В. И. Арнольд

«Жесткие» и «мягкие» математические модели

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 51.001.8
А84

Арнольд В. И.
«Жесткие» и «мягкие» математические модели
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
32 с.
ISBN 978-5-4439-2008-5

Эта брошюра представляет собой текст доклада, сделанного академиком В. И. Арнольдом в 1997 году на семинаре при Президентском совете РФ. В докладе рассказано о применениях теории дифференциальных уравнений в таких науках, как экология, экономика и социология.

Подготовлено на основе книги: *В. И. Арнольд.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели. — 4-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2013.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241 74 83.
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-2008-5

Содержание

1. Модель войны или сражения 4

2. Оптимизация как путь к катастрофе 7

3. Жесткие модели как путь к ошибочным предсказаниям 15

4. Опасность многоступенчатого управления 17

5. Математические модели перестройки 20

6. Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира 22

7. Математика и математическое образование в современном мире 26

Примером жесткой модели является таблица умножения. Простейший пример мягкой модели — принцип «чем дальше в лес, тем больше дров». Возможность полезной математической теории мягких моделей открыта относительно недавно. В докладе на простейших примерах будет показано, как эта теория может применяться в экономических, экологических и социологических моделях.

1. Модель войны или сражения

В простейшей модели борьбы двух противников (скажем, двух армий) — модели Ланкастера — состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y — это численности противостоящих армий. Модель имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -by, \\ \dot{y} = -ax. \end{cases}$$

Здесь a — мощность оружия армии x, а b — армии y. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени a солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Точка над буквой здесь и далее означает производную по времени t, то есть скорость изменения обозначенной буквой величины.

Это — жесткая модель, которая допускает точное решение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \qquad ax\,dx = by\,dy, \qquad ax^2 - by^2 = \text{const}.$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. 1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой (случай 1 на рис. 1), то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен.

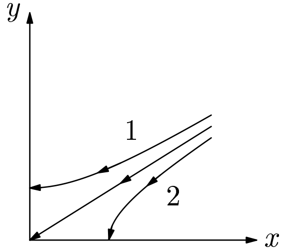

Рис. 1. Жесткая модель войны

Если начальная точка лежит ниже (случай 2), то выигрывает армия y. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается ко всеобщему удовлетворению истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным — в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Ясно, однако, что наша людоедская модель сильно идеализирована и было бы опасно прямо применять ее к реальной ситуации. Возникнет вопрос — как изменится вывод, если модель будет несколько иной. Например, коэффициенты a и b могут быть не строго постоянными, а могут, скажем, зависеть от x и от y. И точный вид этой зависимости нам может быть неизвестен.

В этом случае речь идет о системе

$$\begin{cases} \dot{x} = -b(x, y)y, \\ \dot{y} = -a(x, y)x, \end{cases}$$

которая уже не решается явно.

Однако в математике разработаны методы, позволяющие сделать выводы общего характера, и не зная точно явного вида функций a и b. В этой ситуации принято говорить о мягкой модели — модели, поддающейся изменениям (за счет выбора функций a и b в нашем примере).

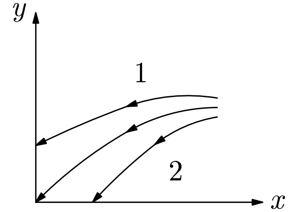

Рис. 2. Мягкая модель войны.

Общий вывод в данном случае есть утверждение о *структурной устойчивости* исходной модели: изменение функций a и b изменит описывающие ход военных действий кривые на плоскости (x, y) (которые уже не будут гиперболами и разделяющей их прямой), но это изменение не затрагивает основного качественного вывода.

Вывод этот состоял в том, что положения «x выигрывает» и «y выигрывает» разделены нейтральной линией «обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время».

Математики говорят, что топологический тип системы на плоскости (x, y) не меняется при изменении функций a и b: оно приводит лишь к искривлению нейтральной линии (рис. 2).

Этот математический вывод не самоочевиден. Можно представить себе и другую ситуацию, например, изображенную на рис. 3. Математическая теория структурной устойчивости утверждает, что эта ситуация не реализуется, во всяком случае для не слишком патологических функций a и b (скажем, она не реализуется, если это — положительные в нуле многочлены).

Мы можем сделать вывод о качественной применимости простейшей модели войны для приближенного описания событий в целом классе моделей, причем для этого даже не нужно знать точного вида жесткой модели: выводы справедливы для мягкой модели. На самом деле простейшая модель дает даже полезное количественное предсказание: наклон разделяющей нейтральной прямой в нуле определяется формулой $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$, где a и b — значения коэффициентов в нуле.

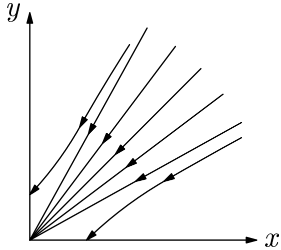

Рис. 3. Нереализуемая модель войны.

То есть принцип «если противников вдвое больше, то надо иметь в четыре раза более мощное оружие» справедлив на конечном этапе взаимного истребления, в то время как на начальном этапе войны число 4 нужно, быть может, откорректировать (учитывая вид коэффициентов a и b). Для этой корректировки в математике мягких моделей тоже разработаны эффективные методы (несмотря на то, что явная формула для решения уравнений модели не только неизвестна, но и — это строго доказано — не существует вовсе).

Можно думать, что описанная модель отчасти объясняет как неудачи Наполеона и Гитлера, так и успех Батыя и надежды мусульманских фундаменталистов.

2. Оптимизация как путь к катастрофе

Простейшая модель роста $\dot{x} = kx$ предложена Мальтусом (для роста населения Земли). Она ведет, как хорошо известно, к экспоненциальному (т. е. очень быстрому) росту населения x с течением времени. Эта жесткая модель применима (разумеется, с оговорками), например, к развитию науки в 1700 – 1950 годах (измеряемому, скажем, числом научных статей) (рис. 4). Продолжение экспоненциального роста науки в следующий век быстро привело бы к исчерпанию бумаги и чернил, причем число ученых должно было бы достичь половины населения земного шара.

Ясно, что общество (во всех странах) не может этого допу-

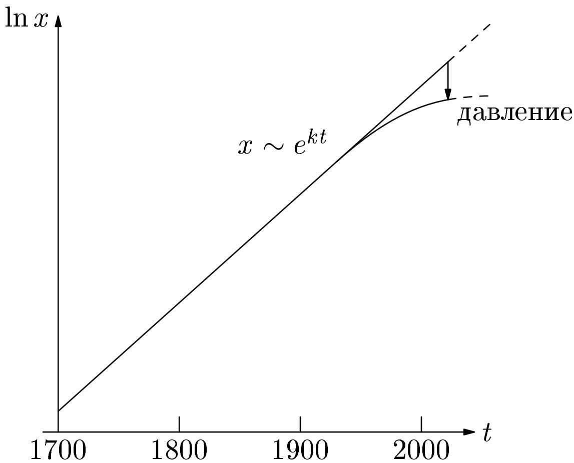

Рис. 4. Рост науки.

стить, и следовательно развитие науки должно быть подавлено (что мы и наблюдаем во многих странах; в России реформирование академической науки происходит как раз сейчас).

Аналогичные явления насыщения происходят в любой популяции (и, вероятно, вскоре произойдут с человечеством в целом): когда население становится слишком большим, мальтусовская жесткая модель с постоянным коэффициентом роста k перестает быть применимой. Естественно, при слишком больших x конкуренция за ресурсы (пищу, гранты и т. д.) приводит к уменьшению k, и жесткая модель Мальтуса должна быть заменена мягкой моделью

$$\dot{x} = k(x)x$$

с зависящим от населения коэффициентом размножения. Простейшим примером является выбор $k(x) = a - bx$, что приводит к так называемой логистической модели (рис. 5):

$$\dot{x} = ax - bx^2, \quad \text{например,} \quad \dot{x} = x - x^2.$$

Выбором системы единиц x и t можно превратить коэффициенты a и b в 1. Подчеркну, однако, что выводы, которые будут

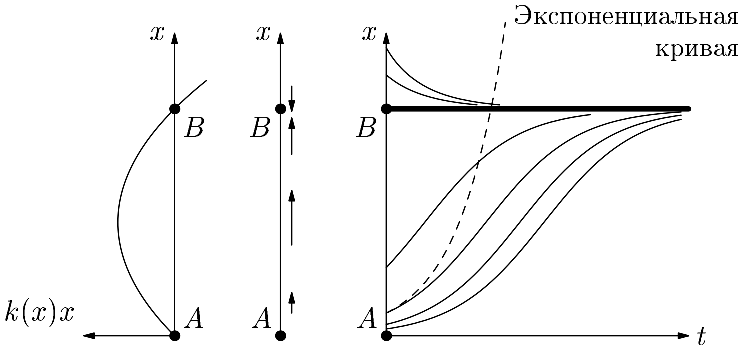

Рис. 5. Логистическая модель.

сделаны ниже, остаются (с точностью до числовых значений констант) справедливыми и при любых значениях коэффициентов a и b и даже для широкого класса моделей с различными (убывающими с x) функциями $k(x)$. Иными словами, дальнейшие выводы относятся ко всей мягкой модели, а не к специальной жесткой логистической модели.

На рис. 5 слева изображен график функции $k(x)x$, положительной между точками A и B. В центре изображено векторное поле[1] на изображающей всевозможные состояния системы оси x. Оно указывает скорость эволюции состояния. В точках A и B скорость равна нулю: это стационарные состояния. Между A и B скорость положительна (население растет), а за точкой B — отрицательна (население убывает). Справа изображена результирующая зависимость населения от времени при разных начальных условиях.

Модель предсказывает, что с течением времени устанавливается стационарный режим B, который устойчив: большее население уменьшается, меньшее — увеличивается.

Логистическая модель удовлетворительно описывает многочисленные явления насыщения. Вблизи A, когда население мало,

[1] Именно, в каждой точке, изображающей состояния, приложен вектор скорости изменения этого состояния, т. е. $\dot{x}$. См., например [10], с. 32.

она очень близка к мальтузианской модели. Но при достаточно больших x (порядка $1/2$ при нашем выборе коэффициентов) наблюдается резкое отличие от мальтузианского роста (обозначенного на рис. 5 пунктиром): вместо ухода x на бесконечность население приближается к стационарному значению B. Население Земли сейчас приближается к 6 миллиардам. Стационарное значение (по разным оценкам) $16-20$ миллиардов человек.

Логистическая модель является обычной в экологии. Можно себе представить, например, что x — это количество рыб в озере или в мировом океане. Посмотрим теперь, как скажется на судьбе этих рыб рыболовство с интенсивностью c:

$$\dot{x} = x - x^2 - c.$$

Вычисления показывают, что ответ резко меняется при некотором критическом значении квоты вылова, c. Для нашей жесткой модели это критическое значение есть $c = 1/4$, но аналогичные явления имеют место и для мягкой модели

$$\dot{x} = x - k(x)x - c$$

(критическое значение с в этом случае максимум функции $k(x)x$).

Ход эволюции числа рыб x с течением времени t изображен на рис. 6. Если квота c мала, то изменения (по сравнению со свободной популяцией, для которой $c = 0$) состоят в следующем.

Система имеет два равновесных состояния, A и B. Состояние B устойчиво: популяция в этом случае несколько меньше, чем необлавливаемая, но она восстанавливается при малых отклонениях x от равновесного значения B.

Состояние A неустойчиво: если вследствие каких-либо причин (скажем, браконьерства или мора) размер популяции упадет хоть немного ниже уровня A, то в дальнейшем популяция (хотя и медленно, если отличие от A невелико) будет уничтожена полностью за конечное время.

По моему мнению, состояние науки в России в настоящее время описывается примерно точкой A: оно еще стационарно, но, как говорят физики, квазистационарно в том смысле, что небольшое

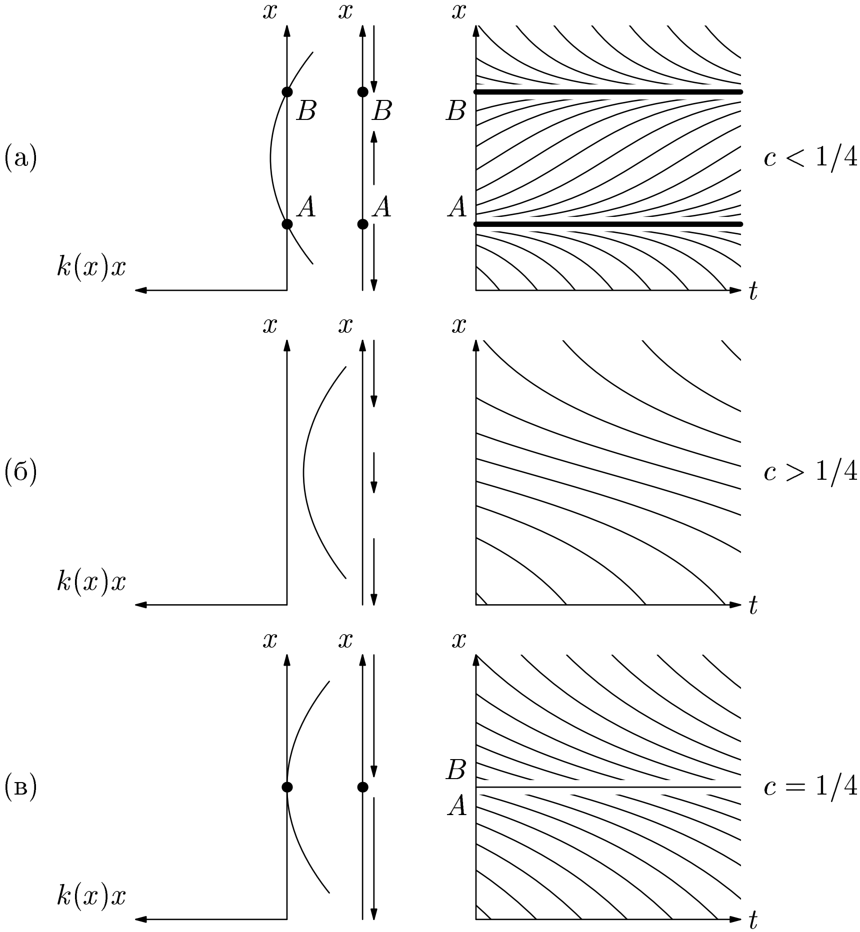

Рис. 6. Недолов (а), перелов (б), и оптимизация (в) рыболовства.

встряхивание может легко привести к необратимому уничтожению.

При бо́льших критической квотах вылова c популяция x уничтожается за конечное время, как бы велика она ни была в начальный момент.

Это — судьба мамонтов, бизонов, многих китов: экологи подсчитали, сколько видов погибает *ежедневно* под влиянием деятельности человека, и эти цифры ужасают. Модели этого рода описывают также банкротство фирм, концернов и государств. Опасность уничтожения в нашей модели появляется тогда, когда неустойчивое состояние A приближается к устойчивому состоянию B, т. е. когда величина x опускается примерно до половины исходной стационарной величины необлавливаемой популяции.

Население России, мне кажется, еще не понизилось до этого смертельно опасного уровня, но, по-видимому, движется к нему. Наука же в России находится в настоящее время именно в таких условиях «перелова». Например, заработная плата главного научного сотрудника в Математическом институте им. Стеклова РАН (каковым я являюсь) составляет менее 100 долларов в месяц. Это раз в сто меньше зарплаты моих коллег в США (и раз в 50 меньше, чем во Франции). Понятно, что в таких условиях величина c (скорость убыли числа ученых в России) ограничивается в основном дискриминационными мерами, принимаемыми Западом (например, США) для охраны своих рабочих мест от наплыва лучше подготовленных иностранных аспирантов и докторантов (в основном из Китая и из России).

Из сказанного видно, что выбор значения параметра c является чрезвычайно важным моментом управления эксплуатацией популяции x. Стремясь к увеличению квоты эксплуатации c, разумная планирующая организация не должна превосходить критический уровень (в нашем случае $c \leqslant 1/4$). Оптимизация приводит к выбору именно критического значения $c = 1/4$, при котором эксплуатируемая популяция еще не уничтожается, но доход от эксплуатации за единицу времени достигает максимально возможного значения $c = 1/4$ (больший доход в нашей популяции *в течение длительного времени* невозможен, так как максимальная скорость прироста даже и неэксплуатируемой популяции есть $1/4$).

Из нижней части рис. 6 мы видим, что произойдет при таком «оптимальном» выборе, $c = 1/4$. Какова бы ни была начальная популяция $x > 1/2$, с течением времени она выйдет на стационарный режим $A = B = 1/2$. Эта стационарная популяция, однако, неустойчива. Небольшое случайное уменьшение x приводит к полному уничтожению популяции за конечное время.

Следовательно, *оптимизация параметров плана может приводить* (и приводит во многих случаях, из которых наша модель — лишь простейший пример) *к полному уничтожению планируемой системы вследствие возникающей из-за оптимизации неустойчивости.*

Наша мягкая модель, при всей своей очевидной примитивности, позволяет, однако, предъявить способ борьбы с указанным злом. Оказывается, устойчивость восстанавливается, если заменить жесткое планирование обратной связью. Иными словами, решение о величине эксплуатации (квоты вылова, налогового пресса и т. д.) следует принимать не директивно ($c = \mathrm{const}$), а в зависимости от достигнутого состояния системы:

$$c = kx,$$

где параметр k («дифференциальная квота») подлежит выбору.

В этом случае модель принимает вид (рис. 7)

$$\dot{x} = x - x^2 - kx.$$

При $k < 1$ с течением времени устанавливается стационарное состояние B, которое устойчиво. Средний многолетний «доход» $c = kx$ в этом состоянии оптимален, когда прямая $y = kx$ проходит через вершину параболы $y = x - x^2$, т.е. при $k = 1/2$. При этом выборе дифференциальной квоты k средний «доход» $c = 1/4$ достигает максимального возможного в нашей системе значения. Но, в отличие от жестко планируемой системы, система с обратной связью устойчива и при оптимальном значении коэффициента k (небольшое случайное уменьшение по отношению к

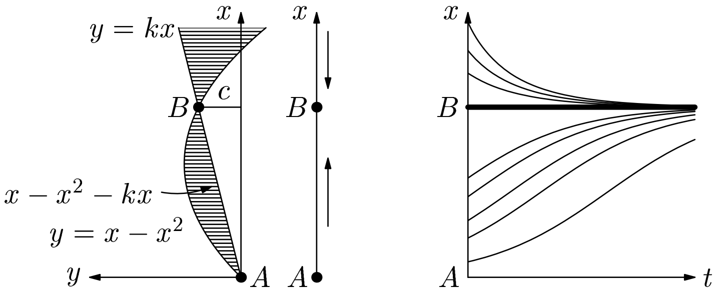

Рис. 7. Устойчивая система с обратной связью.

стационарному уровню $x = B$ приводит к автоматическому восстановлению стационарного уровня силами самой системы).

Более того, небольшое отклонение коэффициента от оптимального значения $k = 1/2$ приводит не к самоуничтожению системы (как это было при небольшом отклонении от оптимального жесткого плана c), а лишь к небольшому уменьшению «дохода».

Итак, *введение обратной связи (т. е. зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов) стабилизирует систему, которая без обратной связи разрушилась бы при оптимизации параметров.*

Все сказанное выше останется справедливым и для мягкой модели (с соответствующим пересчетом коэффициентов). Следует подчеркнуть, что именно эта независимость от деталей жесткой модели (которые, как правило, не слишком хорошо известны) делает выводы мягкого моделирования полезными.

Попытки заменить мягкое моделирование жестким обычно приводят к иерархии все более сложных и громоздких математических построений, исследование которых доставляет прекрасный материал для большого количества диссертаций, но реальная ценность которых зачастую не превосходит в сущности простых (хотя без математики и не очевидных) выводов, основанных на анализе именно простейших моделей, подобных описанной выше.

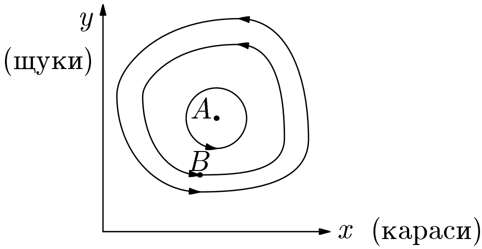

Рис. 8. Эволюция популяций карасей и щук в модели Лотка-Вольтерра.

3. Жесткие модели как путь к ошибочным предсказаниям

Важно, чтобы простейшая модель была структурно устойчивой, т. е. чтобы выводы выдерживали малое изменение параметров и функций, описывающих модель. Описанная выше модель обладает этим свойством структурной устойчивости. Пример модели, не обладающей этим свойством, — знаменитая модель Лотка – Вольтерра борьбы за существование (рис. 8),

$$\dot{x} = ax - cxy,$$
$$\dot{y} = -by + dxy.$$

В этой модели x — число карасей, y — число щук (желающие могут считать, что x — трудящиеся, а y — организованные преступники). Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа карасей в отсутствие щук, b — естественное вымирание щук, лишенных карасей. Вероятность взаимодействия карася и щуки считается пропорциональной как количеству карасей, так и числу щук (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию карасей, но способствует увеличению популяции щук (члены $-cxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 8), всякое же дру-

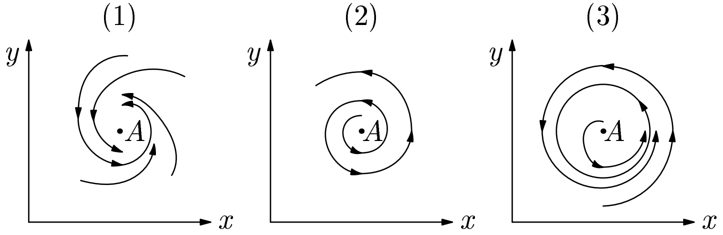

Рис. 9. Мягкая структурно устойчивая модель борьбы за существование

гое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как карасей, так и щук, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

При малом изменении модели

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - cxy + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} &= -by + dxy + \varepsilon g(x, y), \qquad \varepsilon \ll 1, \end{aligned}$$

к правым частям добавляются малые члены (учитывающие, например, конкуренцию карасей за пищу и щук за карасей). В результате вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотка – Вольтерра, теряет силу. В зависимости от вида малых поправок f и g возможны, например, сценарии 1 – 3 рис. 9 (которые уже структурно устойчивы).

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система «идет в разнос». Стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа бандитов, то к их почти полному вымиранию (вследствие того, что они настолько ограбили трудящихся, что взять уже нечего). Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой: происходит изменение законов эволюции, т. е.

революция.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A устанавливается с течением времени периодический режим C (в котором, скажем, радикалы и консерваторы периодически сменяют друг друга). В отличие от исходной жесткой модели Лотка – Вольтерра, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотка – Вольтерра, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: *жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).*

В случае модели Лотка – Вольтерра для суждения о том, какой же из сценариев 1 – 3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

4. Опасность многоступенчатого управления

Явление, описываемое в этом разделе, хорошо известно в теории управления техническими системами. Оно наблюдается в чрезвычайно общей ситуации, но здесь я опишу его в самой простой модели, заменяя лишь технические термины человеческими.

Пусть производство какого-либо продукта x управляется некоторым руководителем, принимающим решение о скорости производства:

$$\dot{x} = y.$$

В свою очередь, поведение руководителя y управляется руководителем второго ранга, принимающим решение о том, как нужно менять скорость производства:

$$\dot{y} = z.$$

В свою очередь, поведение руководителя второго ранга z управляется руководителем третьего ранга, и т. д. вплоть до генерального руководителя (ранга n).

Генеральный руководитель в нашей модели реализует обратную связь: его решение основывается не на желании выполнить приказ начальства (как у руководителей предыдущих рангов), а на интересах дела. Например, он может желать достичь уровня X величины x и будет влиять на руководителя предыдущего ранга в положительную сторону, если уровень x не достигнут, и в отрицательную — если он превзойден.

Например, для $n = 3$ простейшая модель этого рода имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -k(x - X), \qquad k > 0. \end{cases}$$

Эту систему можно переписать в виде линейного дифференциального уравнения порядка n:

$$x^{(n)} = -k(x - X).$$

Уравнения этой (жесткой) модели легко решаются в явном виде. Устойчивость желаемого стационарного состояния ($x = X$, $y = z = \ldots = 0$) определяется тем, отрицательны ли вещественные части корней λ характеристического уравнения

$$\lambda^n = -k.$$

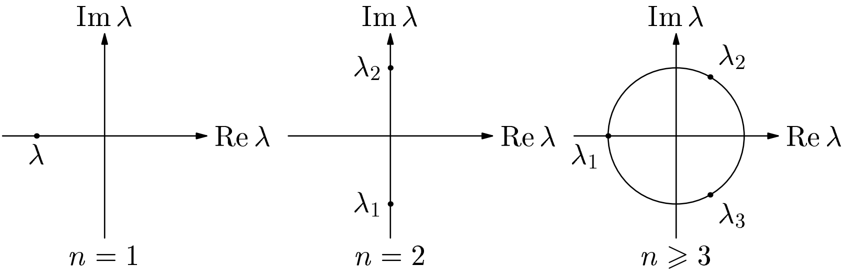

Рис. 10. Неустойчивость многоступенчатого управления.

Эти корни — комплексные числа, изображенные на рис. 10. Эти корни образуют на плоскости комплексного переменного λ вершины правильного n-угольника. Если $n > 3$, некоторые вершины обязательно лежат в (неустойчивой) правой полуплоскости ($\operatorname{Re}\lambda > 0$). При $n = 1$ корень $\lambda = -k$ лежит в устойчивой полуплоскости, а при $n = 2$ корни $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$ лежат на границе устойчивости.

Вывод. *Многоступенчатое управление, описываемое нашей моделью при $n > 3$, неустойчиво. Двухступенчатое управление приводит к периодическим колебаниям, но не вызывает катастрофического нарастания колебаний, происходящего при трех- и более ступенчатом управлении.*

Настоящую устойчивость обеспечивает только одноступенчатое управление, при котором управляющее лицо более заинтересовано в интересах дела, чем в поощрении со стороны начальства.

Эти выводы, сделанные выше на основании анализа простейшей жесткой модели, на самом деле выдерживают проверку на структурную устойчивость, исключая лишь случай $n = 2$: двухступенчатое управление может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, в зависимости от деталей организации дела, которыми мы выше пренебрегли при составлении нашей самой простой модели.

Длительное и, по-видимому, устойчивое функционирование системы многоступенчатого управления в СССР объяснялось, вероятно, неисполнением директивных указаний и существованием «теневой» системы заинтересовывания управляющих различных рангов в интересах дела. Без такой реальной заинтересованности (которая в современных условиях уже не обязательно обеспечивается коррупцией) многоступенчатое управление всегда ведет к разрухе.

К счастью, необходимость в независимости Центробанка уже хорошо понята, но многоступенчатое («административное») управление сохраняется во многих других случаях.

5. Математические модели перестройки

Самые простые и самые общие математические модели этой сильно нелинейной ситуации приводят здесь к выводам, которые могут показаться неожиданными для управленцев, привыкших иметь дело с линейными системами, в которых результаты пропорциональны усилиям.

Я воспроизведу здесь описание этих выводов из третьего издания моей книжки «Теория катастроф» (М., Наука, 1990) (в предыдущих изданиях эти выводы поместить не удавалось по причинам, исчезнувшим — надеюсь, не только временно — вследствие самой перестройки).

Рассмотрим нелинейную систему, находящуюся в установившемся устойчивом состоянии, признанном плохим, поскольку в пределах видимости имеется лучшее, предпочтительное устойчивое состояние системы[2] (рис. 11).

Вот некоторые простейшие выводы:

1. Постепенное движение в сторону лучшего состояния сразу же приводит к ухудшению. Скорость ухудшения при равномерном движении к лучшему состоянию увеличивается.

2. По мере движения от худшего состояния к лучшему сопротивление системы изменению ее состояния растет.

[2]Сама по себе рыночная экономика — не панацея: согласно знаменитой теореме Дебрё она может в принципе приводить и не к устойчивости, а к любому хаосу.

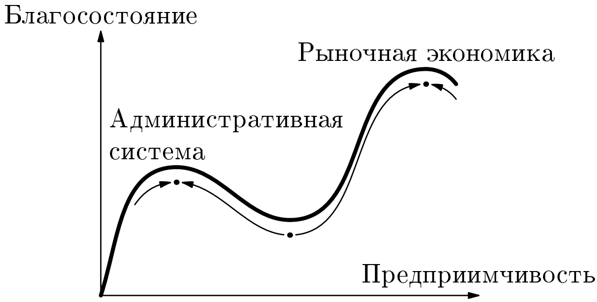

Рис. 11. Перестройка с точки зрения теории перестроек.

3. Максимум сопротивления достигается раньше, чем самое плохое состояние, через которое нужно пройти для достижения лучшего состояния. После прохождения максимума сопротивления состояние продолжает ухудшаться.

4. По мере приближения к самому плохому состоянию на пути перестройки сопротивление, начиная с некоторого момента, начинает уменьшаться, и как только самое плохое состояние пройдено, не только полностью исчезает, но система начинает притягиваться к лучшему состоянию.

5. Величина ухудшения, необходимого для перехода в лучшее состояние, сравнима с финальным улучшением и увеличивается по мере совершенствования системы. Слабо развитая система может пройти в лучшее состояние почти без предварительного ухудшения, в то время как развитая система, в силу своей устойчивости, на такое постепенное, непрерывное улучшение неспособна.

6. Если систему удастся сразу, скачком, а не непрерывно, перевести из плохого устойчивого состояния достаточно близко к хорошему, то дальше она будет сама собой эволюционировать в сторону хорошего состояния.

С этими объективными законами функционирования нелинейных систем нельзя не считаться. Выше сформулированы лишь простейшие качественные выводы. Теория доставляет также количественные модели, но качественные выводы представляются более важными и в то же время более надежными: они мало зависят от деталей функционирования системы, устройство которой и численные параметры могут быть недостаточно известными.

Наполеон критиковал Лапласа за «попытку ввести в управление дух бесконечно малых»[3]. Математическая теория перестроек — это та часть современного анализа бесконечно малых, без которой сознательное управление сложными и плохо известными нелинейными системами практически невозможно.

Теория мягкого моделирования — это искусство получать относительно надежные выводы из анализа малонадежных моделей. Ниже приведена еще одна модель, объясняющая довольно неожиданные наблюденные законы.

6. Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира

Первая цифра числа 2^n бывает единицей примерно в 6 раз чаще, чем девяткой. Так же распределены первые цифры населения и площади стран мира. (Я предполагаю, что и первые цифры, скажем, численностей или капиталов компаний подчиняются тому же распределению, но не располагаю нужными для проверки данными).

Предлагаемое ниже объяснение превращается в теорему при фиксации простейшей жесткой модели (такие теоремы можно, по-видимому, доказать и для широкого класса других жестких моделей, так что вся теория, видимо, оправдывается и при мягком моделировании).

Последовательность первых цифр первых чисел 2^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, \ldots$$

содержит очень много единиц. Можно проверить, продолжив вычисление, что единицы составляют асимптотически около 30%

[3] Мои французские коллеги объяснили мне, что Лаплас, будучи министром, требовал, чтобы все счета сходились до копейки.

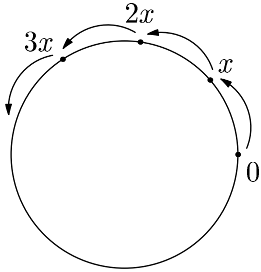

Рис. 12. К теореме Вейля.

членов этой последовательности. Этот результат следует из теоремы Г. Вейля (доказанной около ста лет назад), согласно которой последовательность дробных долей $\{nx\}$ чисел nx, где x иррационально, равномерно распределена на отрезке от 0 до 1. (Дробная доля числа a — это разность $\{a\} = a - [a]$ между a и наибольшим целым числом $[a]$, не превосходящим a.)

Теорема Вейля означает, что если точка прыгает по окружности длины 1 шагами, несоизмеримыми с ее длиной (рис. 12), то доля времени, проводимого прыгающей точкой в каждой дуге, пропорциональна длине дуги (и не зависит от расположения дуги на окружности).

Первая цифра i числа определяется тем, в какой из отрезков между точками $\lg i$ и $\lg(i+1)$ попадает дробная часть (мантисса) его логарифма (здесь и далее логарифмы десятичные).

Поскольку $\lg 2^n = n \lg 2$, а число $x = \lg 2$ иррационально, теорема Вейля доставляет равномерное распределение точек $\{\lg 2^n\}$ на отрезке от 0 до 1. Следовательно, доля чисел 2^n, имеющих первой цифрой десятичного разложения i, составляет длину p_i отрезка от $\lg i$ до $\lg(i+1)$. Мы получаем таким образом следующую статистику первых цифр чисел 2^n (в процентах):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100p_i$	30	17	12	10	8	7	6	5	5

Например, доля единиц составляет $p_1 = \lg 2 \approx 0{,}30103\ldots$, что примерно в 6 раз больше доли девяток.

Такое же распределение имеют первые цифры членов любой геометрической прогрессии (например, 3^n). Исключение составляют, конечно, прогрессии 10^n, $(\sqrt{10})^n,\ldots$ и вообще прогрессии со знаменателями $10^{p/q}$, где p и q целые.

Лет двадцать назад Н. Н. Константинов обратил мое внимание на то, что первые цифры населения стран мира подчиняются тому же странному распределению: единиц примерно вшестеро больше, чем девяток. Вот мое тогдашнее объяснение этого явления. Рассмотрим последовательность, образованную численностями населения фиксированной страны в последовательные годы. Согласно теории Мальтуса, эти числа образуют геометрическую прогрессию. Согласно теореме Вейля, первые цифры распределены так же как первые цифры степеней двойки. Перейдем теперь к статистике населения разных стран в один и тот же год. Согласно «эргодическому принципу» временные средние можно заметить пространственными: статистика первых цифр должна оказаться такой же, как для одной страны.

(Эргодический принцип — то же самое соображение, согласно которому для исследования эволюции дерева в лесу нет необходимости ждать, когда оно вырастет из семени и умрет, а можно просто посмотреть на деревья разных возрастов. Здесь мы применили этот принцип в обратную сторону, вычисляя статистику по странам на основании знаний об эволюции одной страны.)

Для контроля я сравнил числа страниц в книгах на полке в моей библиотеке, длины рек и высоты гор. Во всех этих случаях доли единиц и доли девяток среди первых цифр полученных чисел оказались близкими. Книги, горы и реки не растут в геометрической прогрессии, теория Мальтуса к ним неприменима. Поэтому различие статистик первых цифр в числах, выражающих численности населения и, скажем, длины рек, служат своеобразным подтверждением формулы Мальтуса (согласно которой население либо растет в геометрической прогрессии, либо убывает, как мы это сейчас наблюдаем в России).

Однако лет десять назад М. Б. Севрюк обнаружил, что не только население, но и площади стран мира подчиняются такому же странному закону распределения первых цифр, как степени двойки[4]. К площадям теория Мальтуса, по-видимому, неприменима, так что возникает вопрос — как объяснить это поведение площадей:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100p_i$	29	21	10	11	6	6	8	3	6

Оказывается, целый ряд моделей передела мира приводит именно к такому распределению. Простейшая модель (для которой установление указанного распределения — теорема) такова: за единицу времени страна с вероятностью 50% делится пополам, а с вероятностью 50% объединяется с другой страной такой же площади.

Эта жесткая модель допускает точное математическое исследование, показывающее, что доля времени, в течение которого первая цифра площади страны будет единицей (соответственно, i) составляет $\lg 2 \approx 0{,}3\ldots$ (соответственно, $\lg(i+1) - \lg i$).

Компьютерные эксперименты (проведенные М. В. Хесиной в Торонто и Ф. Аикарди в Триесте летом 1997 года) показывают, что такое же распределение устанавливается в большом числе других моделей. Например, можно предположить, что за единицу времени любая из стран (с площадями x_k) с вероятностью $1/2$ объединяется со случайно выбранной другой (образуя страну площади $x_k + x_l$), а с вероятностью половина делится на две равные части.

Начиная с сотни стран площадей, скажем, $x_k = k$, можно уже через сотню шагов получить хорошее приближение к нашему стандартному распределению.

Деление на равные части можно заменить делением на части площадей px_k и $(1-p)x_k$ (Квебек, Украина,...), вероятности объединения и деления можно сделать различными — результаты численного эксперимента малочувствительны к этим изменениям модели. Можно даже ввести в рассмотрение географиче-

[4]Это распределение может показаться менее странным, если заметить, что это — единственное распределение, не зависящее от того, в каких единицах измеряются площади (будь то квадратные километры, квадратные мили, квадратные футы, квадратные дюймы и т. д.).

ское положение стран, разрешив объединение лишь с соседями (пренебрегая существованием в свое время Восточной Пруссии, а ныне — Калининградской области). Численные эксперименты приводят к тому же распределению (будем ли мы моделировать географию земного шара окружностью, или сферой, отрезком или прямоугольником).

Таким образом, наше распределение является, по-видимому, свойством мягкой модели, но доказательство того, что оно устанавливается в ее конкретных реализациях в виде жестких моделей — трудная и далеко не решенная математическая задача.

Математика, подобно физике, — экспериментальная наука, отличающаяся от физики лишь тем, что в математике эксперименты очень дешевы. Видимо, именно поэтому бюджет отделения математики в РАН в сорок раз меньше бюджета физических отделений (а, следовательно, производительность наших математиков в соответствующее число раз выше).

7. Математика и математическое образование в современном мире

«No star wars — no mathematics», — говорят американцы. Тот прискорбный факт, что с (временным?) прекращением военного противостояния математика, как и все фундаментальные науки, перестала финансироваться, является позором для современной цивилизации, признающей только «прикладные» науки[5], ведущей себя совершенно подобно свинье под дубом.

На самом деле никаких прикладных наук не существует и никогда не существовало, как это отметил более ста лет назад Луи Пастер (которого трудно заподозрить в занятиях, не нужных человечеству). Согласно Пастеру, существуют лишь приложения науки.

Опыты с янтарем и кошачьим мехом казались бесполезными

[5]Непрекращающееся финансирование псевдоспиритических наук вроде парапсихологии и антиисторического вздора академика А. Т. Фоменко (в 1997 году зам. академика-секретаря отделения математики РАН) еще ждет своего объяснения.

правителям и военачальникам XVIII века. Но именно они изменили наш мир после того, как Фарадей и Максвелл написали уравнения теории электромагнетизма. Эти достижения фундаментальной науки окупили все затраты человечества на нее на сотни лет вперед. Отказ современных правителей платить по этому счету — удивительно недальновидная политика, за которую соответствующие страны, несомненно, будут наказаны технологической и следовательно экономической (а также и военной) отсталостью.

Человечество в целом (перед которым ведь стоит тяжелейшая задача выживания в условиях мальтузианского кризиса) должно будет заплатить тяжелую цену за близоруко-эгоистическую политику составляющих его стран.

Математическое сообщество несет свою долю ответственности за повсеместно наблюдаемое давление со стороны правительств и общества в целом, направленное на уничтожение математической культуры как части культурного багажа каждого человека и в особенности на уничтожение математического образования.

Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Выросли целые поколения профессиональных математиков и преподавателей математики, умеющих только это и не представляющих себе возможности какого-либо другого преподавания математики.

Наиболее характерными приметами формализованного преподавания является изобилие немотивированных определений и непонятных (хотя логически безупречных) доказательств. Отсутствие примеров, отсутствие анализа предельных случаев и предела применимости математических теорий, отсутствие чертежей и рисунков — столь же постоянный недостаток математических текстов, как и отсутствие внематематических приложений и мотивировок понятий математики.

Уже Пуанкаре отмечал, что есть только два способа научить дробям — разрезать (хотя бы мысленно) либо пирог, либо яблоко. При любом другом способе обучения (аксиоматическом или алгебраическом) школьники предпочитают складывать числители с числителями, а знаменатели — со знаменателями.

Математика является экспериментальной наукой — частью теоретической физики и членом семейства естественных наук. Основные принципы построения и преподавания всех этих наук применимы и к математике. Искусство строгого логического рассуждения и возможность получать этим способом надежные выводы не должно оставаться привилегией Шерлока Холмса — каждый школьник должен овладеть этим умением. Умение составлять адекватные математические модели реальных ситуаций должно составлять неотъемлемую часть математического образования. Успех приносит не столько применение готовых рецептов (жестких моделей), сколько математический подход к явлениям реального мира. При всем огромном социальном значении вычислений (и computer science), сила математики не в них, и преподавание математики не должно сводиться к вычислительным рецептам.

В истории России был премьер-министр с математическим образованием (окончивший Санкт-Петербургский университет по математике в школе Чебышева). Вот как он описывает разницу между мягким и жестким математическим моделированием[6]:

> Между математиками есть двоякого рода люди: 1) математики-философы, т. е. математики высшей математической мысли, для которых цифры и исчисления есть ремесло; для этого рода математиков цифры и исчисления не имеют никакого значения, их увлекают не цифры и исчисления, а сами математические идеи. Одним словом, это математики, так сказать, чистой философской математики; 2) напротив, есть такие математики, которых философия математики, математические идеи не трогают, которые всю суть математики видят в исчислениях, цифрах и формулах...
>
> Математики-философы, к которым принадлежу и я, относятся всегда с презрением к математикам-ис-

[6]С. Ю. Витте. Воспоминания, т. 3, гл. 5.

> числителям, а математики-исчислители, среди которых есть много ученых весьма знаменитых, смотрят на математиков-философов как на людей в известном смысле «тронутых».

Сейчас мы знаем, что описанные Витте различия имеют физиологическое происхождение. Наш мозг состоит из двух полушарий. Левое отвечает за умножение многочленов, языки, шахматы, интриги и последовательности силлогизмов, а правое — за пространственную ориентацию, интуицию и все необходимое в реальной жизни. У «математиков-исчислителей» по терминологии Витте гипертрофировано левое полушарие, обычно за счет недоразвития правого. Это заболевание составляет их силу (вспомним «Защиту Лужина» Набокова). Но доминирование математиков этого типа и привело к тому засилью аксиоматическо-схоластической математики, особенно в преподавании (в том числе и в средней школе), на которое общество естественно и законно реагирует резко отрицательно. Результатом явилось повсеместно наблюдаемое отвращение к математике и стремление всех правителей отомстить за перенесенные в школе унижения ее изничтожением.

Мягкое моделирование требует гармоничной работы обоих полушарий мозга. После окончания университета Витте не нашел работы по специальности и принял предложение частной компании стать начальником дистанции на Юго-Западной железной дороге. Для занятия этого поста ему пришлось по неделе простажироваться в должности каждого из своих подчиненных (стрелочника, путевого обходчика, багажного раздатчика, билетного кассира, кочегара, машиниста, начальника станции...) — неоценимый опыт для будущего премьер-министра.

Однажды царский поезд, следующий в Крым, был замедлен по приказу Витте на его дистанции. Несмотря на возмущение Александра III, машинист подчинился не его приказу, а приказу своего начальника дистанции. Когда поезд перешел на следующую, уже не подчинявшуюся Витте, дистанцию, скорость была, естественно, повышена. Вскоре царский поезд сошел с рельсов и опрокинулся (катастрофа у станции Борок). Царь запомнил имя непокорного начальника дистанции, и Витте был назначен министром (кажется, путей сообщения), а впоследствии стал и премьер-министром. С его именем связана вся грандиозная эпоха «развития капитализма в России», в том числе — строительство действующей и сейчас сети железных дорог.

Но Витте лучше разбирался в реальной жизни страны и в проблемах экономики и техники, чем в политических интригах (к которым больший талант имеют люди левополушарные). С приходом к власти деятелей типа Распутина он был отправлен в отставку. Витте вновь призывался к власти для ликвидации критических ситуаций, созданных политиками (русско-японская война, революция 1905 года), я даже предполагаю, что если бы Витте оставался руководителем России в течение следующего десятилетия, то наша история была бы совсем иной: не было бы ни мировой войны, ни революции и мы жили бы сейчас, как Финляндия или Швеция...

Конечно, сила Витте заключалась вовсе не в применении какой-либо математики («исчисления»), а в том способе мышления, который он называет «математикой-философией» и который заставляет человека с математическим образованием думать о всех реалиях окружающего мира с помощью (сознательного или бессознательного) мягкого математического моделирования.

Идея о необходимости этого рода мышления для успеха в любой экономической или производственной деятельности (исключая, быть может, политические интриги) была хорошо понята уже сто лет назад[7]:

> Не пользующаяся математическими символами человеческая логика зачастую запутывается в словесных определениях и делает вследствие этого ошибочные выводы — и вскрыть эту ошибку за музыкою слов иногда стоит огромного труда и бесконечных, часто бесплодных, споров.

[7] В. Ф. Арнольд. Политико-экономические этюды. Одесса, изд. Распопова, 1904, 113 с., с. 5.

К сожалению, и сейчас остаются актуальными слова классика математической экономики Парето[8]:

> Экономисты, не знающие математики, находятся в положении людей, желающих решить систему уравнений, не зная ни того, что она из себя представляет, ни того даже, что представляет из себя каждое входящее в нее единичное уравнение.

Выводы: планируемое во всех странах подавление фундаментальной науки и, в частности, математики (по американским данным на это им потребуется лет 10 – 15) принесет человечеству (и отдельным странам) вред, сравнимый со вредом, который принесли западной цивилизации (и Испании) костры инквизиции.

Математическое образование должно составлять неотъемлемую часть культурного багажа каждого школьника. Но оно не должно никоим образом сводиться к рецептурам (будь то таблица умножения или Windows 95).

Основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира, умения, так хорошо описанного Витте в его характеристике «математики-философии» и так блестяще использованного им в вовсе не математической деятельности. Искусство составлять и исследовать мягкие математические модели является важнейшей составной частью этого умения.

Литература

[1] В. И. Арнольд. Теория катастроф. М.: Наука, 1990, 128 с.

[2] Т. Постон, И. Стюарт. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980, 608 с.

[3] Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд. 2-е. М.: Наука, 1969, 424 с.

[8] V. Pareto. Anwendung der Mathematik auf Nationalökonimie. Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften, Band I, Heft 7, S. 1114.

[4] Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 5-е. М.: Наука, 1982, 331 с.

[5] Р. С. Гутер, А. Р. Янпольский. Дифференциальные уравнения. Изд. 2-е. М.: Высшая школа, 1976, 304 с.

[6] М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2-е. М.: Наука, 1985, 448 с.

[7] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987, 160 с.

[8] Н. П. Векуа. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложения в механике. М.: Наука, 1987, 256 с.

[9] И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 6-е. М.: Наука, 1970, 279 с.

[10] Д. Эрроусмит, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Пер. с англ. под ред. Н. Х. Розова. М.: Мир, 1986, 240 с.

[11] В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971, 240 с.

Автор благодарит Д. С. Шмерлинга за пополнение списка литературы.