полнота в семимартингальных моделях

1. По аналогии с терминологией для случая дискретного времени (см. определение 4 в § 1b гл. V) говорят, что семимартингальная модель $X = (X^0, X^1, \ldots, X^d)$ является *полной* (или T-полной), если всякое неотрицательное ограниченное $\mathscr{F}_T$-измеримое платежное поручение f_T воспроизводимо (достижимо), т. е. найдется такой допустимый самофинансируемый портфель π такой, что $X_T^\pi = f_T$ (P-п. н.).

Естественно, что свойство воспроизводимости существенно зависит от того, какой класс самофинансируемых стратегий допускается к рассмотрению.

Напомним, что вторая фундаментальная теорема (§ 4a, f гл. V) утверждает, что в безарбитражных моделях с дискретным временем ($n \leqslant N < \infty$) и конечным числом активов ($d < \infty$) полнота имеет место тогда и только тогда, когда множество мартингальных мер состоит в точности из *одной* меры ($\widetilde{\mathsf{P}}$), эквивалентной мере P.

2. Ниже будет приведено одно *достаточное* условие полноты в общих семимартингальных моделях в предположении, что для них класс $\mathscr{P}(\mathsf{P})$ эквивалентных мартингальных мер непуст.

В этом предположении имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть множество мартингальных мер содержит лишь одну меру* $\widetilde{\mathsf{P}}$. *Тогда в классе* $SF(X)$ *найдется такая стратегия* π, *что* $X_T^\pi = f_T$ (P-п. н.) *для любого платежного поручения* f_T, *удовлетворяющая условию* $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,|f_T| < \infty$.

Доказательство этой теоремы проходит по следующей схеме (ср. с диаграммой в § 4a гл. V):

$$|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1 \overset{\{1\}}{\Rightarrow} X\text{-представимость} \overset{\{2\}}{\Rightarrow} \text{полнота.}$$

Здесь X-представимость относительно мартингальной меры $\widetilde{\mathsf{P}} \in \mathscr{P}(\mathsf{P})$ означает (ср. с S-представимостью в § 4b гл. V), что всякий мартингал $M = (M_t, \mathscr{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}})_{t \leqslant T}$, заданный на том же самом фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}, \widetilde{\mathsf{P}})$, что и $\widetilde{\mathsf{P}}$-мартингал X, допускает представление

$$M_t = M_0 + \int_0^t (\gamma_s, dX_s), \quad t \leqslant T,$$

где $\gamma \in L(X)$.

Импликация {1} следует из общих результатов Ж. Жакода (см. [248, гл. II]) и применительно к теории арбитража была впервые сформулирована в работе Дж. Харрисона и С. Плиски [215].

Импликация {2} доказывается точно так же, как и в случае дискретного времени (см. доказательство леммы в § 4b гл. V). □

По поводу конкретных примеров полных рынков см. далее разделы 4 и 5.

3. Замечание 1. Вопросы X-представимости (локальных) мартингалов на *неполных* безарбитражных рынках рассматриваются, например, в работе [9].

Замечание 2. Остановимся на вопросе о взаимоотношениях концепций *арбитража*, (локально) *мартингальной меры* и *полноты*, постоянно встречающихся в нашем изложении.

Важно подчеркнуть, что каждая из этих концепций изначально формулируется *независимо* от других. При этом и арбитраж, и полнота определяются в терминах свойств исходной («физической») вероятностной меры P, и ни о какой мартингальной мере речи и не было.

В случае дискретного времени и конечного числа активов ($N < \infty$, $d < < \infty$) оказалось (первая фундаментальная теорема), что отсутствие арбитража допускает простую эквивалентную характеризацию — *существование* мартингальной меры ($\mathscr{P}(\mathsf{P}) \neq \varnothing$), а полнота в таких безарбитражных моделях оказалась (вторая фундаментальная теорема) равносильной *единственности* мартингальной меры ($|\mathscr{P}(\mathsf{P})| = 1$).

Однако если иметь в виду более общие модели, то вполне возможно отсутствие арбитража и без существования мартингальных мер, что показывает пример 1, приведенный в § 2b гл. VI.

Точно так же не должно создаваться впечатление (в связи со второй фундаментальной теоремой), что о полноте нельзя говорить без отсутствия арбитражных возможностей или без наличия мартингальных мер, и логически вполне возможно, например, что

a) полнота может иметь место как в безарбитражных, так и арбитражных моделях;
b) полнота может иметь место, когда существует, но не единственна «классическая» (т. е. неотрицательная) мартингальная мера;
c) полнота может иметь место, когда отсутствует «классическая» мартингальная мера, но есть единственная «неклассическая» (т. е. со знаком) мартингальная мера.

3. Семимартингалы и мартингальные меры

§ 3а. Каноническое представление семимартингалов. Случайные меры. Триплеты предсказуемых характеристик

1. В случае дискретного времени о *каноническом представлении* говорилось в § 1b гл. II, и § 3е гл. V.

Напомним суть этого представления.

Пусть $H = (H_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ — стохастическая последовательность, $h_n = \Delta H_n$ $(= H_n - H_{n-1})$ для $n \geqslant 1$ и $g = g(x)$ — ограниченная функция «урезания», т. е. функция, равная x в окрестности нуля и имеющая компактный носитель (часто используется функция $g(x) = xI(|x| \leqslant 1)$). Тогда, поскольку

$$H_n = H_0 + \sum_{k=1}^{n} h_k = H_0 + \sum_{k=1}^{n} (h_k - g(h_k)) + \sum_{k=1}^{n} g(h_k), \tag{1}$$

в силу разложения Дуба и ограниченности функции $g(h_k)$ находим, что

$$H_n = H_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\bigl[g(h_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\bigr] + \sum_{k=1}^{n} \bigl[g(h_k) - \mathsf{E}(g(h_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\bigr] + \sum_{k=1}^{n} \bigl[h_k - g(h_k)\bigr]. \tag{2}$$

Вводя *меры скачков* $\mu_k(A) = I_A(h_k)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $k \geqslant 1$, и их *компенсаторы* $\nu_k(A) = \mathsf{E}(I_A(h_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) = \mathsf{P}(h_k \in A\,|\,\mathscr{F}_{k-1})$, из соотношения (2) получаем, что

$$H_n = H_0 + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\nu_k(dx) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} g(x)(\mu_k(dx) - \nu_k(dx)) + \\ + \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} (x - g(x))\,\mu_k(dx). \tag{3}$$

Подобно тому как это делалось в § 3е гл. V, соотношение (3) может быть переписано в следующем компактном виде:

$$H = g * \nu + g * (\mu - \nu) + (x - g) * \mu. \tag{4}$$

Представление (4) называется *каноническим представлением* последовательности $H=(H_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Полезно заметить, что в том случае, когда $\mathsf{E}\,|h_k|<\infty$, $k\geqslant 1$, представление (4) остается верным, если в качестве функции $g(x)$ взять функцию $g(x)=x$. По-другому это можно выразить, сказав, что разложение Дуба последовательности $H=(H_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ имеет в этом случае следующий вид:

$$H = x*\nu + x*(\mu-\nu). \tag{5}$$

2. Перейдем теперь к рассмотрению канонического представления *семимартингалов* $H=(H_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ в случае *непрерывного* времени.

Пусть $g=g(x)$ — некоторая функция урезания. Положим

$$\check{H}(g)_t = \sum_{s\leqslant t}\bigl[\Delta H_s - g(\Delta H_s)\bigr]. \tag{6}$$

Заметим, что $\Delta H_s - g(\Delta H_s)\neq 0$, если только $|\Delta H_s|>b$ для некоторого $b>0$. И поскольку для семимартингалов $\sum\limits_{s\leqslant t}(\Delta H_s)^2<\infty$ (P-п. н.) для каждого $t>0$ (см. формулы (24) и (25) в § 5b гл. III), то на самом деле суммы в формуле (6) содержат лишь конечное число ненулевых членов и, следовательно, процесс $\check{H}(g)$ корректно определен, являясь процессом ограниченной вариации.

Процесс

$$H(g) = H - \check{H}(g) \tag{7}$$

имеет ограниченные скачки ($|\Delta H(g)|\leqslant b$) и, значит, является *специальным* семимартингалом (см. § 5b гл. III), т. е. допускает каноническое разложение

$$H(g) = H_0 + M(g) + B(g), \tag{8}$$

где $B(g)=(B_t(g),\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — предсказуемый процесс ограниченной вариации, $B_0(g)=0$, и $M(g)=(M_t(g),\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — локальный мартингал, $M_0(g)=0$.

Из формул (7) и (8) находим, что

$$H = H_0 + M(g) + B(g) + \sum_{s\leqslant\cdot}\bigl[\Delta H_s - g(\Delta H_s)\bigr]. \tag{9}$$

Это представление является непрерывным аналогом представления (2). Чтобы теперь из (9) получить аналог представления (4), нам понадобятся понятия *случайной меры* и ее *компенсатора*.

3. Пусть $(E,\mathscr{E})$ — некоторое измеримое пространство.

Определение 1. *Случайной мерой* на $\mathbb{R}_+\times E$ называется семейство

$$\mu = \bigl\{\mu(dt,dx;\omega);\ \omega\in\Omega\bigr\}$$

неотрицательных мер на $(\mathbb{R}_+\times E,\ \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{E})$, удовлетворяющих условию $\mu(\{0\}\times E;\omega)=0$ для любого $\omega\in\Omega$.

Пример 1. Классическим примером случайной (к тому же *целочисленной*) меры μ является *пуассоновская мера*, определяемая следующим образом.

Для $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$ пусть

$$m(A) = \mathsf{E}\,\mu(A;\,\omega),$$

причем $m(A)$ является σ-конечной (положительной) мерой.

Будем предполагать, что для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и таких множеств $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \otimes \mathscr{E}$, что $A \subset (t, \infty) \times E$, мера $m(A) < \infty$ и случайная величина $\mu(A, \cdot)$ не зависит от σ-алгебры $\mathscr{F}_t$.

Если для любого $t \in \mathbb{R}_+$ мера (*интенсивности*) m такова, что $m(\{t\} \times E) = 0$, то μ называется *пуассоновской мерой*. Если к тому же $m(dt, dx) = dt\,F(dx)$, где F — положительная σ-конечная мера, то μ называется *однородной пуассоновской мерой*.

Термин *пуассоновская* мера объясняется следующим ее свойством.

Пусть $(A_i)_{i\geqslant 1}$ — последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств в $\mathbb{R}_+ \times E$, $m(A_i) < \infty$. Тогда случайные величины $\mu(A_i)$, $i \geqslant 1$, независимы и $\mu(A_i)$ имеет пуассоновское распределение со средним $m(A_i)$, т. е.

$$\mathsf{P}\big(\mu(A_i) = k\big) = \frac{e^{-m(A_i)}(m(A_i))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(См. [250, гл. II, § 1c].)

В § 5a гл. III были введены две σ-алгебры $\mathscr{O}$ и $\mathscr{P}$ подмножеств в $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, названные σ-алгебрами опциональных и предсказуемых подмножеств.

При использовании целочисленных случайных мер на $\mathbb{R}_+ \times E$ важную роль играют σ-алгебры $\widetilde{\mathscr{O}} = \mathscr{O} \otimes \mathscr{E}$ и $\widetilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$, также называемые *опциональной* и *предсказуемой σ-алгебрами подмножеств* в $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E$.

Если $W = W(t, \omega, x)$ — опциональная функция на $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E$ и μ — случайная мера, то будем обозначать через $W * \mu = ((W * \mu)_t(\omega), \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ случайный процесс, где

$$(W * \mu)_t(\omega) = \int_{(0,t]\times E} W(s, \omega, x)\,\mu(ds, dx;\,\omega), \tag{10}$$

интеграл понимается как интеграл Лебега—Стилтьеса для каждого $\omega \in \Omega$ и предполагается, что

$$\int_{(0,t]\times E} |W(s, \omega, x)|\,\mu(ds, dx;\,\omega) < \infty, \quad t > 0. \tag{11}$$

Определение 2. Случайная мера μ называется *опциональной* (*предсказуемой*), если процесс $W * \mu$ является опциональным (предсказуемым) для каждой опциональной (предсказуемой) функции $W = W(t, \omega, x)$.

Определение 3. Опциональная мера μ называется *$\widetilde{\mathscr{P}}$-σ-конечной*, если существует такое $\widetilde{\mathscr{P}}$-измеримое разбиение $(A_n)_{n\geqslant 1}$ множества $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E$, что каждая из величин $(I_{A_n} * \mu)_\infty$ является интегрируемой.

Следующая теорема является непосредственным обобщением утверждения, сформулированного в следствии 2 (§ 5b гл. III) к разложению Дуба—Мейера.

Теорема 1. *Пусть μ — опциональная $\widetilde{\mathscr{P}}$-σ-конечная случайная мера.*

Существует и притом единственная с точностью до P*-неразличимости предсказуемая случайная мера ν, называемая компенсатором меры μ, удовлетворяющая любому из двух эквивалентных условий:*

a) $\mathsf{E}(W*\nu)_\infty=\mathsf{E}(W*\mu)_\infty$ *для любой неотрицательной $\widetilde{\mathscr{P}}$-измеримой функции W на $\mathbb{R}_+\times\Omega\times E$;*

b) *для любой такой $\widetilde{\mathscr{P}}$-измеримой функции W на $\mathbb{R}_+\times\Omega\times E$, что процесс $|W|*\mu$ является локально интегрируемым, процесс $|W|*\nu$ также локально интегрируем и $W*\mu-W*\nu$ является локальным мартингалом.*

Доказательство и разнообразные свойства случайных мер и их компенсаторов см. в [250, гл. II] или в [304, гл. 3]. □

Замечание. Одно из наглядных свойств компенсаторных мер ν состоит в следующем. Пусть множество $A\in\mathscr{E}$. Тогда процесс $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, $X_0=0$, и

$$X_t=\mu((0,t]\times A;\omega)-\nu((0,t]\times A;\omega),\quad t>0,$$

является *локальным мартингалом*, в связи с чем $\mu-\nu$ называют (случайной) мартингальной мерой.

Пример 2. Для пуассоновской случайной меры μ, введенной в примере 1, ее компенсатор ν совпадает с мерой интенсивности m.

4. Обратимся к важному понятию стохастического интеграла $W*(\mu-\nu)$ по мартингальной мере $\mu-\nu$ от $\widetilde{\mathscr{P}}$-измеримой функции $W=W(t,\omega,x)$.

Если $|W|*\mu\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, то в соответствии с теоремой 1 имеем $|W|*\nu\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, и тогда естественно положить, по определению,

$$W*(\mu-\nu)=W*\mu-W*\nu. \tag{12}$$

Нетрудно установить, что так определенный процесс $W*(\mu-\nu)=(W*(\mu-\nu)_t)_{t\geqslant 0}$ обладает следующими двумя свойствами:

a) он является чисто разрывным локальным мартингалом (см. § 5b гл. III);

b) его «скачки» равны

$$\Delta(W*(\mu-\nu))_t=\widetilde{W}_t, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{W}_t=\int W(t,\omega,x)\,\mu(\{t\}\times dx;\omega)-\int W(t,\omega,x)\,\nu(\{t\}\times dx;\omega).$$

Эти свойства подсказывают естественность следующего определения (ср. с [250, гл. II, § 1d], [304, гл. 3, § 5]).

Определение 4. Под стохастическим интегралом $W*(\mu-\nu)$ от $\widetilde{\mathscr{P}}$-измеримой функции $W=W(t,\omega,x)$ по мартингальной мере $\mu-\nu$ понимается такой чисто разрывный локальный мартингал $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, что процессы $\Delta X= =(\Delta X_t)_{t\geqslant 0}$ и $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ являются неразличимыми.

Выше мы видели, что если компенсатор ν меры μ таков, что $|W|*\nu\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ (или, что равносильно, $|W|*\mu\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$), то в качестве чисто разрывного локального мартингала X можно взять процесс $W*\mu-W*\nu$.

Однако условие $|W|*\nu\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, обеспечивающее существование такого процесса X с $\Delta X=\widetilde{W}$, может быть ослаблено.

С этой целью введем некоторые обозначения и ограничимся лишь приведением результатов, отсылая за деталями к упомянутым монографиям [250] и [304].

Пусть
$$
\begin{aligned}
a_t(\omega) &= \nu(\{t\}\times E;\omega),\\
q(\omega,B) &= \sum_{s\in B} I(a_s(\omega)>0)(1-a_s(\omega)), \quad B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\\
\widehat{W}_t(\omega) &= \int_E W(t,\omega,x)\,\nu(\{t\}\times dx;\omega).
\end{aligned}
$$
Будем предполагать, что для любого конечного марковского момента $\tau(\omega)$ выполняется неравенство
$$
\int_E \bigl|W(\tau(\omega),\omega,x)\bigr|\,\nu(\{\tau(\omega)\}\times dx;\omega)<\infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),
$$
и положим
$$
G(W)=\frac{(W-\widehat{W})^2}{1+|W-\widehat{W}|}*\nu+\frac{\widehat{W}^2}{1+|\widehat{W}|}*q. \tag{14}
$$

Теорема 2. *Пусть $\widetilde{\mathscr{P}}$-измеримая функция $W=W(t,\omega,x)$ такова, что*
$$
G(W)\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}. \tag{15}
$$

Тогда существует и притом единственный (с точностью до стохастической неразличимости) чисто разрывный локальный мартингал, обозначаемый $W*(\mu-\nu)$, для которого
$$
\Delta(W*(\mu-\nu))=\widetilde{W}.
$$

Следствие. *Пусть $\widehat{W}=0$. Тогда если*
$$
\frac{W^2}{1+|W|}\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}},
$$
то стохастический интеграл $W*(\mu-\nu)$ по мартингальной мере $\mu-\nu$ определен (как такой чисто разрывный локальный мартингал, что
$$
\Delta(W*(\mu-\nu))=\int W(t,\omega,x)\,\mu(\{t\}\times dx;\omega)).
$$

Замечание. Пусть $\widehat{W}=0$. Тогда

$$\big[W*(\mu-\nu), W*(\mu-\nu)\big] = W^2*\mu, \tag{16}$$

что следует из того замечания, что

$$\big[W*(\mu-\nu), W*(\mu-\nu)\big]_t = \sum_{0<s\leqslant t}\big(\Delta(W*(\mu-\nu))_s\big)^2 = (W^2*\mu)_t.$$

Из приведенного равенства (16) очевидным образом получаем, что *предсказуемая* квадратическая вариация имеет вид

$$\langle W*(\mu-\nu), W*(\mu-\nu)\rangle = W^2*\nu.$$

5. Частным случаем случайных (и к тому же целочисленных) мер являются *меры скачков* μ^H процессов $H=(H_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями (в частности, семимартингалов):

$$\mu^H((0,t]\times A;\omega) = \sum_{0<s\leqslant t} I_A(\Delta H_s(\omega)),$$

где $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

Так определенная на $\mathbb{R}_+\times E$ (где $E=\mathbb{R}\setminus\{0\}$) случайная мера μ^H является $\widetilde{\mathscr{P}}$-σ-конечной, и, следовательно, согласно сформулированной выше теореме для меры μ^H определен ее компенсатор ν^H.

Обратимся снова к каноническому разложению (9).

С помощью случайной меры скачков μ^H последнее слагаемое в правой части формулы (9) может быть записано в виде

$$\sum_{s\leqslant\cdot}\big[\Delta H_s - g(\Delta H_s)\big] = \big(x-g(x)\big)*\mu^H.$$

В § 5b (п. 6) гл. III отмечалось, что всякий локальный мартингал может быть представлен (и притом единственным образом) в виде суммы непрерывного и чисто разрывного локальных мартингалов. Поэтому локальный мартингал $M(g)$ из формулы (9) может быть представлен в виде

$$M(g)_t = M(g)_0 + M(g)_t^c + M(g)_t^d, \tag{17}$$

где $M(g)^c$ — *непрерывная*, а $M(g)^d$ — *чисто разрывная* компоненты.

Непрерывный локальный мартингал $M(g)^c$ на самом деле *не зависит* от g, и, как отмечалось в § 5b (п. 6) гл. III, для него обычно используется обозначение H^c.

Что же касается чисто разрывной составляющей $M(g)^d$, являющейся чисто разрывным локальным мартингалом, то она может быть представлена в виде

$$M(g)_t^d = \int_{(0,t]\times\mathbb{R}} g(x)\, d(\mu^H-\nu^H). \tag{18}$$

Чтобы установить справедливость этого представления, надо убедиться в том, что, во-первых, функция $G(g) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, и, во-вторых, скачки локальных мартингалов, стоящих в левой и правой частях равенства (18), совпадают. В полной общности это доказывается в книгах [250, гл. II, § 2c] и [304, гл. 3, § 5]. Здесь же остановимся на одном частном случае.

Если предположить, что $\nu^H(\{t\} \times E; \omega) = 0$, то

$$G(g) = \frac{g^2}{1+|g|} * \nu^H,$$

и локальная интегрируемость этого процесса следует из того, что $g = g(x)$ является функцией урезания и $(x^2 \wedge 1) * \nu^H \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ для любого семимартингала H. Тем самым, в рассматриваемом случае «интеграл» в формуле (18) определен.

Далее, $\Delta M(g)^d = \Delta M(g) = g(\Delta H) - \Delta B(g)$, где

$$\Delta B(g)_t = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \nu^H(\{t\} \times dx; \omega) \tag{19}$$

(см. [250, гл. II, 2.14]). Поэтому в предположении, что $\nu^H(\{t\} \times E; \omega) = 0$ видим, что $\Delta B(g)_t = 0$ и, значит, $\Delta M(g)^d = g(\Delta H)$. Но $\Delta g * (\mu^H - \nu^H)$ также равно $g(\Delta H)$, и, следовательно, скачки у чисто разрывных локальных мартингалов в левой и правой частях равенства (18) совпадают.

Тем самым, из формулы (9) с учетом соотношений (17)—(18) получаем следующее представление:

$$H = H_0 + B(g) + H^c + g * (\mu^H - \nu^H) + (x - g(x)) * \mu^H, \tag{20}$$

которое называется *каноническим представлением* семимартингала H.

Сравнивая представление (20) с представлением (4) для случая дискретного времени, мы видим, что внешне они отличаются прежде всего наличием в формуле (20) *непрерывной* составляющей H^c.

6. В каноническом представлении (20) есть две «предсказуемые» компоненты: $B(g)$ и ν^H. Третьей важной характеристикой семимартингала H является «угловая скобка» $\langle H^c \rangle$, являющаяся (предсказуемым) компенсатором непрерывного локально квадратично интегрируемого мартингала H^c.

Определение 5. Пусть $H = (H_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ — семимартингал и $g = g(x)$ — некоторая функция урезания. Обозначим $B = B(g)$, $C = \langle H^c \rangle$, $\nu = \nu^H$. Набор

$$\mathbb{T} = (B, C, \nu) \tag{21}$$

называется *триплетом предсказуемых характеристик* семимартингала H.

Важно подчеркнуть, что компоненты C и ν в триплете $\mathbb{T}$ *не зависят* от выбора функции урезания $g = g(x)$. Но характеристика B зависит от g. При этом если g и g' — две разные функции урезания, то

$$B(g) - B(g') = (g - g') * \nu.$$

7. Приведем некоторые свойства семимартингалов, выражаемые в терминах предсказуемых характеристик B, C и ν.

1. Если H — семимартингал, то

$$(x^2 \wedge 1) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}},$$

т. е. процесс $\left(\int_{(0,t]\times\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\, d\nu\right)_{t\geqslant 0}$ является локально интегрируемым. Иначе говоря, существует такая последовательность марковских моментов τ_n, $\tau_n \uparrow \infty$ (P-п. н.), что

$$\mathsf{E} \int_{(0,t]\times\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\, d\nu < \infty.$$

2. Семимартингал H является *специальным* (в частности, локальным мартингалом) в том и только в том случае, когда

$$(x^2 \wedge |x|) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}.$$

3. Семимартингал H является *локально квадратично интегрируемым* семимартингалом в том и только в том случае, когда

$$x^2 * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}.$$

В основе доказательства свойства 1 лежит тот факт, что для семимартингалов $\sum\limits_{s\leqslant t} (\Delta H_s)^2 < \infty$ (P-п. н.), $t > 0$; см. замечание 3 в § 5b гл. III. По поводу доказательства свойств 2 и 3 см. [250, гл. II § 2b].

4. Если $H = H_0 + N + A$ — каноническое разложение *специального* семимартингала H, то

$$H = H_0 + H^c + X * (\mu - \nu) + A. \tag{22}$$

Иначе говоря, для специальных семимартингалов H в их каноническом представлении (20) можно взять $g(x) = x$.

5. С триплетом $\mathbb{T} = (B, C, \nu)$ предсказуемых характеристик семимартингала H свяжем (для каждого $\theta \in \mathbb{R}$) следующий предсказуемый процесс ограниченной вариации:

$$\Psi(\theta)_t = i\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} C_t + \int (e^{i\theta x} - 1 - i\theta g(x))\, \nu((0,t] \times dx; \omega), \tag{23}$$

называемый *кумулянтой* (процесса H); ср. с § 1b гл. III.

Пусть

$$G(\theta) = \mathscr{E}\big(\Psi(\theta)\big), \tag{24}$$

где $\mathscr{E}(\Psi(\theta)) = \big(\mathscr{E}(\Psi(\theta))\big)_{t\geqslant 0}$ — стохастическая экспонента, построенная по $\Psi(\theta)$ (см. гл. III, § 5c, пример 1):

$$\mathscr{E}(\Psi(\theta))_t = e^{\Psi(\theta)_t} \prod_{0<s\leqslant t} (1 + \Delta\Psi(\theta)_s) e^{-\Delta\Psi(\theta)_s}. \tag{25}$$

Теорема 3. *Пусть $\Delta\Psi(\theta)_t \neq -1$, $t > 0$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *H — семимартингал с характеристиками (B, C, ν);*
2) *для любого $\theta \in \mathbb{R}$ процесс*
$$\frac{e^{i\theta H_t}}{G(\theta)_t}, \quad t \geqslant 0, \tag{26}$$
является локальным мартингалом.

(По поводу доказательства, в основе которого лежит формула Ито для семимартингалов, см. [250, гл. II, § 2d].)

6. В классе семимартингалов наиболее просто устроены процессы $H = (H_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, являющиеся в то же самое время *процессами с независимыми приращениями*. Их отличительное свойство состоит в том, что для них триплет $\mathbb{T} = (B, C, \nu)$ является *неслучайным*. Иначе говоря, $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$, $C = (C_t)_{t\geqslant 0}$ и компенсаторная мера $\nu = \nu(dt, dx)$ *не зависят* от ω (см. [250, гл. II, § 4c]).

Тем самым, для таких процессов кумулянта $\Psi(\theta)$ не зависит от ω, и если $\Delta\Psi(\theta) \neq -1$, что соответствует непрерывности по вероятности процесса $H = (H_t)$, то из равенства (22) получаем *формулу Леви—Хинчина* $(H_0 = 0)$:
$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, e^{i\theta H_t} &= e^{\Psi(\theta)_t} = \\ &= \exp\left\{ i\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} C_t + \int (e^{i\theta x} - 1 - i\theta g(x))\, \nu((0, t] \times dx) \right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

В случае процессов Леви
$$B_t = b \cdot t, \quad C_t = c \cdot t, \quad \nu(dt, dx) = dt \cdot \nu(dx)$$
и
$$\mathsf{E}\, e^{i\theta H_t} = e^{t\psi(\theta)},$$
где
$$\psi(\theta) = i\theta b - \frac{\theta^2}{2} c + \int (e^{i\theta x} - 1 - i\theta g(x))\, \nu(dx). \tag{28}$$
(Наряду с $\Psi(\theta)_t$ функцию $\psi(\theta)$ также называют кумулянтой.)

Мера $\nu = \nu(dx)$ удовлетворяет условиям
$$\nu(\{0\}) = 0, \quad (x^2 \wedge 1) * \nu < \infty \tag{29}$$
и носит название *меры Леви*. (Ср. с § 1b гл. III.)

7. Рассмотрим следующий частный случай процессов Леви — процесс броуновского движения со сносом и пуассоновскими скачками.

Более точно, пусть
$$H_t = mt + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k, \tag{30}$$

где $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс (броуновское движение), $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)=\mathsf{P}(\xi_1\leqslant x)$, $N=(N_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартный процесс Пуассона с параметром $\lambda>0$ ($\mathsf{E}\,N_t=\lambda t$). Предполагается, что W, N и $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ совместно независимы.

Следующая цепочка соотношений легко приводит к каноническому представлению, из которого находится и триплет предсказуемых характеристик:

$$
\begin{aligned}
H_t &= mt+\sigma W_t+\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k = mt+\sigma W_t+\int_0^t\!\!\int x\,d\mu = \\
&= \biggl(mt+\int_0^t\!\!\int g(x)\,d\nu\biggr)+\biggl(\sigma W_t+\int_0^t\!\!\int g(x)\,d(\mu-\nu)\biggr)+\int_0^t\!\!\int (x-g(x))\,d\mu = \\
&= t\biggl(m+\lambda\int g(x)\,F(dx)\biggr)+\biggl(\sigma W_t+\int_0^t\!\!\int g(x)\,d(\mu-\nu)\biggr)+\int_0^t\!\!\int (x-g(x))\,d\mu.
\end{aligned}
$$

Отсюда видим, что

$$
\begin{gathered}
B(g)_t = t\biggl(m+\lambda\int g(x)\,F(dx)\biggr), \\
C_t=\sigma^2 t, \quad d\nu=\lambda\,dt\,F(dx).
\end{gathered}
$$

8. Случайные последовательности $H=(H_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ с *дискретным временем* естественным образом вкладываются в модели с непрерывным временем (см. гл. II, § 1f). Если $H_n=H_0+\sum\limits_{k=1}^{n} h_k$ с $h_k=\Delta H_k$, то триплет $\mathbb{T}=(B(g), C, \nu)$ имеет следующую структуру:

$$
\begin{gathered}
B(g)_t = \sum_{1\leqslant k\leqslant [t]} \mathsf{E}\bigl[g(h_k)\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\bigr], \\
C_t=0, \quad d\nu((0,t]\times A;\omega) = \sum_{1\leqslant k\leqslant [t]} \mathsf{P}(h_k\in A\,|\,\mathscr{F}_{k-1}),
\end{gathered}
$$

где $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

§ 3b. Конструкция мартингальных мер в диффузионных моделях. Теорема Гирсанова

1. Результаты § 2b, c относительно необходимых и достаточных условий отсутствия арбитражных возможностей показывают, насколько важно для *теории арбитража* уметь находить мартингальные или локально мартингальные меры, эквивалентные исходной вероятностной мере.

Один из весьма распространенных методов построения мартингальных мер основан на *теореме Гирсанова* и ее разнообразных обобщениях. Другим методом построения таких мер, хорошо известным с давних пор в актуарной науке, является метод, основанный на *преобразовании Эшера* (см. далее § 3c).

Формулировка теоремы Гирсанова, данная им в его известной работе [183], была приведена в § 3e гл. III. В настоящем параграфе будет приведено ее доказательство, рассмотрены некоторые обобщения и даны критерии абсолютной непрерывности и эквивалентности вероятностных мер, отвечающих диффузионным процессам и процессам Ито.

2. Рассмотрим процесс $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$, являющийся *процессом Ито* (см. § 3d гл. III) с дифференциалом

$$dX_t=a_t(\omega)\,dt+dB_t,\quad x_0=0, \tag{1}$$

где $a=(a_t(\omega),\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — некоторый процесс, удовлетворяющий условию

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t |a_s(\omega)|\,ds<\infty\right)=1,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

и $B=(B_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартное броуновское движение.

Допустим теперь, что $\widetilde{a}=(\widetilde{a}_t(\omega),\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — другой процесс, причем

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t \bigl(a_s(\omega)-\widetilde{a}_s(\omega)\bigr)^2\,ds<\infty\right)=1,\quad t\geqslant 0. \tag{3}$$

В этом предположении определен процесс $Z=(Z_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (ср. с формулой (21) в § 3d гл. III),

$$Z_t=\exp\left\{\int_0^t(\widetilde{a}_s-a_s)\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t(\widetilde{a}_s-a_s)^2\,ds\right\}, \tag{4}$$

являющийся неотрицательным локальным мартингалом (например, с локализующими моментами $\tau_k=\inf\bigl\{t\colon \int_0^t(\widetilde{a}_s-a_s)^2\,ds\geqslant k\bigr\}$, $k\geqslant 1$).

Из леммы Фату следует, что этот процесс является (неотрицательным) супермартингалом, и, значит, по теореме Дуба о сходимости (см. § 3b гл. III), с вероятностью единица существует и конечен $\lim\limits_{t\to\infty} Z_t$ $(=Z_\infty)$.

Пусть

$$\mathsf{E}\,Z_\infty=1. \tag{5}$$

(Это равносильно предположению о равномерной интегрируемости семейства $\{Z_t,t\geqslant 0\}$.) Тогда на $(\Omega,\mathscr{F})$ можно определить *новую* вероятностную меру $\widetilde{\mathsf{P}}$, полагая

$$d\widetilde{\mathsf{P}}=Z_\infty\,d\mathsf{P}. \tag{6}$$

Теорема 1 (И. В. Гирсанов [183]). *Процесс $\widetilde{B}=(\widetilde{B}_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$,*

$$\widetilde{B}_t=B_t-\int_0^t(\widetilde{a}_s-a_s)\,ds, \tag{7}$$

относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ является стандартным броуновским движением и

$$dX_t=\widetilde{a}_t(\omega)\,dt+d\widetilde{B}_t. \tag{8}$$

Доказательство приводится в п. 3. Сейчас же остановимся на некоторых следствиях и замечаниях.

Следствие 1. *Пусть*

$$X_t = B_t - \lambda \int_0^t a_s\, ds, \tag{9}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, *и*

$$Z_t^\lambda = \exp\left(\lambda \int_0^t a_s\, dB_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t a_s^2\, ds\right). \tag{10}$$

Предположим, что $\mathsf{E}\, Z_\infty^\lambda = 1$, *и положим* $d\widetilde{\mathsf{P}}^\lambda = Z_\infty^\lambda\, d\mathsf{P}$. *Тогда относительно меры* $\widetilde{\mathsf{P}}^\lambda$ *процесс* $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ *является стандартным броуновским движением.*

Если $\mathsf{E}\, Z_T^\lambda = 1$ *для некоторого конечного* T, *то относительно меры* $\widetilde{\mathsf{P}}_T^\lambda$, *для которой* $d\widetilde{\mathsf{P}}_T^\lambda = Z_T^\lambda\, d\mathsf{P}_T$, *где* $\mathsf{P}_T = \mathsf{P} | \mathscr{F}_T$, *процесс* $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ *будет стандартным броуновским движением на временно́м интервале* $[0, T]$.

Следствие 2. *Пусть* $\tau = \tau(\omega)$ — *конечный марковский момент и*

$$\mathsf{E} \exp\left(\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2} \tau\right) = 1. \tag{11}$$

Положим $d\widetilde{\mathsf{P}}^\lambda = Z_\tau^\lambda\, d\mathsf{P}$, *где* $Z_\tau^\lambda = \exp\left(\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2} \tau\right)$. *Тогда относительно меры* $\widetilde{\mathsf{P}}^\lambda$ *процесс* $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$,

$$X_t = B_t - \lambda \cdot (t \wedge \tau),$$

является стандартным броуновским движением.

Замечание 1. Формулировка теоремы Гирсанова, приведенная в § 3e гл. III, давалась в предположении, что $0 \leqslant t \leqslant T$ и $\mathsf{E}\, Z_T = 1$. Этот случай вкладывается в рассматриваемый сейчас случай $0 \leqslant t < \infty$, если $a_t = 0$ и $\widetilde{a}_t = 0$ для $t > T$.

Замечание 2. Известными достаточными условиями для выполнения свойства (11) являются следующие (см., например, [288], [303], [402]):

$$\mathsf{E}\, e^{\frac{1}{2}\tau} < \infty \quad \text{(условие Новикова)} \tag{12}$$

и

$$\sup_{t \geqslant 0} \mathsf{E}\, e^{B_{\tau \wedge t}} < \infty \quad \text{(условие Казамаки)}. \tag{13}$$

Поскольку $\sup_{t \geqslant 0} \mathsf{E}\, e^{B_{\tau \wedge t}} \leqslant (\mathsf{E}\, e^{\frac{1}{2}\tau})^2$, условие (13) слабее условия (12).

Если, например, определить $\tau = \inf\{t \colon B_t = 1\}$, то $\mathsf{E} \sqrt{\tau} = \infty$ и тем более $\mathsf{E}\, e^{\frac{1}{2}\tau} = \infty$. Таким образом, условие (12) здесь не выполняется. Однако условие (13) выполнено и для этого момента:

$$\mathsf{E} \exp\left(B_\tau - \frac{1}{2}\tau\right) = 1.$$

В том случае, когда рассматриваемые моменты остановки τ являются марковскими относительно потока $(\mathscr{F}_t^B)_{t\geqslant 0}$, порожденного броуновским движением, условия (12) и (13) можно ослабить.

Теорема 2 ([282]). *Пусть $\varphi=\varphi(t)$ — такая неотрицательная измеримая функция, что*

$$\varlimsup_{t\to\infty}(B_t-\varphi(t)) = +\infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{14}$$

и пусть τ — марковский момент относительно потока $(\mathscr{F}_t^B)_{t\geqslant 0}$.

Любое из условий

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\sigma\in\mathfrak{M}_0^N}\mathsf{E}\exp\Big\{\frac{1}{2}(\tau\wedge\sigma)-\varphi(\tau\wedge\sigma)\Big\}<\infty \tag{15}$$

или

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\sigma\in\mathfrak{M}_0^N}\mathsf{E}\exp\Big\{\frac{1}{2}B_{\tau\wedge\sigma}-\varphi(\tau\wedge\sigma)\Big\}<\infty, \tag{16}$$

где $\mathfrak{M}_0^N$ — класс таких марковских моментов σ (относительно $(\mathscr{F}_t^B)_{t\geqslant 0}$), что $\mathsf{P}(0\leqslant\sigma\leqslant N)=1$, является достаточным для выполнения равенства

$$\mathsf{E}\exp\Big\{B_\tau-\frac{1}{2}\tau\Big\}=1. \tag{17}$$

Замечание 3. В случае процесса $Z^\lambda=(Z_t^\lambda)_{t\geqslant 0}$, определенного формулой (10), соответствующие условие Новикова и условие Казамаки формулируются следующим образом:

$$\mathsf{E}\exp\Big\{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty a_s^2\,ds\Big\}<\infty, \tag{18}$$

$$\mathsf{E}\exp\Big\{\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty a_s\,dB_s\Big\}<\infty. \tag{19}$$

По поводу доказательств и обобщений на процессы $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ вида

$$Z_t=\exp\Big\{L_t-\frac{1}{2}\langle L,L\rangle_t\Big\}, \tag{20}$$

где $L=(L_t)_{t\geqslant 0}$ является непрерывным локальным мартингалом (каковым является, например, процесс $L_t=\int_0^t a_s(\omega)\,dB_s$, $t\geqslant 0$), см. [288], [303] и [402].

3. Доказательство теоремы Гирсанова. Как и в случае дискретного времени (см. § 3b гл. V), достаточно проверить, что (P-п. н.) для $0\leqslant s\leqslant t$, $\theta\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\big[e^{i\theta(\widetilde{B}_t-\widetilde{B}_s)}\,|\,\mathscr{F}_s\big]=e^{-\frac{\theta^2}{2}(t-s)}. \tag{21}$$

С этой целью обозначим $\alpha_s=\widetilde{a}_s-a_s$, $\widetilde{B}_t=B_t-\int_0^t\alpha_s\,ds$,

$$Z_t=\exp\Big(\int_0^t\alpha_s\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_s^2\,ds\Big)$$

(см. формулы (7) и (10)).

По формуле Байеса (§ 3a гл. V)

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\big[e^{i\theta(\widetilde{B}_t-\widetilde{B}_s)}\,|\,\mathscr{F}_s\big]=\frac{1}{Z_s}\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\big[Z_t e^{i\theta(\widetilde{B}_t-\widetilde{B}_s)}\,|\,\mathscr{F}_s\big], \tag{22}$$

и надо показать, что правая часть формулы (22) равна $e^{-\frac{\theta^2}{2}(t-s)}$.

Для простоты будем рассматривать случай $s=0$.

Пусть $U_t=e^{i\theta\widetilde{B}_t}$. Тогда по формуле Ито (§ 5c гл. III) находим, что

$$d(Z_tU_t)=Z_tU_t(\alpha_t+i\theta)\,dB_t-Z_tU_t\frac{\theta^2}{2}\,dt,$$

т. е.

$$Z_tU_t=1+\int_0^t Z_sU_s(\alpha_s+i\theta)\,dB_s-\frac{\theta^2}{2}\int_0^t Z_sU_s\,dt.$$

Отсюда с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теоремы Леви (§ 5a гл. III), для $\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\,Z_tU_t$ получаем уравнение

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\,Z_tU_t=-\frac{\theta^2}{2}\int_0^t \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\,Z_sU_s\,ds,$$

из которого заключаем, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\,e^{i\theta\widetilde{B}_t}=\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\,Z_tU_t=e^{-\frac{\theta^2}{2}t}.$$

Формула (21) проверяется аналогичным образом, что и доказывает, что процесс $\widetilde{B}=(\widetilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$, определенный формулой (7), является стандартным броуновским движением. Соотношение (8) следует из формул (1) и (7).

Теорема доказана.

4. Итак, если по мере P процесс X имел дифференциал $dX_t=a_t(\omega)\,dt+dB_t$, то по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, определенной формулой (6), этот процесс имеет дифференциал $dX_t=\widetilde{a}_t(\omega)\,dt+d\widetilde{B}_t$, где $\widetilde{B}=(\widetilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ является броуновским движением по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$.

Важно отметить, что если все рассмотрения проводятся лишь на временно́м интервале $[0,T]$, где T может быть марковским моментом, то вместо условия $\mathsf{E}\,Z_\infty=1$ надо требовать лишь выполнения условия $\mathsf{E}\,Z_T=1$.

Замечание 4. Пусть в теореме Гирсанова $\widetilde{a}_t\equiv 0$, т. е.

$$\widetilde{B}_t=B_t+\int_0^t a_s\,ds$$

и

$$Z_t=\exp\Big\{-\int_0^t a_s\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_s^2\,ds\Big\}.$$

Тогда если $\mathsf{E}\, Z_T = 1$, то по мере $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, для которой $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T\, d\mathsf{P}$, процесс

$$X_t = B_t + \int_0^t a_s\, ds$$

совпадает с $\widetilde{B}_t$ и является броуновским движением (ср. с § 3b, гл. V), а значит, и мартингалом. Это объясняет, почему меру $\widetilde{\mathsf{P}}$ в рассматриваемом случае принято называть «мартингальной» мерой.

5. Пусть X — *процесс Ито* с дифференциалом (1) и $\mu^X = \mathrm{Law}(X\,|\,\mathsf{P})$ — распределение вероятностей этого процесса в (фильтрованном) пространстве $(C, \mathscr{C}, (\mathscr{C}_t)_{t\geqslant 0})$ непрерывных функций $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$.

Теорема Гирсанова оказывается удобным средством исследования вопросов о том, когда сужения $\mu_t^X = \mu^X\,|\,\mathscr{C}_t$ мер μ^X абсолютно непрерывны, эквивалентны или сингулярны мерам $\mu_t^B = \mu^B\,|\,\mathscr{C}_t$.

Мера μ^B есть не что иное, как винеровская мера (§ 3a гл. III), и, следовательно, речь идет о свойствах меры μ^X процесса X по отношению к винеровской мере μ^B. В том случае, когда $\mu_t^X \ll \mu_t^B$ или $\mu_t^B \ll \mu_t^X$, представляется интересным дать и явные выражения для производных Радона—Никодима $\dfrac{d\mu_t^X}{d\mu_t^B}$ и $\dfrac{d\mu_t^B}{d\mu_t^X}$.

Эти вопросы достаточно подробно изучены в случае процесса Ито в монографии [303, гл. 7] и в случае семимартингалов — в [250, гл. III—V] (с привлечением *расстояния Хеллингера* и *процессов Хеллингера*). Поэтому ограничимся лишь некоторыми результатами.

Будем рассматривать временно́й интервал $[0, T]$.

Предположим, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T a_s^2(\omega)\, ds < \infty\right) = 1. \tag{23}$$

Тогда определен процесс $Z = (Z_t)_{t\leqslant T}$,

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t a_s(\omega)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_s^2(\omega)\, ds\right). \tag{24}$$

Теорема 3. *Если* $\mathsf{E}\, Z_T = 1$, *то*

$$\mu_T^X \sim \mu_T^B \tag{25}$$

и

$$\frac{d\mu_t^B}{d\mu_t^X}(X(\omega)) = \mathsf{E}\left(\exp\left[-\int_0^T a_s(\omega)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^T a_s^2(\omega)\, ds\right] \Big|\, \mathscr{F}_T^X\right)(\omega), \tag{26}$$

где $\mathscr{F}_T^X = \sigma(\omega\colon X_s(\omega),\ s \leqslant T)$.

Доказательство. Определим меру $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, полагая (ср. с формулой (6)) $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T\, d\mathsf{P}_T$, где $\mathsf{P}_T = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_T$. Относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ процесс $X = (X_t)_{t\leqslant T}$ является, по теореме Гирсанова, броуновским движением, и, следовательно,

$$\begin{aligned}\mu_T^B(A) = \widetilde{\mathsf{P}}_T(X \in A) &= \int_{\{\omega : X(\omega)\in A\}} Z_T(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega) = \\ &= \int_{\{\omega : X(\omega)\in A\}} \mathsf{E}[Z_T \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega)\, \mathsf{P}(d\omega) = \\ &= \mathsf{E}\big(I_A(X(\omega)) \cdot \mathsf{E}[Z_T \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega)\big).\end{aligned} \tag{27}$$

Пусть $\Phi_T(x)$ — такой $\mathscr{C}_T$-измеримый функционал, что $\mathsf{E}[Z_T \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega) = \Phi_T(X(\omega))$. Тогда из соотношений (27) по формуле замены переменных под знаком интеграла Лебега (см., например, [439, гл. II, § 6]) получаем

$$\mu_T^B(A) = \int_{\{\omega : X(\omega)\in A\}} \Phi_T(X(\omega))\, \mathsf{P}(d\omega) = \int_A \Phi_T(x)\, \mu_T^X(dx),$$

и, значит, $\mu_T^B \ll \mu_T^X$. При этом

$$\frac{d\mu_t^B}{d\mu_t^X}(x) = \Phi_T(x) \tag{28}$$

и

$$\frac{d\mu_T^B}{d\mu_T^X}(X(\omega)) = \mathsf{E}[Z_T \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega). \tag{29}$$

Установим теперь, что $\mu_T^X \ll \mu_T^B$. Для этого заметим, что, поскольку $\mathsf{P}_T(Z_T(\omega) > 0) = 1$, выполняются соотношения $\mathsf{P}_T \ll \widetilde{\mathsf{P}}_T$ (ср. с § 3a гл. V) и

$$\frac{d\mathsf{P}_T}{d\widetilde{\mathsf{P}}_T}(\omega) = Z_T^{-1}(\omega). \tag{30}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mu_T^X(A) = \mathsf{P}_T(X(\omega) \in A) &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\big(I_A(X(\omega)) Z_T^{-1}\big) = \\ &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\big(I_A(X(\omega))\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(Z_T^{-1} \,|\, \mathscr{F}_T^X)(\omega)\big) = \\ &= \widetilde{\Phi}_T(x)\, \mu_T^X(dx),\end{aligned} \tag{31}$$

где $\widetilde{\Phi}_T(x)$ — такой $\mathscr{C}_T$-измеримый функционал, что $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(Z_T^{-1} \,|\, \mathscr{F}_T^X)(\omega) = \widetilde{\Phi}_T(X(\omega))$.

Из (31) заключаем, что $\mu_T^X \ll \mu_T^B$ и

$$\frac{d\mu_t^X}{d\mu_t^B}(X(\omega)) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}[Z_T^{-1} \,|\, \mathscr{F}_T^X](\omega). \tag{32}$$

□

6. Обратимся к тому специальному случаю, когда процесс Ито X является *процессом диффузионного типа*, т. е. в формуле (1) положим $a_t(\omega) = A(t, X(\omega))$, где $A(t, x)$ — неупреждающий функционал (измеримый по (t, x) и при каждом t являющийся $\mathscr{C}_t$-измеримым по x).

В этом случае, когда
$$dX_t = A(t, X)\,dt + dB_t, \tag{33}$$
из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть*
$$\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t, X)\,dt < \infty\right) = 1 \tag{34}$$
и
$$\mathsf{E}\exp\left(-\int_0^T A(t, X)\,dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T A^2(t, X)\,dt\right) = 1 \tag{35}$$
или, что равносильно,
$$\mathsf{E}\exp\left(-\int_0^T A(t, X)\,dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T A^2(t, X)\,dt\right) = 1. \tag{36}$$

Тогда $\mu_T^X \sim \mu_T^B$,
$$\frac{d\mu_T^B}{d\mu_T^X}(X) = \exp\left(-\int_0^T A(t, X)\,dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T A^2(t, X)\,dt\right) \tag{37}$$
и
$$\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^B}(X) = \exp\left(\int_0^T A(t, X)\,dX_t - \frac{1}{2}\int_0^T A^2(t, X)\,dt\right). \tag{38}$$

Замечание 5. Если в теореме 3 отказаться от выполнения свойства $\mathsf{E}\,Z_T = 1$, то можно доказать (см. [303, теорема 7.4]), что
$$\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t, X)\,dt < \infty\right) = 1 \;\Rightarrow\; \mu_T^X \ll \mu_T^B \tag{39}$$
и
$$\left.\begin{aligned} &\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t, X)\,dt < \infty\right) = 1 \\ &\mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t, B)\,dt < \infty\right) = 1 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \mu_T^X \sim \mu_T^B. \tag{40}$$

7. Сопоставление теорем 3 и 4 показывает, что если в случае процессов диффузионного типа для производных Радона—Никодима имеются явные формулы (37) и (38), то для процессов Ито соответствующие формулы (см. (26)) предполагают вычисление условного математического ожидания $\mathsf{E}(\cdot\,|\,\mathscr{F}_T^X)$. Следующий результат, имеющий и самостоятельный интерес, оказывается полезным при получении явных формул для производных Радона—Никодима в случае процессов Ито, поскольку он позволяет «перенести» операцию взятия условного математического ожидания в формуле (26) под знак интегрирования.

Теорема 5. *Пусть X — процесс Ито с дифференциалом* (1), *где*

$$\int_0^T \mathsf{E}\,|a_s(\omega)|\,ds < \infty. \tag{41}$$

Пусть $A(t,x)$ — такой неупреждающий функционал, что

$$A\big(t, X(\omega)\big) = \mathsf{E}(a_t \,|\, \mathscr{F}_t^X)(\omega). \tag{42}$$

Тогда процесс $\overline{B} = (\overline{B}_t)_{t\leqslant T}$,

$$\overline{B}_t = X_t - \int_0^t A\big(s, X(\omega)\big)\,ds, \tag{43}$$

является броуновским движением (относительно потока $(\mathscr{F}_t^X)_{t\leqslant T}$).

Если в дополнение к неравенству (41) *выполняются равенства*

$$\mathsf{P}\Big(\int_0^T a_s^2(\omega)\,ds < \infty\Big) = 1, \tag{44}$$

$$\mathsf{E}\exp\Big(-\int_0^T a_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T a_s^2\,ds\Big) = 1, \tag{45}$$

то $\mu_T^X \sim \mu_T^B$,

$$\mathsf{P}\Big(\int_0^T A^2(t, X)\,dt < \infty\Big) = 1, \tag{46}$$

$$\mathsf{P}\Big(\int_0^T A^2(t, B)\,dt < \infty\Big) = 1 \tag{47}$$

и

$$\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^B}(B) = \exp\Big(\int_0^T A(s, B)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T A^2(s, B)\,ds\Big), \tag{48}$$

$$\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^B}(X) = \exp\Big(\int_0^T A(s, X)\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T A^2(s, X)\,ds\Big). \tag{49}$$

Доказательство того, что процесс $\overline{B} = (\overline{B}_t)_{t\leqslant T}$ является броуновским движением (если $\mathscr{F}_t^{\overline{B}} = \mathscr{F}_t^X$, $t \geqslant 0$, то $\overline{B}$ называется *обновляющим процессом* для X), легко может быть получено из формулы Ито для семимартингалов (§ 3d гл. III), примененной к $e^{i\lambda(\overline{B}_t - \overline{B}_s)}$, $t \geqslant s$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Действительно,

$$\begin{aligned} e^{i\lambda(\overline{B}_t - \overline{B}_s)} = 1 + i\lambda \int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)}\,dB_u + {}\\ + i\lambda \int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)}\big[a_u(\omega) - A(u, X(\omega))\big]\,du - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u - \overline{B}_s)}\,du. \end{aligned} \tag{50}$$

Поскольку

$$\mathsf{E}\left(\int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u-\overline{B}_s)}\,dB_u\,\Big|\,\mathscr{F}_s^X\right)=0$$

и

$$\mathsf{E}\left[\int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u-\overline{B}_s)}\big(a_u(\omega)-A(u,X(\omega))\big)\,du\,\Big|\,\mathscr{F}_s^X\right]=$$

$$=\mathsf{E}\left[\int_s^t e^{i\lambda(\overline{B}_u-\overline{B}_s)}\,\mathsf{E}\big(a_u(\omega)-A(u,X(\omega))\mid\mathscr{F}_u^X\big)\,du\,\Big|\,\mathscr{F}_s^X\right]=0,$$

из формулы (50) находим, что (P-п. н.)

$$\mathsf{E}(e^{i\lambda(\overline{B}_t-\overline{B}_s)}\,|\,\mathscr{F}_s^X)=1-\frac{\lambda^2}{2}\int_s^t\mathsf{E}(e^{i\lambda(\overline{B}_u-\overline{B}_s)}\,|\,\mathscr{F}_s^X)\,du,$$

откуда (P-п. н.)

$$\mathsf{E}(e^{i\lambda(\overline{B}_t-\overline{B}_s)}\,|\,\mathscr{F}_s^X)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)},\quad 0\leqslant s\leqslant t, \tag{51}$$

и, значит, $\overline{B}$ является процессом броуновского движения. (Непрерывность траекторий $(\overline{B}_t)_{t\leqslant T}$ следует из формулы (43).)

Чтобы доказать оставшиеся утверждения, надо лишь заметить, что

$$\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^B}=\frac{d\mu_T^X}{d\mu_T^{\overline{B}}}\cdot\frac{d\mu_T^{\overline{B}}}{d\mu_T^B},\qquad \frac{d\mu_T^{\overline{B}}}{d\mu_T^B}=1,$$

и воспользоваться утверждениями теорем 3 и 4. □

8. Теоремы 1—5 допускают обобщение (подробнее см. [303, гл. 7]) на многомерные процессы X, на тот случай, когда вместо единичного коэффициента диффузии в формулах (1), (33) допускаются коэффициенты, зависящие от t и «прошлых значений» X_s, $s\leqslant t$.

Приведем в этом направлении следующий результат.

Пусть $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ является процессом диффузионного типа,

$$dX_t=\alpha(t,X)\,dt+\beta(t,X)\,dB_t, \tag{52}$$

где $\alpha(t,x)$ и $\beta(t,x)$ — неупреждающие функционалы, причем $\beta(t,x)>0$, определен стохастический интеграл

$$\int_0^t\beta(s,X)\,dB_s,$$

$t\leqslant T$, и $\int_0^T|\alpha(s,X)|\,ds<\infty$ (P-п. н.).

Пусть $\widetilde{\alpha}(t,x)$ также неупреждающий функционал, для которого

$$\int_0^T|\widetilde{\alpha}(s,X)|\,ds<\infty\quad(\mathsf{P}\text{-п. н.})$$

и

$$\int_0^T \left(\frac{\alpha(s, X) - \widetilde{\alpha}(s, X)}{\beta(s, X)} \right)^2 ds < \infty. \tag{53}$$

Положим

$$Z_t = \exp\left\{ \int_0^t \frac{\widetilde{\alpha}(s, X) - \alpha(s, X)}{\beta(s, X)} \, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\widetilde{\alpha}(s, X) - \alpha(s, X)}{\beta(s, X)} \right)^2 ds \right\}. \tag{54}$$

Тогда если $\mathsf{E}\, Z_T = 1$, то относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T \, d\mathsf{P}_T$, процесс X будет процессом диффузионного типа с дифференциалом

$$dX_t = \widetilde{\alpha}(t, X)\, dt + \beta(t, X)\, d\widetilde{B}_t, \tag{55}$$

где $\widetilde{B}$ — броуновское движение (по мере $\widetilde{\mathsf{P}}_T$).

Пример. Пусть $X_t = e^{mt + \sigma B_t}$. Тогда

$$dX_t = X_t \left[\left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma\, dB_t \right], \tag{56}$$

т. е. $\alpha(t, X) = \left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right) X_t$, $\beta(t, X) = \sigma X_t$. Положим $\widetilde{\alpha}(t, X) \equiv 0$. Из формулы (54) получаем

$$Z_t = \exp\left\{ \left(\frac{m}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) B_t - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)^2 t \right\}, \tag{57}$$

и относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T \, d\widetilde{\mathsf{P}}$, процесс $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ имеет стохастический дифференциал

$$dX_t = \sigma X_t \, d\widetilde{B}_t.$$

Иначе говоря, относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ процесс $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ становится *стандартным* геометрическим броуновским движением (см. § 3a гл. III):

$$X_t = \exp\left\{ \sigma \widetilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right\}. \tag{58}$$

§ 3c. Конструкция мартингальных мер в случае процессов Леви. Преобразование Эшера

1. Если $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ является по отношению к исходной мере P_T процессом *диффузионного* типа с локальными характеристиками $\alpha(t, X)$ и $\beta(t, X)$ (см. формулу (52) в § 2c), то теорема Гирсанова указывает явную конструкцию новой меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, относительно которой процесс X имеет (новые) локальные характеристики $\widetilde{\alpha}(t, X)$ и $\widetilde{\beta}(t, X)$. Если при этом $\widetilde{\alpha}(t, X) \equiv 0$, то процесс X становится по мере $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ локальным мартингалом, в связи с чем эту меру $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ называют *локально мартингальной*.

Сама же конструкция этой меры осуществляется по формуле

$$d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T\, d\mathsf{P}_T, \tag{1}$$

где Z_T задается выражением (54) из предыдущего параграфа.

В основе преобразования Эшера как метода построения новой меры лежит, в сущности, та же самая идея. Но только в качестве исходного процесса $X = (X_t)_{t\leqslant T}$ рассматриваются процессы с *независимыми приращениями* (в частности, образованные суммами независимых случайных величин).

2. Напомним, что с преобразованием Эшера и его обобщением (условное преобразование Эшера) мы уже сталкивались в § 2d гл. V (см., в частности, замечание в п. 2). Полезно также отметить, что, как метод построения «риск-нейтральных» вероятностных мер, приписывающих больший вес неблагоприятным событиям и меньший вес благоприятным, преобразование Эшера исходной меры P_T в меру $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ известно в актуарном деле со времен статьи Ф. Эшера (F. Esscher [144]), опубликованной в 1932 г.

Например, при расчетах премии в страховании жизни страховые компании исходят не из (известного с большой точностью) распределения P_T длительности жизни (таблицы смертности второго рода), а из некоторого иного распределения $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, отличного от P_T (таблицы смертности первого рода) и имеющего отмеченное свойство перераспределения веса между благоприятными и неблагоприятными событиями.

3. Прежде чем переходить к рассмотрению преобразования Эшера в общем случае, остановимся сначала на следующем простом примере (ср. с § 2d гл. V), хорошо иллюстрирующем, в чем суть этого преобразования.

Пусть X — действительнозначная случайная величина с преобразованием Лапласа $\Phi(\lambda) = \mathsf{E}\, e^{\lambda X} < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и $\mathsf{P} = \mathsf{P}(dx)$ — ее распределение вероятностей на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Введем *семейство* вероятностных мер $\mathsf{P}^{(a)}$, $a \in \mathbb{R}$, определяемых *преобразованием Эшера*:

$$\mathsf{P}^{(a)}(dx) = \frac{e^{ax}}{\Phi(a)}\, \mathsf{P}(dx). \tag{2}$$

Если положить

$$Z^{(a)}(x) = \frac{e^{ax}}{\Phi(a)}, \tag{3}$$

то видим, что $Z^{(a)}(x) > 0$, $\mathsf{E}\, Z^{(a)}(X) = 1$, мера $\mathsf{P}^{(a)} \sim \mathsf{P}$ и

$$\mathsf{P}^{(a)}(dx) = Z^{(a)}(x)\, \mathsf{P}(dx). \tag{4}$$

Ясно также, что

$$\Phi^{(a)}(\lambda) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}^{(a)}}\, e^{\lambda X} = \frac{\mathsf{E}\, e^{(\lambda+a)X}}{\Phi(a)} = \frac{\Phi(a+\lambda)}{\Phi(a)}, \tag{5}$$

откуда

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^{(a)}} X = \frac{\partial \Phi^{(a)}(\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\Phi'(a)}{\Phi(a)}. \tag{6}$$

В § 2d гл. V было показано, что если случайная величина X такова, что $\mathsf{P}(X>0)>0$ и $\mathsf{P}(X<0)>0$, то функция $\Phi(a)$ достигает своего минимального значения в некоторой точке $\widetilde{a}$, для которой, очевидно, $\Phi'(\widetilde{a})=0$.

Тем самым, относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}=\mathsf{P}^{(\widetilde{a})}$ имеем $\widetilde{\mathsf{E}}X \equiv \mathsf{E}_{\mathsf{P}^{(\widetilde{a})}} X = 0$, что выражают словами, что $\widetilde{\mathsf{P}}$ есть «риск-нейтральная» вероятностная мера.

Свойство $\widetilde{\mathsf{E}}X=0$ можно рассматривать также как «одноэтапную» версию свойства «мартингальности», что объясняет другое наименование для $\widetilde{\mathsf{P}}$ — *мартингальная мера*.

4. Пусть теперь $X=(X_t)_{t\leqslant T}$ — процесс Леви с характеристической функцией (см. формулу (27) в § 3a и § 1b гл. III)

$$\mathsf{E}\, e^{i\theta X_t} = e^{t\psi(\theta)}, \tag{7}$$

где кумулянта

$$\psi(\theta) = i\theta b - \frac{\theta^2}{2}c + \int (e^{i\theta x} - 1 - i\theta g(x))\,\nu(dx) \tag{8}$$

и $g(x)$ — функция урезания (например, $g(x)=xI(|x|\leqslant 1)$).

Из формул (7) и (8), формально полагая $\theta=-i\lambda$, находим, что

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda X_t} = e^{t\varphi(\lambda)}, \tag{9}$$

где

$$\varphi(\lambda) = \lambda b + \frac{\lambda^2}{2}c + \int_{\mathbb{R}} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda g(x))\,\nu(dx). \tag{10}$$

Строгое доказательство представления (9)—(10) для преобразования Лапласа проще всего получить, основываясь на том замечании, что процесс

$$\begin{aligned} Z^{(\lambda)} &= (Z_t^{(\lambda)})_{t\geqslant 0}, \\ Z_t^{(\lambda)} &= \exp\{\lambda X_t - t\varphi(\lambda)\}, \end{aligned} \tag{11}$$

является мартингалом. (Доказательство непосредственно следует из формулы Ито для семимартингалов. При этом, разумеется, предполагается, что интеграл в формуле (10) конечен.)

По аналогии с формулой (2) введем для каждого $a\in\mathbb{R}$ вероятностную меру $\mathsf{P}_T^{(a)}$, определив ее с помощью преобразования Эшера:

$$d\mathsf{P}_T^{(a)} = Z_T^{(a)}\, d\mathsf{P}_T, \tag{12}$$

где P_T — вероятностная мера на $(\Omega, \mathscr{F}_T)$, относительно которой процесс $X = (X_t)_{t\leqslant T}$ является процессом Леви с локальными характеристиками (b, c, ν).

Теорема 1. *Относительно меры* $\mathsf{P}_T^{(a)}$, $a \in \mathbb{R}$, *процесс* $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ *также является процессом Леви с преобразованием Лапласа*

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}} e^{\lambda X_t} = e^{t\varphi^{(a)}(\lambda)}, \tag{13}$$

где

$$\varphi^{(a)}(\lambda) = \varphi(a+\lambda) - \varphi(a). \tag{14}$$

Доказательство вытекает из формулы Байеса (§ 3d гл. V), согласно которой ($\mathsf{P}_T^{(a)}$-п. н.)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}}\bigl(e^{\lambda(X_t - X_s)} \mid \mathscr{F}_s\bigr) &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}}\biggl(e^{\lambda(X_t - X_s)} \frac{Z_t^{(a)}}{Z_s^{(a)}} \biggm| \mathscr{F}_s\biggr) = \\ &= \mathsf{E}\bigl(e^{(a+\lambda)(X_t - X_s) - \varphi(a)(t-s)} \mid \mathscr{F}_s\bigr) = \\ &= \mathsf{E}\, e^{(a+\lambda)(X_t - X_s) - \varphi(a)(t-s)} = \\ &= e^{(\varphi(a+\lambda) - \varphi(a))(t-s)}.\end{aligned}$$

Отсюда видим, что по мере $\mathsf{P}_T^{(a)}$, определяемой преобразованием Эшера (12), процесс $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ также является процессом Леви с преобразованием Лапласа, задаваемым формулами (13) и (14). (Ср. с теоремой Гирсанова из § 3b.) $\square$

Теорема 2. *Относительно меры* $\mathsf{P}_T^{(a)}$, $a \in \mathbb{R}$, *локальные характеристики* $(b^{(a)}, c^{(a)}, \nu^{(a)})$ *процесса* $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ *определяются по локальным характеристикам* (b, c, ν) *по формулам* ($g(x)$ — *функция урезания)*

$$b^{(a)} = b + ac + \int_{\mathbb{R}} g(x)(e^{ax} - 1)\, \nu(dx), \tag{15}$$

$$c^{(a)} = c, \tag{16}$$

$$\nu^{(a)}(dx) = e^{ax}\, \nu(dx). \tag{17}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 процесс X по мере $\mathsf{P}_T^{(a)}$ является процессом Леви и

$$\varphi^{(a)}(\lambda) = \lambda b^{(a)} + \frac{\lambda^2}{2} c^{(a)} + \int_{\mathbb{R}} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda g(x))\, \nu^{(a)}(dx). \tag{18}$$

Учитывая, что $\varphi^{(a)}(\lambda) = \varphi(a+\lambda) - \varphi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, из формул (18) и (10) непосредственно получаем формулы связи (15)—(17). $\square$

5. Пусть $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ является процессом Леви (относительно меры P_T). Будучи семимартингалом, этот процесс допускает (вообще говоря, неединственное) каноническое разложение $X = M + A$, где M — локальный мартингал и A — процесс ограниченной вариации. Вопрос, которым мы сейчас будем заниматься, состоит в следующем: при каких условиях на локальные характеристики (b, c, ν) процесс X является *локальным мартингалом* (по мере P_T).

По-другому можно сказать, что мы интересуемся условиями, при которых мера P_T является *мартингальной* для процесса X.

Прежде всего отметим, что если X — *локальный мартингал*, то, следовательно он является *специальным* семимартингалом, и, значит, необходимым образом должно выполняться условие

$$(x^2 \wedge |x|) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}} \tag{19}$$

(см. формулу (20) в § 3а).

Пусть X — специальный семимартингал и

$$X = N + A \tag{20}$$

является его каноническим разложением (N — локальный мартингал и A — предсказуемый процесс ограниченной вариации), а

$$X = B + X^c + g * (\mu - \nu) + (x - g) * \mu \tag{21}$$

— его каноническое представление, которое (в силу формулы (19)) может быть переписано в виде

$$X = B + X^c + g * (\mu - \nu) + (x - g) * (\mu - \nu) + (x - g) * \nu. \tag{22}$$

Из сопоставления формул (20) и (22) находим, что

$$A = B + (x - g) * \nu, \tag{23}$$

и, следовательно, можно утверждать, что *специальный семимартингал X с триплетом предсказуемых характеристик (B, C, ν) является локальным мартингалом* тогда и только тогда, когда

$$B + (x - g) * \nu = 0. \tag{24}$$

Из всего сказанного следует, что процесс Леви X с триплетом локальных характеристик (b, c, ν) является *специальным семимартингалом* в том и только том случае, когда

$$\int (x^2 \wedge |x|)\, \nu(dx) < \infty \tag{25}$$

(см. формулу (20) в § 3а), и к тому же является *локальным мартингалом* в том и только том случае, когда

$$b + \int_{\mathbb{R}} (x - g(x))\, \nu(dx) = 0. \tag{26}$$

Если $g(x) = xI(|x| \leqslant 1)$, то условие (26) принимает следующий вид:

$$b + \int_{|x|>1} x\, \nu(dx) = 0. \tag{27}$$

Может, конечно, оказаться, что относительно исходной меры P условие (26) *не выполнено*. В этом случае полезно обращение к мерам $\mathsf{P}_T^{(a)}$, построенным выше с помощью преобразования Эшера. Поскольку новые локальные характеристики $(b^{(a)}, c^{(a)}, \nu^{(a)})$ определяются формулами (15)—(17), из соотношений (25) и (27) мы заключаем, что относительно меры $\mathsf{P}_T^{(a)}$ процесс Леви является локальным мартингалом в том и только том случае, когда

$$\int (x^2 \wedge |x|) e^{ax}\, \nu(dx) < \infty \tag{28}$$

и

$$b + ac + \int_{|x|>1} x\, \nu(dx) + \int_{\mathbb{R}} x(e^{ax} - 1)\, \nu(dx) = 0. \tag{29}$$

Пример 1. Пусть $X_t = mt + \sigma B_t + kN_t$, где B — стандартное броуновское движение и N — стандартный процесс Пуассона с параметром $\nu > 0$ ($\mathsf{E}\, N_t = \nu t$). Выясним, при каком значении параметра a процесс $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ относительно меры $\mathsf{P}_T^{(a)}$ становится локальным мартингалом.

Представляя X_t в виде

$$X_t = (m + k\nu)t + \sigma B_t + k(N_t - \nu t), \tag{30}$$

мы убеждаемся, что этот процесс заведомо будет мартингалом относительно исходной меры, если

$$m + k\nu = 0. \tag{31}$$

Пусть теперь $m + k\nu \neq 0$. В рассматриваемом случае процесс $(kN_t)_{t \geqslant 0}$ имеет скачки размера k, мера Леви равна $\nu(dx) = \nu \cdot I_{\{k\}}(dx)$,

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda(kN_t)} = e^{\nu t(e^{k\lambda} - 1)} \tag{32}$$

и локальные характеристики b и c процесса X имеют (с функцией урезания $g(x) = xI(|x| \leqslant k)$) такой вид:

$$b = m + k\nu,$$
$$c = \sigma^2.$$

Из формулы (29) находим для a следующее уравнение (интегрирование по множеству $\{x : |x| > 1\}$ надо заменить интегрированием по $\{x : x > k\}$ в силу выбора в качестве функции урезания функции $g(x) = xI(|x| \leqslant k)$):

$$(m + k\nu) + a\sigma^2 + \nu k(e^{ak} - 1) = 0. \tag{33}$$

Если $\sigma^2 \neq 0$, то существует корень, скажем $\widetilde{a}$, этого уравнения, и, следовательно, относительно меры $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$ процесс X становится мартингалом. Если же $\sigma^2 = 0$, то корень $\widetilde{a}$ должен находиться из уравнения

$$e^{ak} = -\frac{m}{k\nu}, \tag{34}$$

из которого видно, что для существования корня значение m должно быть не равно нулю, причем m и k должны иметь разные знаки.

6. Будем теперь предполагать, что процесс цен $S=(S_t)_{t\leqslant T}$ порождается некоторым процессом Леви $X=(X_t)_{t\leqslant T}$:

$$S_t = e^{X_t}. \tag{35}$$

Вопрос, рассматриваемый ниже и важный для проблемы отсутствия арбитражных возможностей, состоит в том, является ли процесс S мартингалом относительно исходной меры P_T или относительно некоторой меры $\mathsf{P}_T^{(a)}$, построенной с помощью преобразования Эшера.

Как и в п. 3, начнем с рассмотрения простого примера.

Пусть X — действительнозначная случайная величина и $\Phi(a) = \mathsf{E}\, e^{aX}$. (Предполагается, что $\Phi(a) < \infty$, $a \in \mathbb{R}$.) Тогда понятно, что случайная величина $S=e^X$ обладает (относительно исходной меры) «мартингальным» свойством $\mathsf{E}\, S=1$, если $\Phi(1)=1$.

Если $\Phi(1)\neq 1$, то можно попытаться найти такое $\widetilde{a}$, чтобы относительно меры $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$, построенной с помощью преобразования (2), было выполнено «мартингальное» свойство $\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}} S=1$.

Поскольку

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}} S = \mathsf{E}\, \frac{e^{(a+1)X}}{\Phi(a)} = \frac{\Phi(a+1)}{\Phi(a)}, \tag{36}$$

значение $\widetilde{a}$ должно быть корнем уравнения

$$\Phi(a+1) - \Phi(a) = 0. \tag{37}$$

Если, например, X является нормально распределенной случайной величиной с параметрами m и σ^2, то, поскольку

$$\Phi(a) = \mathsf{E}\, e^{aX} = e^{am+\frac{(a\sigma)^2}{2}}, \tag{38}$$

из формулы (37) находим, что

$$\widetilde{a} = -\frac{1}{2} - \frac{m}{\sigma^2}. \tag{39}$$

Обратимся теперь к процессу $S=(S_t)_{t\leqslant T}$, определенному формулой (35). Естественно, прежде всего, выяснить, при каких условиях этот процесс является мартингалом относительно исходной меры P_T.

Теорема 3. *Для того чтобы процесс $S=e^X$ был мартингалом относительно меры P_T, достаточно (а также и необходимо), чтобы выполнялись условия*

$$\int_{|x|>1} e^x\, \nu(dx) < \infty \tag{40}$$

и

$$b + \frac{1}{2}c + (e^x - 1 - g(x)) * \nu = 0. \tag{41}$$

Доказательство. Условие (40) вместе с условием $(x^2 \wedge 1) * \nu < \infty$ обеспечивает конечность интеграла $(e^x - 1 - g(x)) * \nu$.

Ясно, что

$$\mathsf{E}(e^{X_t - X_s} \,|\, \mathscr{F}_s) = \mathsf{E}\, e^{X_t - X_s} = e^{(t-s)\varphi(1)},$$

где $\varphi(1)$ определено формулой (10), есть в точности выражение, стоящее в левой части равенства (41). Следовательно,

$$\mathsf{E}(e^{X_t} \,|\, \mathscr{F}_s) = e^{X_s},$$

что и доказывает мартингальность процесса $S = e^X$. (Необходимость условий (40) и (41) показана в книге [250, гл. X, § 2a].) □

7. Пусть условие (41) не выполнено. Согласно теореме 1 имеем

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(a)}}(e^{X_t - X_s} \,|\, \mathscr{F}_s) = e^{(t-s)(\varphi(a+1) - \varphi(a))}. \tag{42}$$

Поэтому ясно, что если $\widetilde{a}$ — корень уравнения

$$\varphi(a+1) - \varphi(a) = 0, \tag{43}$$

то относительно меры $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$ процесс $S = (S_t)_{t \leqslant T}$ будет мартингалом.

Из формулы (43) с учетом соотношения (18) приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Пусть $\widetilde{a}$ таково, что*

$$|e^{\widetilde{a}x}(e^x - 1) - g(x)| * \nu < \infty$$

и

$$b + \Bigl(\widetilde{a} + \frac{1}{2}\Bigr)c + (e^{\widetilde{a}x}(e^x - 1) - g(x)) * \nu = 0. \tag{44}$$

Тогда относительно меры $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$ процесс $S = (S_t)_{t \leqslant T}$ является мартингалом.

Пример 2. Пусть $S_t = e^{X_t}$, где процесс $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ определен в примере 1. В этом случае уравнение (44) принимает такой вид:

$$\Bigl(m + \frac{\sigma^2}{2}\Bigr) + a\sigma^2 + \nu[e^{ak}(e^k - 1)] = 0. \tag{45}$$

Если $\sigma = 0$, $k \neq 0$, то (45) превращается в уравнение

$$e^{ak} = -\frac{m}{n(e^k - 1)}, \tag{46}$$

которое заведомо имеет решение, если $m \neq 0$, а k и m имеют разные знаки.

Если $k = 0$, то

$$S_t = e^{mt + \sigma B_t}, \tag{47}$$

что является стандартной моделью геометрического броуновского движения (гл. III, § 4b). По формуле Ито

$$dS_t = S_t\Bigl(\Bigl(m + \frac{\sigma^2}{2}\Bigr)dt + \sigma\, dB_t\Bigr). \tag{48}$$

Из формул (45) или из (39) находим, что $\widetilde{a} = -\frac{1}{2} - \frac{m}{\sigma^2}$ и

$$Z_T^{(\widetilde{a})} = \exp\Big\{-\Big(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{\sigma}{2}\Big)^2 T\Big\}.$$

Поскольку

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}} e^{\lambda X t} = \exp\Big\{\frac{\sigma^2 t}{2}[-\lambda + \lambda^2]\Big\},$$

мы видим, что

$$\mathrm{Law}(X_t \,|\, \mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}) = \mathscr{N}\Big(-\frac{\sigma^2 t}{2}, \frac{\sigma^2 t}{2}\Big).$$

Иначе говоря, относительно меры $\mathsf{P}_T^{(\widetilde{a})}$ процесс $(X_t)_{t\leqslant T}$ имеет то же самое распределение, что и процесс $\Big(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\Big)_{t\leqslant T}$, где $W = (W_t)_{t\leqslant T}$ — стандартный винеровский процесс (ср. с примером в конце § 3b), а процесс $S = (S_t)_{t\leqslant T}$ становится стандартным геометрическим броуновским движением.

Тем самым, в рассматриваемом случае конструкции мартингальной меры и с помощью *преобразования Гирсанова*, и с помощью *преобразования Эшера* приводят к одному и тому же результату. (Это, впрочем, и неудивительно, поскольку в данном случае мартингальная мера является единственной, а процесс $X_t = mt + \sigma B_t$ одновременно является и диффузионным, и процессом с независимыми приращениями.)

Замечание. О преобразовании Эшера и применениях к расчетам опционов см. работы Г. Гербера и Е. Шиу (H. U. Gerber, E. S. W. Shiu [177], [178]).

§ 3d. Предсказуемые критерии мартингальности цен. I

1. Настоящий и следующий параграфы посвящены отысканию *предсказуемых* критериев (т. е. критериев, выраженных в терминах свойств триплетов предсказуемых характеристик рассматриваемых процессов), при которых цены — семимартингалы $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ — являются мартингалами или локальными мартингалами (относительно исходной меры P или некоторой меры $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \ll \mathsf{P}$). Ср. с § 3f гл. V для дискретного времени.

Начнем с замечания о том, что в разных задачах могут оказаться удобными разные представления для рассматриваемых цен.

Если $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — семимартингал, то согласно определению

$$S_t = S_0 + a_t + m_t, \tag{1}$$

где $a = (a_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — процесс ограниченной вариации, а $m = (m_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — локальный мартингал. Это разложение не является однозначным. Если, например, $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартный процесс Пуассона ($S_0 = 0$, $\mathsf{E}\, S_t = \lambda t$), то в соотношении (1) можно положить как $a_t = S_t$, $m_t = 0$, так и $a_t = \lambda t$, $m_t = S_t - \lambda t$.

Разложение (1) носит аддитивный характер. Но если предполагать, что $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ является специальным положительным семимартингалом и (1) —

его разложение с предсказуемым процессом $a=(a_t)_{t\geqslant 0}$, то при дополнительном предположении, что $S_{t-}+\Delta a_t\neq 0$, для S имеет место *мультипликативное разложение*

$$S_t = S_0\mathscr{E}(\widehat{a})_t\mathscr{E}(\widehat{m})_t, \tag{2}$$

где

$$\mathscr{E}(g)_t = e^{g_t-\frac{1}{2}\langle g^c\rangle_t}\prod_{0<s\leqslant t}(1+\Delta g_s)e^{-\Delta g_s} \tag{3}$$

— стохастическая экспонента, и процессы $\widehat{a}=(\widehat{a}_t)$ и $\widehat{m}=(\widehat{m}_t)$ определяются по формулам

$$\widehat{a}_t = \int_0^t \frac{da_u}{S_{u-}}, \quad \widehat{m}_t = \int_0^t \frac{dm_u}{S_{u-}+\Delta a_u}. \tag{4}$$

В справедливости формулы (2) можно легко убедиться, применяя формулу Ито; детали см. в [304, гл. 2, § 5].

Произведение двух стохастических экспонент в соотношении (2) может быть по *формуле Йора* (см. формулу (18) в § 3f гл. III) превращено в одну стохастическую экспоненту:

$$\mathscr{E}(\widehat{a})_t\mathscr{E}(\widehat{m})_t = \mathscr{E}(\widehat{H})_t, \tag{5}$$

где

$$\widehat{H}_t = \widehat{a}_t + \widehat{m}_t + [\widehat{a},\widehat{m}]_t \tag{6}$$

и

$$[\widehat{a},\widehat{m}]_t = \sum_{0<s\leqslant t}\Delta\widehat{a}_s\,\Delta\widehat{m}_s. \tag{7}$$

Поэтому для $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ получаем следующее представление:

$$S_t = S_0\mathscr{E}(\widehat{H})_t, \tag{8}$$

которое оказывается весьма удобным при анализе этого процесса «на мартингальность», поскольку стохастическая экспонента $\mathscr{E}(\widehat{H})$ является локальным мартингалом тогда и только тогда, когда $\widehat{H}$ есть локальный мартингал.

Выше (§ 1a гл. II) отмечалось, что с точки зрения *статистического анализа* более удобно не представление (8), а представление по формуле сложных процентов:

$$S_t = S_0e^{H_t} \tag{9}$$

с некоторым семимартингалом $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$. И именно это представление (9) принимается обычно в финансовой математике как исходное. Переход же от (9) к (8) осуществляется по формуле

$$\widehat{H}_t = H_t + \frac{1}{2}\langle H^c\rangle_t + \sum_{0<s\leqslant t}(e^{\Delta H_s}-1-\Delta H_s), \tag{10}$$

которую в дифференциально-разностной форме можно записать следующим образом:

$$d\widehat{H}_t = dH_t + \frac{1}{2} d\langle H^c \rangle_t + (e^{\Delta H_t} - 1 - \Delta H_t). \tag{11}$$

Для доказательства формулы (10) заметим, что по формуле Ито, примененной к $f(H) = e^H$,

$$dS_t = S_{t-}\Big[dH_t + \frac{1}{2} d\langle H^c \rangle_t + (e^{\Delta H_t} - 1 - \Delta H_t)\Big]. \tag{12}$$

С другой стороны, из формулы (8) и свойств стохастической экспоненты следует, что

$$dS_t = S_{t-}\, d\widehat{H}_t. \tag{13}$$

Сопоставление соотношений (12) и (13) приводит к формуле (10).

Замечание 1. Бесконечная сумма в формуле (10) абсолютно сходится (P-п. н.), поскольку для всякого семимартингала H существует лишь конечное число моментов времени $s \leqslant t$, для которых

$$|\Delta H_s| > \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{0<s\leqslant t} (\Delta H_s)^2 < \infty$$

(см. § 5b гл. III). По той же самой причине абсолютно сходится бесконечное произведение в определении стохастической экспоненты (3).

2. Пусть H — семимартингал и

$$H = H_0 + B + H^c + g * (\mu - \nu) + (x - g(x)) * \mu \tag{14}$$

есть его каноническое представление (относительно некоторой функции урезания $g = g(x)$; $\mu = \mu^H$ — мера скачков H и $\nu = \nu^H$ — ее компенсатор; см. § 3a).

Из формул (10) и (14) для $\widehat{H}$ получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= H + \frac{1}{2}\langle H^c \rangle + (e^x - 1 - x) * \mu = \\ &= H_0 + B + H^c + \frac{1}{2}\langle H^c \rangle + g * (\mu - \nu) + (x - g(x)) * \mu + (e^x - 1 - x) * \mu. \end{aligned} \tag{15}$$

Для преобразования правой части равенства (15) воспользуемся тем, что если $|W| * \nu \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, то $|W| * \mu \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ и при этом (см. § 3a)

$$W * (\mu - \nu) = W * \mu - W * \nu. \tag{16}$$

Отсюда и из формулы (15) находим, что если

$$\big(|x| I(|x| \leqslant 1) + e^x I(|x| > 1)\big) * \nu \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}, \tag{17}$$

то

$$\widehat{H} = K + H_0 + H^c + (e^x - 1) * (\mu - \nu), \tag{18}$$

где $H^c + (e^x - 1) * (\mu - \nu) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ и

$$K = B + \frac{1}{2}\langle H^c \rangle + (e^x - 1 - g(x)) * \nu.$$

Тем самым, из (18) вытекает следующая

Теорема. *Если выполнено условие* (17)*, то* $\widehat{H} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ *и* $S \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$ *в том и только в том случае, когда*

$$K_t = 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \qquad t > 0. \tag{19}$$

В этом случае локальный мартингал равен

$$\widehat{H} = H_0 + H^c + (e^x - 1) * (\mu - \nu). \tag{20}$$

Пример. Пусть H — процесс Леви, триплет (B, C, ν) которого имеет следующий вид:

$$B_t = bt, \quad C_t = \sigma^2 t, \quad \nu(dt, dx) = dt\, F(dx), \tag{21}$$

где мера $F = F(dx)$ такова, что $F(\{0\}) = 0$ и

$$\int (x^2 \wedge 1)\, F(dx) < \infty. \tag{22}$$

Усилим неравенство (22), предполагая, что

$$\int \bigl(|x| I(|x| \leqslant 1) + e^x I(|x| > 1)\bigr)\, F(dx) < \infty. \tag{23}$$

В этом предположении процесс цен $S_t = S_0 e^{H_t}$ будет (относительно исходной меры P) мартингалом, если (b, σ^2, F) подчиняется следующему соотношению:

$$b + \frac{\sigma^2}{2} + \int (e^x - 1 - g(x))\, F(dx) = 0. \tag{24}$$

Пусть $B_t = B_0 e^{rt}$ — банковский счет, тогда дисконтируемый процесс цен $\dfrac{S}{B} = \left(\dfrac{S_t}{B_t}\right)_{t \geqslant 0}$ образует по мере P мартингал, если

$$b + \frac{\sigma^2}{2} + \int (e^x - 1 - g(x))\, F(dx) = r. \tag{25}$$

Замечание 2. В соответствии с обозначением (10) в предыдущем параграфе левая часть уравнений (24) и (25) есть значение «кумулянтной» функции $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = 1$. Поэтому формуле (25) можно придать следующий вид:

$$\varphi(1) = r. \tag{26}$$

Замечание 3. Как показывает теорема 3 из § 3c, в случае процессов Леви условие $\int |x| I(|x| \leqslant 1)\, F(dx) < \infty$ становится излишним. (Это условие возникло в ходе перегруппирования членов в формуле (15) с использованием формулы (16).)

§ 3e. Предсказуемые критерии мартингальности цен. II

1. Если условие (19) теоремы из § 3d не выполняется, то относительно исходной меры P процесс цен $S = S_0 e^H$ не является локальным мартингалом.

Но для многих целей (и, в частности, для проблем отсутствия арбитражных возможностей; см. § 2b) достаточно лишь существования *некоторой* меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойством $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ или $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, относительно которой процесс цен S является локальным мартингалом.

Вопросу существования мер с таким свойством было уделено много внимания в моделях с дискретным временем (§ 3a—3f гл. V).

Ниже этот вопрос рассматривается для случая непрерывного времени в семимартингальных моделях.

2. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathsf{P})$ — стохастический базис, $\mathsf{P}_t = \mathsf{P} | \mathscr{F}_t$ — сужение меры P на $\mathscr{F}_t$. Пусть также $\widetilde{\mathsf{P}}$ — такая вероятностная мера на $\mathscr{F}$, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, т. е. $\widetilde{\mathsf{P}}_t \ll \mathsf{P}_t$ при всех $t \geqslant 0$. Будем предполагать, что $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ и $\widetilde{\mathsf{P}}_0 = \mathsf{P}_0$.

Исследование вопросов существования мер $\widetilde{\mathsf{P}}$, относительно которых тот или иной процесс становится локальным мартингалом, начнем с *теоремы Гирсанова для локальных мартингалов*, показывающей, что происходит с локальными мартингалами при абсолютно непрерывной замене меры.

Теорема 1. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$, $M_0 = 0$ *и* $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$, *где* $Z_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$. *Пусть квадратическая ковариация* $[M, Z]$ *имеет* P-*локально интегрируемую вариацию и* $\langle M, Z \rangle$ — *предсказуемая квадратическая ковариация* (*компенсатор процесса* $[M, Z]$).

Тогда процесс

$$\widetilde{M} = M - \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M, Z \rangle, \tag{1}$$

является $\widetilde{\mathsf{P}}$-*локальным мартингалом и* $\widetilde{\mathsf{P}}$-*характеристика* $\langle \widetilde{M}^c, \widetilde{M}^c \rangle$ *совпадает* ($\widetilde{\mathsf{P}}$-п. н.) *с* P-*характеристикой* $\langle M^c, M^c \rangle$.

Доказательство. В соответствии с леммой из § 3d гл. V имеем

$$XZ \in \mathscr{M} \iff X \in \mathscr{M}(\widetilde{\mathsf{P}}). \tag{2}$$

(Формулировка и доказательство указанной леммы были даны для дискретного времени; на случай непрерывного времени они переносятся автоматически.)

Из утверждения (2) легко выводятся (см. детали в книге [250, гл. III, § 3b]) следующие «локальные» версии:

$$XZ \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}) \;\Rightarrow\; X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}); \tag{3}$$

$$(XZ)^{T_n} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}) \;\Rightarrow\; X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}), \tag{4}$$

где $(XZ)^{T_n} = (X_{t\wedge T_n} Z_{t\wedge T_n})_{t\geqslant 0}$ и $T_n = \inf(t\colon Z_t < 1/n)$.

Таким образом, для доказательства того, что $\widetilde{M} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$, достаточно лишь убедиться в том, что $(\widetilde{M}Z)^{T_n} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P})$, $n \geqslant 1$.

Пусть

$$A = \frac{1}{Z_-} \cdot \langle M, Z\rangle. \tag{5}$$

Тогда по формуле Ито

$$\begin{aligned}(M-A)Z &= MZ - AZ = \\ &= (M_- \cdot Z + Z_- \cdot M + [M,Z]) - (A \cdot Z + Z_- \cdot A) = \\ &= \bigl(M_- \cdot Z + Z_- \cdot M + ([M,Z] - \langle M,Z\rangle)\bigr) + \langle M,Z\rangle - A\cdot Z - \langle M,Z\rangle = \\ &= M_- \cdot Z + Z_- \cdot M + ([M,Z] - \langle M,Z\rangle) - A\cdot Z.\end{aligned} \tag{6}$$

Первые три члена в правой части равенства (6) являются P-локальными мартингалами. Таковым же является при каждом $n \geqslant 1$ процесс $(A\cdot Z)^{T_n}$. Тем самым, согласно утверждению (4) имеем $\widetilde{M} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

Таким образом, относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ процесс M становится семимартингалом с каноническим разложением

$$M = \widetilde{M} + A. \tag{7}$$

Отсюда и из определения квадратических вариаций $[M,M]$ и $[\widetilde{M},\widetilde{M}]$ с помощью пределов при $n\to\infty$ римановских последовательностей $S^{(n)}(M,M)$ и $S^{(n)}(\widetilde{M},\widetilde{M})$ (см. формулу (10) в § 5b гл. III) вытекает, что с точностью до $\widetilde{\mathsf{P}}$-неразличимости $[M,M] = [\widetilde{M},\widetilde{M}]$. Учитывая, наконец, формулу (22) из того же § 5b гл. III, делаем вывод о совпадении (по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$) предсказуемых квадратических вариаций $\langle M^c, M^c\rangle$ и $\langle \widetilde{M}^c, \widetilde{M}^c\rangle$. □

3. Пусть $S_t = S_0 e^{H_t}$, где $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ — семимартингал, и пусть $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $Z_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$.

Предположим, что процесс $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ порождается некоторым P-локальным мартингалом $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$:

$$dZ_t = Z_{t-}\, dN_t. \tag{8}$$

Иначе говоря, пусть $Z = \mathscr{E}(N)$.

Представим процесс S в виде $S = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})$, где $\widehat{H}$ находится по H согласно формуле (10) из предыдущего параграфа.

Пусть $\widehat{H}$ — специальный семимартингал с каноническим разложением

$$\widehat{H} = H_0 + \widehat{A} + \widehat{m}, \tag{9}$$

где $\widehat{m} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P})$ и $\widehat{A}$ — предсказуемый процесс локально ограниченной вариации.

Запишем $\widehat{H}$ в следующем виде:

$$\widehat{H} = H_0 + \widehat{A} + \widehat{m} = H_0 + \widehat{A} + \langle \widehat{m}, N \rangle + (\widehat{m} - \langle \widehat{m}, N \rangle) \tag{10}$$

и заметим, что

$$\frac{1}{Z_-} \cdot \langle \widehat{m}, Z \rangle = \langle \widehat{m}, N \rangle. \tag{11}$$

Тогда в силу теоремы 1 процесс $\widehat{m} - \langle \widehat{m}, N \rangle$ по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, $d\widetilde{\mathsf{P}}_t = Z_t \, d\mathsf{P}_t$, $t \geqslant 0$, является локальным мартингалом.

Следовательно, имеет место

Теорема 2. *Если $\widehat{H}$ — специальный семимартингал с каноническим разложением* (9), $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ *и процесс $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ допускает представление* (8), *то*

$$\widehat{A} + \langle \widehat{m}, N \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \widehat{H} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\widetilde{\mathsf{P}}). \tag{12}$$

4. Пусть выполнено условие (17) из предыдущего параграфа и процесс N допускает следующее представление:

$$N = \beta \cdot H^c + (Y - 1) * (\mu - \nu) \tag{13}$$

с предсказуемым процессом $\beta = (\beta_t(\omega))_{t \geqslant 0}$ и $\widetilde{\mathscr{P}}$-измеримой функцией $Y = Y(t, \omega, x)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$. (В формуле (14) $\mu = \mu^H$, $\nu = \nu^H$ и предполагается, что соответствующие интегралы по H^c и $\mu - \nu$ определены.)

Воспользуемся представлением (18) из § 3d для $\widehat{H}$:

$$\widehat{H} = H_0 + K + H^c + (e^x - 1) * (\mu - \nu). \tag{14}$$

Тогда если считать, что $\nu(\{t\} \times dx; \omega) = 0$, то найдем (см. замечание в конце п. 4 § 3a), что

$$\langle \widehat{m}, N \rangle = \beta \cdot \langle H^c \rangle + (Y - 1)(e^x - 1) * \nu. \tag{15}$$

Из утверждения (12), формул (14) и (15), а также (19) из § 3d приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (17) *из* § 3d, $\nu(\{t\} \times dx; \omega) = 0$ *и*

$$|Y - 1||e^x - 1| * \nu_t < \infty. \tag{16}$$

Тогда если

$$B + \Big(\frac{1}{2} + \beta\Big) \langle H^c \rangle + (e^x - 1 - g(x)) * \nu + (e^x - 1)(Y - 1) * \nu = 0, \tag{17}$$

то относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, $d\widetilde{\mathsf{P}}_t = Z_t \, d\mathsf{P}$, $t \geqslant 0$, процессы $\widehat{H}$ и $S = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})$ являются локальными мартингалами.

Пример. Пусть H — процесс Леви, рассмотренный в примере § 3d, и пусть $\beta_s(\omega) \equiv \beta$ и $Y = Y(x)$. Тогда при условии

$$b + \left(\frac{1}{2} + \beta\right)\sigma^2 + \int (e^x - 1 - g(x))\, F(dx) + \int (e^x - 1)(Y - 1)\, F(dx) = 0 \qquad (18)$$

процессы $\widehat{H}$ и $S = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})$ являются $\widetilde{\mathsf{P}}$-локальными мартингалами.

Заметим, что условию (18) можно придать также следующую форму:

$$b + \left(\frac{1}{2} + \beta\right)\sigma^2 + \int ((e^x - 1)Y - g(x))\, F(dx) = 0. \qquad (19)$$

В случае $\beta = 0$ и $Y = 1$ это условие совпадает с условием (24) из § 3d.

Напомним представление для кумулянтной функции $\varphi(\lambda)$ из § 3c:

$$\varphi(\lambda) = \lambda b + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 + \int (e^{\lambda x} - 1 - \lambda g(x))\, F(dx). \qquad (20)$$

Тогда, взяв $\beta = \widetilde{\lambda}$ и $Y(x) = e^{\widetilde{\lambda} x}$, из формулы (20) находим, что условие (19) будет выполнено, если $\widetilde{\lambda}$ выбрано как корень уравнения

$$\varphi(\lambda + 1) - \varphi(\lambda) = 0. \qquad (21)$$

Пусть $B_t = B_0 e^{rt}$, тогда дисконтируемые цены $\frac{S}{B}$ относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ образуют локальный мартингал, если $d\widetilde{\mathsf{P}}_t = Z_t\, d\mathsf{P}_t$ и $dZ_t = Z_{t-}\, dN_t$, где

$$N = \widetilde{\lambda} \cdot H^c + (e^{\widetilde{\lambda} x} - 1) * (\mu - \nu) \qquad (22)$$

и $\widetilde{\lambda}$ есть корень уравнения

$$\varphi(\lambda + 1) - \varphi(\lambda) = r.$$

§ 3f. О представимости локальных мартингалов (($H^c, \mu - \nu$)-представимость)

1. В предыдущем параграфе предполагалось, что процесс плотности $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ с $Z_t = \frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$, являющийся P-локальным мартингалом, допускает (см. формулу (13)) представление $Z = \mathscr{E}(N)$, где P-локальный мартингал N есть сумма двух интегралов по H^c и $\mu - \nu$.

Сопоставляя это представление с $(\mu - \nu)$-представимостью в случае дискретного времени (§ 4c гл. V), естественно его называть $(H^c, \mu - \nu)$-представимостью, что и объясняет появление этих слов в заголовке данного параграфа.

В полной общности вопросы представимости локальных мартингалов рассматриваются в книге [250, гл. III, § 4c]. Поэтому остановимся далее лишь на некоторых общих результатах, имеющих самое прямое отношение к вопросам арбитража, полноты и конструкции вероятностных мер, локально абсолютно непрерывных относительно исходной меры.

2. Прежде всего отметим, что для удовлетворительного решения вопроса о представимости локальных мартингалов по локальному мартингалу H^c и мартингальной мере $\mu-\nu$ на структуру пространства Ω элементарных исходов ω приходится накладывать дополнительные предположения. Именно, в дальнейшем всегда будем считать, что Ω есть *каноническое пространство*, состоящее из всех функций $\omega=(\omega_t)_{t\geqslant 0}$, являющихся непрерывными справа и имеющих пределы слева. (См. по этому поводу также [250, гл. III, 2.13].)

Рассматриваемые далее случайные процессы $X=(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ и, в частности, семимартингалы, будут предполагаться канонически заданными, т. е. $X_t(\omega)\equiv\omega_t$.

Под фильтрацией $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ будет пониматься семейство σ-алгебр

$$\mathscr{F}_t=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s^0,$$

где $\mathscr{F}_s^0=\sigma(\omega\colon \omega_u,\ u\leqslant s)$. Будем полагать также $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_t$.

Пусть P — вероятностная мера на $(\Omega,\mathscr{F})$, $\mathsf{P}_t=\mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, $H=(H_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — семимартингал с триплетом предсказуемых характеристик (B,C,ν). Для простоты рассуждений будем предполагать, что $H_0=\mathrm{Const}$ (P-п. н.).

Во многих отношениях интересен и важен вопрос о том, когда триплет (B,C,ν) *однозначно* определяет меру P. То, что, вообще говоря, это не так, показывают самые простые «детерминистические» примеры.

Так, например, пусть $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ является решением (обыкновенного) дифференциального уравнения

$$\dot{H}_t=2|H_t|^{1/2},\quad H_0=0$$

(с нелипшицевой правой частью). Это уравнение, очевидно, имеет два решения: $H_t^{(1)}\equiv 0$, $H_t^{(2)}=t^2$. Оба они являются семимартингалами относительно мер $\mathsf{P}^{(1)}$ и $\mathsf{P}^{(2)}$, первая из которых «сидит» на траектории $\omega_t\equiv 0$, а вторая — на $\omega_t=t^2$. В то же самое время в обоих случаях их триплеты (B,C,ν) *совпадают*, причем $C=0$, $\nu=0$ и $B_t(\omega)=\int_0^t 2|\omega_s|^{1/2}\,ds$.

3. Для проблемы $(H^c,\mu-\nu)$-представимости роль триплетов и единственности вероятностной меры раскрываются в следующем предложении.

Теорема 1. *Пусть на каноническом фильтрованном вероятностном пространстве* $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ *задан семимартингал* $H=(H_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, $H_0=\mathrm{Const}$, *с триплетом* (B,C,ν), *причем мера* P *является единственной в следующем смысле: если* P' — *другая мера, относительно которой* H *имеет тот же триплет, и* $\mathsf{P}'\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathsf{P}$, $\mathsf{P}'_0=\mathsf{P}_0$, *то* $\mathsf{P}'=\mathsf{P}$.

Тогда всякий локальный мартингал $N=(N_t,\mathscr{F}_t)$ *допускает представление*

$$N=N_0+f\cdot H^c+W*(\mu-\nu),\tag{1}$$

где f — *предсказуемый процесс,* $f^2\cdot\langle H^c\rangle\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$, *и* W — $\widetilde{\mathsf{P}}$-*предсказуемый процесс,* $G(W)\in\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$ (§ 3a).

Доказательство этого результата и его обобщение (фундаментальная теорема о представлении) см. в книге [250, гл. III, § 4d].

Из приведенной теоремы вытекают следующие полезные результаты (в частности, в связи с полными безарбитражными моделями) относительно $(H^c, \mu-\nu)$-представимости.

Теорема 2. *Пусть* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ — *каноническое фильтрованное вероятностное пространство.*

1. *Если* $H=(H_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *является процессом броуновского движения, то всякий локальный мартингал* $N=(N_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *имеет вид*

$$N = H_0 + f \cdot H, \tag{2}$$

где $f^2 \cdot \langle H\rangle \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

2. *Если семимартингал* $H=(H_t, \mathscr{F}_t)$ *является процессом с независимыми приращениями, то всякий локальный мартингал* $N=(N_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *допускает представление* (1).

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1 в силу единственности винеровской меры и того факта, что для процессов с независимыми приращениями их триплет является детерминированным, и по нему распределение вероятностей определяется (в силу формулы Леви—Хинчина) однозначным образом.

Отметим, что утверждение 1 уже приводилось ранее (§ 3с гл. III).

4. Наряду с изложенными в теореме 2 случаями 1 и 2, относящимися к числу классических, остановимся вкратце еще на одном случае, когда также имеет место результат об $(H^c, \mu-\nu)$-представимости локальных мартингалов.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (ср. с § 3е гл. III)

$$dH_t = b(t, H_t)\,dt + \sigma(t, H_t)\,dB_t + g(\delta(t, H_t, x))\big(\mu(dt, dx;\omega) - \nu(dt, dx;\omega)\big) + \\ + g'(\delta(t, h_t, x))\mu(dt, dx;\omega), \tag{3}$$

где b, σ, δ — борелевские функции, $g=g(x)$ — функция урезания, $g'(x)=x-g(x)$, B — броуновское движение, μ — однородная пуассоновская мера с компенсатором $\nu(dt, dx)=dt\,F(dx)$ (§ 3a). Хорошо известно (см., например, [250, гл. III, § 2c]), что в случае (локально) липшицевых коэффициентов, удовлетворяющих условию линейного роста, стохастическое дифференциальное уравнение (3) (с начальным условием $H_0=\mathrm{Const}$) имеет единственное сильное решение (§ 3е гл. III). При этом оказывается, что независимо от того, каково исходное вероятностное пространство, на котором определены броуновское движение и пуассоновская мера, распределение вероятностей процесса-решения H на каноническом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ определяется однозначным образом.

Процесс H является семимартингалом с триплетом (B, C, ν), где

$$
\begin{gathered}
B_t(\omega) = \int_0^t b(s, \omega_s)\, ds, \\
C_t(\omega) = \int_0^t \sigma^2(s, \omega_s)\, ds, \\
\nu(dt, dx; \omega) = dt\, K_t(\omega_t, dx),
\end{gathered}
$$

$K_t(\omega_t, A) = \int I_{A\setminus\{0\}}(\delta(t, \omega_t, x))\, F(dx)$.

Таким образом, при наличии сформулированных условий на коэффициенты (локальное условие Липшица и линейный рост) можно утверждать, что всякий локальный мартингал $N = (N_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ допускает $(H^c, \mu - \nu)$-представление. (Подробнее см. [250, гл. III, § 2a].)

§ 3g. Теорема Гирсанова для семимартингалов. Структура плотностей вероятностных мер

1. Если $M = (M_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — локальный мартингал на $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ и $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, то относительно меры P процесс M является семимартингалом (см. формулы (7) в § 3e).

Весьма замечательно, что относительно такой замены меры всякий семимартингал переходит также в семимартингал. Иначе говоря, класс семимартингалов является *устойчивым* по отношению к локально непрерывной замене меры. (Этот результат является простым следствием формулы Ито для семимартингалов (§ 5c гл. III).)

С точки зрения отсутствия арбитражных возможностей для финансовой математики особенно интересен вопрос о том, относительно каких мер $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойством $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ или $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ рассматриваемый семимартингал X, описывающий, скажем, динамику цен, является локальным мартингалом или мартингалом.

2. Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в выяснении того, как при локально абсолютной непрерывной замене меры $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ преобразуется каноническое представление (по мере P)

$$
X = X_0 + B + X^c + g * (\mu - \nu) + (x - g(x)) * \mu \tag{1}
$$

семимартингала X с триплетом (B, C, ν) в каноническое представление

$$
X = X_0 + \widetilde{B} + X^c + g * (\mu - \widetilde{\nu}) + (x - g(x)) * \mu \tag{2}
$$

(по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$) этого семимартингала с новым триплетом $(\widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{\nu})$.

Пусть $Z_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$, $t \geqslant 0$. Положим

$$\beta = \frac{d\langle Z^c, X^c\rangle}{d\langle X^c, X^c\rangle} \cdot \frac{I(Z_- > 0)}{Z_-}, \tag{3}$$

$$Y = \mathsf{E}_\mu^{\mathsf{P}}\left(\frac{Z}{Z_-} I(Z_- > 0) \,\middle|\, \widetilde{\mathscr{P}} \right), \tag{4}$$

где $\mathsf{E}_\mu^{\mathsf{P}}$ — усреднение по мере M_μ^{P} на $(\Omega \times \mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$, определяемое формулой $W * M_\mu^{\mathsf{P}} = \mathsf{E}(W * \mu)$ для всех измеримых неотрицательных функций $W = W(\omega, t, x)$. (Ср. с определением $Y_n(x, \omega)$, $M_n(dx, d\omega)$ в § 3e гл. V.)

Процессы β и Y играют ключевую роль в вопросах преобразования триплетов при замене меры, а следующий результат часто называют теоремой Гирсанова для семимартингалов.

Теорема 1. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $Z_t = \dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$, $t \geqslant 0$, *и процессы* β *и* Y *определяются по* $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ *по формулам* (3) *и* (4).

Тогда $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ *и* $\widetilde{\nu}$, *определяемые формулами*

$$\widetilde{B} = B + \beta \cdot C + g(x)(Y - 1) * \nu, \tag{5}$$

$$\widetilde{C} = C, \tag{6}$$

$$\widetilde{\nu} = Y \cdot \nu, \tag{7}$$

задают версию триплета семимартингала X *по мере* $\widetilde{\mathsf{P}}$.

Доказательство этой теоремы (не только в сформулированном случае одномерных семимартингалов, но и в многомерном случае) дается в книге [250, гл. III, § 3d] и в техническом отношении является довольно трудным. Отсылая за деталями доказательства к указанной монографии, прокомментируем содержательную сторону утверждения этой теоремы.

Прежде всего отметим, что для случая дискретного времени соответствующий результат был доказан в § 3e гл. V, где объясняется смысл дискретных (по времени) аналогов меры M_μ^{P} и величины Y.

Равенство (5) показывает, как трансформируется «сносовая» компонента B триплета (B, C, ν).

Равенство (6) говорит о том, что квадратические характеристики у непрерывной мартингальной составляющей X^c на самом деле при абсолютно непрерывной замене меры не изменяются (с точностью до $\widetilde{\mathsf{P}}$-стохастической эквивалентности).

Равенство (7) показывает, что Y есть не что иное, как производная Радона—Никодима меры $\widetilde{\nu}$ по мере ν.

3. Если семимартингал X является специальным, то в каноническом представлении (2) можно положить $g(x) = x$ и тогда

$$X = X_0 + B + X^c + x * (\mu - \nu). \tag{8}$$

Отсюда видно, что специальный семимартингал X является локальным мартингалом, если $B \equiv 0$. Вместе с теоремой 1 это замечание приводит к следующему предложению.

Теорема 2. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ *и при этом* $(x^2 \wedge |x|) * \widetilde{\nu} \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$. *Тогда специальный семимартингал X относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ является локальным мартингалом, если*

$$B + \beta \cdot C + x(Y-1) * \nu \equiv 0. \tag{9}$$

4. Формулы (3) и (4) показывают, как, зная процесс $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$, находить β и Y. Естественно теперь поставить обратный вопрос, как по β и Y найти соответствующий процесс Z.

Решение этого вопроса открывает путь к построению меры $\widetilde{\mathsf{P}}$, относительно которой семимартингал X становится локальным мартингалом. Действительно, если β и Y таковы, что выполнено условие (9), и по ним восстанавливается процесс Z, то по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T \, d\mathsf{P}_T$, процесс $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ заведомо будет на $[0, T]$ локальным мартингалом.

Пусть X — семимартингал, заданный на каноническом пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathsf{P})$. Предположим, что всякий P-мартингал M допускает $(X^c, \mu - \nu)$-представление:

$$M = M_0 + f \cdot X^c + W * (\mu - \nu). \tag{10}$$

(См. формулу (1) в § 3f.)

Теорема 3. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ *является процессом плотности,* $\nu(\{t\} \times E; \omega) = 0$, $t > 0$, β *и* Y *определены по формулам* (3) *и* (4). *Тогда (при выполнении свойства $(X^c, \mu - \nu)$-представимости) процесс Z удовлетворяет соотношению*

$$Z = Z_0 + (Z_- \beta) \cdot X^c + Z_-(Y-1) * (\mu - \nu). \tag{11}$$

Если при всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\beta^2 \cdot \langle X^c \rangle_t + (1 - \sqrt{Y})^2 * \nu_t < \infty, \tag{12}$$

то процесс $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$,

$$N_t = \beta \cdot X^c_t + (Y-1) * (\mu - \nu)_t \tag{13}$$

является P-локальным мартингалом. Процесс $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ является решением уравнения Долеан

$$dZ = Z_- \, dN \tag{14}$$

и может быть представлен в виде

$$Z_t = Z_0 \mathscr{E}(N)_t, \tag{15}$$

где

$$\mathscr{E}(N)_t = e^{N_t - \frac{1}{2}(\beta^2 C)_t} \prod_{0 < s \leqslant t} (1 + \Delta N_s) e^{-\Delta N_s}. \tag{16}$$

Приведенная формулировка теоремы предполагает, что $\nu(\{t\} \times E; \omega) = 0$. Это условие означает, что процесс X является *квазинепрерывным слева*, т. е. для любого *предсказуемого* момента остановки τ величина $\Delta X_\tau = 0$ на множестве $\{\tau < \infty\}$. В общем случае соответствующая формулировка вместе с доказательством дается в книге [250, гл. III, § 5a].

Замечание. По поводу непосредственного применения результатов теорем 2 и 3 в диффузионных моделях см. следующий § 4a.

4. Арбитраж, полнота и расчеты цены хеджирования в диффузионных моделях акций

§ 4a. Арбитраж и условия его отсутствия. Полнота

1. Выше, как для случая дискретного, так и для случая непрерывного времени, было уделено достаточно много внимания вопросам построения вероятностных мер, относительно которых процессы цен являются мартингалами или локальными мартингалами. Связано это, главным образом, с тем, что *наличие* эквивалентных мартингальных мер позволяет в достаточно широких предположениях утверждать, что арбитражные возможности отсутствуют (см. § 2b, c). К тому же знание множества *всех* таких мер дает возможность, используя мартингальную технику, производить расчеты, например, справедливых (рациональных) стоимостей, находить хеджирующие стратегии и т. д.

В настоящем параграфе вопрос об отсутствии арбитражных возможностей будет рассматриваться для того случая, когда цены являются *процессами Ито* (§ 3d гл. III).

2. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, на котором задано броуновское движение $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$. Через $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ будем обозначать *броуновскую* (*винеровскую*) *фильтрацию*, т. е. поток σ-алгебр $\mathscr{F}_t=\sigma(\mathscr{F}_t^0\cup\mathscr{N})$, где $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(B_s, s\leqslant t)$ и $\mathscr{N}=\{A\in\mathscr{F} : \mathsf{P}(A)=0\}$. (Подробнее см. § 3a, гл. III.) При этом будем также полагать $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_t$ $\left(\equiv\sigma\left(\bigcup\mathscr{F}_t\right)\right)$.

Фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ удовлетворяет *обычным условиям* (§ 3a гл. III) и будет рассматриваться как тот *стохастический базис*, который описывает вероятностно-статистическую неопределенность и структуру поступающей информации.

Пусть $S_t=S_0e^{H_t}$ — процесс цены $(S_0>0)$ некоторого актива, скажем, акции,

$$H_t=\int_0^t\left(\mu_s-\frac{\sigma_s^2}{2}\right)dx+\int_0^t\sigma_s\,dB_s, \tag{1}$$

где $\mu=(\mu_t,\mathscr{F}_t)$ и $\sigma=(\sigma_t,\mathscr{F}_t)$ — два стохастических процесса, удовлетворяющих (P-п. н.) условиям

$$\int_0^t |\mu_s|\,ds < \infty, \qquad \int_0^t \sigma_s^2\,ds < \infty, \qquad t > 0. \tag{2}$$

Из формулы Ито следует, что

$$dS_t = S_t\,d\widehat{H}_t, \tag{3}$$

где

$$\widehat{H}_t = \int_0^t \mu_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dB_s, \tag{4}$$

т. е. S имеет стохастический дифференциал

$$dS_t = S_t(\mu_t\,dt + \sigma_t\,dB_t). \tag{5}$$

Если $\mu_t \equiv \mu$, $\sigma_t \equiv \sigma \neq 0$, то получаем *стандартную диффузионную модель Самуэльсона* [420], описывающую динамику цен акций с помощью *геометрического броуновского движения* (§ 4b гл. III):

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dB_t). \tag{6}$$

Положим

$$Z_t = \exp\Bigl(-\frac{\mu}{\sigma}B_t - \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\mu}{\sigma}\Bigr)^2 t\Bigr). \tag{7}$$

Тогда $\mathsf{E}\,Z_t = 1$ и из *теоремы Гирсанова* (см. § 3b или § 3e гл. III) следует, что для всякого $T > 0$ относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ с дифференциалом

$$d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T\,d\mathsf{P}_T, \tag{8}$$

где $\mathsf{P}_T = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_T$, процесс $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ становится мартингалом с дифференциалом

$$dS_t = \sigma S_t\,d\widetilde{B}_t, \tag{9}$$

где $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ является $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-стандартным броуновским движением.

Таким образом, в случае $\mathsf{E}\,Z_T = 1$ построенная на $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ мера $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ эквивалентна мере P_T ($\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$) и относительно нее процесс $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ является мартингалом.

Полезно отметить, что эта мера $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ является *единственной* в том смысле, что если Q_T — другая мера с тем свойством, что $\mathsf{Q}_T \sim \mathsf{P}_T$ и относительно Q_T процесс $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ является *локальным мартингалом*, то $\mathsf{Q}_T = \widetilde{\mathsf{P}}_T$. Этот результат самым непосредственным образом связан с теоремой о представлении локальных мартингалов относительно броуновской фильтрации (см. § 3c гл. III), и его доказательство дается ниже в п. 5.

3. Обратимся теперь к тому случаю, когда процесс цен S имеет дифференциал (5).

Пусть выполнены следующие условия: P-п. н.

$$\sigma_t > 0 \quad \text{для } t > 0 \tag{10}$$

и

$$\int_0^t \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds < \infty. \tag{11}$$

При этих условиях определен процесс $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$,

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mu_s}{\sigma_s}\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds\right), \tag{12}$$

являющийся *положительным локальным мартингалом*, для которого в качестве локализующей последовательности $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ можно взять последовательность с членами

$$\tau_n = \inf\left\{t\colon \int_0^t \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds \geqslant n\right\}. \tag{13}$$

Если $\mathsf{E}\, Z_T = 1$, то тогда $Z = (Z_t)_{t\leqslant T}$ является мартингалом, мера $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ с дифференциалом $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T\, d\mathsf{P}_T$ будет *вероятностной* мерой, $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$, и относительно этой меры процесс $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ является *локальным мартингалом*.

Для доказательства последнего утверждения воспользуемся результатом теоремы 2 из § 3g.

Поскольку

$$dZ_t = -Z_t \frac{\mu_t}{\sigma_t}\, dB_t, \tag{14}$$

получаем (см. (3) в § 3g), что

$$\beta_t = \frac{d\langle Z^c, S^c\rangle}{d\langle S^c, S^c\rangle}\cdot Z_t^{-1} = -\frac{\dfrac{\mu_t}{\sigma_t}\cdot S_t\sigma_t}{(S_t\sigma_t)^2} = -\frac{\mu_t}{\sigma_t}\cdot\frac{1}{S_t\sigma_t}. \tag{15}$$

Относительно меры P семимартингал S имеет триплет (B, C, ν), $\nu \equiv 0$,

$$B_t = \int_0^t S_u\mu_u\, du, \quad C_t = \int_0^t S_u^2\sigma_u^2\, du. \tag{16}$$

Но

$$B_t + \int_0^t \beta_u\, dC_u = \int_0^t \left[S_u\mu_u - \frac{\mu_u S_u^2\sigma_u^2}{\sigma_u\cdot S_u\sigma_u}\right] du = 0.$$

Поэтому согласно утверждению теоремы 2 из § 3g процесс $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ становится локальным мартингалом. При этом (в предположении, что $\mathsf{E}\, Z_T = 1$) мера $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ будет единственной в том же самом смысле, что и в случае $\mu_t \equiv \mu$ и $\sigma_t \equiv \sigma$ (см. далее п. 5).

4. Сформулируем теперь для модели рынка, состоящего из банковского счета $B(0) = (B_t(0))_{t\geqslant 0}$, $B_t(0) \equiv 1$, и акции $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$, динамика которой описывается формулой (5), условия, гарантирующие отсутствие арбитража (в его $\overline{NA}_+$-версии; см. § 2a).

Пусть $\pi = (\beta, \gamma)$ — некоторая стратегия и $X^\pi = (X_t^\pi)_{t \geqslant 0}$ — ее капитал,

$$X_t^\pi = \beta_t + \gamma_t S_t.$$

Для самофинансируемых стратегий π имеем

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_u \, dS_u, \tag{17}$$

что, естественно, подразумевает, что стохастический интеграл в формуле (17) должен быть определен.

Как следует из изложения в § 1a, этот стохастический интеграл определен, если $\gamma \in L(S)$. В рассматриваемой сейчас модели (5) естественно условия интегрируемости γ по S выражать непосредственно в терминах свойств процессов $(\mu_t)_{t \leqslant T}$ и $(\sigma_t)_{t \leqslant T}$.

Будем предполагать, что выполнены условия (2), (10), (11) и

$$\int_0^t \gamma_u^2 \sigma_u^2 \, du < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad t > 0. \tag{18}$$

Из последнего условия и непрерывности процесса $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ вытекает, что $\int_0^t S_u^2 \gamma_u^2 \sigma_u^2 \, du < \infty$ (P-п. н.), и, значит, определен стохастический интеграл $\int_0^t S_u \gamma_u \sigma_u \, dB_u$ по броуновскому движению (см. § 3с гл. III и § 1a в настоящей главе).

Далее,

$$\left(\int_0^t |\gamma_u \mu_u| \, du \right)^2 \leqslant \int_0^t (\gamma_u \sigma_u)^2 \, du \cdot \int_0^t \left(\frac{\mu_u}{\sigma_u} \right)^2 du.$$

Поэтому из формул (11) и (18) вытекает существование и конечность (P-п. н.) интегралов $\int_0^t \gamma_u \mu_u \, du$ и $\int_0^t S_u \gamma_u \mu_u \, du$, $t > 0$.

Тем самым, условия (2), (10), (11) и (18) гарантируют существование стохастического интеграла в формуле (17).

Следующий результат, непосредственно вытекающий из изложенного в п. 3 и импликации (9) теоремы 2 в § 2b, является наиболее известным утверждением относительно отсутствия арбитража в диффузионных моделях.

Теорема. *Пусть цена акций* $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ *имеет дифференциал* (5) *и выполнены условия* (2), (10), (11) *и* (18) *для* $t \leqslant T$.

Пусть $\mathsf{E}\, Z_T = 1$. *Тогда выполнено свойство* $\overline{NA}_+$ *и, в частности, в классе* a*-допустимых самофинансируемых стратегий арбитражные возможности отсутствуют при любом* $a \geqslant 0$.

5. Обратимся к упомянутому в п. 2 утверждению о том, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ с дифференциалом $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T \, d\mathsf{P}_T$, где Z_T определено в (7), является *единственной* в том смысле, что это есть единственная мера, эквивалентная мере P_T, относительно которой процесс $S=(S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ становится локальным мартингалом.

Будем рассматривать более общий случай, считая, что процесс S определен формулой (5), а процесс Z — формулой (12).

Предположим, что Q_T — некоторая мера, *эквивалентная* мере P_T, относительно которой $S=(S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ является локальным мартингалом.

Образуем мартингал

$$N_t = \mathsf{E}\left(\frac{d\mathsf{Q}_T}{d\mathsf{P}_T}\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right), \quad t \leqslant T. \tag{19}$$

В силу его *положительности* найдется (см. формулу (20) в § 3c гл. III) такой процесс $\varphi=(\varphi_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$, что

$$N_t = \exp\left(\int_0^t \varphi_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2\, ds\right), \quad t \leqslant T, \tag{20}$$

$\int_0^T \varphi_s^2\, ds < \infty$ (P-п. н.), $\mathsf{E}\, N_T = 1$.

Воспользуемся теоремой 1 из § 3g, показывающей, как при абсолютно непрерывной замене меры преобразуется триплет предсказуемых характеристик у семимартингалов.

Пусть $(B^{\mathsf{P}}, C^{\mathsf{P}}, \nu^{\mathsf{P}})$ — триплет процесса S по мере P. Из представления (5) следует, что

$$B_t^{\mathsf{P}} = \int_0^t S_u\mu_u\, du, \quad C_t^{\mathsf{P}} = \int_0^t S_u^2\sigma_u^2\, du, \quad \nu^{\mathsf{P}} \equiv 0. \tag{21}$$

Согласно теореме 1 из § 3g триплет $(B^{\mathsf{Q}}, C^{\mathsf{Q}}, \nu^{\mathsf{Q}})$ по мере Q определяется формулами

$$B_t^{\mathsf{Q}} = B_t^{\mathsf{P}} + \int_0^t \beta_u\, dC^{\mathsf{P}}, \quad C_t^{\mathsf{Q}} = C_t^{\mathsf{P}}, \quad \nu^{\mathsf{Q}} \equiv 0, \tag{22}$$

где

$$\beta_t = \frac{d\langle N^c, S^c\rangle_t}{d\langle S^c, S^c\rangle_t}\cdot\frac{1}{N_t} = \frac{\varphi_t}{S_t\sigma_t}. \tag{23}$$

Тем самым, из формул (21) и (22) получаем, что

$$B_t^{\mathsf{Q}} = \int_0^t S_u[\mu_u + \varphi_u\sigma_u]\, du. \tag{24}$$

Поскольку по мере Q_T процесс $S=(S_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ является локальным мартингалом, имеем $B_t^{\mathsf{Q}}=0$ (P-п. н.), $t\leqslant T$. Поэтому из формулы (24) заключаем, что

$$\varphi_u(\omega) = -\frac{\mu_u(\omega)}{\sigma_u(\omega)}$$

$(\lambda\times\mathsf{P}_T)$-п. н. на $[0, T]\times\Omega$, где λ — мера Лебега.

Отсюда вытекает, что процессы $Z=(Z_t)_{t\leqslant T}$ и $N=(N_t)_{t\leqslant T}$ стохастически неразличимы, что и доказывает единственность такой меры $\widetilde{\mathsf P}_T$, что $\widetilde{\mathsf P}_T\sim\mathsf P_T$ и $S=(S_t,\mathscr F_t)_{t\leqslant T}$ является $\widetilde{\mathsf P}_T$-локальным мартингалом.

6. Рассмотрим вопрос о T-полноте (см. определение в § 2d). Будем предполагать, что выполнены условия приведенной выше теоремы. Предположим также, что $(B(0),S)$-рынок таков, что $B_t(0)\equiv 1$ и процесс $S=(S_t)_{t\leqslant T}$ относительно меры $d\widetilde{\mathsf P}_T=Z_T\,d\mathsf P_T$ является мартингалом. Тогда в силу установленного выше свойства единственности (локально мартингальной) меры $\widetilde{\mathsf P}_T$ и в соответствии с теоремой из § 2d рассматриваемая диффузионная модель является T-полной.

Классическим примером T-полной (и безарбитражной в версиях $\overline{NA}_+$ и $\overline{NA}_g$) модели является, конечно, модель геометрического броуновского движения (6), что во многом и определяет ее популярность в финансовой математике и финансовой инженерии.

§ 4b. Цена хеджирования на полных рынках

1. Представление о хеджировании и способах отыскания «цены хеджирования» для полных и неполных рынков в случае дискретного времени было дано в гл. VI. В общих семимартингальных моделях соответствующее изложение проходит параллельным образом, за исключением разве лишь того, что надо четко оговаривать, какие классы стратегий являются *допустимыми*. Будем придерживаться диффузионной модели $(B(0),S)$-рынка, описанной в п. 4 § 4a, и следовать обозначениям, принятым в этом параграфе.

Несколько видоизменяя введенное выше (§ 2d) понятие T-полноты, будем говорить, что неотрицательное $\mathscr F_T$-измеримое платежное поручение f_T с $\mathsf E\,Z_T f_T<\infty$ является *воспроизводимым* (*достижимым*), если найдется такая стратегия $\pi\in\Pi_+(S)$, что $X_T^\pi=f_T$ ($\mathsf P$-п. н.). Понятно, что если f_T ограничено, то условие $\mathsf E\,Z_T f_T<\infty$ выполнено.

Определение. Если платежное поручение f_T воспроизводимо, то *ценой* (совершенного) *хеджирования европейского типа* (ср. с терминологией в § 1b гл. VI) или просто *ценой* называется величина

$$\mathbb C(f_T;\mathsf P)=\inf\bigl\{x\geqslant 0\colon\ \exists\,\pi\in\Pi_+(S)\text{ с } X_0^\pi=x,\ X_T^\pi=f_T\bigr\}.\tag{1}$$

2. Теорема. *Пусть $\widetilde{\mathsf P}_T$ — единственная мартингальная мера. Тогда*

$$\mathbb C(f_T;\mathsf P)=\mathsf E_{\widetilde{\mathsf P}_T} f_T\quad(=\mathsf E\,Z_T f_T).\tag{2}$$

Доказательство. Если $\pi=(\beta,\gamma)$ является a-допустимой самофинансируемой стратегией, то

$$X_t^\pi=X_0^\pi+\int_0^t\gamma_u\,dS_u,\quad t\leqslant T,\tag{3}$$

причем (согласно теореме Анселя—Стрикера; см. п. 6 § 1а) $X^{\pi}=(X_t^{\pi})_{t\leqslant T}$ является $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-супермартингалом и, значит,

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\, X_T^{\pi} \leqslant X_0^{\pi}. \tag{4}$$

Поэтому если $X_T^{\pi}=f_T$, то $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\, f_T \leqslant X_0^{\pi}$ и

$$\mathsf{E}\, Z_T f_T = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\, f_T \leqslant \mathbb{C}(f_T;\mathsf{P}). \tag{5}$$

Покажем теперь, что существует 0-допустимая самофинансируемая стратегия $\widetilde{\pi}$ с начальным капиталом $X_0^{\widetilde{\pi}}=\mathsf{E}\, Z_T f_T$, которая воспроизводит f_T, т. е. $X_T^{\widetilde{\pi}}=f_T$ (P-п. н.).

Определим процесс

$$X_t = \mathsf{E}(Z_T f_T \,|\, \mathscr{F}_t), \quad t\leqslant T. \tag{6}$$

Ясно, что $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ является мартингалом относительно броуновской фильтрации, и по теореме о представлении (см. § 3с гл. III) найдется такой процесс $\psi=(\psi_t,\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$, $\int_0^T \psi_s^2\, ds<\infty$, что

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s\, dB_s. \tag{7}$$

Заметим, что процесс $(Z_t^{-1}X_t)_{t\leqslant T}$ таков, что он *воспроизводит* f_T:

$$Z_T^{-1}X_T = f_T. \tag{8}$$

Покажем теперь, что найдется такой 0-допустимый самофинансируемый портфель $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$, что

$$X_t^{\widetilde{\pi}} = Z_t^{-1}X_t. \tag{9}$$

Поскольку

$$dZ_t = -Z_t\frac{\mu_t}{\sigma_t}\, dB_t, \tag{10}$$

по формуле Ито (§ 3d гл. III)

$$d(Z_t^{-1}) = Z_t^{-1}\Big(\Big(\frac{\mu_t}{\sigma_t}\Big)^2 dt + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\, dB_t\Big) \tag{11}$$

и

$$\begin{aligned} d(Z_t^{-1}X_t) &= Z_t^{-1}dX_t + X_t d(Z_t^{-1}) + d(Z_t^{-1})\, dX_t = \\ &= Z_t^{-1}(\psi_t\, dB_t) + X_t Z_t^{-1}\Big(\Big(\frac{\mu_t}{\sigma_t}\Big)^2 dt + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\, dB_t\Big) + Z_t^{-1}\Big(\frac{\mu_t}{\sigma_t}\psi_t\Big)dt = \qquad (12)\\ &= Z_t^{-1}\psi_t\Big(dB_t + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\, dt\Big) + X_t Z_t^{-1}\frac{\mu_t}{\sigma_t}\Big(dB_t + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\, dt\Big) = \\ &= S_t(\sigma_t\, dB_t + \mu_t\, dt)\Big[S_t^{-1}Z_t^{-1}\Big(\frac{\psi_t}{\sigma_t} + X_t\frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\Big)\Big]. \qquad (13) \end{aligned}$$

Положим
$$\widetilde{\gamma}_t = S_t^{-1} Z_t^{-1}\left(\frac{\psi_t}{\sigma_t} + X_t \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\right). \tag{14}$$

Тогда видим, что
$$d(Z_t^{-1} X_t) = \widetilde{\gamma}_t \, dS_t, \tag{15}$$

причем
$$\int_0^t \widetilde{\gamma}_u^2 \sigma_u^2 \, du < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad t \leqslant T. \tag{16}$$

(Ср. (16) с условием (18) в § 4a.)

Тем самым, для $t \leqslant T$ имеем
$$Z_t^{-1} X_t = \mathsf{E}(Z_T f_T) + \int_0^t \widetilde{\gamma}_u \, dS_u. \tag{17}$$

Полагая
$$\widetilde{\beta}_t = Z_t^{-1} X_t - \widetilde{\gamma}_t S_t, \tag{18}$$

находим, что (в силу неравенства (15)) стратегия $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ является самофинансируемой с таким капиталом $X^{\widetilde{\pi}} = (X_t^{\widetilde{\pi}})_{t \leqslant T}$, что
$$X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathsf{E}(Z_T f_T) \tag{19}$$

и
$$X_t^{\widetilde{\pi}} = Z_t^{-1} X_t, \quad X_T^{\widetilde{\pi}} = f_T. \tag{20}$$

Из формулы (5), сопоставляя соотношения (19) и (20), получаем требуемое равенство (2). Заметим, что построенная стратегия $\widetilde{\pi}$ является 0-допустимой, поскольку $X_t^{\widetilde{\pi}} \geqslant 0$, $t \leqslant T$. □

§ 4c. Фундаментальное уравнение в частных производных для цены хеджирования

1. Будем рассматривать модель рынка, состоящего из безрискового актива — банковского счета с нулевой процентной ставкой ($B_t(0) \equiv 1$), и рискового актива $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$, динамика которого описывается соотношением (5) в § 4a.

Как следует из теоремы в § 4b, цена $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ хеджирования и соответствующий хеджирующий портфель $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ могут быть найдены из рассмотрения свойств процесса $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$, где
$$Y_t = Z_t^{-1} \, \mathsf{E}(Z_T f_T \mid \mathscr{F}_t). \tag{1}$$

При этом значение
$$Y_0 = \mathsf{E}(Z_T f_T) \tag{2}$$

есть в точности цена $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$,
$$Y_T = f_T \tag{3}$$

и $Y_t = X_t^{\widetilde{\pi}}$, т. е. Y_t есть значение капитала хеджирующего портфеля в момент времени $t \leqslant T$. (Это оправдывает для Y название «процесс-цена хеджирования». Сам же изложенный метод отыскания $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ принято называть, как уже не раз отмечалось, «мартингальным».)

В ряде случаев удается явно найти $\mathsf{E}(Z_T f_T)$ и, тем самым, дать значение цены $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$. В частности, это можно сделать в *модели Блэка—Мертона—Шоулса*, в которой μ_t и σ_t являются константами. (См. далее гл. VIII.)

2. В работах Ф. Блэка и М. Шоулса [44] и Р. Мертона [346], опубликованных в 1973 г., был предложен иной метод отыскания цены $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ и хеджирующей стратегии, основанный на рассмотрении полученного ими так называемого *фундаментального уравнения*.

Суть этого метода, нашедшего широкое распространение в финансовой математике (см., в частности, далее § 5с), состоит в следующем.

Рассмотрим процесс Y_t, определенный формулой (1). Поскольку

$$Z_t^{-1} Z_T = \exp\left(-\int_t^T \frac{\mu(u, S_u)}{\sigma(u, S_u)}\, dB_u - \frac{1}{2}\int_t^T \left(\frac{\mu(u, S_u)}{\sigma(u, S_u)}\right)^2 du\right) \tag{4}$$

и $S = (S_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ — марковский процесс, в предположении, что $f_T = f(T, S_T)$, находим, что процесс $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ является также марковским и Y_t могут быть представлены в виде $Y(t, S_t)$, где $Y(t, x)$ — некоторая измеримая функция.

В работах [44] и [346] авторы отправлялись просто от *предположения*, что хеджирующий портфель $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ существует и его капитал Y_t $(= X_t^{\widetilde{\pi}})$ в момент времени t зависит не от всей прошлой истории $(S_u,\ u \leqslant t)$, а лишь только от значения в последний момент времени, т. е. от S_t.

Другое *априорное предположение* для описываемого метода состоит в том, что функция $Y(t, x)$ считается функцией класса $C^{1,2}$. Это предположение дает возможность применить к $Y(t, S_t)$ формулу Ито, что приводит к следующему *стохастическому дифференциальному уравнению с частными производными* (для простоты записи аргументы у функций опускаются):

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \mu S \frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \frac{\partial Y}{\partial S}\, dB. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь для Y иное представление:

$$Y(t, S_t) = X_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_t + \widetilde{\gamma}_t S_t. \tag{6}$$

В силу самофинансируемости

$$dY = \widetilde{\gamma}_t\, dS_t = \widetilde{\gamma}_t S_t (\mu_t\, dt + \sigma_t\, dB_t). \tag{7}$$

Имея два представления (5) и (7) для специального семимартингала $Y = Y(t, S_t)$ и пользуясь единственностью разложения специальных семимартингалов (см. § 5b гл. III), находим, что выражения при dB (и соответственно при dt) в формулах (5) и (7) совпадают.

Поэтому, поскольку $S_t > 0$, $t > 0$, (P-п. н.)

$$\widetilde{\gamma}_t = \frac{\partial Y}{\partial S}(t, S_t), \tag{8}$$

и, более того, процессы $(\widetilde{\gamma}_t)_{t \leqslant T}$ и $\left(\frac{\partial Y}{\partial S}(t, S_t)\right)_{t \leqslant T}$ стохастически неразличимы.

Сравнивая члены с dt в формулах (5) и (7) и учитывая полученное соотношение (8), получаем, что должно быть выполнено ($(\lambda \times \mathrm{P})$-п. н., λ — мера Лебега на $[0, T]$) равенство

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t) S_t^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}(t, S_t) = 0, \quad 0 \leqslant t < T,$$

которое, в свою очередь, заведомо верно, если функция $Y = Y(t, S)$ удовлетворяет следующему *фундаментальному уравнению* в частных производных:

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t) S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}(t, S) = 0, \quad 0 \leqslant t < T,\ 0 < S < \infty, \tag{9}$$

с краевым условием

$$Y(T, S) = f(T, S), \quad S > 0. \tag{10}$$

(Ср. (9) с *обратным уравнением Колмогорова* (6) в § 3f гл. III.)

Вопрос об отыскании решения этого уравнения, сводящийся, по крайней мере в случае $\sigma(t, s) \equiv \sigma = \mathrm{Const}$, к решению стандартного уравнения Фейнмана—Каца (см. формулу (19) в § 3f гл. III), будет рассматриваться в связи с *формулой Блэка и Шоулса* для случая $f(T, S) = (S - K)^+$ в гл. VIII.

Сейчас же отметим следующие обстоятельства.

Предположим, что решение задачи (9)–(10) *существует* и является *единственным*. Найдем тогда $\widetilde{\gamma}_t$ по формуле (8) и определим $\widetilde{\beta}_t$, полагая

$$\widetilde{\beta}_t = Y(t, S_t) - \widetilde{\gamma}_t S_t. \tag{11}$$

Ясно, что в силу такого определения $\widetilde{\gamma}_t$ и $\widetilde{\beta}_t$, портфель $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ имеет капитал $X_t^{\widetilde{\pi}}$, в точности равный $Y(t, S_t)$.

A priori не ясно, конечно, почему этот портфель $\widetilde{\pi}$, построенный по $Y(t, S)$ — решению задачи (9)—(10), является самофинансируемым, т. е. выполнено соотношение

$$dY(t, S_t) = \widetilde{\gamma}_t \, dS_t. \tag{12}$$

Это, однако, непосредственно следует из уравнений (5) и (9):

$$\begin{aligned} dY(t, S_t) &= S_t\Big(\mu_t \frac{\partial Y}{\partial S}\,dt + \sigma_t \frac{\partial Y}{\partial S}\,dB_t\Big) = \\ &= S_t \frac{\partial Y}{\partial S}(\mu_t\,dt + \sigma_t\,dB_t) = \widetilde{\gamma}_t\,dS_t. \end{aligned} \tag{13}$$

Итак, пусть задача (9)—(10) имеет, и притом единственное, решение $Y(t, S)$.

Тогда для построенного портфеля $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ его капитал $X_t^{\widetilde{\pi}}$ будет равен $Y(t, S_t)$. При этом $X_T^{\widetilde{\pi}} = f(T, S_T)$, а $X_0^{\widetilde{\pi}} = Y(0, S_0)$ будет начальной ценой портфеля $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$.

Следующие эвристические соображения показывают, что найденная (в результате решения задачи (9)—(10)) цена $X_0^{\widetilde{\pi}} = Y(0, S_0)$ обладает свойствами «рациональности», «справедливости», «безарбитражности», а портфель $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ будет оптимальным хеджем.

В самом деле, будем интерпретировать рассматриваемую задачу как задачу построения хеджирующего портфеля продавца европейского опциона-колл, преследующего цель конструирования стратегии, капитал которой в точности воспроизводит платежную функцию $f(T, S_T)$. Из решения задачи (9)—(10) следует, что, продавая этот опцион по цене $C = Y(0, S_0)$, продавец сумеет построить стратегию $\widetilde{\pi}$, капитал $X_T^{\widetilde{\pi}}$ которой будет равен $f(T, S_T)$.

Представим же теперь, что назначаемая стоимость C данного опционного контракта больше, нежели $Y(0, S_0)$, и покупатель согласился на эту цену. Тогда ясно, что это будет арбитражной ситуацией, поскольку продавец получает чистый доход $C - Y(0, S_0)$, выполняя при этом все условия опционного контракта, так как существует хеджирующий портфель, который при начальной цене $Y(0, S_0)$ в точности воспроизводит платежное поручение.

С другой стороны, если стоимость опциона $C < Y(0, S_0)$, то единственность решения задачи (9)—(10) не гарантирует выполнение условий опционного контракта (по крайней мере, в классе марковских стратегий). А если же на рынке ценных бумаг такие опционы торгуются, то их следовало бы скупать и затем продавать по (большей) цене $Y(0, S_0)$.

Описанный метод, основанный на решении фундаментального уравнения, имеет несколько слабых мест, заключающихся в принятии ряда априорных допущений — «марковская структура» цены хеджирующего портфеля $\widetilde{\pi}$, т. е. условие $X_t^{\widetilde{\pi}} = Y(t, S_t)$, принадлежность функции $Y(t, S)$ классу $C^{1,2}$ (для возможности применения формулы Ито).

К счастью, однако, для решения рассматриваемой задачи есть другие методы построения хеджирующих стратегий и отыскания «рациональной» стоимости $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ (например, «мартингальный» метод, изложенный в § 4b), которые показывают и то, что хеджирующий портфель существует, и то, что его цена имеет вид $Y(t, S_t)$ и является достаточно гладкой, а следовательно, уравнение (9) действительно имеет место. Более подробный анализ для стандартного европейского опциона-колл с платежной функцией $f(T, S_T) = (S_T - K)^+$ будет приведен в § 1b гл. VIII с обсуждением и использованием как «мартингального подхода», так и подхода, опирающегося на рассмотренное выше *фундаментальное уравнение*.

3. Приведенные выше рассуждения предполагали, что безрисковый актив (банковский счет) $B(0) = (B_t(0))_{t \geqslant 0}$ таков, что $B_t(0) \equiv 1$. В сущности, это предположение означает, что мы оперируем с дисконтируемыми ценами. Во многих же случаях, однако, приходится оперировать не с «относительными» ценами, которые получаются в результате дисконтирования, а с «абсолютными» ценами. В этой связи остановимся на соответствующих изменениях, предполагая, что (в «абсолютных» единицах) банковский счет $B(r) =$

$=(B_t(r))_{t\geqslant 0}$ имеет вид

$$B_t(r) = B_0(r)\exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right), \tag{14}$$

где $(r_t)_{t\geqslant 0}$ — детерминированная неотрицательная функция (процентная ставка), а рисковый актив (акция) имеет вид $S=(S_t(\mu,\sigma))_{t\geqslant 0}$, где

$$dS_t(\mu,\sigma) = S_t(\mu,\sigma)(\mu_t\,dt + \sigma_t\,dB_t), \tag{15}$$

$S_0(\mu,\sigma)=S_0>0$. (Предположения на μ_t, σ_t и броуновское движение $B=(B_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ те же, что и в § 4a.)

Пусть $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ — самофинансируемый портфель,

$$X_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_t B_t(r) + \widetilde{\gamma}_t S_t(\mu,\sigma). \tag{16}$$

Будем предполагать, что $X_t^{\widetilde{\pi}}$ имеет следующий вид:

$$X_t^{\widetilde{\pi}} = Y(t,S_t),$$

где $S_t=S_t(\mu,\sigma)$ и $Y(t,S)\in C^{1,2}$. Тогда для $Y=Y(t,S)$ получим то же самое уравнение (5).

С другой стороны, поскольку

$$dB_t(r) = r_t B_t(r)\,dt, \tag{17}$$

с учетом самофинансирования находим, что

$$dY(t,S_t) = dX_t^{\widetilde{\pi}} = \big(\widetilde{\gamma}_t\mu_t S_t + \widetilde{\beta}_t r_t B_t(r)\big)\,dt + \widetilde{\gamma}_t\sigma_t S_t\,dB_t. \tag{18}$$

Сравнивая в фомулах (5) и (18) члены с dB, снова получаем, что $\widetilde{\gamma}_t = \dfrac{\partial Y}{\partial S}(t,S_t)$.

Из равенства (16) находим

$$\widetilde{\beta}_t = \frac{1}{B_t(r)}\left(Y(t,S_t) - S_t\frac{\partial Y}{\partial S}(t,S_t)\right),$$

и так же, как при выводе уравнения (9), видим, что члены при dt в формулах (5) и (18) заведомо будут совпадать, если $Y(t,S)$ подчиняются следующему *фундаментальному уравнению*:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = rY, \quad S\in\mathbb{R}_+,\ 0\leqslant t<T, \tag{19}$$

с краевым условием $Y(T,S)=f(T,S)$, $S\in\mathbb{R}_+$.

Полезно сейчас отметить, что $\mu=\mu(t,S)$ *не входит* ни в уравнение, ни в краевое условие и, тем самым, $Y(0,S_0)$ не зависит от μ. На первый взгляд, это может показаться несколько удивительным. (Хотя это свойство может рассматриваться, конечно, как желательное в том смысле, что у разных инвесторов могут быть разные *предпочтения* относительно значений μ и σ, а значит, и разные представления о том, какова истинная динамика процесса цен $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$.) Пожалуй, наилучшее объяснение дается с позиций «мартингального» подхода, согласно которому

$$Y(0, S_0) = \mathbb{C}(f_T; \mathsf{P}) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} f(T, S_T)$$

(см. формулу (2) в § 4b), а относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ процесс $S = (S_t)_{t \leqslant T}$ по теореме Гирсанова для семимартингалов является локальным мартингалом с дифференциалом $dS_t = S_t \sigma_t \, d\widetilde{B}_t$, где $\widetilde{B}$ — некоторое броуновское движение.

Отсюда видим, что цена $\mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ не зависит от значения μ. Однако, зависимость от волатильности σ не «пропадает», поскольку при локально абсолютно непрерывной замене меры квадратические характеристики у непрерывных мартингальных составляющих *не меняются* (см. формулу (6) в § 3g).

4. В связи с описанным выше подходом к определению рациональной стоимости, основанным на обращении к фундаментальному уравнению, вернемся к обсуждавшемуся в § 2d (замечание 2) вопросу о взаимоотношениях концепций *арбитража*, (локально) *мартингальной меры* и *полноты*.

Как видно из изложенного, первоначально предложенный Ф. Блэком и М. Шоулсом [44] и Р. Мертоном [346] метод, основанный на рассмотрении фундаментального уравнения, вовсе не аппелирует к мартингальным мерам, а устанавливает непосредственно полноту и структуру оптимального хеджа, исходя из единственности решения этого уравнения. (Существование здесь мартингальной меры можно извлечь из вероятностного представления получаемого решения; ср. с формулой Фейнмана—Каца в § 3f гл. III.)

В этом отношении метод, применяемый Ф. Блэком, М. Шоулсом и Р. Мертоном, оказывается полезным и в других моделях с «марковской» структурой (см., например, далее § 5c).

5. Арбитраж, полнота и расчеты цены хеджирования в диффузионных моделях облигаций

§ 5a. Модели без арбитражных возможностей

1. В § 4с гл. III были рассмотрены некоторые модели *временно́й структуры* стоимостей семейств облигаций. В частности, там отмечалось, что при описании динамики стоимостей $\mathsf{P}(t, T)$ облигаций имеются два основных подхода — *опосредованный* (когда в качестве «базисного» процесса берется некоторый процесс «процентной ставки» $r = (r(t))_{t \geqslant 0}$ и считается, что $\mathsf{P}(t, T) = F(t, r(t), T))$, и *прямой* (когда $\mathsf{P}(t, T)$ задаются непосредственно как решения стохастических дифференциальных уравнений).

Эти подходы приводят к разным моделям, и в духе той постоянно используемой в книге концепции, что «справедливо» устроенный рынок — это рынок без арбитражных возможностей, естественно выяснить, прежде всего, при каких условиях в этих моделях отсутствует арбитраж и как в таких безарбитражных моделях «явно» представляются стоимости $\mathsf{P}(t, T)$.

2. В случае опосредованного подхода будем считать, что (неотрицательный) *процесс процентной ставки* $r = (r(t))_{t \geqslant 0}$ является решением стохастического дифференциального уравнения (ср. с уравнением (5) в § 4с гл. III)

$$dr(t) = a\big(t, r(t)\big)\, dt + b\big(t, r(t)\big)\, dW_t, \tag{1}$$

порождаемого некоторым винеровским процессом $W = (W_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ (относительно *броуновской* (*винеровской*) *фильтрации* $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ см. § 4a). Будем предполагать также, что коэффициенты $a = a(t, r)$, $b = b(t, r)$ таковы, что уравнение (1) имеет, и притом единственное, сильное решение (§ 3е гл. III).

С процентной ставкой $r = (r(t))_{t \geqslant 0}$ естественным образом связывается *банковский счет*

$$B(r) = (B_t(r))_{t \geqslant 0},$$

где

$$B_t(r) = \exp\left(\int_0^t r(s)\, ds\right) \tag{2}$$

играют, как и в случае с акциями и другими активами, роль некоторого «стандарта» при сравнении стоимостей различных облигаций. (Всюду далее предполагается, что $\int_0^t r(s)\,ds < \infty$ (P-п. н.), $t > 0$.)

Пусть $\mathsf{P}(t, T)$ — стоимость некоторой T-облигации (см. § 4c гл. III), предполагаемой $\mathscr{F}_t$-измеримой при каждом $t \in [0, T)$, $\mathsf{P}(T, T) = 1$. Всюду далее считается, что для каждого $T > 0$ процессы $(\mathsf{P}(t, T))_{t \geqslant 0}$ являются опциональными. Тогда, в частности, $\mathsf{P}(t, T)$ — $\mathscr{F}_t$-измеримые величины для каждого $T > 0$. По самому смыслу $\mathsf{P}(t, T)$ как цены облигаций, удовлетворяющей условию $\mathsf{P}(T, T) = 1$, будем также считать, что $0 \leqslant \mathsf{P}(t, T) \leqslant 1$.

Образуем дисконтированную цену

$$\overline{\mathsf{P}}(t, T) = \frac{\mathsf{P}(t, T)}{B_t(r)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Имея в виду утверждение первой фундаментальной теоремы об отсутствии арбитражных возможностей (§ 2b гл. V), а также веря в то, что «наличие мартингальной меры обеспечивает (или почти обеспечивает) отсутствие арбитражных возможностей», предположим, что *существует* такая мартингальная, или риск-нейтральная мера $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ на $\mathscr{F}_T$, что $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$ $(= \mathsf{P} | \mathscr{F}_T)$ и $(\overline{\mathsf{P}}(t, T), \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ является $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-мартингалом. Тогда из формулы (3) сразу заключаем, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(\overline{\mathsf{P}}(T, T) \,|\, \mathscr{F}_t) = \overline{\mathsf{P}}(t, T), \quad t \leqslant T, \tag{4}$$

и, значит, справедлива следующая

Теорема 1. *Если существует мартингальная мера $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$, относительно которой дисконтируемый процесс $(\overline{\mathsf{P}}(t, T), \mathscr{F}_t)_{t \leqslant T}$ есть $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-мартингал, то*

$$\mathsf{P}(t, T) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) \Big| \mathscr{F}_t\right). \tag{5}$$

Доказательство сразу следует из формулы (4) и условия $\mathsf{P}(T, T) = 1$:

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\frac{1}{B_T(r)} \Big| \mathscr{F}_t\right) = \frac{\mathsf{P}(t, T)}{B_t(r)},$$

что и приводит к представлению (5).

Из равенства (5) видим, что если относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ процесс $r = (r(t))_{t \geqslant 0}$ является марковским, то стоимость $\mathsf{P}(t, T)$ может быть записана в виде

$$\mathsf{P}(t, T) = F(t, r(t), T).$$

При этом «безарбитражность» автоматически накладывает на функцию $F(t, r, T)$ некоторые ограничения (см. далее § 5c).

Замечание 1. Обратим внимание на то, что стоимость $\mathsf{P}(t, T)$ облигаций *не определяется* однозначно по банковскому счету $B(r)$ и требованию отсутствия арбитража (точнее, требованию наличия мартингальной меры). Дело здесь в том, что ниоткуда не следует единственность меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, а это означает, что $\mathsf{P}(t,T)$ может реализоваться (выражением (5)) *разными способами* в зависимости от выбираемой меры $\widetilde{\mathsf{P}}_T$.

Отметим также, что если вместо условия $\mathsf{P}(T,T)=1$ требовать, чтобы $\mathsf{P}(T,T)$ было равно f_T, причем f_T — $\mathscr{F}_T$-измеримая величина и $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left|\dfrac{f_T}{B_T(r)}\right| < \infty$, то из формулы (4) находим, что

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\frac{f_T}{B_T(r)}\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right)=\frac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t(r)}$$

и, значит,

$$\mathsf{P}(t,T)=\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left\{f_T\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)\middle|\,\mathscr{F}_t\right\}. \tag{6}$$

3. Перейдем теперь к рассмотрению не одной фиксированной T-облигации, а *семейства* T-облигаций

$$\mathscr{P}=\big\{\mathsf{P}(t,T);\ 0\leqslant t\leqslant T,\ T>0\big\}.$$

Определение 1. Пусть P — вероятностная мера на $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$, $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_t$. Будем говорить, что мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойством $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\mathrm{loc}}{\sim}\mathsf{P}$ (т. е. $\widetilde{\mathsf{P}}_t\sim\mathsf{P}_t$, $t\geqslant 0$) является *локально мартингальной мерой для семейства* $\mathscr{P}$, если при каждом $T>0$ дисконтируемые цены $\overline{\mathsf{P}}(t,T)=\dfrac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t(r)}$, $t\leqslant T$, являются $\widetilde{\mathsf{P}}_T$-локальными мартингалами.

Для определения понятия *безарбитражного* $(B,\mathscr{P})$-рынка, состоящего из *банковского счета* B и *семейства облигаций* $\mathscr{P}$, надо, прежде всего, остановиться на том, что здесь следует понимать под портфелем (стратегией).

Определение 2 ([38]). Под стратегией $\pi=(\beta,\gamma)$ на $(B,\mathscr{P})$-рынке понимается пара, состоящая из предсказуемого процесса $\beta=(\beta_t)_{t\geqslant 0}$ и семейства конечных борелевских мер (со знаком) $\gamma=(\gamma_t(\,\cdot\,))_{t\geqslant 0}$, обладающих следующими свойствами: при любых t и ω функция множеств $\gamma_t=\gamma_t(dT)$ есть мера на $(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$, носитель которой сосредоточен на $[t,\infty)$, и при каждом $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ процесс $(\gamma_t(A))_{t\geqslant 0}$ является предсказуемым.

Понятна интерпретация β и γ: β_t — это число единиц банковского счета, а $\gamma_t(dT)$ — это число облигаций (на момент времени t) со сроком исполнения в интервале $[T,T+dT]$.

Определение 3. *Капиталом* стратегии π называется (случайный) процесс $X^\pi=(X_t^\pi)_{t\geqslant 0}$,

$$X_t^\pi=\beta_tB_t(r)+\int_t^\infty \mathsf{P}(t,T)\,\gamma_t(dT). \tag{7}$$

(Предполагается, что при всех t и ω интегралы Лебега—Стилтьеса в формуле (7) определены.)

4. Дадим определение самофинансируемого портфеля $\pi = (\beta, \gamma)$ для $(B, \mathscr{P})$-рынков.

С этой целью будем, придерживаясь *прямого* подхода (§ 4c гл. III), предполагать, что динамика цен $\mathsf{P}(t, T)$ описывается *HJM*-моделью:

$$d\mathsf{P}(t, T) = \mathsf{P}(t, T)\big(A(t, T)\, dt + B(t, T)\, dW_t\big), \quad 0 \leqslant t < T,\ T > 0, \tag{8}$$

где $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартный винеровский процесс, играющий роль «источника случайности». К уравнениям (8) надо добавить краевые условия $\mathsf{P}(T, T) = 1$, $T > 0$. (Подробнее об условиях измеримости коэффициентов $A(t, T)$, $B(t, T)$, и условиях существования решений уравнений (8) см. § 4c гл. III).

С учетом уравнения

$$dB_t(r) = r(t)B_t(r)\, dt \tag{9}$$

по формуле Ито находим, что

$$\overline{\mathsf{P}}(t, T) = \frac{\mathsf{P}(t, T)}{B_t(r)} \tag{10}$$

имеет дифференциал (по t при каждом T)

$$d\overline{\mathsf{P}}(t, T) = \overline{\mathsf{P}}(t, T)\big([A(t, T) - r(t)]\, dt + B(t, T)\, dW_t\big). \tag{11}$$

В случае диффузионных (B, S)-рынков стратегия $\pi = (\beta, \gamma)$ с капиталом $X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$ называлась самофинансируемой, если

$$dX_t^\pi = B_t\, dB_t + \gamma_t\, dS_t, \tag{12}$$

т. е.

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_u\, dB_u + \int_0^t \gamma_u\, dS_u. \tag{13}$$

В рассматриваемом случае диффузионных $(B, \mathscr{P})$-рынков стратегию $\pi = (\beta, \gamma)$ с капиталом $X_t^\pi = \beta_t B_t(r) + \int_t^\infty \mathsf{P}(t, T)\, \gamma_t(dt)$ естественно называть *самофинансируемой* [38], если (в символической форме)

$$dX_t^\pi = \beta_t\, dB_t(r) + \int_t^\infty d\mathsf{P}(t, T)\, \gamma_t(dT), \tag{14}$$

что следует понимать в том смысле, что (с учетом равенства (8))

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_s\, dB_s(r) + \int_0^t \left[\int_s^\infty A(s, T)\mathsf{P}(s, T)\, \gamma_s(dT)\right] ds + \\ + \int_0^t \left[\int_s^\infty B(s, T)\mathsf{P}(s, T)\, \gamma_s(dT)\right] dW_s. \tag{15}$$

Если стратегия $\pi = (\beta, \gamma)$ является самофинансируемой, то для дисконтируемого капитала

$$\overline{X}_t^\pi = \frac{X_t^\pi}{B_t(r)} \tag{16}$$

находим, что

$$d\overline{X}_t^\pi = \int_t^\infty d\overline{\mathsf{P}}(t,T)\,\gamma_t(dT). \tag{17}$$

Как и в формуле (14), символическая запись (17) означает (с учетом равенства (11)), что

$$\overline{X}_t^\pi = \overline{X}_0^\pi + \int_0^t \left[\int_s^\infty (A(s,T)-r(s))\overline{\mathsf{P}}(s,T)\,\gamma_s(dT)\right] ds + \\ + \int_0^t \left[\int_s^\infty B(s,T)\overline{\mathsf{P}}(s,T)\,\gamma_s(dT)\right] dW_s. \tag{18}$$

5. Для формулирования условий отсутствия в $(B,\mathscr{P})$-моделях арбитражных возможностей обратимся, прежде всего, к вопросу о существовании мартингальных мер.

С этой целью доопределим функции $A(t,T)$ и $B(t,T)$ для $t>T$, полагая $A(t,T)=r(t)$ и $B(t,T)=B(T,T)$.

Тогда из формулы (11) непосредственно видим, что для того, чтобы последовательность цен $(\overline{\mathsf{P}}(t,T))_{t\leqslant T}$ образовывала при каждом $T>0$ локальный мартингал относительно исходной меры P, необходимым образом должно быть выполнено условие

$$A(t,T) = r(t). \tag{19}$$

Из формулы (8) следует, что в этом случае

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t,T)\big(r(t)\,dt + B(t,T)\,dW_t\big)$$

и

$$d\overline{\mathsf{P}}(t,T) = \overline{\mathsf{P}}(t,T)B(t,T)\,dW_t. \tag{20}$$

Учитывая формулы (14) и (15) из § 4c гл. III и то, что в предположении (19) $\dfrac{\partial A(t,T)}{\partial T}=0$, находим для $f(t,T)$ следующее соотношение:

$$df(t,T) = a(t,T)\,dt + b(t,T)\,dW_t,$$

где

$$a(t,T) = b(t,T)\int_0^T b(t,s)\,ds.$$

Если же условие (19) не выполняется, то естественно (по аналогии со случаем акций) воспользоваться идеями теоремы Гирсанова.

Для наших целей удобной является следующая формулировка.

Пусть на $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$ с $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_t$ помимо исходной меры P существует также такая вероятностная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, что $\widetilde{\mathsf{P}}\overset{\text{loc}}{\sim}\mathsf{P}$, т. е. $\widetilde{\mathsf{P}}_t\sim\mathsf{P}_t$, $t\geqslant 0$.

Обозначим $Z_t=\dfrac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t}$. Поскольку $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ есть броуновская (винеровская) фильтрация, согласно теореме о представлении положительных локальных мартингалов (см. формулу (22) в § 3с гл. III)

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \varphi(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi^2(s)\,ds\right), \tag{21}$$

где $\varphi(s)$ — $\mathscr{F}_s$-измеримые величины, $\int_0^t \varphi^2(s)\,ds < \infty$ (P-п. н.) и $\mathsf{E}\,Z_t = 1$ при каждом $t > 0$.

По теореме Гирсанова (см. § 3е гл. III) процесс $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$,

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \varphi(s)\,ds, \tag{22}$$

является относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ винеровским. Поэтому по этой мере $\widetilde{\mathsf{P}}$,

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t,T)\Big[\big(A(t,T) + \varphi(t)B(t,T)\big)\,dt + B(t,T)\,\widetilde{W}_t\Big] \tag{23}$$

и

$$d\overline{\mathsf{P}}(t,T) = \overline{\mathsf{P}}(t,T)\Big[\big(A(t,T) + \varphi(t)B(t,T) - r(t)\big)\,dt + B(t,T)\,\widetilde{W}_t\Big] \tag{24}$$

(ср. с (8) и (11)).

Отсюда видим (ср. с (11)), что процессы $(\overline{\mathsf{P}}(t,T))_{t\leqslant T}$ являются по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ локальными мартингалами при всех $T > 0$ в том и только том случае, когда выполнено следующее соотношение:

$$A(t,T) + \varphi(t)B(t,T) - r(t) = 0. \tag{25}$$

Из формулы (23) следует, что тогда

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t,T)\big(r(t)\,dt + B(t,T)\,d\widetilde{W}_t\big), \tag{26}$$

где $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$.

6. Определение того, что стратегия $\pi = (\beta, \gamma)$ на $(B, \mathscr{P})$-рынке является *безарбитражной в момент времени* T (скажем, в NA_+-версии), такое же, как и в § 1с. Будем называть $(B, \mathscr{P})$-рынок *безарбитражным*, если он является таковым при *всех* $T > 0$.

Теорема 2. *Пусть нашлась такая мера* $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, *что процесс плотности* $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ *имеет вид* (21) *и выполнено условие* (25).

Тогда при любом $a \geqslant 0$ *в классе таких a-допустимых стратегий* π $(\overline{X}_t^\pi \geqslant -a,\ t > 0)$, *что*

$$\int_0^t \left[\int_s^\infty B(s,T)\,\gamma_s(dT)\right]^2 ds < \infty, \quad t > 0, \tag{27}$$

арбитражные возможности отсутствуют.

Доказательство. При условиях (25) и (27) процесс $\overline{X}^\pi = (\overline{X}_t^\pi)_{t\geqslant 0}$ является, согласно формуле (18), $\widetilde{\mathsf{P}}$-локальным мартингалом.

В силу условия a-допустимости ($\overline{X}_t^\pi \geqslant -a$, $t > 0$) этот процесс есть также супермартингал. Поэтому если $\overline{X}_0^\pi = 0$, то $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}}\, \overline{X}_T^\pi \leqslant 0$ для любого $T > 0$. Но $\widetilde{\mathsf{P}}(\overline{X}_T^\pi \geqslant 0) = \widetilde{\mathsf{P}}(X_T^\pi \geqslant 0) = 1$. Значит, $X_T^\pi = 0$ ($\widetilde{\mathsf{P}}$- и P-п. н.), $T > 0$.

Теорема доказана. □

Замечание 2. Пусть $A(t,T)$, $B(t,T)$ и $r(t)$ таковы, что функция

$$\left(\frac{r(t) - A(t,T)}{B(t,T)}\right)_{t \leqslant T} \tag{28}$$

не зависит от T и для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \left(\frac{r(s) - A(s,T)}{B(s,T)}\right)^2 ds < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{29}$$

В этих предположениях при отыскании меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ со свойством $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$ естественно поступить так.

Обозначим функцию в формуле (28) через $\varphi = \varphi(t)$, $t \leqslant T$, образуем процесс $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ по формуле (21) и предположим, что $\mathsf{E}\, Z_t = 1$, $t > 0$. Тогда для каждого $t > 0$ мера $\widetilde{\mathsf{P}}_t$, $d\widetilde{\mathsf{P}}_t = Z_t\, d\mathsf{P}_t$, является вероятностной и такой, что $\widetilde{\mathsf{P}}_t \sim \mathsf{P}_t$.

Семейство мер $\{\widetilde{\mathsf{P}}_t,\ t \geqslant 0\}$ является согласованным (в том смысле, что $\widetilde{\mathsf{P}}_s = \widetilde{\mathsf{P}}_t \,|\, \mathscr{F}_s$, если $s \leqslant t$), и если на $(\Omega, \mathscr{F})$ *существует* такая вероятностная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, что $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$, то эта мера и будет требуемой мартингальной мерой.

В том случае, когда рассматриваемый $(B, \mathscr{P})$-рынок таков, что для всех T-облигаций время исполнения $T \leqslant T_0$, где $T_0 < \infty$, то в качестве требуемой меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ можно взять меру $\widetilde{\mathsf{P}}_{T_0}$.

Ясно также, что если $Z_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} Z_t$, причем $\mathsf{E}\, Z_\infty = 1$ и $\mathsf{P}(Z_\infty > 0) = 1$, то мера $\widetilde{\mathsf{P}}$ с $d\widetilde{\mathsf{P}} = Z_\infty\, d\mathsf{P}$ будет требуемой мартингальной мерой со свойством $\widetilde{\mathsf{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathsf{P}$.

7. Приведем пример безарбитражной $(B, \mathscr{P})$-модели.

Следуя работам [36], [219], будем отправляться от форвардной процентной ставки $f(t,T)$ со стохастическим дифференциалом (по t при каждом T)

$$df(t,T) = a(t,T)\, dt + b(t,T)\, dW_t, \tag{30}$$

где

$$b(t,T) \equiv \sigma > 0, \tag{31}$$

$$a(t,T) = \sigma^2(T - t), \quad t < T. \tag{32}$$

Тогда уравнение (30) примет вид

$$df(t,T) = \sigma^2(T - t)\, dt + \sigma\, dW_t, \tag{33}$$

откуда получим

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2 t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma W_t, \tag{34}$$

где $f(0,T)$ — «сегодняшняя» форвардная процентная ставка T-облигаций, которая известна на $(B,\mathscr{P})$-рынке (в момент $t=0$).

Из формулы (34) и определения $r(t)=f(t,t)$ следует, что

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W_t. \tag{35}$$

Отсюда понятно, что процентная ставка $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ подчиняется уравнению

$$dr(t) = \left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t\right)dt + \sigma\,dW_t. \tag{36}$$

(Ср. с *моделью Хо и Ли* (12) в § 4с гл. III.) Коэффициенты $A(t,T)$ и $B(t,T)$ в уравнении (8) подсчитываются по коэффициентам $a(t,T)=\sigma^2(T-t)$ и $b(t,T)\equiv\sigma$ в уравнении (33) следующим образом:

$$A(t,T) = r(t) - \int_t^T a(t,s)\,ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T b(t,s)\,ds\right)^2 = r(t), \tag{37}$$

$$B(t,T) = -\sigma(T-t). \tag{38}$$

Тем самым, в рассматриваемой $(B,\mathscr{P})$-модели выполнено условие (19), следовательно, исходная мера P является мартингальной, и арбитраж отсутствует.

Сами цены $\mathsf{P}(t,T)$ могут быть найдены из уравнения

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t,T)\big[r(t)\,dt - \sigma(T-t)\,dW_t\big], \quad t<T,$$

решаемого для каждого $T>0$ при условии $\mathsf{P}(T,T)=1$.

Можно также воспользоваться и тем, что согласно формуле (2) в § 4с гл. III цена имеет вид

$$\mathsf{P}(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds\right), \quad t\leqslant T. \tag{39}$$

Из формулы (34) имеем

$$\int_t^T f(t,s)\,ds = \int_t^T \left[f(0,s) + \sigma^2 t\left(s - \frac{t}{2}\right)\right]ds + \sigma(T-t)W_t =$$
$$= \int_t^T f(0,s)\,ds + \frac{\sigma^2}{2}tT(T-t) + \sigma(T-t)W_t.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(0,s)\,ds - \frac{\sigma^2}{2}tT(T-t) + \sigma(T-t)W_t\right\} =$$
$$= \frac{\mathsf{P}(0,T)}{\mathsf{P}(0,t)}\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}tT(T-t) + \sigma(T-t)W_t\right\}. \tag{40}$$

Отсюда и из формулы (35) находим следующее представление для $\mathsf{P}(t,T)$, выраженное через процентную ставку $r(t)$:

$$\mathsf{P}(t,T)=\frac{\mathsf{P}(0,T)}{\mathsf{P}(0,t)}\exp\Bigl\{(T-t)f(0,T)-\frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2-(T-t)r(t)\Bigr\}. \tag{41}$$

(Ср. с аффинными моделями в § 4c гл. III и далее в § 5c.)

8. В рассмотренных выше «диффузионных» моделях для процентных ставок $r=(r(t))$, форвардных процентных ставок $f=(f(t,T))$ и самих цен облигаций $\mathscr{P}=\{\mathsf{P}(t,T);\ 0\leqslant t\leqslant T,\ T<\infty\}$ предполагалось, что все они порождаются *одним* источником случайности — винеровским процессом $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$.

В обширной литературе, посвященной описанию динамики стоимостей облигаций, рассматриваются и другие модели, в которых вместо одного винеровского процесса $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ берется *многомерный* винеровский процесс $W=(W^1,\dots,W^n)$. Для учета скачкообразных изменений в стоимостях $\mathsf{P}(t,T)$ к рассмотрению привлекаются и другие «источники случайности» — точечные процессы, маркированные точечные процессы, процессы Леви и др.

Отсылая читателя к специальной литературе (см., например, статьи [36], [38], [128] и библиографию к ним), приведем лишь только некоторые модели, в которых учитываются названные «источники случайности».

В работах [36], [38] для обобщения «диффузионных» моделей типа (1) вводятся в рассмотрение модели типа «диффузия со скачками»:

$$dr(t)=a_t\,dt+\sum_{i=1}^{d}b_t^i\,dW_t^i+\int q(t,x)\,\mu(dt,dx), \tag{42}$$

где $\mu=\mu(dt,dx)$ — некоторая целочисленная случайная мера на $\mathbb{R}_+\times\Omega\times E$ и $(W^1,\dots,W^d)$ — независимые винеровские процессы.

Соответствующие изменения вносятся и в модели, описывающие динамику $\mathsf{P}(t,T)$ и $f(t,T)$:

$$\begin{aligned} d\mathsf{P}(t,T)=\mathsf{P}(t,T)\Bigl(A(t,T)\,dt+\sum_{i=1}^{d}B^i(t,T)\,dW_t^i\Bigr)+{}&\\ +\mathsf{P}(t-,T)\int_E q(t,x,T)\,\mu(dt,dx),& \end{aligned} \tag{43}$$

$$df(t,T)=a(t,T)\,dt+\sum_{i=1}^{d}b^i(t,T)\,dW_t^i+\int_E\delta(t,x,T)\,\mu(dt,dx). \tag{44}$$

9. Рассмотрим теперь, следуя работе [128], некоторые модели, основанные на использовании *процессов Леви* как «источников случайности».

С этой целью обратимся сначала к уравнению (20), которое перепишем в виде

$$d\mathsf{P}(t,T)=\mathsf{P}(t,T)\,d\widehat{H}(t,T), \tag{45}$$

где

$$\widehat{H}(t, T) = \int_0^t \big[r(s)\, ds + B(s, T)\, dW_s\big]. \tag{46}$$

Положим также

$$H(t, T) = \int_0^t \left(\left[r(s) - \frac{B^2(s, T)}{2}\right] ds + B(s, T)\, dW_s\right). \tag{47}$$

Тогда (см. формулы (9)—(13) в § 3d) имеют место представления

$$\mathsf{P}(t, T) = \mathsf{P}(0, T)\mathscr{E}(\widehat{H}(\,\cdot, T))_t \tag{48}$$

и

$$\mathsf{P}(t, T) = \mathsf{P}(0, T)e^{H(t,T)}. \tag{49}$$

Учитывая равенство (47), находим, что

$$\overline{\mathsf{P}}(t, T) = \frac{\mathsf{P}(t, T)}{B_t(r)} = \overline{\mathsf{P}}(0, T) \exp\left\{\int_0^t B(s, T)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t B^2(s, T)\, ds\right\}. \tag{50}$$

Если, скажем, функция $B(s, T)$, $s \leqslant T$, является ограниченной, то видим, что выражение в правой части формулы (50) является мартингалом.

Пусть теперь вместо винеровского процесса $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ берется процесс Леви $L = (L_t)_{t\geqslant 0}$ (см. § 1b гл. III). Зададимся вопросом о том, в каком виде надо определять процессы $\widehat{H}(t, T)$ и $H(t, T)$, предполагая, что вместо интегралов $\int_0^t B(s, T)\, dW_s$ теперь рассматриваются интегралы $\int_0^t B(s, T)\, dL_s$, понимаемые как стохастические интегралы по семимартингалу $L = (L_s)_{s\leqslant T}$ с детерминированными и ограниченными функциями $B(s, T)$.

Если функции $B(s, T)$ являются достаточно гладкими по s, то можно воспользоваться и определением Н. Винера:

$$\int_0^t B(s, T)\, dL_s \equiv B(t, T)L_t - \int_0^t \frac{\partial B}{\partial s}(s, T)L_s\, ds.$$

(См. по этому поводу § 3с гл. III и, в связи с процессами Леви, работу [128].)

Пусть

$$\varphi(\lambda) = \lambda b + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} \big(e^{\lambda x} - 1 - \lambda g(x)\big)\, \nu(dx) \tag{51}$$

— кумулянтная функция (см. § 3с) процесса Леви $L = (L_t)_{t\geqslant 0}$.

Будем при этом предполагать, что интеграл в формуле (51) определен и конечен для всех таких λ, что $|\lambda| \leqslant c$, где $c = \sup\limits_{s\leqslant T} |B(s, T)|$.

В соответствии со смыслом кумулянтной функции

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda L_t} = e^{t\varphi(\lambda)}. \tag{52}$$

Пусть $X_t^T = \int_0^t B(s, T)\, dL_s$, $t \leqslant T$. Процесс $X^T = (X_t^T)_{t\leqslant T}$ является процессом с независимыми приращениями, и его триплет $(B^{X^T}, C^{X^T}, \nu^{X^T})$ предсказуемых характеристик может быть найден по триплету (B^L, C^L, ν^L) процесса L

(см. § 5а гл. IX в [128] и [250]). Тогда, применяя формулу Ито, можно получить (см. детали в [128]), что

$$\mathsf{E}\, e^{\lambda X_t^T} = \exp\biggl(\int_0^t \varphi(\lambda B(s,T))\,ds\biggr).$$

Процесс $\bigl(\exp\bigl(\lambda X_t^T - \int_0^T (\lambda B(s,T))\,ds\bigr)\bigr)_{t\leqslant T}$ является мартингалом (ср. с формулой (11) в § 3с). Поэтому, желая иметь процесс $(\overline{\mathsf{P}}(t,T))_{t\leqslant T}$ мартингалом, естественно, обобщая представление (50), полагать

$$\overline{\mathsf{P}}(t,T) = \overline{\mathsf{P}}(0,T)\exp\biggl\{\int_0^t B(s,T)\,dL_s - \int_0^t \varphi(B(s,T))\,ds\biggr\}. \tag{53}$$

Возвращаясь от $\overline{\mathsf{P}}(t,T)$ к процессу $\mathsf{P}(t,T)$, находим, что $(B,\mathscr{P})$-рынок с ценами

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(0,T)e^{H(t,T)}, \quad t\leqslant T,\ T>0, \tag{54}$$

где

$$H(t,T) = \int_0^t B(s,T)\,dL_s + \int_0^t \bigl[r(s) - \varphi(B(s,T))\bigr]\,ds, \tag{55}$$

обладает тем свойством, что относительно исходной меры P дисконтируемые цены $(\overline{\mathsf{P}}(t,T))_{t\leqslant T}$ образуют мартингал и в классе α-допустимых стратегий на этом рынке отсутствуют арбитражные возможности (ср. с теоремой 2).

Используя формулу связи между $\widehat{H}(t,T)$ и $H(t,T)$ (см. формулу (10) в § 3d), находим

$$\widehat{H}(t,T) = H(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t B^2(s,T)\,ds + \sum_{0<s\leqslant t}\bigl(e^{B(s,T)\,\Delta L_s} - 1 - B(s,T)\,\Delta L_s\bigr) \tag{56}$$

и

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t-,T)\,d\widehat{H}(t,T). \tag{57}$$

Замечание 3. Отправляясь от уравнений для $\mathsf{P}(t,T)$, авторы работы [128] Э. Эберлейн и С. Рэйбл исследовали структуру форвардных и процентных ставок $f(t,T)$ и $r(t)$, а также провели детальное рассмотрение *гиперболического процесса Леви*, т. е. процесса Леви, для которого случайная величина L_1 имеет гиперболическое распределение (см. § 1d гл. III).

§ 5b. Полнота

1. Переходя к вопросу о полноте в $(B,\mathscr{P})$-моделях, уместно сейчас напомнить, что в случае *дискретного* времени $n\leqslant N<\infty$ и *конечного* числа d акций полнота на безарбитражных рынках эквивалентна (согласно второй фундаментальной теореме) единственности мартингальной меры и также эквивалентна наличию *S-представления* для мартингалов (по отношению к некоторой мартингальной мере).

В случае диффузионного $(B, \mathscr{P})$-рынка, порождаемого m-мерным винеровским процессом $W = (W^1, \ldots, W^m)$, имеет место многомерный аналог теоремы 2 из § 3c гл. III, согласно которой всякий локальный мартингал $M = (M_t, \mathscr{F}_t)$ допускает *представление*

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \psi_i(s)\, dW_s^i \tag{1}$$

с такими $\mathscr{F}_s$-измеримыми функциями $\psi_i(s)$, что

$$\int_0^t \psi_i^2(s)\, ds < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \qquad t > 0.$$

Как и в случае (B, S)-рынка (см. § 4b), наличие этого представления играет ключевую роль при исследовании вопросов полноты для рассматриваемых $(B, \mathscr{P})$-моделей.

Пусть T_0 — некоторый фиксированный момент времени и f_{T_0} — некоторое $\mathscr{F}_{T_0}$-измеримое платежное поручение. Будем предполагать, что f_{T_0} ограничено ($|f_{T_0}| \leqslant C$), и говорить, что это платежное поручение *воспроизводимо*, если найдется такой самофинансируемый портфель $\pi = (\beta, \gamma)$, что

$$X_{T_0}^{\pi} = f_{T_0} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{2}$$

Если это свойство выполнено для любого T_0 и для любого ограниченного $\mathscr{F}_{T_0}$-измеримого платежного поручения f_{T_0}, то говорят, что $(B, \mathscr{P})$-модель является *полной*.

Пусть цены T-облигаций $\mathsf{P}(t, T)$ подчиняются соотношениям

$$d\mathsf{P}(t, T) = \mathsf{P}(t, T)\left(r(t)\, dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t, T)\, dW_t^i \right). \tag{3}$$

Будем предполагать, что $0 < B_i(t, T) \leqslant C = \mathrm{Const}$.

В этих допущениях исходная мера P является мартингальной в том смысле, что последовательность цен $(\overline{\mathsf{P}}(t, T))_{t \leqslant T}$ образует локальный мартингал и

$$\overline{X}_t^{\pi} = \overline{X}_0^{\pi} + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \left[\int_s^{\infty} B_i(s, T) \overline{\mathsf{P}}(s, T)\, \gamma_s(dT) \right] dW_s^i. \tag{4}$$

Обозначим

$$M_t = \mathsf{E}\left(\frac{f_{T_0}}{B_{T_0}(r)} \,\middle|\, \mathscr{F}_t \right), \qquad t \leqslant T_0. \tag{5}$$

Тогда для $M = (M_t, \mathscr{F}_t)$ имеет место представление (1), и из сопоставления с формулой (4) видим, что для *воспроизведения* значений M_t, $t \leqslant T_0$, с помощью капитала $\overline{X}_t^{\pi}$, $t \leqslant T_0$, некоторого самофинансируемого портфеля π необходимо и достаточно, чтобы (см. [38]) ($(d\mathsf{P}\times dt)$-п. н.) выполнялось равенство

$$\psi_i(t) = \int_t^{T_0} B_i(t,T)\overline{\mathsf{P}}(t,T)\,\gamma_t(dT) \tag{6}$$

для $i=1,\dots,m$ и $t\leqslant T_0$.

Если решение $\{\gamma_t^*(dT),\ t\leqslant T_0,\ T\leqslant T_0\}$ существует, то, полагая

$$\beta_t^* = M_t - \int_t^{T_0} \overline{\mathsf{P}}(t,T)\,\gamma_t^*(dT), \tag{7}$$

находим, что портфель $\pi^*=(\beta^*,\gamma^*)$ будет самофинансируемым и таким, что

$$\overline{X}_t^{\pi} = M_t, \quad t\leqslant T_0.$$

В частности, $\overline{X}_{T_0}^{\pi^*} = \dfrac{f_{T_0}}{B_{T_0}(r)}$, и, значит, $X_{T_0}^{\pi^*} = f_{T_0}$ (P-п. н.), т. е. имеет место T_0-*полнота*.

2. Пример ([36], [38]). Пусть на $(B,\mathscr{P})$-рынке имеется лишь *конечное* число d облигаций с временами исполнения $T_1,\dots,T_d$. (Тем самым, носители мер $\gamma_t(dT)$ могут быть сосредоточены лишь в точках $\{T_1\},\dots,\{T_d\}$.) Поскольку число «источников случайности» равно m, интуитивно понятно, что для воспроизводимости платежного поручения f_{T_0} надо иметь достаточно большое число d облигаций, которое, видимо, не меньше числа «источников» m.

Пусть $d=m$. Тогда система (6) примет следующий вид:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{d} B_i(t,T_j)\overline{\mathsf{P}}(t,T_j)\,\gamma_t(\{T_j\}), \tag{8}$$

где $i=1,\dots,d$.

Из вида системы (8) ясно, что при каждом $t\leqslant T_0$ она имеет решение в том и только том случае, когда матрица $\|B_i(t,T_j)\|$ является обратимой.

Если $m=d=1$, то система (8) превращается в соотношение

$$\psi_1(t) = B_1(t,T_1)\mathsf{P}(t,T_1)\,\gamma_t(\{T_1\}), \tag{9}$$

из которого следует, что

$$\gamma_t^*(\{T_1\}) = \frac{\psi_1(t)}{B_1(t,T_1)\mathsf{P}(t,T_1)} \quad \text{для } t\leqslant T_1$$

и $\gamma_t^*(\{T_1\})=0$ при $T_1<t\leqslant T_0$.

§ 5c. Фундаментальное уравнение в частных производных временно́й структуры цен облигаций

1. В отличие от *прямого* подхода в описании динамики цен (стоимостей) облигаций $\mathsf{P}(t,T)$ с помощью стохастических дифференциальных уравнений (см. § 5a), в *опосредованном* подходе предполагается, что стоимости $\mathsf{P}(t,T)$

имеют вид

$$\mathsf{P}(t,T)=F(t,r(t),T), \tag{1}$$

где $r(t)$ — некоторая «процентная ставка», принимающая, как правило, неотрицательные значения.

В проблематике описания эволюции стоимостей облигаций опосредованный подход (1) был одним из самых первых, но уступил (особенно в теоретических работах) прямому подходу. Но, тем не менее, с точки зрения получения простых аналитических формул, подход, основанный на предположении (1), не потерял свою ценность и остается одним из популярных методов.

2. Следует сразу подчеркнуть, что этот метод «работает» лишь в предположении, что процесс процентной ставки $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ является марковским процессом, удовлетворяющим некоторому стохастическому дифференциальному уравнению

$$dr(t)=a(t,r(t))\,dt+b(t,r(t))\,dW_t \tag{2}$$

или уравнению типа «диффузия со скачками» (см. уравнение (6) в § 4а гл. III).

Будем предполагать, что при каждом $T>0$ функция $F^T=F(t,r,T)$ является (по t и r) функцией класса $C^{1,2}$. Тогда

$$dF^T=\left(\frac{\partial F^T}{\partial t}+a\frac{\partial F^T}{\partial r}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2}\right)dt+b\frac{\partial F^T}{\partial r}\,dW_t. \tag{3}$$

Предполагая, что $F^T>0$, перепишем это уравнение в следующем виде (ср. с уравнением (8) в § 5а):

$$dF^T=F^T\bigl(A^T(t,r(t))\,dt+B^T(t,r(t))\,dW_t\bigr), \tag{4}$$

где

$$A^T(t,r)=\frac{\dfrac{\partial F^T}{\partial t}+a\,\dfrac{\partial F^T}{\partial r}+\dfrac{1}{2}b^2\,\dfrac{\partial^2 F^T}{\partial r^2}}{F^T} \tag{5}$$

и

$$B^T(t,r)=\frac{b\dfrac{\partial F^T}{\partial r}}{F^T}. \tag{6}$$

Чтобы найти дополнительные условия на функции F^T (помимо очевидного условия $F^T(T,r(T))=F(T,r(T),T)=\mathsf{P}(T,T)=1$), будем исходить из того, что искомый $(B,\mathscr{P})$-рынок должен быть *безарбитражным*. Тогда, сопоставляя уравнение (4) с уравнением (8) из § 5а и учитывая соотношение (25) из § 5а, видим, что для выполнения безарбитражности должна найтись такая функция $\varphi(t)$, что при всех t и T, $t\leqslant T$, выполнено соотношение

$$\frac{A^T(t,r)-r}{B^T(t,r)}=-\varphi(t). \tag{7}$$

(Согласно формуле (21) из § 5a по функции $\varphi = \varphi(t)$ строится «мартингальная» мера $\widetilde{\mathsf{P}}$.)

С учетом формул (5) и (6) из равенства (7) приходим к следующему заключению: *если функции $F^T = F(t, r, T)$, $T > 0$, удовлетворяют фундаментальному уравнению*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (a + \varphi b)\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} b^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF, \quad t \leqslant T, \tag{8}$$

с краевым условием $F(T, r, T) = 1$, $T > 0$, $r \geqslant 0$, то $(B, \mathscr{P})$-рынок с ценами $\mathsf{P}(t, T) = F(t, r(t), T)$ является безарбитражным.

Уравнение (8) весьма схоже с *фундаментальным уравнением для цены хеджирования* в случае акций (уравнение (19) в § 4c). Однако между этими уравнениями есть принципиальная разница, состоящая в том, что в уравнение (8) входит функция $\varphi = \varphi(t)$, которая *не определяется* однозначно исходными предпосылками и должна назначаться a priori. Выше отмечалось, что по этой функции определяется мартингальная мера $\widetilde{\mathsf{P}}$, так что ее выбор равносилен, в сущности, выбору некоторой «риск-нейтральной» меры, которая по представлению инвесторов действует на рассматриваемом $(B, \mathscr{P})$-рынке.

3. Следуя обозначениям (11) из § 3f гл. III, посвященного прямым и обратным уравнениям Колмогорова и вероятностному представлению решений уравнений в частных производных, обозначим

$$L(s, r) = (a(s, r) + \varphi(s) b(s, r))\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} b^2(s, r)\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}. \tag{9}$$

Оператор $L(s, r)$ является *обратным* оператором диффузионного марковского процесса $r = (r(t))_{t \geqslant 0}$, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению

$$dr(t) = \big(a(t, r(t)) + \varphi(t) b(t, r(t))\big)\,dt + b(t, r(t))\,dW_t. \tag{10}$$

Переписывая уравнение (8) в виде

$$-\frac{\partial F}{\partial s} = L(s, r)F - rF, \quad s \leqslant T, \tag{11}$$

замечаем, что это уравнение относится (см. § 3f гл. III) к классу *уравнений Фейнмана—Каца* (для диффузионного процесса $r = (r(t))_{t \geqslant 0}$).

Вероятностное решение этого уравнения с краевым условием $F(T, r, T) = 1$ может быть представлено в виде (ср. с формулой (19′) в § 3f гл. III и см. детали, например, в [123], [170], [288])

$$F(s, r, T) = \mathsf{E}_{s,r}\left\{\exp\left(-\int_s^T r(u)\,du\right)\right\}, \tag{12}$$

где $\mathsf{E}_{s,r}$ — математическое ожидание по распределению вероятностей процесса $(r(u))_{s \leqslant u \leqslant T}$ с условием $r(s) = r$.

Заметим, что формула (12), полученная из соображений отсутствия арбитража, вполне согласуется с ранее найденным представлением (5) из § 5a, поскольку в марковском случае

$$\mathsf{E}\left(\exp\left(-\int_s^T r(u)\,du\right)\Big|\mathscr{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(\exp\left(-\int_s^T r(u)\,du\right)\Big|r_s\right).$$

4. Полезно теперь отметить, что все рассмотренные в § 4a, гл. III, модели динамики стохастических процентных ставок (см. (7)—(21)) относятся к *диффузионным марковским моделям* типа (10).

Разнообразие этих моделей вызвано, главным образом, стремлением их авторов получить модели, которые, с одной стороны, поддавались бы аналитическому исследованию и, с другой стороны, согласовывались с наблюдаемыми данными.

В § 4c гл. III отмечалось, что важным и поддающимся аналитическому рассмотрению является тот подкласс (аффинных) моделей ([36], [38], [117], [119]), для которых справедливо представление

$$F\big(t, r(t), T\big) = \exp\big\{\alpha(t,T) - r(t)\beta(t,T)\big\} \tag{13}$$

с детерминированными функциями $\alpha(t,T)$ и $\beta(t,T)$.

Известным примером аффинной модели, приводимой в указанных работах, является модель, получаемая следующим образом.

Предположим, что в формуле (10)

$$a(t,r) + \varphi(t)b(t,r) = a_1(t) + ra_2(t)$$

и

$$b(t,r) = \sqrt{b_1(t) + rb_2(t)}.$$

Тогда уравнение (8) примет следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (a_1 + ra_2)\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}(b_1 + rb_2)\,\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF, \quad t \leqslant T. \tag{14}$$

Если искать решение этого уравнения в виде (13) с $F(T,r,T) = 1$, то найдем, что $\alpha(t,T)$ и $\beta(t,T)$ должны определяться по $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ из следующих соотношений:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} + a_2\beta - \frac{1}{2}b_2\beta^2 = -1, \quad \beta(T,T) = 0 \tag{15}$$

и

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = a_1\beta - \frac{1}{2}b_1\beta^2, \quad \alpha(T,T) = 0. \tag{16}$$

Уравнение (15) есть *уравнение Риккати*. Найдя его решение $\beta(t,T)$, затем из формулы (16) находим $\alpha(t,T)$, что приводит к аффинной модели (13) с найденными функциями $\alpha(t,T)$ и $\beta(t,T)$.

Пример. Рассмотрим *модель Васичека* (см. (8) в § 4a гл. III):

$$dr(t) = (\bar{a} - \bar{b}r(t))\,dt + \bar{c}\,dW_t,$$

где $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — константы.

Тогда из формул (15) и (16) находим, что

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} - \bar{b}\beta = -1, \quad \beta(T, T) = 0, \tag{17}$$

и

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \bar{a}\beta - \frac{1}{2}\bar{c}^2\beta^2, \quad \alpha(T, T) = 0. \tag{18}$$

Следовательно,

$$\beta(t, T) = \frac{1}{\bar{b}}\left(1 - e^{-\bar{b}(T-t)}\right) \tag{19}$$

и

$$\alpha(t, T) = \frac{\bar{c}^2}{2}\int_t^T \beta^2(s, T)\, ds - \bar{a}\int_t^T \beta(s, T)\, ds.$$

Глава VIII

Теория расчетов в стохастических финансовых моделях. Непрерывное время

1. Опционы европейского типа на диффузионных (B, S)-рынках акций

§ 1a. Формула Башелье

1. В идейном отношении материал настоящей главы, относящийся к непрерывному времени, самым непосредственным образом связан с изложением в шестой главе для случая дискретного времени.

При этом наш основной интерес будет связан с опционами, на примере которых можно хорошо проиллюстрировать роль и возможности теории арбитража и методов стохастического исчисления для расчетов в финансовых моделях с непрерывным временем.

2. Ранее (§ 2а гл. I) отмечалось, что Л. Башелье был, безусловно, первым, кто для описания динамики цен акций обратился (см. [12]) к моделям случайных блужданий и их предельным образованиям, которые, говоря современным языком, есть не что иное, как броуновское движение.

Считая, что цены акций флуктуируют как броуновское движение, Л. Башелье привел ряд расчетов для (рациональных) стоимостей некоторых *опционов*, имевших в его время хождение во Франции, и затем сравнил их с реальными рыночными ценами.

Приводимая ниже формула (5) является модернизированной версией ряда «опционных» результатов из работы Л. Башелье [12]. Это и объясняет данное ей название «формулы Башелье».

В линейной *модели Башелье* предполагается, что (B, S)-рынок устроен так, что банковский счет $B = (B_t)_{t \leqslant T}$ не меняется со временем ($B_t \equiv 1$), а цена акции $S = (S_t)_{t \leqslant T}$ описывается *линейным броуновским движением со сносом*:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \leqslant T, \tag{1}$$

где $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ — стандартный винеровский процесс (броуновское движение), заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.

В этой модели цены принимают и *отрицательные* значения, и потому она не может считаться адекватно отражающей реальную картину. Тем не менее, ее рассмотрение представляет интерес с разных точек зрения — как исторически первой *диффузионной* модели и как модели, которая является и *безарбитражной*, и *полной* (см. гл. VII).

Положим

$$Z_t = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 t\right), \tag{2}$$

и пусть $\mathscr{F}_t$, $t \leqslant T$, — σ-алгебра, порожденная значениями винеровского процесса W_s, $s \leqslant t$, и пополненная множествами P-нулевой вероятности.

Определим на $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ новую меру $\widetilde{\mathsf{P}}_T$, полагая (ср. с формулой (8) в § 4a гл. VII)

$$d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T \, d\mathsf{P}_T, \tag{3}$$

где $\mathsf{P}_T = \mathsf{P} | \mathscr{F}_T$.

Заметим, что в рассматриваемой модели мера $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ является *единственной мартингальной мерой* (см. п. 5 § 4a гл. VII), т. е. мерой, обладающей тем свойством, что $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$ и процесс $S = (S_t)_{t \leqslant T}$ является мартингалом. При этом по теореме Гирсанова (§ 3e гл. III или § 3b гл. VII)

$$\operatorname{Law}\big(S_0 + \mu t + \sigma W_t;\, t \leqslant T \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T\big) = \operatorname{Law}\big(S_0 + \sigma W_t;\, t \leqslant T \,|\, \mathsf{P}_T\big). \tag{4}$$

Теорема (формула Башелье). *В модели* (1) *рациональная стоимость* $\mathbb{C}_T = \mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ *стандартного опциона-колл европейского типа с платежной функцией* $f_T = (S_T - K)^+$ *определяется формулой*

$$\boxed{\mathbb{C}_T = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\,\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)}, \tag{5}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, dy.$$

В частности, при $S_0 = K$ *выполняется равенство*

$$\mathbb{C}_T = \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}. \tag{6}$$

Доказательство. Если проанализировать доказательства теорем из § 4a, 4b гл. VII, то можно заметить, что их утверждения, сформулированные для модели (положительных) цен (5) в § 4a, остаются в силе и для рассматриваемой модели (1). (Ключевая формула (14) из § 4b гл. VII примет сейчас вид $\widetilde{\gamma}_t = Z_t^{-1}\left(\frac{\psi_t}{\sigma} + X_t \frac{\mu}{\sigma^2}\right)$, где Z_t определяется формулой (2).) Тем самым, в данном случае (B, S)-рынок является безарбитражным, T-полным и рациональная цена равна

$$\mathbb{C}_T = \mathsf{E}(Z_T f_T) = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(f_T). \tag{7}$$

В силу формулы (4) и свойства автомодельности винеровского процесса имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(S_T-K)^+ &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(S_0+\mu T+\sigma W_T-K)^+ = \\ &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}_T}(S_0-K+\sigma W_T)^+ = \\ &= \mathsf{E}(S_0-K+\sigma\sqrt{T}\,W_1)^+. \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что если ξ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение $\mathscr{N}(0,1)$, то для $a\in\mathbb{R}$, $b\geqslant 0$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(a+b\xi)^+ &= \int_{-a/b}^{\infty}(a+bx)\varphi(x)\,dx = a\Phi\Big(\frac{a}{b}\Big)+b\int_{-a/b}^{\infty}x\varphi(x)\,dx = \\ &= a\Phi\Big(\frac{a}{b}\Big)-b\int_{-a/b}^{\infty}d(\varphi(x)) = a\Phi\Big(\frac{a}{b}\Big)+b\,\varphi\Big(\frac{a}{b}\Big). \end{aligned} \tag{9}$$

Полагая

$$a=S_0-K,\quad b=\sigma\sqrt{T},$$

из соотношений (7), (8) и (9) получаем требуемую формулу (5). □

3. Будем обозначать через $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$ стратегию (из класса самофинансируемых), которая имеет начальный капитал $X_0^{\widetilde{\pi}}=\mathbb{C}_T$ и обладает свойством *воспроизводимости* платежной функции f_T, т. е. пусть $X_T^{\widetilde{\pi}}=f_T$ (P-п. н.).

Из § 4b гл. VII следует, что капитал $X^{\widetilde{\pi}}=(X_t^{\widetilde{\pi}})_{t\leqslant T}$ этой стратегии таков, что

$$X_t^{\widetilde{\pi}} = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(f_T\,|\,\mathscr{F}_t). \tag{10}$$

Поскольку $f_T=(S_T-K)^+$, в силу марковского характера процесса $S=(S_t)_{t\leqslant T}$ получаем

$$\begin{aligned} X_t^{\widetilde{\pi}} &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}((S_T-K)^+\,|\,\mathscr{F}_t) = \\ &= \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\big(((S_t-K)+(S_T-S_t))^+\,|\,S_t\big) = \\ &= \mathsf{E}(a+b\xi)^+ = a\Phi\Big(\frac{a}{b}\Big)+b\varphi\Big(\frac{a}{b}\Big), \end{aligned} \tag{11}$$

где $a=S_t-K$ и $b=\sigma\sqrt{T-t}$.

Для $0\leqslant t\leqslant T$ и $S>0$ введем обозначение

$$C(t,S) = (S-K)\Phi\bigg(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\bigg)+\sigma\sqrt{T-t}\,\varphi\bigg(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\bigg). \tag{12}$$

Тогда из формулы (11) видим, что $X_t^{\widetilde{\pi}}=C(t,S_t)$. В то же самое время

$$dX_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\gamma}_t\,dS_t. \tag{13}$$

По формуле Ито, примененной к $C(t,S_t)$, находим, что

$$dC(t,S_t) = \frac{\partial C}{\partial S}\,dS_t+\bigg(\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\bigg)\,dt. \tag{14}$$

Сопоставляя формулы (14) и (13) и применяя следствие 1 (§ 5b гл. III) к разложению Дуба—Мейера, заключаем, что

$$\widetilde{\gamma}_t = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t). \tag{15}$$

После дифференцирования правой части равенства (12) и простых преобразований получаем, что

$$\widetilde{\gamma}_t = \Phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{16}$$

Соответствующее значение $\widetilde{\beta}_t$ определяется из тех соображений, что

$$C(t, S_t) = \widetilde{\beta}_t + \widetilde{\gamma}_t S_t. \tag{17}$$

Иначе говоря,

$$\widetilde{\beta}_t = C(t, S_t) - \widetilde{\gamma}_t S_t. \tag{18}$$

С учетом формул (12) и (16) находим, что

$$\widetilde{\beta}_t = -K\Phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma\sqrt{T-t}\,\varphi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{19}$$

Интересно отметить следующие особенности в поведении $\widetilde{\gamma}_t$ и $\widetilde{\beta}_t$ при $t \uparrow T$.

Предположим, что в окрестности терминального момента T цены акций удовлетворяют условию $S_t > K$. Тогда из формул (16) и (19) видим, что

$$\widetilde{\gamma}_t \to 1, \quad \widetilde{\beta}_t \to -K \quad \text{при } t \uparrow T. \tag{20}$$

Если же $S_t < K$, то

$$\widetilde{\gamma}_t \to 0, \quad \widetilde{\beta}_t \to 0 \quad \text{при } t \uparrow T. \tag{21}$$

Каждое из этих соотношений представляется вполне естественным.

Действительно, если $S_t < K$ в окрестности момента T, то платежная функция $f_T = 0$, и понятно, что продавцу опциона достаточно иметь в момент времени T капитал $X_T^{\widetilde{\pi}}$, равный нулю, что и будет иметь место при выполнении свойств (21).

Если же в окрестности момента T цены S_t таковы, что $S_t > K$, то $f_T = S_T - K$, и продавцу опциона надо будет иметь капитал $X_T^{\widetilde{\pi}} = S_T - K$. Поскольку $X_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_t + \widetilde{\gamma}_t S_t$, видим, что при выполнении условий (20) продавец получит требуемую сумму, так как $X_t^{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\beta}_t + \widetilde{\gamma}_t S_t \to S_T - K$.

§ 1b. Формула Блэка и Шоулса. I. Мартингальный вывод

1. Как уже отмечалось выше, линейная *модель Башелье*

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t \tag{1}$$

страдает, прежде всего, тем недостатком, что цены S_t могут принимать *отрицательные* значения.

Более реалистична модель *геометрического* (также говорят — *экономического*, [420]) *броуновского движения*, в которой цены представлены в виде

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \tag{2}$$

где

$$H_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t. \tag{3}$$

Иначе говоря,

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}. \tag{4}$$

Применяя формулу Ито (§ 3d гл. III), находим, что

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t).$$

Часто в символической форме это выражение записывают в виде

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t,$$

что подчеркивает аналогию с формулой

$$\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \mu + \sigma \varepsilon_n,$$

использованной выше, например, в модели Кокса—Росса—Рубинштейна в случае дискретного времени (см. § 1е гл. II).

Модель геометрического броуновского движения (2) была предложена в 1965 г. П. Самуэльсоном в работе [420], и именно она легла в основу *модели Блэка—Мертона—Шоулса*, с которой связана знаменитая *формула Блэка и Шоулса* для рациональной стоимости стандартного опциона-колл европейского типа с функцией выплат $f_T = (S_T - K)^+$, полученная в 1973 г. в работах [44] и [346].

2. Итак, будем рассматривать (B, S)-модель Блэка—Мертона—Шоулса, предполагая, что банковский счет $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ эволюционирует так, что

$$dB_t = rB_t\, dt, \tag{5}$$

а цены акций $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ подчиняются геометрическому броуновскому движению:

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t). \tag{6}$$

Таким образом, пусть

$$B_t = B_0 e^{rt}, \tag{7}$$

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}. \tag{8}$$

Теорема (формула Блэка и Шоулса). *В модели* (5)—(6) *рациональная стоимость* $\mathbb{C}_T = \mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ *стандартного опциона-колл европейского типа с платежной функцией* $f_T = (S_T - K)^+$ *определяется формулой*

$$\boxed{\mathbb{C}_T = S_0 \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)}\,. \tag{9}$$

В частности, при $S_0 = K$ *и* $r = 0$ *выполняется равенство*

$$\mathbb{C}_T = S_0\left[\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)\right] \tag{10}$$

и $\mathbb{C}_T \sim K\sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}$ *при* $T \to 0$ (ср. с формулой (6) в § 1a).

Доказательство этой формулы, данное в работах [44] и [346], будет приведено в следующем параграфе. Сейчас же будет дано доказательство, которое естественно назвать «мартингальным» и для которого все необходимое было подготовлено в гл. VII.

Используя те же или аналогичные обозначения, что и в предыдущем параграфе, положим

$$Z_T = \exp\left(-\frac{\mu - r}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right), \tag{11}$$

и пусть $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ — такая мера на $(\Omega, \mathscr{F}_T)$, что $d\widetilde{\mathsf{P}}_T = Z_T\, d\mathsf{P}_T$.

По теореме Гирсанова (§ 3b гл. VII) процесс $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\leqslant T}$, $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$, является по мере $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ винеровским процессом, и, значит,

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(\mu t + \sigma W_t;\ t \leqslant T \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T) &= \mathrm{Law}(rt + \sigma \widetilde{W}_t;\ t \leqslant T \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T) = \\ &= \mathrm{Law}(rt + \sigma W_t;\ t \leqslant T \,|\, \mathsf{P}_T).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(S_t;\ t \leqslant T \,|\, \widetilde{\mathsf{P}}_T) &= \mathrm{Law}\left(S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t};\ t \leqslant T \;\middle|\; \widetilde{\mathsf{P}}_T\right) = \\ &= \mathrm{Law}\left(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t};\ t \leqslant T \;\middle|\; \mathsf{P}_T\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Из теоремы в § 4a гл. VII следует, что в классе 0-допустимых стратегий $\pi = (\beta, \gamma)$, $\int_0^T \gamma_u^2 S_u^2\, du < \infty$ (P-п. н.), рациональная стоимость $\mathbb{C}_T = \mathbb{C}(f_T; \mathsf{P})$ определяется следующей формулой:

$$\mathbb{C}_T = B_0\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{f_T}{B_T}. \tag{13}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $f_T = (S_T - K)^+$, с учетом формулы (12) и свойства автомодельности винеровского процесса ($\mathrm{Law}(W_T) =$

$=\mathrm{Law}(\sqrt{T}\,W_1))$ находим, что

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_T &= B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\,\frac{f_T}{B_T} = e^{-rT}\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}(S_T-K)^+ = \\ &= e^{-rT}\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\Big(S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T}-K\Big)^+ = \\ &= e^{-rT}\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T}\Big(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T}-K\Big)^+ = \\ &= e^{-rT}\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T}\Big(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}W_1}-K\Big)^+ = \\ &= e^{-rT}\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}_T}\Big(S_0 e^{rT}\cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}W_1}-K\Big)^+ = \\ &= e^{-rT}\,\mathsf{E}\Big(a e^{b\xi-\frac{b^2}{2}}-K\Big)^+,\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$a=S_0e^{rT},\quad b=\sigma\sqrt{T},\quad \xi\sim\mathscr{N}(0,1). \tag{15}$$

Простой подсчет показывает, что

$$\mathsf{E}\Big(ae^{b\xi-\frac{b^2}{2}}-K\Big)^+ = a\Phi\left(\frac{\ln\frac{a}{K}+\frac{1}{2}b^2}{b}\right)-K\Phi\left(\frac{\ln\frac{a}{K}-\frac{1}{2}b^2}{b}\right). \tag{16}$$

Тем самым, из формул (14)—(16) следует, что

$$\mathbb{C}_T = S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{a}{K}+\frac{1}{2}b^2}{b}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{a}{K}-\frac{1}{2}b^2}{b}\right).$$

Подставляя сюда значения $a=S_0e^{rT}$ и $b=\sigma\sqrt{T}$, приходим к *формуле Блэка и Шоулса* (9).

Теорема доказана. □

Замечание 1. Если положить

$$y_\pm = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\Big(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\Big)}{\sigma\sqrt{T}},$$

то формуле (9) можно придать более компактный вид:

$$\mathbb{C}_T = S_0\Phi(y_+)-Ke^{-rT}\Phi(y_-). \tag{17}$$

Пусть $\mathbb{P}_T$ — рациональная стоимость стандартного *опциона-пут* европейского типа с платежной функцией $f_T=(K-S_T)^+$. Тогда, поскольку

$$\mathbb{P}_T = \mathbb{C}_T - S_0 + Ke^{-rT}$$

(ср. с «паритет колл-пут» тождеством (9) в § 4d гл. VI), получаем, что

$$\boxed{\mathbb{P}_T = -S_0\left[1-\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\Big(r+\frac{\sigma^2}{2}\Big)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]+Ke^{-rT}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]}, \tag{18}$$

или
$$\mathbb{P}_T = -S_0\Phi(-y_+) + Ke^{-rT}\Phi(-y_-). \tag{19}$$

3. Рассматриваемая модель является T-полной (см. определение 1 в § 2d гл. VII), и существует 0-допустимая стратегия $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$, для которой отвечающий ей капитал $X^{\widetilde{\pi}} = (X_t^{\widetilde{\pi}})_{t\leqslant T}$ таков, что $X_0^{\widetilde{\pi}} = \mathbb{C}_T$ и $X_T^{\widetilde{\pi}}$ в точности воспроизводит f_T:
$$X_T^{\widetilde{\pi}} = f_T \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Согласно теореме из § 4b гл. VII имеем
$$\begin{aligned}
X_t^{\widetilde{\pi}} &= B_t\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\frac{f_T}{B_T}\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) = e^{-r(T-t)}\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}((S_T-K)^+\,|\,\mathscr{F}_t) = \\
&= e^{-r(T-t)}\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\left(\left(S_t\cdot\frac{S_T}{S_t}-K\right)^+\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right) = \\
&= e^{-r(T-t)}\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\Big((S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}-K)^+\,\Big|\,\mathscr{F}_t\Big) = \\
&= e^{-r(T-t)}\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\Big((S_t e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}-K)^+\,\Big|\,S_t\Big) = \\
&= e^{-r(T-t)}\, \mathsf{E}_{\mathsf{P}_T}\Big((S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}-K)^+\,\Big|\,S_t\Big) = \\
&= e^{-r(T-t)}\, \mathsf{E}\Big((S_t e^{r(T-t)} e^{b\xi-\frac{b^2}{2}}-K)^+\,\Big|\,S_t\Big) = \\
&= e^{-r(T-t)}\, \mathsf{E}\Big((a e^{b\xi-\frac{b^2}{2}}-K)^+\,\Big|\,S_t\Big),
\end{aligned} \tag{20}$$

где
$$a = S_t e^{r(T-t)}, \quad b = \sigma\sqrt{T-t}, \quad \xi \sim \mathscr{N}(0,1),$$

при этом S_t и $\xi = W_T - W_t$ являются независимыми относительно исходной меры P.

Учитывая формулу (16), из соотношений (20) находим, что цена $C(t,S_t) = X_t^{\widetilde{\pi}}$ определяется следующим выражением:
$$C(t,S_t) = S_t\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K} + (T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K} + (T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{21}$$

Так же как и в § 1a (см. п. 3), устанавливается, что для оптимального хеджирующего портфеля $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\beta}_t, \widetilde{\gamma}_t)_{t\leqslant T}$ выполняется равенство
$$\widetilde{\gamma}_t = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t). \tag{22}$$

Из формулы (21) после простых преобразований находим, что
$$\widetilde{\gamma}_t = \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K} + (T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \tag{23}$$

(ср. с формулой (16) в § 1a), и, поскольку $\widetilde{\beta}_t B_t + \widetilde{\gamma}_t S_t = C(t, S_t)$,

$$\widetilde{\beta}_t = -\frac{K}{B_0} e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_t}{K} + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{24}$$

Интересно отметить, что $0 < \widetilde{\gamma}_t < 1$ и $\widetilde{\beta}_t$ всегда отрицательно, что означает взятие в долг с банковского счета, но так, что $-\frac{K}{B_0} < \widetilde{\beta}_t$.

Как и в случае *модели Башелье*, здесь также выполнены свойства (20) и (21) из § 1a:

если $t \uparrow T$ и в окрестности момента T цены $S_t > K$, то

$$\widetilde{\gamma}_t S_t \to S_T, \quad \widetilde{\beta}_t B_t \to -K;$$

и

если $t \uparrow T$ и в окрестности момента T цены $S_t < K$, то

$$\widetilde{\gamma}_t S_t \to 0, \quad \widetilde{\beta}_t B_t \to 0.$$

Замечание 2. Рассмотренная выше цена $C(t, S_t)$ зависит, разумеется, также и от параметров r и σ, определяющих исходную модель. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, будем обозначать эту цену $C = C(t, s, r, \sigma)$ $(S_t = s)$.

На практике часто бывает важно иметь представление о том, какова «чувствительность» цены $C(t, s, r, \sigma)$ к изменению параметров t, s, r, σ. Стандартными мерами такой «чувствительности» являются следующие величины (см., например, [36] и [415]):

$$\theta = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial C}{\partial s}, \quad \rho = \frac{\partial C}{\partial r}, \quad V = \frac{\partial C}{\partial \sigma}.$$

(Буква «V» произносится здесь как «вега».)

В случае *модели Блэка и Шоулса* из формулы (21) находим, что

$$\theta = \frac{s\sigma\varphi(Y_+(T-t))}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(y_-(T-t)),$$
$$\Delta = \Phi(y_+(T-t)),$$
$$\rho = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(y_-(T-t)),$$
$$V = s\varphi(y_+(T-t))\sqrt{T-t},$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad y_\pm(T-t) = \frac{\ln \frac{s}{K} + (T-t)\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4. Подсчет величины $\mathbb{C}_T$, данный в формулах (14)—(16), можно произвести несколько иначе, основываясь на идеях подходящего выбора *дисконтирующего процесса* («numéraire»), изложенных в § 1b гл. VII.

С этой целью перепишем формулу (13) с $f_T = (S_T - K)^+$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_T &= B_0 \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{(S_T - K)^+}{B_T} = B_0 \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{(S_T - K)^+}{B_T} I(S_T > K) = \\ &= B_0 \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{S_T}{B_T} I(S_T > K) - Ke^{-rT} \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K). \end{aligned} \tag{25}$$

В силу формулы (12) подсчет $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K)$ не представляет трудностей:

$$\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K) = \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma \sqrt{T}} \right). \tag{26}$$

Для подсчета же $B_0 \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{S_T}{B_T} I(S_T > K)$ введем процесс $\overline{Z} = (\overline{Z}_t)_{t \leqslant T}$,

$$\overline{Z}_t = \frac{S_t / S_0}{B_t / B_0}. \tag{27}$$

Важно отметить, что процесс $\overline{Z}$ является *положительным мартингалом* (по «мартингальной» мере $\widetilde{\mathsf{P}}_T$) и $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \overline{Z}_T = 1$. Тем самым, можно ввести *новую* меру $\overline{\mathsf{P}}_T$, полагая

$$d\overline{\mathsf{P}}_T = \overline{Z}_T \, d\widetilde{\mathsf{P}}_T. \tag{28}$$

(В работе [434] мера $\overline{\mathsf{P}}_T$ называлась *дуальной* (по отношению к $\widetilde{\mathsf{P}}_T$) мартингальной мерой.)

Из формул (7) и (8) находим

$$\overline{Z}_t = e^{\sigma W_t + \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} = e^{\sigma \widetilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$

где $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$, $t \leqslant T$, является винеровским процессом по мере $\widetilde{\mathsf{P}}_T$.

По теореме Гирсанова (§ 3e гл. III или § 3b гл. VII) легко проверяется, что относительно меры $\overline{\mathsf{P}}_T$ винеровским будет процесс

$$\overline{W_t} = \widetilde{W}_t - \sigma t \quad \left(= W_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} - \sigma \right) t \right), \quad t \leqslant T. \tag{29}$$

С учетом введенных обозначений находим, что

$$B_0 \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \frac{S_T}{B_T} I(S_T > K) = S_0 \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} \overline{Z}_T I(S_T > K) = S_0 \, \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K),$$

и, тем самым, из формулы (25) следует, что

$$\mathbb{C}_T = S_0 \, \mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K) - Ke^{-rT} \, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K). \tag{30}$$

По аналогии с формулой (12) имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Law}(S_t; t \leqslant T \,|\, \overline{\mathsf{P}}_T) &= \mathrm{Law}\left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t};\ t \leqslant T \;\middle|\; \overline{\mathsf{P}}_T\right) = \\ &= \mathrm{Law}\left(S_0 e^{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \overline{W_t}};\ t \leqslant T \;\middle|\; \overline{\mathsf{P}}_T\right) = \\ &= \mathrm{Law}\left(S_0 e^{rt} e^{\sigma W_t + \frac{\sigma^2}{2} t};\ t \leqslant T \;\middle|\; \mathsf{P}_T\right). \end{aligned} \tag{31}$$

В частности, если $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, то

$$\operatorname{Law}(S_T \,|\, \overline{\mathsf{P}}_T) = \operatorname{Law}\Big(S_0 e^{(r+\frac{\sigma^2}{2})T} \cdot e^{\sigma\sqrt{T}\,\xi} \;\Big|\; \mathsf{P}_T\Big).$$

Отсюда

$$\mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} I(S_T > K) = \Phi\left(\frac{\ln\dfrac{S_0}{K} + T\Big(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\Big)}{\sigma\sqrt{T}}\right). \tag{32}$$

Из формул (30), (26) и (32) получаем, как и было указано в начале этого пункта, несколько иной вывод *формулы Блэка и Шоулса* (9) для $\mathbb{C}_T$.

§ 1c. Формула Блэка и Шоулса. II. Вывод, основанный на решении фундаментального уравнения

1. Приведем теперь тот оригинальный вывод *формулы Блэка и Шоулса* для *рациональной стоимости* опционных контрактов, который был независимо дан Ф. Блэком и М. Шоулсом [44] и Р. Мертоном [346] в 1973 году.

Естественно, конечно, что первый вопрос, который возникал перед этими авторами, — это вопрос о том, что следует понимать под *рациональной стоимостью*. Замечательная по своей простоте и эффективности их идея состояла в том, что эта стоимость должна быть не чем иным, как той минимальной величиной начального капитала, которая дает продавцу опциона возможность построения хеджирующего портфеля.

Формально это означает следующее.

Пусть рассматривается опционный контракт европейского типа с моментом исполнения T и платежной функцией f_T.

Тогда под *рациональной* (*справедливой*) *стоимостью* Y_t такого опционного контракта, заключаемого в момент $0 \leqslant t \leqslant T$, понимается (согласно *определению* Ф. Блэка, М. Шоулса и Р. Мертона) цена *совершенного* хеджирования европейского типа

$$\mathbb{C}_{[t,T]} = \inf\big\{x\colon \exists\, \pi,\, X_t^\pi = x \text{ и } X_T^\pi = f_T \ (\mathsf{P}\text{-п. н.})\big\}. \tag{1}$$

(Ср. с соответствующими определениями в § 1b гл. VI и § 4b гл. VII; величина $\mathbb{C}_{[0,T]}$ ранее обозначалась также $\mathbb{C}_T$.)

Вообще говоря, a priori не ясно, существуют ли *совершенные* хеджи.

Из результатов § 4a, b гл. VII следует, что в рассматриваемой модели (B, S)-рынка такие хеджи действительно существуют и, более того, $Y_t = \mathbb{C}_{[t,T]}$ совпадает с величиной $B_t\, \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\Big(\dfrac{f_T}{B_T}\Big|\mathscr{F}_t\Big)$, где $\widetilde{\mathsf{P}}_T$ — *мартингальная* мера, благодаря чему данный в § 1b вывод был назван «мартингальным».

В работах же [44], [346], предшествующих «мартингальному» подходу, метод расчета величин $Y_t = \mathbb{C}_{[t,T]}$ был иным и состоял в следующем.

В силу «марковского» характера и процесса $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$, и платежной функции $f_T = (S_T - K)^+$ естественно *предположить*, что $\mathscr{F}_t$-измеримая величина

Y_t зависит от «прошлого» только через значение S_t:

$$Y_t = Y(t, S_t).$$

В предположении, что определенная на $[0, T) \times (0, \infty)$ функция $Y = Y(t, S)$ является к тому же достаточно гладкой (точнее, $Y \in C^{1,2}$), авторы работ [44] и [346] получили следующее *фундаментальное уравнение*:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = rY \tag{2}$$

с краевым условием

$$Y(T, S) = (S - K)^+. \tag{3}$$

(Вывод уравнения (2) дан в § 4c гл. VII; см. там уравнение (19).)

Следующий шаг на пути к *формуле Блэка и Шоулса* (т. е. к формуле для значения $Y(0, S_0)$) состоит в том, чтобы найти решение задачи (2)—(3).

Уравнение (2) относится к *уравнениям типа Фейнмана—Каца* (см. формулу (19) в § 3f гл. III) и может быть решено стандартной техникой решения таких уравнений.

Введем новые переменные

$$\theta = \sigma^2(T - t), \tag{4}$$

$$Z = \ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) \tag{5}$$

и положим

$$V(\theta, Z) = e^{r(T-t)} Y(t, S). \tag{6}$$

В новых переменных задача (2)—(3) эквивалентна задаче

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0, \tag{7}$$

$$V(0, Z) = (e^Z - K)^+. \tag{8}$$

Уравнение (7) является *уравнением теплопроводности*, и согласно формуле (17′) из § 3f гл. III решение задачи (7)—(8) определяется выражением

$$V(\theta, Z) = \mathsf{E}(e^{W_\theta + Z} - Kx)^+, \tag{9}$$

где $W = (W_\theta)$ — стандартный винеровский процесс.

Обозначим

$$a = e^{Z + \frac{\theta}{2}}, \quad b = \sqrt{\theta}, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(e^{W_\theta + Z} - K)^+ &= \mathsf{E}(e^Z \cdot e^{\sqrt{\theta} W_1} - K)^+ = \\ &= \mathsf{E}\Big(e^{Z + \frac{\theta}{2}} \cdot e^{\sqrt{\theta} W_1 - \frac{(\sqrt{\theta})^2}{2}} - K\Big)^+ = \\ &= \mathsf{E}\Big(ae^{b\xi - \frac{b^2}{2}} - K\Big)^+. \end{aligned} \tag{10}$$

Применяя формулу (16) из § 1b, находим, что

$$\mathsf{E}(e^{W_\theta+Z}-K)^+ = e^{Z+\frac{\theta}{2}}\Phi\Bigl(\frac{Z-\ln K+\theta}{\sqrt{\theta}}\Bigr)-K\Phi\Bigl(\frac{Z-\ln Z}{\sqrt{\theta}}\Bigr). \tag{11}$$

Наконец, с учетом обозначений (4) и (5) из соотношений (6) и (11) приходим к формуле

$$\begin{aligned} Y(t,S) &= e^{-r(T-t)}V(\theta,Z) = \\ &= S\Phi\Biggl(\frac{\ln\frac{S}{K}+(T-t)\bigl(r+\frac{\sigma^2}{2}\bigr)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Biggr)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\Biggl(\frac{\ln\dfrac{S}{K}+(T-t)\bigl(r-\frac{\sigma^2}{2}\bigr)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Biggr). \end{aligned} \tag{12}$$

(Ср. с формулой (21) в § 1b.)

Полагая здесь $t=0$ и $S=S_0$, получаем искомую *формулу Блэка и Шоулса* (9). В § 1b было показано, что портфель $\widetilde{\pi}=(\widetilde{\beta}_t,\widetilde{\gamma}_t)_{t\leqslant T}$, $\widetilde{\gamma}_t=\dfrac{\partial Y}{\partial S}(t,S_t)$, $\widetilde{\beta}_t B_t = Y(t,S_t)-S_t\widetilde{\gamma}_t$, является хеджем, для которого капитал $X_T^{\widetilde{\pi}}$ в точности воспроизводит платежное поручение $f_T=(S_T-K)^+$.

2. В заключение отметим следующие обстоятельства, касающиеся двух приведенных выводов *формулы Блэка и Шоулса*.

«Мартингальный» вывод, данный в § 1b, был основан на том, что в рассматриваемой модели (B,S)-рынка существовала, и притом единственная, мартингальная мера. Это определило безарбитражность рассматриваемой модели и дало возможность рассчитывать рациональную стоимость $\mathbb{C}_T$ по формуле $\mathbb{C}_T=B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\dfrac{f_T}{B_T}$, которая (для $f_T=(S_T-K)^+$) воплотилась в *формулу Блэка и Шоулса*.

Вывод, основанный на решении фундаментального уравнения, приводит к той же самой формуле. Интересно поэтому подчеркнуть, что в этом выводе идеи безарбитражности и совершенного хеджирования выразились в том, что в силу единственности задачи (2)—(3) найденная цена $Y(0,S_0)$ автоматически оказывается «безарбитражной», «справедливой»: если назначаемая цена опциона меньше $Y(0,S_0)$, то продавец опциона не сможет, вообще говоря, выполнить свои контрактные обязательства, а если больше $Y(0,S_0)$, то продавец заведомо будет иметь чистый доход («free lunch»). Подробнее см. § 1b гл. V.

§ 1d. Формула Блэка и Шоулса. III. Модель с дивидендами

1. Будем снова предполагать, что (B,S)-рынок описывается соотношениями (5) и (6) из § 1b, но происходит выплата дивидендов от обладания акцией (ср. с п. 6 в § 1a гл. V).

Более точно, это означает следующее. Если $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ — *рыночная цена* акции, то капитал $\widetilde{S}=(\widetilde{S}_t)_{t\geqslant 0}$ обладателя *акции с учетом выплачиваемых дивидендов* считается эволюционирующим (с учетом дисконтирования) в соответствии со следующим правилом:

$$d\left(\frac{\widetilde{S}_t}{B_t}\right) = d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) + \frac{\delta S_t\,dt}{B_t}. \tag{1}$$

Здесь $\delta \geqslant 0$ есть параметр, характеризующий интенсивность (rate) выплаты дивидендов. Если $B_t \equiv 1$, то из формулы (1) следует, что

$$d\widetilde{S}_t = dS_t + \delta S_t\,dt, \tag{2}$$

и, значит, приращение капитала обладателя акции за время dt складывается из изменения dS_t рыночной ее цены и дивидендов $\delta S_t\,dt$, пропорциональных S_t.

Поскольку $dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$ и

$$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t}\big((\mu - r)\,dt + \sigma\,dW_t\big), \tag{3}$$

из формулы (1) следует, что

$$d\left(\frac{\widetilde{S}_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t}\big[(\mu - r + \delta)\,dt + \sigma\,dW_t\big]. \tag{4}$$

Обозначим

$$\overline{W}_t = W_t + \frac{\mu - r + \delta}{\sigma} t \tag{5}$$

и

$$\overline{Z}_T = \exp\left(-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T\right). \tag{6}$$

Тогда если определить меру $\overline{\mathsf{P}}_T$, полагая

$$d\overline{\mathsf{P}}_T = \overline{Z}_T\,d\mathsf{P}_T,$$

то в силу теоремы Гирсанова (см. § 3е гл. III) найдем, что процесс $\overline{W} = (\overline{W}_t)_{t \leqslant T}$ по мере $\overline{\mathsf{P}}_T$ будет винеровским. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Law}\big(\mu t + \sigma W_t;\ t \leqslant T \,|\, \overline{\mathsf{P}}_T\big) &= \operatorname{Law}\big((r - \delta)t + \sigma \overline{W}_t;\ t \leqslant T \,|\, \overline{\mathsf{P}}_T\big) = \\ &= \operatorname{Law}\big((r - \delta)t + \sigma W_t;\ t \leqslant T \,|\, \mathsf{P}_T\big) \end{aligned}$$

и

$$\operatorname{Law}\big(S_t;\ t \leqslant T \,|\, \overline{\mathsf{P}}_T\big) = \operatorname{Law}\big(S_0 e^{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t};\ t \leqslant T \,|\, \mathsf{P}_T\big). \tag{7}$$

Пусть $X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t \widetilde{S}_t$, $t \leqslant T$, есть капитал самофинансируемой стратегии $\pi = (\beta, \gamma)$. Поскольку по мере $\overline{\mathsf{P}}_T$ дисконтированный капитал $\left(\frac{X_t^\pi}{B_t}\right)_{t \leqslant T}$ является мартингалом в классе 0-допустимых стратегий с $\int_0^T \gamma_u^2 \widetilde{S}_u^2\,du < \infty$ (P-п. н.), получаем, что

$$\mathsf{E}_{\overline{\mathsf{P}}_T} \frac{X_T^\pi}{B_T} = \frac{X_0^\pi}{B_0}.$$

Отсюда выводим (ср. с формулой (13) в § 1b), что рациональная стоимость опциона-колл $\mathbb{C}_T(\delta;r)$ определяется формулой

$$\mathbb{C}_T(\delta;r) = B_0\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\,\frac{f_T}{B_T}, \tag{8}$$

где $f_T = (S_T - K)^+$.

С учетом равенства (7) и формулы (16) в § 1b из соотношения (8) находим, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_T(\delta;r) &= e^{-rT}\,\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_T}\Big(S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T} - K\Big)^+ = \\
&= e^{-rT}\,\mathsf{E}\Big(S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T} - K\Big)^+ = \\
&= e^{-rT}\,\mathsf{E}\Big(S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}W_1} - K\Big)^+ = \\
&= S_0 e^{-\delta T}\,\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T\Big(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\Big)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\,\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T\Big(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\Big)}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Пусть также $\mathbb{P}_T(\delta;r)$ — соответствующая стоимость опциона-пут при наличии дивидендов. Нетрудно убедиться, что стоимости $\mathbb{C}_T(\delta;r)$ и $\mathbb{P}_T(\delta;r)$ связаны (ср. с (9) в § 4d гл. VI) следующим тождеством «паритет колл-пут»:

$$\mathbb{P}_T(\delta;r) = \mathbb{C}_T(\delta;r) - S_0 e^{-\delta T} + Ke^{-rT}. \tag{10}$$

Сопоставляя формулу (9) с формулой (9) из § 1b для $\mathbb{C}_T(0;r)$ $(\equiv \mathbb{C}_T)$ и учитывая равенство (10), приходим к следующему результату.

Теорема. *Рациональные стоимости $\mathbb{C}_T(\delta;r)$ и $\mathbb{P}_T(\delta;r)$ опциона-колл и опциона-пут при наличии дивидендов от акции задаются формулами*

$$\boxed{\mathbb{C}_T(\delta;r) = e^{-\delta T}\,\mathbb{C}_T(0;r-\delta)} \tag{11}$$

и

$$\boxed{\mathbb{P}_T(\delta;r) = e^{-\delta T}\,\mathbb{P}_T(0;r-\delta)}\,, \tag{12}$$

где $\mathbb{C}_T(0;r-\delta)$ и $\mathbb{P}_T(0;r-\delta)$ определяются правыми частями формул (9) *и* (18) *из* § 1b *(случай без дивидендов) с заменой r на $r-\delta$.*

2. Опционы американского типа на диффузионных (B, S)-рынках акций. Случай бесконечного временно́го горизонта

§ 2а. Стандартный опцион покупателя

1. При оперировании с опционами и другими производными финансовыми инструментами следует четко различать два случая: первый, когда временно́й параметр t принадлежит *конечному* интервалу $[0, T]$, и второй, когда t принадлежит *бесконечному* интервалу $[0, \infty)$. Второй случай является, конечно, некоторой идеализацией, но значительно более прост для математического анализа, нежели первый, в котором принятие тех или иных решений в момент времени t существенно зависит от величины $T - t$ *оставшегося времени* до завершения действия контрактов.

Этим объясняется то, что последующее изложение начинается с рассмотрения второго случая. Случай конечного временно́го интервала $[0, T]$ рассматривается в разделе 3.

2. Будем предполагать, что на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ задан стандартный винеровский процесс $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ и диффузионный (B, S)-рынок имеет следующую структуру:

$$dB_t = rB_t\,dt, \quad B_0 > 0, \tag{1}$$

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t), \quad S_0 > 0. \tag{2}$$

Для *стандартного дисконтируемого опциона покупателя* (опциона-колл) функция платежа имеет по определению следующую структуру:

$$f_t = e^{-\lambda t} g(S_t), \tag{3}$$

где $g(x) = (x - K)^+$, $x \in E = (0, \infty)$.

По аналогии со случаем дискретного времени положим

$$V^*(x) = \sup B_0\, \widetilde{\mathsf{E}}_x \frac{f_\tau}{B_\tau}, \tag{4}$$

где sup берется по классу всех конечных моментов остановки

$$\mathfrak{M}_0^\infty = \{\tau = \tau(\omega)\colon\ 0 \leqslant \tau(\omega) < \infty,\ \omega \in \Omega\} \tag{5}$$

и $\widetilde{\mathsf{E}}_x$ обозначает математическое ожидание по мартингальной мере $\widetilde{\mathsf{P}}_x$, относительно которой процесс $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ имеет стохастический дифференциал

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t), \quad S_0 = x. \tag{6}$$

Чтобы упростить обозначения, будем с самого начала полагать $\mu = r$. При этом допущении символ «$\widetilde{\ }$» у $\widetilde{\mathsf{P}}_x$ и $\widetilde{\mathsf{E}}_x$ можно опускать.

Итак, пусть

$$V^*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda + r)\tau}(S_\tau - K)^+. \tag{7}$$

Для многих целей имеет смысл рассматривать наряду с классом $\mathfrak{M}_0^\infty$ также класс

$$\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty = \{\tau = \tau(\omega)\colon\ 0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant \infty,\ \omega \in \Omega\}$$

тех марковских моментов, которые могут принимать и значения $+\infty$, и полагать

$$\overline{V}^*(x) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda + r)\tau}(S_\tau - K)^+ I(\tau < \infty). \tag{8}$$

Отыскание функций $V^*(x)$ и $\overline{V}^*(x)$ имеет самое прямое отношение к расчетам рассматриваемого стандартного опциона-колл американского типа, поскольку значения $V^*(x)$ и $\overline{V}^*(x)$ в точности совпадают со значениями рациональных стоимостей в предположении, что покупатель опциона может выбирать момент предъявления опциона или в классе $\mathfrak{M}_0^\infty$, или в классе $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ и $S_0 = x$. (Случай $\tau = \infty$ соответствует *не*предъявлению опциона к исполнению.) Доказательство этого утверждения в случае дискретного времени проводится так же, как и доказательство теоремы 1 в § 2с гл. VI. В случае же непрерывного времени, в сущности, мало что меняется; подробнее см., например, [33], [265], [281]. К тому же если τ^* и $\overline{\tau}^*$ — оптимальные моменты в решении задач (7), (8), то они будут оптимальными моментами предъявления покупателем опционов (в классах $\mathfrak{M}_0^\infty$ или $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$).

3. Приступая к рассмотрению задач об оптимальной остановке (7) и (8), выделим сначала (неинтересный) случай $\lambda = 0$.

В этом случае

$$e^{-rt}(S_t - K)^+ = \left(S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t} - K e^{-rt}\right)^+,$$

откуда видно, что процесс $(e^{-rt}(S_t - K)^+)_{t \geqslant 0}$ является *субмартингалом*, и, значит, если $\tau \in \mathfrak{M}_0^T$, т. е. $\tau(\omega) \leqslant T$, $\omega \in \Omega$, то

$$\mathsf{E}_x\, e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+ \leqslant \mathsf{E}_x\, e^{-rT}(S_T - K)^+ \leqslant x. \tag{9}$$

Согласно *формуле Блэка и Шоулса* (см. (9) в § 1b)

$$\mathsf{E}_x\, e^{-rT}(S_T - K)^+ \to x, \quad T \to \infty, \tag{10}$$

при любом $r \geqslant 0$.

Поскольку в рассматриваемом случае $V^*(x) = \lim\limits_{T\to\infty} V_T^*(x)$, где

$$V_T^*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^T} \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\tau}(S_\tau - K)^+ \tag{11}$$

(см. [441, гл. 3] и ср. с § 5b гл. VI), из формул (9) и (10) заключаем, что если $\lambda = 0$ и $r \geqslant 0$, то «наблюдения надо продолжать так долго, как это возможно». Точный смысл этого высказывания состоит в том, что для каждого $x > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой детерминированный момент $T_{x,\varepsilon}$, для которого

$$\mathsf{E}_x\, e^{-rT_{x,\varepsilon}}(S_{T_{x,\varepsilon}} - K)^+ \geqslant x - \varepsilon.$$

4. Сформулируем теперь основные результаты относительно задач об оптимальной остановке (7) и (8) для случая $\lambda > 0$.

Теорема. *Если $\lambda > 0$, то для всякого $x \in (0, \infty)$ выполняется равенство*

$$V^*(x) = \overline{V}^*(x) = \begin{cases} x - K, & x \geqslant x^*, \\ c^* x^{\gamma_1}, & x < x^*, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}}, \tag{13}$$

$$c^* = \gamma_1^{-\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1 - 1}{K}\right)^{\gamma_1 - 1}, \tag{14}$$

$$x^* = K\,\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}. \tag{15}$$

В классе $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ существует оптимальный момент, и в качестве такового может быть взят момент

$$\tau^* = \inf\{t \geqslant 0 \colon S_t \geqslant x^*\}. \tag{16}$$

При этом

$$\mathsf{P}_x(\tau^* < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \geqslant \dfrac{\sigma^2}{2} \text{ или } x \geqslant x^*, \\ \left(\dfrac{x}{x^*}\right)^{1 - \frac{2r}{\sigma^2}}, & \text{если } r < \dfrac{\sigma^2}{2} \text{ и } x < x^*. \end{cases} \tag{17}$$

Ниже будут приведены два доказательства этих утверждений. Первое основано на «марковском» подходе к задачам об оптимальной остановке и в идейном отношении такое же, как и доказательство соответствующего результата для случая дискретного времени (см. § 5b гл. VI). Второе основано на некоторых «мартингальных» соображениях, использованных в работе [32], в соединении с идеями перехода к «дуальной» вероятностной мере (см. п. 4 § 1b).

5. Первое доказательство. Рассмотрим несколько более общие задачи об оптимальной остановке, нежели задачи (7) и (8).

Пусть

$$V^*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, e^{-\beta\tau} g(S_\tau), \tag{18}$$

$$\overline{V}^*(x) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, e^{-\beta\tau} g(S_\tau) I(\tau < \infty) \tag{19}$$

— цены в задачах об оптимальной остановке марковского процесса $S = (S_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P}_x)_{t \geqslant 0}$, $x \in E = (0, \infty)$, где P_x — распределение вероятностей процесса S с $S_0 = x$, $\beta > 0$, и $g = g(x)$ — некоторая борелевская функция.

Если $g = g(x)$ является непрерывной неотрицательной функцией, то согласно общей теории оптимальных правил остановки марковских процессов (см. [441, гл. 3] и ср. с теоремой 4 в § 2a гл. VI) справедливы следующие утверждения:

(a) $V^*(x) = \overline{V}^*(x)$, $x \in E$; (20)

(b) $V^*(x)$ является *наименьшей β-эксцессивной мажорантой* функции $g(x)$, т. е. наименьшей среди таких функций $V(x)$, что

$$V(x) \geqslant g(x), \quad V(x) \geqslant e^{-\beta t} T_t V(x), \tag{21}$$

где $T_t V(x) = \mathsf{E}_x\, V(S_t)$;

(c)
$$V^*(x) = \lim_n \lim_N Q_n^N g(x), \tag{22}$$

где

$$Q_n g(x) = \max\bigl(g(x), e^{-\beta \cdot 2^n} T_{2^{-n}} g(x)\bigr); \tag{23}$$

(d) если $\mathsf{E}_x\bigl[\sup_t e^{-\beta t} g(S_t)\bigr] < \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ момент

$$\tau_\varepsilon = \inf\bigl\{t\colon V^*(S_t) \leqslant e^{-\beta t} g(S_t) + \varepsilon\bigr\} \tag{24}$$

является ε-оптимальным моментом остановки в классе $\mathfrak{M}_0^\infty$, т. е. $\mathsf{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$, $x \in E$, и $V^*(x) - \varepsilon \leqslant \mathsf{E}_x\, e^{-\beta\tau_\varepsilon} g(S_{\tau_\varepsilon})$;

(e) если момент

$$\tau_0 = \inf\bigl\{t\colon V^*(S_t) \leqslant e^{-\beta t} g(S_t)\bigr\}$$

является моментом остановки ($\mathsf{P}_x(\tau_0 < \infty) = 1$, $x \in E$), то он *оптимален* в классе $\mathfrak{M}_0^\infty$:

$$V^*(x) = \mathsf{E}_x\, e^{-\beta\tau_0} g(S_{\tau_0}), \quad x \in E;$$

при этом если некоторый другой момент остановки τ_1 также является оптимальным, то $\mathsf{P}_x(\tau_0 \leqslant \tau_1) = 1$, $x \in E$, т. е. τ_0 является *наименьшим* оптимальным моментом остановки.

Пусть $C^* = \{x \in E : V^*(x) > g(x)\}$ и $D^* = \{x \in E : V^*(x) = g(x)\}$.

Из формул (22) и (23) нетрудно вывести (ср. с § 5b гл. VI), что функция $V^* = V^*(x)$ имеет довольно-таки простую структуру, являясь на $E = (0, \infty)$ *выпуклой вниз* функцией, мажорирующей функцию $g = g(x)$. При этом существует x^* такое, что $C^* = \{x : x < x^*\}$ и $D^* = \{x : x \geqslant x^*\}$.

Тем самым, решение задач (7), (8) сводится к отысканию значения x^* и, разумеется, функции $V^*(x)$ $(= \overline{V}^*(x))$.

Если проанализировать рассуждения, проведенные в п. 6 § 5b гл. VI при решении соответствующей задачи в случае дискретного времени, то станет вполне естественной идея о том, что требуемое значение x^* и $V^*(x)$ — *наименьшая* $(\lambda + r)$-эксцессивная мажоранта функции $g(x)$, должны быть решениями следующей *задачи Сте́фана*, или *задачи со свободной границей* (см. [441, 3.8]):

$$L\widetilde{V}(x) = (\lambda + r)\widetilde{V}(x), \quad x < \widetilde{x}, \tag{25}$$

$$\widetilde{V}(x) = g(x), \quad x \geqslant \widetilde{x}, \tag{26}$$

$$\left.\frac{d\widetilde{V}(x)}{dx}\right|_{x\uparrow\widetilde{x}} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\downarrow\widetilde{x}}, \tag{27}$$

где

$$L = rx\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\,x^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{28}$$

— инфинитезимальный оператор процесса $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ со стохастическим дифференциалом

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t).$$

Будем искать решение уравнения (25) (в неизвестной пока области $(0, \widetilde{x})$) в виде

$$V(x) = cx^{\gamma}. \tag{29}$$

Тогда для γ получаем уравнение

$$\gamma^2 - \Big(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\Big)\gamma - \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2} = 0. \tag{30}$$

Чтобы упростить обозначения, будем считать, что $\sigma^2 = 1$. (Если $\sigma^2 \neq 1$, то в окончательных ответах надо будет сделать замену $r \to \dfrac{r}{\sigma^2}$, $\lambda \to \dfrac{\lambda}{\sigma^2}$.)

Уравнение (30) с $\sigma^2 = 1$ имеет два корня

$$\gamma_1 = \Big(\frac{1}{2} - r\Big) + \sqrt{\Big(\frac{1}{2} - r\Big)^2 + 2(\lambda + r)} \tag{31}$$

и

$$\gamma_2 = \Big(\frac{1}{2} - r\Big) - \sqrt{\Big(\frac{1}{2} - r\Big)^2 + 2(\lambda + r)}. \tag{32}$$

Поскольку $\lambda > 0$, имеем $\gamma_1 > 1$. (Если $\lambda = 0$, то $\gamma_1 = 1$.) При этом $\gamma_2 < 0$.

Поэтому общее решение уравнения (25) должно иметь вид

$$\widetilde{V}(x) = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2}. \tag{33}$$

Как и в случае дискретного времени (§ 5b гл. VI), из формулы (33) заключаем, что $c_2 = 0$, поскольку в противном случае $V(x) \to \pm\infty$ при $x \downarrow 0$, что должно быть исключено по смыслу рассматриваемой задачи ($V^*(x) \geqslant 0$ и $V^*(x) \leqslant x$).

Итак, $\widetilde{V}(x) = c_1 x^{\gamma_1}$ для $x < \widetilde{x}$, где c_1 и «свободная» граница $\widetilde{x}$ являются пока неизвестными константами, для определения которых воспользуемся условием (26) и условием «гладкого склеивания» (27).

Условие (26) дает соотношение

$$c_1 \widetilde{x}^{\gamma_1} = x - K. \tag{34}$$

Условие (27) принимает вид

$$c_1 \gamma_1 \widetilde{x}^{\gamma_1 - 1} = 1. \tag{35}$$

Из этих двух соотношений находим, что

$$\widetilde{x} = K \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}, \quad c_1 = \gamma_1^{-\gamma_1} \left(\frac{\gamma_1 - 1}{K} \right)^{\gamma_1 - 1}. \tag{36}$$

Таким образом, решение $\widetilde{V}(x)$ задачи (25)–(27) может быть представлено следующим образом:

$$\widetilde{V}(x) = \begin{cases} x - K, & x \geqslant \widetilde{x}, \\ c_1 x^{\gamma_1}, & x < \widetilde{x}, \end{cases} \tag{37}$$

где $\widetilde{x}$ и c_1 определяются формулами (36).

Замечание. Если $K = 1$, то $\widetilde{V}(x)$ в точности совпадает с функцией $\widetilde{V}(x)$, определяемой формулой (39) в § 5b гл. VI, что не будет удивительным, если принять во внимание формулу (22) и тот способ, которым отыскивалась в гл. VI функция $\widetilde{V}(x)$.

Теорема будет доказана, если теперь показать, что найденная функция $\widetilde{V}(x)$ совпадает с ценой $V^*(x)$ (см. формулу (7)), а момент

$$\widetilde{\tau} = \inf\{t \geqslant 0 \colon S_t \geqslant \widetilde{x}\}$$

является оптимальным в классе $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ и в классе $\mathfrak{M}_0^\infty$, если $\mathsf{P}_x(\widetilde{\tau} < \infty) = 1$.

С этой целью достаточно, очевидно, лишь убедиться в справедливости следующих «проверочных» условий для $x \in E = (0, \infty)$:

(A) $\widetilde{V}(x) = \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda + r)\widetilde{\tau}} (S_{\widetilde{\tau}} - K)^+ I(\widetilde{\tau} < \infty)$

и

(B) $\widetilde{V}(x) \geqslant \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda + r)\tau} (S_\tau - K)^+ I(\tau < \infty)$ для любого $\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$.

В силу того что $(S_{\widetilde{\tau}}-K)^+ I(\widetilde{\tau}<\infty)=\widetilde{V}(S_{\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty)$ и $\widetilde{V}(x)\geqslant(x-K)^+$, для проверки справедливости соотношений (A) и (B) надо, в свою очередь, проверить выполнимость условий

(A′) $\widetilde{V}(x)=\mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\widetilde{\tau}}\widetilde{V}(S_{\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty)$

и

(B′) $\widetilde{V}(x)\geqslant\mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\tau}\widetilde{V}(S_\tau)I(\tau<\infty)$ для любого $\tau\in\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ и $x\in E$.

Стандартная техника установления справедливости свойств (A′) и (B′) основана на применении к функции $\widetilde{V}(x)$ формулы Ито (точнее, некоторого ее обобщения — формулы Ито—Мейера) и состоит в следующем.

Пусть $V=V(x)$ — некоторая функция из класса C^2, т. е. функция с непрерывной второй производной. Тогда классическая формула Ито (§ 5c гл. III), примененная к функции $F(t,x)=e^{-(\lambda+r)t}V(x)$ и процессу $S=(S_t)_{t\geqslant0}$, приводит к следующему представлению:

$$e^{-(\lambda+r)t}V(S_t)=V(S_0)+\int_0^t e^{-(\lambda+r)u}\bigl[LV(S_u)-(\lambda+r)V(S_u)\bigr]\,du+ \\ +\int_0^t e^{-(\lambda+r)u}\sigma S_u V'(S_u)\,dW_u. \qquad (38)$$

Если теперь обратиться к функции $\widetilde{V}(x)$, определенной формулой (37), то можно заметить, что эта функция принадлежит классу C^2 для всех $x\in E=(0,\infty)$ за исключением лишь *одной* точки $x=\widetilde{x}$, что дает основание надеяться на справедливость формулы (38) и для $V(x)=\widetilde{V}(x)$ при соответствующем понимании производных в точке $x=\widetilde{x}$.

В рассматриваемом случае функция $\widetilde{V}(x)$ является выпуклой (вниз), причем ее первая производная $\widetilde{V}'(x)$ существует и непрерывна для всех $x\in E=(0,\infty)$, вторая производная $\widetilde{V}''(x)$ существует для всех $x\in E=(0,\infty)$, за исключением точки $x=\widetilde{x}$, в которой существуют пределы

$$\widetilde{V}''_-(\widetilde{x})=\lim_{x\uparrow\widetilde{x}}\widetilde{V}''(x) \quad\text{и}\quad \widetilde{V}''_+(\widetilde{x})=\lim_{x\downarrow\widetilde{x}}\widetilde{V}''(x).$$

В стохастическом исчислении имеется обобщение формулы Ито, данное П.-А. Мейером на случай функций $V(x)$, являющихся *разностью двух выпуклых функций*. (См., например, [248, (5.52)] или *формулу Ито—Мейера* в работе [395, IV].)

Интересующая нас функция $\widetilde{V}(x)$ является *выпуклой* (вниз), и *формула Ито—Мейера* для $F(t,x)=e^{-(\lambda+r)t}\widetilde{V}(x)$ и $S=(S_t)_{t\geqslant0}$ будет по внешнему виду той же самой, что и формула (38), с тем лишь изменением, что вместо второй производной $\widetilde{V}''(\widetilde{x})$ надо взять, скажем, значение $\widetilde{V}''_-(\widetilde{x})$.

Итак, с учетом этого соглашения находим, что

$$e^{-(\lambda+r)t}\widetilde{V}(S_t)-\widetilde{V}(S_0)=\int_0^t e^{-(\lambda+r)u}\bigl[L\widetilde{V}(S_u)-(\lambda+r)\widetilde{V}(S_u)\bigr]\,du+M_t, \qquad (39)$$

где

$$M_t = \int_0^t e^{-(\lambda+r)u} \sigma S_u \widetilde{V}'(S_u)\, dW_u. \tag{40}$$

Полезно отметить, что при $x < \widetilde{x}$ выполняется равенство

$$L\widetilde{V}(x) - (\lambda+r)\widetilde{V}(x) = 0 \tag{41}$$

(в силу формулы (25)), и непосредственный подсчет показывает, что это равенство сохраняется и при $x = \widetilde{x}$, а при $x > \widetilde{x}$ имеет место неравенство

$$L\widetilde{V}(x) - (\lambda+r)\widetilde{V}(x) \leqslant 0. \tag{42}$$

Из формул (39), (41) и (42) получаем, что (при $S_0 = x$)

$$\widetilde{V}(x) \geqslant e^{-(\lambda+r)t}\widetilde{V}(S_t) - M_t. \tag{43}$$

Как видно из формулы (40), процесс $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ является локальным мартингалом.

Пусть (τ_n) — его локализующая последовательность и $\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$. Тогда из формулы (43) получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}(x) &\geqslant \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\tau)}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\tau}) - \mathsf{E}\, M_{\tau_n\wedge\tau} = \\
&= \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\tau)}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\tau}) = \\
&= \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\tau)}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\tau}) I(\tau < \infty),
\end{aligned}$$

и по лемме Фату

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}(x) &\geqslant \varliminf_n \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\tau)}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\tau}) I(\tau < \infty) \geqslant \\
&\geqslant \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\tau}\widetilde{V}(S_\tau) I(\tau < \infty),
\end{aligned}$$

что и доказывает свойство (B$'$).

Установим теперь справедливость свойства (A$'$).

Если $x \in \widetilde{D} = \{x : x \geqslant \widetilde{x}\}$, то $\mathsf{P}_x(\widetilde{\tau} = 0) = 1$, и свойство (A$'$) очевидно.

Пусть теперь $\widetilde{x} \in \widetilde{C} = \{x : x < \widetilde{x}\}$. Тогда из формул (41) и (39) получаем

$$\widetilde{V}(x) = e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}}) - M_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}},$$

и, значит,

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}(x) &= \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}}) = \\
&= \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}}) I(\widetilde{\tau} < \infty) \\
&\qquad + \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n}) I(\widetilde{\tau} = \infty).
\end{aligned} \tag{44}$$

Поскольку

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty)\leqslant\\
&\leqslant \sup_{t\leqslant\widetilde{\tau}}\Bigl[e^{-(\lambda+r)t}\widetilde{V}(S_t)\Bigr]I(\widetilde{\tau}<\infty)\leqslant\\
&\leqslant \sup_{t\leqslant\widetilde{\tau}}\Bigl[e^{-\lambda t}e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}\Bigr]I(\widetilde{\tau}<\infty)\leqslant\\
&\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\Bigl[e^{-\lambda t}e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}\Bigr]
\end{aligned}
$$

и

$$
\mathsf{E}\sup_{t\geqslant 0}\Bigl[e^{-\lambda t}e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}\Bigr]<\infty \tag{45}
$$

(см. ниже следствие 2 к лемме 1), по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$
\lim_n \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)(\tau_n\wedge\widetilde{\tau})}\widetilde{V}(S_{\tau_n\wedge\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty)=\mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\widetilde{\tau}}\widetilde{V}(S_{\widetilde{\tau}})I(\widetilde{\tau}<\infty). \tag{46}
$$

Далее, $\widetilde{V}(S_{\tau_n})\leqslant\widetilde{V}(\widetilde{x})<\infty$ на множестве $\{\omega\colon \widetilde{\tau}=\infty\}$, и поэтому

$$
\lim_n \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\tau_n}\widetilde{V}(S_{\tau_n})I(\widetilde{\tau}=\infty)=0. \tag{47}
$$

Требуемое свойство (A$'$) следует из формул (44), (46) и (47).

Для завершения доказательства теоремы надо установить справедливость свойства (46) и доказать формулу (17) (с $\tau^*=\widetilde{\tau}$).

С этой целью докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *При $x\geqslant 0$ и $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ выполняется равенство*

$$
\mathsf{P}\Bigl(\max_{s\leqslant t}(\mu s+\sigma W_s)\leqslant x\Bigr)=\Phi\biggl(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\biggr)-e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}}\Phi\biggl(\frac{-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\biggr), \tag{48}
$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$.

Доказательство. Пусть для простоты $\sigma^2=1$. По теореме Гирсанова (§ 3e гл. III или § 3b гл. VII)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\Bigl(\max_{s\leqslant t}(\mu s+W_s)>x,\ \mu t+W_t\leqslant x\Bigr)&=\mathsf{E}\, I\Bigl(\max_{s\leqslant t}(\mu s+W_s)>x,\ \mu t+W_t\leqslant x\Bigr)\\
&=\mathsf{E}\exp\Bigl(\mu W_t-\frac{\mu^2}{2}t\Bigr)I\Bigl(\max_{s\leqslant t}W_s>x,\ W_t\leqslant x\Bigr).
\end{aligned} \tag{49}
$$

Положим $T_x=\inf\{t\geqslant 0\colon W_t=x\}$. Тогда *принцип отражения* Д. Андрэ утверждает, что процесс

$$
\widetilde{W}_t=W_tI(t\leqslant T_x)+(2x-W_t)I(t>T_x) \tag{50}
$$

является также винеровским. (См. § 3b гл. III, [124], [266] и [439].)

Из формул (49) и (50) находим, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\max_{s\leqslant t}(\mu s+W_s)\leqslant x\Big)=\\
&\qquad=\mathsf{P}(\mu t+W_t\leqslant x)-\mathsf{P}\Big(\max_{s\leqslant t}(\mu s+W_s)>x,\ \mu t+W_t\leqslant x\Big)=\\
&\qquad=\Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\Big)-\mathsf{E}\exp\Big(\mu W_t-\frac{\mu^2}{2}t\Big)I\Big(\max_{s\leqslant t}W_s>x,\ W_t\leqslant x\Big)=\\
&\qquad=\Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\Big)-\mathsf{E}\exp\Big(\mu \widetilde{W}_t-\frac{\mu^2}{2}t\Big)I\Big(\max_{s\leqslant t}\widetilde{W}_s>x,\ \widetilde{W}_t\leqslant x\Big)=\\
&\qquad=\Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\Big)-\mathsf{E}\exp\Big(\mu(2x-W_t)-\frac{\mu^2}{2}t\Big)I(W_t\geqslant x)=\\
&\qquad=\Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\Big)-e^{2\mu x}\,\mathsf{E}\exp\Big(\mu W_t-\frac{\mu^2}{2}t\Big)I(W_t\geqslant x)=\\
&\qquad=\Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\Big)-e^{2\mu x}\mathsf{P}(\mu t+W_t\geqslant x)\\
&\qquad=\Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\Big)-e^{2\mu x}\Phi\Big(\frac{-x-\mu t}{\sqrt{t}}\Big).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Следствие 1. *Если* $\mu<0$, *то*

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}(\mu t+\sigma W_t)\leqslant x\Big)=1-\exp\Big\{\frac{2\mu x}{\sigma^2}\Big\}. \tag{51}$$

Если $\mu\geqslant 0$, *то*

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}(\mu t+\sigma W_t)\leqslant x\Big)=0. \tag{51$'$}$$

Следствие 2 (к доказательству формулы (45)). *Из формулы* (50) *с* $\mu=-\Big(\lambda+\dfrac{\sigma^2}{2}\Big)$ *находим, что*

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}\Big[\sigma W_t-\Big(\lambda+\frac{\sigma^2}{2}\Big)t\Big]\leqslant x\Big)=1-\exp\Big\{-\Big(1+\frac{2\lambda}{\sigma^2}\Big)x\Big\}. \tag{52}$$

Отсюда ясно, что если $\lambda>0$, *то свойство* (45) *выполнено.*

a

Следствие 3 (к доказательству формулы (17)). *Пусть* $S_t=xe^{rt}\cdot e^{\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t}$ *и* $x^*>x$. *Тогда из формулы* (51) *с* $\mu=r-\dfrac{\sigma^2}{2}<0$ *находим, что*

$$\mathsf{P}(\tau^*=\infty)=\mathsf{P}\Big(\sup_{t\geqslant 0}\Big[\sigma W_t+\Big(r-\frac{\sigma^2}{2}\Big)t\Big]\leqslant\ln\frac{x^*}{x}\Big)=1-\Big(\frac{x}{x^*}\Big)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}, \tag{53}$$

что доказывает формулу (17) *для* $r<\dfrac{\sigma^2}{2}$ *и* $x<x^*$. *При* $x\geqslant x^*$ *эта формула очевидна, а при* $x<x^*$ *и* $\mu=r-\dfrac{\sigma^2}{2}\geqslant 0$ *формула* (17) *следует из* (51$'$).

Первое доказательство теоремы закончено.

6. Второе доказательство. Пусть $\beta = \lambda + r$, $\lambda > 0$, γ_1 определено формулой (31) и $S_0 = 1$.

Полагая

$$Z_t = e^{-\beta t} S_t^{\gamma_1}, \tag{54}$$

находим, что

$$Z_t = \exp\left\{\gamma_1 \sigma W_t - \frac{(\gamma_1 \sigma)^2}{2} t\right\}. \tag{55}$$

Отсюда ясно, что $Z = (Z_t)$ является P-*мартингалом* и

$$e^{-\beta t}(S_t - K)^+ = S_t^{-\gamma_1}(S_t - K)^+ Z_t.$$

Если обозначить

$$G(x) = x^{-\gamma_1}(x - K)^+,$$

то видим, что

$$\begin{aligned}\overline{V}^*(1) &= \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}\, e^{-(\lambda + r)\tau}(S_\tau - K)^+ I(\tau < \infty) = \\ &= \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}\, G(S_\tau) Z_\tau I(\tau < \infty).\end{aligned} \tag{56}$$

Рассматриваемый процесс $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ порождается винеровским процессом $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$, и без ограничения общности можно сразу предполагать, что $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathsf{P})$ является координатным винеровским фильтрованным пространством, т. е. $\Omega = C[0, \infty)$ — пространство непрерывных функций $\omega = (\omega(t))_{t \geqslant 0}$, $\mathscr{F}_t = \sigma(\omega\colon \omega(s), s \leqslant t)$, $\mathscr{F} = \bigvee \mathscr{F}_t$ и P — винеровская мера.

Пусть $\widetilde{\mathsf{P}}$ — мера на $(\Omega, \mathscr{F})$, относительно которой процесс $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t \geqslant 0}$, $\widetilde{W}_t = W_t - (\gamma_1 \sigma)t$, является винеровским.

Если $\mathsf{P}_t = \mathsf{P} | \mathscr{F}_t$ и $\widetilde{\mathsf{P}}_t = \widetilde{\mathsf{P}} | \mathscr{F}_t$ — сужения мер P и $\widetilde{\mathsf{P}}$ на $\mathscr{F}_t$, то $\widetilde{\mathsf{P}}_t \sim \mathsf{P}_t$, и производная Радона—Никодима есть

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t} = Z_t, \tag{57}$$

где Z_t определяется формулой (55). (См., например, теорему 2, § 3е гл. III.)

Поэтому если $A \in \mathscr{F}_t$, то

$$\widetilde{\mathsf{E}} I_A = \mathsf{E}\, I_A Z_t,$$

где $\widetilde{\mathsf{E}}$ — усреднение по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, и если $A \in \mathscr{F}_\tau$, то

$$\widetilde{\mathsf{E}} I_A I_{(\tau < \infty)} = \mathsf{E}\, Z_\tau I_A I_{(\tau < \infty)} \tag{58}$$

(ср. с формулой (2) в § 3а гл. V).

Отсюда находим, что если $f = f(\omega)$ — неотрицательная $\mathscr{F}_\tau$-измеримая функция, то

$$\widetilde{\mathsf{E}} f I_{(\tau < \infty)} = \mathsf{E}\, Z_\tau f I_{(\tau < \infty)}. \tag{59}$$

Вместе с формулой (56) это приводит к тому, что

$$\overline{V}^*(1) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \widetilde{\mathsf{E}} G(S_\tau) I(\tau < \infty). \tag{60}$$

Иначе говоря, задача об оптимальной остановке (8) (для $x=1$) эквивалентна новой задаче (60), решение которой может быть легко получено из следующих соображений.

Рассмотрим функцию $G(x) = x^{-\gamma_1}(x-K)^+$. Эта функция на $E=(0,\infty)$ достигает своего максимального значения в точке $x^* = K\dfrac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}$ (ср. с (15)), причем

$$\max_{x \in E} G(x) = c^* \quad (= G(x^*)), \tag{61}$$

где c^* определяется формулой (14). Поэтому из формулы (60) получаем

$$\overline{V}^*(1) \leqslant c^* \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \widetilde{\mathsf{E}} I(\tau < \infty) \leqslant c^*. \tag{62}$$

Пусть $\tau^* = \inf\{t \geqslant 0 : S_t \geqslant x^*\}$ и начальное значение $S_0 = 1 \leqslant x^*$. По предположению $\lambda > 0$, следовательно, $x^* < \infty$.

Лемма 2. 1. *Если* $\lambda > 0$, *то*

$$\widetilde{\mathsf{P}}(\tau^* < \infty) = 1. \tag{63}$$

2. *Если* $\lambda > 0$ *и к тому же* $r \geqslant \dfrac{\sigma^2}{2}$, *то*

$$\mathsf{P}(\tau^* < \infty) = 1. \tag{64}$$

Доказательство. Процесс $\widetilde{W}_t = W_t - (\gamma_1\sigma)t$, $t \geqslant 0$, является винеровским по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, и по теореме Гирсанова

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{P}}(\tau^* < \infty) = \widetilde{\mathsf{P}}\big(\max_{t\geqslant 0} S_t \geqslant x^*\big) &= \widetilde{\mathsf{P}}\left(\max_{t\geqslant 0}\left[\sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right] \geqslant \ln x^*\right) = \\
&= \widetilde{\mathsf{P}}\left(\max_{t\geqslant 0}\left[\sigma \widetilde{W}_t + \left(\gamma_1\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right] \geqslant \ln x^*\right) = \\
&= \widetilde{\mathsf{P}}\left(\max_{t\geqslant 0}\left[\sigma W_t + \left(\gamma_1\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right] \geqslant \ln x^*\right) = 1,
\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из формулы (51) и того, что

$$\gamma_1\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2} = \sigma^2\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}} > 0.$$

Тем самым, свойство (63) доказано. Свойство (64) было установлено в следствии 3.

Лемма 2 доказана. □

Обратимся снова к неравенствам (62). Поскольку $\widetilde{\mathsf{P}}(\tau^* < \infty) = 1$ и $G(S_{\tau^*}) = G(x^*) = c^*$, получаем, что

$$\widetilde{\mathsf{E}} G(S_{\tau^*}) = c^*,$$

и из формулы (62) следует, что

$$\begin{aligned}\overline{V}^*(1) = \widetilde{\mathsf{E}}G(S_{\tau^*}) = \widetilde{\mathsf{E}}G(S_{\tau^*})I(\tau^* < \infty) = \\ = \mathsf{E}\, e^{-(\lambda+r)\tau^*}(S_{\tau^*} - K)I(\tau^* < \infty) = c^*.\end{aligned}$$

Тем самым получено (для $x=1$) второе доказательство формулы (12) и установлена оптимальность момента τ^*. Если $r \geqslant \frac{\sigma^2}{2}$, то $\mathsf{P}(\tau^* < \infty) = 1$, и, следовательно, при этом условии момент τ^* является оптимальным в классе $\mathfrak{M}_0^\infty$.

§ 2b. Стандартный опцион продавца

1. Рассмотрение *опционов продавца* с функциями платежа $f_t = e^{-\lambda t} g(S_t)$, где $g(x) = (K-x)^+$, $x \in E = (0, \infty)$, проводится так же, как и в случае опционов покупателя. Поэтому ограничимся лишь формулировкой результатов и основных моментов их доказательств.

Будем считать, что диффузионный (B, S)-рынок описывается представлениями (1) и (2) из § 2a и

$$U_*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\tau}(K - S_\tau)^+, \tag{1}$$

$$\overline{U}_*(x) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\tau}(K - S_\tau)^+ I(\tau < \infty). \tag{2}$$

Теорема. *Пусть* $\lambda \geqslant 0$. *Тогда*

$$U_*(x) = \overline{U}_*(x) = \begin{cases} K - x, & x \leqslant x_*, \\ c_* x^{\gamma_2}, & x > x_*, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \frac{2(\lambda+r)}{\sigma^2}}, \tag{4}$$

$$c_* = |\gamma_2|^{|\gamma_2|}\left(\frac{K}{1+|\gamma_2|}\right)^{1+|\gamma_2|}, \tag{5}$$

$$x_* = K\frac{|\gamma_2|}{1+|\gamma_2|}. \tag{6}$$

В классе $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ *существует оптимальный момент, и в качестве такового может быть взят момент*

$$\tau_* = \inf\{t \geqslant 0 \colon S_t \leqslant x_*\}. \tag{7}$$

При этом

$$\mathsf{P}_x(\tau_* < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \leqslant \frac{\sigma^2}{2} \text{ или } x \leqslant x_*, \\ \left(\frac{x_*}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1}, & \text{если } r > \frac{\sigma^2}{2} \text{ и } x > x_*. \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство этой теоремы даже несколько проще, нежели доказательство теоремы в § 2a, что объясняется тем, что здесь функция $g(x) = (K - x)^+$ является *ограниченной*.

По аналогии с соответствующей задачей для случая дискретного времени (§ 5c гл. VI) естественно предположить, что области продолжения наблюдений C_* и остановки наблюдений D_* имеют следующий вид:

$$C_* = \{x \in E\colon\ x > x_*\} = \{x \in E\colon\ U_*(x) > g(x)\}$$

и

$$D_* = \{x \in E\colon\ x \leqslant x_*\} = \{x \in E\colon\ U_*(x) = g(x)\},$$

где x_* и $U_*(x)$ являются решениями ($\widetilde{x}$ и $\widetilde{U}(x)$) *задачи Стефана*:

$$L\widetilde{U}(x) = (\lambda + r)\widetilde{U}(x), \quad x > \widetilde{x}, \tag{9}$$

$$\widetilde{U}(x) = g(x), \quad x \leqslant \widetilde{x}, \tag{10}$$

$$\frac{d\widetilde{U}(x)}{dx}\bigg|_{x\downarrow\widetilde{x}} = \frac{dg(x)}{dx}\bigg|_{x\uparrow\widetilde{x}}. \tag{11}$$

В рассматриваемом случае *ограниченные* решения уравнения (9) в области $x > \widetilde{x}$ имеют вид $\widetilde{U}(x) = \widetilde{c}x^{\gamma_2}$, где γ_2 является отрицательным корнем квадратного уравнения (30) из § 2a, определяемым формулой (4). Используя условия (10) и (11), однозначным образом находим значения $\widetilde{c}$ и $\widetilde{x}$, задаваемые правыми частями равенств (5) и (6).

Доказательство того, что $U_*(x) = \widetilde{U}(x)$ и момент τ_* является оптимальным, проводится путем установления соответствующих проверочных условий (A) и (B) с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были приведены в предыдущем § 2a. Доказательство формулы (8) основывается на применении леммы 1 и следствий к ней из того же § 2a. □

Замечание. «Мартингальный» метод доказательства сформулированной теоремы (второе доказательство) основан на том замечании, что в рассматриваемом случае мартингалом является процесс $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$,

$$Z_t = e^{-\beta t} S_t^{\gamma_2}, \quad \beta = \lambda + r,$$

причем

$$Z_t = \exp\left\{\gamma_2 \sigma W_t - \frac{(\gamma_2\sigma)^2}{2} t\right\}.$$

Тогда

$$e^{-\beta t}(K - S_t)^+ = S_t^{-\gamma_2}(K - S_t)^+ Z_t \leqslant c_* Z_t,$$

и последующие рассмотрения проводятся так же, как и в случае опциона покупателя (§ 2a).

§ 2c. Комбинации опционов покупателя и продавца

1. Как отмечалось в § 4e гл. VI, на практике широкое хождение имеют не только отдельные виды опционов, но и их разнообразные *комбинации*. Примером может служить, например, *опцион-стрэнгл*, образованный из опциона-колл и опциона-пут с разными ценами исполнения.

В настоящем параграфе будет приведен пример расчета опциона-стрэнгл американского типа, снова в предположении, что моментом исполнения может быть *любой* момент времени на $[0, \infty)$, а структура рассматриваемого (B, S)-рынка описывается соотношениями (1)—(2) из § 2a.

Иначе говоря, предполагается, что

$$B_t = B_0 e^{rt} \tag{1}$$

и

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}, \tag{2}$$

где $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ — стандартный винеровский процесс, причем $\mu = r$. В этом случае мартингальной является исходная мера P.

Для дисконтируемого опциона-стрэнгл функция выплат имеет вид (ср. с формулой (3) в § 2a)

$$f_t = e^{-\lambda t} g(S_t), \quad t \geqslant 0,$$

где

$$g(s) = \begin{cases} K_1 - s, & s \leqslant K_1, \\ 0, & K_1 < s < K_2, \\ s - K_2, & s \geqslant K_2. \end{cases} \tag{3}$$

В соответствии с общей теорией (раздел 4 гл. VII и раздел 2 гл. VI) цена

$$V^*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} B_0 \, \mathsf{E}_x \frac{f_\tau}{B_\tau} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x \, e^{-(\lambda + r)\tau} g(S_\tau), \tag{4}$$

где $\mathfrak{M}_0^\infty = \{\tau = \tau(\omega) : 0 \leqslant \tau(\omega) < \infty, \ \omega \in \Omega\}$ — класс конечных моментов остановки, а E_x — усреднение в предположении, что $S_0 = x \in E = (0, \infty)$.

2. Для отыскания цены $V^*(x)$ и соответствующего оптимального момента остановки воспользуемся «мартингальным» приемом из работы [32], использованным в предшествующих параграфах (см., например, второе доказательство в п. 6 § 2a). Будем при этом считать, что начальное состояние $S_0 = 1$ и цены исполнения K_1 и K_2 таковы, что $K_1 < 1 < K_2$.

Пусть

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}}, \tag{5}$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}} \tag{6}$$

— корни квадратного уравнения (30) из § 2a.

Как показано в § 2a, b, процессы $M_t^{(1)} = e^{-\beta t} S_t^{\gamma_1}$ и $M_t^{(2)} = e^{-\beta t} S_t^{\gamma_2}$, $\beta = \lambda + r$, $t \geqslant 0$, являются P-мартингалами. Тем самым, P-мартингалом является неотрицательный процесс $M_t(p) = pM_t^{(1)} + (1-p)M_t^{(2)}$ для любого $0 \leqslant p \leqslant 1$, и

$$V^*(1) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_1\, e^{-(\lambda+r)\tau} g(S_\tau) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}\, M_\tau(p) \frac{g(S_\tau)}{pS_\tau^{\gamma_1} + (1-p)S_\tau^{\gamma_2}}. \tag{7}$$

Как и в п. 6 § 2a, введем меры $\widetilde{\mathsf{P}}(p)$ так, что

$$\frac{d\widetilde{\mathsf{P}}_t(p)}{d\mathsf{P}_t} = M_t(p). \tag{8}$$

Тогда из формулы (7) заключаем, что

$$V^*(1) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}(p)}\, \frac{g(S_\tau)}{pS_\tau^{\gamma_1} + (1-p)S_\tau^{\gamma_2}}, \tag{9}$$

где $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}(p)}$ — усреднение по мере $\widetilde{\mathsf{P}}(p)$.

Следующий шаг состоит в выборе подходящего значения p из множества $[0,1]$ (далее оно будет обозначаться p^*), для которого удается решить соответствующую задачу об оптимальной остановке (9).

Как показывается в [32], следующая система уравнений для (p, s_1, s_2):

$$\frac{s_2 - K_2}{ps_2^{\gamma_1} + (1-p)s_2^{\gamma_2}} = \frac{K_1 - s_1}{ps_1^{\gamma_1} + (1-p)s_1^{\gamma_2}}, \tag{10}$$

$$\frac{s_2}{s_2 - K_2} = \frac{p\gamma_1 s_2^{\gamma_1} + (1-p)\gamma_2 s_2^{\gamma_2}}{ps_2^{\gamma_1} + (1-p)s_2^{\gamma_2}}, \tag{11}$$

$$\frac{s_1}{s_1 - K_1} = \frac{p\gamma_1 s_1^{\gamma_1} + (1-p)\gamma_2 s_1^{\gamma_2}}{ps_1^{\gamma_1} + (1-p)s_1^{\gamma_2}}, \tag{12}$$

где $p \in [0,1]$, $s_2 > K_2$, $s_1 < K_1$, имеет и притом единственное решение (p^*, s_1^*, s_2^*).

Пусть

$$c^* = \frac{s_2^* - K_2}{p^*(s_2^*)^{\gamma_1} + (1-p^*)(s_2^*)^{\gamma_2}} \quad \left(= \frac{K_2 - s_1^*}{p^*(s_1^*)^{\gamma_1} + (1-p^*)(s_1^*)^{\gamma_2}} \right).$$

Несложный анализ показывает, что

$$\sup_{s \geqslant 1} \frac{g(s)}{p^* s^{\gamma_1} + (1-p^*)s^{\gamma_2}} = \sup_{s \leqslant 1} \frac{g(s)}{p^* s^{\gamma_1} + (1-p^*)s^{\gamma_2}} \quad (= c^*).$$

При этом максимум функции $G(s) = \dfrac{g(s)}{p^* s^{\gamma_1} + (1-p^*)s^{\gamma_2}}$ достигается в точках $s_1^* < K_1$ и $s_2^* > K_2$.

Следовательно, из формулы (9) получаем, что

$$V^*(1) \geqslant c^*. \tag{13}$$

Определим

$$\tau^* = \inf\{t\colon S_t = s_1^* \text{ или } S_t = s_2^*\}.$$

Из свойств линейного броуновского движения со сносом вытекает, что $\mathsf{P}(\tau^* < \infty) = 1$. Поэтому $\mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}(p^*)}\, G(S_{\tau^*}) = c^*$, и, значит,

$$V^*(1) = c^*,$$

а момент τ^* является *оптимальным* моментом остановки.

Замечание. Если $K_1 = K_2$, то опцион-стрэнгл превращается в опцион-стрэддл (см. п. 2 § 4e гл. VI).

§ 2d. Русский опцион

1. Будем рассматривать диффузионный (B, S)-рынок, для которого

$$dB_t = rB_t\, dt, \quad B_0 > 0, \tag{1}$$

и

$$dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t), \quad S_0 > 0, \tag{2}$$

или, что равносильно,

$$B_t = B_0 e^{rt},$$
$$S_t = S_0 e^{rt} \cdot e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

Поскольку

$$\frac{S_t}{B_t} = \frac{S_0}{B_0} e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}, \tag{3}$$

относительно исходной меры P процесс $\dfrac{S}{B} = \left(\dfrac{S_t}{B_t}\right)_{t \geqslant 0}$ является мартингалом.

Пусть

$$f_t = e^{-\lambda t} g_t(S), \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

где

$$g_t(S) = \left(\max_{u \leqslant t} S_u - aS_t\right)^+, \quad a \geqslant 0. \tag{5}$$

Опционы американского типа с функциями выплат (4), называемые *русскими опционами* [435], [434], относятся к классу опционов продавца (опционы-пут) *с последействием* и *дисконтированием*. (Ср. с § 5d гл. VI.)

Используя те же самые обозначения (E_x, $\mathfrak{M}_0^\infty$, $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$, ...), что и в § 2a, b, положим

$$U_*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, e^{-r\tau} f_\tau(S) \tag{6}$$

и

$$\overline{U}_*(x) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \mathsf{E}_x\, e^{-r\tau} f_\tau(S) I(\tau < \infty). \tag{7}$$

В отличие от «одномерных» задач об оптимальной остановке марковского процесса $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$, рассмотренных в § 2a, b, задачи (6) и (7) являются «двумерными» в том смысле, что функционалы $f_t(S)$ зависят от *двумерного* марковского процесса $(S_t, \max\limits_{u\leqslant t} S_u)$.

Весьма замечательно, однако, что методы замены меры позволяют эти «двумерные» задачи свести к некоторым новым, являющимся уже «одномерными», что позволяет найти явные выражения и для $U_*(x)$ $(=\overline{U}_*(x))$, и для оптимальных моментов остановки.

2. Идея отмеченной редукции «двумерных» задач к «одномерным» была достаточно четко изложена в § 5d гл. VI для случая дискретного времени.

В рассматриваемом случае поступим так же, как в п. 5 § 2a, считая исходное фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ координатным винеровским пространством.

Пусть $\widehat{\mathsf{P}}$ — такая мера на $(\Omega, \mathscr{F})$, что ее сужение $\widehat{\mathsf{P}}_t \sim \mathsf{P}_t$ и

$$\frac{d\widehat{\mathsf{P}}_t}{d\mathsf{P}_t} = Z_t, \tag{8}$$

где

$$Z_t = e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t} \quad \left(= \frac{S_t/S_0}{B_t/B_0}\right), \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Относительно меры $\widehat{\mathsf{P}}$ процесс $\widehat{W} = (\widehat{W}_t)_{t\geqslant 0}$,

$$\widehat{W}_t = W_t - \sigma t, \tag{10}$$

является, по теореме Гирсанова, *винеровским*, и для $\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\tau} g_\tau(S) I(\tau < \infty) &= x\, \mathsf{E}_x\, e^{-\lambda\tau} \frac{S_\tau/S_0}{B_\tau/B_0} \frac{g_\tau(S)}{S_\tau} I(\tau < \infty) = \\ &= x\, \mathsf{E}_x\, e^{-\lambda\tau} Z_\tau \frac{(\max\limits_{u\leqslant\tau} S_u - aS_\tau)^+}{S_\tau} I(\tau < \infty) = \\ &= x\widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\tau} \left[\frac{\max\limits_{u\leqslant\tau} S_u}{S_\tau} - a\right]^+ I(\tau < \infty). \end{aligned} \tag{11}$$

Введем процесс $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$, полагая

$$\psi_t = \frac{\max(\max\limits_{u\leqslant t} S_u, S_0\psi_0)}{S_t}, \tag{12}$$

где $\psi_0 \geqslant 1$.

Ясно, что если $\psi_0 = 1$, то

$$\psi_t = \frac{\max\limits_{u\leqslant t} S_u}{S_t} \tag{13}$$

и, следовательно,

$$\widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\tau} \left[\frac{\max\limits_{u\leqslant t} S_u}{S_\tau} - a\right]^+ I(\tau < \infty) = \widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\tau} [\psi_\tau - a]^+ I(\tau < \infty). \tag{14}$$

Пусть $\widehat{\mathsf{P}}_{\psi}$ — распределение вероятностей процесса $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ в предположении, что $\psi_0=\psi\geqslant 1$. Рассмотрим следующие задачи об оптимальной остановке:

$$\widehat{U}(\psi) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \widehat{\mathsf{E}}_{\psi} e^{-\lambda\tau}[\psi_\tau - a]^+ \tag{15}$$

и

$$\widehat{\overline{U}}(\psi) = \sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \widehat{\mathsf{E}}_{\psi} e^{-\lambda\tau}[\psi_\tau - a]^+ I(\tau<\infty), \tag{16}$$

которые можно рассматривать как задачи расчета дисконтируемого *опциона-колл* американского типа, когда процесс цен акций задается процессом $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$, а $B_t\equiv 1$. (Подчеркнем, что исходная задача относится к *опциону-пут*!)

Из формул (6), (7) и (15), (16) находим (с учетом соотношений (11) и (14)), что

$$U_*(x) = x\widehat{U}(1), \quad \overline{U}_*(x) = x\widehat{\overline{U}}(1). \tag{17}$$

3. Прежде чем сформулировать основные результаты относительно решения задач об оптимальной остановке (15) и (16), остановимся на некоторых свойствах процесса $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$, $\psi_0=1$.

Лемма. 1. *Относительно меры $\widehat{\mathsf{P}}$ процесс $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ является диффузионным марковским процессом на фазовом пространстве $E=[1,\infty)$ с мгновенным отражением в точке $\{1\}$.*

2. *Процесс $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ имеет стохастический дифференциал*

$$d\psi_t = -\psi_t(r\,dt + \sigma\,d\widehat{W}_t) + d\varphi_t, \tag{18}$$

где $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$ — неубывающий процесс, растущий на множестве $\{(\omega,t)\colon \psi_t(\omega)=1\}$, и $\widehat{W}=(\widehat{W}_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс (по мере $\widehat{\mathsf{P}}$).

3. *Если $q=q(\psi)$ — такая функция на $E=[1,\infty)$, что $q\in C^2$ на $(1,\infty)$ и существует $q'(1+)\equiv\lim_{\psi\downarrow 1} q'(\psi)$, то*

$$Lq(\psi) = -r\psi\,\frac{dq}{d\psi} + \frac{\sigma^2}{2}\,\psi^2\,\frac{d^2q}{d\psi^2}, \quad \psi>1, \tag{19}$$

и

$$q'(1+) = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Из формулы (12) находим, что

$$\begin{aligned}
\psi_{t+\Delta} &= \max\left\{\frac{\max\limits_{u\leqslant t+\Delta} S_u}{S_{t+\Delta}}, \frac{S_0\psi_0}{S_{t+\Delta}}\right\} = \\
&= \max\left\{\frac{\max\limits_{u\leqslant t} S_u}{S_t\cdot S_{t+\Delta}/S_t}, \frac{S_0\psi_0}{S_t\cdot S_{t+\Delta}/S_t}, \frac{\max\limits_{t<u\leqslant t+\Delta} S_u/S_t}{S_{t+\Delta}/S_t}\right\} = \\
&= \max\left\{\psi_t\cdot\frac{1}{S_{t+\Delta}/S_t}, \frac{\max\limits_{t<u\leqslant t+\Delta} S_u/S_t}{S_{t+\Delta}/S_t}\right\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что

$$\frac{S_u}{S_t} = \exp\Big\{\sigma(\widehat{W}_u - \widehat{W}_t) + \Big(r + \frac{\sigma^2}{2}\Big)(u-t)\Big\} \quad \text{для } t < u \leqslant t + \Delta.$$

Тем самым, с учетом того, что процесс $\widehat{W}$ является винеровским относительно меры $\widehat{\mathsf{P}}$, видим, что имеет место следующее свойство «марковости»:

$$\operatorname{Law}(\psi_{t+\Delta} \,|\, \mathscr{F}_t, \widehat{\mathsf{P}}) = \operatorname{Law}(\psi_{t+\Delta} \,|\, \psi_t, \widehat{\mathsf{P}}).$$

Для получения представления (18) положим

$$N_t = \max\big\{\max_{u \leqslant t} S_u, S_0\psi_0\big\}. \tag{22}$$

Ясно, что процесс $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ является неубывающим процессом ограниченной вариации.

Из формул (2) и (10)

$$dS_t = S_t\big[(r+\sigma^2)\,dt + \sigma\,d\widehat{W}_t\big] \tag{23}$$

и

$$d\Big(\frac{1}{S_t}\Big) = -\frac{1}{S_t}\big[r\,dt + \sigma\,d\widehat{W}_t\big]. \tag{24}$$

Поэтому по формуле Ито

$$d\psi_t = N_t\,d\Big(\frac{1}{S_t}\Big) + \frac{1}{S_t}\,dN_t = -\psi_t\big[r\,dt + \sigma\,d\widehat{W}_t\big] + \frac{dN_t}{S_t}, \tag{25}$$

или, в интегральной форме,

$$\psi_t = \psi_0 - r\int_0^t \psi_u\,du - \sigma\int_0^t \psi_u\,d\widehat{W}_u + \int_0^t \frac{dN_u}{S_u}. \tag{26}$$

Обозначим

$$\varphi_t = \int_0^t \frac{dN_u}{S_u} \tag{27}$$

и заметим, что $dN_u(\omega) = 0$ на множестве $\{(\omega, u) : \psi_u(\omega) > 1\}$ (в том смысле, что $\int_0^t I(\psi_u(\omega) > 1)\,dN_u(\omega) = 0$). Поэтому

$$\varphi_t = \int_0^t I(\psi_u = 1)\,\frac{dN_u}{S_u}, \tag{28}$$

что более наглядно показывает, что изменение значений процесса $(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$ происходит только тогда, когда процесс $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ попадает в граничную точку $\{1\}$.

Покажем, что для всякого $t > 0$ выполняется равенство

$$\int_0^t I(\psi_u = 1)\,du = 0 \quad (\widehat{\mathsf{P}}\text{-п. н.}). \tag{29}$$

По теореме Фубини

$$\widehat{\mathsf{E}}\int_0^\infty I(\psi_u=1)\,du=\int_0^\infty \widehat{\mathsf{E}}I(\psi_u=1)\,du=\int_0^\infty \widehat{\mathsf{P}}(\psi_u=1)\,du=0,$$

поскольку $\widehat{\mathsf{P}}(\psi_u=1)=0$, что следует из того, что двумерное распределение пары $(\max\limits_{s\leqslant u}\widehat{W}_s,\widehat{W}_u)$ имеет плотность.

Тем самым, процесс $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$ проводит в точке $\{1\}$ нулевое ($\widehat{\mathsf{P}}$-п. н.) время, и, значит, эта точка есть *мгновенно отражающая* граница [239, гл. IV, § 7]. $\square$

4. Теорема. *Пусть* $\lambda>0$, $a\geqslant 0$, $\psi\geqslant 1$. *Тогда*

$$\widehat{U}(\psi)=\widehat{\widehat{U}}(\psi)=\begin{cases}(\widehat{\psi}-a)\cdot\dfrac{\gamma_2\psi^{\gamma_1}-\gamma_1\psi^{\gamma_2}}{\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_1}-\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_2}}, & \psi<\widehat{\psi},\\ \psi-a, & \psi\geqslant\widehat{\psi},\end{cases}\tag{30}$$

где

$$\gamma_k=\frac{A}{2}+(-1)^k\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+B},\quad k=1,2,\tag{31}$$

являются корнями квадратного уравнения

$$\gamma^2-A\gamma-B=0,\tag{32}$$

$$A=1+\frac{2r}{\sigma^2},\quad B=\frac{2\lambda}{\sigma^2};$$

«порог» $\widehat{\psi}$ *является решением трансцендентного уравнения*

$$\psi^{\gamma_1}\left(1-\frac{1}{\gamma_1}-\frac{a}{\psi}\right)=\psi^{\gamma_2}\left(1-\frac{1}{\gamma_2}-\frac{a}{\psi}\right)\tag{33}$$

в области $\psi>a$. *Если* $a=0$, *то*

$$\widehat{\psi}=\left|\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\frac{\gamma_1-1}{\gamma_2-1}\right|^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}.$$

Момент

$$\widehat{\tau}=\inf\{t\geqslant 0\colon\ \psi_t\geqslant\widehat{\psi}\}$$

таков, что $\mathsf{P}_\psi(\widehat{\tau}<\infty)=1$, $\psi\geqslant 1$, *и является оптимальным как в классе* $\mathfrak{M}_0^\infty$, *так и в классе* $\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty$.

Как и в § 2a, b, приведем два доказательства: первое («марковское») основано на решении задачи Стефана, а второе опирается на «мартингальные» соображения.

Первое доказательство. Те же самые соображение, что и в § 2a, b, основанные на представлении (22) из § 2a, показывают, что области продолжения наблюдений $\widehat{C}$ и прекращения наблюдений $\widehat{D}$ в задаче (15) должны иметь следующий вид:

$$\widehat{C}=\{\psi\geqslant 1\colon\ \psi<\widehat{\psi}\}=\{\psi\geqslant 1\colon\ \widehat{U}(\psi)>g(\psi)\}$$

и

$$\widehat{D} = \{\psi \geqslant 1\colon\ \psi \geqslant \widehat{\psi}\} = \{\psi \geqslant 1\colon\ \widehat{U}(\psi) = g(\psi)\},$$

где $g(\psi) = (\psi - a)^+$.

Как и в § 2a, b, неизвестный порог $\widehat{\psi}$ и $\widehat{U}(\psi)$ определяются из решения *задачи Стефана*:

$$L\widehat{U}(\psi) = \lambda\widehat{U}(\psi), \quad 1 < \psi < \widehat{\psi}, \tag{34}$$

$$\widehat{U}'(1+) = 0, \tag{35}$$

$$\widehat{U}(\psi) = g(\psi), \quad \psi \geqslant \widehat{\psi}, \tag{36}$$

$$\frac{d\widehat{U}(\psi)}{d\psi}\bigg|_{\psi\uparrow\widehat{\psi}} = \frac{dg(\psi)}{d\psi}\bigg|_{\psi\downarrow\widehat{\psi}}, \tag{37}$$

где оператор L определен формулой (19).

Будем искать решение уравнения (34) в виде $\widehat{U}(\psi) = \psi^\gamma$. Тогда для γ получаем квадратное уравнение (32), корнями которого являются $\gamma_1 < 0$ и $\gamma_2 > 1$, задаваемые формулами (31).

Тем самым, уравнение (34), «действующее» в области $\{\psi\colon 1 < \psi < \widehat{\psi}\}$, имеет вид

$$\widehat{U}(\psi) = c_1\psi^{\gamma_1} + c_2\psi^{\gamma_2}, \tag{38}$$

где c_1, c_2 — некоторые константы.

Для определения $\widehat{\psi}$ и констант c_1 и c_2 имеются три дополнительных условия: (35), (36) и (37), которые с учетом равенства (38) принимают следующий вид:

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 = 0, \tag{35$'$}$$

$$c_1\widehat{\psi}^{\gamma_1} + c_2\widehat{\psi}^{\gamma_2} = \widehat{\psi} - a, \tag{36$'$}$$

$$c_1\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_1-1} + c_2\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_2-1} = 1. \tag{37$'$}$$

Из формул (36′) и (37′) находим

$$c_1 = \frac{a\gamma_2 + (1-\gamma_2)\widehat{\psi}}{(\gamma_1-\gamma_2)\widehat{\psi}^{\gamma_1}}, \quad c_2 = \frac{a\gamma_1 + (1-\gamma_1)\widehat{\psi}}{(\gamma_2-\gamma_1)\widehat{\psi}^{\gamma_2}}. \tag{39}$$

Из формулы (35′) получаем, что

$$c_1 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}c_2, \tag{40}$$

что дает для $\widehat{\psi}$ уравнение (33). Если $a = 0$, то из этого уравнения следует, что

$$\widehat{\psi} = \left|\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\frac{\gamma_1-1}{\gamma_2-1}\right|^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}. \tag{41}$$

Наконец, из формул (38) и (39) с учетом уравнения (33) находим, что в области $\widehat{C} = \{\psi\colon \psi < \widehat{\psi}\}$ выполняется равенство

$$\widehat{U}(\psi) = (\widehat{\psi} - a)\cdot\frac{\gamma_2\psi^{\gamma_1} - \gamma_1\psi^{\gamma_2}}{\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_1} - \gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_2}}.$$

Покажем теперь, что $\widehat{\mathsf{P}}_{\psi}(\widehat{\tau}<\infty)=1$, $\psi\geqslant 1$. Для этого достаточно показать, что

$$\widehat{\mathsf{P}}\Bigl(\sup_{t\geqslant 0}\Bigl(\frac{\sup_{u\leqslant t} S_u}{S_t}\Bigr)\geqslant\widehat{\psi}\Bigr)=1 \tag{42}$$

для любого $\widehat{\psi}>1$. (Для $\widehat{\psi}=1$ свойство (42) очевидно.)

Имеем

$$\frac{\sup_{u\leqslant t} S_u}{S_t}=\exp Y_t,$$

где

$$Y_t=\sup_{u\leqslant t}\Bigl[\sigma(\widehat{W}_u-\widehat{W}_t)+\Bigl(r+\frac{\sigma^2}{2}\Bigr)(u-t)\Bigr].$$

Образуем такую последовательность моментов остановки $(\sigma_k)_{k\geqslant 0}$, что

$$\begin{aligned}
\sigma_0&=0,\\
\sigma_1&=\inf\{t\geqslant 1\colon\ Y_t=0\},\\
&\ldots\\
\sigma_{k+1}&=\inf\{t\geqslant\sigma_k+1\colon\ Y_t=0\},\ \ldots
\end{aligned}$$

Тогда видим, что для $\widehat{y}=\ln\widehat{\psi}\geqslant 0$ выполняется равенство

$$\Bigl\{\omega\colon\ \sup_{t\leqslant\infty} Y_t(\omega)\geqslant\widehat{y}\Bigr\}=\bigcup_{k\geqslant 0}\Bigl\{\omega\colon\ \sup_{\sigma_k\leqslant t<\sigma_{k+1}} Y_t(\omega)\geqslant\widehat{y}\Bigr\}.$$

Для разных k события $\Bigl\{\omega\colon \sup_{\sigma_k\leqslant t<\sigma_{k+1}} Y_t(\omega)\geqslant\widehat{y}\Bigr\}$ являются независимыми, и их вероятности равны и положительны. Следовательно, по лемме Бореля—Кантелли $\widehat{\mathsf{P}}\Bigl\{\omega\colon \sup_{t<\infty} Y_t(\omega)\geqslant\widehat{y}\Bigr\}=1$, и, значит, $\widehat{\mathsf{P}}_{\psi}(\widehat{\tau}<\infty)=1$.

Осталось лишь доказать, что момент $\widehat{\tau}=\inf\{t\geqslant 0\colon \psi_t\geqslant\widehat{\psi}\}$ является оптимальным в задачах (15) и (16).

Один из методов доказательства состоит в установлении проверочных свойств (A) и (B) из § 2a, что делается точно так же, как и в случае опционов продавца и покупателя. (Подробности см. в работе [444].) Приведем теперь иное доказательство, основанное на «мартингальных» соображениях (ср. с п. 5 в § 2a и [32]). □

Второе доказательство. Для простоты будем предполагать, что $a=0$. (По поводу общего случая $a\geqslant 0$ см. [32].)

Обозначим

$$M_t=e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t) \tag{43}$$

и определим функцию $h=h(\psi)$, $\psi\geqslant 1$, так, чтобы по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$ процесс $M= =(M_t)_{t\geqslant 0}$ был локальным мартингалом.

Применяя формулу Ито к $e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t)$, находим, что

$$d(e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t))=e^{-\lambda t}\psi_t\bigl[A_t\,dt+B_t(-\sigma\,d\widehat{W}_t+d\varphi_t)\bigr], \tag{44}$$

где

$$A_t = -(\lambda + r)h(\psi_t) + (\sigma^2 - r)\psi_t h'(\psi_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \psi_t^2 h''(\psi_t), \tag{45}$$

$$B_t = h'(\psi_t) + h(\psi_t). \tag{46}$$

Из формулы (44) видим, что для того, чтобы процесс $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ являлся локальным мартингалом, функцию $h = h(\psi)$, $\psi \geqslant 1$, достаточно определить из решения следующей задачи:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \psi^2 h''(\psi) + (\sigma^2 - r)\psi h'(\psi) - (\lambda + r)h(\psi) = 0, \quad \psi > 1, \tag{47}$$

с граничным условием

$$h'(1+) + h(1+) = 0. \tag{48}$$

Перепишем уравнение (47) в виде

$$\psi^2 h''(\psi) + 2\left(1 - \frac{r}{\lambda^2}\right)\psi h'(\psi) - 2\left(\frac{\lambda + r}{\sigma^2}\right) = 0 \tag{49}$$

и будем искать решение этого уравнения в форме $h(\psi) = \psi^x$. Тогда для определения x получаем квадратное уравнение

$$x^2 + x(1 - 2r) - 2(\lambda + r) = 0. \tag{50}$$

Сопоставим это уравнение с уравнением (32):

$$\gamma^2 - \gamma(1 + 2r) - 2\lambda = 0; \tag{51}$$

замечаем, что если положить $\gamma = x + 1$, то уравнение (51) перейдет в уравнение (50), и, значит, корни x_i и γ_i обоих уравнений связаны соотношениями $\gamma_i = x_i + 1$, $i = 1, 2$.

Общее решение уравнения (49) (для $\sigma^2 = 1$) имеет вид

$$h(\psi) = d_1 \psi^{x_1} + d_2 \psi^{x_2}, \quad \psi > 1.$$

Возьмем решение $h = h(\psi)$ таким, что выполняется свойство (48). Тогда

$$d_1 = \frac{1 + x_2}{x_2 - x_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1},$$

$$d_2 = \frac{1 + x_1}{x_1 - x_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Следовательно,

$$h(\psi) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_2 \psi^{\gamma_1 - 1} - \gamma_1 \psi^{\gamma_2 - 1}\right]. \tag{52}$$

Корни удовлетворяют условиям $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 1$, и $h'(\psi) = 0$ при $\psi = \widetilde{\psi}$, где $\widetilde{\psi}$ определяется из соотношения

$$\widetilde{\psi}^{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} = 1. \tag{53}$$

Сопоставляя формулу (53) с (41), замечаем, что величина $\widetilde{\psi}$ в точности совпадает со значением $\widehat{\psi}$, определяемым формулой (41). При этом в точке $\widehat{\psi}$ функция $h(\psi)$ принимает свое *минимальное* значение.

Из формул (43)—(48) видим, что для найденной функции $h=h(\psi)$ процесс

$$M_t = e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t), \quad t \geqslant 0,$$

является неотрицательным локальным мартингалом и, значит, супермартингалом. Поэтому для всякого $\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty$ и $\psi_0 = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\widehat{\mathsf{E}}_1 e^{-\lambda\tau}\psi_\tau &= \widehat{\mathsf{E}}_1 h^{-1}(\psi_\tau)M_\tau \leqslant \widehat{\mathsf{E}}_1 h^{-1}(\widehat{\psi})M_\tau = \\ &= h^{-1}(\widehat{\psi})\widehat{\mathsf{E}}_1 M_\tau \leqslant h^{-1}(\widehat{\psi})\widehat{\mathsf{E}}_1 M_0 = h^{-1}(\widehat{\psi}) = \\ &= \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_1-1}-\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_2-1}} = \widehat{\psi}\cdot\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2\widehat{\psi}^{\gamma_1}-\gamma_1\widehat{\psi}^{\gamma_2}}.\end{aligned}$$

Если $\psi_0 = 1$, то момент $\widehat{\tau} = \inf\{t \geqslant 0\colon \psi_t \geqslant \widehat{\psi}\}$ является, как показано выше, конечным с вероятностью единица ($\widehat{\mathsf{P}}_1(\widehat{\tau} < \infty) = 1$), и для этого момента

$$\widehat{\mathsf{E}}_1 e^{-\lambda\widehat{\tau}}\psi_{\widehat{\tau}} = \widehat{\mathsf{E}}_1 h^{-1}(\psi_{\widehat{\tau}})M_{\widehat{\tau}} = h^{-1}(\widehat{\psi}) \quad (= \widehat{U}(1)),$$

что и доказывает оптимальность момента $\widehat{\tau}$ в классе $\mathfrak{M}_0^\infty$ при $\psi_0 = 1$. (Аналогичные соображения остаются в силе для любого $\psi_0 \leqslant \widehat{\psi}$.)

Обратимся к исходным задачам (6) и (7). Из формулы (11), считая $a=0$, находим, что

$$\mathsf{E}_x\, e^{-(\lambda+r)\tau} g_\tau(S) I(\tau < \infty) = x\widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\tau}\psi_\tau I(\tau < \infty). \tag{54}$$

Здесь $\psi_0 = 1$ и, как установлено выше, момент $\widehat{\tau} = \inf\{t\colon \psi_t \geqslant \widehat{\psi}\}$ является оптимальным моментом остановки в том смысле, что

$$\sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}}_0^\infty} \widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\tau}\psi_\tau I(\tau < \infty) = \widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\widehat{\tau}}\psi_{\widehat{\tau}} I(\widehat{\tau} < \infty) = \widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\widehat{\tau}}\psi_{\widehat{\tau}} \tag{55}$$

и

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\tau}\psi_\tau I(\tau < \infty) = \widehat{\mathsf{E}} e^{-\lambda\widehat{\tau}}\psi_{\widehat{\tau}}. \tag{56}$$

Тем самым, момент $\widehat{\tau}$ является оптимальным моментом в задаче (7).

С помощью рассуждений, которые были использованы выше при доказательстве свойства $\widehat{\mathsf{P}}_\psi(\widehat{\tau} < \infty) = 1$, можно, анализируя процесс $(\psi_t)_{t\geqslant 0}$, также доказать, что момент $\widehat{\tau}$ является конечным и по мере P. Тем самым, момент $\widehat{\tau}$ является оптимальным в исходных задачах (6) и (7). $\square$

3. Опционы американского типа на диффузионных (B, S)-рынках акций. Случай конечного временнóго горизонта

§ 3a. Об особенностях расчетов на конечных временны́х интервалах

1. В случае бесконечного горизонта, т. е. когда моменты исполнения принимают значения из временнóго множества $[0, \infty)$, часто удается полностью описать структуру цен опционов американского типа и соответствующих областей остановки и продолжения наблюдений. Так, во всех рассмотренных в разделе 2 случаях были найдены и цена $V^*(x)$, и граничная точка x^* в фазовом пространстве $E = \{x : x > 0\}$, разделяющая области остановки и продолжения наблюдений.

Важно подчеркнуть, что это оказалось возможным благодаря тому, что геометрическое броуновское движение $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ было *однородным* марковским процессом, не было *временны́х ограничений* на моменты исполнения, а значит, рассматриваемые задачи являлись задачами

- *эллиптического типа*.

Ситуация резко усложняется, когда временнóй параметр t принадлежит *ограниченному* интервалу $[0, T]$.

В этом случае соответствующая задача об оптимальной остановке становится «неоднородной» и, с аналитической точки зрения, приходится иметь дело с задачами

- *параболического типа*.

В результате в соответствующих задачах вместо граничной точки x^* возникает уже целая *пограничная* функция $x^* = x^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, разделяющая в фазовом пространстве $[0, T) \times E = \{(t, x) : 0 \leqslant t < T,\ x > 0\}$ области продолжения и остановки наблюдений. (Ср. с рис. 57 и 59 в § 5b, с гл. VI.)

Следует также подчеркнуть, что, хотя теория оптимальных правил остановки для случая непрерывного времени (см., например, монографию [441]) дает *общие методы* решения задач, в которых надо отыскивать оптимальный момент остановки, тем не менее, не так уж много известно *конкретных* задач (в том числе и связанных с опционами), в которых удается дать *точные* аналитические выражения для пограничных функций $x^* = x^*(t)$, $0 \leqslant t < T$, для цен и т. п.

На практике, и, в том числе, для расчетов реально торгуемых опционов американского типа, обычно прибегают к дискретизации (по времени и/или фазовому пространству), и приближенные значения, скажем, для пограничной функции и цен находятся, как правило, методом индукции назад (см. § 2а гл. VI).

Это, разумеется, не исключает интереса к нахождению точных (или близких к ним) решений, в связи с чем следует прежде всего остановиться на некоторых вопросах *теории* соответствующих задач об оптимальной остановке на конечных временны́х интервалах и, в частности, на одном весьма распространенном приеме, основанном на редукции таких задач к *задачам Стефана*, или, как еще говорят, к задачам с *подвижными* (*свободными*) *границами* для уравнений с частными производными.

2. Будем для определенности рассматривать (B, S)-рынок, описываемый соотношениями (1) и (2) из § 2а, причем считается, что временной параметр t принадлежит $[0, T]$, $\mu = r$, и функции платежа имеют следующую структуру: $f_t = e^{-\lambda t} g(S_t)$, где $\lambda \geqslant 0$, борелевская функция $g(x) \geqslant 0$, $x \in E = (0, \infty)$.

Пусть

$$V(T, x) = B_0 \, \mathsf{E}_x \, \frac{f_T}{B_T} \tag{1}$$

и

$$V^*(T, x) = B_0 \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^T} \mathsf{E}_x \, \frac{f_\tau}{B_\tau} \tag{2}$$

— *рациональные* цены опционов европейского и американского типа соответственно. В соотношениях (1) и (2) символ E_x означает усреднение по исходной мере (мартингальной, поскольку $\mu = r$) в предположении, что $S_0 = x$.

Замечание. Доказательство формулы (1) для $V(T, x)$ было дано в § 4b гл. VII. Доказательство формулы (2), основанное на опциональном разложении, в идейном отношении такое же, как и в случае дискретного времени (см. § 2c, 5a гл. VI). Детали соответствующих доказательств, связанные с непрерывным временем, см., например, в [281].

3. Для $t \geqslant 0$ и $x \in E = (0, \infty)$ положим

$$V(t, x) = \mathsf{E}_x \, e^{-\beta t} g(S_t) \tag{3}$$

и

$$V^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^t} \mathsf{E}_x \, e^{-\beta \tau} g(S_\tau), \tag{4}$$

где $\beta = \lambda + r$, $x = S_0$.

При рассмотрении случая, когда $t \in [0, T]$, полезно также введение функций

$$Y(t, x) = V(T-t, x) \tag{5}$$

и

$$Y^*(t, x) = V^*(T-t, x), \tag{6}$$

где $T-t$ играет роль «оставшегося» времени.

Ясно, что

$$Y(t, x) = \mathsf{E}_{t,x}\, e^{-\beta(T-t)} g(S_T) \tag{7}$$

и

$$Y^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_t^T} \mathsf{E}_{t,x}\, e^{-\beta(\tau-t)} g(S_\tau), \tag{8}$$

где $\mathsf{E}_{t,x}$ — усреднение по исходной (мартингальной) мере в предположении $S_t = x$, и $\mathfrak{M}_t^T$ — класс таких моментов остановки $\tau = \tau(\omega)$, что $t \leqslant \tau \leqslant T$.

В случае броуновского движения функции $V = V(t, x)$ рассматривались (при $\beta = 0$) в § 3f гл. III в связи с вероятностным представлением решения задачи Коши. Те же самые рассуждения (подробнее см. п. 5 § 3f гл. III) показывают, что функция $V = V(t, x)$ (при априорном предположении, что она принадлежит классу $C^{1,2}$) удовлетворяет по $t > 0$ и $x \in E$ уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \beta V = LV, \tag{9}$$

где

$$LV(t, x) = rx\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{10}$$

с начальным условием

$$V(0, x) = g(x). \tag{11}$$

Из формул (5), (9) и (11) следует, что функция $Y = Y(t, x)$ для $t < T$ подчиняется уравнению

$$-\frac{\partial Y}{\partial t} + \beta Y = LY \tag{12}$$

с краевым условием

$$Y(T, x) = g(x). \tag{13}$$

Напомним, что с *фундаментальным уравнением* (12), которое есть не что иное, как уравнение Фейнмана—Каца (§ 3f гл. III), мы уже сталкивались в § 1c в связи с методом, примененным Ф. Блэком и М. Шоулсом в работе [44] и Р. Мертоном в работе [346] для расчета рациональной стоимости ($V(T, x) = Y(0, x)$) стандартного опциона-колл европейского типа с функцией $g(x) = (x-K)^+$ и $\lambda = 0$.

4. Перейдем теперь к вопросу об отыскании рациональной стоимости $V^*(T, x) = Y^*(0, x)$.

Определим

$$\tau_0^T = \inf\bigl\{0 \leqslant t \leqslant T\colon\ Y^*(t, S_t) = g(S_t)\bigr\} \tag{14}$$

и

$$D_t^T = \bigl\{x \in E\colon\ Y^*(t, x) = g(x)\bigr\}, \tag{15}$$

$$C_t^T = \bigl\{x \in E\colon\ Y^*(t, x) > g(x)\bigr\}. \tag{16}$$

Для $s \leqslant t$ имеем $Y^*(s, x) = V^*(T - s, x) \geqslant V^*(T - t, x) = Y^*(t, x)$. Поэтому для $0 \leqslant s \leqslant t < T$ имеем

$$D_0^T \subseteq D_s^T \subseteq D_t^T$$

и

$$C_0^T \supseteq C_s^T \supseteq C_t^T.$$

В случае $t = T$, очевидным образом, $D_T^T = E$ и $C_T^T = \varnothing$.

Области

$$D^T = \bigl\{(t, x)\colon\ t \in [0, T),\ x \in D_t^T\bigr\}$$

и

$$C^T = \bigl\{(t, x)\colon\ t \in [0, T),\ x \in C_t^T\bigr\}$$

в фазовом пространстве $[0, T) \times E$ называют областями *остановки* и *продолжения наблюдений* соответственно. Связано это с тем обстоятельством, что в «типичных» задачах об оптимальной остановке марковских процессов момент τ_0^T оказывается (см., например, утверждение 3 в теореме 6, § 4 гл. III в [441]) оптимальным:

$$\mathsf{E}_x\, e^{-\beta\tau_0^T} g(S_{\tau_0^T}) = V^*(T, x). \tag{17}$$

Поскольку

$$\tau_0^T = \inf\bigl\{0 \leqslant t \leqslant T\colon\ S_t \in D_t^T\bigr\}, \tag{18}$$

становится понятной интерпретация множества $D^T = \bigcup\limits_{t<T} (\{t\} \times D_t^T)$ как *области остановки*: если $(t, S_t) \in D^T$, то наблюдения прекращаются. (К множеству остановки естественно также относить и «терминальное» множество $T \times D_T^T = T \times E$.)

Области D^T и C^T могут иметь весьма сложную структуру в зависимости от свойств функций $g = g(x)$ и, разумеется, от свойств процесса $S = (S_t)_{t \leqslant T}$. Например, эти области как множества в $[0, T) \times E$ могут быть *многосвязными*, состоять из нескольких «островов» остановки и т. п.

В случае же стандартных опционов покупателя и продавца (колл и пут), для которых $g(x) = (x - K)^+$ и $g(x) = (K - x)^+$ соответственно, области D^T и C^T оказываются односвязными (см. далее § 3c).

Для этих опционов *граница* ∂D^T *области остановки* может быть представлена в виде

$$\partial D^T = \bigl\{(t, x)\colon\ t \in [0, T),\ x = x^*(t)\bigr\},$$

где в случае опциона покупателя

$$x^*(t) = \inf\{x \in E\colon\ Y^*(t,x) = (x-K)^+\},$$

а в случае опциона продавца

$$x^*(t) = \sup\{x \in E\colon\ Y^*(t,x) = (K-x)^+\}.$$

§ 3b. Задачи об оптимальной остановке и задача Стефана

1. Из изложения в предшествующем параграфе следует, что для описания структуры оптимального момента остановки τ_0^T и областей продолжения и остановки наблюдений надо уметь находить функцию $V^* = V^*(t,x)$ или, что равносильно, функцию $Y^*(t,x) = V^*(T-t,x)$.

В общей теории оптимальных правил остановки для марковских процессов можно найти разнообразные характеризации этих функций.

Так, например, известно (см. [441]), что функция $Y^* = Y^*(t,x)$ является *наименьшей β-эксцессивной мажорантой* (неотрицательной борелевской) функции $g = g(x)$. Иначе говоря, среди всех функций $F = F(t,x)$, обладающих тем свойством, что для $0 \leqslant t \leqslant t+\Delta \leqslant T$ выполняются неравенства

$$e^{-\beta\Delta} T_\Delta F(t,x) \leqslant F(t,x), \quad x \in E, \tag{1}$$

где $T_\Delta F(t,x) = \mathsf{E}_{t,x}\, F(t+\Delta, S_{t+\Delta})$, $x = S_t$, и

$$g(x) \leqslant F(t,x), \quad x \in E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

функция $Y^* = Y^*(t,x)$ является *наименьшей*.

Из этой характеризации, в частности, следует, что

$$\max\{g(x),\ e^{-\beta\Delta} T_\Delta Y^*(t,x)\} \leqslant Y^*(t,x). \tag{3}$$

Естественно ожидать, что для малых $\Delta > 0$ и $t = 0, \Delta, \ldots, [T/\Delta]\Delta$ функция $Y^*(t,x)$ «близка» к функции

$$Y^*_\Delta(t,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_t^T(\Delta)} \mathsf{E}_{t,x}\, e^{-\beta(\tau-t)} g(S_\tau), \tag{4}$$

где $\mathfrak{M}_t^T(\Delta)$ — такие моменты остановки τ, что $\tau = k\Delta$, $k = 0, 1, \ldots, [T/\Delta]$, $t \leqslant \tau \leqslant T$ и $\{\omega\colon \tau \leqslant k\Delta\} \in \mathscr{F}_{k\Delta}(\Delta)$, $\mathscr{F}_{k\Delta}(\Delta) = \sigma\{\omega\colon S_\Delta, S_{2\Delta}, \ldots, S_{k\Delta}\}$.

Из теории оптимальных правил остановки следует, что высказанное предположение о «близости» этих функций при малых $\Delta > 0$ допускает строгую формулировку (см. [441, гл. III, § 2]). Далее, поскольку для $Y^*_\Delta(t,x)$, $t = 0, \Delta, \ldots, [T/\Delta]\Delta$, имеют место рекуррентные соотношения

$$Y^*_\Delta(t,x) = \max\{g(x),\ e^{-\beta\Delta}\, \mathsf{E}_{t,x}\, Y^*_\Delta(t+\Delta, S_{t+\Delta})\} \tag{5}$$

(см. случай дискретного времени в § 2a гл. VI и § 4 гл. II в [441]), в предположении достаточной гладкости $Y^*(t,x)$ по формуле Тейлора находим, что

$$Y^*(t,x) = \max\left\{g(x),\ (1-\beta\Delta)\left[Y^*(t,x) + \left(\frac{\partial Y^*(t,x)}{\partial t} + LY^*(t,x)\right)\Delta\right] + o(\Delta)\right\}, \tag{6}$$

где

$$LY^*(t,x) = rx\frac{\partial Y^*(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 Y^*(t,x)}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Из формулы (6) видим, что там, где $Y^*(t,x) > g(x)$, т. е. в области продолжения наблюдений, для $Y^* = Y^*(t,x)$ выполнено уравнение

$$-\frac{\partial Y^*}{\partial t} + \beta Y^* = LY^*. \tag{8}$$

Замечание 1. По своему виду уравнение (8) такое же, как и уравнение (12) в § 3a, что и неудивительно по следующим причинам.

Предположим, что в классе $\mathfrak{M}_t^T$ существует оптимальный момент τ_t^T. Тогда

$$Y^*(t,x) = \mathsf{E}_{t,x}\, e^{-\beta(\tau_t^T - t)} g(S_{\tau_t^T}).$$

Поскольку

$$Y(t,x) = \mathsf{E}_{t,x}\, e^{-\beta(T-t)} g(S_T),$$

интуитивно понятно, что если $(t,x) \in C_t^T$, то (обратные) уравнения по t и x для функций $Y^*(t,x)$ и $Y(t,x)$ должны быть одни и те же, поскольку коэффициенты соответствующих уравнений определяются по локальным характеристикам *одного и того же* двумерного процесса $(u, S_u)_{t\leqslant u\leqslant T}$ в окрестности *начальной* точки (t,x), где $x = S_t$.

Замечание 2. Выводу уравнений типа (8) для $Y^*(t,x)$, действующих в области продолжения наблюдений, и их применениям в теории опционов посвящена обширная литература: например монографии [266], [287], [441], [478] и статьи [33], [66], [134], [135], [179], [247], [265], [272], [340], [363], [467].

2. О связи между задачами об оптимальной остановке и задачами Стефана уже говорилось в разделе 5 гл. VI при рассмотрении опционов американского типа на биномиальном (B,S)-рынке. В случае непрерывного времени эта связь, видимо, впервые была обнаружена в *статистическом последовательном анализе* при рассмотрении вопросов различения статистических гипотез относительно сноса винеровского процесса ([349], [67], [300], [440]; см. также историко-библиографическую справку в статье [116] и в книге [441]).

В финансовой литературе одной из первых работ, где рассматривалась задача Стефана, или задача со свободной границей, была статья Г. Маккина [340], посвященная расчетам рациональной стоимости варрантов американского типа.

3. В математической физике *задача Стефана* возникает при изучении физических процессов, связанных с фазовым превращением вещества [413], [463]. Простейшим примером такой *двухфазной задачи Стефана* является, например, следующая задача.

Пусть известно, что пространство «время-состояние» $\mathbb{R}_+ \times E = \{(t,x)\colon t \geqslant 0,\ x > 0\}$ состоит из двух фаз

$$C^{(1)} = \bigl\{(t,x)\colon\ t \geqslant 0,\ 0 < x < x(t)\bigr\}$$

и

$$C^{(2)} = \bigl\{(t,x)\colon\ t \geqslant 0,\ x(t) \leqslant x < \infty\bigr\},$$

где $x = x(t)$, $t \geqslant 0$, есть некоторая граница разделения фаз, скажем, граница «лед-вода» внутри замерзающей воды. Предполагается, что температура $u(t,x)$ в момент времени t в сечении x в каждой из фаз $C^{(i)}$, $i = 1, 2$, удовлетворяет своему уравнению теплопроводности

$$c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

где (в теплофизических терминах) c_i — удельные теплоемкости, ρ_i — плотности фаз, k_i — коэффициенты теплопроводности (см., например, [335, т. 5, с. 324]).

Уравнения (9) рассматриваются при

- *граничном* условии $u(0,t) = \mathrm{Const}$,
- *начальном* условии $u(x,0) = \mathrm{Const}$

и, например, при следующем

- условии на *границе фаз*:

$$u(t, x(t-)) = u(t, x(t+)), \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t-)) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t+)), \tag{11}$$

при $t > 0$ с дополнительным предположением, что $x(0) = 0$.

При сформулированных условиях *задача Стефана* состоит в том, чтобы найти функцию $u = u(t,x)$, описывающую температурный режим фаз, и границу $x = x(t)$, $t \geqslant 0$, разделения этих фаз.

4. Мы привели пример двухфазной задачи Стефана из *математической физики*, с тем чтобы подчеркнуть как их общность, так и отличие от тех задач Стефана, которые возникают в связи с отысканием оптимальных правил остановки и, в частности, в связи с опционами американского типа.

Выше отмечалось, что в случае стандартных опционов покупателя и продавца также имеет место *двухфазная* ситуация — при отыскании оптимальных правил остановки можно ограничиться рассмотрением лишь *двух* односвязных фаз: области продолжения наблюдений C^T, где для $Y^*(t,x)$ действует уравнение (8), и области D^T, где $Y^* = Y^*(t,x)$ совпадает с функцией $g = g(x)$.

В следующем параграфе приводятся точные формулировки соответствующих задач Стефана для этих двух опционов и описываются качественные свойства соответствующих решений $Y^* = Y^*(t,x)$ и $x^* = x^*(t)$.

§ 3c. Задача Стефана для стандартных опционов покупателя и продавца

1. Опцион покупателя. Будем предполагать, что (B,S)-рынок описывается соотношениями (1) и (2) из § 2a с $\mu = r$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и функция выплат (в момент t) имеет вид $f_t = e^{-\lambda t} g(S_t)$, где $\lambda \geqslant 0$ и $g(x) = (x-K)^+$, $x \in E = (0,\infty)$. Основные результаты, относящиеся к рассматриваемому опциону, состоят в следующем.

1. *Рациональная стоимость* $V^*(T,x)$, $x = S_0$, такого (дисконтированного) опциона определяется, как было указано в § 3a, формулой

$$V^*(T,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^T} \mathsf{E}_x\, e^{-\beta\tau} g(S_\tau), \tag{1}$$

где $\beta = \lambda + r$ и E_x — усреднение по исходной (мартингальной) мере в предположении $S_0 = x$.

2. Пусть

$$Y^*(t,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_t^T} \mathsf{E}_{t,x}\, e^{-\beta(\tau - t)} g(S_\tau), \quad t \in [0,T],\ x \in E, \tag{2}$$

где $\mathsf{E}_{t,x}$ — усреднение по (мартингальной) мере в предположении $x = S_t$.

Функция $Y^* = Y^*(t,x)$ является *наименьшей β-эксцессивной мажорантой функции* $g(x)$. (См. п. 1 в § 3b.)

3. Рациональная стоимость есть

$$V^*(T,x) = Y^*(0,x), \tag{3}$$

и *рациональным моментом* прекращения покупателем наблюдений с предъявлением опциона к исполнению является момент

$$\tau_T^* = \inf\bigl\{0 \leqslant t \leqslant T:\ Y^*(t,S_t) = g(S_t)\bigr\}, \tag{4}$$

или, что равносильно, (в § 3a этот момент обозначался также τ_0^T)

$$\tau_T^* = \inf\bigl\{0 \leqslant t \leqslant T:\ (t,S_t) \in D^T \cup \{(T,x):\ x \in E\}\bigr\}. \tag{5}$$

4. *Области остановки* D^T и *продолжения наблюдений* C^T являются *односвязными* и имеют следующую структуру:

$$D^T = \bigcup_{0 \leqslant t < T} \bigl\{(t,x):\ Y^*(t,x) = g(x)\bigr\}, \tag{6}$$

$$C^T = \bigcup_{0 \leqslant t < T} \bigl\{(t,x):\ Y^*(t,x) > g(x)\bigr\}. \tag{7}$$

5. Функция $Y^* = Y^*(t,x)$ на $[0,T) \times E$ принадлежит классу $C^{1,2}$.

При каждом фиксированном $x \in E$ функция $Y^*(\cdot, x)$ является *невозрастающей* по t; при каждом фиксированном $t \in [0, T)$ функция $Y^*(t, \cdot)$ является *неубывающей* и *выпуклой* (вниз) по x.

6. *Пограничная функция* $x^* = x^*(t)$ является невозрастающей на $[0, T)$, и множества C_t^T и D_t^T при $t < T$ имеют следующий вид:

$$C_t^T = \{x \in E\colon S_t < x^*(t)\},$$
$$D_t^T = \{x \in E\colon S_t \geqslant x^*(t)\}.$$

При $t = T$ имеем $C_T^T = \varnothing$ и $D_T^T = E$.

Если $\lambda = 0$, то $x^*(t) = \infty$, $t < T$, что соответствует тому, что

$$C_t^T = E, \quad D_t^T = \varnothing$$

при каждом $t < T$.

Иначе говоря, для всех $t < T$ наблюдения следует продолжать независимо от того, какие значения принимают цены S_t, что является следствием того, что процесс $(e^{-rt}(S_t - K)^+)_{t \geqslant 0}$ является субмартингалом, и по теореме Дуба об остановке для любого $\tau \in \mathfrak{M}_0^T$ имеем

$$\mathsf{E}_x\, e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+ \leqslant \mathsf{E}_x\, e^{-rT}(S_T - K)^+.$$

Для случая дискретного времени также имеет место подобный результат (Р. Мертон [346]), который интерпретировался (см. § 5b гл. VI) следующим образом: *стандартные опционы-колл американского типа и европейского типа «совпадают»*.

7. Функция $Y^* = Y^*(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in E$, и пограничная функция $x^* = x^*(t)$, $0 \leqslant t < T$, являются решением следующей «двухфазной» *задачи Стефана*, или *задачи с подвижной* (*свободной*) *границей*:

- в области $C^T = \{(t, x)\colon x < x^*(t),\ t \in [0, T)\}$ выполнено уравнение

$$-\frac{\partial Y^*(t, x)}{\partial t} + \beta Y^*(t, x) = LY^*(t, x); \tag{8}$$

- в области $D^T \cup \{(T, x)\colon x \in E\}$ выполнено условие

$$Y^*(t, x) = g(x); \tag{9}$$

- на границе $x^* = x^*(t)$, $0 \leqslant t < T$, раздела «двух фаз» выполнены *условие Дирихле* (P. G. L. Dirichlet)

$$Y^*(t, x^*(t)) = g(x^*(t)) \tag{10}$$

и *условие Неймана* (K. Neumann)

$$\left.\frac{\partial Y^*(t, x)}{\partial x}\right|_{x \uparrow x^*(t)} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x \downarrow x^*(t)}, \tag{11}$$

которое часто называют *условием гладкого склеивания*.

Прокомментируем изложенные результаты, по поводу подробных доказательств которых см. работы, цитированные в конце п. 1 § 3b.

О справедливости формулы (1) уже говорилось в § 3a. Оптимальность момента τ_T^* следует из общей теории оптимальных правил остановки (см., например, [441, гл. III, § 3]). Относительно свойств гладкости функции $Y^*(t,x)$ и вывода уравнения (8) см., например, [247], [363] и [467].

Если условие (10) довольно-таки естественно, то справедливость *условия гладкого склеивания* (11) менее очевидна. В работе [200] и в книге [441, гл. III, § 8] приводятся достаточно общие условия, обеспечивающие выполнение условий гладкого склеивания на границе области остановки.

Напомним также, что с условиями гладкого склеивания мы уже не раз встречались: при рассмотрении аппроксимаций в задачах с дискретным временем (раздел 5 гл. VI) и при рассмотрении опционов американского типа в случае бесконечного временно́го горизонта (раздел 2 в настоящей главе).

Полезно подчеркнуть, что если в рассмотренной в предыдущем параграфе типичной задаче Стефана из математической физики в *каждой фазе* действует свое уравнение, то в задачах об оптимальной остановке дифференциальные уравнения для $Y^*(t,x)$ возникают лишь только *в одной фазе* (в области продолжения наблюдений), тогда как в другой фазе (в области остановки) искомая функция $Y^*(t,x)$ совпадает с заранее известной функцией $g(x)$.

Отметим также, что для рассматриваемого случая, где $g(x)=(x-K)^+$, имеем $\left.\dfrac{dg(x)}{dx}\right|_{x\downarrow x^*(t)}=1$, поскольку $x^*(t)>K$, $0\leqslant t<T$. (Последнее неравенство нетрудно вывести из того свойства, что функция $Y^*=Y^*(t,x)$ является β-эксцессивной мажорантой функции $g=g(x)$.)

По поводу разрешимости задачи Стефана (8)—(11) и свойств граничной функции $x^*=x^*(t)$ см. [467], [363] (и комментарий к этой работе).

2. В этом случае $g(x)=(K-x)^+$. Свойства 1—4 остаются в силе, и функция $Y^*=Y^*(t,x)$ снова принадлежит классу $C^{1,2}$. Для каждого фиксированного $x\in E$ функция $Y^*(\cdot,x)$ является невозрастающей по t; при каждом фиксированном $t\in[0,T)$ функция $Y^*(t,\cdot)$ является невозрастающей и выпуклой (вниз) по x.

При любом $\lambda\geqslant 0$ множества C_t^T и D_t^T имеют при $t<T$ следующий вид:

$$C_t^T=\{x\colon S_t>x^*(t)\},$$
$$D_t^T=\{x\colon S_t\leqslant x^*(t)\}.$$

При $t=T$ имеем $C_T^T=\varnothing$ и $D_T^T=E$.

Пограничная функция $x^*=X^*(t)$ является неубывающей функцией по t; если $\lambda=0$, то $\lim\limits_{t\uparrow T}x^*(t)=K$.

Задача Стефана для $Y^*(t,x)$ и $x^*(t)$ формулируется аналогичным образом. При этом условия (8), (9) и (10) сохраняются, а условие (11) для $0\leqslant t<T$

принимает следующий вид:

$$\left.\frac{dY^*(t,x)}{dx}\right|_{x\downarrow x^*(t)} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\uparrow x^*(t)},$$

где

$$\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\uparrow x^*(t)} = -1,$$

поскольку $g(x) = (K-x)^+$ и $x^*(t) < K$.

Дополнительную информацию о свойствах функций $Y^*(t,x)$ и $x^*(t)$ можно найти в статье [363], специально посвященной стандартному опциону-пут американского типа и содержащей обширную библиографию, относящуюся и к другим опционам.

§ 3d. О связи стоимостей опционов европейского и американского типа

1. Ранее отмечалось, что на практике опционы американского типа встречаются значительно чаще, нежели опционы европейского типа. Однако если для последних имеются такие замечательные результаты, как, скажем, *формула Блэка и Шоулса*, то расчеты для опционов американского типа в задачах с конечным временны́м горизонтом наталкиваются на большие аналитические трудности, что, в конечном счете, связано со сложностями решения соответствующих задач Стефана.

Из формул (1) и (2) в § 3a ясно, что цена $V^*(T,x) \geqslant V(T,x)$, что, конечно, вполне естественно, поскольку по условиям контракта опционы американского типа представляют возможность не просто дожидаться (терминального) момента исполнения, но и выбирать этот момент.

В настоящем параграфе приводятся некоторые результаты относительно связи цен для стандартных опционов покупателя и продавца, для которых платежные функции имеют вид $g(x) = (x-K)^+$ и $g(x) = (K-x)^+$ соответственно.

Будем предполагать, что $\lambda = 0$. Тем самым, формулы (1) и (2) из § 3a принимают следующий вид:

$$V(T,x) = \mathsf{E}_x\, e^{-rT} g(S_T) \tag{1}$$

и

$$V^*(T,x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^T} \mathsf{E}_x\, e^{-r\tau} g(S_\tau), \tag{2}$$

где $x = S_0$.

2. Совсем просто решается вопрос о соотношении стоимостей (цен) $V(T,x)$ и $V^*(T,x)$ в случае $g(x) = (x-K)^+$, т. е. для опциона покупателя. В этом случае

$$V(T,x) = V^*(T,x), \tag{3}$$

и в классе $\mathfrak{M}_0^T$ оптимальным является момент $\tau_T^* = T$ (см. § 3c).

Замечание. Подчеркнем, что если $\lambda > 0$, то результат (3) уже не имеет места, и это вызвано тем, что процесс $(e^{-(\lambda+r)t}(S_t - K)^+)_{t\geqslant 0}$ при $\lambda > 0$ уже не будет субмартингалом (ср. с § 3c).

Перейдем теперь к вопросу о величине «дефекта»

$$\Delta_0^T(x) \equiv V^*(T,x) - V(T,x) \tag{4}$$

для стандартного опциона продавца ($g(x) = (K-x)^+$), считая $\lambda = 0$ и обозначая через $x^* = x^*(t)$, $0 \leqslant t < T$, пограничную функцию между областями остановки и продолжения наблюдений для оптимального момента остановки τ_T^*.

Теорема. *В случае стандартного опциона продавца «дефект» равен*

$$\Delta_0^T(x) = rK\,\mathsf{E}_x \int_0^T e^{-ru} I(S_u < x^*(u))\,du. \tag{5}$$

Следствие 1. *Пусть $\mathbb{P}_T$ и $\mathbb{P}_T^*$ — рациональные стоимости опционов продавца европейского и американского типов ($\mathbb{P}_T = V(T,S_0)$, $\mathbb{P}_T^* = V^*(T,S_0)$). Тогда*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T^* &= \mathbb{P}_T + rK\,\mathsf{E}_{S_0}\int_0^T e^{-ru} I(S_u < x^*(u))\,du = \\ &= Ke^{-rT}\Phi(-y_-) - S_0\Phi(-y_+) + rK\int_0^T e^{-ru}\Phi\bigl(-y_-(u, x^*(u))\bigr)\,du,\end{aligned} \tag{6}$$

где (ср. с обозначениями в § 1b)

$$y_\pm = \frac{\ln\dfrac{S_0}{K} + T\Bigl(r \pm \dfrac{\sigma^2}{2}\Bigr)}{\sigma\sqrt{T}}$$

и

$$y_-\bigl(u, x^*(u)\bigr) = \frac{\ln\dfrac{S_0}{x^*(u)} + u\Bigl(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\Bigr)}{\sigma\sqrt{u}}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть

$$Y(t,x) = \mathsf{E}_{t,x}\, e^{-r(T-t)} g(S_T) \tag{8}$$

и

$$Y^*(t,x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_t^T} \mathsf{E}_{t,x}\, e^{-r(\tau-t)} g(S_\tau), \tag{9}$$

где $g(x) = (K-x)^+$. Тогда для

$$\Delta_t^T(x) \equiv Y^*(t,x) - Y(t,x) \tag{10}$$

находим, что

$$e^{-rt}\Delta_t^T(x) = \mathsf{E}_{t,x}\bigl\{e^{-r\tau_t^T} g(S_{\tau_t^T}) - e^{-rT} g(S_T)\bigr\}, \tag{11}$$

где τ_t^T — оптимальный момент остановки в задаче (9).

По формуле Ито (§ 5с гл. III)

$$d(e^{-ru}(K-S_u)^+) = e^{-ru}\, d(K-S_u)^+ - re^{-ru}(K-S_u)^+\, du, \tag{12}$$

и по формуле Ито—Мейера для выпуклых функций (см. § 4а гл. VII; [395, гл. IV]; ср. также с формулой Танака (17) в § 5с гл. III)

$$d(K-S_u)^+ = -I(S_u < K)\, dS_u + \frac{1}{2} L_u(K), \tag{13}$$

где

$$L_u(K) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^u I(|S_t - K| \leqslant \varepsilon)\, dt \tag{14}$$

— локальное время на $[0, u]$, проводимое процессом $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ на уровне K.

Из формул (11)—(13) находим, что

$$\begin{aligned} e^{-rT}\Delta_t^T(x) &= -\mathsf{E}_{t,x}\int_{\tau_t^T}^T d(e^{-ru}(K-S_u)^+) = \\ &= -\mathsf{E}_{t,x}\int_{\tau_t^T}^T e^{-ru}\Big\{-I(S_u<K)\, dS_u + \frac{1}{2} dL_u(K) - \\ &\qquad\qquad - r(K-S_u)I(S_u<K)\, du\Big\} = \\ &= \mathsf{E}_{t,x}\int_{\tau_t^T}^T e^{-ru}\Big\{-dL_u(K) + I(S_u<K)\times \\ &\qquad\qquad \times\big[rS_u\, du + \sigma S_u\, dW_u + (rK - rS_u)\, du\big]\Big\} = \\ &= \mathsf{E}_{t,x}\int_{\tau_t^T}^T e^{-ru}\big\{rKI(S_u<K)\, du - dL_u(K)\big\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Для $t \leqslant T$ положим

$$A_t = \int_{\tau_0^T}^{\tau_t^T} e^{-ru}\big\{rKI(S_u<K)\, du - dL_u(K)\big\}. \tag{16}$$

Тогда, поскольку $\tau_T^T = T$, из формулы (15) получаем, что

$$e^{-rt}\Delta_t^T(x) = \mathsf{E}_{t,x}[A_T - A_t]. \tag{17}$$

Представим теперь A_t в виде

$$A_t = A_t^1 + A_t^2,$$

где

$$A_t^1 = \int_{\tau_0^T}^{\tau_t^T} e^{-ru} I(S_u \leqslant x^*(u))\big\{rKI(S_u<K)\, du - dL_u(K)\big\},$$

$$A_t^2 = \int_{\tau_0^T}^{\tau_t^T} e^{-ru} I(S_u > x^*(u))\big\{rKI(S_u<K)\, du - dL_u(K)\big\}.$$

Поскольку $x^*(u) < K$ для всех $u < T$, получаем, что

$$A_t^1 = \int_{\tau_0^T}^{\tau_t^T} e^{-ru} I(S_u \leqslant x^*(u)) rK\, du = rK \int_0^t e^{-ru} I(S_u < x^*(u))\, du. \tag{18}$$

Процесс $A^1 = (A_t^1)_{t \leqslant T}$ является предсказуемым субмартингалом и, согласно следствию 2 в § 5b гл. III, компенсатор этого процесса совпадает с ним самим. Несколько более сложный анализ (см. [134], [135] и [363]) показывает, что компенсатор процесса $A^2 = (A_t^2)_{t \leqslant T}$ равен нулю. Тем самым,

$$\begin{aligned} e^{-rt} \Delta_t^T(x) &= \mathsf{E}_{t,x}[A_T - A_t] = \mathsf{E}_{t,x}[A_T^1 - A_t^1] = \\ &= rK\, \mathsf{E}_{t,x} \int_t^T e^{-ru} I(S_u < x^*(u))\, du, \end{aligned} \tag{19}$$

и, следовательно, для $\Delta_0^T(x)$ имеет место формула (5).

Наконец, формула (6) из следствия 1 вытекает из (5) и формулы (18) в § 1b для $\mathbb{P}_T$.

Теорема и следствие 1 доказаны. □

Следствие 2. *Функции $Y^*(t, x)$ и $x^*(t)$ связаны соотношением*

$$Y^*(t, x^*(t)) = K - x^*(t), \quad t \leqslant T, \tag{20}$$

которое можно рассматривать как интегральное соотношение *для определения пограничной функции $x^* = x^*(t)$, $t \leqslant T$, с $x^*(T) \equiv \lim_{t \to T} x^*(t)$.*

Следует при этом подчеркнуть, что на самом деле функция $Y^*(t, x)$ также неизвестна. В реальной практике для этой функции используют приближения $Y_\Delta^*(t, x)$, рассчитываемые методом индукции назад (см. п. 1 § 3b). Заменяя тогда в (19) функцию $Y^*(t, x)$ на $Y_\Delta^*(t, x)$, получаем функцию $x_\Delta^* = x_\Delta^*(t)$, $t \leqslant T$, которую и принимают в качестве аппроксимации для $x^* = x^*(t)$, $t \leqslant T$.

4. Опционы европейского типа и американского типа на диффузионном $(B, \mathscr{P})$-рынке облигаций

§ 4a. О проблематике расчетов опционов на рынке облигаций

1. До сих пор опционы рассматривались лишь на (B, S)-рынках акций. В реальной же финансовой практике можно встретить самые разнообразные опционы, например на евродоллары, фьючерсы, валюту и т. п., и даже опционы на опционы. Помимо стандартных опционов-колл и опционов-пут имеют хождение разнообразные их комбинации. При этом многие опционные финансовые инструменты имеют весьма изощренную структуру, определяемую и видом платежных функций, и типом тех основных ценных бумаг, которые участвуют в составлении опционных контрактов.

О разнообразии опционов, многие из которых относятся к числу «экзотических», можно судить, например, по их (английским) наименованиям: up-and-out put, up-and-in put, down-and-out call, down-and-in call, barrier option, Bermuda option, Rainbow option, Russian option, knock-out option, digital option, all-or-nothing, one-touch all-or-nothing, supershares, ... (см. [232], [414], [415]).

Говоря о расчетах упомянутых опционов и других производных финансовых инструментов, следует отметить, что их методология такая же, как и в моделях, рассмотренных Ф. Блэком, М. Шоулсом и Р. Мертоном [44], [346] в случае (B, S)-рынка акций. При этом снова возможны два пути — мартингальный и базирующийся на непосредственном обращении к «фундаментальному уравнению» (ср. с § 1b, c).

2. Последующее изложение будет относиться к расчетам стандартных опционов европейского и американского типа для случая, когда вместо (B, S)-рынка рассматривается $(B, \mathscr{P})$-рынок, состоящий из банковского счета $B = (B_t)_{t \leqslant T}$ и *единственной* облигации с моментом исполнения T, структура которой описывается (положительным) процессом $\mathsf{P} = (\mathsf{P}(t, T))_{t \leqslant T}$, подчиненным условию $\mathsf{P}(T, T) = 1$.

В соответствии с изложением в § 4a гл. III и § 5a гл. VII, будем при описании $(B, \mathscr{P})$-рынка придерживаться *опосредованного* подхода, считая, что эволюция банковского счета $B=(B_t)_{t\leqslant T}$ такова, что

$$B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right), \tag{1}$$

где $r=(r(t))_{t\leqslant T}$ — некоторый стохастический процесс *процентной ставки*.

Что же касается динамики процесса цен $\mathsf{P}=(\mathsf{P}(t,T))_{t\leqslant T}$ облигации, то будем предполагать, что относительно *исходной* меры на $(\Omega, \mathscr{F}_T, (\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T})$ дисконтированные цены

$$\overline{\mathsf{P}}(t,T) = \frac{\mathsf{P}(t,T)}{B_t}, \quad t\leqslant T, \tag{2}$$

образуют *мартингал*.

Согласно теореме 1 из § 5a гл. VII имеем

$$\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{E}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right), \tag{3}$$

а в силу теоремы 2 из того же § 5a гл. VII рассматриваемый (B,P)-рынок является *безарбитражным* (скажем, в NA_+-версии).

3. Из формул (1) и (3) видим, что на $(B,\mathscr{P})$-рынке динамика процессов $(B_t)_{t\leqslant T}$ и $(\mathsf{P}(t,T))_{t\leqslant T}$ существенно зависит от структуры процесса $r = (r(t))_{t\leqslant T}$.

Наше основное предположение относительно этого процесса будет состоять в том, что это есть *диффузионный гауссовско-марковский процесс*, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = \big(\alpha(t)-\beta(t)r(t)\big)\,dt + \gamma(t)\,dW_t, \tag{4}$$

порождаемым винеровским процессом $(W_t)_{t\leqslant T}$ и (неслучайным) начальным условием $r(0)=r_0$. Функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ предполагаются детерминированными, причем

$$\int_0^T \big(|\alpha(t)|+|\beta(t)|+\gamma^2(t)\big)\,dt < \infty. \tag{5}$$

В этих предположениях уравнение (4) имеет, и притом единственное, (сильное) решение

$$r(t) = g(t)\left\{r_0 + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{g(s)}\,ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{g(s)}\,dW_s\right\}, \tag{6}$$

где

$$g(t) = \exp\left(-\int_0^t \beta(s)\,ds\right) \tag{7}$$

— *фундаментальное решение* уравнения

$$g(t) = 1 - \int_0^t \beta(s) g(s)\, ds. \tag{8}$$

Замечание 1. Согласно изложению в § 4a гл. III модель (4) есть не что иное, как *модель Халла и Уайта*, частными случаями которой являются *модели Мертона, Васичека, Хо и Ли* (см. формулы (14), (7), (8) и (12) в указанном § 4a).

4. Из марковости процесса $r = (r(t))_{t \leqslant T}$ следует, что

$$\mathsf{P}(t, T) = \mathsf{E}\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(s)\, ds\Big) \,\Big|\, r(t)\Big]. \tag{9}$$

Обозначим $I(t, T) = \int_t^T r(s)\, ds$. Тогда из формулы (6) нетрудно найти, что

$$\mathsf{E}\big(I(t, T) \,|\, r(t)\big) = r(t) \int_t^T \frac{g(u)}{g(t)}\, du + \int_t^T \Big[\int_t^u \frac{g(u)}{g(s)} \alpha(s)\, ds\Big] du, \tag{10}$$

$$\mathsf{D}\big(I(t, T) \,|\, r(t)\big) = \int_t^T \Big[\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)} \gamma(s)\, du\Big]^2 ds. \tag{11}$$

Поэтому из формулы (3) следует, что для

$$\mathsf{P}(t, T) = \mathsf{E}\big[\exp(-I(t, T)) \,|\, r(t)\big] = \exp\Big(\frac{1}{2}\, \mathsf{D}\big(I(t, T) \,|\, r(t)\big) - \mathsf{E}\big(I(t, T) \,|\, r(t)\big)\Big)$$

имеет место следующее представление:

$$\mathsf{P}(t, T) = \exp\big(A(t, T) - r(t) B(t, T)\big), \tag{12}$$

где

$$A(t, T) = \frac{1}{2} \int_t^T \Big[\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)} \gamma(s)\, du\Big]^2 ds - \int_t^T \Big[\int_t^u \frac{g(u)}{g(s)} \alpha(s)\, ds\Big] du, \tag{13}$$

$$B(t, T) = \int_t^T \frac{g(u)}{g(t)}\, du. \tag{14}$$

Замечание 2. Согласно терминологии § 4c гл. III модели, в которых цены $\mathsf{P}(t, T)$ представляются в виде (12), называются *однофакторными аффинными моделями*. Сделанное дополнительное предположение, что процесс $r = (r(t))_{t \leqslant T}$ является *гауссовско-марковским*, дает возможность для таких моделей, часто называемых *однофакторными гауссовскими моделями*, довольно детально провести соответствующие расчеты для стандартных опционов европейского и американского типов на рассматриваемых $(B, \mathscr{P})$-рынках. Этим вопросам посвящены последующие § 4b, c.

Замечание 3. По поводу согласования разных моделей, описывающих динамику цен облигаций, с эмпирическими данными см., например, [257].

§ 4b. О расчетах опционов европейского типа в однофакторных гауссовских моделях

1. Будем предполагать, что рассматриваемая $(B, \mathscr{P})$-модель рынка, состоящая из банковского счета и облигации, полностью определяется *единсвтвенным фактором* — процентной ставкой $r = (r(t))_{t \leqslant T}$, являющейся *гауссовско-марковским* процессом, подчиняющимся стохастическому дифференциальному уравнению (4) из § 4a с (неслучайным) начальным условием $r(0) = r_0$.

Пусть T^0 — некоторый момент ($T^0 < T$), рассматриваемый как *момент исполнения* опциона европейского типа с функцией выплат $f_{T^0} = (\mathsf{P}(T^0, T) - K)^+$ в случае опциона покупателя и $f_{T_0} = (K - \mathsf{P}(T^0, T))^+$ — в случае опциона продавца.

Теорема. *В описанной однофакторной гауссовской модели $(B, \mathscr{P})$-рынка рациональная стоимость $\mathbb{C}^0(T^0, T)$ стандартного опциона покупателя определяется формулой*

$$\boxed{\mathbb{C}^0(T^0, T) = \mathsf{P}(0, T)\Phi(d_+) - K\mathsf{P}(0, T^0)\Phi(d_-)}\,. \tag{1}$$

где

$$d_\pm = \frac{\ln \dfrac{\mathsf{P}(0, T)}{K\mathsf{P}(0, T^0)} \pm \dfrac{1}{2}\sigma^2(T^0, T)B^2(T^0, T)}{\sigma(T^0, T)B(T^0, T)}, \tag{2}$$

$$B(T^0, T) = \int_{T^0}^{T} \frac{g(u)}{g(T^0)}\, du, \tag{3}$$

$$\sigma(T^0, T) = \left(\int_{T^0}^{T}\left[\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)}\gamma(s)\, du\right]^2 ds\right)^{1/2}, \tag{4}$$

$$g(u) = \exp\left(-\int_0^u \beta(s)\, ds\right). \tag{5}$$

Рациональная стоимость $\mathbb{P}^0(T^0, T)$ стандартного опциона продавца определяется формулой

$$\boxed{\mathbb{P}^0(T^0, T) = K\mathsf{P}(0, T^0)\Phi(-d_-) - \mathsf{P}(0, T)\Phi(-d_+)}\,. \tag{6}$$

Прежде чем переходить к доказательству формул (1) и (6), отметим, что они весьма схожи с формулами для рациональных стоимостей $\mathbb{C}(T)$ и $\mathbb{P}(T)$ в случае акций (см. (9) и (18) в § 1b).

Это сходство не столь уж удивительно, поскольку для рассматриваемой модели цены $\mathsf{P}(t, T)$ имеют, как и цены S_t в модели Блэка—Мертона—Шоулса, *логарифмически-нормальную* структуру:

$$\ln \mathsf{P}(t, T) = A(t, T) - r(t)B(t, T),$$

где $(r(t))_{t\leqslant T}$ является гауссовским процессом,

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma W_t$$

и $(W_t)_{t\leqslant T}$ — винеровский (и, значит, также гауссовский) процесс.

Более, пожалуй, удивительно то, что прошло столь много лет с 1973 года, когда была опубликована формула Блэка и Шоулса, до 1989 года, когда появилась статья Ф. Джамшидиана (F. Jamshidian [256]), в которой были получены формулы (1) и (6) для модели Васичека ($\alpha(t)\equiv\alpha$, $\beta(t)\equiv\beta$, $\gamma(t)\equiv\gamma$; см. (4) в § 4a и (8) в § 4a гл. III). Приводимое ниже доказательство следует в основном работе [257].

2. В соответствии с теорией расчетов на полных безарбитражных рынках (см. раздел 5 гл. VII) и в предположении, что исходная вероятностная мера на $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T})$, $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$, является мартингальной, находим, полагая

$$R(t) = \exp\Big(-\int_0^t r(u)\,du\Big), \tag{7}$$

что

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^0(T^0, T) &= \mathsf{E}\, R(T^0)(\mathsf{P}(T^0,T) - Kx)^+ = \\ &= \mathsf{E}\big(I(\mathsf{P}(T^0,T) > K) R(T^0)(\mathsf{P}(T^0,T) - K)\big) = \\ &= \mathsf{E}\big(I(\mathsf{P}(T^0,T) > K) R(T^0)\mathsf{P}(T^0,T)\big) - K\,\mathsf{E}\big(I(\mathsf{P}(T^0,T) > K) R(T^0)\big).\end{aligned} \tag{8}$$

Ясно, что

$$\big\{\mathsf{P}(T^0,T) > K\big\} = \big\{A(T^0,T) - r(T^0)B(T^0,T) > \ln K\big\} = \big\{r(T^0) \leqslant r^*\big\}, \tag{9}$$

где

$$r^* = \frac{\ln K - A(T^0,T)}{-B(T^0,T)} \tag{10}$$

и $A(t,T)$, $B(t,T)$ определены формулами (13) и (14) в § 4a.

Пусть

$$\xi = r(T^0), \qquad \eta = \int_0^T r(u)\,du, \qquad \zeta = \int_0^{T^0} r(u)\,du.$$

Тогда из формул (8) и (9) находим, что

$$\mathbb{C}^0(T^0, T) = \mathsf{E}\big(I(\xi \leqslant r^*)e^{-\eta}\big) - K\,\mathsf{E}\big(I(\xi \leqslant r^*)e^{-\zeta}\big). \tag{11}$$

Для дальнейшего упрощения этой формулы полезным является следующее утверждение, справедливость которого устанавливается прямым подсчетом (см. [257, лемма 4.2]).

Лемма 1. *Пусть* (X, Y) — *гауссовская пара случайных величин с вектором средних значений* (μ_X, μ_Y) *и матрицей ковариаций* $\begin{pmatrix} \sigma_X^2, & \rho_{XY} \\ \rho_{XY}, & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\, I(X \leqslant x) \exp(-Y) = \exp\Big(\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \mu_Y\Big)\, \Phi(\widetilde{x}) \tag{12}$$

и

$$\mathsf{E}\, I(X \leqslant x) X \exp(-Y) = \exp\Big(\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \mu_Y\Big) \cdot \big\{(\mu_X - \rho_{XY})\Phi(\widetilde{x}) - \sigma_X \varphi(\widetilde{x})\big\}, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{x} = \frac{x - (\mu_X - \rho_{XY})}{\sigma_X},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, dy.$$

С учетом формул (6), (10) и (11) из § 4а нетрудно подсчитать, что

$$\mu_\xi = \mathsf{E}\, r(T^0) = g(T^0)\Big(r_0 + \int_0^{T^0} \frac{1}{g(s)} \alpha(s)\, ds\Big),$$

$$\mu_\eta = \mathsf{E} \int_0^T r(u)\, du = r_0 \int_0^T g(u)\, du + \int_0^T \Big[\int_0^u \frac{g(u)}{g(s)} \alpha(s)\, ds\Big] du,$$

$$\mu_\zeta = \mathsf{E} \int_0^{T^0} r(u)\, du = r_0 \int_0^{T^0} g(u)\, du + \int_0^{T^0} \Big[\int_0^u \frac{g(u)}{g(s)} \alpha(s)\, ds\Big] du$$

и

$$\sigma_\xi^2 = \mathsf{D}\; r(T^0) = \int_0^{T^0} \gamma^2(s) \Big(\frac{g(T^0)}{g(s)}\Big)^2 ds,$$

$$\sigma_\eta^2 = \mathsf{D} \int_0^T r(u)\, du = \int_0^T \Big[\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)} \gamma(s)\, du\Big]^2 ds,$$

$$\sigma_\zeta^2 = \mathsf{D} \int_0^{T^0} r(u)\, du = \int_0^{T^0} \Big[\int_s^{T^0} \frac{g(u)}{g(s)} \gamma(s)\, du\Big]^2 ds,$$

$$\rho_{\xi\zeta} = \mathsf{Cov}\Big(r(T^0), \int_0^{T^0} r(u)\, du\Big) = \int_0^{T^0} \Big(\gamma^2(s) \frac{g(T^0)}{g(s)} \int_s^{T^0} \frac{g(u)}{g(s)}\, du\Big) ds,$$

$$\begin{aligned}\rho_{\xi\eta} &= \mathsf{Cov}\Big(r(T^0), \int_0^T r(u)\, du\Big) = \\ &= \mathsf{Cov}\Big(r(T^0), \int_0^{T^0} r(u)\, du\Big) + \mathsf{Cov}\Big(r(T^0), \int_{T^0}^T r(u)\, du\Big) = \\ &= \rho_{\xi\zeta} + \sigma_\xi^2 \int_{T^0}^T \frac{g(u)}{g(T^0)}\, du.\end{aligned}$$

Из формул (11) и (12) находим, что

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^0(T^0, T) &= \mathsf{E}\big(I(\xi \leqslant r^*)e^{-\eta}\big) - K\,\mathsf{E}\big(I(\xi \leqslant r^*)e^{-\zeta}\big) = \\ &= \exp\Big(\frac{1}{2}\sigma_\eta^2 - \mu_\eta\Big)\,\Phi\Big(\frac{r^* - (\mu_\xi - \rho_{\xi\eta})}{\sigma_\xi}\Big) - \\ &\qquad - K\exp\Big(\frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 - \mu_\zeta\Big)\,\Phi\Big(\frac{r^* - (\mu_\xi - \rho_{\xi\zeta})}{\sigma_\xi}\Big).\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя сюда вышеприведенные значения μ_ξ, μ_η, μ_ζ, σ_ξ, σ_η, σ_ζ, $\rho_{\xi\eta}$ и $\rho_{\xi\zeta}$, после некоторых алгебраических преобразований (см. [257, Appendix 4b]) приходим к требуемой формуле (1).

Формула (6) следует непосредственно из (1) с учетом того, что

$$(K - \mathsf{P}(T^0, T))^+ = (\mathsf{P}(T^0, T) - K)^+ - \mathsf{P}(T^0, T) + K.$$

(Ср., например, с выводом формулы (9) в § 4d гл. VI.)

Теорема доказана. □

3. Из формулы (6) следует, что рациональная стоимость $\mathbb{P}^0(T^0, T)$ определяется по «начальным» ценам $\mathsf{P}(0, T^0)$, $\mathsf{P}(0, T)$, константе K и величине $\sigma(T^0, T)B(T^0, T)$, определяемой, в свою очередь, по коэффициентам $\beta(s)$, $\gamma(s)$ при $T^0 \leqslant s \leqslant T$.

В случае модели Васичека $\beta(s) \equiv s$, $\gamma(s) \equiv \gamma$, и нетрудно найти, что

$$\sigma(T^0, T)B(T^0, T) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta(T - T^0)})\Big(\frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta T^0})\Big)^{1/2}.$$

Начальные цены $\mathsf{P}(0, T^0)$ и $\mathsf{P}(0, T)$ определяются в этом случае из формулы (см. (12) в § 4a)

$$\mathsf{P}(0, t) = \exp\big\{A(0, t) - r_0 B(0, t)\big\},$$

где

$$\begin{aligned}A(0, t) &= \frac{1}{\beta}[1 - e^{-\beta t} - \beta t]\Big[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\gamma^2}{2\beta^2}\Big] - \frac{\gamma^2}{4\beta^3}[1 - e^{-\beta t}]^2, \\ B(0, t) &= \frac{1}{\beta}[1 - e^{-\beta t}].\end{aligned}$$

§ 4c. О расчетах опционов американского типа в однофакторных гауссовских моделях

1. Продолжая рассмотрение однофакторной гауссовской $(B, \mathscr{P})$-модели, для которой в § 4b «О расчетах опционов европейского типа…» были приведены формулы для $\mathbb{C}^0(T^0, T)$ и $\mathbb{P}^0(T^0, T)$, будем обозначать через $\mathbb{C}^*(T^0, T)$ и $\mathbb{P}^*(T^0, T)$ соответствующие рациональные стоимости для опционов (покупателя и продавца) американского типа. При этом предполагается, что моменты исполнения принадлежат классу

$$\mathfrak{M}_0^{T^0} = \big\{\tau = \tau(\omega)\colon\ 0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant T^0,\ \omega \in \Omega\big\}.$$

Рассматриваемый $(B, \mathscr{P})$-рынок является и безарбитражным, и полным, и в соответствии с общей теорией расчетов в подобных моделях (см. раздел 2 гл. VI и раздел 5 гл. VII),

$$\mathbb{C}^*(T^0, T) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^{T^0}} \mathsf{E} \exp\left(-\int_0^\tau r(u)\,du\right)(\mathsf{P}(\tau, T) - K)^+ \tag{1}$$

и

$$\mathbb{P}^*(T^0, T) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^{T^0}} \mathsf{E} \exp\left(-\int_0^\tau r(u)\,du\right)(K - \mathsf{P}(\tau, T))^+. \tag{2}$$

Поскольку

$$\mathsf{P}(\tau, T) = \exp\big(A(\tau, T) - r(\tau)B(\tau, T)\big), \tag{3}$$

мы видим, что задачи (1) и (2) относятся к стандартным задачам об оптимальной остановке

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^{T^0}} \mathsf{E} \exp\left(-\int_0^\tau r(u)\,du\right)G(\tau, T; r(\tau)) \tag{4}$$

для марковских процессов $r = (r(t))_{t \leqslant T}$ и функций $G(\tau, T; r(\tau)) \geqslant 0$, общая теория решения которых достаточно хорошо развита (см., например, [441]).

2. Совсем просто решается вопрос относительно отыскания величины $\mathbb{C}^*(T^0, T)$. Действительно, как и в случае стандартных опционов-колл на (B, S)-рынках, процесс

$$\left(\exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)(\mathsf{P}(t, T) - K)^+\right)_{t \leqslant T}$$

является субмартингалом, значит, по теореме Дуба об остановке $\mathbb{C}^*(T^0, T) = \mathbb{C}^0(T^0, T)$, что в § 5b гл. VI и в § 3b интерпретировалось как то, что рассматриваемый опцион-колл американского типа является опционом европейского типа.

Переходя к отысканию стоимости $\mathbb{P}^*(T^0, T)$, введем величины

$$Y^*(t, r) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_t^{T^0}} \mathsf{E}_{t,r} \exp\left(-\int_t^\tau r(u)\,du\right)G(\tau, T; r(\tau)), \tag{5}$$

где $\mathsf{E}_{t,r}$ — усреднение в предположении $r(t) = r$, $\mathfrak{M}_t^{T^0}$ — класс таких моментов остановки $\tau = \tau(\omega)$, что $t \leqslant \tau(\omega) \leqslant T^0$, и

$$G(t, T; r(t)) = (K - \mathsf{P}(t, T))^+ = \Big(K - \exp\big(A(t, T) - r(t)B(t, T)\big)\Big)^+,$$

где функции $A(t, T)$ и $B(t, T)$ определяются формулами (13) и (14) в § 4a.

Обозначим

$$C^T = \big\{(t, r)\colon\ Y^*(t, r) > G(t, T; r),\ 0 \leqslant t < T,\ r > 0\big\}$$

и

$$D^T = \{(t, r) \colon Y^*(t, r) = G(t, T; r),\ 0 \leqslant t < T,\ r > 0\}.$$

Основываясь на характеристических свойствах цен $Y^*(t, r)$ как наименьших эксцессивных мажорант функций $G(t, T; r)$ (см. [340], [363], [441, гл. III], [467], [478]), можно показать, что существует такая непрерывная пограничная функция $r^* = r^*(t)$, $t < T^0$, что области C^T и D^T (продолжения и остановки наблюдений) имеют следующий вид:

$$C^T = \{(t, r) \colon r(t) < r^*(t),\ 0 \leqslant t < T,\ r > 0\}$$

и

$$D^T = \{(t, r) \colon r(t) \geqslant r^*(t),\ 0 \leqslant t < T,\ r > 0\}.$$

При этом $Y^* = Y^*(t, r)$ и пограничная функция $r^* = r^*(t)$ являются решениями следующей *задачи Стефана*:

$$\frac{\partial Y^*(t, r)}{\partial t} + LY^*(t, r) - rY^*(t, r) = 0, \quad (t, r) \in C^T,$$

где

$$LY^*(t, r) = (\alpha(t) - \beta(t)r)\frac{\partial Y^*(t, r)}{\partial r} + \frac{1}{2}\gamma^2(t)\frac{\partial^2 Y^*(t, r)}{\partial r^2};$$

в области D^T выполняется условие

$$Y^*(t, r) = G(t, T; r), \tag{6}$$

и на ∂D^T выполняется *условие гладкого склеивания*

$$\left.\frac{\partial Y^*(t, r)}{\partial r}\right|_{r \uparrow r^*(t)} = \left.\frac{\partial G(t, T; r)}{\partial r}\right|_{r \downarrow r^*(t)}. \tag{7}$$

Точное аналитическое решение этой задачи неизвестно (как, впрочем, и в случае (B, S)-моделей; см. § 3c). В то же самое время, учитывая широкую распространенность опционов американского типа на практике, хотелось бы иметь представление о том, насколько стоимость $\mathbb{P}^*(T^0, T)$ опциона американского типа больше стоимости $\mathbb{P}^0(T^0, T)$ опциона европейского типа, как ведет себя пограничная функция $r^* = r^*(t)$, $t < T^0$.

Рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы в § 3d для установления связи между стоимостями опционов европейского и американского типов на (B, S)-рынке, применимы в рассматриваемом случае $(B, \mathscr{P})$-рынков и приводят к следующему результату (ср. с формулой (19) в § 3d): для $0 \leqslant t < T^0$ имеем

$$Y^*(t, r) = Y^0(t, r) + K \int_t^{T^0} \mathsf{E}_{t,r}\left\{\exp\left(-\int_t^s r(u)\, du\right) r(s) I(r(s) \geqslant r^*(s))\right\} ds, \tag{8}$$

где

$$Y^0(t,r) = \mathsf{E}_{t,r} \exp\Bigl(-\int_t^{T^0} r(u)\,du\Bigr)(K - \mathsf{P}(T^0,T))^+ =$$
$$= \mathsf{E}_{t,r} \exp\Bigl(-\int_t^{T^0} r(u)\,du\Bigr)\Bigl(K - \exp\bigl(A(T^0,T) - r(T^0)B(T^0,T)\bigr)\Bigr). \qquad (9)$$

Пользуясь формулами (12) и (13) из § 4b и найденными там значениями для величин $\mu_\xi, \mu_\eta, \ldots$, после несложных алгебраических преобразований получаем:

$$Y^*(t,r) = Y^0(t,r) +$$
$$+ K \int_t^{T^0} \mathsf{P}(t,s)\bigl\{\Phi(-\nu^*(t,s)) f(t,s) + \sigma(t,s)\varphi(\nu^*(t,s))\bigr\}\,ds \qquad (10)$$

для $0 \leqslant t \leqslant T^0$, где

$$\sigma^2(t,s) = \mathsf{D}(r(s)\,|\,r(t) = r),$$
$$f(t,s) = -\frac{\partial}{\partial s} \ln \mathsf{P}(t,s),$$
$$\nu^*(t,s) = \frac{r^*(s) - f(t,s)}{\sigma(t,s)}.$$

(Детали вывода формул (8) и (10) см. в [257].)

В частности, поскольку

$$\mathbb{P}^*(T^0,T) = Y^*(0,r_0) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}^0(T^0,T) = Y^0(0,r_0),$$

получаем, что

$$\mathbb{P}^*(T^0,T) = \mathbb{P}^0(T^0,T) +$$
$$+ K \int_0^{T^0} \mathsf{P}(0,s)\bigl\{\Phi(-\nu^*(0,s)) f(0,s) + \sigma(0,s)\varphi(\nu^*(0,s))\bigr\}\,ds.$$

В заключение отметим, что формула (10) дает возможность (индукцией назад) получать по крайней мере приближенные значения и для стоимости $\mathbb{P}^*(T^0,T)$, и для пограничной функции $r^* = r^*(t)$, $t < T^0$.

По поводу разнообразных методов численных расчетов опционов американского типа (в том числе и в случаях с дивидендами) см., например, [28], [29], [56], [57], [179], [257], [376], [478] и [479].

Литература

[1] *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover, 1968.

[2] Adaptive Computational Methods in Finance and Trading. Report of the Intertek Group. Foreword by R. B. Olsen Zürich: «Olsen and Associates», Research Institute for Applied Economics, December, 1994.

[3] *Admati A. R., Pfleiderer P.* A theory of intraday trading patterns // Review of Financial Studies. 1988. V. 1. P. 3—40.

[4] *Akgiray V., Booth G. G.* The stable-law model of stock returns // Journal of Business and Economic Statistics. 1988. V. 6. P. 51—57.

[5] *Александров П. С., Хинчин А. Я.* Андрей Николаевич Колмогоров (к пятидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1953. Т. 8, № 3. С. 178—200.

[6] *Andersen L., Andreasen J., Brotherton-Ratcliffe R.* The Passport Option. Preprint Aarhus: Aarhus University, February, 1997.

[7] *Andersen T., Bollerslev T.* Intraday Seasonality and Volatility Persistence in Foreign Exchange and Equity Markets. Working paper № 193. Evanston, IL: Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1994.

[8] *Anis A. A., Lloyd E. H.* The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands // Biometrika. 1976. V. 63, № 1. P. 111—116.

[9] *Ansel J.-P., Stricker C.* Couverture des actifs contingents et prix maximum // Annales de l'Institut Henri Poincaré. 1994. V. 30, № 2. P. 303—315.

[10] *Ansel J.-P., Stricker C.* Quelques remarques sur un théorème de Yan // Lecture Notes in Mathematics. 1990. V. 1426. P. 226—274.

[11] *Аркин В. И., Евстигнеев И. В.* Вероятностные модели управления и экономической динамики. М.: Наука, 1979.

[12] *Bachelier L.* Théorie de la spéculation // Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 1900. V. 17 P. 21—86. (Англ. перев.: [77].)

[13] *Baillie R., Bollerslev T.* Intra-day and inter market volatility in foreign exchange rates // Review of Economic Studies. 1990. V. 58. P. 565—585.

[14] *Baillie R., Bollerslev T.* The daily message in exchange rates: a conditional variance tale // Journal of Business and Economic Statistics. 1989. V. 7. P. 297—305.

[15] *Baillie R. T., Bollerslev T., Mikkelsen H.-O.* Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Working paper № 168. Evanston, IL: Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1993 // Journal of Econometrics. 1996. V. 74. № 1.

[16] *Baker G. L., Golub J. P.* Chaotic Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.

[17] *Balakrishnan V., Nicolis C., Nicolis G.* Extreme Value Distributions in Chaotic Dynamics. Preprint ULB—Cenoli, № 95-1 Bruxelles: Centre for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, January, 1995.

[18] *Ball C. A.* A review of stochastic volatility models with application to option pricing // Financial Markets, Institutions and Instruments. 1993. V. 2, № 5. P. 55—69.

[19] *Ball C. A., Torous W. N.* Bond price dynamics and options // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1983. V. 18. P. 517—531.

[20] *Barlow M. T.* One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution // Journal of the London Mathematical Society. V. 26. P. 335—347. 1982.

[21] *Barndorff-Nielsen O. E.* Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size // Proceedings of the Royal Society. London. Ser. A. 1977. V. 353. P. 401—419.

[22] *Barndorff-Nielsen O. E.* Gaussian/Inverse Gaussian Processes and the Modeling of Stock Returns. Preprint. Aarhus: Aarhus University, October, 1994.

[23] *Barndorff-Nielsen O. E.* Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae // Scandinavian Journal of Statistics. 1978. V. 5. P. 151—157.

[24] *Barndorff-Nielsen O. E.* Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling. Preprint. Aarhus: Aarhus University, Dept. of Mathematical Sciences, March 5, 1996.

[25] *Barndorff-Nielsen O. E., Blæsild P.* Hyperbolic distributions and ramifications: contributions to theory and application // Statistical Distributions in Scientific Work, V. 4 / Eds. C. Taillie et al. Dordrecht: Reidel, 1981. P. 19—44.

[26] *Barndorff-Nielsen O. E., Jensen J. L., Sørensen M.* Wind shear and hyperbolic distributions // Boundary-Layer Meteorology. 1989. V. 49. P. 417—431.

[27] *Barnea A., Downes D.* A reexamination of the empirical distribution of stock price changes // Journal of American Statistical Association. 1973. V. 68. P. 348—350.

[28] *Barone-Adesi G., Elliott R.* Approximations for the values of American options // Stochastic Analysis and Applications. 1991. V. 9, № 2. P. 115—131.

[29] *Barone-Adesi G., Whaley R. E.* Efficient analytic approximation of American option values // Journal of Finance. 1987. V. 42, № 2. P. 301—320.

[30] *Basseville M., Nikiforov I.* Detection of Abrupt Changes. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

[31] *Baxter M., Rennie A.* Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1996.

[32] *Beibel M., Lerche H. R.* A New Look at Warrant Pricing and Related Optimal Stopping Problems. Preprint. Freiburg i. Br.: Universität Freiburg, Institut für Mathematische Stochastik, 1995.

[33] *Bensoussan A.* On the theory of option pricing // Acta Applicandae Mathematicae. 1984. V. 2 P. 139—158.

[34] *Benveniste A., Métivier M., Priouret P.* Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[35] *Bernstein P. L.* Capital Ideas. New York: The Free Press, 1992.

[36] *Björk T.* Interest Rate Theory. Working paper № 72 Stockholm School of Economics 1996.

[37] *Björk T., Di Masi G., Kabanov Yu., Runggaldier W.* Towards a general theory of bond markets // Finance and Stochastics. 1997. V. 2, № 1. P. 141—174.

[38] *Björk T., Kabanov Yu., Runggaldier W.* Bond market structure in the presence of marked point processes // Mathematical Finance. 1997. V. 7, № 2. P. 211—239.

[39] *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

[40] *Bishop G. W., Jr.* Charles H. Dow and the Dow Theory. New York: Appleton-Century-Crofts, 1960.

[41] *Black F.* The holes in Black—Scholes // RISK-magazin. March, 1988.

[42] *Black F. T., Derman E., Toy W.* A one-factor model of interest rate and its application to Treasury bond options // Financial Analysts Journal. 1990. P. 33—39.

[43] *Black F., Karasinski P.* Bond and option pricing when short rates are lognormal // Financial Analysts Journal. 1991. P. 52—59.

[44] *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973. V. 81, № 3. P. 637—659.

[45] *Благовещенский Ю. Н., Легостаева И. Л.* Параметрические границы для непараметрического тренда // ДАН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 791—794.

[46] *Blattberg R. C., Gonedes N. J.* A comparison of the stable and the Student distributions as statistical models for stock prices // Journal of Business. 1974. V. 47. P. 244—280.

[47] *Bochner S.* Subordination of non-Gaussian processes // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1962. V. 48. P. 19—22.

[48] *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. V. 31. P. 307—327.

[49] *Boness A., Chen A., Jatusipitak S.* Investigations of nonstationary prices // Journal of Business. 1974. V. 47. P. 518—537.

[50] *Буренин А. Н.* Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. М.: Тривола, 1995.

[51] *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

[52] *Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman D. A., Jones D. A., Nesbitt C. J.* Actuarial Mathematics. Itasca, IL: Society of Actuaries, 1986.

[53] *Box G. E. P., Jenkins G. M.* Time Series Analysis: Forecasting and Control San Francisco: Holden Day, 1970.

[54] *Brace A., Musiela M.* A multifactor Gauss—Markov implementation of Heath, Jarrow and Morton // Mathematical Finance. 1994. V. 4, № 3. P. 259—283.

[55] *Brealey R. A., Myers S. C.* Principles of Corporate Finance. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1988.

[56] *Brennan M., Schwartz E. S.* A continuous time approach to the pricing of bonds // Journal of Banking and Finance. 1979. V. 3. P. 133—155.

[57] *Brennan M., Schwartz E. S.* The valuation of American put options // Journal of Finance. 1977. V. 32. P. 449—462.

[58] *Brock W. A., Dechert W. D., Scheinkman J.-A.* A Test for Independence Based on the Correlation Dimension. SSRI Working paper № 8702. University of Wisconsin-Madison, Dept. of Economics, 1987.

[59] *Brock W. A, Hsieh D. A., Le Baron B.* Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.

[60] *Brock W. A., Potter S. M.* Diagnostic testing for nonlinearity, chaos, and general dependence in time-series data // Nonlinear Modeling and Forecasting (Proceedings of a Workshop on Nonlinear Modeling and Forecasting, September 1990, Santa Fe, New Mexico) / Eds. M. Casdagli and S. Enbank. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990. P. 137—159.

[61] *Brock W. A., Sayers C. L.* Is the business cycle characterized by deterministic chaos? // Journal of Monetary Economics. 1988. V. 22. P. 71—90.

[62] *Brockwell P. J., Davis R. A.* Time Series: Theory and Methods. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991.

[63] *Brousseau V., Czarnecki M. O.* Modelling Exchange Rates: the Stable Model. Preprint. Paris: Ecole Polytechnique, August 16, 1994.

[64] *Burnham J. B.* Current Structure and Recent Developments in Foreign Exchange Markets // Recent Developments in International Banking and Finance / Ed. S. J. Khonry Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., North-Holland, 1991. P. 123—163.

[65] Бизнес: Оксфордский толковый словарь. М.: Прогресс-Академия 1995. (Перевод с англ.: A Concise Dictionary of Business. Market House Books, Ltd., 1991.)

[66] *Carr P., Jarrow R., Myneni R.* Alternative characterizations of American put options // Mathematical Finance. 1992. V. 2, № 2. P. 87—106.

[67] *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a normal distribution // Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. 1. Univ. of California Press, 1961. P. 79—92.

[68] *Четыркин Е. М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Business Речь, Дело, 1992.

[69] *Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F., Sanders A. B.* An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rates // Journal of Finance. 1992. V. 47, № 3. P. 1209—1227.

[70] *Chen L.* A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates. Preprint. Washington, USA: Federal Reserve Board, July, 1995.

[71] Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics / Eds. P. Chen and R. H. Day. Oxford: Oxford University Press, 1993.

[72] *Choi J. Y., Salandro D., Shastri K.* On the estimation of bid-ask spreads: Theory and evidence // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1988. V. 23, P. 219—230.

[73] *Chou C. S.* Caractérisation d'une classe de semimartingales // Lecture Notes in Mathematics. 1979. V. 721. P. 250—252.

[74] *Chou C. S., Meyer P.-A., Stricker C.* Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés // Lecture Notes in Mathematics. 1980. V. 784. P. 128—139.

[75] *Chow Y. S., Robbins H., Siegmund D.* Great Expectations: The Theory of Opti-

mal Stopping. Boston: Houghton Mifflin Comp., 1971.

[76] *Ciesielski Z.* Hölder conditions for realizations of Gaussian processes // Transactions of the American Mathematical Society. 1961. V. 99. P. 403—413.

[77] *Clark J. M. C.* The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals // Annals of Mathematical Statistics. 1970. V. 41, № 4. P. 1282—1295. Correction *ibid* 1971. V. 42. P. 1778.

[78] The Random Character of Stock Market Prices. / Ed. Cootner P. H. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.

[79] *Copeland T., Weston J.* Financial Theory and Corporate Policy. 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.

[80] *Cox J. C., Ingersoll J. E., Jr., Ross S. A.* An analysis of variable rate loan contracts // Journal of Finance. 1980. V. 35. P. 389—403.

[81] *Cox J. C, Ingersoll J. E., Jr., Ross S. A.* A theory of the term structure of interest rates // Econometrica. 1985. V. 53, № 2. P. 385—407.

[82] *Cox J. C., Ross R. A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // Journal of Financial Economics. 1979. V. 7, № 3. P. 229—263.

[83] *Cox J. C., Rubinstein M.* Options Markets. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985.

[84] *Cowles A.* Can stock market forecasters forecast? // Econometrica. 1933. V. 1. P. 309—324.

[85] *Cowles A.* Stock Market Forecasting // Econometrica. 1944. V. 12, № 3/4. P. 206—214.

[86] *Cowles A., Jones H. E.* Some a posteriori probabilities in stock market action // Econometrica. 1937. V. 5. P. 280—294.

[87] *Cummins S. D., Geman H.* An Asian option approach to the valuation of insurance futures contracts // Review of Futures Markets. 1994. V. 13. P. 517—557.

[88] *Czarnecki M. O.* Modelisation des cours boursiers: le modèle stable (utilisation pratique et pricing d'option). Preprint. Paris: Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, 24 juin 1994.

[89] *Dacorogna M. M., Müller U. A., Embrechts P., Samorodnitsky G.* Moment Condition for the *HARCH*(k) Models. Preprint. Zürich: «Olsen & Associates», May 30, 1995.

[90] *Dacorogna M. M., Müller U. A., Nagler R. J., Olsen R. B., Pictet O. V.* A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market // Journal of International Money and Finance. 1993. V. 12, № 4. P. 413—438.

[91] *Dacorogna M. M., Müller U. A., Pictet O. V., de Vries C. G.* The Distribution of Extremal Foreign Exchange Rate Returns in Extremely Large Data Sets. Preprint UAM, 1992-10-22. Zürich: «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics, March 17, 1995.

[92] *Dalang R. C., Morton A., Willinger W.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models // Stochastics and Stochastics Reports. 1990. V. 29, № 2. P. 185—201.

[93] *Dana R.-A., Jeanblanc-Picqué M.* Marchés financiers en temps continu (Valorisation et equilibre). Paris: Economica, 1994.

[94] *David H., Hartley H., Pearson E.* The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation // Biometrika. 1954. V. 41, P. 482—493.

[95] *Day R. H.* Complex economic dynamics: obvious in history, generic in theory, elusive in data // [383]. P. 1—15.

[96] Trading on the Edge: Neural, Genetic, and Fuzzy Systems for Chaotic Financial Markets. / Ed. Deboeck G. J. New York: Wiley, 1994.

[97] *Delbaen F.* Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded // Mathematical Finance. 1992. V. 2. P. 107—130.

[98] *Delbaen F., Schachermayer W.* Arbitrage and free lunch with bounded risk for unbounded continuous processes // Mathematical Finance. 1994. V. 4, № 4. P. 343—348.

[99] *Delbaen F., Schachermayer W.* A Compactness Principle for Bounded Sequences of Martingales with Applications. Preprint. Zürich: ETH, November, 1996.

[100] *Delbaen F., Schachermayer W.* A general version of the fundamental theorem of asset pricing // Mathematische Annalen. 1994. V. 300, № 3. P. 463—520.

[101] *Delbaen F., Schachermayer W.* The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes. Preprint. Zürich: ETH-Zentrum, 1997.

[102] *Dellacherie C., Meyer P.-A.* Probabilités et potentiel. Ch. I à IV. Paris: Hermann, 1975.

[103] *Dellacherie C., Meyer P.-A.* Probabilités et potentiel. Ch. V à VIII. Paris: Hermann, 1980.

[104] *Devany R. L.* Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Menlo Park, CA: The Benjamin/Cummings Publ. Co., 1986.

[105] *De Vries C. G.* On the relation between *GARCH* and stable processes // Journal of Econometrics. 1991. V. 48. P. 313—324.

[106] *Ding Z., Granger C. W. J., Engle R. F.* A long memory property of stock market returns and a new model // Journal of Empirical Finance. 1993. V. 1. P. 83—106.

[107] *Dixit A. K., Pindyck R. S.* Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994.

[108] *Долан Э. Дж., Кэмпбелл К. Д., Кэмпбелл Р. Дж.* Деньги, банковское дело и денежно-кредитная политика. СПб.: Санкт-Петербург Оркестр, 1994. (Перевод с англ.: Campbell C. D., Campbell R. G., Dolan E. G. Money, Banking and Monetary Policy. London: The Dryden Press, 1988.)

[109] *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956. (Перевод с англ.: Doob J. L. Stochastic Processes. New York: Wiley, 1953.)

[110] *Doob J. L.* Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart. New York: Springer-Verlag, 1984.

[111] *Dothan L.* On the term structure of interest rates // Journal of Financial Economics. 1978. V. 6. P. 59—69.

[112] *Dothan M. U.* Prices in Financial Markets. Oxford: Oxford University Press, 1990.
[113] *Douady R.* Cylindrical Brownian Motions and Yield Curve Smoothing. Preprint. New York: New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, February, 1996.
[114] *Drost F. C., Nijman T. E.* Temporal aggregation of *GARCH* processes // Econometrica. 1993. V. 61. P. 909—927.
[115] *Drost F. C., Werker B. J. M.* Closing the *GARCH* Gap: Continuous Time *GARCH* Modeling. Working paper № 9402. Tilburg, Netherlands: Tilburg University, Center for Economic Research, 1994.
[116] *Дубинс Л. Е., Шепп Л. А., Ширяев А. Н.* Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 4. С. 288—330.
[117] *Duffie D.* Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.
[118] *Duffie J. D., Harrison J. M.* Arbitrage pricing of a Russian option and perpetual lookback options // The Annals of Applied Probability. 1993. V. 3, № 3. P. 641—651.
[119] *Duffie D., Kan R.* A yield-factor model of interest rates // Mathematical Finance. 1996. V. 6, № 4. P. 379—406.
[120] *Du Mouchel W.* Stable distributions in statistical inference: I. Symmetric stable distribution compared to other symmetric long-tailed distributions // Journal of American Statistical Association. 1973. V. 68. P. 469—477.
[121] *Dupire B.* Model Art // RISK-magazin. 1993. V. 6. P. 118—124.
[122] *Dupire B.* Pricing with a smile // RISK-magazin. 1994. V. 7, № 1. P. 18—20.
[123] *Durrett R.* Brownian Motions and Martingales in Analysis. Belmont, CA: Wadsworth, 1984.
[124] *Durrett R.* Probability: Theory and Examples. 2nd ed. Belmont, CA: Duxbury Press, 1995.
[125] *Dybvig P., Ross S.* Arbitrage // The New Palgrave: A Dictionary of Economics V. 1 / Eds. J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman. London: Macmillan. 1987. P. 100—106.
[126] *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
[127] *Eberlein E., Keller U.* Hyperbolic Distributions in Finance // Bernoulli. 1995. V. 1, № 3. P. 281—299.
[128] *Eberlein E., Raible S.* Term Structure Models Driven by General Lévy Processes. Preprint № 33. Freiburg i. Br.: Universität Freiburg, Institut für Mathematische Stochastik, 1996. P. 1—25.
[129] *Ederington L. H., Lee J. H.* How markets process information: News releases and volatility // Journal of Finance. 1993. V. 48. P. 1161—1191.
[130] *Edwards R. D., Magee J.* Technical Analysis of Stock Trends. 4th ed. Springfield, MA, 1958.
[131] *Einstein A.* Investigation on the Theory of the Brownian Movement. / Ed. R. Fürth. New York: Dover, 1956.

[132] *Einstein A.* On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat // Annalen der Physik. 1905. V. 17. P. 549—560.

[133] *El Karoui N., Geman H.* A stochastic approach to the pricing of FRN's // RISK-magazin. 1991. V. 4.

[134] *El Karoui N., Karatzas I.* A new approach to the Skorokhod problem and its applications // Stochastics and Stochastics Reports. 1991. V. 34. P. 57—82.

[135] *El Karoui N., Myneni R., Viswanathan R.* The Probabilistic Theory of the American Option. Preprint. Paris: Université de Paris VI, 1991.

[136] *El Karoui N., Quenez M. C.* Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // SIAM Journal on Control and Optimization. 1995. V. 33, № 1. P. 29—66.

[137] *Emery M.* Compensation de processus V.F. non localement intégrables // Lecture Notes in Mathematics. 1980. V. 784. P. 152—160.

[138] *Emery M.* Metrisabilité de quelques espaces de processus aléatoires // Lecture Notes in Mathematics. V. 784. 1980. P. 140—147.

[139] *Emery M.* Stochastic Calculus in Manifolds. (With an Appendix: A Short Presentation of Stochastic Calculus by P.-A. Meyer). Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[140] *Engle R. F.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // Econometrica. 1982. V. 50, № 4. P. 987—1008.

[141] *Engle R. F., Bollerslev T.* Modelling the persistence of conditional variance // Econometrics Reviews. 1986. V. 5. P. 1—50.

[142] *Engle R. F., Ito T., Lin Wen-Ling.* Meteor showers or heat waves? Heteroskedastic intra-daily volatility in the foreign exchange market // Econometrica. 1990. V. 58. P. 525—542.

[143] *Engle R. F., Russell J. R.* Forecasting transaction rates: The autoregressive conditional duration model // [393]. V. 4.

[144] *Esscher F.* On the probability function in the collective theory of risk // Skandinavisk Aktuarietidskrift. 1932. V. 15. P. 175—195.

[145] *Evertsz C. J. G.* Self-similarity of high-frequency USD/DEM exchange rates // [393]. V. 3.

[146] *Evertsz C. J. G., Berkner K.* Large deviation and self-similarity analysis of curves: DAX stock prices // Chaos, Solutions and Fractals. 1995. V. 6. P. 121—130.

[147] *Fama E. F.* Efficient capital markets: A review of theory and empirical work // Journal of Finance. 1970. V. 25. P. 383—417.

[148] *Fama E. F.* Portfolio analysis in a stable Paretian market // Management Science. 1965. V. 311, № 2. P. 409—419.

[149] *Fama E. F.* Risk, return and equilibrium // Journal of Political Economy. 1971. V. 79. P. 30—55.

[150] *Fama E. F.* The behavior of stock market prices // Journal of Business. 1965. V. 34. P. 420—429.

[151] *Fama E. F., Miller M. H.* The Theory of Finance. New York: Holt, Rinehard and Winston, Inc., 1972.
[152] *Fama E. F., Roll R.* Parameter estimates for symmetric stable distributions // Journal of American Statistical Association. 1971. V. 66. P. 331—338.
[153] *Fama E. F., Roll R.* Some properties of symmetric stable distributions // Journal of American Statistical Association. 1968. V. 63. P. 817—836.
[154] Dynamics of Fractal Surfaces / Eds. F. Family and T. Vicsek. Singapore: World Scientific Publ., 1991.
[155] *Feder J.* Fractals. New York: Plenum Press, 1988.
[156] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1971.
[157] *Feller W.* The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables // Annals of Mathematical Statistics. 1951. V. 22, № 3. P. 427—432.
[158] *Fielitz B. D., Rozelle J. P.* Stable distributions and the mixtures of distributions hypotheses for common stock returns // Journal of American Statistical Association. 1983. V. 78, № 381. P. 28—36.
[159] *Fisher I.* The Theory of Interests. New York: Macmillan, 1930.
[160] *Flood M. D.* Market structure and inefficiency in the foreign exchange market // Journal of International Money and Finance. 1994. V. 13, № 2. P. 131—138.
[161] *Fokker A. D.* Die mittlere Energie rotierender Dipole im Strahlungsfeld // Annalen der Physik. 1914. V. 43. P. 810—820.
[162] *Föllmer H.* Probabilistic Aspects of Options. Preprint. Helsinki: Helsinki University, January, 1990.
[163] *Föllmer H., Kabanov Yu. M.* Optional Decomposition Theorem and Lagrange Multipliers. // Finance and Stochastics 1998. V. 2, № 1. P. 69—81.
[164] *Föllmer H., Kabanov Yu. M.* Optional Decomposition Theorems in Discrete Time. Preprint. Berlin: Humboldt University, 1996.
[165] *Föllmer H., Kramkov D.* Optional Decompositions under constraints // Probability Theory and Related Fields. 1997. V. 109, № 1. P. 1—25.
[166] *Föllmer H., Protter Ph., Shiryaev A. N.* Quadratic covariation and an extention of Itô's formula // Bernoulli. 1995. V. 1, № 1/2. P. 149—170.
[167] *Föllmer H., Schweizer M.* Hedging of contingent claims under incomplete information // Applied Stochastic Analysis (Stochastic Monographs. V. 5) / Eds. M. H. A. Davis, R. J. Elliott. London: Gordon and Breach, 1991. P. 389—414.
[168] *Föllmer H., Sondermann D.* Hedging of non-redundant contingent claims // Contributions to Mathematical Economics / Eds. A. Mas-Colell and W. Hildenbrand. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 205—223.
[169] *French K. R., Schwert G. W., Stambaugh R.* Expected stock returns and volatility // Journal of Financial Economics. 1987. V. 19. P. 3—29.
[170] *Friedman A.* Stochastic Differential Equations and Applications. V. 1, 2. New York: Academic Press, 1975, 1976.
[171] *Frittelli M., Lakner P.* Arbitrage and free lunch in a general financial market model; the fundamental theorem of asset pricing // [336]. P. 89—92.

[172] *Гальчук Л. И.* О структуре некоторых мартингалов // Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974). Ч. I. Вильнюс: Ин-т физики и математики АН ЛитССР, С. 7—32.

[173] *Гамровски Б., Рачев С.* Финансовые модели, использующие устойчивые законы // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва, ТВП. 1995. Т. 2, № 4. С. 556—604. (Перевод с франц.: Gamrowski B., Rachev S. T. Modèles financiers utilisant les lois stables. Preprint.)

[174] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е, доп. М.: Наука, 1967.

[175] *Geman H., El Karoui N.,Rochet J. C.* Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing // Journal of Applied Probability. 1995. V. 32. P. 443—458.

[176] *George T. J., Kaul G., Nimalendran M.* Estimation of the bid-ask spread and its components: a new approach // Review of Financial Studies. 1991. V. 4. P. 623—656.

[177] *Gerber H. U., Shiu E. S. W.* Martingale approach to pricing American options // ASTIN Bulletin. 1994. V. 24. P. 195—200.

[178] *Gerber H. U., Shiu E. S. W.* Option pricing by Esscher transforms // Transactions of the Society of Actuaries. 1994. V. 46. P. 99—191.

[179] *Geske R., Johnson H. E.* The American put options valued analytically // Journal of Finance. 1984. V. 39. P. 1511—1524.

[180] *Ghashghaie S., Breymann W., Peinke J., Talkner P., Dodge Y.* Turbulent cascades in foreign exchange markets // Nature. 1996. V. 381. 27 June. P. 767—770.

[181] *Ghysels E., Jasiak J.* Trading patterns: Time deformation and stochastic volatility in foreign exchange markets // [393]. V. 1.

[182] *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.

[183] *Гирсанов И. В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятностей и ее применения. 1960. Т. 5, № 3. С. 314—330.

[184] *Glosten L., Harris L.* Estimating the components of the bid-ask spread // Journal of Financial Economics. 1988. V. 21. P. 123—142.

[185] *Glosten L., Milgrom P.* Bid, ask, and transaction prices in a special market with heterogeneously informed traders // Journal of Financial Economics. 1985. V. 14 (March). P. 21—42.

[186] *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. Изд. 2-е. М.: ГИТТЛ, 1954; Изд. 6-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1988.

[187] *Gnedenko B. V.* Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Annals of Mathematics. 1943. V. 44. P. 423—453.

[188] *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: ГИТТЛ, 1949.

[189] *Goodhart C. A.* «News» and the foreign exchange market // Proc. Manchester Statist. Soc. 1989. P. 1—79.

[190] *Goodhart C. A., Demos A.* Reuters screen images of the foreign exchange market: the deutschenmark/doller spot rate // Journal of International Securities Markets. 1990. V. 4. P. 333—348.

[191] *Goodhart C. A., Figliuoli L.* Every minute counts in financial markets // Journal of International Money and Finance. 1991. V. 10. P. 23—52.

[192] *Goodhart C. A. E., O'Hara M.* High frequency data in financial markets: issues and applications // [393]. Introductory Lecture.

[193] *Gouriéroux Ch.* Modèles *ARCH* et applications financières. Paris: Economica, 1992.

[194] *Gouriéroux C., Laurent J.-P.* Dynamic Hedging in Discrete Time. Preprint. Paris: CREST, 1995.

[195] *Gouriéroux C., Laurent J.-P., Pham H.* Quadratic Hedging and Numéraire. Preprint. Université de Marne—La Vallée, Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, October, 1995.

[196] *Grangel C. W. J., Newbold P.* Forecasting Economic Time Series. New York: Academic Press, 1977.

[197] *Granger C. W. J., Morgenstern O.* Predictability of Stock Market Prices. Lexington, MA: D. C. Heath & Co., 1970.

[198] *Granger C. W. J., Teräsvirta T.* Modelling Nonlinear Economic Relationships. Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.

[199] *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. V. 9. P. 189—208.

[200] *Григелионис Б. И., Ширяев А. Н.* О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11, № 4. С. 612—631.

[201] *Grimmet G. R., Stirzaker D. R.* Probability and Random Processes. Oxford: Clarendon Press, 1982.

[202] *Guégan D.* Séries chronologiques non linéaires à temps discret. Paris: Economica, 1994.

[203] *Guillaume D. M., Dacorogna M. M., Davé R. R., Müller U. A., Olsen R. B., Hamon O. V., Jacquillat B.* Le marché français des actions. Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

[204] *Guillaume D. M., Dacorogna M. M., Davé R. D., Müller U. A., Olsen R. B., Pictet O. V.* From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets // Finance and Stochastics. 1997. V. 1, № 2. P. 95—129.

[205] *Guillaume D. M., Pictet O. V., Dacorogna M. M.* On the intra-day performance of *GARCH* processes // [393]. V. 3.

[206] *Gumbel E. J.* Statistics of Extremes. New York: Columbia University Press, 1960.

[207] *Hagerman R.* More evidence on the distribution of security returns // Journal of Finance. 1978. V. 33. P. 1213—1221.

[208] *Hale J., Kogak H.* Dynamics and Bifurcations. New York: Springer-Verlag, 1991.

[209] *Halgreen C.* Self-decomposability of the generalized inverse Gaussian and hyperbolic distributions // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1979. V. 47. P. 13—17.

[210] *Hall P.* On some simple estimates of an exponent of regular variation // Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B. 1982. V. 44, № 1. P. 37—42.

[211] *Hamilton J. D.* Time Series Analysis. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1994.

[212] *Hannan H. J.* Multiple Time Series. New York: Wiley, 1970.

[213] *Hansen A. T.* Complete Market Pricing in the Wiener Filtration without Existence of a Martingale Measure. Preprint. Aarhus: Aarhus University, Dept. of Operation Research, 1996.

[214] *Harrison J. M., Kreps D. M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory. 1979. V. 20. P. 381—408.

[215] *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochastic Processes and their Applications. 1981. V. 11, № 3. P. 215—260.

[216] *Harvey C. R., Huang R. D.* Volatility in the foreign currency futures market // Review of Financial Studies. 1991. V. 4. P. 543—569.

[217] *Hasbrouck J.* Trades, Quotes, Inventories and Information // Journal of Financial Economics. 1988. V. 22. P. 229—252.

[218] *Hausman J. A., Lo A. W., McKinlay A. C.* An Oderer Probit Analysis of Transaction Stock Prices. Working paper № 3888. National Bureau of Economic Research, 1991.

[219] *Heath D., Jarrow R., Morton A.* Bond pricing and the term structure of interest rates // Econometrica. 1992. V. 60, № 1. P. 77—106.

[220] *Heston S. I.* A closed forms solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Review of Financial Studies. 1992. V. 6, № 2. P. 333—343.

[221] High Frequency Data in Finance. Data set from «Olsen & Associates». E-mail: `hfdf@olsen.ch`, 1993.

[222] *Hilborn R. C.* Chaos and Nonlinear Dynamics. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994.

[223] *Hill B. M.* A simple general approach to inference about the tail of a distribution // The Annals of Statistics. 1975. № 3, V. 5. P. 1163—1173.

[224] *Ho T., Lee S.* Term structure movements and pricing interest rates contingent claims // Journal of Finance. 1986. V. 41. P. 1011—1029.

[225] *Хоффман-Иёнсен И. (Hoffman-Jørgensen J.)* Устойчивые плотности // Теория вероятностей и ее применения. 1993. V. 38, № 2. P. 470—476.

[226] *Hofmann N., Platen E., Schweizer M.* Option pricing under incompleteness and stochastic volatility // Mathematical Finance. 1992. V. 2. P. 153—187.

[227] *Hogan K. C., Jr., Melvin M.* Sources of meteor showers and heat waves in the foreign exchange market // Journal of International Economics. 1994. V. 37. P. 239—247.

[228] *Horne J. C. van.* Financial Market Rates and Flows. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.

[229] *Hsu Der-Ann, Miller R. B., Wichern D. W.* On the stable Paretian behavior of stock-market prices // Journal of American Statistical Association. 1974. V. 69, № 345. P. 108—113.

[230] *Huang R. D., Masulis R. W.* Spreads, dealer competition, and market regimes: a market microstructure analysis or FX trading // [393]. V. 4.

[231] *Huberman G.* A simple approach to arbitrage pricing theory // Journal of Economic Theory. March, 1982. P. 183—191.

[232] *Hudson M.* The value in going out // From Black—Scholes to black holes. London/New York, Risk/Finex. 1992. P. 183—186.

[233] *Hull J. C.* Options, Futures, and Other Derivative Securities. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

[234] *Hull J., White A.* Pricing interest rate derivative securities // Review of Financial Studies. 1990. V. 3, № 5. P. 573—592.

[235] *Hull J., White A.* The pricing of options on assets with stochastic volatilities // Journal of Finance. 1987. V. 42. P. 281—308.

[236] *Hurst H.* Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. P. 770—808.

[237] *Ibbotson R. G., Sinquefield R. A.* Stocks, Bonds, Bills and Inflation: 1986 Year Book. Chicago: Ibbotson & Associates, 1986.

[238] *Ибрагимов И. А., Чернин К. Е.* Об одновершинности устойчивых законов // Теория вероятностей и ее применения. 1959. V. 4, № 4. P. 453—456.

[239] *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1989.

[240] *Ingersoll J. E.* Theory of Financial Decision Making London-Lanham: Rowman and Littlefield, 1987.

[241] *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[242] *Itô K.* On a stochastic integral equation // Japan Academy. Proceedings. 1946. V. 22. P. 32—35.

[243] *Itô K.* On stochastic differential equations // Memoirs of the American Mathematical Society. 1951. V. 4. P. 1—89.

[244] *Itô K.* Stochastic integral. // Imperial Academy. Tokyo. Proceedings. 1944. V. 20. P. 519—524.

[245] *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968. (Перевод с англ.: *Itô K., McKean H. P.* Diffusion Processes and Their Sample Paths. New York: Springer-Verlag, 1965.)

[246] *Ito T., Engle R. F., Lin Wen-Ling.* Where does the meteor shower come from? The role of stochastic policy coordination // Journal of International Economics. 1992. V. 32. P. 221—240.

[247] *Jacka S. D.* Optimal stopping and the American put // Mathematical Finance. 1991. V. 1, № 2. P. 1—14.

[248] *Jacod J.* Calcul stochastique et problèmes de martingales // Lecture Notes in Mathematics. 1979. V. 714. P. 1—539.

[249] *Jacod J.* Intégrales stochastiques par rapport à une semimartingale vectorielle et changements de filtration // Lecture Notes in Mathematics. 1980. V. 784. P. 161—172.

[250] *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994. (Перевод с англ.: Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1987.)

[251] *Jacod J., Shiryaev A. N.* Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case // Finance and Stochastics. 1998. V. 2.

[252] *Jacquier E., Polson N. G., Rossi P. E.* Bayesian analysis of stochastic volatility models // Journal of Business and Economic Statistics. 1994. V. 12, № 4. P. 371—417.

[253] *Janicki A., Weron A.* Simulation and Chaotic Behavior of α-Stable Stochastic Processes New York: M. Dekker, 1994.

[254] *Jakubowski A., Mémin J., Pages G.* Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbb{D}^1$ de Skorokhod // Probability Theory and Related Fields. 1989. V. 81, № 1. P. 111—137.

[255] *Jensen B. A., Nielsen J. A.* The Structure of Binomial Lattice Models for Bonds. Working paper № 91.1. Copenhagen Business School, Aarhus University, 1991.

[256] *Jamshidian F.* An exact bond option formula // Journal of Finance. 1989. V. 44, № 1. P. 205—209.

[257] *Jørgensen P. L.* American Option Pricing. Preprint. The Faculty of Business Administration, The Aarhus School of Business, 1994.

[258] *Kabaila P.* On the asymptotic efficiency of estimators of the parameters of *ARMA* processes // Journal of Time Series Analysis. 1983. V. 4. P. 37—49.

[259] *Кабанов Ю. М., Крамков Д. О.* Отсутствие арбитража и эквивалентные мартингальные меры: новое доказательство теоремы Харрисона—Плиски // Теория вероятностей и ее применения. 1994. V. 39, № 3. P. 635—640.

[260] *Kabanov Yu. M., Kramkov D. O.* Asymptotic arbitrage in large financial markets // Finance and Stochastics 1998. V. 2.

[261] *Кабанов Ю. М., Крамков Д. О.* Большие финансовые рынки: асимптотический арбитраж и контигуальность // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, № 1. С. 222—228.

[262] *Kallsen J., Taqqu M. S.* Option Pricing in *ARCH*-type Models. Preprint. July, 1994.

[263] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИЛ, 1950.

[264] *Kanter M.* Stable densities under change of scale and total variation inequalities // The Annals of Probability. 1975. V. 3, № 4. P. 697—707.

[265] *Karatzas I.* On the pricing of American options // Applied Mathematics and Optimization. 1988. V. 17. P. 37—60.

[266] *Karatzas I., Shreve S. E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[267] *Karatzas I., Shreve S.* Methods of Mathematical Finance. New York: Columbia Univ. Press, 1995.

[268] *Kariya T.* Quantitative Methods for Portfolio Analysis. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.

[269] *Kendall M. G.* The analysis of economic time-series. Part 1. Prices // Journal of the Royal Statistical Society. 1953. V. 96. P. 11—25.

[270] *Kendall M.* Time-Series. London: Charles Griffin, 1973.

[271] *Kendall M., Stuart A.* The Advanced Theory of Statistics. V. 3 London: Charles Griffin, 1966.

[272] *Kim I. J.* The analytic valuation of American options // Review of Financial Studies. 1990. V. 3. P. 547—572.

[273] *Klein I., Schachermayer W.* Asymptotic arbitrage in non-complete large financial markets // Теория вероятностей и ее применения. 1996. V. 41. № 4. P. 927—934.

[274] *Klimasauskas C. C.* Neural Network Techniques // [96].

[275] *Kloeden P. E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[276] *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299—303.

[277] *Колмогоров А. Н.* Математика и механика. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1985.

[278] *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1986.

[279] *Колмогоров А. Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве (Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum) // ДАН СССР. 1940. Т. 26, № 2. С. 115—118.

[280] *Kolmogoroff A. N.* Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Mathematische Annalen. 1931. V. 104 P. 415—458. (См. также [278].)

[281] *Kramkov D. O.* Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets // Probability Theory and Related Fields. 1996. V. 105, № 4. P. 459—479.

[282] *Крамков Д. О., Ширяев А. Н.* О достаточных условиях равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов. Препринт. М.: МИРАН, 1996. (См. также: Труды Второго Европейского математического конгресса, Будапешт, 1996.)

[283] *Крамков Д. О., Ширяев А. Н.* О расчетах рациональной стоимости «Русского опциона» в симметричной биномиальной модели (B, S)-рынка // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, № 1. С. 191—200

[284] *Krouse C. G.* Capital Markets and Prices. Valuing Uncertain Income Streams. Amsterdam: North-Holland, 1986.
[285] *Kreps D.* Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities // Journal of Mathematical Economics. 1981. V. 8. P. 15—35.
[286] *Krugman P.* Target zones and exchange rate dynamics // Quarterly Journal of Economics. 1991. V. 106, № 3. P. 669—682.
[287] *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.
[288] *Krylov N. V.* Introduction to the Theory of Diffusion Processes. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.
[289] *Küchler U., Neumann K., Sørensen M., Streller A.* Stock Returns and Hyperbolic Distributions. Discussion paper № 23. Berlin: Humboldt University, 1994.
[290] *Lai T. L.* Sequential change-point detection in quality control and dynamic systems // Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B. 1995. V. 57, № 4. P. 613—658.
[291] *Lai T. L., Siegmund D.* Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter // The Annals of Statistics. 1983. V. 11, № 2. P. 478—485.
[292] *Lakner P.* Martingale measure for a class of right-continuous processes // Mathematical Finance. 1993. V. 3, № 1. P. 43—53
[293] *Lamberton D., Lapeyre B.* Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. London: Chapman & Hall, 1996.
[294] *Lanford O.* A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures // American Mathematical Society. Bulletin. 1982. V. 6, № 3. P. 427—434.
[295] *Langevin P.* Sur la théorie du mouvement brownien // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris. 1908. V. 146. P. 530—533.
[296] Latin Dictionary (founded on Andrew's edition of Freund's Latin dictionary revised, enlarged and in great part rewritten by Ch. T. Lewis, Ch. Short). Oxford: Oxford Univ. Press, 1966.
[297] *Легостаева И. Л., Ширяев А. Н.* Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16, № 2. С. 339—345.
[298] *Lévy P.* Processus stochastiques et mouvement brownien. Paris: Gauthier-Villars, 1948.
[299] *Lin S. J.* Stochastic analysis of fractional Brownian motion // Stochastics and Stochastics Reports. 1995. V. 55. P. 121—140.
[300] *Lindley D. V.* Dynamic programming and decision theory // Appl. Statist. 1961. V. 10, № 1. P. 39—51.
[301] *Lintner J.* The valuation of risky assets and the selection of risky investments on stock portfolios and capital budgets // Review of Economics and Statistics. 1965. V. 47 (February). P. 13—34.
[302] *Linton O.* Adaptive estimation in *ARCH* Models // Econometric Theory. 1993. V. 9. P. 539—569.
[303] *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

[304] *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

[305] *Liu T., Granger C. W. J., Heller W. P.* Using the correlation exponent to decide whether an economic series is chaotic // [383].

[306] *Lo A.* Neural networks and other nonparametric techniques in economics and finance // Blending Quantitative and Traditional Equity Analysis. Association for Investment Management and Research. 1994. P. 25—36.

[307] *Locke P. R., Sayers C. L.* Intra-day futures price volatility: information effects and variance persistence // Journal of Applied Econometrics. 1993. V. 8. P. 15—30. (См. также [383]. P. 213—228.)

[308] *Lockwood L. J., Linn S. C.* An examination of stock market return volatility during overnight and intraday periods, 1964—1989 // Journal of Finance. 1990. V. 45. P. 591—601.

[309] *Loosignian A. M.* Foreign Exchange Futures. Homewood, IL: Dow Jones-Irwin, 1981.

[310] *Loosignian A. M.* Stock Index Futures (Buying and Selling the Market Averages). Reading, MA: Addison-Wesley, 1985.

[311] *Lorenz H.-W.* Nonlinear Dynamic Economics and Chaotic Motion. New York: Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. V. 334.)

[312] *Malkiel B.* A Random Walk down Wall Street. London: W. W. Norton & Co., 1991.

[313] *Malliaris A. G., Brock W. A.* Stochastic Methods in Economics and Finance. Amsterdam: North-Holland, 1982.

[314] *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance, and Dimension. San Francisco: Freeman, 1977.

[315] *Mandelbrot B. B.* Les objets fractals. Paris: Flammarion, 1975.

[316] *Mandelbrot B. B.* Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent process // Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1975. V. 31. P. 271—285.

[317] *Mandelbrot B. B.* Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence // Water Resources Research. 1969. V. 5, № 5. P. 967—988.

[318] *Mandelbrot B. B.* Some noises with $1/f$ spectrum: a bridge between direct current and white noise // IEEE Transactions on Information Theory. April, 1967.

[319] *Mandelbrot B. B.* Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to R/S analysis // Annals of Economic and Social Measurement. 1972. V. 1, № 3. P. 259—290.

[320] *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. H. Freeman, 1982.

[321] *Mandelbrot B. B.* The Pareto—Lévy law and the distribution of income // International Economic Review. 1960. № 1.

[322] *Mandelbrot B. B.* The stable Paretian income distribution when the apparent exponent is near two // International Economic Review. 1963. № 4.

[323] *Mandelbrot B. B.* The variation of certain speculative prices // Journal of Business. 1963. V. 36. P. 394—419.

[324] *Mandelbrot B. B.* The variation of some other speculative prices // Journal of Business. 1967. V. 40. P. 393—413.

[325] *Mandelbrot B. B.* Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi: application à la loi climatologique de H. E. Hurst // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris. 1965. V. 240. P. 3274—3277.

[326] *Mandelbrot B. B.* When can price be arbitrated efficiently? A limit of the validity of the random walk and martingale models // Review of Economics and Statistics. 1971. V. 53. P. 225—236.

[327] *Mandelbrot B. B., Taylor H. M.* On the distribution of stock price difference // Operations Research. 1967. V. 15, № 6. P. 1057—1062.

[328] *Mandelbrot B. B., van Ness J. W.* Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Review. 1968. V. 10, № 4. P. 422—437.

[329] *Mandelbrot B. B., Wallis J. R.* Computer experiments with fractional Gaussian noises. I, II, III // Water Resources Research. 1969. V. 5. P. 228—267.

[330] *Mantegna R. N., Stanley H. E.* Scaling behaviour in the dynamics of an economic index // Nature. 1995. V. 376. P. 46—49.

[331] *Markowitz H.* Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Cambridge, MA: Blackwell, 1990.

[332] *Markowitz H.* Portfolio selection // Journal of Finance. 1952. V. 7 (March). P. 77—91.

[333] *Markowitz H.* Portfolio selection. Efficient Diversification of Investments. New York: Wiley, 1959.

[334] *Martin J. D., Cox S. H., Jr., McMinn R. D.* The Theory of Finance. Evidence and Applications. London The Dryden Press 1988.

[335] Математическая энциклопедия. В 5-ти томах. М.: Советская энциклопедия, 1977—1985.

[336] Mathematical Finance. Based on the proceedings of a workshop, held at IMA, University of Minnesota, Minneapolis, MN, USA 1992/93 / Eds. M. H. A. Davis, D. Duffie, W. H. Fleming, S. E. Shreve. New York: Springer-Verlag, 1995.

[337] Mathematical Models in Finance / Eds. S. D. Howison, F. P. Kelly, P. Wilmott. London: Chapman & Hall, 1995.

[338] *Маймин З. Г.* К вопросу о выделении детерминированной составляющей случайного поля // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. 19, № 3. С. 533—546.

[339] *McCuloch J. H.* Simple consistent estimators of stable distribution parameters // Communications in Statistics — Simulation and Computation. 1986. V. 15 (4). P. 1109—1136.

[340] *McKean H.-P.* A free boundary problem for the heat equation arising from a problem of mathematical economics // Industrial Management Review. 1965. V. 6. P. 32—39.

[341] *Мельников А. В.* Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997.

[342] *Melnikov A. V., Shiryaev A. N.* Criteria for the absence of arbitrage in the financial market // Frontiers in Pure and Applied Probability. II (Proceedings of the Fourth Russian-Finish Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Moscow, October 3—8, 1993). Moscow: TVP, 1996. P. 121—134.

[343] *Mémin J.* Espaces de semi martingales et changements de probabilité // Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1980. V. 52, № 1. P. 9—39.

[344] *Merrill Lynch, Pierce, Fenner, Smith, Inc.* Security Risk Evaluation. October, 1986.

[345] *Merton R.* Continuous-Time Finance. Cambridge, MA/Oxford, UK: Blackwell, 1990.

[346] *Merton R. C.* Theory of rational option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. № 4 (Spring). P. 141—183.

[347] *Meyer P.-A.* Notes sur les intégrales stochastiques. I. Intégrales hilbertiennes // Lecture Notes in Mathematics. 1977. V. 581 P. 446—461.

[348] *Meyers M. G.* A Financial History of the United States. New York: Columbia Univ. Press, 1970.

[349] *Михалевич В. С.* Байесовский вибір між двома гіпотезами про середне значення нормального процессу // Віснік Київського університету. 1958. Т. I, № 1. С. 101—104.

[350] *Miller M., Modigliani F.* Dividend policy, growth, and the valuation of shares // Journal of Business. 1961. V. 34 (October). P. 411—433.

[351] *Mills T. C.* The Econometric Modelling of Financial Time Series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[352] *Mittnik S., Rachev S. T.* Financial Modeling and Option Pricing with Alternative Stable Models. New York: Wiley.

[353] *Mittnik S., Rachev S. T.* Modeling asset returns with alternative stable distributions // Econometric Reviews. 1993. V. 12, № 3. P. 261—330.

[354] *Mittnik S., Rachev S.* Stable distributions for asset returns // Applied Mathematics Letters. 1989. V. 2, № 3. P. 301—304.

[355] *Modigliani F., Miller M.* Corporation income taxes and the cost capital: a correction // American Economic Review. 1963. V. 53 (June). P. 433—443.

[356] *Modigliani F., Miller M.* The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment // American Economic Review. 1958. V. 48 (June). P. 261—297.

[357] *Morris K. M., Siegel A. M.* Guide to Understanding Money and Investing. Lightbulb Press, 1993.

[358] The Nature of Chaos / Ed. Mullin T. Oxford: Clarendon Press, 1994.

[359] *Musiela M., Sondermann D.* Different Dynamical Specifications of the Term Structure of Interest Rates and their Implications. Preprint. Bonn: Bonn University, Dept. of Statistics, 1993.

[360] *Müller U. A., Dacorogna M. M., Davé R. D., Olsen R. B., Pictet O. V., von Weizsäcker J. E.* Volatilities of Different Time Resolutions — Analyzing the Dynamics of Market Components. Preprint UAM. 1995-01-12. Zürich: «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics, March 20, 1995. (См. также [393]. V. 1.)

[361] *Müller U. A., Dacorogna M. M., Davé R. D., Pictet O. V., Olsen R. B., Ward J. R.* Fractals and Intrinsic Time — A Challenge to Econometricians. Working paper Zürich: «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics, 1993; Technical Report UAM 1993-08-16, «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics.

[362] *Müller U. A., Dacorogna M. M., Olsen R. B., Pictet O. V., Schwarz M., Morgenegg C.* Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intra-day analysis // Journal of Banking and Finance. 1990. V. 14. P. 1189—1208.

[363] *Myneni R.* The pricing of the American option // Annals of Applied Probability. 1992. V. 2, № 1. P. 1—23.

[364] *Nelson D. B. ARCH* models as diffusion approximations // Journal of Econometrics. 1990. V. 45. P. 7—38.

[365] *Nelson D. B.* Asymptotic filtering theory for multivariate *ARCH* models // Journal of Econometrics. 1996. V. 71, № 1/2. P. 1—47.

[366] *Nelson D. B.* Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach // Econometrics. 1990. V. 59. P. 347—370.

[367] *Nelson D. B.* Filtering and forecasting with misspecified *ARCH* model // Journal of Econometrics. 1992. V. 52. P. 61—90.

[368] *Новиков А. А.* Об одном тождестве для стохастических интегралов // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17, № 4. С. 761—765.

[369] Настольная книга валютного дилера. СП «Crocus International». М.: Верба, 1992.

[370] *О'Брайен Дж., Шривастава С.* Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. М.: Дело Лтд, 1995. (Перевод с англ.: O'Brein J., Shrivastava S. Financial Analysis and Security Trading. Pittsburg, PA: Carnegie Mellon University.)

[371] *Osborne M. F. M.* Brownian motion in the stock market // Operations Research. 1959. V. 7. P. 145—173. (См. также [78]. P. 100—128.)

[372] *Pagan A. R.* Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressors // International Economic Review. 1984. V. 25. P. 221—247.

[373] *Pagan A. R., Schwert G. W.* Alternative models for conditional stock volatility // Journal of Econometrics. 1990. V. 45. P. 267—290.

[374] *Paley R. E. A. C., Wiener N.* Fourier transforms in the complex domain // American Mathematical Society Colloquium Publications. 1934. V. 19.

[375] *Paley R. E. A. C., Wiener N., Zygmund A.* Notes on random functions // Mathematische Zeitschrift. 1933. № 37. P. 647—668.

[376] *Parkinson M.* Option pricing: The American put // Journal of Business. 1977. V. 50. P. 21—36.

[377] *Pareto V.* Cours d'Economie Politique. Lausanne, Switzerland, 1897.

[378] *Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D.* Chaos and Fractals. New York: Springer-Verlag, 1992.

[379] *Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. (Перевод с англ.: Peitgen H.-O., Richter P. H. The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1986.)

[380] *Peltier R.-F., Véhel J. L.* A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion // Bernoulli.

[381] *Peltier R.-F., Véhel J. L.* Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results. Preprint № 2645. Rocquencourt: INRIA, August, 1995.

[382] *Percival D. B.* Three curious properties of the sample variance and autocovariance for stationary processes with unknown mean // American Statistician. 1993. V. 47. P. 274—276.

[383] Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics / Eds. M. H. Pesaran and S. M. Potter. New York: Wiley, 1993.

[384] *Pesaran M. H., Samiei H.* Estimating limited-dependent rational expections models with an application to exchange rate determination in a target zone // Journal of Econometrics. 1992. V. 53. P. 141—163.

[385] *Peters E. E.* Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility. New York: Wiley, 1991.

[386] *Peters E. E.* Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. New York: Wiley, 1994.

[387] *Петраков Н. Я., Ротарь В. И.* Фактор неопределенности и управление экономическими системами. М.: Наука, 1985.

[388] Англо-русский толковый словарь по бизнесу / Под ред. П. Ф. Петроченко М.: СП «Арт-Бизнес-Центр», 1992.

[389] *Planck M.* Über einen Satz der statistischen Dynamic und seine Erweiterung in der Quantentheorie // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1917. P. 324—341.

[390] *Praetz P.* The distribution of share price changes // Journal of Business. 1972. V. 45. P. 49—55.

[391] *Priestley M.* Non-Linear and Nonstationary Time Series. New York: Academic Press, 1988.

[392] *Prigent J.-L.* Incomplete markets: Convergence of options values under the minimal martingale measure. Preprint № 9526. THEMA, University of Cergy—Pontoise // Proceedings of the 13th International Conference AFFI (Geneva, 1996).

[393] Proceedings of the First International Conference on High Frequency Data in Finance (HFDF-I, March 29—31, 1995): Introductory Lecture and 4 volumes. Zürich: «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics.

[394] *Прохоров Ю. В* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, № 2. С. 177—238.

[395] *Protter Ph.* Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
[396] *Protter Ph., Talay D.* The Euler Scheme for Lévy Driven Stochastic Differential Equations. Preprint № 2621. Rocquencourt: INRIA, July, 1995.
[397] *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, № 336.)
[398] *Qiggins J. B.* Option values under stochastic volatility. Theory and empirical estimates // Journal of Financial Economics. 1987. V. 19. P. 351—372.
[399] *Rabemananjara R., Zakoian J. M.* Threshold *ARCH* models and asymmetries in volatility // [383].
[400] *Рачев С. Т., Рушендорф Л.* Модели и расчеты контрактов с опционами // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, № 1. С. 150—190.
[401] *Рэдхэд К., Хьюс С.* Управление финансовыми рынками. М.: Инфра-М, 1996. (Перевод с англ.: Redhead K., Huhhes S. Financial Risk Management.)
[402] *Revuz D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin Springer-Verlag 1991.
[403] *Ridley M.* The mathematics of markets // The Economist. October, 1993.
[404] Risk Metrics. New York: Morgan Guaranty Trust Company, November, 1994.
[405] *Roberts H. V.* Stock-market «patterns» and financial analysis: Methodological suggestions // Journal of Finance. 1959. V. 14. P. 1—10.
[406] *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
[407] *Rogers L. C. G.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage // Stochastics and Stochastics Reports. 1995. V. 51. P. 41—50.
[408] Numerical Methods in Finance / Eds. L. C. G. Rogers and D. Talay. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
[409] *Рогозин Б. А.* О некоторых классах процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10. С. 479—483.
[410] *Roll R., Ross S. A.* An empirical investigation of the arbitrage pricing theory // Journal of Finance. 1980. V. 35. P. 1073—1103.
[411] *Ross S. A.* Information and volatility: The no-arbitrage martingale approach to timing and resolution irrelevancy // Journal of Finance. 1989. V. 44. P. 1—18.
[412] *Ross S. A.* The arbitrage theory of capital asset pricing // Journal of Economic Theory. 1976. V. 13. P. 341—360.
[413] *Рубинштейн Л. Н.* Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967.
[414] *Rubinstein M.* Exotic Options. Working paper № 220. Berkeley: Institute of Business and Economic Research, University of California, December, 1991.
[415] *Rubinstein M.* Guiding force // From Black—Scholes to black holes. London/New York: Risk/Finex, 1992. P. 39—48.
[416] *Sacks J., Ylvisaker D.* Linear estimation for approximately linear models // Annals of Statistics. 1978. V. 6, № 5. P. 1122—1137.

[417] *Samorodnitsky G.* A class of shot noise models for financial applications // [393]. V. 3.

[418] *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes. New York: Chapman & Hall, 1994.

[419] *Samuelson P. A.* Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly // Industrial Management Review. 1965. V. 6. P. 41—49.

[420] *Samuelson P. A.* Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. 1965. V. 6. P. 13—31.

[421] *Sandmann K., Sondermann D.* A Note on the Stability of Log-Normal Interest Rate Models and the Pricing of Eurodollar Futures. Preprint. Bonn: Bonn University, Dept. of Statistics, 1996.

[422] *Sandmann K., Sondermann D.* A term structure model and the pricing of interest rate derivatives // Review of Futures Markets. 1993. V. 12, № 2. P. 391—423.

[423] *Sato Ken-iti.* Lévy Processes on the Euclidean Spaces. Preprint. Zürich: Institute of Mathematics, University of Zürich, 1995.

[424] *Schachermayer W.* A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time // Insurance: Mathematics & Economics. 1992. V. 11.

[425] *Schachermayer W.* Martingale measure for discrete-time processes with infinite horizon // Mathematical Finance. 1994. V. 4, № 1. P. 25—55

[426] *Schmidt W. M.* On a general class of one-factor models for the term structure of interest rates // Finance and Stochastics. 1997. V. 1, № 1. P. 3—24

[427] *Schnidrig R., Würtz D.* Investigation of the volatility and autocorrelation function of the USD/DEM exchange rate on operational time scales // [393]. V. 3.

[428] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. (Перевод с англ.: Schuster H. G. Deterministic Chaos. An Introduction. Weinheim: Physik Verlag, 1984.)

[429] *Schweizer M.* On the minimal martingale measure and the Föllmer—Schweizer decomposition // Stochastic Analysis and Applications. 1995. V. 13, № 5. P. 573—599.

[430] *Schweizer M.* Variance-optimal hedging in discrete time // Mathematics of Operations Research. 1995. V. 20, № 1. P. 1—32

[431] *Schwert G. W., Segnin P. J.* Heteroskedasticity in stock returns // Journal of Finance. 1990. V. 45, P. 1129—1155.

[432] *Scott L. O.* Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation and an application // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1987. V. 22 P. 419—438

[433] *Sharpe W. F.* Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance. 1964. V. 19 (September). P. 425—442.

[434] *Шепп Л. А., Ширяев А. Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, № 1. С. 130—149

[435] *Shepp L. A., Shiryaev A. N.* The Russian option: Reduced regret // Annals of Applied Probability. 1993. V. 3, № 3. P. 631—640.

[436] *Shiller R. J.* Stock Market Volatility. Cambridge, MA: MIT Press.

[437] *Shimko D.* Finance in Continuous Time. A Primer. Miami: Kolb Publ. Co., 1992.

[438] *Ширяев А. Н.* Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва, ТВП. 1994. Т. 1, № 5. С. 684—697.

[439] *Ширяев А. Н.* Вероятность. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1989. (Англ. перев.: Shiryaev A. N. Probability. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1995.)

[440] *Ширяев А. Н.* Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима // Доклады Академии наук СССР. 1961. Т. 138, № 5. С. 1039—1042.

[441] *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. Изд. 2. М.: Наука, 1976.

[442] *Ширяев А. Н.* Стохастические проблемы финансовой математики // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва, ТВП. 1994. Т. 1, № 5. С. 780—820.

[443] *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время // Теория вероятностей и ее применения. № 1, Т. 39. 1994. С. 21—79.

[444] *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, № 1. С. 80—129.

[445] *Shiryaev A. N., Spokoinyi V. G.* Sequential Estimation for Autoregressive Systems. Preprint. Paris: Université Paris-Sud, 1993.

[446] *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1967.

[447] *Sin C. A.* Strictly Local Martingales and Hedge Ratios on Stochastic Volatility Models. Ithaka, NY: Cornell University, Graduate School, 1966.

[448] *Smith R. L.* Estimating dimension in noisy chaotic time series // Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B. 1992. V. 54, № 2. P. 329—351.

[449] *Smith R. L.* Optimal estimation of fractal dimension // Nonlinear Modeling and Forecasting (SFI Studies in the Science of Complexity. Proceedings. V. 12) / Eds. M. Casdagli and S. Eubank. Reading, MA: Addison-Wesley, 1992.

[450] *Sobel R.* Inside Wall Street: Continuity and Change in the Financial District. New York: W. W. Norton & Co., 1977.

[451] *Сорос Дж.* Алхимия финансов. М.: Инфра-М, 1996. (Перевод с англ.: Soros G. The Alchemy of Finance. Reading the Mind of the Market. New York: Wiley, 1994.)

[452] *Спокойный В. Г., Ширяев А. Н.* Статистические эксперименты и статистические решения (рукопись монографии). М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 1993.

[453] *Stein E. M., Stein C. J.* Stock prices distributions with stochastic volatility: an analytic approach // Review of Financial Studies. 1991. V. 4, № 4. P. 727—752.

[454] Стохастические аспекты финансовой математики. Тематический выпуск // Теория вероятностей и ее применения. 1994. V. 39, № 1.

[455] *Stricker C.* Arbitrage et lois de martingale // Annales de l'Institut Henri Poincaré. 1990. № 2, V. 26. P. 451—460.

[456] *Strogatz S. H.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Reading, MA: Addison-Wesley.

[457] *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Diffusion processes with continuous coefficients. I, II // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1969. V. 22, № 3. P. 345—400; № 4. P. 479—530.

[458] *Svensson L. E. O.* Target zones and interest rate variability // Journal of International Economics. 1991. V. 31, P. 27—54.

[459] *Taqqu M. S.* Self-similar processes // Encyclopaedia of Statistical Sciences. V. 8 / Eds. S. Kotz and N. Johnson. New York: Wiley, P. 352—357.

[460] *Taylor S.* Modeling Financial Time Series. New York: Wiley, 1986.

[461] *Tong H.* Nonlinear Time Series. Oxford: Oxford Univ. Press, 1990.

[462] *Tong H.* Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach. Oxford: Clarendon Press, 1990.

[463] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1972.

[464] *Timmermann A.* Scales and stock markets // Nature. 1995. V. 376. P. 18—19.

[465] *Tversky A.* The Psychology of Risk. Quantifying the Market Risk Premium Phenomene for Investment Decision Making. Charlottesville, VA: Institute of Chartered Financial Analysts, 1990.

[466] *Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.* On the theory of Brownian motion // Physical Review. 1930. V. 36. P. 823—841.

[467] *van Moerbeke P. L. J.* On optimal stopping and free boundary problems // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1976. V. 60, № 2. P. 101—148.

[468] Economic and Financial Modeling with Mathematica (TELOS — The Electronic Library of Science). / Ed. Varian H. R. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[469] Stocks, Bonds, Options, Futures. / Ed. Vegle S. R. New York: Institute of Finance, Prentice Hall, 1987.

[470] *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.

[471] *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 2. С. 348—360.

[472] *Vasicek O.* An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177—188.

[473] *Voss R. F.* $1/f$ noise and fractals in economic time series // Fractal Geometry and Computer Graphics / Eds. J. L. Encarnação, H.-O. Peitgen, and G. Englert. Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 45—52.

[474] *Walter C.* Levy-stability under addition and fractal structure of markets // 5th AFIR International Colloquium (Bruxelles, September, 1995).

[475] *Weyl H.* Bemerkungen zum Begriff der Differential—Quotenten gebrochener Ordnung // Viertelschr. Naturforsch. Ges. Zürich. 1967. V. 62. P. 296—302.

[476] *Wiener N.* Differential space // Journal of Mathematical Physics. Math. Inst. Tech. 1923. V. 2. P. 131—174.

[477] *Wiggins J. B.* Option values under stochastic volatility. Theory and empirical evidence // Journal of Financial Economics. 1987. V. 19. P. 351—372.

[478] *Wilmott P., Dewynne J., Howison S.* Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford: Oxford Financial Press, 1993.

[479] *Wilmott P., Howison S., Dewynne J.* The Mathematics of Financial Derivatives. (A Student Introduction.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.

[480] *Working H.* A random-difference series for use in the analysis of time series // Journal of American Statistical Association. 1934. V. 29. P. 11—24.

[481] *Zhou B.* Forecasting Foreign Exchange Rates Subject to De-Volatilization. Working paper № 3510. Cambridge, MA: Sloan School of Management, MIT. 1992. (См. также: [393]. V. 4.)

[482] *Зиновьев С. З.* Инфраструктурный фактор рынка ценных бумаг // Деловой экспресс (газета). 25 июня 1996. № 23.

[483] *Золотарев В. М.* Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1958. Т. 3, № 2. С. 197—200.

[484] *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.

[485] *Звонкин А. К.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, «уничтожающее» снос // Математический сборник. 1974. Т. 93, № 1. С. 129—149.

Предметный указатель

Н

О

Указатель обозначений

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/
http://globalf5.com/search/founded/type/book/area/publisher/stype/extended/q/мцнмо

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru