Эли КАРТАН

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

перевод с французского М. В. Васильевой,
при участии С. К. Ландо и С. С. Анисова

под редакцией А. Б. Сосинского

МОСКВА МЦНМО

1998

ББК 22.14
К 27

Картан Э.
К 27 Избранные труды. — Пер. с франц. — Под редакцией А. Б. Сосинского. — М: МЦНМО, 1998. — 392 с.

ISBN 5-900916-27-8

Книга представляет собой перевод на русский язык четырех мемуаров знаменитого французского математика Эли Картана, в основном посвященных бесконечномерным алгебрам Ли. Элементы группы (алгебры) Ли трактуются классически как преобразования (соответственно, инфинитезимальные преобразования) систем дифференциальных уравнений. Интерес к этой тематике сегодня обусловлен, в частности, тем, что бесконечномерными алгебрами Ли являются алгебры токов (интересующие физиков), алгебры операторов (имеющие важные в квантовой теории поля) и алгебры Каца-Муди.

Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и математиков-исследователей.

ББК 22.14

Эли Картан

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

под редакцией *А. Б. Сосинского*

Верстка *В. Кордонский, В. Радионов*

Подписано в печать 1.11.98. Формат 70 × 100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Объем 24,5 печ. л. Тираж 1000 экз.

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования,
Москва, Большой Власьевский, д. 11. Тел. (095) 241-05-00

Отпечатано с готовых диапозитивов

Типография «Наука» РАН. 121009, Москва, Шубинский пер., 6

Заказ № 106

Ouvrage réalisé dans le cadre du programme d'aide à la publication «Pouchkine»
avec le soutien du Ministère français des Affaires Etrangères
et de l'Ambassade de France en Russie

Издание осуществлено в рамках программы «Пушкин»
при поддержке Министерства иностранных дел Франции
и Посольства Франции в России

AVANT-PROPOS

Comme la Russie, la France est un pays qui a vu naître et travailler un grand nombre de mathématiciens. Pas toujours compris de leur vivant, ils ont profondément marqué l'évolution de leur science et de ses applications technologiques. Elie Cartan (1869–1951) fut l'un de ces savants précurseurs.

C'est un grand honneur pour moi de préfacer la traduction en russe de quelques uns de ses articles scientifiques, publiés dans ses Œuvres Complètes à Paris deux ans après sa mort. Cet ouvrage sera utile aux étudiants en fin d'études ou préparant leur thèse. J'espère également qu'il permettra aux chercheurs d'avancer vers la compréhension des théories proposées par Elie Cartan, auquel il convient d'associer son fils, Henri Cartan.

Parmi les multiples fonctions de l'Ambassade de France en Russie, l'une me tient particulièrement à cœur: favoriser la coopération entre scientifiques français et russes, mise en place depuis la fin des années soixante. Une meilleure information de chacun des partenaires est indispensable, soit dans sa propre langue, soit dans la langue de l'autre. L'avancement des sciences, les échanges de chercheurs et d'étudiants en thèse, les travaux en coopération, dépendent tous d'une meilleure compréhension et d'une communication plus efficace. J'ai même pu constater, ces dernières années, qu'une demande importante d'œuvres françaises s'est fait jour.

Le Ministère français des Affaires Etrangères et l'Ambassade de France en Russie ont mis en place un programme d'aide à la publication de traductions en russe d'œuvres françaises, le Programme «Pouchkine». Le présent ouvrage est le premier livre scientifique de cette opération: il est très symbolique que cela soit un livre de mathématiques, le domaine scientifique où la coopération franco-russe est la plus active. Je suis sûr que cette publication développera plus encore ces relations.

Je tiens à remercier les enseignants de l'Université Indépendante de Moscou, qui ont choisi et traduit le présent ouvrage.

Hubert Colin de Verdière,
Ambassadeur de France en Russie

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во Франции, как и в России, родились и трудились многие математики. Зачастую непонятые при жизни, они оставили глубокий след в развитии математики, предложенные ими методы нашли широкое техническое применение. Эли Картан (1869–1951) — один из таких ученых-первооткрывателей.

Для меня большая честь — написать предисловие к переводу на русский язык некоторых научных трудов Эли Картана, которые были опубликованы вместе в Париже в его полном собрании сочинений через два года после его кончины. Этот сборник будет полезен как студентам, заканчивающим обучение, так и аспирантам. Я надеюсь также, что он поможет ученым продвинуться вперед в понимании теорий, предложенных Эли Картаном, рядом с именем которого следует назвать и его сына, Анри Картана.

Среди многообразной деятельности Посольства Франции в России я хотел бы отметить ту, которая мне наиболее дорога: оказание помощи сотрудничеству между французскими и российскими учеными, которое берет начало в шестидесятых годах. Необходимо, чтобы партнеры лучше информировали друг друга на своем родном языке, либо на языке партнера. Лучшее понимание, более продуктивное общение способствуют продвижению науки вперед, обмену учеными и аспирантами, проведению совместных работ. Хочется отметить, что за последние годы значительно возрос спрос на труды французских авторов.

Министерство иностранных дел Франции и посольство Франции в России создали и осуществляют программу помощи в опубликовании на русском языке произведений французских авторов — Программу «Пушкин». Настоящий сборник является первой научной книгой, издаваемой в рамках Программы. Очень символично, что этой книгой стала книга по математике, поскольку именно в этой области франко-российское сотрудничество является наиболее активным. Уверен, что выход в свет сборника научных трудов Эли Картана будет способствовать дальнейшему развитию научных связей.

Я хотел бы особо поблагодарить преподавателей Математического колледжа Независимого Московского Университета, которые остановили свой выбор на этом сборнике и перевели его на русский язык.

Юбер Колен де Вердьер,
Посол Франции в России

О РАБОТАХ Э. КАРТАНА

Вниманию читателей предлагается перевод на русский язык четырех мемуаров знаменитого французского математика Эли Картана, посвященных бесконечномерным группам и алгебрам Ли. Классики рассматривали группу Ли как группу симметрий алгебраического или дифференциально-геометрического объекта, а соответствующая алгебра Ли трактовалась как множество инфинитезимальных (бесконечно-малых) преобразований. Поскольку группа симметрий таких объектов не обязательно конечномерна, то уже в работах самого Софуса Ли обсуждалась проблема описания бесконечномерных групп преобразований.

В работах Э. Картана и В. Киллинга (конец XIX века) была решена задача классификации простых конечномерных алгебр Ли над полем комплексных чисел. А десять лет спустя Картан получил классификацию простых бесконечномерных алгебр Ли векторных полей, заданных на конечномерном пространстве. Это достижение Картана составляет основное содержание предлагаемой книги.

К сожалению, глубокие работы Картана по простым бесконечномерным алгебрам Ли были забыты до середины шестидесятых годов. Возрождение интереса к этой тематике связано, в первую очередь, с появлением техники фильтрованных и градуированных алгебр Ли. С другой стороны, в приложениях часто приходится сталкиваться с бесконечномерным случаем. Вот простой пример. Как хорошо известно, первые интегралы гамильтоновой системы образуют алгебру Ли (теорема Пуассона). Если их скобка Пуассона линейно выражается через эти интегралы, то соответствующая алгебра Ли конечномерна. В случае нелинейной скобки Пуассона получаем бесконечномерную алгебру Ли. Кстати сказать, самим Картаном была развита техника понижения порядка гамильтоновых систем, основанная на использовании бесконечномерной алгебры ее первых интегралов (см. его книгу „Интегральные инварианты“, второе издание которой на русском языке недавно вышло в издательстве УРСС).

В настоящее время нет единой теории бесконечномерных групп и алгебр Ли. С другой стороны, имеются четыре класса бесконечномерных групп и алгебр Ли, которые интенсивно изучались в последние годы. Прежде всего, это группы диффеоморфизмов гладких многообразий, алгебры Ли которых — пространства векторных полей с обычной операцией коммутирования. Как уже отмечалось, это основной объект исследований Картана. Второй класс составляют группы Ли гладких отображений заданного многообразия в группу Ли. Физики часто называют алгебры Ли таких групп алгебрами токов. Третий класс состоит из групп и алгебр Ли операторов в гильбертовом или банаховом пространстве. Эти объекты имеют важные приложения в квантовой механике и квантовой теории поля. Наконец, четвертый класс составляют алгебры Каца–Муди (или алгебры Ли с обобщенной матрицей Картана). Они играют важную роль, например, в теории точного интегрирования уравнений Гамильтона. В частности, классификация интегрируемых обобщенных цепочек Тоды естественным образом связана с корневыми системами алгебр Каца–Муди.

Быть может, современному читателю, воспитанному на теоретико-множественной традиции преподавания математики, изучение книги Картана, написанной в простой и «бесхитростной» манере, покажется трудным делом. Но в этом и состоит особая ценность работ Картана (как и других классиков): его идеи не затуманены абстрактным изложением предмета, а мотивировки исследования и связи с другими областями математики выступают на передний план.

Эта книга может оказаться полезной в первую очередь молодым исследователям (как математикам, так и специалистам по теоретической физике). Она может оказаться хорошим стимулом для дальнейших работ по бесконечномерным группам и алгебрам Ли, где есть еще много важных и нерешенных проблем.

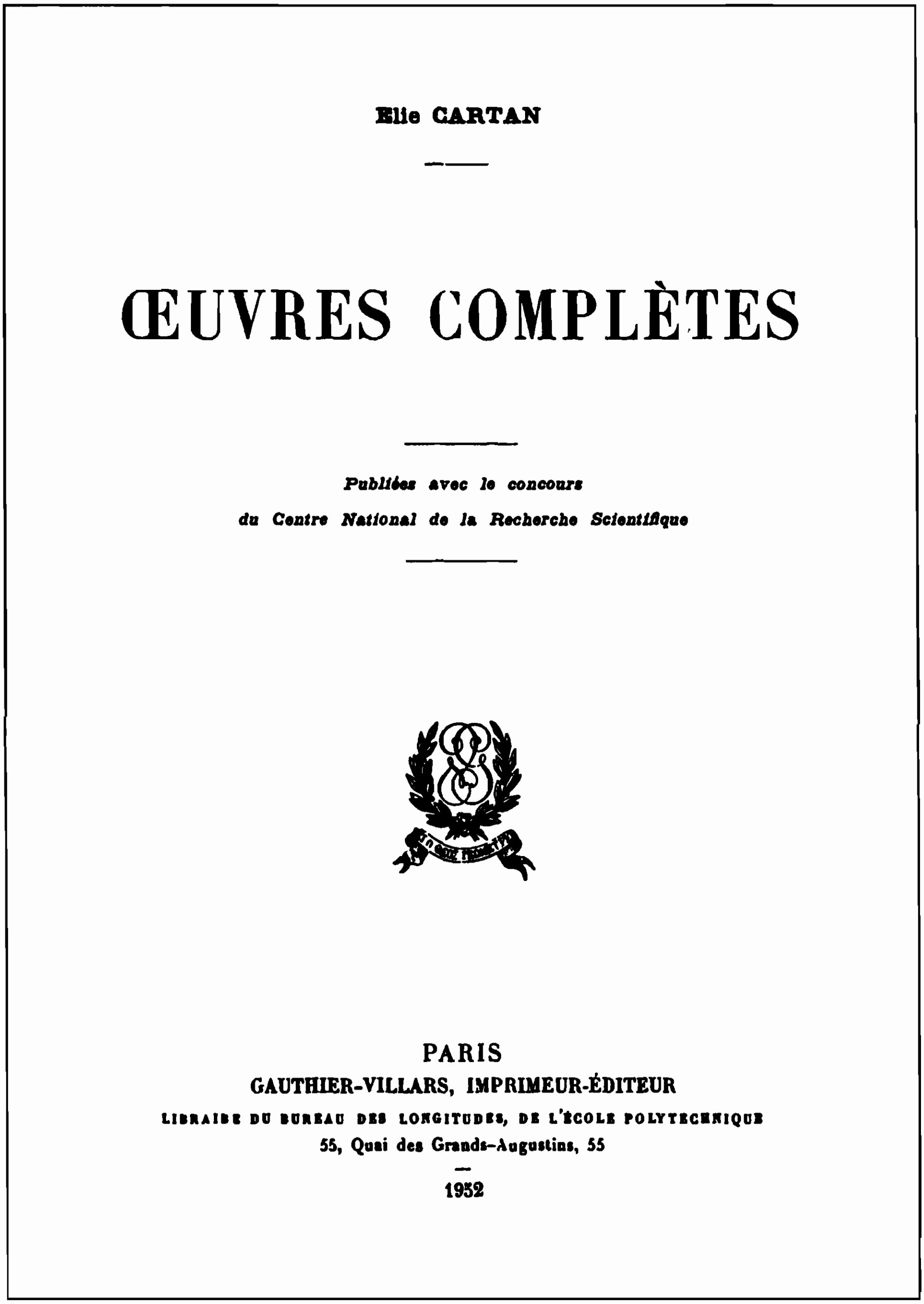
Переводчики и редактор книги с большим пиететом отнеслись к тексту Эли Картана, и не стали «модернизировать» ни обозначения, ни терминологию.¹) Я убежден, что читатель не будет испытывать в связи с этим особых трудностей. Устаревших терминов в книге мало; освоив на первых страницах, что «билинейный ковариант формы Пфаффа» — это просто внешний дифференциал 1-формы, а внешнее дифференцирование обозначается штрихом, он в дальнейшем ничего такого необычного больше не встретит.

Мы должны быть признательны Математическому колледжу Независимого Московского университета и Московскому Центру непрерывного математического образования за организацию издания книги Эли Картана и посольству Франции в России за поддержку этого издания.

Член-корреспондент
Российской Академии Наук
В. В. Козлов

---

¹) Исключение составляет перевод groupe (in)fini — (бес)конечномерная группа: буквальный перевод здесь сбил бы с толка современного читателя.



Elie CARTAN

ŒUVRES COMPLÈTES

Publiées avec le concours
du Centre National de la Recherche Scientifique

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1952

Титульный лист Полного собрания трудов Эли Картана, Париж, 1952

О СТРУКТУРЕ
БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Цель настоящего Мемуара — изложить на новой основе структурную теорию непрерывных групп преобразований, задаваемых системой дифференциальных уравнений в частных производных. Можно считать, что любая такая группа состоит из преобразований наиболее общего вида, оставляющих инвариантными некоторый набор пфаффовых форм[1]. В заметке в *Comptes rendus*[2] я изложил вкратце, каким образом указанное свойство в сочетании с понятием билинейного ковариантa[3] пфаффовой формы позволяет вычислить введенные Софусом Ли константы c_{iks} для конечномерных групп, а также описал необходимые изменения в теории при переходе к бесконечномерным группам. Я отсылаю читателя к этой заметке.

Мемуар состоит из четырех глав. Первая посвящена теории систем уравнений Пфаффа в инволюции; в какой-то мере она служит дополнением к предыдущему Мемуару об интегрировании систем уравнений в полных дифференциалах, опубликованному в *Annales de l'École Normale* в 1901 г. Во второй главе все непрерывные группы вводятся с помощью некоторого набора пфаффовых форм и определяются структурные константы группы; тут же формулируются и доказываются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять эти константы. В третьей главе обсуждается вопрос о различных *продолжениях* бесконечномерных групп; для этого мы показываем, что группу можно определить как множество преобразований, которым отвечают линейные замены, превращающие один набор пфаффовых форм в другой, и принадлежащие заданной линейной группе.

Наконец, в четвертой главе рассматриваются бесконечномерные группы, зависящие от произвольных функций одного аргумента, и доказывается, что если такая группа действует просто транзитивно, то она изоморфна группе общих преобразований одной переменной.

Перевод статьи «Sur la structure des groupes infinis de transformations», *Annales de l'École Normale*, 3-e serie, t. XXI, 1904, p. 153 – 206; 3-e serie, t. XXII, 1905, p. 219 – 308.

[1] В современной терминологии — внешних дифференциальных 1-форм. — *Прим. ред.*

[2] E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis, *C. R. Acad. Sc.*, t. 135, 1902, p. 851 – 853.

[3] То есть внешнего дифференциала 1-формы. — *Прим. ред.*

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В ИНВОЛЮЦИИ

1. Известно, что данной пфаффовой форме¹) от n переменных

$$\omega_d = a_1(x)\,dx_1 + a_2(x)\,dx_2 + \ldots + a_n(x)dx_n \tag{1}$$

можно сопоставить ковариантное выражение, билинейное относительно двух систем дифференциалов²), обозначаемых символами d и δ:

$$\omega_{d\delta} = d\omega_\delta - \delta\omega_d = da_1\delta x_1 - \delta a_1 dx_1 + \ldots + da_n\delta x_n - \delta a_n dx_n = \\ = \sum_{(i,k)} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)(dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i). \tag{2}$$

Коэффициенты билинейного коварианта пфаффовой формы не могут быть произвольными функциями. Они удовлетворяют соотношениям, вытекающим из следующих соображений.

Произвольной дифференциальной билинейной кососимметрической форме

$$\Omega_{d\delta} = \sum_{(i,k)} a_{ik}(dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i) \qquad (a_{ik} = -a_{ki},\ a_{ii} = 0) \tag{3}$$

можно сопоставить трилинейное ковариантное выражение относительно трех систем дифференциалов³), обозначаемых символами d, δ и D:

$$\Omega_{d\delta D} = d\Omega_{\delta D} + \delta\Omega_{D\delta} + D\Omega_{d\delta} = \sum a_{ijk} \begin{vmatrix} dx_i & dx_j & dx_k \\ \delta x_i & \delta x_j & \delta x_k \\ Dx^i & Dx^j & Dx^k \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где

$$a_{ijk} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}.$$

---

¹) В современной терминологии — внешней дифференциальной 1-форме. — *Прим. ред.*

²) То есть 2-форму, являющуюся внешним дифференциалом пфаффовой формы; в современных обозначениях вместо $dx_i\delta x_k$ пишут $dx_i \wedge dx_k$. — *Прим. ред.*

³) То есть внешний дифференциал 2-формы. — *Прим. ред.*

Можно без труда проверить, что *если* $\Omega_{d\delta}$ *— билинейный ковариант пфаффовой формы* ω, *то* $\Omega_{d\delta D}$ *тождественно равен нулю, и наоборот, если трилинейный ковариант формы* $\Omega_{d\delta}$ *тождественно обращается в нуль, то можно показать, что существует пфаффова форма (определенная с точностью до прибавления дифференциала произвольной функции), билинейным ковариантом которой является* $\Omega_{d\delta}$. 1)

Равенство, содержащееся в предыдущей теореме, представляет собой аналог, в некотором смысле двойственный, тождества Якоби в теории полных систем. В дальнейшем мы будем часто его использовать и назовем *фундаментальным тождеством.*

2. В целях упрощения вычислений мы используем следующие обозначения. Для двух пфаффовых форм ω, ϖ формально положим

$$\omega\varpi = \omega_d\varpi_\delta - \omega_\delta\varpi_d; \tag{5}$$

аналогично, для трех пфаффовых форм положим

$$\omega\varpi\chi = \begin{vmatrix} \omega_d & \varpi_d & \chi_d \\ \omega_\delta & \varpi_\delta & \chi_\delta \\ \omega_D & \varpi_D & \chi_D \end{vmatrix}. \tag{6}$$

В этих обозначениях

$$\omega\varpi = -\varpi\omega, \qquad \omega\omega = 0,$$
$$\omega\varpi\chi = \varpi\chi\omega = \chi\omega\varpi = -\varpi\omega\chi = -\chi\varpi\omega = -\omega\chi\varpi.$$

Билинейный ковариант пфаффовой формы ω обозначается 2) просто через ω', т. е.

$$\omega' = \sum \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right) dx_i dx_k.$$

Билинейный ковариант формы $A\omega$, где A — произвольная функция переменных x, имеет вид

$$dA\omega + A\omega',$$

а трилинейный ковариант билинейной формы $A\omega\varpi$ равен

$$dA\omega\varpi + A\omega'\varpi - A\omega\varpi'. \tag{7}$$

---

1) На современном языке — внешний дифференциал $d\omega_1$ произвольной 1-формы ω_1 является замкнутой 2-формой ($d^2\omega_1 = 0$) и замкнутая 2-форма $\Omega_{d\delta}$ точна. — *Прим. ред.*

2) Здесь и всюду мы сохраняем авторское обозначение (штрих) для внешнего дифференциала вместо привычного в наше время d: $\Lambda^1 \to \Lambda^2$. — *Прим. ред.*

Наконец, если

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

— n независимых пфаффовых форм от $dx_1, \ldots, dx_n$, то любую пфаффову форму можно представить в виде

$$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_n\omega_n,$$

всякую билинейную форму — в виде

$$\sum_{(i,k)} a_{ik}\omega_i\omega_k$$

и, наконец, всякую трилинейную форму — в виде

$$\sum_{(i,j,k)} a_{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k.$$

3. Теория *общих* интегральных многообразий пфаффовой системы уравнений сводится к следующему:

Назовем *линейным элементом* пару, состоящую из точки $(x_1, \ldots, x_n)$ и прямой (с направлением $dx_1, \ldots, dx_n$), приложенной в этой точке. Аналогично, *p-мерный элемент* состоит из точки и p-мерной касательной плоскости в этой точке. Линейный элемент называется *интегральным*, если его координаты удовлетворяют системе уравнений Пфаффа; говорят, что два линейных элемента, приложенных в одной точке, *находятся в инволюции*, если подстановка пары векторов, лежащих в этих элементах, обращает в нуль билинейные коварианты всех определяющих форм системы. Наконец, p-мерный элемент называется *интегральным*, если интегральным является любой его линейный элемент и любые два его линейных элемента находятся в инволюции.

Итак, пусть s — число линейно независимых уравнений на линейные элементы в произвольных точках. Очевидно, что

$$s \leqslant n;$$

если $s = n$, то у такой системы нет ни одного линейного интегрального элемента и, следовательно, ни одного *общего* интегрального многообразия; если $s < n$, то через каждую точку проходит по крайней мере один линейный интегральный элемент.

Пусть E — произвольный линейный интегральный элемент; обозначим через $s+s_1$ число линейно независимых уравнений на линейные интегральные элементы, находящиеся в инволюции с элементом E; очевидно,

$$s+s_1 \leqslant n-1;$$

если $s+s_1 = n-1$, то через E не проходит ни одного 2-мерного интегрального элемента и размерность общих интегральных многообразий системы не превосходит единицы; если $s+s_1 < n-1$, то через E проходит по крайней мере один двумерный интегральный элемент.

Пусть теперь E' — произвольный двумерный интегральный элемент; обозначим через $s+s_1+s_2$ число линейно независимых уравнений на линейные интегральные элементы, находящиеся в инволюции с E'; очевидно,

$$s+s_1+s_2 \leqslant n-2$$

и так далее.

В конце концов мы приходим к некоторому натуральному числу m, равному максимальной размерности общего интегрального многообразия системы, и к *невозрастающей* последовательности из $m+1$ натурального числа

$$s, s_1, \ldots, s_m,$$

выражающей степень неопределенности общего m-мерного интегрального многообразия; оно зависит от

s_m	произвольных функций от	m	переменных,
s_{m-1}	произвольных функций от	$m-1$	переменных,
……………………………………………… ,			
s_1	произвольных функций от	1	переменной,
s	произвольных констант.		

Наконец,

$$s+s_1+\ldots+s_m = n-m.$$

Для произвольного натурального числа p, не превосходящего m, мы будем говорить, что система, рассматриваемая как система от p независимых переменных, *находится в инволюции.* Имеем

$$s+s_1+\ldots+s_p \leqslant n-p, \tag{8}$$

и неособые p-мерные интегральные элементы, приложенные в произвольной точке, зависят от

$$Q = p(n-p) - ps - (p-1)s_1 - (p-2)s_2 - \ldots - 2s_{p-2} - s_{p-1}$$

параметров.

Заметим, что если разрешить систему относительно дифференциалов s переменных, то число остальных, *зависимых*, переменных в точности равно $n-p-s$. Обозначив это число через Q, получим

$$Q = pq - (p-1)s_1 - (p-2)s_2 - \ldots - s_{p-1}. \tag{9}$$

4. Изложенную выше теорию следует дополнить, если мы хотим решить следующую задачу, практическая польза которой очевидна.

Найти p-мерные интегральные многообразия данной системы Пфаффа, которые не связывают конечным соотношением никакие из p переменных, или, более общим образом, линейным соотношением никакие p из данных пфаффовых форм

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$$

(*независимые между собой и не зависящие от левых частей уравнений системы*).

В частности, речь идет о том, что все такие многообразия представляют собой общие интегральные многообразия некоторой новой системы Пфаффа *в инволюции*.

Левые части

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$$

уравнений системы и p выбранных форм

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$$

составляют $s+p$ линейно независимых форм; к ним можно присоединить $q = n - s - p$ других независимых форм системы, скажем,

$$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_q,$$

которые независимы также и от первых форм.

Тогда, *принимая во внимание уравнения системы*, мы можем представить билинейные коварианты форм θ в виде билинейных форм от ω и ϖ. Покажем прежде всего, что такой ковариант всегда представляется в виде

$$\theta'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{10}$$

Действительно, всякое p-мерное интегральное многообразие удовлетворяет не только уравнениям системы, но и уравнениям вида

$$\varpi_k = l_{k1}\omega_1 + \ldots + l_{kp}\omega_p \qquad (k = 1, 2, \ldots, q), \tag{11}$$

таким что при подстановке этих форм в θ'_k последние обращаются в нуль. Возможно, что совместность уравнений, которым должны удовлетворять функции l, накладывает некоторые ограничения на переменные; если при этом формы ω перестают быть независимыми, то мы приходим к противоречию; в противном случае q можно уменьшить. Взяв за отправную точку полученную систему, мы можем повторять описанную процедуру до тех пор, пока либо не придем к противоречию, либо не получим совместную систему уравнений на функции l. В последнем случае коэффициенты l можно выразить через исходные переменные и некоторый набор дополнительных переменных $y_1, y_2, \ldots$. Подставляя (11) в выражение (10) и принимая во внимание уравнения пфаффовой системы, получаем выражение для билинейных ковариантов форм системы в виде

$$\sum \gamma_{ij}\omega_i\omega_j + \sum a_{ik}\omega_i dy_k,$$

откуда и вытекает предложение[1]).

С этого момента мы предполагаем, что θ'_k представлены в виде (10).

5. Найдем прежде всего необходимые и достаточные условия того, что *система уравнений Пфаффа, рассматриваемая как система, зависящая от p независимых переменных, находится в инволюции, причем никакой ее интегральный элемент размерности, не превосходящей p, не накладывает никаких линейных соотношений на формы ω.* Если это так, то искомые интегральные многообразия являются также и *общими* интегральными многообразиями данной системы.

Очевидно, следует прежде всего установить, что существуют p-мерные интегральные элементы, определяемые уравнениями (11); если это так, то, прибавляя к формам ϖ подходящие линейные комбинации форм ω, можно добиться того, чтобы интегральный элемент задавался уравнениями

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_q = 0.$$

---

[1]) В действительности, при выполнении условий (11) все коварианты θ' обращаются в нуль; что же касается самих выражений (11), то их коварианты имеют вид

$$\varpi'_k - l_{k1}\omega'_1 - \ldots - l_{kp}\omega'_p + \omega_1 dl_{k1} + \ldots + \omega_p dl_{kp},$$

и в разложениях форм ω' и ϖ' достаточно заменить формы ϖ их значениями (11).

Поэтому можно предполагать, *что все коэффициенты c_{ijk} равны нулю.*

Рассмотрим теперь числа $s_1, s_2, \dots, s_p$, введенные в п. 3. Так как всякий линейный интегральный элемент задается системой уравнений

$$\frac{\omega_1}{u_1} = \frac{\omega_2}{u_2} = \dots = \frac{\omega_p}{u_p} = \frac{\varpi_1}{v_1} = \frac{\varpi_2}{v_2} = \dots = \frac{\varpi_q}{v_q}, \tag{12}$$

то число s_1 есть число независимых уравнений в системе

$$\sum_{i,\rho} a_{i\rho k} u_i \varpi_\rho - \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} v_\rho \omega_i = 0 \qquad (k = 1, \dots, s) \tag{13}$$

относительно ω_i, ϖ_ρ, где через u_i и v_ρ обозначены произвольные постоянные. *Эти уравнения не накладывают никаких ограничений на* ω, поэтому s_1 равно рангу матрицы из s строк

$$\left\| \begin{matrix} \sum a_{i11}u_i & \sum a_{i21}u_i & \dots & \sum a_{iq1}u_i \\ \hdotsfor{4} \\ \sum a_{i1s}u_i & \sum a_{i2s}u_i & \dots & \sum a_{iqs}ui \end{matrix} \right\|$$

Чтобы вычислить $s_2, \dots, s_p$, рассмотрим матрицу из ps строк

$$\left\| \begin{matrix} \sum a_{i11}u_i & \sum a_{i21}u_i & \dots & \sum a_{iq1}u_i \\ \hdotsfor{4} \\ \sum a_{i1s}u_i & \sum a_{i2s}u_i & \dots & \sum a_{iqs}u_i \\ \sum a_{i11}u_i' & \sum a_{i21}u'i & \dots & \sum a_{iq1}u_i' \\ \hdotsfor{4} \\ \sum a_{i1s}u_i' & \sum a_{i2s}u_i' & \dots & \sum a_{iqs}u_i' \\ \hdotsfor{4} \\ \sum a_{i1s}u_i^{(p-1)} & \sum a_{i2s}u_i^{(p-1)} & \dots & \sum a_{iqs}u_i^{(p-1)} \end{matrix} \right\| \tag{14}$$

где $u_i, u_i', \dots, u_i^{(p-1)}$ — p^2 произвольных констант. Число $s_1 + s_2$ равно рангу матрицы, составленной из первых $2s$ строк указанной матрицы, число $s_1 + s_2 + s_3$ — рангу матрицы, составленной из первых $3s$ строк, и так далее.

Формулы (8), (9) показывают теперь, что

$$s_1 + s_2 + \dots + s_p \leqslant q$$

и что число параметров, от которых зависит общий p-мерный интегральный элемент вида (11), равно

$$pq - (p-1)s_1 - (p-2)s_2 - \dots - s_{p-1}.$$

6. Наоборот, *составим по данной системе Пфаффа, коварианты* θ'_k *которой имеют вид* (10), *матрицу* (14) *из коэффициентов* $a_{i\rho k}$ *и рассмотрим последовательность*

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$$

рангов матриц, составленных соответственно из первых

$$s, 2s, \ldots, ps$$

строк матрицы (14). *Тогда число параметров, от которых зависит общий* p*-мерный интегральный элемент, не накладывающий на формы* ω *никаких линейных ограничений, не превосходит*

$$pq - (p-1)\sigma_1 - (p-2)\sigma_2 - \ldots - \sigma_{p-1};$$

если это значение достигается, то система находится в инволюции и ее общие интегральные p*-мерные многообразия не накладывают никаких линейных ограничений на* ω.

Во-первых, поскольку по условию интегральные p-мерные элементы вида (11) существуют, мы можем считать все коэффициенты c_{ijk} в формулах (10) равными нулю.

Кроме того, можно, выполнив при необходимости подходящее линейное преобразование набора ω, считать, что ранги всех p рассмотренных матриц не уменьшатся, если положить

$$u^{(i)}_{i+1} = 1, \qquad u^{(i)}_j = 0 \quad \text{для} \quad j \neq i+1.$$

Наконец, можно всегда положить

$$\theta'_\rho = \omega_1 \varpi_{\rho 1} + \omega_2 \varpi_{\rho 2} + \ldots + \omega_p \varpi_{\rho p} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s), \tag{15}$$

где $\varpi_{\rho i}$ — это линейные комбинации форм ϖ.

Из предположений утверждения следует, что среди форм $\varpi_{\rho 1}$ имеется в точности σ_1 независимых, скажем,

$$\varpi_{11}, \varpi_{21}, \ldots, \varpi_{\sigma_1 1},$$

а все формы $\varpi_{\rho i}$, для которых $\rho > \sigma_1$, зависят от предыдущих; аналогично среди форм $\varpi_{\rho i}$ $(\rho \leqslant \sigma_1)$ есть σ_2 независимых, скажем,

$$\varpi_{12}, \varpi_{22}, \ldots, \varpi_{\sigma_2 2},$$

а все формы $\varpi_{\rho i}$, для которых ρ превосходит σ_2, зависят от $\sigma_1+\sigma_2$ предыдущих, и т. д.

Другими словами, среди sp форм $\varpi_{\rho i}$ независимы те, для которых

$$\rho \leqslant \sigma_i;$$

назовем эти формы *главными*; их число равно

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p.$$

Остальные формы $\varpi_{\rho i}$ линейно выражаются через такие главные формы, второй индекс которых не превосходит i. И, наконец, среди форм ϖ_k могут найтись формы, не выражаемые линейно через главные формы $\varpi_{\rho i}$; их число равно

$$q-(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p).$$

Такие формы могут произвольным образом выражаться через ω, что сразу дает

$$p(q-\sigma_1-\sigma_2-\ldots-\sigma_p) \tag{16}$$

параметров. Если положить

$$\varpi_{\rho i}=l_{\rho i1}\omega_1+l_{\rho i2}\omega_2+\ldots+l_{\rho ip}\omega_p,$$

то условие обращения в нуль ковариантов θ'_ρ записывается в виде

$$l_{\rho ij}=l_{\rho ji},$$

т. е. функции $l_{\rho ij}$ удовлетворяют следующим условиям.

1° *При фиксированном значении последнего индекса j всякое линейное соотношение между $\varpi_{\rho i}$ переносится на соответствующие функции $l_{\rho ij}$.*

2° $$l_{\rho ij}=l_{\rho ji}. \tag{17}$$

Поэтому принимать произвольные значения могут *только* те коэффициенты $l_{\rho ij}$, для которых

$$\rho \leqslant \sigma_i, \qquad \rho \leqslant \sigma_j; \tag{18}$$

назовем их *главными* коэффициентами; их число равно

$$\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+p\sigma_p. \tag{19}$$

Прибавив к последнему числу (16), получим следующее выражение для максимального числа параметров, от которых зависит p-мерный интегральный элемент:

$$pq - (p-1)\sigma_1 - (p-2)\sigma_2 - \ldots - \sigma_{p-1}.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что это число достигается, т. е. зафиксировав произвольно *главные* коэффициенты $l_{\rho ij}$, можно удовлетворить предыдущим двум условиям. Мы хотим показать, что в этом случае система находится в инволюции и что соответствующая последовательность чисел s_i совпадает с последовательностью σ_i.

Итак, рассмотрим *произвольный* линейный интегральный элемент E_1; сделав, при необходимости, линейную перестановку на множестве форм ω, мы можем считать, что этот элемент задается уравнениями

$$\frac{\omega_1}{1} = \frac{\omega_2}{0} = \ldots = \frac{\omega_p}{0} = \frac{\varpi_{pi}}{v_{\rho i1}},$$

где $v_{\rho i1}$ — произвольные величины, подчиняющиеся только тем же соотношениям, что и соответствующие формы $\varpi_{\rho i}$; другими словами, они выражаются через такие формы, в которых

$$\rho \leqslant \sigma_i.$$

Условие того, что линейный интегральный элемент находится в инволюции с E_1, записывается в виде

$$\varpi_{\rho 1} - v_{\rho 11}\omega_1 - v_{\rho 21}\omega_2 - \ldots - v_{\rho p1}\omega_p = 0. \tag{20}$$

Эти уравнения не накладывают никаких соотношений на ω; в противном случае для некоторого индекса i формы $\varpi_{\rho i}$ удовлетворяли бы некоторому соотношению, которому не подчиняются функции $v_{\rho i1}$; следовательно, было бы невозможно дополнить набор функций $v_{\rho i1}$ до набора $v_{\rho ij}$, удовлетворяющего двум сформулированным условиям и такого, что *главные* функции $v_{\rho i1}$ независимы, так как $v_{\rho 1i}$ подчинялись бы условиям, которые не выполняются для равных им функций $v_{\rho i1}$.

Отсюда вытекает, что $s_1 = \sigma_1$ и, следовательно, целое число m должно быть не меньше 2.

Аналогично, можно считать, что *произвольный* двумерный интегральный элемент E_2 определяется двумя элементами

$$(1, 0, \ldots, 0; v_{\rho i1}) \quad \text{и} \quad (0, 1, \ldots, 0; v_{\rho i2}),$$

условие инволюции которых имеет вид

$$v_{\rho 12} = v_{\rho 21}.$$

Помимо этих равенств, функции $v_{\rho i1}$, а также функции $v_{\rho i2}$ удовлетворяют только тем же соотношениям, что и формы $\varpi_{\rho i}$; поэтому функции $v_{\rho 12} = v_{\rho 21}$, где $\rho \leqslant \sigma_2$, а также остальные функции $v_{\rho i1}$ и $v_{\rho i2}$, для которых ρ не превосходит σ_i, можно выбирать произвольно. Условие инволютивности интегрального линейного элемента с E_2 записывается в виде

$$\begin{cases} \varpi_{\rho 1} - v_{\rho 11}\omega_1 - v_{\rho 21}\omega_2 - \ldots - v_{\rho p1}\omega_p = 0 \\ \varpi_{\rho 2} - v_{\rho 12}\omega_1 - v_{\rho 22}\omega_2 - \ldots - v_{\rho p2}\omega_p = 0 \end{cases} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s). \qquad (21)$$

В этой системе — $\sigma_1 + \sigma_2$ независимых уравнений; она не накладывает никаких соотношений на формы ω_i: в противном случае для некоторого индекса i между формами $\varpi_{\rho 2}$ и $\varpi_{\rho 1}$ имелось бы соотношение, которое не выполняется для соответствующих коэффициентов $v_{\rho i2}$ и $v_{\rho i1}$. Таким образом, было бы невозможно найти систему функций $v_{\rho ij}$ (в которую входят данные функции $v_{\rho i2}$ и $v_{\rho i1}$), удовлетворяющую вышеприведенным условиям и такую, что *главные* коэффициенты $v_{\rho i1}$ и $v_{\rho i2}$ не удовлетворяют необходимым соотношениям: иначе между $v_{\rho 1i}$ и $v_{\rho 2i}$ имелось бы соотношение (то же самое, что и между формами $\varpi_{\rho 1}$ и $\varpi_{\rho 2}$), которое не соблюдается для равных им величин $v_{\rho i1}$ и $v_{\rho i2}$. Отсюда видно, что s_2 и σ_2 равны между собой и, следовательно, при $p > 2$ через произвольный интегральный элемент E_2 проходит по крайней мере один интегральный элемент E_3.

Продолжая эту последовательность рассуждений, получаем

$$s_1 = \sigma_1, \; s_2 = \sigma_2, \; \ldots, \; s_p = \sigma_p,$$

и теорема доказана.

7. Набор из pqs величин

$$a_{i\rho k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p; \quad \rho = 1, 2, \ldots, q; \quad k = 1, 2, \ldots, s),$$

удовлетворяющих предположениям теоремы п. 6, будем называть *инволютивной* системой. Для дальнейшего нам понадобится еще ряд замечательных свойств таких систем.

Напомним обозначения предыдущего пункта:

$$\sum_{i,k} a_{ik\rho}\omega_i\varpi_k = \omega_1\varpi_{\rho 1} + \omega_2\varpi_{\rho 2} + \ldots + \omega_p\varpi_{\rho p} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s), \qquad (22)$$

где через $\varpi_{\rho i}$ обозначены линейные комбинации форм ϖ, причем все они выражаются через

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p$$

из этих форм; эти базисные формы — те, для которых $\rho \leqslant \sigma_i$, — мы называем *главными.*

Существует набор величин $l_{\rho ij}$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

1° Для всякого индекса j величины $l_{\rho ij}$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и соответствующие формы $\varpi_{\rho i}$.

2° Для любых ρ, i, j

$$l_{\rho ij} = l_{\rho ji}.$$

3° *Главные* величины $l_{\rho ij}$, т.е. те, для которых

$$\rho \leqslant \sigma_i, \ \rho \leqslant \sigma_j,$$

могут принимать *произвольные* значения.

Записав в виде

$$X_{\rho i} = 0 \qquad (\rho > \sigma_i)$$

уравнение, выражающее неглавную форму $\varpi_{\rho i}$ через главные формы ϖ, для которых значение второго индекса не превосходит i, и представив в виде

$$X^j_{\rho i} = 0 \qquad (j \leqslant i, \quad \rho > \sigma_i)$$

уравнение, полученное подстановкой в предыдущее уравнение значений $l_{\rho' i' j}$ вместо форм $\varpi_{\rho' i'}$, *мы получим систему уравнений на неглавные величины* $l_{\rho ij}$*, которая определяет их по главным.* Для вычисления значений неглавных величин достаточно последовательно решить уравнения

$$X^1_{\rho 1} = 0; \quad X^1_{\rho 2} = 0, \quad X^2_{\rho 2} = 0; \quad X^1_{\rho 3} = 0, \quad X^2_{\rho 3} = 0, \quad X^3_{\rho 3} = 0; \quad \ldots$$

Затем можно *продолжить* заданную инволютивную систему, введя *по определению* $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p$ билинейных форм

$$\omega_1 \varpi_{\rho i 1} + \omega_2 \varpi_{\rho i 2} + \ldots + \omega_p \varpi_{\rho i p} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s; \quad i = 1, 2, \ldots, p), \tag{23}$$

играющих здесь ту же роль, что и уравнения (22) для данной системы. Здесь формы $\varpi_{\rho ij} = \varpi_{\rho ji}$ связаны в точности теми же соотношениями, что и величины $l_{\rho ij}$. Для этой новой системы

$$\begin{aligned}&\sigma'_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p,\\&\sigma'_2 = \sigma_2 + \ldots + \sigma_p,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&\sigma'_p = \sigma_p.\end{aligned}$$

Я утверждаю, что *она также инволютивна.*

Действительно, определим набор из $\dfrac{sp(p+1)(p+2)}{6}$ величин

$$l_{\rho ijk} = l_{\rho jik} = l_{\rho ikj} = l_{\rho kij} = l_{\rho jki} = l_{\rho kji};$$

следующим образом.

Значения

$$l_{\rho ijk} \qquad (i \geqslant j \geqslant k; \quad \rho \leqslant \sigma_i)$$

(назовем их *главными*) выберем произвольно. Остальные значения полностью определяются главными из уравнений

$$X^{jk}_{\rho i} = 0 \qquad (k \leqslant j \leqslant i, \quad \rho > \sigma_i),$$

полученных заменой в $X_{\rho i}$ форм $\varpi_{\rho' i'}$ на соответствующие $l_{\rho' i' jk}$. Упорядочим уравнения по возрастанию индекса i; уравнения с одинаковым значением i упорядочим по возрастанию индекса j от 1 до i; уравнения с одинаковыми значениями обоих индексов i и j упорядочим по возрастанию индекса k (от 1 до j).

Теперь нетрудно показать, что *введенные таким образом величины* $l_{\rho i\alpha\beta}$ *при любых значениях индексов* α *и* β *удовлетворяют тем же соотношениям, что и формы* $\varpi_{\rho i}$. Следовательно, при любом значении индекса α всякое соотношение на формы $\varpi_{\rho ij}$ выполняется и для соответствующих величин $l_{\rho ij\alpha}$.

Таким образом, величины $l_{\rho ijk}$ играют по отношению к формам $\varpi_{\rho ij}$ ту же роль, что и величины $l_{\rho ij}$ по отношению к формам $\varpi_{\rho i}$. Поэтому среди них в точности

$$\sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + p\sigma'_p$$

независимых и, следовательно, система инволютивна.

8. Нам понадобится еще одно свойство, которому удовлетворяют инволютивные системы величин $a_{ik\rho}$. *Всякий набор билинейных форм* $\Pi_{\rho i}$, *связанных* *темп же соотношениями, что и формы* $\varpi_{\rho i}$, *такой что все трилинейные формы*

$$\omega_1\Pi_{\rho 1}+\omega_2\Pi_{\rho 2}+\ldots+\omega_p\Pi_{\rho p} \qquad (\rho=1,2,\ldots,s) \tag{24}$$

тождественно равны нулю, представляется в виде

$$\Pi_{\rho i}=\omega_1\chi_{\rho i1}+\omega_2\chi_{\rho i2}+\ldots+\omega_p\chi_{\rho ip} \qquad (i,j=1,2,\ldots,p), \tag{25}$$

где $\chi_{\rho ij}=\chi_{\rho ji}$ *— произвольные пфаффовы формы, связанные между собой теми же соотношениями, что и величины* $l_{\rho ij}$.

В формулировке теоремы предполагается, что формы $\Pi_{\rho i}$ линейно зависят от форм ω и некоторых пфаффовых форм, не зависящих от ω.

Во-первых, очевидно, что формы (25) удовлетворяют условию теоремы, и нам нужно показать лишь справедливость обратного утверждения.

Легко видеть, что всякий набор форм $\Pi_{\rho i}$, такой что линейные комбинации (24) обращаются в нуль, представим в виде (25), где формы $\chi_{\rho ij}$ произвольны. Кроме того, мы можем предположить, что всякое соотношение на формы $\Pi_{\rho i}$ выполняется и для величин $\chi_{\rho i\alpha}$ при любом фиксированном α. Предположим теперь, что для некоторого h, $h<p$,

$$\chi_{\rho\alpha\beta}=\chi_{\rho\beta\alpha} \qquad (\alpha,\beta=1,2,\ldots,h).$$

Тогда то же выполняется и для $h+1$. Действительно, если не принимать во внимание слагаемые с

$$\omega_{h+2},\omega_{h+3},\ldots,\omega_p,$$

то выражение (24) примет вид

$$\omega_1\omega_{h+1}(\chi_{\rho,1,h+1}-\chi_{\rho,h+1,1})+\ldots+\omega_h\omega_{h+1}(\chi_{\rho,h,h+1}-\chi_{\rho,h+1,h}).$$

Отсюда следует, что *отбросив также член с* ω_{h+1}, мы получим

$$\left\{\begin{aligned}&\chi_{\rho,1,h+1}=\chi_{\rho,h+1,1}+\lambda_{\rho 11}\omega_1+\ldots+\lambda_{\rho 1h}\omega_h,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\chi_{\rho,h,h+1}=\chi_{\rho,h+1,h}+\lambda_{\rho h1}\omega_1+\ldots+\lambda_{\rho hh}\omega_h,\end{aligned}\right. \tag{26}$$

где конечные величины $\lambda_{\rho ij}$ удовлетворяют равенствам

$$\lambda_{\rho ij}=\lambda_{\rho ji} \qquad (i,j=1,2,\ldots,h).$$

Следовательно, пренебрегая формами $\omega_{h+2}, \ldots, \omega_p$, можно положить

$$\begin{gathered}
\Pi_{\rho 1} = \omega_1 \chi_{\rho 11} + \ldots + \omega_h \chi_{\rho 1h} + \omega_{h+1} \chi_{\rho, h+1, 1} - \\
- \lambda_{\rho 11} \omega_1 \omega_{h+1} - \ldots - \lambda_{\rho 1h} \omega_h \omega_{h+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Pi_{\rho h} = \omega_1 \chi_{\rho h1} + \ldots + \omega_h \chi_{\rho hh} + \omega_{h+1} \chi_{\rho, h+1, h} - \\
- \lambda_{\rho h1} \omega_1 \omega_{h+1} - \ldots - \lambda_{\rho hh} \omega_h \omega_{h+1}.
\end{gathered}$$

Присоединяя, в случае необходимости, к *главным* величинам $\chi_{\rho ij}$ выражения вида $\mu_{\rho ij} \omega_{h+1}$, можно, очевидно, добиться того, чтобы

$$\lambda_{\rho ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h; \quad \rho \leqslant \sigma_i, \quad \rho \leqslant \sigma_j),$$

что вызовет, в свою очередь, соответствующие изменения в выражениях для неглавных величин $\chi_{\rho ij}$, в том числе и для $\chi_{\rho, h+1, i}$. Последнее, однако, не важно, так как $\chi_{\rho, h+1, i}$ входят в выражения для $\Pi_{\rho 1}, \ldots, \Pi_{\rho h}$ лишь в качестве коэффициентов при ω_{h+1}. В результате мы привели $\Pi_{\rho i}$ к требуемому виду по модулю билинейных форм

$$\psi_{\rho i} = \lambda_{\rho i1} \omega_1 \omega_{h+1} + \ldots + \lambda_{\rho ih} \omega_h \omega_{h+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

в которых

$$\begin{gathered}
\lambda_{\rho ij} = \lambda_{\rho ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h), \\
\lambda_{\rho ij} = 0 \qquad (\rho \leqslant \sigma_i, \quad \rho \leqslant \sigma_j; \quad i = 1, 2, \ldots, p; \quad j = 1, 2, \ldots, h).
\end{gathered}$$

Необходимые соотношения на формы $\Pi_{\rho i}$ должны выполняться и для форм $\Psi_{\rho i}$; следовательно, величины $\lambda_{\rho ij}$ подчиняются тем же фундаментальным соотношениям, что и $l_{\rho ij}$, и *так как значения главных величин равны нулю*, то же справедливо и для значений остальных величин. Теорема доказана.

9. Две предыдущие теоремы позволяют доказать, *опираясь лишь на фундаментальные тождества*, что продолжение системы в инволюции также является системой в инволюции — свойство, которое *a priori* легко вытекает из существования интегральных многообразий системы.

Добавим к уравнениям системы новые уравнения

$$\overline{\varpi}_{\rho i} = \varpi_{\rho i} - l_{\rho i1} \omega_1 - l_{\rho i2} \omega_2 - \ldots - l_{\rho ip} \omega_p = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ \rho = 1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Тогда ковармианты левых частей этих уравнений, с учетом исходных уравнений системы и новых уравнений, очевидно, принимают вид

$$\overline{\varpi}'_{\rho i} = \omega_1\chi_{\rho i1} + \omega_2\chi_{\rho i2} + \ldots + \omega_p\chi_{\rho ip} + \ldots\,, \tag{28}$$

где последнее многоточие обозначает члены, зависящие только от ω, а формы $\chi_{\rho ij}$ — это не что иное, как дифференциалы $dl_{\rho ij}$ (с точностью до ω_i). Применяя теперь фундаментальное тождество к ковариантам

$$\theta'_\rho = \omega_1\overline{\varpi}_{\rho 1} + \omega_2\overline{\varpi}_{\rho 2} + \ldots + \omega_p\overline{\varpi}_{\rho p} \pmod{\theta_1, \ldots, \theta_s},$$

очевидно, получаем

$$0 = \omega_1\overline{\varpi}'_{\rho 1} + \omega_2\overline{\varpi}'_{\rho 2} + \ldots + \omega_p\overline{\varpi}'_{\rho p} \pmod{\theta_1, \ldots, \theta_s; \overline{\varpi}_{\sigma 1}, \ldots, \overline{\varpi}_{\sigma p}}$$

и, следовательно, по теореме п. 8,

$$\overline{\varpi}'_{\rho i} = \omega_1\chi_{\rho i1} + \ldots + \omega_p\chi_{\rho ip} \pmod{\theta_1, \ldots, \theta_s; \overline{\varpi}_{\sigma 1}, \ldots, \overline{\varpi}_{\sigma p}}, \tag{29}$$

где величины $\chi_{\rho ij} = \chi_{\rho ji}$ связаны теми же соотношениями, что и $l_{\rho ij}$.

Согласно (28), главные формы $\chi_{\rho ij}$ независимы между собой и не зависят от форм ω, поэтому, применяя теорему п. 7, мы заключаем, что продолженная система также в инволюции.

Замечание. При присоединении к данной системе части уравнений (27) утверждение теоремы может не выполняться.

Примером может служить продолжение системы в инволюции

$$\theta'_1 = \omega_1\varpi_1,$$
$$\theta'_2 = \omega_2\varpi_2$$

с помощью единственного уравнения

$$\overline{\varpi} = \varpi_1 + \varpi_2 - u\omega_1 - v\omega_2 = 0.$$

10. Рассмотрим теперь систему Пфаффа, для которой билинейные ковариянты имеют вид (10), и предположим, что число параметров, от которых зависит произвольный p-мерный интегральный элемент, *строго меньше* числа

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p + p(q - \sigma_1 - \sigma_2 - \ldots - \sigma_p),$$

где числа σ_i определяются с помощью матрицы (14). Покажем, что пфаффову систему можно *продолжить* так, чтобы выполнялись условия теоремы п. 6.

Будем говорить, что билинейные ковариантны системы приведены к *нормальной* форме, если, с учетом уравнений системы, оставляя в них только члены с ϖ, эти коварианты можно разделить на несколько групп так, чтобы выполнялись следующие условия. Каждой группе можно сопоставить целое число N, такое что в группу входит столько ковариантов $\Pi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}$, сколько имеется способов представления числа N в виде суммы положительных целых чисел

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=N,$$

и, кроме того,

$$\Pi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}=\omega_1\varpi_{\alpha_1+1,\alpha_2,\ldots,\ldots,\alpha_p}+\omega_2\varpi_{\alpha_1,\alpha_2+1,\ldots,\alpha_p}+\ldots+\omega_p\varpi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p+1}.$$

Предположим также, что каждой группе можно сопоставить еще одно целое число h, $0\leqslant h\leqslant p$, такое что если

$$h,h',h'',\ldots$$

— целые числа, сопоставленные 1-й, 2-й, 3-й, … группам, то формы ϖ, принадлежащие первой группе, в которых последние $p-h$ индексов равны нулю, формы ϖ', принадлежащие второй группе, в которых последние $p-h'$ индексов равны нулю, и т. д. независимы между собой и, кроме того, все остальные формы $\varpi,\varpi',\ldots$ зависят от предыдущих. Назовем отобранные формы ϖ *главными*.

При линейном преобразовании форм ω нормальность сохраняется, так как преобразование оказывается линейным внутри каждой группы.

Зависимость между переменными накладывает линейное соотношение на формы $\varpi,\varpi',\ldots$ и ω. Предположим, что в это соотношение существенным образом входят все главные формы ϖ из первой группы, и предположим, что $h^{(i)}\geqslant h$ для всех чисел $h^{(i)}$, сопоставленных группам, главные формы которых полностью или частично входят в это соотношение. Тогда с помощью подходящего линейного преобразования форм $\omega_1,\ldots,\omega_h$ можно добиться того, чтобы указанное соотношение эффективно включало форму

$$\varpi_{0\ldots0,N+1,0\ldots0}\qquad(\alpha_h=N+1).$$

В этом случае все формы $\varpi,\varpi',\ldots$ выражаются через главные формы 2-й, 3-й, … групп и через *коэффициенты при* $\omega_1,\ldots,\omega_{h-1}$ *в первой группе.* Тогда первую группу можно заменить некоторым новым набором групп, а *число* h *уменьшается на единицу.*

Заметим, наконец, что при продолжении системы с помощью процедуры из п. 4 коварианты полученной системы снова имеют канонический вид, ей соответствует такое же число групп, те же натуральные числа $h, h', \ldots$, а целые числа N уменьшаются на единицу. Кроме того, между новыми главными формами устанавливаются необходимые линейные соотношения. Действительно, пренебрегая, в случае необходимости, линейными комбинациями форм $\omega_1, \ldots, \omega_p$ с коэффициентами, зависящими только от исходных переменных, мы получаем формулы следующего вида:

$$\varpi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} = t_{\alpha_1+1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}\omega_1 + t_{\alpha_1,\alpha_2+1,\ldots,\alpha_p}\omega_2 + \ldots + t_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p+1}\omega_p,$$

причем коэффициенты $t, t', \ldots$ зависят только от тех коэффициентов из первой группы, для которых последние $p-h$ индексов равны нулю, и т. д. В качестве главных форм продолженной системы достаточно выбрать дифференциалы этих коэффициентов t: если бы эти функции не были независимыми, то их дифференциалы были бы связаны линейными соотношениями, каждое из которых, как мы только что видели, переносится на группу ковариантов и уменьшает на единицу связанное с ней число h.

11. Обозначим теперь через

$$\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p$$

число групп ковариантов исходной системы, для которых число h равно соответственно

$$0, 1, \ldots, p.$$

Предположим, что при всяком продолжении системы числа ν изменяются. Тогда число ν_p не может возрастать, и обязательно наступает момент, когда оно перестает меняться. С этого момента не может увеличиваться число ν_{p-1}, и поэтому, начиная с какого-то последующего шага, оно становится неизменным. Продолжая это рассуждение на все ν, мы докажем, что, начиная с некоторого продолжения, все эти целые числа перестают меняться.

Неизменность чисел ν означает, что в соответствующем продолжении все t, для которых последние $p-h$ индексов равны нулю, все t', для которых последние $p-h'$ индексов равны нулю, и т. д. могут принимать произвольные значения. Если при этом обозначить через

τ_1 — число главных форм, первый индекс которых не меньше 1;

τ_2 — число главных форм, первый индекс которых равен нулю, а второй — нет;

τ_3 — число главных форм, в которых первые два индекса равны нулю, а третий — нет, и т. д.,

то число произвольных форм $t, t', \ldots$ равно, как нетрудно доказать,

$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + \ldots + p\tau_p, \tag{30}$$

а число независимых форм $\varpi, \varpi', \ldots$ равно

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_p.$$

Поэтому для рассматриваемой системы, очевидно,

$$\begin{gathered}
\sigma_1 \geqslant \tau_1, \\
\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant \tau_1 + \tau_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{p-1} \geqslant \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{p-1}, \\
\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_p.
\end{gathered} \tag{31}$$

В последней строке стоит равенство, причем каждое из двух выражений равно числу независимых форм ϖ, ϖ'. Из неравенств (21) вытекают следующие неравенства:

$$\begin{gathered}
\sigma_p \leqslant \tau_p, \\
\sigma_{p-1} + \sigma_p \leqslant \tau_{p-1} + \tau_p, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\sigma_2 + \ldots + \sigma_{p-1} + \sigma_p \leqslant \tau_2 + \ldots + \tau_{p-1} + \tau_p, \\
\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_p,
\end{gathered} \tag{32}$$

складывая которые получаем

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p \leqslant \tau_1 + 2\tau_2 + \ldots + p\tau_p. \tag{33}$$

Число параметров, от которых зависит общий интегральный p-мерный элемент, поэтому, согласно (33), не меньше

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p.$$

С другой стороны, согласно теореме из п. 6, это число *не больше* указанного; поэтому эти два числа совпадают и система находится в инволюции. Степень неопределенности задается числами

$$s_1 = \tau_1, \quad s_2 = \tau_2, \quad \ldots, \quad s_p = \tau_p.$$

12. Отметим, что приведенное доказательство является аналогом известных доказательств возможности сведения системы уравнений в частных производных к системе в инволюции. Тем не менее, обратите внимание на практическую пользу теоремы п. 6: чтобы привести данную систему Пфаффа в инволюцию с помощью последовательных продолжений, нужно после каждого продолжения вычислять значения $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ и остановиться, как только число новых переменных, определяющих продолжение, оказывается равным

$$\begin{aligned} &\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p, \\ &\sigma_2' = \sigma_2 + \ldots + \sigma_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\sigma_p' = \sigma_p. \end{aligned} \tag{34}$$

Заметим еще, что для системы в инволюции, такой что $\sigma_p \geqslant 1$, произвольное соотношение на переменные сохраняет инволютивность системы, а σ_p уменьшается на единицу; одно соотношение можно заменить на произвольный набор соотношений, число которых не превосходит σ_p, причем в этом случае σ_p уменьшается на число соотношений. Это замечание доказывает также, что *произвольная* система из m уравнений с частными производными (не обязательно одного порядка) на m неизвестных функций приводится в инволюцию в результате дифференцирования уравнений меньшего порядка до тех пор, пока все они не станут одного порядка.

ГЛАВА II

СТРУКТУРА НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП

13. Рассмотрим непрерывную группу преобразований, определенную системой уравнений в частных производных в инволюции. Предположим для общности, что все переменные разбиты на два класса

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \qquad x_{m+1}, \dots, x_n$$

и у группы $n - m$ независимых инвариантов, а именно, переменные $x_{m+1}, \dots, x_n$. Тогда результат

$$X_1, X_2, \dots, X_m$$

действия элемента группы на первых m переменных представляет собой набор из m функций от n переменных, служащий решением уравнений Пфаффа в инволюции. Эти уравнения разбиваются на h категорий в соответствии с порядком уравнений. Уравнения первой категории имеют вид

$$\begin{cases} dX_1 - \alpha_{11} dx_1 - \alpha_{12} dx_2 - \dots - = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dX_m - \alpha_{m1} dx_1 - \alpha_{m2} dx_2 - \dots - \alpha_{mn} dx_n = 0, \end{cases} \tag{E_1}$$

где коэффициенты α_{ik} являются функциями от x, X и p_1 новых переменных

$$y_1, y_2, \dots, y_{p_1};$$

вторая категория образована уравнениями

$$\begin{cases} dy_1 - \beta_{11} dx_1 - \beta_{12} dx_2 - \dots - \beta_{1n} dx_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dy_{p_1} - \beta_{p_1 1} dx_1 - \beta_{p_1 2} dx_2 - \dots - \beta_{p_1 n} dx_n = 0, \end{cases} \tag{E_2}$$

в которых коэффициенты β_{ik} являются функциями от x, X, y и от p_2 новых переменных

$$z_1, z_2, \dots, z_{p_2}$$

и так далее. Уравнения h-й категории имеют вид

$$\begin{cases} du_1 - \lambda_{11}dx_1 - \ldots - \lambda_{1n}dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_{p_{h-1}} - \lambda_{p_{h-1}1}dx_1 - \ldots - \lambda_{p_{h-1}n}dx_n = 0, \end{cases} \tag{E_h}$$

где коэффициенты λ_{ik} являются функциями от переменных $x, X, \alpha_{ik}, \beta_{ik}, \ldots$ и от p_h новых переменных

$$v_1, v_2, \ldots, v_{p_h}.$$

По предположению (E) — система в инволюции, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные. Билинейные коварианты левых частей системы уравнений (E) зависят, с учетом самих этих уравнений, только от dx_i и dv_k; кроме того, дифференциалы dv_k входят только в коварианты уравнений последней категории (E_h)

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= dx_1 d\lambda_{11} + \ldots + dx_n d\lambda_{1n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Pi_{ph} &= dx_1 d\lambda_{p_{h-1}1} + \ldots + dx_n d\lambda_{p_{h-1}n}. \end{aligned}$$

В первой главе было показано, что эти коварианты позволяют определить n целых чисел

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n,$$

которые указывают степень неопределенности преобразований группы.

Если группа конечномерна, то величины v отсутствуют, а все коварианты равны нулю, с учетом уравнений (E).

14. Чтобы задать группу системой уравнений (E), определим ее сначала как группу преобразований, сохраняющих некоторый набор пфаффовых *форм.*

Во-первых, как следует из известной теоремы, всякое преобразование переменных $x, X, y, z, \ldots, v$, относительно которого X и $x_{m+1}, \ldots, x_n$ инвариантны, отображающее переменные x в себя и сохраняющее систему уравнений Пфаффа (E), определяет на переменных x преобразование, принадлежащее группе, и наоборот. Действительно, пусть

$$\begin{array}{ll} X'_i = X_i & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ x'_{m+j} = x_{m+j} & (j = 1, 2, \ldots, n-m), \\ y'_i = \varphi_i(x, X, y) & (i = 1, 2, \ldots, p_1), \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\ v'_i = \psi_i(x, X, y, \ldots, v) & (i = 1, 2, \ldots, p_h) \end{array} \tag{1}$$

— преобразование, сохраняющее систему (E). Это значит, что если X, $y, \ldots, v$ — общий набор функций от x, удовлетворяющих уравнениям (E), то функции $X', y', \ldots, v'$ от x' также удовлетворяют этим уравнениям. Другими словами, если обозначить через S общее преобразование группы, через Σ — преобразование, которое осуществляет переход от x к x' по формулам (1), то переход от переменных x' к переменным X' осуществляется, очевидно, последовательным выполнением преобразований Σ^{-1} и S. Искомое необходимое и достаточное условие состоит в том, что для любого преобразования S из группы преобразование $\Sigma^{-1}S$ также должно принадлежать группе, т. е. *преобразование* Σ *также принадлежит группе.*

Заметим, что если ограничиться в системе (1) только выражениями для $x', y', \ldots, v'$, то переменным X в правых частях можно придать любые постоянные значения — преобразования переменных x от этого не изменятся.

Заметим, наконец, что любой инвариант преобразований (1) зависит от переменных

$$X_1, X_2, \ldots, X_m, \qquad x_{m+1}, \ldots, x_n. \tag{2}$$

Действительно, предположим, что для некоторой функции Φ выражение

$$\Phi(x, X, y, \ldots, v) = \Phi(x', X', y', \ldots, v') \tag{3}$$

тождественно при выполнении равенств (1). Зафиксируем произвольные значения $x^0, X^0, y^0, \ldots, v^0$ переменных $x, X, y, \ldots, v$ и обозначим через x'^0, X'^0, $y'^0, \ldots, v'^0$ соответствующие значения, вычисленные по формулам (1). Тогда в группе существует преобразование S, такое что при $x_i = x_i^0$ переменные $X, y, \ldots, v$ принимают значения $X^0, y^0, \ldots, v^0$. Поэтому, каким бы ни было преобразование (1), для вычисления значений $x'^0, X'^0, y'^0, \ldots, v'^0$ не важно, считать ли переменные в правых частях равенств (1) независимыми или предполагать их выраженными через переменные x посредством преобразования S. Если, в частности, мы выберем в качестве f_i функции перехода от x к X, то получим $x' = X_i = X_i'$, и S' сводится к *тождественному преобразованию*; $y', \dots, v'$ становятся функциями от x', т. е. от X_i' и от x_{m+j}'. Тем самым, $X_i'^0 = X_i^0$, $x_{m+j}'^0 = x_{m+j}^0$. Следовательно,

$$\Phi(x^0, X^0, y^0, \dots, v^0) = \Psi(X_i^0, x_{m+j}^0),$$

где через Ψ обозначена некоторая функция указанных аргументов. Поэтому Φ существенно зависит только от переменных (2).

15. Положим теперь

$$\begin{aligned} &\omega_i = \alpha_{i1} dx_1 + \alpha_{i2} dx_2 + \dots + \alpha_{in} dx_n && (i = 1, 2, \dots, m), \\ &\omega_{m+j} = dx_{m+j} && (j = 1, 2, \dots, n-m), \end{aligned} \qquad (4)$$

где α_{ik} — коэффициенты, входящие в уравнения (E_1).

Каждая из пфаффовых форм $\omega_1, \dots, \omega_n$, а следовательно, и ее билинейный ковариант, инвариантна относительно преобразований (1). Поэтому коварианты представляют собой билинейные выражения от ω_i, dX_i и от левых частей уравнений (E_2); кроме того, они обращаются в нуль вместе с ω_i:

$$\omega_i' = \omega_1 \varpi_{i1} + \omega_2 \varpi_{i2} + \dots + \omega_n \varpi_{in} + \dots \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \qquad (5)$$

где оставшиеся члены зависят лишь от ω_i и dX_i, а формы ϖ_{ik} представляют собой линейные комбинации левых частей уравнений (E_2).

Обозначим через $\overline{\omega}_i, \overline{\varpi}_{ik}$ образы форм ω_i, ϖ_{ik} при преобразовании (1); очевидно, что

$$\overline{\omega}_1 \overline{\varpi}_{i1} + \overline{\omega}_2 \overline{\varpi}_{i2} + \dots + \overline{\omega}_n \overline{\varpi}_{in} = \omega_1 \varpi_{i1} + \dots + \omega_n \varpi_{in} + \dots ,$$

где второе многоточие обозначает те же члены, что и выше. Но из того, что $\overline{\omega}_i$ совпадает с ω_i, вытекает, что любую разность $\overline{\varpi}_{ik} - \varpi_{ik}$ можно представить в виде линейной комбинации форм ω_i и dX_i. Поэтому *если среди mn форм ϖ_{ik} выбрать p_1 независимых, а все остальные представить в виде линейных комбинаций выбранных форм, то коэффициенты этих линейных комбинаций инвариантны относительно преобразований* (1) *и, следовательно, выражаются как функции от X и $x_{m+1}, \dots, x_n$.*

Другими словами, *можно предполагать, что mn форм ϖ_{ik} представляются в виде линейных комбинаций p_1 форм $\varpi_1, \dots, \varpi_{p_1}$ с коэффициентами,* *зависящими от* X_i *и* $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Преобразования (1) сохраняют эти p_1 форм с точностью до линейной комбинации форм

$$dX_1 - \omega_1, \quad dX_2 - \omega_2, \quad \ldots, \quad dX_m - \omega_m.$$

Можно сделать следующий шаг; рассмотрим одну из форм ϖ_{ik}, не равную тождественно нулю, и рассмотрим в ω_i' члены, содержащие $\omega_k dX_j$,

$$\omega_i' = \omega_k \varpi_{ik} + \sum A_j \omega_k dX_j + \ldots.$$

Коэффициенты A_j можно сделать равными нулю, прибавив, при необходимости, к ϖ подходящие линейные комбинации левых частей равенств (E_1). Очевидно, что тогда ϖ_{ik} сохраняются при преобразованиях (1). Проделав это для p_1 независимых форм, мы видим, что *формы* ϖ_i *можно выбрать инвариантными относительно преобразований* (1).

После того, как такой выбор произведен, коэффициенты коварианта ϖ', очевидно, инвариантны относительно преобразований (1) и, следовательно, зависят лишь от X и $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Подводя итог, *билинейные коварианты форм* ω_i *представляют собой билинейные выражения от* ω_i, dX_i *и от* p_1 *новых форм* ϖ; *коэффициенты этих выражений зависят только от* X *и от* $x_{m+1}, \ldots, x_n$. *Наконец,* p_1 *форм* ϖ *являются линейными комбинациями левых частей уравнений* (E_2) *и* (E_1), *они образуют независимый набор как сами по себе, так и при присоединении к ним левых частей уравнений* (E_1).

16. Точно так же показывается, что коварианты форм ϖ_i билинейно выражаются через ω_i, dX_i, ϖ_i и p_2 новых независимых форм χ; коэффициенты этих ковариантов зависят только от X и $x_{m+1}, \ldots, x_n$, а формы χ представляют собой линейные комбинации тех левых частей уравнений (E_3), (E_2) и (E_1), которые не зависят от левых частей уравнений (E_2) и (E_1). Кроме того, эти формы инвариантны относительно преобразований (1).

Продолжая это рассуждение, мы получим в конце концов p_{h-1} форм θ, которые являются линейными комбинациями левых частей уравнений (E_h), (E_{h-1}), ..., (E_1) и инвариантны относительно преобразований (1). Их билинейные коварианты зависят от $\omega, dX, \varpi, \chi, \ldots, \theta$ и от дифференциалов dv_k,

$$\theta_i' = \omega_1 \upsilon_{i1} + \ldots + \omega_n \upsilon_{in} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, h_{p-1}),$$

где второе многоточие обозначает члены, зависящие лишь от $\omega, dX, \varpi, \ldots, \theta$. Снова, если выбрать h_p независимых форм υ_{ik} и выразить через них все остальные формы, то коэффициенты полученных линейных комбинаций будут зависеть только от X и $x_{m+1}, \ldots, x_n$; другими словами, формы υ_{ik} представляются в виде линейных комбинаций h_p новых форм $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{h_p}$, причем коэффициенты зависят только от X и $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Присоединив к этим формам линейные комбинации форм $\omega, dX, \varpi, \ldots, \theta$ с произвольными коэффициентами, можно эти произвольные коэффициенты подобрать таким образом, чтобы как можно больше коэффициентов при θ'_i обратилось в нуль; тогда остальные коэффициенты оказываются инвариантными относительно преобразований (1).

Окончательно, изменив обозначения, мы получаем некоторый набор из r пфаффовых форм

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r \qquad (r = n + p_1 + p_2 + \ldots + p_{h-1}),$$

таких что *их билинейные коварианты выражаются через* ω, dX *и через* p_k *новых форм* ϖ, *равны нулю вместе с формами* ω, *а коэффициенты разложения зависят только от* X *и* $x_{m+1}, \ldots, x_n$. *Все преобразования, сохраняющие эти пфаффовы формы, описываются формулами* (1).

Положим

$$\omega'_k = \sum_{(ij)}^{1,2,\ldots,r} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i=1,\ldots,r}^{\rho=1,\ldots,p_k} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{6}$$

где члены, обозначенные многоточием в правой части, содержат дифференциалы $dX_1, \ldots, dX_m$.

Замечание из п. 14 позволяет дать переменным X_i постоянные значения и в дальнейшем пренебрегать их дифференциалами dX_i. Заметим теперь, что согласно своему определению набор величин $a_{i\rho k}$ образует инволютивную систему. Мы приходим к следующей теореме:

По непрерывной группе G *преобразований переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *с набором независимых инвариантов* $U_1, U_2, \ldots, U_h$ *можно, добавив при необходимости дополнительные переменные, построить группу* G', *которая преобразует переменные* x *так же, как группа* G, *и которая оставляет инвариантными некоторый набор из* r *пфаффовых форм*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$$

и из набор h *функций* U, *дифференциалы которых представляются в виде линейных комбинаций форм* ω *с коэффициентами, функционально зависящими от* U. *Коварианты* ω'_k *имеют вид*

$$\omega'_k = \sum c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho, \tag{7}$$

где через ϖ *обозначены* p *новых независимых пфаффовых форм, не зависящих от* ω, *коэффициенты* c_{ijk} *и* $a_{i\rho k}$ *являются функциями от* U, *причем величины* $a_{i\rho k}$ *образуют инволютивную систему.*

17. Обратно, если $r+p$ пфаффовых форм

$$\omega_1, \ldots, \omega_r; \qquad \varpi_1, \ldots, \varpi_p$$

и h функций U удовлетворяют вышеприведенным условиям, то преобразования, оставляющие инвариантными функции U и формы ω, задаются системой Пфаффа

$$\Omega_k - \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{8}$$

где через Ω_k обозначен результат подстановки новых переменных в форму ω_k вместо старых. *Эта система находится в инволюции*, так как, с учетом уравнений (7),

$$\Omega'_k - \omega'_k = \sum a_{i\rho k}\omega_i(\Pi_\rho - \varpi_\rho) \tag{9}$$

и, по предположению, величины $a_{i\rho k}$ образуют инволютивную систему.

Приведенные выше фундаментальные теоремы можно сопроводить следующими замечаниями:

Во-первых, *две группы* G' *с одинаковыми значениями целых чисел* r, h, p, *инварианты которых выражаются через линейные комбинации форм* ω, *коэффициенты которых — совпадающие функции инвариантов, а величины* c_{ijh} *и* $a_{i\rho k}$ *также являются совпадающими функциями инвариантов, подобны*[1]. Действительно, система Пфаффа, определяющая преобразование перехода от одной группы к другой, инволютивна, как показывают формулы (8) и (9), где формы Ω_k и Π_ρ относятся к одной группе, а формы ω_k и ϖ_k — к другой.

Во-вторых, группа G' не изменится, если заменить r форм ω_i на r произвольных независимых линейных комбинаций этих форм с коэффициентами, являющимися функциями от U; можно также заменить формы ϖ произвольными p новыми формами, линейными комбинациями форм ω и ϖ независимыми от ϖ, коэффициенты которых являются функциями от U.

Если группа *транзитивна*, то c_{ijk} и a_{ijk} постоянны. Если группа конечномерна, то формы ϖ отсутствуют и в формулы (7) входят только коэффициенты c_{ijk}.

---

[1] То есть подобны в смысле Ли; определение приводится автором в сноске на следующей странице. — *Прим. ред.*

18. Посмотрим на все предыдущее с новой, фундаментальной для структурной теории групп, точки зрения, введя следующим образом определение изоморфизма.

Рассмотрим $m+n$ переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_m; \quad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

и две группы G и G', первая из которых преобразует между собой переменные x, а вторая — $m+n$ переменных x и y. Если группа G' преобразует переменные x между собой, причем так же, как и группа G, то мы говорим, что G' является *продолжением* группы G. Продолжение называется *голоэдрическим*, если всякое преобразование из G', действующее на переменных x тождественно, само является тождественным; в противном случае оно называется *гемиэдрическим*.

Две группы G и Γ называются *голоэдрически изоморфными*, или просто *изоморфными*, если каждую из них можно продолжить голоэдрически так, что полученные продолжения G' и Γ' действуют в пространствах одинакового числа переменных и подобны[1]. Группа G называется *мериэдрически изоморфной* группе Γ, если только группа Γ' получается голоэдрическим продолжением группы Γ, а группа G' получается гемиэдрическим продолжением[2] группы G, притом G и Γ не являются голоэдрически изоморфными.

Легко видеть, что две группы, голоэдрически изоморфные третьей, изоморфны между собой; и что если G мериэдрически изоморфна группе G', а G' голоэдрически или мериэдрически изоморфна группе G'', то G мериэдрически изоморфна группе G''.

Мы увидим ниже, что в случае конечномерных групп введенное определение изоморфизма совпадает, по существу, с обычным. Пока же мы не дали еще определения изоморфизма конечномерных групп.

Наконец, мы будем считать, что голоэдрически изоморфные группы имеют одинаковую *структуру*.

19. Из приведенных выше определений вытекает, что преобразования (1), введенные в начале этой главы, задают голоэдрическое продолжение группы, определяемой системой уравнений (E) и, следовательно, образуют группу той же структуры. Поэтому результаты пп. 16 и 17 можно сформулировать следующим образом:

---

[1] Две группы, одна из которых действует в пространстве n переменных x, а другая — в пространстве n переменных y, называются *подобными* (по Ли), если за y можно принять подходящие независимые функции от x.

[2] В тексте Картана здесь — «мериэдрическим продолжением». — *Прим. ред.*

Для группы, допускающей h независимых инвариантов

$$U_1, U_2, \ldots, U_h,$$

можно построить, присоединяя при необходимости дополнительные переменные, $r+p$ пфаффовы формы

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r; \qquad \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_p,$$

такие что

$$dU_i = V_j i 1\omega_1 + V_{i2}\omega_2 + \ldots + v_{ir}\omega_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$
$$\omega'_k = \sum c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, h),$$

где V_{ik}, c_{ijk}, $a_{i\rho k}$ — функции от U, причем величины $a_{i\rho k}$ образуют инволютивную систему. Если число инвариантов двух групп одинаково и равно h, причем числа r и p для этих групп совпадают, и если V_{ik}, c_{ijk}, $a_{i\rho k}$ являются одинаковыми функциями инвариантов, то эти группы имеют совпадающую структуру. Наконец, не изменяя структуру группы, можно подействовать на инварианты U некоторым преобразованием, так что формы ω заменятся на r независимых линейных комбинаций форм ω, коэффициенты которых — функции от U, а формы ϖ — на p линейных комбинаций форм ω и ϖ, коэффициенты которых — также функции от U, причем эти линейные комбинации независимы от форм ϖ.

Можно, следовательно, сказать, что, до некоторой степени, структура группы *определяется* набором целых чисел h, r, p и функциями $V_{ik}, c_{ijk}, a_{i\rho k}$. Однако мы увидим ниже, что для двух групп с одинаковой структурой значения целых чисел, скажем, h и r, могут различаться, что, впрочем, почти очевидно заранее. Естественно, можно всегда добиться того, что

$$dU_1 = \omega_1, \quad \ldots, \quad dU_h = \omega_h.$$

Заметим, наконец, что уравнения наибольшей группы, сохраняющей функции U и пфаффовы формы ω, имеют первый порядок:

$$\Omega_k - \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

(см. п. 17).

20. Теперь мы собираемся показать, что структурные коэффициенты $c_{ijk}, a_{i\rho k}$ группы не могут быть произвольными. Они, очевидно, удовлетворяют условиям, вытекающим из применения *фундаментального тождества* к ковариантам ω'_k. Мы начнем с того, что выпишем эти условия, а затем докажем их достаточность.

Предположим сначала, что группа конечномерна и, для того чтобы очертить основные идеи, что она транзитивна. Тогда r^3 коэффициентов c_{ijk} постоянны. Трилинейные коварианты форм

$$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{10}$$

равны

$$\sum c_{ijk}(\omega'_i\omega_j - \omega_i\omega'_j)$$

или, подставляя выражения для ω'_i,

$$\sum_{(\lambda,\mu,\nu)} \sum_i (c_{\lambda\mu i}c_{i\nu k} + c_{\mu\nu i}c_{i\lambda k} + c_{\nu\lambda i}c_{i\mu k})\omega_\lambda\omega_\mu\omega_\nu.$$

Таким образом, искомые условия имеют вид

$$\sum_i^{1,2,\ldots,r} (c_{\lambda\mu i}c_{i\nu k} + c_{\mu\nu i}c_{i\lambda k} + c_{\nu\lambda i}c_{i\mu k}) = 0 \qquad (\lambda, \mu, \nu, k = 1, 2, \ldots, r), \tag{11}$$

к которым следует присоединить очевидные равенства

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0. \tag{12}$$

В равенствах (11) и (12) мы узнаем соотношения, которым должны удовлетворять структурные константы в теории конечномерных групп. Но мы можем проследить связь между двумя теориями и непосредственно. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — (линейно независимые) формы Пфаффа от r переменных. Дифференциал df произвольной функции f от r переменных представляется, очевидно, в виде линейной комбинации форм ω. Обозначив через $X_i f$ коэффициент при ω_i в этом разложении

$$df = X_1 f\omega_1 + X_2 f\omega_2 + \ldots + X_r f\omega_r, \tag{13}$$

мы можем рассматривать выражение $X_i f$ как инфинитезимальное преобразование. Приравнивая билинейные коварианты обеих частей в (13), получаем

$$X_i(X_j f) - X_j(X_i f) = \sum_k c_{ijk}X_k f, \tag{14}$$

откуда вытекает, что r преобразований $X_i f$ порождают группу, структура которой определяется, в обычном смысле этого слова, константами c_{ijk}. Это просто транзитивная группа, обратная данной. Обратно, равенство (13) позволяет построить по просто транзитивной группе, заданной своими инфинитезимальными преобразованиями, другую группу, определяемую r инвариантными формами Пфаффа.

21. Обратимся теперь к бесконечномерным группам, ограничившись для простоты транзитивными группами. Затем мы укажем изменения, необходимые при переходе к интранзитивным группам.

Структура бесконечномерной транзитивной группы описывается формулами

$$\omega'_k = \sum c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{7}$$

где $a_{i\rho k}$ и c_{ijk} — *постоянные*, причем первая группа констант образует инволютивную систему. Вычислим трилинейные ковարианты форм ω'_k, принимая во внимание формулы (7):

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\lambda,\rho} a_{\lambda\rho k}\omega_\lambda\varpi'_\rho + \sum_{\lambda,(\rho\sigma)}\sum_i (a_{\lambda\rho i}a_{i\sigma k} - a_{\lambda\sigma i}a_{i\rho k})\omega_\lambda\varpi_\rho\varpi_\sigma + \\
&+ \sum_{(\lambda\mu\nu),\rho}\sum_i (c_{\lambda\mu i}a_{i\rho k} + c_{i\lambda k}a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k}a_{\lambda\rho i})\omega_\lambda\omega_m u\varpi_\rho + \\
&+ \sum_{(\lambda\mu\nu)}\sum_i (c_{\lambda\mu i}c_{i\nu k} + c_{\mu\nu i}c_{i\lambda k} + c_{\nu\lambda i}c_{i\mu k})\omega_\lambda\omega_\mu\omega_\nu.
\end{aligned} \tag{15}$$

Заметим теперь, что формы ϖ' билинейно выражаются через ω и ϖ,

$$\varpi'_\tau = \sum_{(\rho\sigma)} \gamma_{\rho\sigma\tau}\varpi_\rho\varpi_\sigma + \sum_{\lambda,\rho} z_{\lambda\rho\tau}\omega_\lambda\varpi_\rho + \sum_{(\lambda\mu)} y_{\lambda\mu\tau}\omega_\lambda\omega_\mu. \tag{16}$$

Если приравнять в (15) к нулю коэффициенты при $\omega_\lambda\varpi_\rho\varpi_\sigma$, то получим

$$\sum_i^{1,2,\ldots,r} (a_{\lambda\rho i}a_{i\sigma k} - a_{\lambda\sigma i}a_{i\rho k}) = \sum_\tau^{1,2,\ldots,p} a_{\lambda\tau k}\gamma_{\rho\sigma\tau}. \tag{17}$$

Итак, *уравнения* (17) *относительно неизвестных* $\gamma_{\rho\sigma\tau}$ *должны быть совместными.*

Этому условию можно придать более наглядную форму. Правые части уравнений (17) — линейно независимые формы от $p^2(p-1)/2$ величин $\gamma_{\rho\sigma\tau}$, так как r^2 линейных форм

$$\sum_{\tau} a_{\lambda\tau k}\varpi_{\tau} \qquad (l, k = 1, 2, \ldots, r)$$

определяют p форм ϖ. Следовательно, если система (17) имеет решение, то это решение *постоянно.* Кроме того, уравнения (17) означают, что p линейных и однородных инфинитезимальных преобразований

$$U_{\rho}f = \sum_{i,k} a_{i\rho k}u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p) \tag{18}$$

порождают группу, структура которой задается константами $\gamma_{\rho\sigma\tau}$.

Поэтому *первое необходимое условие, которому должны удовлетворять постоянные $a_{i\rho k}$, состоит в том, что p инфинитезимальных преобразований* (18) *порождают линейную однородную группу.*

Будем обозначать эту группу[1] через Г.

22. Еще одно условие на константы мы получим, приравняв к нулю коэффициенты при $\omega_{\lambda}\omega_{\mu}\varpi_{\rho}$ в (15).

С учетом (16) это новое условие можно переписать в следующем виде:

система из $pr(r-1)/2$ линейных уравнений относительно p^2r неизвестных $z_{\lambda\rho\tau}$

$$\sum_{\tau}^{1,2,\ldots,p} (a_{\lambda\tau k}z_{\mu\rho\tau} - a_{\mu\tau k}z_{\lambda\rho\tau}) = \sum_{i}^{1,2,\ldots,r} (c_{\lambda\mu i}a_{i\rho k} + c_{i\lambda k}a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k}a_{\lambda\rho i}) \tag{19}$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, r; \quad \rho = 1, 2, \ldots, p)$$

совместна.

И, наконец, для получения последнего необходимого условия, приравняем к нулю коэффициенты при $\omega_{\lambda}\omega_{\mu}\omega_{\nu}$ в (15).

С учетом (16) получаем:

система

$$\sum_{\tau}^{1,2,\ldots,p} (a_{\lambda\tau k}y_{\mu\nu\tau} + a_{\mu\tau k}y_{\nu\lambda\tau} + a_{\nu\tau k}y_{\lambda\mu\tau}) = \sum_{i}^{1,2,\ldots,r} (c_{\lambda\mu i}c_{i\nu k} + c_{\mu\nu}c_{i\lambda k} + c_{\nu\lambda i}c_{i\mu k}) \tag{20}$$

$$(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, r)$$

из $r(r-1)(r-2)/6$ линейных уравнений относительно $pr(r-1)/2$ неизвестных $y_{\lambda\mu\tau}$ совместна.

---

[1]) В дальнейшем называемую присоединенной (линейной) группой; в современной терминологии это — алгебра Ли (инфинитезимальных преобразований). — *Прим. ред.*

23. Итак, мы получили на постоянные $a_{i\rho k}$ и c_{ijk} необходимые условия четырех видов:

1° $a_{i\rho k}$ образуют инволютивную систему;
2° p инфинитезимальных преобразований $U_\rho f$ порождают группу;
3° система (19) совместна;
4° система (20) совместна.

Заметим, что первые два условия относятся только к постоянным $a_{i\rho k}$, и если мы нашли постоянные, удовлетворяющие этим условиям, то, положив все c_{ijk} равными нулю, мы получим набор констант, удовлетворяющих всем условиям [1].

Заметим также, что если система (19) совместна, то ее решение $z_{\lambda\rho\tau}$ не определено однозначно; значение этих переменных для

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r$$

из них можно выбирать произвольно. Это вытекает из того, что система $a_{i\rho k}$ инволютивна.

Если группа интранзитивна, то первые два условия полностью сохраняются. Оставшиеся два условия тоже сохраняют силу, только в правые части уравнений (19) и (20) нужно добавить дополнительные члены. Допустим, для определенности, что у группы есть h независимых инвариантов $x_1, x_2, \ldots, x_h$ и

$$\omega^1 = dx^1, \quad \omega^2 = dx^2, \quad \ldots, \quad \omega^h = dx^h,$$

— а это всегда возможно. Тогда в правую часть уравнения (19) следует добавить слагаемое

$$\frac{\partial a_{\mu\rho k}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial a_{\lambda\rho k}}{\partial x_\mu}, \tag{19'}$$

а в правую часть уравнения (20) — слагаемое

$$\frac{\partial c_{\lambda\mu k}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial c_{\mu\nu k}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial c_{\nu\lambda k}}{\partial x_\mu}. \tag{20'}$$

Нелишне будет напомнить, что $a_{i\rho k}$ и c_{ijk} зависят только от $x_1, x_2, \ldots, x_h$.

---

[1] В общем случае условия 3° и 4° означают, что *если постоянные $a_{i\rho k}$ зафиксированы*, то постоянные c_{ijk} должны удовлетворять двум системам целочисленных однородных уравнений, одна из которых — первой степени, а другая — второй.

24. Теперь мы собираемся доказать обращение предыдущей теоремы. *Необходимые условия на коэффициенты* $a_{i\rho k}$ *и* c_{ijk}, *выведенные в предыдущем пункте, являются и достаточными,* т. е. *если эти условия выполнены, то существует* $r+p$ *линейно независимых пфаффовых форм от некоторого числа* $n \geqslant r+p$ *переменных, коварианты которых удовлетворяют соотношениям* (7).

Доказательство проведем для транзитивных групп, для интранзитивных оно сохраняется без изменений.

Для n переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

достаточно, по существу, найти $n(r+p)$ функций от этих переменных, определяемых условиями

$$\begin{aligned} \omega_i &= z_{i1}dx_1 + \ldots + z_{in}dx_n && (i = 1, 2, \ldots, r),\\ \varpi_\rho &= t_{\rho 1}dx_1 + \ldots + t_{\rho n}dx_n && (\rho = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}$$

Система уравнений в частных производных, которым должны удовлетворять искомые функции, получается приравниванием коэффициентов при $dx_\alpha dx_\beta$ в обеих частях уравнений (7),

$$\frac{\partial z_{k\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial z_{k\alpha}}{\partial x_\beta} = \sum_{(ij)} c_{ijk}(z_{i\alpha}z_{j\beta} - z_{i\beta}z_{j\alpha}) + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}(z_{i\alpha}t_{\rho\beta} - z_{i\beta}t_{\rho\alpha}) \qquad (21)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Положим

$$z_{k\alpha\beta} = \frac{\partial z_{k\alpha}}{\partial x_\beta}, \qquad z_{k\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^2 z_{k\alpha}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}, \qquad (22)$$

$$t_{\rho\alpha\beta} = \frac{\partial t_{\rho\alpha}}{\partial x_\beta}. \qquad (23)$$

Тогда систему (21) можно заменить системой Пфаффа

$$dz_{k\alpha} - z_{k\alpha 1}dx_1 - \ldots - z_{k\alpha n} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n), \qquad (24)$$

коэффициенты $z_{k\alpha\beta}$ которой связаны соотношениями

$$z_{k\beta\alpha} - z_{k\alpha\beta} = \sum_{(ij)} c_{ijk}(z_{i\alpha}z_{j\beta} - z_{i\beta}z_{j\alpha}) + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}(z_{i\alpha}t_{\rho\beta} - z_{i\beta}t_{\rho\alpha}), \qquad (24')$$

а эти соотношения позволяют задать произвольно те $z_{k\alpha\beta}$, для которых

$$\alpha \geqslant \beta,$$

и выразить остальные через них и через $z_{i\alpha}$ и $t_{\rho\alpha}$.

Найдем, во-первых, целочисленные характеристики этой системы Пфаффа, которые мы обозначаем здесь

$$Q;\ \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n,$$

зарезервировав символ σ для целочисленных характеристик инволютивной системы $a_{i\rho k}$; в частности,

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \ldots = \sigma_n = 0,$$
$$p = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n.$$

В выражения для билинейных ковариантов левых частей уравнений (24), вычисленных с учетом самих этих уравнений, входят, помимо дифференциалов dx_i, также дифференциалы

$$dz_{k\alpha\beta} \qquad (\alpha \geqslant \beta)$$

и дифференциалы

$$dt_{\rho\alpha},$$

причем последние встречаются только в виде линейных комбинаций

$$\sum_{i,\rho} a_{i\rho k}(z_{i\alpha}dt_{\rho\beta} - z_{i\beta}dt_{\rho\alpha}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r; \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Отсюда сразу же вытекает, что

$$Q = r\frac{n(n+1)}{2} + pn. \tag{26}$$

Чтобы вычислить числа Σ, рассмотрим прежде всего выражения (25), в которых α и β принимают значения, не превосходящие данного числа h, и найдем число линейно независимых среди них. Это число не что иное, как число независимых уравнений, выражающих тот факт, что h линейных элементов

$$\frac{\omega_1}{z_{1\alpha}} = \frac{\omega_2}{z_{2\alpha}} = \ldots = \frac{\omega_r}{z_{r\alpha}} = \frac{\varpi_1}{t_{1\alpha}} = \ldots = \frac{\varpi_p}{t_{p\alpha}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h)$$

находятся попарно в инволюции относительно r билинейных форм

$$\sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

и их число поэтому равно

$$\sigma_1 + (\sigma_1 + \sigma_2) + \ldots + (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{h-1}).$$

Отсюда легко выводятся следующие значения чисел Σ_i, каждое из которых представляет собой сумму целых чисел, причем первое соответствует дифференциалам $dz_{k\alpha\beta}$ $(\alpha \geqslant \beta)$, а второе — выражениям (25):

$$\begin{cases} \Sigma_1 = rn, \\ \Sigma_2 = r(n-1) + \sigma_1, \\ \Sigma_3 = r(n-2) + \sigma_1 + \sigma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma_n = r \cdot 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1}. \end{cases} \tag{27}$$

Поэтому для того, чтобы система была в инволюции, необходимо и достаточно, чтобы число параметров, от которых зависит общий n-мерный интегральный элемент, равнялось

$$nQ - (n-1)\Sigma_1 - (n-2)\Sigma_2 - \ldots - \Sigma_{n-1}. \tag{28}$$

Другими словами, обозначив через

$$\Sigma'_1, \Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_n$$

целочисленные характеристики продолженной системы, получим

$$\Sigma'_1 + \Sigma'_2 + \ldots + \Sigma'_n + (n-1)\Sigma_1 + (n-2)\Sigma_2 + \ldots + \Sigma_{n-1} = nQ.$$

25. Для того, чтобы построить продолжение пфаффовой системы (24), рассмотрим сначала очень простую систему

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial z_\beta}{\partial x_\alpha} = A_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n), \tag{29}$$

где $A_{\alpha\beta}$ — данные функции переменных x. Уравнения, получаемые дифференцированием уравнений системы, разбиваются на два класса:

1° Уравнения, выражающие вторые производные $\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}$ через те из них, для которых

$$\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$$

по модулю функций от x.

2° Соотношения

$$\frac{\partial A_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial A_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n),$$

между производными функций $A_{\alpha\beta}$; эти соотношения утверждают просто, что трилинейный ковариант формы

$$dz_1 dx_1 + dz_2 dx_2 + \ldots + dz_n dx_n$$

тождественно равен нулю. В частности, их можно вывести, применив *фундаментальное тождество* к билинейному ковarианту неизвестной формы

$$z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + \ldots + z_n dx_n.$$

Поэтому общий n-мерный интегральный элемент системы Пфаффа (24) зависит от параметров $z_{k\alpha\beta\gamma}$ и $t_{\rho\alpha\beta}$. Однако эти величины связаны соотношениями двух видов:

1° Уравнения, выражающие $z_{k\alpha\beta\gamma}$ через те из них, для которых

$$L \geqslant M \geqslant N$$

(их число равно $rn(n+1)(n+2)/6$) с точностью до линейных комбинаций переменных $t_{\rho\alpha\beta}$.

2° Соотношения только между параметрами $t_{\rho\alpha\beta}$, которые *можно вывести, применив фундаментальное тождество к билинейным ковариантам неизвестных пфаффовых форм*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r.$$

Но применение фундаментального тождества к формам ω просто выражает тождественное равенство нулю формы (15) (п. 21). Из наших предположений вытекает, что существуют *постоянные* $\gamma_{\rho\sigma\tau}$, $z_{\lambda\rho\tau}$, $y_{\lambda\mu\tau}$, такие что подстановка билинейных форм

$$\varpi'_\tau = \sum_{(\rho\sigma)} \gamma_{\rho\sigma\tau} \varpi_\rho \varpi_\sigma + \sum_{\lambda,\rho} z_{\lambda\rho\tau} \omega_\lambda \varpi_\rho + \sum_{(\lambda\mu)} y_{\lambda\mu\tau} \omega_\lambda \omega_\mu$$

в выражение (15) обращает его в нуль. Общие формы, удовлетворяющие поставленным условиям, получаются прибавлением к уже полученным решениям общих билинейных форм Π_ρ, обращающих в нуль линейные комбинации

$$\sum a_{i\rho k}\omega_i\Pi_\rho \qquad (k=1,2,\ldots,r).$$

Из теоремы п. 8 первой главы вытекает теперь, что для инволютивного *продолжения* системы $a_{i\rho k}$, задающего общий n-мерный интегральный элемент, на котором обращается в нуль форма

$$\sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho,$$

где

$$\varpi_\tau=\sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\tau}u_\lambda\omega_i \qquad (\tau=1,2,\ldots,p),$$

имеем

$$\Pi_\tau=\sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\tau}\omega_i\chi_\lambda \qquad (\tau=1,2,\ldots,p).$$

Теперь ясно, что *число независимых параметров $t_{\lambda\alpha\beta}$ вычисляется так же, как число независимых переменных $z_{\lambda\alpha\beta}$ выше*; число последних равно

$$\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_n,$$

где следует заменить

$$\begin{array}{lll} r & \text{на} & p,\\ \sigma_1 & \text{на} & \sigma_1'=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n,\\ \sigma_2 & \text{на} & \sigma_2'=\sigma_2+\ldots+\sigma_n,\\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}\\ \sigma_n & \text{на} & \sigma_n'=\sigma_n, \end{array}$$

и целочисленные характеристики σ' инволютивной системы $b_{i\lambda\tau}$ определяются по характеристикам σ системы $a_{i\lambda\rho}$ в соответствии с вышеприведенными формулами.

Поэтому число параметров, от которых зависит общий n-мерный интегральный элемент системы (24) равно, согласно равенству (27),

$$\begin{aligned} r\frac{n(n+1)(n+2)}{6} &+ \\ &+pn+ \\ &+p(n-1)+\sigma'_1+ \\ &+p(n-2)+\sigma'_1+\sigma'_2+ \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ &+p\cdot 1+\sigma'_1+\sigma'_2+\ldots+\sigma'_{n-1}= \\ =r\frac{n(n+1)(n+2)}{6} &+ \\ &+p\frac{n(n+1)}{2}+ \\ &+p\frac{n(n-1)}{2}-(n-2)\sigma_1-(n-3)(\sigma_1+\sigma_2)- \\ &\qquad -\ldots-(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{n-2}). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что формула (28) дает тот же результат, откуда и вытекает инволютивность системы (24).

Кроме того, из предыдущего следует, что значения переменных $z_{i\alpha}$ и $t_{\rho\alpha}$ можно выбирать совершенно произвольно, и поэтому у системы существует бесконечный набор интегралов, для которых $r+p$ пфаффовых форм ω и ϖ независимы. Это замечание полностью доказывает теорему.

То же доказательство позволяет вычислить степень неопределенности решения системы. Решение зависит, в частности, от

$$Q-(\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{n-1})$$

произвольных функций n аргументов; последнее число равно

$$r+2\sigma_1+3\sigma_2+\ldots+n\sigma_{n-1}+n\sigma_n.$$

Отметим, наконец, что доказательство для конечномерных групп несколько проще; его можно считать одним из самых простых доказательств третьей основной теоремы теории групп Ли.

26. Чтобы завершить рассмотрение общей ситуации, покажем, каким образом можно в некоторых случаях уменьшить степень интранзитивности группы, не меняя ее структуру. Мы будем опираться на следующее замечание, к детальному обсуждению которого вернемся в следующей главе.

Приравнивая к нулю r пфаффовых форм

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r,$$

инвариантных относительно действия группы, мы определяем вполне интегрируемую систему, так как все коварианты ω' обращаются в нуль вместе с формами ω. Обозначив через

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

интегралы системы, предположим, что они полностью определяют все инварианты группы. Группа передставляет эти r переменных в соответствии с равенствами

$$\Omega_k - \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

которые позволяют найти линейные выражения всех дифференциалов dX_k через dx. Если, кроме того, положить

$$\omega_k \equiv \alpha_{k1} dx_1 + \alpha_{k2} dx_2 + \ldots + \alpha_{kr} dx_r \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

то α_{ki} зависят от новых p независимых функций переменных x и, следовательно, всякое преобразование из группы, сохраняющее $x_1, x_2, \ldots, x_r$, сохраняет и эти коэффициенты. Поэтому рассматриваемая группа является *голоэдрическим продолжением* на переменные

$$x_1, x_2, \ldots, x_r.$$

Определяющие уравнения этой последней группы имеют, очевидно, первый порядок, а ее структура определяется коэффициентами, входящими в представление для ω'_k:

$$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk} \omega_i \omega_j + \sum a_{i\rho k} \omega_i \varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{7}$$

27. Сделаем еще одно важное замечание. Рассмотрим pr пфаффовых уравнений

$$\sum_i a_{i\rho k} \omega_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r; \;\; \rho = 1, 2, \ldots, p). \tag{30}$$

Они задают вполне интегрируемую систему. Мы будем считать — а это всегда возможно, — что эта система имеет вид

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_q = 0 \qquad (q \leqslant r);$$

тогда при $i > q$ все $a_{i\rho k}$ равны нулю, и поэтому среди линейных форм $\sum a_{i\rho k}\omega_i$ есть ровно q независимых. Для этого достаточно показать, что

$$c_{q+\alpha,q+\beta,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, q;\ \ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, r - q). \tag{31}$$

Применяя фундаментальное тождество и подбирая коэффициент при

$$\omega_{q+\alpha}\omega_{q+\beta}\varpi_\rho,$$

получаем соотношение

$$\sum_{i}^{1,\dots,q} a_{i\rho k}c_{q+\alpha,q+\beta,i} = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, p;\ \ k = 1, 2, \dots, r;\ \ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, r - q),$$

откуда и вытекает необходимое равенство (31).

28. Пусть теперь, как мы уже предполагали, h функций

$$x_{r-h+1}, \dots, x_r$$

являются инвариантами и уравнения, задающие группу G, имеют вид

$$\begin{cases} X_1 = f^1(x_1, \dots, x_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{r-h} = f_{r-h}(x_1, \dots, x_r). \end{cases} \tag{32}$$

Посмотрим, во что переходят эти уравнения, если присвоить q интегралам в правой части постоянные значения. Тогда равенства (32) определяют общее решение системы Пфаффа

$$\Omega_k - \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, r) \tag{33}$$

для форм ω, удовлетворяющих соотношениям (30). Билинейные ковbooарианты форм в левых частях системы обращаются в нуль на нулях системы (33); следовательно, *система вполне интегрируема* и ее общий интеграл зависит от $r - h$ произвольных постоянных.

Другими словами, *можно переписать уравнения группы* (32) *в виде*

$$\begin{cases} X_1 = f_1(x_1, \dots, x_r; A_1, \dots, A_{r-h}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{r-h} = f_{r-h}(x_1, \dots, x_r; A_1, \dots, A_{r-h}), \end{cases} \tag{34}$$

где функции f переменных A независимы, а параметры A выражаются через q интегралов системы (30).

Некоторые из q интегралов системы (30) могут оказаться инвариантами группы; пусть таких инвариантов ровно h', а именно,

$$x_{r-h+1}, \dots, x_{r-h+h'},$$

которые мы обозначим для простоты через

$$y_1, y_2, \dots, y_{h'}.$$

Зафиксировав теперь значения всех прочих интегралов $x_1 x_1^0, \dots, x_{r-h}^0$, независимых от предыдущих, мы видим, что система (32) принимает вид

$$\begin{cases} X_1 = f_1(x_{r-h+1}, \dots, x_r; A_1, \dots, A_{r-h}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{r-h} = f_{r-h}(x_{r-h+1}, \dots, x_r; A_1, \dots, A_{r-h}), \end{cases} \tag{35}$$

где функции f образуют независимую систему функций от A, а сами переменные A зависят от h' инвариантов y.

С помощью подходящей замены переменных полученную систему можно привести к виду

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = A_1, \\ \dots\dots, \\ \overline{X}_{r-h} = A_{r-h}, \end{cases} \tag{36}$$

и если начальные значения

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_{r-h}$$

являются *фиксированными* $r-h$ функциями инвариантов, то формулами (36) задается общее преобразование из группы G. Предположим, что это так. Тогда я утверждаю, что в формулах

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = \varphi_1(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{r-h}; x_{r-h+1}, \dots, x_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \overline{X}_{r-h} = \varphi_{r-h}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{r-h}; x_{r-h+1}, \dots, x_r) \end{cases} \tag{37}$$

для общего преобразования из группы *функции* φ *не зависят от последних* $h - h'$ *инвариантов.* Действительно, применив последовательно преобразование (36), а затем (37), мы снова получим преобразование вида (36)

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = \varphi_1(A_1, \ldots, A_{r-h}; x_{r-h+1}, \ldots, x_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{X}_{r-h} = \varphi_{r-h}(A_1, \ldots, A_{r-h}; x_{r-h+1}, \ldots, x_r). \end{cases} \tag{38}$$

Правые части должны зависеть только от h' инвариантов y, причем переменные A сами зависят только от этих инвариантов, поэтому *функции* φ *не зависят от*

$$x_{r-h+h'+1}, \ \ldots, \ x_r.$$

Присоединяя к уравнениям (37) уравнения

$$\begin{gathered} Y_1 = y_1, \\ \ldots\ldots, \\ Y_{h'} = y_{h'}, \end{gathered}$$

мы получаем группу G' *в точности с* h' *инвариантами* на пространстве $r - h + h'$ переменных, которая, очевидно, голоэдрически изоморфна данной группе G. Действительно, продолжая ее голоэдрически с помощью $h - h'$ уравнений

$$X_{r-i} = x_{r-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, h - h' - 1),$$

мы получаем группу $\overline{G}$, подобную исходной группе G.

29. Следующее замечание придает *практический* смысл сформулированной выше теореме. Группу $\overline{G}$ на пространстве r переменных можно вывести из группы G, задав постоянные значения $h - h'$ инвариантов

$$x_{r-h+h'+1}, \ldots, x_r$$

(или положив их равными некоторым функциям от y). Так как группа $\overline{G}$ подобна группе G, то, зафиксировав для G значения тех же самых $h - h'$ инвариантов, получим группу на пространстве $r - h + h'$ переменных с h' инвариантами, подобную G'. Поэтому теорему из предыдущего пункта можно переписать в следующем виде:

Пусть дана группа с h *инвариантами*

$$U_1, U_2, \ldots, U_h,$$

со структурой, определяемой r пфаффовыми формами ω_k, коварианты которых имеют вид

$$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{7}$$

Выберем те из пфаффовых форм

$$\sum_i a_{i\rho k}\omega_i \qquad (k = 1, \ldots, r; \quad \rho = 1, 2, \ldots, p), \tag{30}$$

которые представляются в виде линейных комбинаций дифференциалов dU_i. Если число таких форм равно h', то наложим на инварианты $h - h'$ произвольных соотношений, требуя лишь, чтобы они не накладывали соотношений на формы (30). Тогда полученная таким образом группа изоморфна данной и число ее инвариантов в точности равно h'; для этой новой группы $h - h'$ форм ω можно представить в виде линейных комбинаций остальных, причем коэффициенты этих комбинаций зависят только от оставшихся h' инвариантов.

Мы называем эти h' инвариантов *существенными.*

В частности, всякая конечномерная группа изоморфна некоторой *транзитивной* группе. Для бесконечномерной группы это уже неверно; в этом случае для каждой структуры существует, очевидно, своя минимальная степень интранзитивности.

30. В завершение этой главы опишем вкратце структуру всех групп с $r = 1$ и $r = 2$.

Начнем со случая $r = 1$. Ясно, что единственная возможная структура дается формулой

$$\omega'_1 = \omega_1\varpi_1.$$

Можно, например, положить

$$\omega_1 = y_1 dx_1,$$

получив группу

$$X_1 = f(x_1),$$

т. е. группу общих преобразований одного переменного.

31. Пусть теперь $r = 2$.

Каждой допустимой структуре сопоставляется набор чисел σ_1, σ_2, описывающий степень неопределенности группы. Имеются следующие пять возможностей:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad p = 1; \tag{a}$$
$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 0, \quad p = 2; \tag{b}$$
$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad p = 2; \tag{c}$$
$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 1, \quad p = 3; \tag{d}$$
$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 2, \quad p = 4. \tag{e}$$

В случаях (a) и (b) преобразования группы зависят лишь от произвольных функций одной переменной; в случаях (c) и (d) — от произвольной функции двух переменных; в случае (e) — от двух функций двух переменных.

Без особых усилий видно, что, заменив при необходимости формы ω_1 и ω_2 их линейными комбинациями и обозначив через Π_1, Π_2 две линейные комбинации билинейных форм

$$\sum_\rho a_{1\rho 1}\omega_1\varpi_\rho + \sum_\rho a_{2\rho 1}\omega_2\varpi_\rho, \qquad \sum_\rho a_{1\rho 2}\omega_1\varpi_\rho + \sum_\rho a_{2\rho 2}\omega_2\varpi_\rho,$$

можно положить

$$(a)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = 0; \end{cases}$$

$$(b_1)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_2; \end{cases} \qquad (b_2)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = \omega_2\varpi_2; \end{cases} \qquad (b_3)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1; \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \Pi_2 = 0; \end{cases}$$

$$(d_1)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_3; \end{cases} \qquad (d_2)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_1; \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_4. \end{cases}$$

В каждой из этих формул Π_1 и Π_2 обозначают, с точностью до мономов $\omega_1\omega_2$, линейные комбинации ковариантов ω'_1 и ω'_2 (с коэффициентами, зависящими от инвариантов), скажем,

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= a_1\omega'_1 + b_1\omega'_2,\\ \Pi_2 &= a_2\omega'_1 + b_2\omega'_2.\end{aligned}$$

Теперь мы хотим записать в каждом случае, что p инфинитезимальных линейных преобразований, которые в предыдущей главе обозначались Uf, образуют группу, получив тем самым условия на a_1, b_1, a_2, b_2. Учитывая в каждом из случаев степень неопределенности, остающуюся после выбора ω и ϖ, мы приходим к следующим формулам, в которых члены с $\omega_1\omega_2$ временно опущены:

$$(a)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = 0;\end{cases} \qquad (a')\ \begin{cases}\omega'_1 = 0,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_1;\end{cases}$$

$$(b_1)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_2;\end{cases} \qquad (b_2)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = \omega_2\varpi_2;\end{cases} \qquad (b_3)\ \begin{cases}\omega'_1 = m\omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_2;\end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2,\\ \omega'_2 = 0;\end{cases}$$

$$(d_1)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_3;\end{cases} \qquad (d_2)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_3 - \omega_2\varpi_1;\end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_4.\end{cases}$$

Видно, что только в случае (b_3) имеется существенный параметр m, который, правда, оказывается константой, так как в данном случае группа не может иметь инвариантов.

Наконец, осталось определить коэффициенты при $\omega_1\omega_2$; прибавляя при необходимости к ϖ подходящие линейные комбинации форм ω и принимая во внимание фундаментальное тождество, приходим к следующим окончательным формулам:

$$(a)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = 0;\end{cases} \qquad (a'_1)\ \begin{cases}\omega'_1 = 0,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_1;\end{cases} \qquad (a'_2)\ \begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\omega_2,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_1;\end{cases}$$

$$(b_1)\ \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2; \end{cases} \qquad (b_2)\ \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_2\varpi_2; \end{cases} \qquad (b_3)\ \begin{cases} \omega_1' = m\omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_2; \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega_2' = 0; \end{cases}$$

$$(d_1)\ \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_3; \end{cases} \qquad (d_2)\ \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_3 - \omega_2\varpi_1; \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_4. \end{cases}$$

Интразитивные группы могут появиться только в случаях (a_1') и (с). Кроме того, в случае (a) можно было бы выбрать в качестве ω_2 дифференциал одного из инвариантов, однако по теореме из конца главы II эта группа была бы изоморфна транзитивной группе с $r = 1$.

Итак, при $r = 2$ мы получаем двенадцать структур: десять транзитивных и две интранзитивных. Однако согласно общим теоремам группа (a_2') изоморфна группе общих преобразований одной переменной. Вот какой выбор форм ω_1 и ω_2 возможен в каждом из случаев:

$$(a)\ \begin{cases} \omega_1 = y_1 dx_1, \\ \omega_2 = dx_2; \end{cases} \qquad (a_1')\ \begin{cases} \omega_1 = dx_1, \\ \omega_2 = dx_2 + y_1 dx_1; \end{cases} \qquad (a_2')\ \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{dx_1}{x_2}, \\ \omega_2 = \dfrac{dx_2}{x_2} + y_1 dx_1; \end{cases}$$

$$(b_1)\ \begin{cases} \omega_1 = y_1 dx_1, \\ \omega_2 = dx_2 + y_2 dx_2; \end{cases} \qquad (b_2)\ \begin{cases} \omega_1 = y_1 dx_1, \\ \omega_2 = y_2 dx_2; \end{cases} \qquad (b_3)\ \begin{cases} \omega_1 = {y_1}^m dx_1, \\ \omega_2 = y_1 dx_2 + y_2 dx_1; \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} \omega_1 = y_1 dx_1 + y_2 dx_2, \\ \omega_2 = dx_2; \end{cases}$$

$$(d_1)\ \begin{cases} \omega_1 = y_1 dx_1, \\ \omega_2 = y_2 dx_1 + y_3 dx_2; \end{cases} \qquad (d_2)\ \begin{cases} \omega_1 = y_1 dx_1 + y_2 dx_2 \\ \omega_2 = y_3 dx_1 + y_4 dx_2 \end{cases} \quad (y_1 y_4 - y_2 y_3 = 1);$$

$$(e)\ \begin{cases} \omega_1 = y_1 dx_1 + y_2 dx_2, \\ \omega_2 = y_3 dx_1 + y_4 dx_2. \end{cases}$$

И, наконец, следующие формулы представляют в конечном виде соответствующие группы, действующие на пространстве двух переменных:

$$(a)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = x_2 + a; \end{cases} \quad (a_1')\ \begin{cases} X_1 = x_1 \text{ или } x_1 + a, \\ X_2 = x_2 + f(x_1); \end{cases} \quad (a_2')\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = x_2 f(x_1); \end{cases}$$

$$(b_1)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = x_2 + \varphi(x_1); \end{cases} \quad (b_2)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = \varphi(x_2); \end{cases} \quad (b_3)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = x_2[f'(x_1)]^{\frac{1}{m}} + \varphi(x_1); \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1, x_2), \\ X_2 = x_2 \text{ или } x_2 + a; \end{cases}$$

$$(d_1)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = \varphi(x_1, x_2); \end{cases} \quad (d_2)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1, x_2), \\ X_2 = \varphi(x_1, x_2); \end{cases} \quad \left(\frac{D(f, \varphi)}{D(x_1, x_2)} = 1\right)$$

$$(e)\ \begin{cases} X_1 = f(x^1, x^2), \\ X_2 = \varphi(x^1, x^2). \end{cases}$$

Видно, что группа (a_2') является голоэдрическим продолжением группы общих преобразований одной переменной. Заметим также, что все транзитивные группы кроме групп (d_2) и (e), являются гемиэдрическими продолжениями конечномерных или бесконечномерных групп преобразований одной переменной.

ГЛАВА III

ПРИСОЕДИНЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА. ПРОДОЛЖЕНИЯ И ИЗОМОРФИЗМ

32. Обратимся теперь к одной из наиболее важных задач теории — проблеме определения всех групп[1], изоморфных данной, которая, в свою очередь, тесно связана с поиском критерия изоморфизма групп.

Изучение присоединенной линейной группы после того, как мы ввели новое определение бесконечномерной группы с помощью r пфаффовых форм, естественно приводит нас к классу голоэдрических продолжений данной группы. Теперь мы можем описать, во-первых, все группы, для которых данная является голоэдрическим продолжением, во-вторых, все группы, голоэдрически изоморфные данной, что приведет в конце концов к описанию всех групп, изоморфных данной. Однако у нас не хватает средств для полного решения второй фундаментальной проблемы — поиска критерия изоморфизма двух данных групп.

Присоединенная линейная группа

33. Рассмотрим группу G, заданную r инвариантными пфаффовыми формами

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r \tag{1}$$

и h инвариантами

$$U_1, U_2, \ldots, U_h \tag{2}$$

с помощью формул

$$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

---

[1] Разумеется, речь идет не об абстрактных группах, а о группах преобразований системы уравнений. — *Прим. ред.*

коэффициенты в которых являются функциями инвариантов U, а через ϖ_ρ обозначены p новых пфаффовых форм, независимых как сами по себе, так и при присоединении к ним форм ω. Обозначим переменные, на которых действует группа, через

$$x_1, x_2, \ldots, x_r; \tag{4}$$

это — интегралы полной системы

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = 0,$$

причем формы ω представляют собой линейные комбинации дифференциалов dx_i с коэффициентами, зависящими от x и от p новых переменных

$$y_1, y_2, \cdots, y_p, \tag{5}$$

а формы ϖ — линейные комбинации дифференциалов dx и dy с коэффициентами, зависящими от x и y.

Геометрическое исследование линейных элементов, приложенных в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, привело нас к изучению присоединенной линейной группы. Действительно, такой линейный элемент можно задать двойственным образом с помощью дифференциалов dx_i или с помощью r линейно независимых пфаффовых форм, являющихся линейными комбинациями дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_r$ с коэффициентами, зависящими от x. Обозначим через

$$\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_r \tag{6}$$

результат подстановки фиксированных значений $y_i = y_i^0$ в формы ω.

Ясно, что

$$\omega_k = m_{k1}(x,y)\overline{\omega}_1 + m_{k2}(x,y)\overline{\omega}_2 + \ldots + m_{kr}(x,y)\overline{\omega}_r, \tag{7}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r),$$

где коэффициенты m_{ki} зависят от x и y.

Пусть преобразование группы переводит точку $(x_1, \ldots, x_r)$ в точку $(X_1, \ldots, X_r)$. В результате замены x и y на X и Y форма ω_k переходит в форму Ω_k,

$$\Omega_k = \omega_k,$$

и значения y, отвечающие фиксированному набору значений Y (и X) могут быть *произвольными*. Положив, например, $Y_i = y_i^0$, получаем

$$\overline{\Omega}_k = m_{k1}(x,y)\overline{\omega}_1 + m_{k2}(x,y)\overline{\omega}_2 + \ldots + m_{kr}(x,y)\overline{\omega}_r \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{8}$$

Это равенство описывает действие элементов группы, переводящих точку (x) в точку (X), на линейных элементах в точках (x) и (X).

С другой стороны, очевидно, что те же равенства можно выразить формулами

$$\overline{\omega}_k = m_{k1}(X,Y)\overline{\Omega}_1 + m_{k2}(X,Y)\overline{\Omega}_2 + \ldots + m_{kr}(X,Y)\overline{\Omega}_r \quad (k = 1,2,\ldots,r). \quad (9)$$

Это означает, что функции $m_{kl}(X,Y)$ подчиняются тем же соотношениям, что и коэффициенты уравнений (8), разрешенных относительно форм ϖ. Ясно, что все эти коэффициенты можно выразить через p из них и через переменные x. Поэтому и функции $m_{kl}(X,Y)$ выражаются через p из них, скажем, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, и через переменные x:

$$m_{ki}(X,Y) = \varphi_{ki}(\mu_1,\ldots,\mu_p; x_1,\ldots,x_r).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$m_{ki}(X,Y) = \psi_{ki}(\mu_1,\ldots,\mu_p; X_1,\ldots,X_r)$$

и что переменные x и X связаны лишь соотношениями, вытекающими из инвариантности h функций U, поэтому функции φ_{kl} зависят только от μ и U.

Таким образом, можно найти p функций

$$t_1, t_2, \ldots, t_p$$

переменных x и y, независимых как функции от y и таких, что

$$\omega_k = \alpha_{k1}(t,U)\overline{\omega}_1 + \alpha_{k2}(t,U)\overline{\omega}_2 + \ldots + \alpha_{kr}(t,U)\overline{\omega}_r \qquad (k = 1,2,\ldots,r). \quad (10)$$

При этом соответствие между линейными элементами в точках (x) и (X) принимает вид

$$\overline{\Omega}_k = \alpha_{k1}(t,U)\overline{\omega}_1 + \alpha_{k2}(t,U)\overline{\omega}_2 + \ldots + \alpha_{kr}(t,U)\overline{\omega}_r \qquad (k = 1,2,\ldots,r). \quad (11)$$

Итак, *формулы* (11) *определяют группу линейных преобразований на пространстве p переменных $t_1, t_2, \ldots, t_p$, действующую на формах $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_r$, причем значения инвариантов U считаются постоянными.* Это вытекает из того, что равенства (17) устанавливают соответствие между линейными элементами в двух точках при преобразованиях, принадлежащих *группе.*

34. Изучение линейной группы (11), которую мы в дальнейшем будем обозначать символом Γ, позволит нам дать новое определение бесконечномерной группы G. Согласно (10), определяющие уравнения

$$\Omega_k - \omega_k = 0$$

этой группы можно переписать в виде

$$\sum_i \alpha_{ki}(T, U)\overline{\Omega}_i = \sum_i \alpha_{ki}(t, U)\overline{\omega}^i \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

или, разрешая относительно $\overline{\Omega}_k$ и принимая во внимание свойства коэффициентов α_{ki}, в виде

$$\overline{\Omega}_k = \alpha_{k1}(\theta, U)\overline{\omega}_1 + \alpha_{k2}(\theta, U)\overline{\omega}_2 + \ldots + \alpha_{kr}(\theta, U)\overline{\omega}_r \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \qquad (12)$$

где функции θ зависят от t, T и U. Другими словами, *группа G состоит из всех преобразований, оставляющих инвариантными функции U и осуществляющих на множестве r пфаффовых форм $\overline{\omega}$ линейное преобразование, принадлежащее группе* Γ. При каждом преобразовании из группы G переменные X и θ становятся функциями от x.

В результате в определении группы остается лишь r пфаффовых форм от переменных x и группа линейных преобразований Γ.

35. Вычисление билинейных ковариантов форм ω_k согласно формулам (10) должно продемонстрировать, что группа линейных преобразований Γ — это не что иное, как присоединенная группа линейных преобразований, уже встречавшаяся нам во второй главе (пп. 21, 18) и обозначенная там тем же символом Γ.

Пусть, действительно,

$$\Theta_\rho f = \sum b_{i\rho k} u^i \frac{\partial f}{\partial u_k}, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, p \qquad (13)$$

— набор из p независимых инфинитезимальных преобразований, принадлежащих группе (11), где вместо переменных $\overline{\omega}$ стоят буквы u, а функции $b_{i\rho k}$ зависят от U. Формулы приобретают вид

$$\frac{\partial \overline{\Omega}_k}{\partial t_i} = \sum_{i,\rho} \lambda_{i,\rho} b_{j\rho k} \overline{\Omega}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, p; \quad j, k = 1, 2, \ldots, r),$$

или, принимая во внимание формулы (10),

$$\frac{\partial\omega_k}{\partial t_i} = \frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial t_i}\overline{\omega}_1 + \frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial t_i}\overline{\omega}_2 + \ldots + \frac{\partial\alpha_{kr}}{\partial t_i}\overline{\omega}_r = \sum_{j,\rho}\lambda_{i\rho}b_{i\rho k}\omega_j$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p; \quad k = 1, 2, \ldots, r).$$

Вычислим теперь билинейные коварианты форм ω_k:

$$\omega'_k = \sum_{i=1}^{i=r}\alpha_{ki}\overline{\omega}'_i + \sum_{s,j}\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial U_j}\,dU_j\overline{\omega}_i + \sum_i dt_i\sum_{i,\rho}\lambda_{i\rho}b_{j\rho k}\omega_j.$$

Но формы $\overline{\omega}_i$ и dU представляются в виде линейных комбинаций форм ω и, так как $\overline{\omega}_i$ зависят лишь от переменных x, коварианты $\overline{\omega}'_i$ являются билинейными формами от ω. Получаем

$$\omega'_k = \sum d_{ijk}\omega_i\omega_j - \sum_{j,\rho}b_{j\rho k}\omega_j\sum_i\lambda_{i\rho}dt_i\lambda^{\rho}_{\sigma}\,dt^{\sigma}, \tag{14}$$

где коэффициенты d_{ijk} зависят от x и t.

Сравнение формул (14) с (3) показывает, что, с точностью до линейных комбинаций форм ω, имеет место равенство

$$\sum_{\rho}a_{i\rho k}\varpi_{\rho} = -\sum_{\rho}b_{i\rho k}\sum_j\lambda_{j\rho}\,dt_j.$$

Положив

$$\overline{\varpi}_{\rho} = -\sum_j\lambda_{j\rho}\,dt_j \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

видим, что формы ϖ_{ρ} получаются из форм $\overline{\varpi}_{\rho}$ линейным преобразованием с коэффициентами, зависящими от U, и, кроме того, что это же преобразование, примененное к переменным e_{ρ} и $\overline{e}_{\rho}$, переводит инфинитезимальное преобразование

$$\sum_{\rho}e_{\rho}U_{\rho}f = \sum_{\rho,i,k}e_{\rho}a_{i\rho k}u_i\frac{\partial f}{\partial u_k}$$

в инфинитезимальное преобразование

$$\sum_{\rho}\overline{e}_{\rho}\Theta_{\rho}f = \sum_{\rho,i,k}\overline{e}_{\rho}b_{i\rho k}u_i\frac{\partial f}{\partial u_k}.$$

Итак, группа линейных преобразований Г, определяемая формулой (11), и группа линейных преобразований Г, определенная инфинитезимальными преобразованиями (формула (18) главы II), совпадают.

Несколько более тонкий анализ показывает, что *заданные r пфаффовых форм $\omega_1, \ldots, \omega_r$ определяют конечные уравнения группы* Г.

36. Выведенные во второй главе условия, которым должны удовлетворять коэффициенты $a_{i\rho k}$ и c_{ijk} в равенстве (3), показывают, что для данной группы линейных преобразований Г пфаффовы формы $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_p$ нельзя выбирать произвольно. Эти условия можно частично получить заново, заметив, что *равенства* (3) *не меняются при действии на* ω *преобразованием из группы* Г, *если подействовать также подходящим преобразованием на* ϖ. В самом деле, если подействовать на формы ω_k семейством преобразований, зависящим от параметра τ,

$$\omega_k = \alpha_{k1}(t, U)\overline{\omega}_1 + \alpha_{k2}(t, U)\overline{\omega}_2 + \ldots + \alpha_{kr}(t, U)\overline{\omega}_r,$$

то получим новые формы

$$\omega_k^{(1)} = \sum_i \alpha_{ki}(\tau, U)\omega^i = \sum_i \alpha_{ki}(\theta, U)\overline{\omega}_i,$$

где через θ обозначены некоторые функции от t, τ и U. Поэтому набор форм $\omega_k^{(1)}$ — это *образ* набора ω_k относительно некоторого преобразования, действующего на переменных t. Следовательно, формулы (3) сохраняются, если только заменить в них формы ϖ другими.

Вычисления подтверждают эти предсказания. Общее инфинитезимальное преобразование из группы Г можно представить в виде

$$\frac{\delta\omega_k}{\delta t} = \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} v_\rho \omega_i, \tag{15}$$

где через v_ρ обозначены некоторые величины; тогда[1]

$$\frac{\delta\omega'_k}{\delta t} = \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\, dv_\rho \omega_i + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} v_\rho \omega'_i. \tag{16}$$

Равенства (17) теперь дают

$$\frac{\delta\omega'_k}{\delta t} = \sum c_{ijk}\left(\frac{\delta\omega_i}{\delta t}\omega_j + \omega_i\frac{\delta\omega_j}{\delta t}\right) + \sum a_{i\rho k}\left(\frac{\delta\omega_i}{\delta t}\varpi_\rho + \omega_i\frac{\delta\varpi_\rho}{\delta t}\right). \tag{17}$$

---

[1] Если группа интранзитивна, то к правой части равенства (16) следует прибавить член $\sum v_\rho da_{i\rho k}\omega_i$, который вызвал появление дополнительного члена (19′) в правой части равенства (19).

Учитывая равенства (15) и сравнивая с (16), получаем

$$0 = -\sum_{\lambda,\rho} a_{\lambda\rho k}\omega_\lambda \left(\frac{\delta\varpi_\rho}{\delta t} + dv_\rho\right) + \sum_{\lambda,\rho,\sigma}\sum_{i} \left(a_{i\rho k}a_{\lambda\sigma i} - a_{i\sigma k}a_{\lambda\rho i}\right) v_\rho\omega_\lambda\varpi_\sigma +$$
$$+ \sum_{(\lambda,\mu),\rho} \left(c_{\lambda\mu i}a_{i\rho k} + c_{i\lambda k}a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k}a_{\lambda\rho i}\right) v_\rho\omega_\lambda\omega_\mu,$$

или, вводя структурные константы $\gamma_{\rho\sigma\tau}$ группы Г,

$$0 = -\sum_{\lambda,\tau} a_{\lambda\tau k}\omega_\lambda \left(\frac{\delta\varpi_\tau}{\delta t} + dv_\tau + \sum_{\rho,\sigma}\gamma_{\rho\sigma\tau}v_\rho\varpi_\sigma\right) +$$
$$+ \sum_{(\lambda,\mu),\rho} \left(c_{\lambda\mu i}a_{i\rho k} + c_{i\lambda k}a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k}a_{\lambda\rho i}\right) v_\rho\omega_\lambda\omega_\mu.$$

Поэтому

$$\frac{\delta\varpi_\tau}{\delta t} = -dv_\tau - \sum_{\rho,\sigma}\gamma_{\rho\sigma\tau}v_\rho\varpi_\sigma - \sum_{\rho,\mu} z_{\mu\rho\tau}v_\rho\varpi_\mu, \tag{18}$$

где $z_{\mu\rho\tau}$ — произвольные коэффициенты, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\tau}^{1,\ldots,p} (a_{\lambda\tau k}z_{\mu\rho\tau} - a_{\mu\tau k}z_{\lambda\rho\tau} = \sum_{i}^{1,\ldots,r} c_{\lambda\mu i}a_{i\rho k} + c_{i\lambda k}a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k}a_{\lambda\rho i}, \tag{19}$$
$$(\lambda,\mu,k = 1,2,\ldots,r;\quad \rho = 1,2,\ldots,p).$$

Это не что иное, как уравнения (19) второй главы. *Условие того, что структурные уравнения (3) группы G инвариантны относительно группы Г, накладывает набор соотношений первого порядка на коэффициенты c_{ijk}.*

37. Выпишем необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять формы $\overline{\omega}_k$ от переменных x, чтобы они задавали бесконечномерную группу G при данной группе линейных преобразований Г:

1° их коварианты должны представляться в виде (3), где коэффициенты c_{ijk} зависят только от инвариантов U, а пфаффовы формы ϖ выбраны подходящим образом;

2° системы (19) и (20) главы II должны быть совместными.

Эти условия выполняются, в частности, если положить

$$\overline{\omega}_k = dx_k, \qquad (k = 1,2,\ldots,r);$$

в этом случае коэффициенты c_{ijk} обращаются в нуль.

38. Предыдущие результаты частично сохраняются, если предположить, что коварианты s пфаффовых форм

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s \qquad (s < r)$$

обращаются в нуль по модулю самих этих форм, т. е.,

$$\begin{aligned} c_{s+i,s+j,k} &= 0, \\ a_{s+i,\rho,k} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} k \\ = \end{pmatrix} 1, 2, \ldots, s, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r - s\rho = 1, 2, \ldots, p.$$

При этих условиях система

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0$$

вполне интегрируема, и функции

$$x_1, x_2, \ldots, x_s$$

можно считать ее интегралами. Кроме того, мы можем предположить, что инварианты U группы G зависят только от этих s переменных.

Пусть через

$$\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_s$$

обозначен результат подстановки фиксированных значений переменных $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_p$ в формы ω. Тогда рассуждение, аналогичное приведенному в начале главы, показывает, что формы ω_i являются результатом применения к формам $\overline{\omega}_i$ линейного преобразования, принадлежащего некоторой группе γ, параметры t которой являются функциями от x и y. Коэффициенты конечных уравнений группы γ могут зависеть, не только от параметров t, но и от инвариантов U:

$$\omega_k = \sum_{i}^{1,\ldots,s} \beta_{ki}(t, U)\overline{\omega}_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Группа γ порождена $r - s + p$ инфинитезимальными преобразованиями

$$\sum_{i,k}^{1,\ldots,s} c_{i,s+j,k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r - s),$$

$$\sum_{i,k}^{1,\ldots,s} a_{i\rho k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

которые могут и не быть линейно независимыми. Размерность группы γ равна числу линейно независимых уравнений вида

$$\sum_{j}^{1,\ldots,r-s} c_{i,s+j,k}\omega_{s+j} + \sum_{\rho}^{1,\ldots,p} a_{i\rho k}\varpi_\rho = 0 \qquad (i,k=1,2,\ldots,s).$$

Нормальное продолжение

39. Нормальное голоэдрическое продолжение группы G получается присоединением к исходным переменным x новых p переменных y, входящих в ω и ϖ, или дополнительно и параметров t конечных уравнений присоединенной группы линейных преобразований Γ. Конечные уравнения продолженной группы G' немедленно выводятся из уравнений группы G. Для этого достаточно, выразив X через x, приравнять в обеих частях равенств

$$\Omega_k = \omega_k \qquad (k=1,2,\ldots,r) \tag{20}$$

коэффициенты при дифференциалах dx_i. С учетом параметров группы Γ, эти уравнения принимают вид

$$\sum_i \alpha_{ki}(T,U)\overline{\Omega}_i = \sum_i \alpha_{ki}(t,U)\overline{\omega}_i \qquad (k=1,2,\ldots,r).$$

Получить структурные уравнения группы G' также нетрудно. Приравняв билинейные коварианты обеих частей равенств (20) и приняв во внимание сами эти равенства, получаем, с учетом (3),

$$\Omega'_k - \omega'_k = \sum_{i,j} a_{i\rho k}\omega_i(\Pi_\rho - \varpi_\rho) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,r), \tag{21}$$

где через Π_ρ обозначен результат подстановки преобразованных переменных в формы ϖ_ρ. Коэффициенты $a_{i\rho k}$ образуют инволютивную систему (см. п. 7) с характеристиками

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_r \qquad (p=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_r),$$

поэтому общее решение уравнений (21) зависит от

$$p' = \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r$$

произвольных параметров $z_1, z_2, \ldots, z_p$

$$\Pi_\rho = \varpi_\rho + \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho} z_\lambda \omega_i \qquad (\rho = 1,2,\ldots,p).$$

Следовательно, *группа G' состоит из всех преобразований с инвариантами U, осуществляющих линейное преобразование $r+p$ пфаффовых форм ω и ϖ вида*

$$\begin{cases} \Omega_k = \omega_k & (k = 1, 2, \ldots, r), \\ \Pi_\rho = \varpi_\rho + \sum\limits_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho} z_\lambda \omega_i & (\rho = 1, 2, \ldots, p). \end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, что линейные преобразования (22) образуют группу Γ', зависящую от p параметров. Это присоединенная к G' группа линейных преобразований.

Положим

$$\omega_{r+\rho} = \varpi_\rho + \sum_{i,\lambda} b^\rho_{i\lambda} z_\lambda \omega_i \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p).$$

Пфаффовы формы $\omega_1, \ldots, \omega_{r+p}$ зависят от $r + p + p'$ переменных x, y, z. Билинейные коварианты первых r из них даются формулами

$$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk} \omega_i \omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} \omega_i \omega_{r+\rho} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Результаты пп. 21 и 22 показывают, что, приравняв к нулю трилинейные коварианты форм ω'_k, мы получаем выражения

$$a_{i\rho k} \omega_i \omega'_{r+\rho} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

и, кроме того, что ω'_{r+p} представляются в виде билинейных форм от $\omega_1, \ldots, \omega_{r+p}$ с коэффициентами, зависящими от U (формула (16) главы II). Поэтому общее решение для ω'_{r+p} получается прибавлением общих билинейных форм Θ_ρ, которые обращают в нуль r трилинейных форм

$$\sum a_{i\rho k} \omega_i \Theta_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Из п. 8 известно, что такие общие формы имеют вид

$$\Theta_\rho = \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho} \omega_i \chi_\lambda \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

где $\omega_{i\chi\lambda}$ — p' произвольных пфаффовых форм, а коэффициенты $b_{i\lambda\rho}$ те же самые, что и в формулах (22). Окончательно получаем структурные уравнения группы G' в виде

$$\begin{aligned}
\omega'_k &= \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i}^{1,\ldots,r}\sum_{\rho}^{1,\ldots,p} a_{i\rho k}\omega_i\omega_{r+\rho} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),\\
\omega'_{r+\rho} &= \sum_{(ij)}^{1,\ldots,r+p} c_{ij,r+\rho}\omega_i\omega_j + \sum_{i}^{1,\ldots,r}\sum_{\rho}^{1,\ldots,p'} b_{i\lambda\rho}\omega_i\chi_\lambda \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p).
\end{aligned} \tag{23}$$

40. Сделаем замечание, важность которого выяснится позднее при изучении теории интранзитивных групп. *Две системы*

$$\begin{aligned}
&\sum a_{i\rho k}\omega_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r; \quad \rho = 1, \ldots, p),\\
&\sum b_{i\lambda\rho}\omega_i = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, p; \quad \lambda = 1, \ldots, p')
\end{aligned}$$

линейных уравнений на формы $\omega_1, \ldots, \omega_r$ *эквивалентны.* Действительно, предположим для ясности, что первая из этих систем представлена в виде

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0 \qquad (s \leqslant r),$$

т. е.

$$a_{s+i,\rho,k} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, r - s; \quad k = 1, \ldots, r; \quad \rho = 1, \ldots, p).$$

Коэффициенты $b_{i\lambda\rho}$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\rho}(a_{i\rho k}b_{j\lambda\rho} - a_{j\rho k}b_{i\lambda\rho}) = 0 \qquad (i, j, k = 1, \ldots, r; \quad \lambda = 1, \ldots, p').$$

Положив $j > s$, видим, что все $b_{j\lambda\rho}$ равны нулю, откуда вытекает, что во второй системе нет уравнений, независимых от первой. Если теперь вторая система сводится к виду, скажем,

$$\omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_s = 0,$$

то, положив $j = 1$, получаем

$$\sum_{\rho} a_{1\rho k}b_{i\lambda\rho} = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, r; \quad \lambda = 1, \ldots, p'),$$

откуда форма $\sum a_{i\rho k}$ инвариантна относительно преобразований (22) при любых k. Так как все $a_{i\rho k}$ отличны от нуля, это невозможно[1]).

Отсюда следует, что существенные инварианты у нормального продолжения G' группы G и у самой группы G одинаковы.

41. В качестве примера нормального продолжения рассмотрим группу G общих преобразований одной переменной, заданную уравнениями

$$\omega_1' = \omega_1 \varpi_1;$$

ее нормальное продолжение G' задается уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_1 \omega_2, \\ \omega_2' &= \omega_1 \chi_1; \end{aligned}$$

следующее нормальное продолжение G'' — уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_1 \omega_2, \\ \omega_2' &= \omega_1 \omega_3, \\ \omega_3' &= \omega_2 \omega_3 + \omega_1 \psi_1, \end{aligned}$$

и так далее. Начав с формы

$$\omega_1 = y\,dx,$$

без интегрирования находим

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{dy}{y} + z\,dx, \\ \omega_3 &= -\frac{dz}{y} + u\,dx. \end{aligned}$$

Конечные уравнения этих трех последовательных групп сводятся к формулам

$$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= \frac{y}{f'(x)}, \\ Z &= \frac{z}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{(f'(x))^2}. \end{aligned}$$

---

[1]) В обозначениях п. 7 коэффициенты $l_{\rho ij}$ связаны соотношениями

$$\sum_{\rho}^{1,\ldots,\sigma_i} \sum_{i}^{1,\ldots,p} A_{\rho i} l_{\rho ij} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

При $j = 1$ все коэффициенты $l_{\rho i1}$ являются главными и, как следствие, могут принимать любые значения, поэтому все $A_{\rho i}$ равны нулю.

Аналогично, структурные уравнения группы общих преобразований двух переменных¹) имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega_2' &= \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_4, \end{aligned}$$

а ее нормального продолжения —

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_4, \\ \omega_2' &= \omega_1\omega_5 + \omega_2\omega_6, \\ \omega_3' &= -\omega_4\omega_5 + \omega_1\chi_1 + \omega_2\chi_2, \\ \omega_4' &= -\omega_3\omega_4 - \omega_4\omega_6 + \omega_1\chi_2 + \omega_2\chi_3, \\ \omega_5' &= \omega_3\omega_5 + \omega_5\omega_6 + \omega_1\chi_4 + \omega_2\chi_5, \\ \omega_6' &= \omega_4\omega_5 + \omega_1\chi_5 + \omega_2\chi_6. \end{aligned}$$

Очевидно, можно положить

$$\begin{aligned} \omega_1 &= y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2, \\ \omega_2 &= y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2, \end{aligned}$$

откуда без труда получаем

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{-y_4\,dy_1 + y_3\,dy_2}{y_1y_4 - y_2y_3} + z_1(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2) + z_2(y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2), \\ \omega_4 &= \frac{y_2\,dy_1 - y_1\,dy_2}{y_1y_4 - y_2y_3} + z_2(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2) + z_3(y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2), \\ \omega_5 &= \frac{-y_4\,dy_3 + y_3\,dy_4}{y_1y_4 - y_2y_3} + z_4(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2) + z_5(y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2), \\ \omega_6 &= \frac{y_2\,dy_3 - y_1\,dy_4}{y_1y_4 - y_2y_3} + z_5(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2) + z^6(y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2). \end{aligned}$$

И, наконец, из конечных уравнений группы G

$$\begin{aligned} X_1 &= f(x_1, x_2), \\ X_2 &= \varphi(x_1, x_2) \end{aligned}$$

---

¹) В современной терминологии — группы диффеоморфизмов плоскости. — *Прим. ред.*

выводятся конечные уравнения для группы G':

$$Y_1 = \frac{y_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - y_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}, \qquad Y_2 = \frac{-y_1\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + y_2\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}},$$

$$Y_3 = \frac{y_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - y_4\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}, \qquad Y_4 = \frac{-y_3\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + y_4\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}.$$

Нахождение групп, для которых данная группа G служит голоэдрическим продолжением

42. Сохраним обозначения предыдущих пунктов, и пусть G_1 — группа, голоэдрическим продолжением которой является группа G. Обозначим через s число переменных, на которых действует группа G_1; эти переменные функционально выражаются через переменные x, на которых действует группа G, и мы всегда можем считать, что это просто первые s переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_s. \tag{24}$$

Поскольку группа G является голоэдрическим продолжением группы G_1, она преобразует переменные $x_1, \ldots, x_s$ в себя и, кроме того, если преобразование из G действует тождественно на переменных x, то оно само тождественно.

Поэтому s переменных (24) являются интегралами пфаффовой системы, которую всегда можно записать в виде

$$\begin{cases} \omega_1 - h_{11}\omega_{s+1} - \ldots - h_{1,r-s}\omega_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_s - h_{s1}\omega_{s+1} - \ldots - h_{s,r-s}\omega_r = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Левые части этих уравнений являются линейными комбинациями дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_s$, поэтому преобразование из группы G действует на них линейно; так как, с другой стороны, каждая форма ω_i инвариантна относительно группы G, левые части уравнений (25) тоже инвариантны и, следовательно, *коэффициенты h_{ik} зависят только от инвариантов U.*

Предположим — а это всегда возможно, — что все эти коэффициенты равны нулю; чтобы достичь этого, достаточно подействовать на ω линейным преобразованием функциональных коэффициентов от U.

Система

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0 \tag{26}$$

должна быть вполне интегрируемой, т. е. в структурных уравнениях

$$\omega_k' = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

все коэффициенты

$$\begin{aligned} &c_{s+i,s+j,k} && (k = 1, \ldots, s; \quad i, j = 1, \ldots, r - s), \\ &a_{s+i,\rho,k} && (i = 1, 2, \ldots, r - s; \quad \rho = 1, \ldots, p; \quad k = 1, 2, \ldots, s) \end{aligned}$$

равны нулю. В частности, отсюда вытекает, что *группа линейных преобразований* Γ *оставляет инвариантным линейное многообразие, заданное системой* (26). Это условие не достаточно.

43. Предположим, что система (26) вполне интегрируема. Ясно, что группа G отображает интегралы в себя, так как каждая из форм $\omega_1, \ldots, \omega_s$ инвариантна относительно действия группы и, следовательно, дифференциалы $dX_1, \ldots, dX_s$ выражаются линейно через $dx_1, \ldots, dx_s$.

Обозначим через G_1 группу, описывающую, как преобразования из G действуют на переменные $x_1, \ldots, x_s$. Ясно, что G является продолжением группы G_1. Покажем, что это продолжение голоэдрическое. Предположим временно, что все инварианты группы G сохраняются и для группы G_1, т. е. что все инварианты группы G зависят только от $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Положим

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \beta_{11}\,dx_1 + \ldots + \beta_{1s}\,dx_s, \\ \omega_2 &= \beta_{21}\,dx_1 + \ldots + \beta_{2s}\,dx_s, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_s &= \beta_{s1}\,dx_1 + \ldots + \beta_{ss}\,dx_s. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Коэффициенты β_{ik} зависят от $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_p$. Предположим, что среди них в точности q независимых в совокупности и остающихся независимыми при присоединении к ним функций $x_1, \ldots, x_s$. Поэтому все их можно выразить через $x_1, \ldots, x_s$ и через q дополнительных переменных $v_1, \ldots, v_q$. Теперь очевидно, что *всякое преобразование, оставляющее инвариантной каждую из форм* $\omega_1, \ldots, \omega_s$ *и каждую из переменных* $x_1, \ldots, x_s$*, оставляет инвариантным и каждый из коэффициентов* β_{ik} *и, следовательно, переменные* v. Другими словами, тождественному преобразованию из G_1 могут соответствовать только те преобразования из G, относительно которых инвариантны все функции v.

Коварианты $\omega'_1, \ldots, \omega'_s$ можно, очевидно, выразить через

$$\omega_1, \ldots, \omega_s; \quad dv_1, \ldots, dv_q;$$

кроме того, величины

$$x_1, x_2, \ldots, x_s; \quad v_1, v_2, \ldots, v_q$$

являются интегралами вполне интегрируемой системы

$$\begin{cases} \omega_k = 0 \\ \dfrac{\partial \omega'_k}{\partial \omega_i} = 0 \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s). \tag{28}$$

Итак, эту последнюю систему можно выписать, не зная коэффициентов β_{ik} из равенств (27); она имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \omega_k = 0, \\ \sum_j^{1,\ldots,r} c_{ijk}\omega_j + \sum_\rho^{1,\ldots,p} a_{i\rho k}\varpi_\rho = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (i, k = 1, \ldots, s).$$

Предположим — а это всегда возможно, — что она имеет вид

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{s'} = 0 & (s \leqslant s' \leqslant r), \\ \varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi^l = 0 & (l \leqslant p). \end{cases} \tag{29}$$

В этих предположениях *всякое преобразование из группы* G*, оставляющее инвариантными переменные* $x_1, \ldots, x_s$*, сохраняет все интегралы системы* (29).

Прежде всего мы собираемся показать, что можно рассмотреть два случая

$$s = s' \quad \text{и} \quad s = r.$$

Действительно, если значение s' не равно ни s, ни r, то легко видеть, что система

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{s'} = 0 \tag{30}$$

сама вполне интегрируема. В самом деле, билинейные коварианты форм $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_{s'}$ обращаются в нуль вместе с формами $\omega_1, \ldots, \omega_r$, с одной стороны, и вместе с формами $\omega_1, \ldots, \omega_{s'}, \varpi_1, \ldots, \varpi_s$, с другой. Если бы система (30) не была вполне интегрируемой, то по крайней мере в одном из ковариантов $\omega'_{s+1}, \ldots, \omega'_{s'}$ встретился бы член, скажем, $\omega_r\varpi_1$. Обозначим через

$$A_{s+1}, \ldots, A_{s'}; \quad B_1, \ldots, B_l$$

коэффициенты при $\omega_r\varpi_1$ в

$$\omega'_{s+1}, \ldots, \omega'_{s'}; \quad \varpi'_1, \ldots, \varpi'_l.$$

Формула для коэффициента при $\omega_i\omega_r\varpi_1$ в трилинейном коварианте формы ω'_k $(k \leqslant s)$ дает

$$\sum_i^{1,\ldots,r-s} c_{i,s+j,k}A_{s+j} + \sum a_{i\rho k}B_\rho = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, s).$$

При сделанных предположениях эти уравнения принимают вид

$$A_{s+j} = 0, \qquad B_\rho = 0,$$

что противоречит исходным предположениям.

Поэтому ко вполне интегрируемой системе (30) применимы те же рассуждения, что и к примитивной системе (26). В результате мы получаем последовательность систем, останавливаясь когда целое число s, отвечающее очередной системе, становится равным r, или когда оно перестает расти.

44. Итак, мы свели ситуацию к двум случаям: $s' = s$ и $s' = r$.

1° *Если* $s' = r$, то все преобразования группы G, оставляющие инвариантными переменные $x_1, \ldots, x_s$, сохраняет и другие переменные $x_{s+1}, \ldots, x_r$. В этом случае *группа G является голоэдрическим продолжением группы G_1*.

2° *В случае* $s' = s$ рассуждение становится более сложным. Предположим, во-первых — а это всегда возможно, что переменные $y_1, y_2, \ldots, y_l$ являются интегралами системы (29). Обозначив через

$$\overline{\varpi}_1, \overline{\varpi}_2, \ldots, \overline{\varpi}_l$$

общие формы, такие что

$$\omega'_k = \sum_{(i,j)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\overline{\varpi}_\rho \qquad (k = 1, \ldots, s), \tag{31}$$

получаем соотношения

$$\overline{\varpi}_\rho = \varpi_\rho + \sum_i^{1,\ldots,s} A_{\rho i}\omega_i \qquad (\rho = 1, \ldots, l), \tag{32}$$

где коэффициенты $A_{\rho i}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_\rho^{1,\ldots,l} a_{i\rho k}A_{\rho j} - a_{j\rho k}A_{\rho i} = 0 \qquad (i, j, k = 1, \ldots, s).$$

Итак, очевидно, что для форм ω_k, построенных с помощью переменных $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_l$, интегралов системы (29), уравнения (3) выполняются, если в качестве форм $\overline{\varpi}_\rho$ взять такие же формы от переменных $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_l$ [1]. Всякое преобразование из группы G, оставляющее инвариантными переменные $x_1, \ldots, x_s$, сохраняет и выбранные таким образом формы $\overline{\varpi}_\rho$. Отсюда

$$\omega'_{s+k} = \sum_{(i,j)} c_{i,j,s+k}\omega_i\omega_j + \sum_i^{1,\ldots,r}\sum_\rho^{1,\ldots,l} a_{i,\rho,s+k}\omega_i\left(\overline{\varpi}_\rho - \sum_j^{1,\ldots,s} A_{\rho j}\omega_j\right) + \\ + \sum_i^{1,\ldots,r}\sum_\sigma^{l+1,\ldots,p} a_{i,\sigma,s+k}\omega_i\varpi_\sigma.$$

Предположим, что следующее свойство выполняется не всегда: *всякому линейному преобразованию вида* (32), *действующему на формах* $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$, *относительно которого коварианты* (31) *инвариантны, соответствует линейное преобразование, действующее на формах* $\varpi_{l+1}, \ldots, \varpi_p$ *и оставляющее инвариантными все остальные коварианты* $\omega'_{s+1}, \ldots, \omega'_r$.

Тогда можно предположить, что найдены $p - l$ форм $\overline{\varpi}_{l+1}, \ldots, \overline{\varpi}_p$, такие что

$$\omega'_{s+k} = \sum_{(i,j)}^{1,\ldots,r} c_{i,j,s+k}\omega_i\omega_j + \sum_i^{1,\ldots,r}\sum_\rho^{1,\ldots,p} a_{i,\rho,s+k}\omega_i\overline{\varpi}_\rho.$$

Поэтому преобразования из группы G, оставляющие инвариантными переменные $x_1, \ldots, x_s$, задаются уравнениями

$$\Omega_{s+k} - \omega_{s+k} = 0, \tag{33}$$

---

[1] Достаточно, например, зафиксировать значения переменных $y_{l+1}, \ldots, y_p$ в формах $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$.

а билинейные коварианты их левых частей представляются в виде

$$\Omega'_{s+k} - \omega'_{s+k} = \sum_{i}^{1,\ldots,r} \sum_{\sigma}^{l+1,\ldots,p} a_{i,\sigma,s+k}\omega_i(\overline{\Pi}_\sigma - \overline{\varpi}_\sigma).$$

Если при этом система коэффициентов

$$a_{i,\sigma,s+k} \qquad (i = 1, \ldots, r; \quad k = 1, \ldots, r - s; \quad \sigma = l + 1, \ldots, p)$$

инволютивна, то пфаффова система (33) — в инволюции и в группу G входят преобразования, оставляющие инвариантными $x_1, \ldots, x_s$, но не $x_{s+1}, \ldots, x_r$. *Группа G является мериэдрическим преобразованием группы G_1.*

45. Чтобы прийти к этому заключению, мы сделали два не очень обязательных предположения. Если первое из них не выполняется, то рассмотрим коварианты форм $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$. Рассмотрим производную группу G' группы G, полученную присоединением к формам $\omega_1, \ldots, \omega_r$ форм $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+p}$, которые, в свою очередь, представляют собой суммы форм $\varpi_{r+1}, \ldots, \varpi_p$ с некоторыми линейными комбинациями примитивных форм ω с функциональными коэффициентами, зависящими от p' дополнительных новых переменных z (п. 39). Тогда группе G соответствует группа G'_1, действующая на переменные $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_l$, являющимися интегралами системы

$$\omega_1 = \ldots = \omega_s = 0, \qquad \omega_{r+1} = \ldots = \omega_{r+l} = 0. \tag{34}$$

Рассуждая так же, как и в случае примитивной системы (26), мы придем либо к новой системе, содержащей все уравнения

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = 0$$

(тогда группа G является голоэдрическим продолжением группы G_1), либо к системе, не допускающей дальнейших продолжений.

Пусть эта система имеет вид

$$\omega_1 = \ldots = \omega_{s'} = 0, \qquad \omega_{r+1} = \ldots = \omega_{r+l'} = 0, \qquad (s' < r). \tag{35}$$

Это означает, что билинейные коварианты всех форм $\omega_1, \ldots, \omega_s$, $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+l'}$ обращаются в нуль при выполнении условий (35) и, кроме того, что частные производные тех же самых ковариантов, будучи равными нулю, не накладывают на формы $\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+p}$ новых соотношений, не зависящих от (35). Например,

$$\left\{\begin{aligned} \omega'_k &= \sum_{(i,j)}^{1,\ldots,s'} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i}^{1,\ldots,s'} \sum_{\rho}^{1,\ldots,l'} a_{i\rho k}\omega_i\omega_{r+\rho}, && (k = 1, \ldots, s') \\ \omega'_{r+\tau} &= \sum_{(i,j)}^{1,\ldots,s'} A_{ij\tau}\omega_i\omega_j + \sum_{i}^{1,\ldots,s'} \sum_{\rho}^{1,\ldots,l'} B_{i\rho\tau}\omega_i\omega_{r+\rho} + \\ &\quad + \sum_{(\rho,\sigma)}^{1,\ldots,l'} C_{\rho\sigma\tau}\omega_{r+\rho}\omega_{r+\sigma} + \sum_{i}^{1,\ldots,s'} \sum_{\lambda}^{1,\ldots,p'} b_{i\lambda\tau}\omega_i\chi_\lambda, && (\tau = 1, \ldots, l'). \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Эти равенства показывают, во-первых, что система

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0$$

вполне интегрируема; предположим, что

$$x_1, \ldots, x_s,$$

— интегралы системы и что интегралами системы (35) служат

$$x_1, \ldots, x_s; \quad y_1, \ldots, y_{l'}. \tag{37}$$

Напомним также, что коварианты $\omega'_1, \ldots, \omega'_r$ сохраняются при действии преобразований

$$\overline{\omega}_{r+\rho} = \omega_{r+\rho} + \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho} z_\lambda \omega_i \qquad (\rho = 1, \ldots, p).$$

на формы $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+p}$.

Поэтому если обозначить через $\overline{\omega}_{r+\rho}$ $(\rho \leqslant l')$ результат подстановки в формы $\omega_{r+\rho}$ постоянных значений всех переменных, не входящих в список (37), то, применяя результаты п. 38 к системе (35), получим [1]

$$\omega_{r+\rho} = \overline{\omega}_{r+\rho} + \sum b_{i\lambda\rho} u_\lambda \omega_i.$$

---

[1] Инфинитезимальные преобразования группы линейных преобразований γ, присоединенной к системе (35), имеют вид

$$\sum_{i,\tau} b_{i\lambda\tau}\omega_i \frac{\partial f}{\partial \omega_{r+\tau}}, \qquad (\lambda = 1, \ldots, p').$$

Вернемся, в частности, к примитивным формам ϖ_ρ, получаемым из форм $\omega_{r+\rho}$ подстановкой вместо переменных z некоторых конкретных функций от x и y. Ясно, что

$$\varpi_\rho = \overline{\omega}_{r+\rho} + \sum_{i}^{1,\dots,s'} \sum_{\lambda}^{1,\dots,p'} b_{i\lambda\rho} u_\lambda \omega_i, \qquad (\rho = 1,\dots,l'). \tag{38}$$

Всякое преобразование из G, относительно которого переменные (37) инвариантны, сохраняет и формы $\overline{\omega}_{r+p}$.

Задав теперь формы $\overline{\omega}_{r-l+1},\dots,\overline{\omega}_{r+p}$ формулами

$$\varpi_{l'+\tau} = \overline{\omega}_{r+l'+\tau} + \sum_{i}^{1,\dots,r} \sum_{\lambda}^{1,\dots,p} b_{i,\lambda,l'+\tau} u_\lambda \omega_i, \qquad (\tau = 1,\dots,p-l'), \tag{39}$$

где коэффициенты u_λ имеют те же значения, что и в формулах (38), мы видим, что

$$\omega'_{s'+k} = \sum_{(i,j)}^{1,\dots,r} c_{i,j,s'+k}\omega_i\omega_j + \sum_{i}^{1,\dots,r} \sum_{\rho}^{1,\dots,p} a_{i,\rho,s'+k}\omega_i\overline{\omega}_{s+\rho},$$

так же, как и выше.

Поэтому преобразования из группы G, оставляющие инвариантными переменные (37), даются, как и ранее, дифференциальной системой в инволюции *при условии, что система коэффициентов*

$$a_{i,\rho,s'+k}, \qquad (i = 1,\dots,r; \quad k = 1,\dots,r-s'; \quad \rho = 1,\dots,p) \tag{40}$$

инволютивна.

Теперь мы можем избавиться от первого ограничения из п. 44.

Если система (40) не инволютивна, то заменим группу G ее нормальным продолжением G'. По фундаментальной теореме пп. 10 и 11 в конце концов мы придем к системе в инволюции.

46. Из этого несколько длинноватого рассуждения вытекает следующая теорема.

Зная лишь структурные константы бесконечномерной группы G, можно с помощью чисто алгебраических операций определить, является ли она гемиэдрическим или голоэдрическим продолжением группы G_1 — ограничения группы G на интегралы системы (25). В случае, если продолжение не голоэдрическое, можно также вывести структурные уравнения группы, состоящей из тех преобразований из G, которые соответствуют тождественному преобразованию из группы G_1.

47. Примеры. I. Рассмотрим транзитивную группу G, структурные уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= 0,\\
\omega_2' &= \omega_1\omega_2,\\
\omega_3' &= \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_3,\\
\omega_4' &= \omega_1\varpi_1,\\
\omega_5' &= \omega_2(\varpi_1 + \varpi_2),
\end{aligned}$$

и пусть G_1 — группа, описывающая действие группы G на интегралах вполне интегрируемой системы

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

Формулы для ковариантов $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ заставляют добавить к этой системе уравнения

$$\varpi_2 = \varpi_3 = 0,$$

что приводит к новой вполне интегрируемой системе. В этом случае $s' = s$, и линейные преобразования, сохраняющие коварианты $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$, имеют вид (32)

$$\begin{aligned}
\varpi_2 &= \overline{\varpi}_2 + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\\
\varpi_3 &= \overline{\varpi}_3 + \beta\omega_1 + \gamma\omega_2;
\end{aligned}$$

каждому из них соответствует преобразование

$$\varpi_1 = \overline{\varpi}_1 - \alpha\omega_1$$

формы ϖ_1, сохраняющее также формы ω_4' и ω_5'; таким образом, первое предположение из п. 44 выполняется. Этого нельзя сказать, однако, про второе предположение: если формы ω, а также ϖ_2, ϖ_3 инвариантны, то уравнения

$$\Omega_4 - \omega_4 = \Omega_5 - \omega_5 = 0$$

не задают систему в инволюции, так как

$$\begin{aligned}
\Omega_4' - \omega_4' &= \omega_1(\Pi_1 - \varpi_1),\\
\Omega_5' - \omega_5' &= \omega_2(\Pi_1 - \varpi_1).
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь группу G' — нормальное продолжение группы G, — заменив формы $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ на формы $\omega_6, \omega_7, \omega_8$. Имеем

$$\begin{aligned}
\omega_6' &= -\omega_1(\omega_6 + \omega_7) + \omega_1\chi_1,\\
\omega_7' &= -\omega_1\chi_1 + \omega_2\chi_2,\\
\omega_8' &= -\omega_1\omega_8 + \omega_1\chi_2 + \omega_2\chi_3.
\end{aligned}$$

К системе

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_7 = \omega_8 = 0$$

нужно присоединить уравнения

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0.$$

Однако на этот раз всякое линейное преобразование форм χ, сохраняющее коварианты ω_7' и ω_8', т. е.

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \bar{\chi}_1 - \lambda\omega_1 + \mu\omega_2,\\
\chi_2 &= \bar{\chi}_2 - \mu\omega_1 + \nu\omega_2,\\
\chi_3 &= \bar{\chi}^3 + \nu\omega_1 + \rho\omega_2,
\end{aligned}$$

не сохраняет ковариант ω_6'. Поэтому нужно рассмотреть группу G'' — нормальное продолжение группы G', — которая после замены форм χ_1, χ_2, χ_3 формами $\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}$ дает

$$\begin{aligned}
\omega_9' &= -\omega_2\omega_{10} + \omega_1\psi_1,\\
\omega_{10}' &= -2\omega_1\omega_{10} + \omega_2\psi_2,\\
\omega_{11}' &= -2\omega_1\omega_{11} + \omega_1\psi_2 + \omega_2\psi_3,
\end{aligned}$$

и система

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_7 = \omega_8 = \omega_9 = \omega_{10} = \omega_{11} = 0$$

не порождает новых соотношений между формами ω. Здесь преобразования из группы G, соответствующие тождественному преобразованию из группы G_1, определяются равенствами

$$\Omega_4 - \omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 - \omega_5 = 0, \qquad \Omega_6 - \omega_6 = 0,$$

а коварианты левых частей обращаются в нуль с учетом этих уравнений. Поэтому тождественному преобразованию из группы G_1 отвечает подгруппа группы G, зависящая от трех параметров.

Положив

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = -\frac{dx_1}{x_1},\\
&\omega_2 = \frac{dx_2}{x_1},\\
&\omega_3 = dx_3 - y_2\frac{dx_1}{x_1} + y_3\frac{dx_2}{x_1},\\
&\omega_4 = dx_4 - y_1\frac{dx_1}{x_1},\\
&\omega_5 = dx_5 + (y_1 + y_2)\frac{dx_2}{x_1},
\end{aligned}$$

получим линейные уравнения группы G в виде

$$\begin{aligned}
&X_1 = ax_1,\\
&X_2 = ax_2 + b,\\
&X_3 = x_3 + f(x_1) - x_1\varphi'(x_2) + \psi(x_2),\\
&X_4 = x_4 + f(x_1),\\
&X_5 = x_5 + \varphi(x_2).
\end{aligned}$$

В свою очередь, линейные уравнения группы G_1 имеют вид

$$\begin{aligned}
&X_1 = ax_1,\\
&X_2 = ax_2 + b,\\
&X_3 = x_3 - f(x_1) - x_1\varphi'(x_2) + \psi(x_2).
\end{aligned}$$

Условия

$$\begin{aligned}
&a = 1, \qquad b = 0,\\
&f(x_1) = Ax_1 + B,\\
&\varphi(x_2) = -Ax_2 + C,\\
&\psi(x_2) = B
\end{aligned}$$

задают тождественное преобразование в группе G_1. И здесь сохраняются три произвольные постоянные A, B, C.

II. Рассмотрим транзитивную группу

$$\begin{aligned}
&\omega_1' = 0,\\
&\omega_2' = \omega_1\varpi_1,\\
&\omega_3' = \omega_1\varpi_2 + \omega_3\varpi_1.
\end{aligned}$$

Системы, инвариантные относительно группы Г, имеют вид

$$\omega_1 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_3 = 0.$$

Первая из них определяет группу G_1, мериэдрически изоморфную группе G; тождественному преобразованию в этой группе отвечает подгруппа g_1 группы G, задаваемая системой

$$\Omega_2 - \omega_2 = 0,$$
$$\Omega_3 - \omega_3 = 0,$$

причем

$$\Omega_2' - \omega_2' = \omega_1(\Pi_1 - \varpi_1),$$
$$\Omega_3' - \omega_3' = \omega_1(\Pi_2 - \varpi_2) + \omega_3(\Pi_1 - \varpi_1),$$

и g_1 зависит от двух произвольных функций одного переменного.

Вторая система

$$\omega_1 = \omega_2 = 0$$

определяет вторую группу G_2, мериэдрически изоморфную G, тождественному преобразованию в которой отвечает подгруппа g_2 группы G, зависящая от произвольной функции одного переменного.

Наконец, к третьей системе

$$\omega_1 = \omega_3 = 0$$

нужно присоединить уравнения

$$\varpi_2 = \varpi_1 = 0;$$

однако здесь общее линейное преобразование, действующее на формы ϖ_1 и ϖ_2 и сохраняющее ω_3', имеет вид

$$\varpi_1 = \overline{\varpi}_1 + \alpha\omega_3 + \beta\omega_1,$$
$$\varpi_2 = \overline{\varpi}_2 + \beta\omega_3 + \gamma\omega_1$$

и не сохраняет ковариант ω_2'. Поэтому нужно рассмотреть нормальное продолжение G' группы G. Заменив формы ϖ_1 и ϖ_2 на ω_1 и ω_2, получаем

$$\omega_4' = \omega_1'\chi_1,$$
$$\omega_5' = -\omega_4\omega_5 + \omega_3\chi_1 + \omega_1\chi_2,$$

и поэтому на формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ не накладывается новых соотношений. Следовательно, тождественному преобразованию из группы G_3, описывающей действие группы G на интегралах рассматриваемой системы, отвечает подгруппа g_3 группы G, которая задается уравнением

$$\Omega_2 - \omega_2 = 0,$$

причем

$$\Omega_2' - \omega_2' = 0;$$

значит эта подгруппа зависит от одного параметра.

Если положить

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx_1, \\ \omega_2 &= dx_2 + y_1\,dx_1, \\ \omega_3 &= e^{y_1}\,dx_3 + y_2\,dx_1, \end{aligned}$$

то конечные уравнения группы G принимают вид

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + a, \\ X_2 &= x_2 + f(x_1), \\ X_3 &= x_3 e^{f'(x_1)} + \varphi(x_1). \end{aligned}$$

Отсюда последовательно получаем уравнения для G_1 и g_1, G_2 и g_2, G_3 и g_3:

$$G_1 \quad X_1 = x_1 + a, \qquad\qquad g_1 \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = x_2 + f(x_1), \\ X_3 = x_3 e^{f'(x_1)} + \varphi(x_1); \end{cases}$$

$$G_2 \begin{cases} X_1 = x_1 + a, \\ X_2 = x_2 + f(x_1), \end{cases} \qquad\qquad g_2 \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = x_2, \\ X_3 = x_3 + \varphi(x_1); \end{cases}$$

$$G_3 \begin{cases} X_1 = x_1 + a, \\ X_3 = x_3 e^{f'(x_1)} + \varphi(x_1), \end{cases} \qquad\qquad g_3 \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = x_2 + b, \\ X_3 = x_3. \end{cases}$$

Таким образом, в приведенном примере не существует группы, для которой G была бы голоэдрическим продолжением.

III. В качестве последнего примера рассмотрим группу G, заданную уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_1' &= 0, \\ \omega_2' &= \omega_1\omega_2, \\ \omega_3' &= \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega_4' &= \omega_2\omega_4 + \omega_1\varpi_1, \end{aligned}$$

и обозначим через G_1 группу, указывающую, как G действует на интегралы системы

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

К этой системе следует присоединить уравнения

$$\varpi_1 = \varpi_2 = 0.$$

Но общее преобразование, действующее на формы ϖ_1 и ϖ_2, оставляющее инвариантными формы $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$, не сохраняет форму ω_4'.

Рассмотрим поэтому нормальное продолжение G' группы G. Обозначив формы ϖ_1 и ϖ_2 через ω_5, ω_6, имеем

$$\begin{aligned} \omega_5' &= \omega_2\omega_4 + \omega_2\omega_5 + \omega_1\chi_1, \\ \omega_6' &= \omega_1\omega_4 - \omega_1\omega_5 - \omega_1\omega_6 + \omega_2\chi_2. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю ковариант ω_5', ω_6' по модулю форм $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6$, получаем

$$\chi_1 = \chi_2 = \omega_4 = 0.$$

Поэтому мы заключаем, что тождественное преобразование из группы G_1 сохраняет все переменные, на которых действует группа G, и, следовательно, G есть голоэдрическое продолжение группы G_1.

Положив

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{dx_1}{x_1}, \\ \omega_2 &= \frac{dx_2}{x_1}, \\ \omega_3 &= dx_3 + y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2, \\ \omega_4 &= dx_4 - x_4\frac{dx_2}{x_1} + y_1\,dx_1, \end{aligned}$$

получаем конечные уравнения группы G в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= ax_1, \\ X_2 &= ax_2 + b, \\ X_3 &= x_3 + e^{x_2/x_1} f(x_1) + \varphi(x_2), \\ X_4 &= x_2 + e^{x_2/x_1} f(x_1), \end{aligned}$$

причем первые три из них задают группу G_1.

48. Исследуем теперь природу операций, с помощью которых можно выписать все вполне интегрируемые системы вида (25). Если группа G транзитивна, то коэффициенты h, очевидно, являются (постоянными) *корнями алгебраических уравнений.* Если же группа G интранзитивна и мы предположим, как мы это делали до сих пор, что дифференциалы всех инвариантов группы G обращаются в нуль в силу уравнений (25), то для вычисления ковариантов левых частей этих уравнений можно *пренебречь дифференциалами* переменных h; следовательно, и в этом случае коэффициенты h являются *корнями алгебраических уравнений.*

Если мы будем искать группу G_1, для которой G служит голоэдрическим продолжением, не требуя, чтобы все инварианты группы G были функциями переменных, на которых действует G_1, то достаточно рассмотреть группу $\overline{G}_1$, получаемую присоединением к конечным уравнениям группы G_1 уравнений действия тождественного преобразования на инвариантах группы G. Если такая группа $\overline{G}_1$ найдена, то возникает вопрос о ее *несущественных* инвариантах. Этой проблемой мы займемся в дальнейшем.

Если конечные уравнения группы G известны, то для вывода конечных уравнений группы G_1 достаточно проинтегрировать систему (25). Если известны инфинитезимальные преобразования группы G, то, согласно замечанию Энгеля, инфинитезимальные преобразования группы G_1 можно выписать без интегрирования, воспользовавшись главными интегралами системы (25).

49. Найдем, *в каком случае группа G_1 задается уравнениями первого порядка.* Предположим, что система

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0$$

вполне интегрируема, $x_1, \ldots, x_s$ — ее интегралы, и что все инварианты группы G являются функциями этих переменных. Для того, чтобы группа G_1, описывающая действие группы G на переменных $x_1, \ldots, x_s$, задавалась уравнениями первого порядка, необходимо, чтобы коварианты $\omega'_1, \ldots, \omega'_s$ можно было представить в виде

$$\omega'_k = \sum_{(ij)}^{1,\ldots,s} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_i^{1,\ldots,s} \sum_\rho^{1,\ldots,q} \alpha_{i\rho k}\omega_i\theta_\rho \qquad (k = 1, \ldots, s), \tag{41}$$

где коэффициенты c_{ijk} и $\alpha_{i\rho k}$ зависят лишь от h инвариантов группы G, набор $\alpha_{i\rho k}$ образует *инволютивную* систему, а через θ_ρ обозначены q линейных комбинаций форм $\omega_1, \ldots, \omega_r$, $\varpi_1, \ldots, \varpi_p$, которые линейно независимы относительно $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_r$, $\varpi_1, \ldots, \varpi_p$.

С набором из s форм $\omega_1, \ldots, \omega_s$ связаны две группы:

1° Группа G_1, описывающая действие группы G на переменных $x_1, \ldots, x_s$.

2° Группа $\overline{G}_1$, состоящая из преобразований, сохраняющих все s данные пфаффовы формы.

Определяющие уравнения этой второй группы имеют первый порядок; она, конечно, содержит группу G_1, и нам нужно выяснить, в каких случаях эти две группы совпадают: это и есть условие того, что определяющие уравнения группы G_1 имеют первый порядок.

Можно предполагать, заменив при необходимости группу G ее нормальным продолжением G', что формы θ_ρ выражаются через формы $\omega_1, \ldots, \omega_r$ и, кроме того, что

$$\theta_\rho = \omega_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, q).$$

Система

$$\omega_1 = \ldots = \omega_s = \omega_{s+1} = \ldots = \omega_{s+q} = 0$$

вполне интегрируема; пусть

$$x_1, \ldots, x_s; \quad x_{s+1}, \ldots, x_{s+q}$$

— ее интегралы. Зафиксируем значения остальных переменных в рассматриваемых $s+q$ пфаффовых формах и обозначим через $\overline{\omega}_k$ образы форм ω_k при такой подстановке. Тогда переход от форм $\overline{\omega}_k$ к формам ω_k осуществляется линейным преобразованием, причем все такие преобразования образуют группу γ, инфинитезимальные преобразования которой определяются $s+q$ ковариантами $\omega'_1, \ldots, \omega'_{s+q}$ (п. 38).

Эта группа описывает действие группы G_1 на формах $\omega_1, \ldots, \omega_{s+q}$. С другой стороны, действие группы $\overline{G}_1$ на этих формах описывается группой $\overline{\gamma}$, определяемой коэффициентами уравнения (41). Это группа линейных преобразований, присоединенная к нормальному продолжению $\overline{G}_1'$ группы $\overline{G}_1$. Группа $\overline{\gamma}$ содержит группу γ; они должны совпадать, если совпадают группы $\overline{G}_1$ и G_1.

Итак, *первое необходимое условие того, чтобы группы* $\overline{G}_1$ *и* G_1 *совпадали,* состоит в том, что *размерности групп линейных преобразований* γ *и* $\overline{\gamma}$ *должны совпадать.*

Если это условие выполняется, то формы $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_{s+q}$ получаются из форм $\overline{\omega}_{s+1}, \ldots, \overline{\omega}_{s+q}$ линейными преобразованиями, которые суть в точности преобразования перехода от группы $\overline{G}_1$ к ее нормальному продолжению $\overline{G}_1'$. Следовательно, группу преобразований, сохраняющих $s+q$ пфаффовых форм $\omega_1, \ldots, \omega_{s+q}$, можно рассматривать как нормальное продолжение $\overline{G}_1'$ группы $\overline{G}_1$. Если группа G_1' описывает действие группы G на переменных $x_1, \ldots, x_{s+q}$, то мы вновь приходим к утверждению о совпадении групп $\overline{G}_1'$ и G_1'. Каждой из этих новых групп вновь соответствует группа линейных преобразований $\overline{\gamma}'$ и γ'. Размерность группы $\overline{\gamma}'$ не должна превосходить размерности группы γ'. Если это так, то мы вновь получаем две группы G_1'' и $\overline{G}_1''$, первая из которых является нормальным продолжением группы $\overline{G}_1'$; обе эти группы сохраняют некоторый набор пфаффовых форм, образованный линейными комбинациями форм, определяющих группу G или одно из ее последовательных нормальных продолжений.

Продолжив это построение шаг за шагом, мы неизбежно придем, если только последовательные пары групп линейных преобразований $\gamma^{(\alpha)}$ и $\overline{\gamma}^{(\alpha)}$ не окажутся различными, к ситуации, когда два нормальных продолжения $\overline{G}_1^{(\alpha)}$ и $\overline{G}_1^{(\alpha+1)}$ группы $\overline{G}_1$ обладают следующим свойством: из $s+q+\ldots+q^{(\alpha)}$ пфаффовых форм, инвариантных относительно группы G' (нормального продолжения группы G) нельзя построить более, чем $s+q+\ldots+q^{(\alpha-1)}$ форм (а именно, форм, инвариантных относительно $\overline{G}_1^{(\alpha)}$), которые сохраняются группой $\overline{G}_1^{(\alpha+1)}$. Предположим, что среди линейных комбинаций форм $\omega_1, \ldots, \omega_r$ в точности σ — независимы; пусть это будут формы

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_\sigma \qquad (\sigma \leqslant r).$$

Тогда очевидно, что коварианты $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_\sigma'$ зависят только от ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_\sigma$ и тех из форм $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+p}$, которые не меняют группу $\overline{G}_1^{(\alpha)}$.

Предположим сначала, что $\sigma = r$. Тогда нетрудно видеть, что $\overline{G}_1$ тождественно совпадает с G_1. Действительно, рассмотрим произвольное преобразование из $\overline{G}_1$; ему однозначно соответствует элемент из нормального продолжения $\overline{G}_1^{(\alpha)}$. Это преобразование сохраняет формы $\omega_1, \ldots, \omega_r$ и, поскольку оно преобразует переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, принадлежит G. Поэтому $\overline{G}_1$ описывает действие группы G на интегралах системы

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0,$$

и, как следствие, $\overline{G}_1$ совпадает с G_1.

Если теперь $\sigma \leqslant r$, то рассуждения п. 45 без труда показывают, что, при сделанных на группы $\overline{G}_1^{(\alpha)}$ и $G_1^{(\alpha+1)}$ предположениях, группа G не является голоэдрическим продолжением группы G_1, по крайней мере, если некоторая система коэффициентов, входящая в выражения для $\omega'_{\sigma+1}, \ldots, \omega'_r$, инволютивна. В противном случае мы заменяем в рассуждениях группу G группами G', G'' и т. д. до тех пор, пока не решим, что G является голоэдрическим продолжением группы G_1.

Во всех случаях предыдущее рассуждение доказывает следующую теорему.

Если бесконечномерная группа G, заданная уравнениями первого порядка, является голоэдрическим продолжением некоторой группы G_1, которая также задается уравнениями первого порядка и сохраняет все инварианты группы G, то, обратно, одно из нормальных продолжений группы G_1 получается голоэдрическим продолжением группы G.

Нахождение всех групп, голоэдрически изоморфных данной

50. Пусть G — бесконечномерная группа, заданная уравнениями первого порядка, и пусть $\mathcal{G}$ — произвольная группа, голоэдрически изоморфная G. Согласно определению (п. 19), у групп G и $\mathcal{G}$ существуют подобные голоэдрические продолжения. Другими словами, после подходящей замены переменных, группы G и $\mathcal{G}$ имеют одно и то же голоэдрическое продолжение G_1, которое также можно считать (при необходимости, после продолжения) заданным уравнениями первого порядка.

Если группа G сохраняет инварианты группы G_1, то из последней теоремы вытекает, что одно из нормальных продолжений группы G является голоэдрическим продолжением группы G_1 и, следовательно, группы $\mathcal{G}$. Но может оказаться, что некоторые инварианты группы G_1 не сохраняются группой G, так как они не являются функциями переменных, преобразуемых группой G. В этом случае достаточно заменить группу G группой $\overline{G}$, получаемой присоединением к конечным уравнениям группы G уравнений действия тождественного преобразования на инвариантах группы G_1. Тогда, как и выше, мы заключаем, что одно из нормальных продолжений группы $\overline{G}$ является голоэдрическим продолжением группы $\mathcal{G}$.

Другими словами, *чтобы получить все группы $\mathcal{G}$, голоэдрически изоморфные группе G, нужно рассмотреть различные нормальные продолжения $G^{(\alpha)}$ группы G. К каждому из этих продолжений нужно добавить новые тождественно преобразуемые переменные, получив таким образом группу $\overline{G}^{(\alpha)}$. Затем следует найти все группы $\mathcal{G}$, для которых $\overline{G}^{(\alpha)}$ является голоэдрическим продолжением.*

51. Предположим, чтобы упростить обозначения, что $G^{(\alpha)}$ — это сама группа G. Пусть она действует на переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

и $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$ — все ее инварианты. Обозначим через

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$$

новые переменные, преобразуемые группой $\overline{G}$ тождественно. Найдем сначала группы $\mathcal{G}$, для которых все инварианты группы $\overline{G}$ также являются инвариантами. Эту задачу мы уже решили. Такая группа $\mathcal{G}$ действует на переменных x, ξ и на некотором наборе функций от x и ξ, заданных системой уравнений

$$\begin{cases} \overline{\omega}_1 \equiv \omega_1 - \alpha_{11}\omega s + 1 - \ldots - \alpha_{1,r-s-h}\omega_{r-h} = 0, \\ \overline{\omega}_2 \equiv \omega_2 - \alpha_{21}\omega_{s+1} - \ldots - \alpha_{2,r-s-h}\omega_{r-h} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{\omega}_s \equiv \omega_s - \alpha_{s1}\omega_{s+1} - \ldots - -\alpha_{s,r-s-h}\omega_{r-h} = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Эта система вполне интегрируема, если считать переменные $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$ и ξ параметрами; коэффициенты α_{ki} тогда оказываются функциями параметров. Мы предположили для простоты, что формы $\omega_{r-h+1}, \ldots, \omega_r$ являются дифференциалами переменных $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$.

Условие полной интегрируемости системы (42) переписывается, как мы показали, в виде набора *алгебраических* соотношений на α_{ki} и на структурные коэффициенты группы G. Эти алгебраические соотношения позволяют выразить коэффициенты α_{ki} в виде функций от инвариантов $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$ группы G и от некоторого набора q параметров u, принимающих произвольные значения. В качестве этих параметров можно взять некоторые функции инвариантов группы G и переменных ξ. Или, что еще проще, эти новые параметры u можно считать новыми переменными, инвариантными относительно $\mathcal{G}$, причем не обязательно независимыми; т. е. можно предполагать, что u и $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$ связаны какими-то независимыми соотношениями. Если обозначить через $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_s$ интегралы уравнений (42), то уравнения группы $\mathcal{G}$ примут вид

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = f^k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s, x_{r-h+1} \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{X}_s = f_s(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s, x_{r-h+1}, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_q), \\ X_{r-h+1} = x_{r-h+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_r = x_r, \\ U_1 = u_1, \\ \ldots\ldots, \\ U_q = u_q, \end{cases} \tag{43}$$

куда при необходимости следует добавить уравнения действия тождественного преобразования на новых переменных, не зависящих от предыдущих.

52. Предположим теперь, что $\overline{G}$ — голоэдрическое продолжение группы $\mathcal{G}$, но не все инварианты группы $\overline{G}$ являются инвариантами и группы $\mathcal{G}$. Тогда, присоединив к уравнениям группы $\mathcal{G}$ уравнения действия тождественного преобразования на инвариантах группы $\overline{G}$, мы получим группу $\overline{\mathcal{G}}$, природу которой мы и собираемся выяснить. Задача состоит в следующем. Можно ли найти $s+h'$ независимых функций от $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s, x_{r-h+1}, \ldots, x_r$ и ξ, из которых s независимы как функции от $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$, такие что группы $\overline{\mathcal{G}}$ действует на этих функциях? Эти $s+h'$ функций задаются системой уравнений вида

$$\begin{cases} \overline{\omega}_1 + \beta_{11}\omega_{r-h+1} + \ldots + \beta_{1h}\omega_r + \gamma_{11}\, d\xi_1 + \ldots + \gamma_{1l}\, d\xi_l = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{\omega}_s + \beta_{s1}\omega_{r-h+1} + \ldots + \beta_{sh}\omega_r + \gamma_{s1}\, d\xi_1 + \ldots + \gamma_{sl} d\xi_l = 0, \\ \beta_{s+1,1}\omega_{r-h+1} + \ldots + \beta_{s+1,h}\omega_r + \gamma_{s+1,1}\, d\xi_1 + \ldots + \gamma_{s+1,l}\, d\xi_l = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_{s+h',1}\omega_{r-h+1} + \ldots + \beta_{s+h',h}\omega_r + \gamma_{s+h',1}\, d\xi_1 + \ldots + \gamma_{s+h',l}\, d\xi_l = 0, \end{cases} \tag{44}$$

где коэффициенты β и γ являются функциями инвариантов группы $\overline{\mathcal{G}}$. Поэтому коварианты $\overline{\omega}'_k$ имеют вид

$$\overline{\omega}'_k = \sum_{\rho} \left(\sum_{i}^{1,\dots,s} A_{i\rho k}\overline{\omega}_i + \sum_{j}^{1,\dots,h} B_{j\rho k}\omega_{r-h+j} + \sum_{\lambda}^{1,\dots,q} C_{\lambda\rho k}\, du_\lambda \right)\theta^\rho + \dots \tag{45}$$
$$k = 1,\dots,s, \quad j = 1,\dots,h, \quad \lambda = 1,\dots,q,$$

где многоточием обозначены билинейные формы от $\overline{\omega}_1,\dots,\overline{\omega}_s,\omega_{r-h+1},\dots,$ $\omega_r, du_1,\dots,du_q$; формы θ_ρ представляют собой линейные комбинации форм ϖ и $r-s-h$ форм $\omega_{s+1},\dots,\omega_{r-h}$; коэффициенты A, B, C зависят только от u и инвариантов группы G. Коварианты левых частей s первых уравнений в (44) обращаются в нуль по модулю самих уравнений (44), поэтому, *в частности*, если заменить формы $\overline{\omega}'_k$ выражениями (45) для них, то равенства

$$\sum_{i}^{1,\dots,s} A_{i\rho k}\overline{\omega}_i + \sum_{j}^{1,\dots,h} B_{j\rho k}\omega_{r-h+j} + \sum_{\lambda}^{1,\dots,q} C_{\lambda\rho k}\, du_\lambda = 0 \tag{46}$$

должны выполняться по модулю уравнений (44).

Другими словами, *уравнения* (46) *должны содержаться в системе* (44).

Сама система (46) *вполне интегрируема*; это доказывается тем же способом, что и в п. 27 для системы (30), частным случаем которой (46) и является. Поэтому функции от $x_{r+h-1},\dots,x_r$, $\xi_1,\dots,\xi_l$, т. е. от $x_{r-h+1},\dots,x_r$, $u_1,\dots,u_r$, являющиеся интегралами системы (46), с необходимостью входят в $s+h'$ функций, на которых действует искомая группа $\mathcal{G}$. Это *существенные инварианты* группы $\mathcal{G}$. Они задаются уравнениями, получаемыми исключением форм $\overline{\omega}_1,\dots,\overline{\omega}_s$ из системы (46).

Других существенных инвариантов у группы $\overline{\mathcal{G}}$ нет; это доказывается тем же способом, что и в п. 28. Так же доказывается, что зафиксировав произвольные значения несущественных инвариантов (или тех, которые не сохраняются группой $\mathcal{G}$), мы получим группу, *подобную* группе $\overline{\mathcal{G}}$.

53. Вот как можно действовать на практике. Если система (46) построена, то ее всегда можно привести к следующему каноническому виду: сначала идут уравнения, разрешенные относительно некоторых из форм $\omega_{r-h+1},\dots,\omega_r$, например, относительно форм $\omega_{r-h+1},\dots,\omega_{r-h+m}$, и содержащие в правых частях формы $\omega_{r-h+m+1},\dots,\omega_r$; затем идут уравнения, разрешенные относительно n дифференциалов du, скажем, относительно, $du_1, du_2,\dots,du_n$ и содержащие в правых частях формы $du_{n+1},\dots,du_q$, $\omega_{r-h+m+1},\dots,\omega_r$; и, наконец, уравнения, разрешенные относительно σ

форм $\overline{\omega}$, скажем, относительно $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_\sigma$, содержащие в правых частях формы $\overline{\omega}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{\omega}_s, du_{n+1}, \ldots, du_q, \omega_{r-h+m+1}, \ldots, \omega_r$.

После этого дадим переменным $x_{r-h+m+1}, \ldots, x_r, u_{n+1}, \ldots, u_q$ произвольные числовые значения. Уравнения будут зависеть от существенных инвариантов $x_{r-h+1}, \ldots, x_{r-h+m}$; переменные $u_1, u_2, \ldots, u_n$ тоже можно считать существенными инвариантами, однако часть из них можно заменить *произвольными* функциями остальных инвариантов и переменных $x_{r-h+1}, \ldots, x_{r-h+m}$. Таким образом, мы получаем бесконечное семейство групп $\mathcal{G}$, все инварианты которых являются существенными, а число этих инвариантов меняется от m до $m+n$.

При некоторых соотношениях между u и инвариантами группы G целые числа m, n могут уменьшиться. В таком случае мы выражаем переменные u через меньший набор переменных v и проводим все рассуждения, заменяя u на v.

54. Применим описанный подход к конечномерной просто транзитивной группе G в пространстве трех переменных¹), заданной уравнениями

$$\omega_1' = \omega_1\omega_2,$$
$$\omega_2' = \omega_1\omega_3,$$
$$\omega_3' = \omega_2\omega_3.$$

Найдем сначала группы $\mathcal{G}$, для которых $s=1$. Система (42) имеет вид

$$\overline{\omega}_1 = \omega_1 + A\omega_2 + B\omega_3 = 0.$$

Вычислив ковариант $\overline{\omega}_1'$, находим

$$\overline{\omega}_1' = \overline{\omega}_1(\omega_2 + A\omega_3) + (2B - A^2)\omega_2\omega_3 + dA\omega_2 + dB\omega_3.$$

Для полной интегрируемости системы необходимо, чтобы

$$2B = A^2;$$

положим

$$A = u, \qquad B = \frac{1}{2}u^2;$$

тогда система (46) принимает вид

$$\overline{\omega}_1 + du = u(\overline{\omega}_1 + du) = 0$$

---

¹) На современном языке можно сказать, что группа G транзитивно действует диффеоморфизмами на $\mathbb{R}^3$. — *Прим. ред.*

и не содержит уравнений лишь на du. Поэтому инвариант u не является существенным и можно положить $u = 0$. Получим единственную группу $\mathcal{G}$, действующую транзитивно в пространстве одной переменной, заданную уравнением

$$\omega_1 = 0.$$

При $s = 2$ система (42) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= \omega_1 + A\omega_3 = 0, \\ \overline{\omega}_2 &= \omega_2 + B\omega_3 = 0 \end{aligned}$$

и она по-прежнему вполне интегрируема. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{\omega}'_1 &= \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 + (dA - B\overline{\omega}_1 + 2A\overline{\omega}_2)\omega_3, \\ \overline{\omega}'_1 &= (dB + \overline{\omega}_1 + B\overline{\omega}_2)\omega_3. \end{aligned}$$

Здесь нужно выделить два случая, приводящих к различным системам (46).

a. $B^2 + 2A \neq 0$. Тогда система (46) состоит из двух уравнений, не накладывающих никаких соотношений на dA и dB. Поэтому можно положить, например, $A = 0$ и $B = 1$; получим систему

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

соответствующую группе $\mathcal{G}_2$.

b. $B^2 + 2A = 0$. Тогда система (46) сводится, как легко видеть, к единственному уравнению, и у нее больше нет существенных инвариантов. Можно положить $A = 0$, $B = 0$, получив при этом систему

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,$$

соответствующую группе $\mathcal{G}'_2$.

Таким образом, всякая простая трехмерная группа, действующая на своих существенных инвариантах, транзитивна и подобна одной из четырех групп: группе $\mathcal{G}$ в пространстве одной переменной, группам $\mathcal{G}_2$ или $\mathcal{G}'_2$ в пространстве двух переменных или группе G в пространстве трех переменных.

Если положить

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x_2\,dx_1, \\ \omega_2 &= -\frac{dx_2}{x_1} + x_3\,dx_1, \\ \omega_3 &= -\frac{dx_3}{x_2} + \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{x_2}dx_1; \end{aligned}$$

то уравнения группы G примут вид

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{ax_1+b}{cx_1+d}, \\ X_2 &= x_2\frac{(cx_1+d)^2}{ad-bc}, \\ X_3 &= x_3\frac{(cx_1+d)^2}{ad-bc} + 2c\frac{cx_1+d}{ad-bc}. \end{aligned}$$

Группа $\mathcal{G}$ задается первым из этих уравнений, группа $\mathcal{G}_2$ — первым и третьим, группа $\mathcal{G}'_2$ — первым и вторым.

55. Рассмотрим бесконечномерную интранзитивную группу G, заданную уравнениями

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\omega_2, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_3 &= \omega_1\overline{\omega}_2 + \omega_2\omega_4, \\ \omega'_4 &= 0, \end{aligned}$$

где ω_5 является дифференциалом переменной x. Определяющие уравнения группы имеют первый порядок, и x служит ее существенным инвариантом. Найдем среди групп $\mathcal{G}$, отвечающих $s = 2$, те, для которых система (42) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &\equiv \omega_1 = 0, \\ \overline{\omega}_2 &\equiv \omega_3 + A\omega_2 = 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= \overline{\omega}_1\omega_2, \\ \overline{\omega}'_2 &= \overline{\omega}_1(\omega_4 + A\varpi_1) + \omega_2(\omega_4 - dA). \end{aligned}$$

Здесь A можно выбрать произвольно, $A = u$. Тогда система (46) имеет вид

$$\omega_1 = 0, \qquad du - \omega_5 = 0.$$

Поэтому инварианту x группы G можно дать произвольное значение, скажем, $x = 0$, и считать u либо новой *переменной* (получив при этом интранзитивную группу $\mathcal{G}$ в пространстве трех переменных), либо произвольной *константой*, что дает транзитивную группу $\mathcal{G}$ в пространстве двух переменных.

Положив

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x_2\,dx_1,\\
\omega_2 &= -\frac{dx_2}{x_2} + x_2 y_1\,dx_1,\\
\omega_3 &= dx_3 - \ln x_2\,dx + x_4\,dx_1,\\
\omega_4 &= -\frac{dx_4}{x_2} + y_1\,dx + y_2\,dx_1,
\end{aligned}$$

получим уравнения группы G в виде

$$\begin{aligned}
X_1 &= f(x_1),\\
X_2 &= \frac{x_2}{f'(x_1)},\\
X_3 &= x_3 - x\ln f'(x_1) + \varphi(x_1),\\
X_4 &= \frac{x_4 - \varphi'(x_1)}{f'(x_1)} + x\frac{f''(x_1)}{(f'(x_1))^2}.
\end{aligned}$$

Интегралы вполне интегрируемой системы (42) тогда имеют вид $z_1 = x_1$ и $z_2 = x_3 - (u + x)\log x_2$. В первом случае мы полагаем $x = 0$ и принимаем u за инвариантную переменную; уравнения группы G запишутся в виде

$$\begin{cases} Z_1 = f(z_1),\\ Z_2 = z_2 + \varphi(z_1) + u\ln f'(z_1). \end{cases} \tag{47}$$

Во втором случае нужно в предыдущих уравнениях считать u константой. На самом же деле, если выбрать два различных значения этой постоянной, то получатся две подобные группы $\mathcal{G}$, однако *преобразование подобия действует на произвольных элементах.*

Предыдущий пример показывает, что группа, определяющие уравнения которой имеют первый порядок, может иметь существенные инварианты и быть, следовательно, голоэдрически изоморфной транзитивной группе.

56. Итак, предложенный метод позволяет с помощью *алгебраических* операций определить *типы* всех групп $\mathcal{G}$, голоэдрически изоморфных данной группе G и сводимых к своим существенным инвариантам. Две группы $\mathcal{G}$ принадлежат одному типу, если можно перейти от одной к другой заменой переменных, не переставляя элементы группы¹). Если конечные уравнения

---

[1] В действительности эта замена переменных не просто отображает множество преобразований одной группы в множество преобразований другой, но и сопоставляет каждому преобразованию одной группы то же самое преобразование другой.

группы G известны, то для вывода конечных уравнений группы $\mathcal{G}$ необходимо проинтегрировать систему (42). Если известны инфинитезимальные преобразования группы G, то замечание Энгеля о конечномерных группах позволяет выписать инфинитезимальные преобразования группы $\mathcal{G}$ *без интегрирования.*

57. Мы собираемся применить описанный подход к нескольким бесконечномерным группам.

Группа преобразований пространства одной переменной. Если G — группа всех преобразований пространства одной переменной, то структурные уравнения этой группы и ее последовательных нормальных продолжений даются, как нетрудно показать, следующими формулами:

$$\left\{\begin{aligned}
&\omega_1' = \omega_1\omega_2,\\
&\omega_2' = \omega_1\omega_3,\\
&\omega_3' = \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3,\\
&\omega_4' = \omega_1\omega_5 + 2\omega_2\omega_4,\\
&\omega_5' = \omega_1\omega_6 + 3\omega_2\omega_5 + 2\omega_3\omega_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\omega_n' = \omega_1\omega_{n+1} + (n-2)\omega_2\omega_n + \frac{(n-1)(n-4)}{1\cdot 2}\omega_3\omega_{n-1} +\\
&\qquad + \frac{(n-1)(n-2)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega_4\omega_{n-2} + \ldots +\\
&\qquad + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-2p)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)\cdot p}\omega_{p+1}\omega_{n-p+1} + \ldots\,,
\end{aligned}\right. \tag{48}$$

где целое число p в последней формуле пробегает все значения, меньшие $n/2$.

Если $G^{(n)}$ — голоэдрическое продолжение группы $\mathcal{G}$, а $G^{(n-1)}$ — нет, то вполне интегрируемая система, описывающая переменные, преобразуемые группой $\mathcal{G}$, содержит уравнение, разрешимое относительно формы ω_n; с другой стороны, группа линейных преобразований для этой системы — это присоединенная группа к $G^{(n)}$, которая задается уравнением

$$\overline{\omega}_n = \omega_n + \alpha\omega_1;$$

и, следовательно, группа $\mathcal{G}$ сохраняет форму ω_1, и она голоэдрически изоморфна G.

Поэтому группа $\mathcal{G}$ определяется вполне интегрируемой системой, уравнения которой можно записать в каноническом виде

$$\begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_{\alpha_1} = \sum\limits_{i}^{2,\ldots,\alpha_1-1} A_{1,i}\omega_i, \\ \omega_{\alpha_2} = \sum\limits_{i}^{2,\ldots,\alpha_2-1} A_{2,i}\omega_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_{\alpha_{s-1}} = \sum\limits_{i}^{2,\ldots,\alpha_{s-1}-1} A_{s-1,i}\omega_i \end{cases} \qquad (1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{s-1}). \tag{49}$$

Итак, если положить $\omega_1 = 0$, то коварианты ω'_p выражаются через $\omega_2, \ldots, \omega_p$; поэтому первые два уравнения в (49) образуют вполне интегрируемую систему также, как и три первых уравнения, и т. д. Следовательно, чтобы найти все вполне интегрируемые системы вида (49), достаточно вывести все эти $s-1$ уравнений и присоединить к ним подходящее новое уравнение.

Целые числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ можно найти с помощью следующих рассуждений. Удобно считать, что вес формы ω_i равен $i-2$; тогда сумма весов форм, составляющих слагаемое в выражении для ω'_i, равна $i-2$. Рассмотрим в ω'_{α_h} члены, не содержащие ни одной из форм $\omega_1, \omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_h}$. Так как мы должны получить

$$\omega'_{\alpha_h} = \sum A_{hi}\omega'_i,$$

то, с учетом уравнений (49), эти члены в последнем соотношении имеют наиболее высокий вес при замене $\omega_1, \omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_h}$ их значениями. Поэтому их не должно быть. Другими словами, *формы* ω'_{α_h} *тождественно обращаются в нуль вместе с формами* $\omega_1, \omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_h}$ при любых h. В частности, число членов, входящих в ω'_{α_h}, должно быть не меньше $h+1$; это число равно $\alpha_h/2$ или $(\alpha_h+1)/2$ в зависимости от четности или нечетности α_h; поэтому

$$\alpha_h \leqslant 2(h+1).$$

Таким образом, *для всякой транзитивной группы на s переменных или интранзитивной группы на $s+l$ переменных, l из которых являются существенными инвариантами, изоморфной группе G, $(2s-1)$-е нормальное продолжение группы G является голоэдрическим продолжением.*

Если целые числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ заданы, то коэффициенты A_{ki} следует выбрать таким образом, чтобы система (49) была вполне интегрируемой, сведя их, при необходимости, к конкретным значениям способом, описанным в п. 52.

Найдем все наборы целых чисел α для $s = 2, 3$ или 4.

При $s = 2$ есть, очевидно, три возможности:

$$\alpha_1 = 2, 3, 4. \tag{50}$$

При $s = 3$, полагая $\alpha_1 = 2, 3$ или 4, находим затем α_2 $(\alpha_2 \leqslant 6)$. В результате получаем шесть возможностей:

α_1	2	2	3	3	3	4
α_2	3	4	4	5	6	5

(51)

При $s = 4$ таблица имеет вид

α_1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4
α_2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	6	5
α_3	4	5	6	5	5	6	7	8	6	7	8	6

(52)

Система (49) в трех случаях при $s = 2$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 + A\omega_2 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_4 + B\omega_2 = 0,
\end{aligned}$$

и мы без труда заключаем, что можно положить $A = B = 0$, откуда и получаются три транзитивные группы в пространстве трех переменных.

В случае $s = 3$ получаются системы

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 + A\omega_3 = 0 \qquad (A = 0 \text{ или } 1),\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_6 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_4 = \omega_5 = 0,
\end{aligned}$$

приводящие к семи транзитивным группам в пространстве трех переменных.

И, наконец, в случае $s = 4$ системы имеют вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_5 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_6 + A\omega_5 = 0 \qquad (A = 0 \text{ или } 1),\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 + A\omega_3 = \omega_5 = 0 \qquad (A = 0 \text{ или } 1),\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_6 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_7 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_8 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_6 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_7 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \omega_6 = \omega_8 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 0,
\end{aligned}$$

что приводит к четырнадцати транзитивным группам в пространстве четырех переменных.

Ограничимся тем, что выпишем конечные уравнения семи транзитивных групп в пространстве трех переменных. Можно положить

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x_2\,dx_1,\\
\omega_2 &= -\frac{dx_2}{x_2} + x_3\,dx_1,\\
\omega_3 &= -\frac{dx_3}{x_2} + x_4\,dx_1,\\
\omega_4 &= -\frac{dx_4}{x_2} + \frac{x_3}{x_2^2}dx_3 + \frac{x_4}{x_2^2}dx_2 + x_5\,dx_1,\\
\omega_5 &= -\frac{dx_5}{x_2} + \frac{2x_3}{x_2^2}dx_4 - \frac{2x_3^2}{x_2^3}dx_3 +\\
&\quad + 2\frac{x_3x_4 - x_2x_5}{x_2^3}dx_2 + x_6\,dx_1,\\
\omega_6 &= -\frac{dx_6}{x_2} + \frac{3x_3}{x_2^2}dx_5 + 2\frac{x_2x_4 - 3x_3^2}{x_2^3}dx_4 +\\
&\quad + 2\frac{3x_3^3 - x_2x_3x_4 - x_2^2x_5}{x_2^4}dx_3 +\\
&\quad + \frac{6x_2x_3x_5 - 6x_3^2x_4 - 3x_2^2x_6 + 2x_2x_4^2}{x_2^4}dx_2 + x_7\,dx_1.
\end{aligned}$$

Тогда эти семь групп преобразуют переменные:

$$\begin{array}{rlll}
1^\circ & x = x_1, & y = x_2, & z = x_3; \\
2^\circ \text{ и } 3^\circ & x = x_1, & y = x_2, & z = 2x_2(x_4 + Ax_3) - x_3^2, \quad (A = 0 \text{ или } 1); \\
4^\circ & x = x_1, & y = x_3, & z = x_2x_4; \\
5^\circ & x = x_1, & y = x_3, & z = x_2(x_3x_4 - \frac{1}{2}x_2x_5); \\
6^\circ & x = x_1, & y = x_3, & z = x_2^3x_6 - x_2^2\bigl(x_4^2 + 3x_3x_5\bigr) + 6x_2x_3^2x_4; \\
7^\circ & x = x_1, & y = 2x_2x_4 - x_3^2, & z = x_2^2x_5.
\end{array}$$

Полагая

$$X^1 = f(x^1),$$

получаем конечные уравнения групп в виде

$$(1^\circ) \qquad X = f(x), \qquad Y = \frac{y}{f'(x)},$$
$$Z = \frac{z}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{(f'(x))^2};$$

$$(2^\circ \text{ и } 3^\circ) \quad X = f(x), \qquad Y = \frac{y}{f'(x)},$$
$$Z = \frac{z}{(f'(x))^2} - 2Ay\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} + 3\frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^4} - 2\frac{f'''(x)}{(f'(x))^3} \quad (A = 0 \text{ или } 1);$$

$$(4^\circ) \qquad X = f(x), \qquad Y = \frac{y}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{(f'(x))^2},$$
$$Z = \frac{z}{(f'(x))^2} - y\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} + 2\frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^4} - \frac{f'''(x)}{(f'(x))^3};$$

$$(5^\circ) \qquad X = f(x), \qquad Y = \frac{y}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{(f'(x))^2},$$
$$Z = \frac{z}{(f'(x))^3} - \frac{3}{2}y^2\frac{f''(x)}{(f'(x))^4} + y\left[3\frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^5} - \frac{f'''(x)}{(f'(x))^4}\right] +$$
$$+ \frac{(f''(x))^3}{(f'(x))^6} - 2\frac{f''(x)f'''(x)}{(f'(x))^5} + \frac{1}{2}\frac{f^{(4)}(x)}{(f'(x))^4};$$

$$
\begin{aligned}
(6^\circ)\qquad & X = f(x), \qquad Y = \frac{y}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{(f'(x))^2},\\
& Z = \frac{z}{(f'(x))^4} - 9y^3\frac{f''(x)}{(f'(x))^5} + y^2\left[24\frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^6} - 5\frac{f'''(x)}{(f'(x))^5}\right] +\\
& \quad + y\left[-8\frac{(f''(x))^3}{(f'(x))^7} - 8\frac{f''(x)f'''(x)}{(f'(x))^6} + 3\frac{f^{(4)}(x)}{(f'(x))^5}\right] +\\
& \quad + 14\frac{(f''(x))^4}{(f'(x))^8} - 20\frac{(f''(x))^2 f'''(x)}{(f'(x))^7} +\\
& \quad + 5\frac{(f'''(x))^2 + f''(x)f^{(4)}(x)}{(f'(x))^6} - \frac{f^{(5)}(x)}{(f'(x))^5};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(7^\circ)\qquad & X = f(x), \qquad Y = \frac{y}{(f'(x))^2} + 3\frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^4} - 2\frac{f'''(x)}{(f'(x))^3},\\
& Z = \frac{z}{(f'(x))^3} - y\frac{f''(x)}{(f'(x))^4} - 6\frac{(f''(x))^3}{(f'(x))^6} + 6\frac{f''(x)f'''(x)}{(f'(x))^5} - \frac{f^{(4)}(x)}{(f'(x))^5}.
\end{aligned}
$$

Три группы преобразований пространства двух переменных задаются, например, первыми двумя уравнениями в группах (1°), (4°) и (7°).

До сих пор нам попадались только группы без существенных инвариантов; для произвольных значений s это уже не так. Например, при $s = 5$ система

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_5 + \omega_6 = \omega_8 + \frac{14}{5}\omega_7 + u\omega_5 = 0$$

задает группу на шести переменных с существенным инвариантом u.

Системы (49) можно свести к системным типам заметив, что формулы (48) не меняются при действии на ω преобразованиями

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\overline{\omega}_1 = a_1\omega_1,\\
&\overline{\omega}_2 = \omega_2 + a_2\omega_1 - \frac{da_1}{a_1},\\
&\overline{\omega}_3 = \frac{1}{a_1}\omega_3 + \frac{a_2}{a_1}\omega_2 + a_3\omega_1 + \frac{da_2}{a_1},\\
&\overline{\omega}_4 = \frac{1}{a_1^2}\omega_4 + \frac{2a_1a_3 - a_2^2}{a_1^2}\omega_2 + a_4\omega_1 -\\
&\qquad - \frac{da_3}{a_1} + \frac{a_2}{a_1^2}da_2 - \frac{a_3}{a_1^2}da_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}
\right.
\tag{53}
$$

где a — произвольные величины. Если речь идет о транзитивных группах, то переменные a можно считать произвольными константами.

Нетрудно показать, что всякая группа $\mathcal{G}$, изоморфная G, определяющие уравнения которой имеют первый порядок, является одним из нормальных продолжений группы G; поэтому для такой группы $\mathcal{G}$ с необходимостью $\sigma_1 = 1$, а все остальные σ равны нулю.

58. *Группы, изоморфные группе*

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f(x). \end{cases} \tag{54}$$

Результаты, получаемые в этом случае, сильно отличаются от предыдущих. Выпишем сначала структурные уравнения группы G и ее последовательных нормальных продолжений. Положив $\omega_1 = dx$, имеем

$$\begin{aligned} &\omega_1' = 0, \\ &\omega_2' = \omega_1\omega_3, \\ &\omega_3' = \omega_1\omega_4, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ &\omega_n' = \omega_1\omega_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{55}$$

Первые $\alpha + 2$ из этих уравнений задают группу $G^{(\alpha)}$.

Как и в предыдущем случае, находим, что всякая вполне интегрируемая система, задающая группу $\mathcal{G}$, голоэдрически изоморфную G, содержит уравнение $\omega_1 = 0$.

Для $s = 2$ система имеет вид

$$\begin{aligned} &\varpi_1 \equiv \omega_1 = 0, \\ &\varpi_2 \equiv \omega_n + A_1\omega_{n-1} + A_2\omega_{n-2} + \ldots + A_{n-2}\omega_2 = 0 \end{aligned} \tag{56}$$

и

$$\begin{aligned} &\varpi_1' = 0, \\ &\varpi_2' = \varpi_1(\omega_{n+1} + A_1\omega_n + \ldots + A_{n-2}\omega_3) + dA_1\omega_{n-1} + \ldots + dA_{n-2}\omega - 2; \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ — существенные инварианты. Если все эти коэффициенты являются константами (или даже функциями от x), то группа $\mathcal{G}$ не изоморфна G голоэдрически, за исключением случая $n = 2$, когда она совпадает с самой группой G. Если коэффициенты $A_1, \ldots, A_{n-2}$ зависят от других инвариантов группы $\mathcal{G}$, отличных от x, то к системе (56) следует присоединить уравнение

$$A'_1\omega_{n-1} + \ldots + A'_{n-2}\omega_2 = 0,$$

а также уравнение

$$A''_1\omega_{n-1} + \ldots + A_{n-2}\omega_2 = 0,$$

и так далее, получив в конце концов уравнение $\omega_2 = 0$. *Функции* $A_1, \ldots, A_{n-2}$ *при этом должны не удовлетворять некоторым дифференциальным уравнениям.*

Например, при $n = 3$ мы полагаем $A_1 = u$. При $n = 4$, если A_1 зависит не только от x, то мы можем положить $A_1 = u$, тогда A''_2 не может равняться нулю; если же, наоборот, A_1 зависит только от x, то мы полагаем $A_1 = u$, и так далее.

Теперь мы видим, что семейство групп, действующих в пространстве трех переменных, имеющих два существенных инварианта и изоморфных G, бесконечно. Кроме того, не существует нормального продолжения $G^{(\alpha)}$, которое было бы голоэдрическим продолжением для всех этих групп.

Аналогичные рассуждения применимы в случаях $s = 3, 4, \ldots$.

В качестве частного случая групп $\mathcal{G}$, действующих в пространстве трех переменных без существенных инвариантов, получаем следующие группы:

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f(x), \\ Z = z + f^{(p)}(x) + m_1 f^{(p-1)}(x) + \ldots + m_{p-1} f'(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f'(x) + z f(x), \\ Z = z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f''(x) + z f'(x) + A(z) f(x), \qquad [A''(z) \neq 0] \\ Z = z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f''(x) + m f'(x) + z f(x), \\ Z = z; \end{cases}$$

. . . . , где через m обозначены константы или функции от x, $A(z)$ — некоторая конкретная функция от x и z.

59. *Группы, изоморфные группе*

$$\begin{cases} X = f(x), \\ Y = \varphi(y). \end{cases} \tag{57}$$

Определяющие уравнения указанной группы G имеют первый порядок. Ее структурные уравнения и структурные уравнения ее продолжений даются формулами

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= \omega^1\omega^2, \\
\overline{\omega}_1' &= \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2, \\
\omega_2' &= \omega_1\omega_3, \\
\overline{\omega}_2' &= \overline{\omega}_1\overline{\omega}_3, \\
\omega_3' &= \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3, \\
\overline{\omega}_3' &= \overline{\omega}_1\overline{\omega}_4 + \overline{\omega}_2\overline{\omega}_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

Первые $2p+2$ уравнения определяют группу $G^{(p)}$. Группа линейных преобразований, присоединенная к $G^{(p)}$, задается уравнениями

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{p+1} &= \omega_{p+1} + \alpha\omega_1, \\
\overline{\varpi}_{p+1} &= \overline{\omega}_{p+1} + \beta\overline{\omega}_1.
\end{aligned}$$

Если группа $\mathcal{G}$ задается уравнениями, содержащими только формы ω, то она не может быть голоэдрически изоморфна G. Следовательно, определяющие уравнения должны содержать и формы ω, и формы ϖ. Отсюда легко вытекает, что среди них обязательно должно быть два уравнения

$$\omega_1 = \varpi_1 = 0.$$

Как и в случае группы всех преобразований одной переменной, показывается, что вполне интегрируемая система из s уравнений включает только формы $\omega_1, \ldots, \omega_{2s-2}$, $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2s-2}$.

Найдем прежде всего все системы, отвечающие значению $s = 3$. Без труда получаем системы:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \overline{\omega}_1 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \overline{\omega}_1 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_4 = \overline{\omega}_1 = 0,\\
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 + A\omega_2 = 0,
\end{aligned}$$

где через A обозначена произвольная константа или новая переменная, инвариантная относительно $\mathcal{G}$. Сюда можно добавить системы, полученные перестановкой форм ω и ϖ в предыдущих уравнениях, однако они оказываются подобными исходным.

При $s = 4$ получаем, помимо систем, состоящих из p уравнений только на ω и $s - p$ уравнений только на ϖ, следующие системы:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 + A\omega_2 = \overline{\omega}_3 = 0,\\
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 + A\omega_2 = \overline{\omega}_4 = 0,\\
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_3 + \omega_2 = 0,\\
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 - \omega_2 = \overline{\omega}_3 + \omega_3 = 0,\\
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_4 + \omega_2 = 0,\\
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 - \frac{1}{2}\omega_2 = \overline{\omega}_4 + \omega_3 = 0,\\
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 - \omega_2 = \overline{\omega}_4 + \omega_4 = 0,\\
&\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_4 + \overline{\omega}_3 + A\omega_2 = 0,
\end{aligned}$$

где через A обозначены либо произвольные постоянные, либо новые переменные, инвариантные относительно $\mathcal{G}$.

Выписывание конечных уравнений всех этих групп не слишком поучительно. Удовлетворимся конечными уравнениями групп, отвечающих системе

$$\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 + A\omega_2 = 0,$$

которые имеют вид

$$\begin{aligned}
&X = f(x),\\
&Y = \varphi(y),\\
&Z = \frac{z}{f'(x)\,[\varphi'(y)]^A},
\end{aligned}$$

и системе

$$\omega^1 = \overline{\omega}^1 = \overline{\omega}^2 - \omega^2 = \overline{\omega}^3 + \omega^3 = 0,$$

которые имеют вид

$$\begin{aligned}
&X = f(x),\\
&Y = \varphi(y),\\
&Z = z\frac{f'(x)}{\varphi'(y)},\\
&T = \frac{t}{\sqrt{f'(x)\varphi'(y)}} - \sqrt{z}\frac{f''(x)}{f'(x)\sqrt{f'(x)\varphi'(y)}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)\sqrt{f'(x)\varphi'(y)}}.
\end{aligned}$$

Определяющие уравнения первого порядка имеют те группы $\mathcal{G}$, которые сохраняют пфаффовы формы

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p; \quad \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_q,$$

где p и q — произвольные целые числа.

60. *Группы, изоморфные группе*

$$\begin{cases} X = f(x),\\ Y = y[f'(x)]^m + \varphi(x). \end{cases} \tag{58}$$

Как и в предыдущем случае, структурные уравнения группы G и ее нормальных продолжений можно разделить на два класса, первый из которых образован структурными уравнениями группы общих преобразований одной переменной

$$\begin{cases}
\omega_1' = \omega_1\omega_2,\\
\omega_2' = \omega_1\omega_3,\\
\omega_3' = \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3,\\
\omega_4' = \omega_1\omega_5 + 2\omega_2\omega_4,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{cases} \tag{59}$$

а во втором вводятся новые формы ϖ:

$$\begin{cases}
\overline{\omega}_1' = \omega_1\overline{\omega}_2 - m\omega_2\overline{\omega}_1,\\
\overline{\omega}_2' = \omega_1\overline{\omega}_3 + \omega_2\overline{\omega}_2 - m(\omega_2\overline{\omega}_2 + \omega_3\overline{\omega}_1),\\
\overline{\omega}_3' = \omega_1\overline{\omega}_4 + 2\omega_2\overline{\omega}_3 + \omega_3\overline{\omega}_2 - m(\omega_2\overline{\omega}_3 + 2\omega_3\overline{\omega}_2 + \omega_4\overline{\omega}_1),\\
\overline{\omega}_4' = \omega_1\overline{\omega}_5 + 3\omega_2\overline{\omega}_4 + 3\omega_3\overline{\omega}_3 + \omega_4\overline{\omega}_2 -\\
\qquad -m(\omega_2\overline{\omega}_4 + 3\omega_3\overline{\omega}_3 + 3\omega_4\overline{\omega}_2 + \omega_5\overline{\omega}_1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases} \tag{60}$$

Первые уравнения в (59) и (60) соответствуют группе G и, вообще, первые же $p+1$ уравнения в обеих системах определяют группу $G^{(p)}$.

Здесь вполне интегрируемая система, задающая группу $\mathcal{G}$, голоэдрически изоморфную группе G, обязательно содержит уравнение $\omega_1 = 0$. Но она может содержать только уравнения на формы ω, иначе $\mathcal{G}$ будет изоморфна G только мериэдрически. Если рассмотреть все уравнения, связывающие только формы ω, которые можно вывести из системы, то мы получим, очевидно, вполне интегрируемую систему. Остальные уравнения можно разрешить относительно некоторых форм ϖ, причем можно предполагать, что правые части в этих уравнениях зависят только от форм ϖ с меньшим индексом и от ω. Присоединив к уравнениям на ω уравнения на ϖ с индексом, меньшим данного, мы получим, очевидно, вполне интегрируемую систему. Поэтому в наших руках есть инструмент для последовательного определения всех групп $\mathcal{G}$.

Если взять единственное соотношение

$$\omega_1 = 0$$

на формы ω, то к нему можно добавить только соотношение

$$\varpi_1 = 0$$

на формы ϖ, за исключением случаев $m = 0, -1$ или -2, в которых

$$\begin{aligned}
&(m = 0) \qquad && \overline{\omega}_1 + A\omega_2 = 0,\\
&(m = -1) \qquad && \overline{\omega}_1 + A\omega_3 = 0,\\
&(m = -2) \qquad && \overline{\omega}_1 + A\omega_4 = 0.
\end{aligned}$$

Общий случай дает саму группу G, в исключительных случаях получаем

$$m = 0, \qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = y + \varphi(x) + A \ln f'(x); \end{cases}$$

$$m = -1, \qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)} + \varphi(x) + A\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^2}; \end{cases}$$

$$m = -2, \qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{(f'(x))^2} + \varphi(x) + A\left[\dfrac{f'''(x)}{(f'(x))^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{(f''(x))^2}{(f'(x))^4}\right]. \end{cases}$$

Если A — новая переменная, инвариантная относительно G, то мы получаем три интранзитивные группы, изоморфные G. Если A — постоянная, то полученные три группы транзитивны. Однако они изоморфны G *относительно подходящего преобразования элементов группы*; достаточно лишь сохранить произвольную функцию $f(x)$, поменяв при этом функцию $\varphi(x)$.

Если нас интересуют только транзитивные группы $\mathcal{G}$, то можно, воспользовавшись преобразованием постоянных коэффициентов, сохраняющим соотношения (59) и (60), заменить группы их типами. Прежде всего, формы ω сохраняются в том смысле, что на них можно подействовать линейными преобразованиями (53), если $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — константы. Заметим, что если положить $\omega_1 = \omega_2 = 0$, то все линейные комбинации форм ω и ϖ, ковarianты которых обращаются в нуль, выражаются через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \varpi_1$ [1]). Следовательно, имеет место формула

$$\overline{\varpi}_1 = h\varpi_1 + b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4,$$

которая означает, что это преобразование, добавленное к преобразованиям (53), сохраняет форму ϖ_1', откуда следует, что коэффициенты b_3 и b_4 должны равняться нулю, за исключением двух случаев

$$1^\circ \quad m = -1, \qquad \overline{\varpi}_1 = h\varpi_1 + b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3;$$

$$2^\circ \quad m = -2, \qquad \overline{\varpi}_1 = h\varpi_1 + b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_4\omega_4.$$

Поэтому, если m отлично от -1 и -2, все преобразования, сохраняющие формы (59) и (60), отображают линейное пространство, натянутое на формы $\omega_1, \omega_2, \varpi_1$, в себя. Если $m = -1$, то результат остается верным для форм $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varpi_1$, а при $m = -2$ — для форм $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \varpi_1$. В каждом из этих случаев формулы преобразований определяют последующие формулы, применимые к остальным ω и ϖ.

Например, *для произвольного* m находим восемь типов групп, действующих в пространстве трех переменных и голоэдрически изоморфных $\mathcal{G}$:

$$\omega_1 = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = 0,$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \overline{\omega}_1 = 0,$$

---

[1]) При $m = 0$ сюда следует добавить форму ϖ_2; однако в этом случае мы рассматриваем то, что получается, если положить $\omega_1 = 0$; результат будет тем же самым.

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \overline{\omega}_1 + \omega_3 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \overline{\omega}_1 + \omega_4 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \overline{\omega}_1 + \omega_3 + \omega_4 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \overline{\omega}_1 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \overline{\omega}_2 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_4 = \overline{\omega}_1 = 0.
\end{aligned}$$

Среди этих групп наибольший интерес представляют первая, третья, четвертая, пятая и седьмая. Положив

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = x_2\,dx_1,\\
&\omega_2 = -\frac{dx_2}{x_2} + x_3\,dx_1,\\
&\omega_3 = -\frac{dx_3}{x_2} + x_4\,dx_1,\\
&\omega_4 = -\frac{dx_4}{x_2} + \frac{x^3}{x_2^2}dx_3 - \frac{x_4}{x_2^2}dx_2 + x_5\,dx_1,\\
&\overline{\omega}_1 = x_2^m\,dy_1 + y_2\,dx_1,\\
&\overline{\omega}_2 = -\frac{dy_2}{x_2} + m\frac{y_2}{x_2^2}dx_2 + mx_2^{m-1}x_3\,dy_1 + y_3\,dx_1,
\end{aligned}$$

получаем следующие интегралы соответствующих систем:

(1) $\qquad x_1,\quad y_1,\quad \dfrac{y_2}{x_2^m};$

(3) $\qquad x_1,\quad x_2,\quad x_2^{m+1}y_1 - x_3;$

(4) $\qquad x_1,\quad x_2,\quad x_2^{m+2}y_1 - x_2x_4 + \dfrac{1}{2}x_3^2;$

(5) $\qquad x_1,\quad x_2,\quad x_2^{m+2}y_1 - x_2(x_3 + x_4) + \dfrac{1}{2}x_3^2;$

(7) $\qquad x_1,\quad x_3,\quad mx_3y_1 - \dfrac{y_2}{x_2^m}.$

Обозначив эти интегралы в каждом из случаев через x, y, z, получим конечные уравнения групп в виде

$$(1)\qquad \begin{cases} X = f(x),\\ Y = y(f'(x))^m + \varphi(x),\\ Z = z(f'(x))^{m-1} - my(f'(x))^{m-2}f''(x) - \dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)}; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)}, \\ Z = \dfrac{z}{f'(x)} + y^{m+1}\dfrac{\varphi(x)}{(f'(x))^{m+1}} + \dfrac{f''(x)}{(f'(x))^2}; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)}, \\ Z = \dfrac{z}{(f'(x))^2} + y^{m+2}\dfrac{\varphi(x)}{(f'(x))^{m+2}} + \dfrac{f'''(x)}{(f'(x))^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{(f''(x))^2}{(f'(x))^4}; \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)}, \\ Z = \dfrac{z}{(f'(x))^2} + y^{m+2}\dfrac{\varphi(x)}{(f'(x))^{m+2}} + y\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^3} + \\ \qquad + \dfrac{f'''(x)}{(f'(x))^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{(f''(x))^2}{(f'(x))^4}; \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)} - \dfrac{f''(x)}{(f'(x))^2}, \\ Z = z(f'(x))^{m-1} + my\dfrac{\varphi(x)}{f'(x)} + \dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)} - m\dfrac{\varphi(x)f''(x)}{(f'(x))^2}. \end{cases}$$

Определяющие уравнения второй и третьей из восьми транзитивных групп, действующих в пространстве трех переменных, имеют первый порядок. С другой стороны, если группа $\mathcal{G}$ определяется уравнениями первого порядка, то вполне интегрируемая система, интегралы которой преобразуются группой $\mathcal{G}$, имеют вид

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_p = 0,$$
$$\varpi_1 + \ldots = \varpi_2 + \ldots = \ldots = \varpi_q + \ldots = 0,$$

где многоточиями после ϖ обозначены члены, зависящие только от ω. Эти условия не достаточны.

61. *Группы, изоморфные группе общих преобразований пространства n переменных.* Структурные уравнения группы G и ее последовательных нормальных продолжений имеют вид

$$\begin{cases} \omega'_i = \sum\limits_{\rho}^{1,\dots,n} \omega_\rho \omega_{i\rho} & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \omega'_{ij} = \sum\limits_{\rho}^{1,\dots,n} (\omega_\rho \omega_{ij\rho} + \omega_{\rho j}\omega_{i\rho}) & (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ \omega'_{ijk} = \sum\limits_{\rho}^{1,\dots,n} (\omega_\rho \omega_{ijk\rho} + \omega_{\rho k}\omega_{ij\rho} - \omega_{i\rho}\omega_{\rho jk} + \omega_{\rho j}\omega_{i\rho k}) & (i, j, k = 1, 2, \dots, n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{61}$$

Первый набор уравнений определяет группу G. Первые два набора — группу G', первые три — группу G'', и т. д. В формах с несколькими индексами все индексы, кроме первого, можно переставлять между собой, форма от этого не изменится.

Вполне интегрируемая система (42), определяющая группу $\mathcal{G}$, изоморфную G, должна содержать уравнения

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0. \tag{62}$$

Действительно, предположим для простоты, что G'' является голоэдрическим продолжением группы G, а G' — нет. Тогда система (42) содержит по меньшей мере одну форму

$$\sum A_{ijk}\omega_{ijk} + \sum A_{ij}\omega_{ij} + \sum A_i\omega_i = 0.$$

Поэтому группой линейных преобразований системы служит группа, присоединенная к G'', инфинитезимальные преобразования которой имеют вид

$$\omega_\alpha \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\alpha\alpha}}, \quad \omega_\beta \frac{\partial f}{\partial \omega i\alpha\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\alpha\beta}}, \quad \omega_\alpha \frac{\partial f}{\partial \omega i\beta\gamma} + \omega_\beta \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\gamma\alpha}} + \omega_\gamma \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\alpha\beta}},$$
$$(i, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n).$$

Кроме того, система (42) должна содержать уравнения

$$\begin{aligned} &A_{i\alpha\alpha}\omega_\alpha = 0, \\ &A_{i\alpha\alpha}\omega_\beta + A_{i\alpha\beta}\omega_\alpha = 0, \qquad\qquad (i, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n). \\ &A_{i\beta\gamma}\omega_\alpha + A_{i\gamma\alpha}\omega_\beta + A_{i\alpha\beta}\omega_\gamma = 0, \end{aligned}$$

Если один из коэффициентов $A_{i\alpha\alpha}$ отличен от нуля, то мы получаем все уравнения (62). То же самое верно, если все коэффициенты равны нулю, так как тогда один из коэффициентов $A_{i\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ наверняка отличен от нуля.

Поэтому *всякую группу* $\mathcal{G}$, *голоэдрически изоморфную* G, *можно считать голоэдрическим продолжением группы* G. Кроме того, не существует группы, мериэдрически изоморфной G.

Отсюда следует, что если уравнения (42) приведены к *каноническому* виду, т. е. если они разрешены относительно некоторого набора форм ω, то количество индексов форм, входящих в правые части этих уравнений, не превосходят количество индексов форм в левых частях; набор уравнений, разрешенных относительно ω_i и ω_{ij}, образует вполне интегрируемую систему; то же самое справедливо и относительно набора уравнений, разрешенных относительно ω_i, ω_{ij} и ω_{ijk}, и так далее.

Таким образом, чтобы найти все группы $\mathcal{G}$, для которых $G^{(p)}$ служит голоэдрическим продолжением, а $G^{(p-1)}$ — нет, достаточно найти все группы, для которых $G^{(p-1)}$ служит голоэдрическим продолжением, и присоединить к вполне интегрируемой системе, интегралы которой преобразуются такой группой, одно или несколько уравнений на формы ω с $p+1$ индексами (а также, при необходимости, на формы с меньшим числом индексов).

Рассмотрим сначала случай $p = 1$. Какие линейные соотношения следует наложить на формы ω_{ij}, чтобы, присоединив их к уравнениям (62), получить вполне интегрируемую систему? Рассуждая общим образом, если рассмотреть группу G, заданную уравнениями

$$\omega'_k = \sum c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho, \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

то ее нормальное продолжение получается присоединением уравнений

$$\varpi'_\tau = \sum_{(\rho,\sigma)} \gamma_{\rho\sigma\tau}\varpi_\rho\varpi_\sigma + \sum z_{\lambda\rho\tau}\omega_\lambda\varpi_\rho + \sum y_{\lambda\mu\tau}\omega_\lambda\omega_\mu + \sum b_{i\lambda\tau}\omega_i\chi_\lambda,$$

где $\gamma_{\rho\sigma\tau}$ — структурные коэффициенты группы линейных преобразований, присоединенной к G, инфинитезимальные преобразования которой имеют вид

$$U_\rho f = \sum a_{i\rho k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k}, \qquad (\rho = 1, \ldots, p).$$

Найдем условия, при которых система

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = \varpi_1 = \ldots = \varpi_q = 0$$

вполне интегрируема. Немедленно получаем

$$\gamma_{q+i,q+j,\tau}=0, \qquad (\tau=1,\ldots,q; \quad i,j=1,\ldots,p-q).$$

Другими словами, *необходимо и достаточно, чтобы инфинитезимальные преобразования* $U_{q+1}f,\ldots,U_pf$ *порождали подгруппу линейной группы, присоединенной к* G.

Если нам известна подгруппа группы линейных преобразований и если эта подгруппа определяется некоторым набором линейных уравнений на $e_1,\ldots,e_p$ (при этом самое общее инфинитезимальное преобразование группы приведено к виду $\sum e_\rho U_\rho f$), то те же самые линейные уравнения на $\varpi_1,\ldots,\varpi_p$ определяют, совместно с уравнениями $\omega_1=\ldots=\omega_r=0$, вполне интегрируемую систему.

Здесь линейная группа преобразований, присоединенная к G, является линейной однородной группой от n переменных. Таким образом, мы должны найти эти подгруппы. Так как, кроме того, уравнения (61) не меняются при действии на $\omega_1,\ldots,\omega_n$ произвольного линейного преобразования коэффициентов (функций от инвариантов группы $\mathcal{G}$), можно вместо подгрупп рассматривать их типы (не эквивалентные относительно линейных преобразований).

В случаях $n=2$ и $n=3$ эти подгруппы вычислены С. Ли. При $n=2$, заменив $\partial f/\partial u_1$ и $\partial f/\partial u_2$ на p_1 и p_2, получаем группы

$$\begin{gathered}
u_1p_1+u_2p_2,\\
(m+1)u_1p_1+(m-1)u_2p_2,\\
u_1p_2+m(u_1p_1+u_2p_2),\\
u_1p_1, \qquad u_2p_2,\\
u_1p_2, \qquad u_1p_1+u_2p_2,\\
(m+1)u_1p_1+(m-1)u_2p_2, \qquad u_1p_2,\\
u_1p_1, \qquad u_2p_2, \qquad u_1p_2,\\
u_1p_1-u_2p_2, \qquad u_1p_2, \qquad u_2p_1,\\
u_1p_1, \qquad u_2p_2, \qquad u_1p_2, \qquad u_2p_1.
\end{gathered}$$

Им соответствуют вполне интегрируемые системы

$$\begin{aligned}
&\omega_1=\omega_2=\omega_{11}-\omega_{22}=\omega_{12}=\omega_{21}=0,\\
&\omega_1=\omega_2=(m-1)\omega_{11}-(m+1)\omega_{22}=\omega_{12}=\omega_{21}=0,\\
&\omega_1=\omega_2=\omega_{12}=\omega_{11}-\omega_{22}=\omega_{11}-m\omega_{21}=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{21} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{11} - \omega_{22} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = (m-1)\omega_{11} - (m+1)\omega_{22} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} + \omega_{22} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = 0.
\end{aligned}$$

В частности, если искать группы $\mathcal{G}$, действующие на пространствах трех и четырех переменных, то, используя при необходимости нормальные продолжения $G'', G''', \ldots$ группы G, мы заключаем, что для трех переменных эти группы задаются уравнениями

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} + \omega_{22} = 0,
\end{aligned}$$

а для четырех — уравнениями

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{21} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{11} - m\omega_{22} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{122} = 0.
\end{aligned}$$

Используя формулы из п. 41, получаем для групп в пространстве трех переменных следующие уравнения:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&X = f(x,y),\\
&Y = \varphi(x,y),\\
&Z = \frac{z\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}},
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
&x = x_1,\\
&y = x_2,\\
&z = -\frac{y_2}{y_1}
\end{aligned}\right\};$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&X = f(x,y),\\
&Y = \varphi(x,y),\\
&Z = \frac{z}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}},
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
&x = x_1,\\
&y = x_2,\\
&z = y_1y_4 - y_2y_3
\end{aligned}\right\};$$

а для групп в пространстве четырех переменных — уравнения

$$(1)\qquad \begin{cases} X = f(x,y), \\ Y = \varphi(x,y), \\ Z = \dfrac{z\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}, \\ T = \dfrac{t\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}}{t\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}, \end{cases} \qquad \left\{\begin{aligned} x&=x_1,\\ y&=x_2,\\ z&=-\frac{y_2}{y_1},\\ t&=-\frac{y_4}{y_3}\end{aligned}\right\};$$

$$(2)\qquad \begin{cases} X = f(x,y), \\ Y = \varphi(x,y), \\ Z = \dfrac{z\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}, \\ T = t\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}+z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{m+1}}, \end{cases} \qquad \left\{\begin{aligned} x&=x_1,\\ y&=x_2,\\ z&=-\frac{y_2}{y_1},\\ t&=\frac{(y_1y_4-y_2y_3)^m}{y_1^{m+1}}, \quad m\neq 0,\\ t&=\frac{1}{y_1}, \quad m=0\end{aligned}\right\};$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} X &= f(x,y), \\ Y &= \varphi(x,y), \\ Z &= \dfrac{z\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}, \\ T &= \dfrac{\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)t+ \\ \quad +\left(z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(z^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2z\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\ \quad -\left(z\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\left(z^2\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+2z\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \end{array}\right\}}{\left(z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^3} \end{aligned} \qquad \left\{\begin{aligned} x&=x_1,\\ y&=x_2,\\ z&=-\frac{y_2}{y_1},\\ t&=z_3\frac{(y_1y_4-y_2y_3)^2}{y_1^3}\end{aligned}\right\}.$$

Определяющие уравнения групп $\mathcal{G}$, соответствующих системам

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{21} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{22} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{21} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{11} - m\omega_{22} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = 0,\\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} + \omega_{22} = 0,
\end{aligned}$$

имеют первый порядок.

Простые и разложимые группы

62. Мы говорим, что группа $\mathcal{G}$ мериэдрически изоморфна группе G, если существует голоэдрическое продолжение G_1 группы G и гемиэдрическое[1] продолжение $\mathcal{G}_1$ группы $\mathcal{G}$, действующие на пространствах одинакового числа переменных и подобные между собой. Если группа G определяется уравнениями первого порядка и ее можно свести к действию на своих инвариантах, то можно показать, как и выше, что (с точностью до подходящей замены переменных) одно из нормальных продолжений $G^{(\alpha)}$ группы G или группа, построенная по $G^{(\alpha)}$ и по группе, тождественно действующей на некотором наборе дополнительных переменных, является гемиэдрическим продолжением. Исследование групп, мериэдрически изоморфных G, выполняется тем же способом, что и для голоэдрически изоморфных групп.

Однако в теории бесконечномерных групп имеется важная особенность, отсутствующая в конечномерной теории. Если конечномерная группа $\mathcal{G}$ мериэдрически изоморфна конечномерной группе G, то ее размерность заведомо меньше, чем размерность G; напротив, если изоморфизм голоэдрический, то размерности групп совпадают. Поэтому изоморфизм конечномерных групп может быть либо голоэдрическим, либо мериэдрическим.

Напротив, для бесконечномерной группы G может оказаться, что одна и та же группа $\mathcal{G}$ изоморфна ей и мериэдрически, и голоэдрически. Рассмотрим, например, группу

$$\begin{aligned}
X &= x + a,\\
Y &= y + f(x),\\
Z &= z + f'(x),
\end{aligned}$$

---

[1] В оригинале — мериэдрическое. — *Прим. ред.*

где f — произвольная функция переменной x, f' — ее производная. Если группа G_1 описывает действие группы G на переменных x и y, а группа $\mathcal{G}$ — на переменных x и z, то G одновременно является голоэдрическим продолжением для G_1 и гемиэдрическим для $\mathcal{G}$. Поэтому $\mathcal{G}$ мериэдрически изоморфна G_1. Однако, с другой стороны, $\mathcal{G}$ и G_1 *подобны* относительно замены переменных x и z. У них нет общих конечных уравнений, однако их определяющие уравнения одинаковы:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = 1.$$

Из этого простого примера видно, что бесконечномерная группа может быть мериэдрически изоморфна сама себе.

Итак, мы различаем *собственные* и *несобственные* мериэдрические изоморфизмы. Группа $\mathcal{G}$ *собственно* мериэдрически изоморфна G, если она не изоморфна ей голоэдрически.

63. Конечномерная группа называется *простой*, если не существует группы, которая ей мериэдрически изоморфна. Среди бесконечномерных групп мы выделяем *простые собственные* и *простые несобственные* группы. К первым относятся такие группы, у которых нет собственно или несобственно мериэдрически изоморфных. Ко вторым — группы, у которых могут быть несобственно мериэдрически изоморфные, но нет собственно мериэдрически изоморфных.

Например, интранзитивная группа

$$X = x + a,$$
$$Y = y + f(x)$$

не проста, так как изоморфная ей группа

$$X = x + a$$

не изоморфна ей голоэдрически.

Группа, не являющаяся простой, называется *составной.* Среди приведенных выше примеров группы всех преобразований одной или нескольких переменных являются собственными простыми группами.

Группа

$$X = x,$$
$$Y = y + f(x)$$

является простой несобственной, и, наконец, группы

$$\begin{aligned} &X = f(x), \qquad Y = \varphi(y); \\ &X = f(x), \qquad Y = y(f'(x))^m + \varphi(x) \end{aligned}$$

— составные.

Ясно, что по структурным коэффициентам группы можно решить, простая она или составная.

Рассмотренные примеры показывают, что проблема разложения бесконечномерной группы в нормальный ряд подгрупп может представлять серьезные трудности. Можно также задаться вопросом, всегда ли существует разложение в *конечный* ряд простых, хотя бы и несобственных, подгрупп. Известно, что эта проблема имеет большое значение для приложений бесконечномерных групп к интегрированию систем дифференциальных уравнений в частных производных.[1]

64. С. Ли выделил четыре больших класса простых транзитивных групп.

1° Группа преобразований пространства n переменных, заданная структурными уравнениями

$$\omega'_k = \sum_i^{1,\ldots,n} \omega_i \varpi_{ik}, \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

2° Группа преобразований пространства n переменных с единичным определителем Якоби[2], заданная структурными уравнениями

$$\omega'_k = \sum_i^{1,\ldots,n} \omega_i \varpi_{ki} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\varpi_{11} + \varpi_{22} + \ldots + \varpi_{nn} = 0.$$

3° Группа преобразований пространства $2n$ переменных, заданная струк-

---

[1] E. Vessiot, Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations, *Acta Math.*, t. XXVIII, 1904, p. 307–349).

[2] То есть группа преобразований $\mathbb{R}^n$, сохраняющих объем. — *Прим. ред.*

турными уравнениями[1]

$$\begin{aligned} \omega'_{2k} &= \sum_{i}^{1,\dots,2n} \omega_i \varpi_{2k-1,i}, \\ \omega'_{2k-1} &= -\sum_{i}^{1,\dots,2n} \omega_i \varpi_{2k,i}, \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji}.$$

В случае $n = 1$ эта группа совпадает с группой из предыдущего класса при $n = 2$.

4° Группа контактных преобразований в пространстве $2n+1$ переменной со структурными уравнениями

$$\begin{aligned} \omega'_{2k} &= \sum_{i}^{1,\dots,2n+1} \omega_i \varpi_{2k-1,i} + \omega_{2k}\varpi, \\ \omega'_{2k-1} &= -\sum_{i}^{1,\dots,2n+1} \omega_i \varpi_{2k,i} + \omega_{2k-1}\varpi, \qquad (k = 1, \dots, n) \\ \omega'_{2n+1} &= \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \dots + \omega_{2n-1}\omega_{2n} + 2\omega_{2n+1}\varpi, \end{aligned}$$

где

$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji}, \qquad (i, j = 1, \dots, 2n).$$

Значения целочисленных характеристик σ для первого класса равны

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = n;$$

для второго класса —

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{n-1} = n, \quad \sigma_n = n - 1;$$

для третьего класса —

$$\sigma_1 = 2n, \quad \sigma_2 = 2n - 1, \quad \dots, \quad \sigma_{2n-1} = 2, \quad \sigma_{2n} = 1;$$

и, наконец, для четвертого класса —

$$\sigma_1 = 2n + 1, \quad \sigma_2 = 2n, \quad \dots, \quad \sigma_{2n-1} = 3, \quad \sigma_{2n} = 2, \quad \sigma_{2n+1} = 1.$$

---

[1] То есть группа симплектических преобразований. — *Прим. ред.*

Группа линейных преобразований, присоединенная к G, является

в первом случае — общей группой линейных однородных преобразований пространства n переменных;

во втором случае — специальной группой линейных однородных преобразований пространства n переменных;

в третьем случае — самой общей группой линейных однородных преобразований, сохраняющих пфаффову форму

$$u_1\,du_2 - u_2\,du_1 + u_3\,du_4 - u_4\,du_3 + \ldots + u_{2n-1}\,du_{2n} - u_{2n}\,du_{2n-1}.$$

В каждом из этих четырех случаев нетрудно показать, что вполне интегрируемая система, определяющая группу, изоморфную G, должна содержать уравнения

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0$$

в первом и втором случаях,

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n} = 0$$

в третьем случае и

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n+1} = 0$$

в четвертом. *Отсюда следует не только, что все группы G просты, но и что всякая группа Γ, изоморфная одной из этих групп, является ее продолжением.*

Примеры бесконечномерных транзитивных простых групп, не входящих в эти четыре больших класса, неизвестны.

ГЛАВА IV

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГРУППЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

65. В этой главе мы собираемся указать общий вид ковариантов ω'_k для группы, зависящей от произвольной функции одной переменной. Затем мы покажем, что для каждой из этих групп, если она транзитивна, существует изоморфная ей группа преобразований пространства одной переменной. Отсюда следует, что всякая бесконечномерная простая транзитивная группа, зависящая от произвольной функции одной переменной, голоэдрически изоморфна группе общих преобразований одной переменной.

66. Целочисленные характеристики $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ всех интересующих нас групп, за исключением первой, транзитивных и интранзитивных, равны нулю. Следовательно, обозначив через $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$ некоторые линейные комбинации форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, получаем формулы вида

$$\left\{\begin{aligned} \Omega'_1 &= \omega_1\varpi_1 + \sum_i^{2,\ldots,r}\sum_k^{1,\ldots,\sigma} a_{1ik}\omega_i\varpi_k + \ldots, \\ \Omega'_2 &= \omega_1\varpi_2 + \sum_i^{2,\ldots,r}\sum_\sigma^{1,\ldots,\sigma} a_{2ik}\omega_i\varpi_k + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega'_\sigma &= \omega_1\varpi_\sigma + \sum_i^{2,\ldots,r}\sum_k^{1,\ldots,\sigma} a_{\sigma ik}\omega_i\varpi_k + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

где многоточиями обозначены слагаемые, билинейные по ω, а коварианты $\Omega'_{\sigma+1}, \ldots, \Omega'_r$ не зависят от форм ϖ.

Если система в инволюции, то коэффициенты t_{ik} разложения форм ϖ по формам ω

$$\left\{\begin{aligned} \varpi_1 &= t_{11}\omega_1 + \ldots + t_{1r}\omega_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi_\sigma &= t_{\sigma 1}\omega_1 + \ldots + t_{\sigma r}\omega_r, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

такие что соответствующие слагаемые в правых частях равенств (1) обращаются в нуль, зависят от σ параметров. Эти коэффициенты удовлетворяют, тем самым, уравнениям

$$\begin{cases} t_{1i} = \sum\limits_{k}^{1,\ldots,\sigma} a_{1ik} t_{k1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{\sigma i} = \sum\limits_{k}^{1,\ldots,\sigma} a_{\sigma ik} t_{k1} \end{cases} \qquad (i = 2, \ldots, r) \qquad (3)$$

и

$$\sum_k (a_{\rho ik} t_{kj} - a_{\rho jk} t_{ki}) = 0 \qquad (i, j = 2, \ldots, r; \rho = 1, \ldots, \sigma). \qquad (4)$$

Поэтому равенства (4) должны выполняться тождественно при произвольном выборе $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{\sigma 1}$, если вместо остальных $t_{\rho i}$ подставить их значения, удовлетворяющие равенствам (3). Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\sum_{\lambda}^{1,\ldots,\sigma} (a_{\rho i\lambda} a_{\lambda jk} - a_{\rho j\lambda} a_{\lambda ik}) = 0 \qquad (\rho, k = 1, 2, \ldots, \sigma; \quad i, j = 2, \ldots, r). \qquad (5)$$

67. Выведенные выше необходимые и достаточные условия позволяют нам привести уравнения (1) к простому каноническому виду. Найдем такие величины $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$, что для произвольных форм ϖ выполняется равенство

$$e_i \sum a_{12k} \varpi_k + \ldots + e_\sigma \sum a_{\sigma 2k} = h(e_1 \varpi_1 + \ldots + e_\sigma \varpi_\sigma);$$

видно, что h является корнем *характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{121} - h & a_{221} & \ldots & a_{\sigma 21} \\ a_{122} & a_{222} - h & \ldots & a_{\sigma 22} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{12\sigma} & a_{22\sigma} & \ldots & a_{\sigma 2\sigma} - h \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Каждому корню h этого характеристического уравнения отвечает по меньшей мере один не полностью нулевой набор значений e, удовлетворяющий приведенному требованию. Применив подходящее линейное преобразование форм Ω и ϖ, мы всегда можем предполагать, что этот набор имеет вид

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad \ldots, \quad e_\sigma = 0.$$

Случай кратных корней исследуется обычным образом, и мы приходим к следующему результату.

Если у уравнения (6) p корней

$$h_1, h_2, \ldots, h_p$$

с кратностями

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = \sigma),$$

то уравнения (1) можно привести к виду

$$\begin{cases} \Omega'_1 = (\omega_1 + h_1\omega_2)\varpi_1 + \ldots\,, \\ \Omega'_2 = (\omega_1 + h_1\omega_2)\varpi_2 + a_{221}\omega_2\varpi_1 + \ldots\,, \\ \Omega'_3 = (\omega_1 + h_1\omega_2)\varpi_3 + a_{322}\omega_2\varpi_2 + a_{321}\omega_2\varpi_1 + \ldots\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ \Omega'_{\alpha_1} = (\omega_1 + h_1\omega_2)\varpi_{\alpha_1} + a_{\alpha_1,2,\alpha_1-1}\omega_2\varpi_{\alpha_1-1} + \ldots + a_{\alpha_1 21}\omega_2\varpi_1 + \ldots, \\ \Omega'_{\alpha_1+1} = (\omega_1 + h_2\omega - 2)\varpi_{\alpha_1+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases} \tag{7}$$

где многоточиями обозначены слагаемые, зависящие от $\omega_3, \ldots, \omega_r$. Каждому корню характеристического уравнения кратности α поставлено в соответствие α форм ϖ и α форм Ω.

Положив в формулах (5) $\rho = 1$ и беря последовательно $k = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$, ..., $\alpha_1 + 1$, мы видим, что коэффициенты

$$a_{1,3,\alpha_1+\alpha_2},\ a_{1,3,\alpha_1+\alpha_2-1},\ \ldots,\ a_{1,3,\alpha_1+1}$$

равны нулю; если затем положить $\rho = 2$ и придавать k последовательно те же значения, то получим, что все коэффициенты

$$a_{2,3,\alpha_1+\alpha_2},\ a_{2,3,\alpha_1+\alpha_2-1},\ \ldots,\ a_{2,3,\alpha_1+1}$$

также равны нулю, и так далее. Другими словами, рассматриваемые ковариантны $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_{\alpha_1}$ выражаются только через формы $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{\alpha_1}$.

Отсюда нетрудно вывести, что если при $u_2 = 1$, $u_3 = \ldots = u_r = 0$ у обобщенного характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_i a_{1i1} - h & \sum\limits_i a_{2i1}u_i & \ldots & \sum\limits_i a_{\sigma i1}u_i \\ \sum\limits_i a_{1i2}u_i & \sum\limits_i a_{2i2}u_i - h & \ldots & \sum\limits_i a_{\sigma i2}u_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_i a_{1i\sigma}u_i & \sum\limits_i a_{2i\sigma}u_i & \ldots & \sum\limits_i a_{\sigma i\sigma}u_i - h \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

p корней кратности $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, то многочлен в левой части этого уравнения раскладывается в произведение p сомножителей степеней $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ с целыми коэффициентами при $u_2, \dots, u_r$. Другими словами, *характеристическое уравнение* (8) *раскладывается в произведение сомножителей, линейных по* $h, u_1, \dots, u_p$.

Предположим дополнительно, что, при произвольных $u_2, u_3, \dots, u_r$, в разложение характеристического многочлена на множители входят p линейных сомножителей в степенях $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. Тогда равенства (1), относящиеся к первому корню

$$h_{12}u_2 + \dots + h_{1r}u_r$$

уравнения (8), можно привести к виду

$$\begin{cases} \Omega_1' = (\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \dots + h_{1r}\omega_r)\varpi_1 + \dots\,, \\ \Omega_2' = (\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \dots + h_{1r}\omega_r)\varpi_2 + \sum\limits_{i}^{2,\dots,r} a_{2i1}\omega_i\varpi_1 + \dots\,, \\ \Omega_3' = (\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \dots + h_{1r}\omega_r)\varpi_3 + \sum\limits_{i}^{2,\dots,r}\sum\limits_{k}^{1,2} a_{3ik}\omega_i\varpi_k + \dots\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Omega_{\alpha_1}' = (\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1r\omega_r})\varpi_{\alpha_1} + \sum\limits_{i}^{2,\dots,r}\sum\limits_{k}^{1,\dots,\alpha_1-1} a_{\alpha_1 ik}\omega_i\varpi_k + \dots. \end{cases} \tag{9}$$

Остальным корням соответствуют аналогичные группы уравнений, в которые входят формы ϖ.

68. Теперь условие инволютивности системы сводится к тому, что каждая из p частных систем вида (9) находится в инволюции. Если предположить — а это всегда возможно, — что все $h_{12}, \dots, h_{1r}$ равны нулю, то нам остается только проверить равенства (5)

$$\sum_{\lambda}^{1,\dots,\alpha_1} (a_{\rho i\lambda}a_{\lambda jk} - a_{\rho j\lambda}a_{ik\lambda}) = 0 \qquad (\rho, k = 1, \dots, \alpha_1; \quad i, j = 2, \dots, r);$$

но так как в этих равенствах

$$a_{\rho ik} = 0 \quad \text{при} \quad \rho \leqslant k,$$

они выполняются при $\rho \leqslant k + 1$. Остается только рассмотреть случаи $\rho > k + 1$, а в этих случаях α_1 равно по крайней мере 3.

Если, например, $\alpha_1 = 3$, то все возможные системы имеют вид

$$\begin{array}{r|l|l|l}
\Omega'_1 = \omega_1\varpi_1 & \omega_1\varpi_1 & \omega_1\varpi_1 & \omega_1\varpi_1 \\
\Omega'_2 = \omega_1\varpi_2 & \omega_1\varpi_2 & \omega_1\varpi_2 & \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1 \\
\Omega'_3 = \omega_1\varpi_3 & \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_1 & \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_1 & \omega_1\varpi_3 + \omega_3\varpi_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\Omega'_1 = \omega_1\varpi_1 & \omega_1\varpi_1 \\
\Omega'_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1 & \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1 \\
\Omega'_3 = \omega_1\varpi_3 + \omega_3\varpi_2 & \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_1
\end{array}$$

69. Теперь, когда общий вид равенств (1) установлен, можно представить формы $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma, \ldots, \Omega_r$ в виде линейных комбинаций форм $\omega_1, \ldots, \omega_r$ таким образом, чтобы инфинитезимальные преобразования

$$\begin{cases}
\delta\Omega_1 = u_1\omega_1 + \sum a_{1ik}u_k\omega_i, \\
\delta\Omega_2 = u_2\omega_1 + \sum a_{2ik}u_k\omega_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\delta\Omega_\sigma = u_\sigma\omega_1 + \sum a_{\sigma ik}u_k\omega_k, \\
\delta\Omega_{\sigma+1} = 0, \\
\ldots\ldots, \\
\delta\Omega^r = 0,
\end{cases} \tag{10}$$

зависящие от σ параметров u, порождали группу. Если положить

$$\begin{cases}
\omega_1 = m_{11}\Omega_1 + m_{12}\Omega_2 + \ldots + m_{1r}\Omega_r, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\omega_r = m_{r1}\Omega_1 + m_{\sigma 2}\Omega_2 + \ldots + m_{\sigma r}\Omega_r,
\end{cases} \tag{11}$$

то можно будет выразить все σ преобразований этой группы, воспользовавшись обозначениями

$$\begin{gathered}
p_1 = m_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + m_{r1}\frac{\partial f}{\partial x_r}, \\
p_2 = m_{12}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + m_{r2}\frac{\partial f}{\partial x_r}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
p_\sigma = m_{1\sigma}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + m_{r\sigma}\frac{\partial f}{\partial x_r},
\end{gathered}$$

следующим образом:

$$X_1 f = x_1 p_1 + \sum_{\rho}^{1,\ldots,\sigma} \sum_{i}^{2,\ldots,r} a_{\rho i 1} x_i p_\rho,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X_\sigma f = x_1 p_\sigma + \sum_{\rho}^{1,\ldots,\sigma} \sum_{i}^{2,\ldots,r} a_{\rho i \sigma} x_i p_\rho.$$

Заметим, что если равенства (1) приведены к каноническому виду (9), то инфинитезимальные преобразования $X_1 f, \ldots, X_{\alpha_1} f$ сами порождают группу, так как они зависят только от $p_1, p_2, \ldots, p_{\alpha_1}$, и их коммутаторы должны обладать тем же свойством.

Например, при $\alpha_1 = 3$ на коэффициенты m_{ik} первой системы не накладывается никаких условий; однако для остальных систем получаем

2-я система : $m_{12} = m_{13} = 0,$
3-я система : $m_{13} = m_{11} + m_{33} = m_{12} + m_{23} = 0,$
4-я система : $m_{12} = m_{13} = 0,$
5-я система : $m_{12} = m_{13} = m_{23} = m_{11} - 2m_{22} = 0,$
6-я система : $m_{12} = m_{13} = m_{23} = m_{32} = m_{33} = m_{11} - 2m_{22} = 0.$

70. Предположим, что в равенствах (9) величины $h_{12}, \ldots, h_{1r}$ равны нулю, и заменим α через α_1. Мы собираемся показать сначала, что ω_1 выражается через $\Omega_1, \ldots, \Omega_\alpha$ и $\Omega_{\sigma+1}, \ldots, \Omega_r$ и не зависит от тех Ω, которые отвечают корням характеристического уравнения, отличным от рассматриваемого. Рассмотрим, например, другой корень кратности β, которому отвечают формы $\Omega_{\alpha+1}, \ldots, \Omega_{\alpha+\beta}$. Рассмотрим два инфинитезимальных преобразования $X_1 f, X_{\alpha+\beta} f$ группы линейных преобразований Γ

$$X_1 f = x_1 p_1 + \sum_{\rho}^{2,\ldots,\alpha} \sum_{i}^{2,\ldots,r} a_{\rho i 1} x_i p_\rho,$$
$$X_{\alpha+\beta} f = (x_1 + h_2 x_2 + \cdots + h_r x_r) p_{\alpha+\beta}.$$

Переменная p_1 входит только в уравнение для $X_1 f$ группы Γ, причем с коэффициентом x_1, поэтому вычисление коммутатора $[X_1, X_{\alpha+\beta}]$ дает

$$m_{1,\alpha+\beta} = 0;$$

а коммутатора $[X_1, X_{\alpha+\beta-1}]$ —

$$m_{1,\alpha+\beta-1} = 0,$$

и так далее вплоть до равенства

$$m_{1,\alpha+1} = 0.$$

Отсюда следует формула для формы ω_1

$$\omega_1 = m_{11}\Omega_1 + m_{12}\Omega_2 + \cdots + m_{1\alpha}\Omega_\alpha + m_{1\sigma+1}\Omega_{\sigma+1} + \cdots + m_{1r}\Omega_r.$$

В частности, если все корни характеристического уравнения простые, то

$$\begin{aligned} \omega_1 &= m_{11}\Omega_1 + m_{1,\sigma+1}\Omega_{\sigma+1} + \ldots + m_{1r}\Omega_r, \\ \omega_2 &= m_{22}\Omega_2 + m_{2,\sigma+1}\Omega_{\sigma+1} + \ldots + m_{2r}\Omega_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_\sigma &= m_{\sigma\sigma}\Omega_\sigma + m_{\sigma,\sigma+1}\Omega_{\sigma+1} + \ldots + m_{\sigma r}\Omega_r \end{aligned}$$

в предположении, что линейным преобразованием формы

$$\omega_1 + h_{i2}\omega_2 + h_{i3}\omega_3 + \ldots + h_{ir}\omega_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

переведены в формы

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma.$$

71. Теперь мы собираемся показать, что, в тех же обозначениях, ковариант ω_1' *обращается в нуль вместе с* ω_1.

Обозначим символом δ_ρ бесконечно малое приращение вдоль инфинитезимального преобразования X_ρ, где ρ принимает одно из значений $1, 2, \ldots, \alpha$. Имеем

$$\delta_\rho\omega_i = m_{i\rho}\omega_1 + \sum_{\lambda}^{1,\ldots,\alpha-\rho}\ \sum_{j}^{2,\ldots,r} m_{i,\rho+\lambda}a_{\rho+\lambda,j,\rho}\omega_j \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, r \\ \rho = 1, 2, \ldots, \alpha \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Запишем условие того, что инфинитезимальное преобразование $X_\rho f$ сохраняет структурные уравнения группы, в частности, уравнение для Ω_τ' $(\tau < \rho)$. Форма Ω_τ инвариантна относительно $X_\rho f$, поэтому

$$\begin{aligned} 0 = \omega_1\delta_\rho\varpi_\tau + \delta_\rho\omega_1\varpi_\tau + \sum_{i}^{2,\ldots,r}\ \sum_{k}^{1,\ldots,\tau-1} a_{\tau ik}(\delta_\rho\omega_i\varpi_k + \omega_i\delta_\rho\varpi_k) + {}& \\ + \sum_{(ij)} c_{ij\tau}(\delta_\rho\omega_i\omega_j + \omega_i\delta_\rho\omega_j) \qquad (\rho = 1, \ldots, \alpha, \quad \tau < \rho),& \end{aligned}$$

где через $c_{ij\tau}$ обозначены структурные константы, не выписанные в формулах (9).

Заменим в этой формуле приращения $\delta_\rho\omega_i$ их значениями; придавая индексу τ последовательно значения $1, 2, \dots, \rho-1$ и рассматривая только члены, содержащие ω_1 (сумма которых должна равняться нулю), получаем

$$\left\{\begin{aligned}
&\delta_\rho\varpi_1 + m_{1\rho}\varpi_1 + \sum_{(ij)}^{2,\dots,r} c_{ij1}(m_{i\rho}\omega_j - m_{j\rho}\omega_i) = A_{\rho1}\omega_1,\\
&\delta_\rho\varpi_2 + m_{1\rho}\varpi_2 + \sum_{i}^{2,\dots,r} m_{i\rho}a_{2i1}\varpi_1 + \sum_{(ij)}^{2,\dots,r} c_{ij2}(m_{i\rho}\omega_j - m_{j\rho}\omega_i) =\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = A_{\rho1}\sum_{i}^{2,\dots,r} a_{2i1}\omega_i + A_{\rho2}\omega_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\delta_\rho\varpi_\tau + m_{1\rho}\varpi_\tau + \sum_{i}^{2,\dots,r} m_{i\rho}m_{i\rho}\sum_{\lambda}^{1,\dots,\tau-1} a_{\tau i\lambda}\varpi_\lambda + \sum_{(ij)}^{2,\dots,r} c_{ij\tau}(m_{i\rho}\omega_j - m_{j\rho}\omega_i) =\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \sum_{\lambda}^{1,\dots,\tau-1} A_{\rho\lambda}\sum_{i}^{2,\dots,r} a_{\tau i\lambda}\omega_i + A_{\rho\tau}\omega_1\\
&\qquad(\tau = 1, \dots, \rho-1).
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Здесь через $A_{\rho\tau}$ обозначены новые величины (константы или функции инвариантов группы G).

Применим теперь инфинитезимальное преобразование $X_\rho f$ к равенству для Ω'_ρ. Приращение $\delta_\rho\Omega_\rho$ равно ω_1, поэтому, *пренебрегая в правой части слагаемыми, содержащими* $\omega - 1$, получаем

$$\omega'_1 = \delta_\rho\omega_1\varpi_\rho + \sum_{k}^{1,\dots,\rho-1} a_{\rho ik}(\delta_\rho\omega_i\varpi_k + \omega_i\delta_\rho\varpi_k) + \sum_{(ij)}^{1,\dots,r} c_{ij\rho}(\delta_\rho\omega_i\omega_j + \omega_i\delta_\rho\omega_j)$$

или, заменяя приращения $\delta_\rho\omega_i$ их значениями из (12), а приращения $\delta_\rho\varpi_k$ их значениями из (13), получаем

$$\begin{aligned}
\omega_1' = {} & \sum_{\lambda}^{1,\dots,\alpha-\rho} \sum_{i}^{2,\dots,r} m_{1,\rho+\lambda} a_{\rho+\lambda,i,\rho} \omega_i \varpi_\rho + \\
& + \sum_{i}^{2,\dots,r} \sum_{\lambda}^{1,\dots,\alpha-\rho} \sum_{k}^{1,\dots,\rho-1} \sum_{j}^{2,\dots,r} m^i_{i,\rho+\lambda} a_{\rho ik} a_{\rho+\lambda,j,\rho} \omega_j \varpi_k - \\
& - \sum_{k}^{1,\dots,\rho-1} \sum_{i}^{2,\dots,r} m_{1k} a_{\rho ik} \omega_i \varpi_k - \\
& - \sum_{j}^{2,\dots,r} \sum_{k}^{1,\dots,\rho-1} \sum_{i}^{2,\dots,r} \sum_{\lambda}^{1,\dots,k-1} m_{j\rho} a_{ki\lambda} a_{\rho ik} \omega_i \varpi_\lambda + \\
& + \sum_{(ij)}^{2,\dots,r} \sum_{h}^{2,\dots,r} \sum_{k}^{1,\dots,\rho-1} m_{h\rho} (a_{\rho jk} c_{hik} - a_{\rho ik} c_{hjk}) \omega_i \omega_j + \\
& + \sum_{(ij)}^{2,\dots,r} \sum_{k}^{1,\dots,\rho-1} \sum_{\lambda}^{1,\dots,k-1} A_{\rho\lambda} (a_{\rho ik} a_{kj\lambda} - a_{\rho jk} a_{ki\lambda} \omega_i \omega_j + \\
& + \sum_{(ij)}^{2,\dots,r} \sum_{h}^{2,\dots,r} \sum_{\lambda}^{1,\dots,\alpha-r} m_{h,\rho+\lambda} (a_{\rho+\lambda,i,\rho} c_{hj\rho} - a_{\rho+\lambda,j,\rho} c_{hi\rho}) \omega_i \omega_j.
\end{aligned} \tag{14}$$

Эти формулы выполняются при $\rho = 1, 2, \dots, \alpha$. Выпишем одно за другим α уравнений (14), полученных таким образом, принимая во внимание равенства (5). Тогда слагаемые попарно уничтожаются и остается требуемое равенство

$$\omega_1' = 0 \tag{15}$$

справедливое при условии, что выполнено равенство $\omega_1 = 0$.

72. Отсюда следует, что *если интеграл уравнения*

$$\omega_1 = 0$$

не сохраняется группой G, то существует группа преобразований пространства одной переменной, изоморфная группе G голоэдрически или мериэдрически. В частности, если группа G транзитивна и проста, то она изоморфна группе преобразований пространства одной переменной. Итак, единственная бесконечномерная группа преобразований одной переменной — это общая группа

$$X = f(x).$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме:

Если простая транзитивная бесконечномерная группа определяется произвольной функцией одной переменной, то она изоморфна группе общих преобразований пространства одной переменной.

73. Из формулы (15) можно сделать другие важные заключения. Например, в правой части выражения (14) коэффициент при $\omega_i \varpi_\rho$ должен равняться нулю, откуда вытекает равенство

$$\sum_{\lambda}^{1,\ldots,\alpha-\rho} m_{1,\rho+\lambda} a_{\rho+\lambda,i,\rho} = 0 \qquad (\rho = 1,\ldots,\alpha; \quad i = 2, 3, \ldots, r).$$

Допустим, что все линейные комбинации форм $\Omega_1, \ldots, \Omega_\alpha$, ковarianты которых выражаются только через ω_1 (по крайней мере, слагаемые, содержащие ϖ), представляются в виде линейных комбинаций форм $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{\alpha'}$. Тогда форма ω_1 раскладывается по формам $\Omega_1, \ldots, \Omega_{\alpha'}$, $\Omega_{\sigma+1}, \ldots, \Omega_r$. Кроме того, формулы (13) показывают, что при $\tau \leqslant \alpha'$, $\rho > \tau$ приращения $\delta_\rho \varpi_\tau$ зависят только от $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ и не зависят от ϖ. Отсюда легко вытекает, что формы $\varpi_{\alpha'+1}, \ldots, \varpi_\sigma$ не входят в формулы для $\varpi'_1, \varpi'_2, \ldots, \varpi'_{\alpha'}$. Следовательно, если рассмотреть нормальное продолжение G' группы G и обозначить через $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+\alpha'}$ инвариантные формы, соответствующие формам $\varpi_1, \ldots, \varpi_{\alpha'}$, то система

$$\omega_1 = \ldots = \omega_r = \omega_{r+1} = \ldots = \omega_{r+\alpha'} = 0$$

вполне интегрируема. Она определяет группу G_1, для которой G' служит голоэдрическим продолжением, и, как нетрудно проверить, *определяющие уравнения группы G_1 имеют первый порядок.* Корни характеристического уравнения группы G_1 совпадают (с учетом кратности) с корнями характеристического уравнения группы G. Каждому корню сопоставляется α форм, ковариантыкоторых имеют вид

$$\begin{aligned}
&\omega'_{r+1} = \omega_1\chi_1 + \ldots,\\
&\omega'_{r+2} = \omega_1\chi_2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\omega'_{r+\alpha'} = \omega_1\chi_{\alpha'} + \ldots,\\
&\Omega'_{\alpha'+1} = \omega_1\varpi_{\alpha'+1} + \ldots,\\
&\Omega'_{\alpha'+2} = \omega_1\varpi_{\alpha'+2} + \sum a_{\alpha'+2,i,\alpha'+1}\omega_i\varpi_{\alpha'+1} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

Видно, что для новой группы G_1 целое число α' увеличивается по крайней мере на единицу. Мы продолжаем этот процесс, пока оно не станет равным α.

В результате мы приходим к следующему заключению:

У всякой бесконечномерной группы, зависящей лишь от произвольной функции одной переменной, есть голоэдрическое продолжение G, определяющие уравнения которого имеют первый порядок и такое что

$$\begin{cases}
\Omega'_1 = (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1r}\omega_r)\varpi_1 + \ldots,\\
\Omega'_2 = (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 + \ldots + h_{2r}\omega_r)\varpi_2 + \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Omega'_\sigma = (h_{\sigma1}\omega_1 + h_{\sigma2}\omega_2 + \ldots + h_{\sigma_r}\omega_r)\varpi_\sigma + \ldots,\\
\Omega'_{\sigma+1} = \ldots,\\
\ldots\ldots,\\
\Omega'_r = \ldots,
\end{cases} \tag{16}$$

где многоточиями обозначены слагаемые, зависящие только от ω.

74. Рассмотрим частный случай $r = \sigma$. Пусть форма ω_1 соответствует корню характеристического уравнения кратности α. Так как $r = \sigma$, мы получаем, что один из коэффициентов $m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1\alpha}$ отличен от *нуля* и мы можем предположить:

$$\omega'_1 = \omega_1\varpi_1;$$

(в силу того, что ω'_1 обращается в нуль вместе с ω_1, форму ϖ_1 можно выбрать так, что в правой части все другие члены отсутствуют). Форму Ω_1 нельзя представить в виде линейной комбинации форм, ассоциированных с остальными корнями характеристического уравнения, поэтому можно предполагать $\Omega_2, \ldots, \Omega_\alpha$ равными соответственно $\omega_2, \ldots, \omega_\alpha$:

$$\begin{aligned}\omega_2' &= \omega_1\varpi_2 + \ldots,\\ \omega_3' &= \omega_1\varpi_3 + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega_\alpha' &= \omega_1\varpi_\alpha + \ldots.\end{aligned}$$

Далее, форму, соответствующую второму корню характеристического уравнения, нельзя представить в виде линейной комбинации форм ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_\alpha$ (п. 70); поэтому мы можем считать ее формой $\omega_{\alpha+1}$. Так же находим

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha+1}' &= \omega_{\alpha+1}\varpi_{\alpha+1},\\ \omega_{\alpha+2}' &= \omega_{\alpha+1}\varpi_{\alpha+2} + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega_{\alpha+\beta}' &= \omega_{\alpha+1}\varpi_{\alpha+\beta} + \ldots.\end{aligned}$$

По тем же причинам форма, отвечающая третьему корню характеристического уравнения, не может быть линейной комбинацией форм $\omega_1, \ldots, \omega_{\alpha+\beta}$; обозначим ее через $\omega_{\alpha+\beta+1}$. Так можно продолжать и дальше, сопоставляя корню кратности p характеристического уравнения p пфаффовых форм.

Рассмотрим теперь коварианты $\omega_2', \ldots, \omega_\alpha'$ форм, относящихся к первому корню, и пусть

$$\omega_2' = \omega_1\varpi_2 + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,r} c_{ij2}\omega_i\omega_j.$$

Применив к этому равенству инфинитезимальное преобразование

$$X_{\alpha+1}f = \omega_{\alpha+1}\frac{\partial f}{\partial\omega_{\alpha+1}},$$

получаем

$$0 = \omega_1\delta_{\alpha+1}\varpi_2 + \sum_{j}^{2,\ldots,r} c_{\alpha+1,j,2}\omega_{\alpha+1}\omega_j,$$

откуда либо $c_{\alpha+1,j,2} = 0$, либо ω_2' не зависит от $\omega_{\alpha+1}$. Последующее применение преобразования $X_{\alpha+2}f$ показывает, что ω_2' не зависит от $\omega_{\alpha+2}$ и так далее. Другими словами, все слагаемые в $\omega_2', \ldots, \omega_\alpha'$, за исключением $\omega_1\varpi_1$, зависят только от $\omega_2, \ldots, \omega_\alpha$.

Отсюда видно, что группа G *раскладывается* в сумму групп, каждая из которых соответствует одному корню характеристического уравнения;

структурные уравнения каждой из этих групп имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= \omega_1\varpi_1,\\
\omega_2' &= \omega_1\varpi_2 + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,\alpha} c_{ij2}\omega_i\omega_j,\\
\omega_3' &= \omega_1\varpi_3 + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,\alpha} c_{ij3}\omega_i\omega_j,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega_\alpha' &= \omega_1\varpi_\alpha + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,\alpha} c_{ij\alpha}\omega_i\omega_j.
\end{aligned}$$

Применив теперь фундаментальное тождество, получим следующее необходимое и достаточное условие: $(\alpha-1)^3$ *коэффициентов* c_{ijk} *должны быть структурными константами* $(\alpha-1)$*-мерной группы.*

Кроме того, без труда заключаем, что *конечные уравнения такой группы получаются присоединением к конечным уравнениям конечномерной просто транзитивной группы от* $\alpha-1$ *параметра*

$$\begin{gathered}
X_1 = f_1(x_1,\ldots,x_{\alpha-1};a_1,\ldots,a_{\alpha-1}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{\alpha-1} = f_{\alpha-1}(x_1,\ldots,x_{\alpha-1};a_1,\ldots,a_{\alpha-1}),
\end{gathered}$$

уравнения

$$X = f(x),$$

где f *обозначает произвольную функцию от* x, *и подстановкой* $\alpha-1$ *произвольных функций от* x *вместо параметров* a.

75. При $r > \sigma$ выводы оказываются другими. Приведем ряд замечаний, относящихся к общему случаю.

I. Пусть ω_1 — пфаффова форма, соответствующая некоторому корню характеристического уравнения. Группа G определяет преобразование на интегралах вполне интегрируемого уравнения $\omega_1 = 0$; это действие порождает конечномерную или бесконечномерную группу. В результате получаем следующие случаи:

1° $$\omega_1' = 0;$$

2° $$\begin{cases}\omega_1' = \omega_1\omega_2,\\ \omega_2' = 0;\end{cases}$$

3° $$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\omega_3, \\ \omega_3' = \omega_1\omega_3; \end{cases}$$

4° $$\omega_1' = \omega_1\varpi_1;$$

5° $$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1; \end{cases}$$

6° $$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\omega_3, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\omega_3; \end{cases}$$

7° $$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\omega_3, \\ \omega_3' = \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3, \\ \omega_4' = \omega_1\varpi_1 + 2\omega_2\omega_4; \end{cases}$$

и так далее. В трех первых случаях группа G преобразует интегралы уравнения $\omega_1 = 0$ и оказывается конечномерной, в остальных случаях это бесконечномерная группа — группа общих преобразований пространства одной переменной: при достаточно далеких продолжениях этой группы сохраняются только формы ϖ.

II. Рассмотрим h пфаффовых форм, соответствующих h простым или кратным корням. Обозначим их через $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_h$. Эти формы могут оказаться линейно независимыми (как мы видели, так происходит при $r = \sigma$). Но эти формы могут и удовлетворять линейным соотношениям. Рассмотрим те из этих соотношений, которые имеют вид

$$A_{p_1}\overline{\omega}_{p_1} + A_{p_2}\overline{\omega}_{p_2} + \ldots + A_{p_m}\overline{\omega}_{p_m} = 0,$$

где m коэффициентов A отличны от нуля, и для которых формы $\overline{\omega}_{p_1}$, $\overline{\omega}_{p_2}, \ldots, \overline{\omega}_{p_m}$ *не связаны никакими другими соотношениями* с ненулевыми коэффициентами. Предположим теперь, что в одно из рассматриваемых соотношений входят формы $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_m$; рассмотрим все соотношения, в которые входит одна или несколько из этих форм, и рассмотрим все остальные формы, также входящие в эти соотношения, и т. д. В конце концов мы получим некоторый набор форм $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_h$; всякое соотношение, содержащее одну из этих форм, не содержит ни одну из форм $\overline{\omega}_{n+1}, \ldots, \overline{\omega}_h$. Коварианты

$\overline{\omega}'_1.\overline{\omega}'_2,\dots,\overline{\omega}'_n$ не зависят поэтому ни от одной из форм ϖ; например, форма $\overline{\omega}_m$ зависит, помимо форм $\Omega_{\sigma+1},\dots,\Omega_r$, лишь от форм Ω, соответствующих корню $\overline{\omega}_m$; т. е. ни $\overline{\omega}_1$, ни $\overline{\omega}_2$, ни $\overline{\omega}_{m-1}$ не зависят от этих последних; поэтому $\overline{\omega}_m$ зависит лишь от форм $\Omega_{\sigma+1},\dots,\Omega_r$. То же самое справедливо для всех форм из рассматриваемого набора $(\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\dots,\overline{\omega}_n)$. Поэтому интегралы любого из уравнений $\overline{\omega}_1 = 0$, …, $\overline{\omega}_n = 0$ преобразуются конечномерной группой.

76. Предыдущие рассуждения позволяют без труда найти группы G, отвечающие случаю $r = 3$, со структурными уравнениями (16). Приведем список этих групп, в который мы включили только те из них, которые не являются продолжениями таких же групп, отвечающих случаям $r = 2$ или $r = 1$. В список также не вошли *разложимые* группы, т. е. прямые суммы групп той же природы, одна из которых отвечает случаю $r = 1$, а другая — случаю $r = 2$.

I. Транзитивные группы

1° *Группы, зависящие от трех функций одной переменной.*

	Уравнения структуры	Конечные уравнения
(1)	$\begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_2,\\ \omega'_3 = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\omega_3,\end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = y\varphi(x)$, $Z = z\varphi(x) + \psi(x)$;
(2)	$\begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_2,\\ \omega'_3 = \omega_1\varpi_3,\end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = y + \varphi(x)$, $Z = z + \psi(x)$.

2° *Группы, зависящие от двух функций одной переменной.*

(3)	$\begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\omega_3,\\ \omega'_3 = 0,\end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = ay$, $Z = az + \varphi(x)$;
(4)	$\begin{cases}\omega'_1 = \omega_1\omega_2,\\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_1,\\ \omega'_3 = \omega_1\varpi_2 + m\omega_2\omega_3,\end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = yf'(x)$, $Z = z + y^m\varphi(x)$;

	Уравнения структуры	Конечные уравнения
(5)	$\begin{cases} \omega_1' = 0, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\omega_3, \end{cases}$	$X = x + a,$ $Y = yf(x),$ $Z = zf(x) + \varphi(x);$
(6)	$\begin{cases} \omega_1' = 0, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_2, \end{cases}$	$X = x + a,$ $Y = y + f(x),$ $Z = z + \varphi(x).$

3° *Группы, зависящие от одной функции одной переменной.*

(7)	$\begin{cases} \omega_1' = 0, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\omega_3, \\ \omega_3' = \omega_1\omega_3, \end{cases}$	$X = ax,$ $Y = y + f(x)e^{-z/x},$ $Z = az + b;$
(8)	$\begin{cases} \omega_1' = 0, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi, \\ \omega_3 = \omega_1\varpi_3, \end{cases}$	$X = ax,$ $Y = y + f(x),$ $Z = az + b;$
(9)	$\begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = \omega_1\varpi + \omega_2\omega_3, \\ \omega_3 = 0, \end{cases}$	$X = ax,$ $Y = by + f(x),$ $Z = bz;$
(10)	$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_2, \\ \omega_2' = 0, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi - m\omega_2\omega_3, \end{cases}$	$X = ax + b,$ $Y = ay,$ $Z = a^m z + f(x).$

II. Интранзитивные группы

1° *Группы, зависящие от двух функций одной переменной.*

(1)	$\begin{cases} \omega_1' = 0, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\omega_3, \end{cases}$	$X = x,$ $Y = yf(x),$ $Z = zf(x) + \varphi(x);$
(2)	$\begin{cases} \omega_1' = 0, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_2, \end{cases}$	$X = x,$ $Y = y + f(x),$ $Z = zf(x) + \varphi(x).$

2° *Группы, зависящие от одной функции одной переменной.*

$$\begin{cases} \omega_1' = 0, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi + \omega_2\omega_3, \\ \omega_3' = 0, \end{cases} \qquad \begin{aligned} X &= x, \\ Y &= ay + f(x), \\ Z &= az; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \omega_1' = 0, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi + x\omega_2\omega_3, \\ \omega_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{aligned} X &= x, \\ Y &= ay, \\ Z &= a^x z + f(x). \end{aligned} \tag{4}$$

77. Нахождение групп, отвечающих случаю $r = 4$, оказывается не более сложным. Выписывание их всех слишком трудоемко, поэтому мы ограничимся теми из них, которые зависят от трех или четырех функций одной переменной.

Если группа G зависит от четырех функций одной переменной и *неразложима*, то у характеристического уравнения есть четырехкратный корень. Все такие группы мы получим, как было описано выше, взяв уравнения всех просто транзитивных групп преобразований пространства трех переменных y, z, t, добавив к ним уравнение

$$X = f(x)$$

и заменив три параметра произвольными функциями переменной x.

Если группа зависит от трех произвольных функций одной переменной, то в одном из частных случаев ее описание также сводится к определению конечномерных групп. Это случай наличия трехкратного корня у характеристического уравнения, тогда $\omega_1 = 0$, где ω_1 обозначает форму, соответствующую этому корню. Здесь достаточно рассмотреть уравнения конечномерной просто транзитивной группы g преобразований пространства трех переменных y, z, t, присоединить к ним уравнение

$$X = x + a$$

и заменить три параметра произвольными функциями переменной x. Если группа G интранзитивна, то x — ее инвариант; если структура группы g зависит от существенных параметров, то в качестве этих параметров можно взять произвольные фиксированные функции переменной x.

Вот как выглядят искомые группы, за исключением двух рассмотренных случаев:

	Уравнения структуры	Конечные уравнения
(1)	$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\omega_4, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_3 + m\omega_3\omega_4, \\ \omega_4' = 0, \end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = ay + \varphi(x)$, $Z = a^m z + \psi(x)$, $T = at$;
(2)	$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\omega_4, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_3 + (\omega_3 + \omega_2)\omega_4, \\ \omega_4' = 0, \end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = ay + \varphi(x)$, $Z = az + \varphi(x)\ln t + \psi(x)$, $T = at$;
(3)	$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\omega_4, \\ \omega_4' = 0, \end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = y + \varphi(x)$, $Z = z + t\varphi(x) + \psi(x)$, $T = t + a$;
(4)	$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_2, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_2 + m\omega_2\omega_3, \\ \omega_4' = \omega_1\varpi_3 + n\omega_2\omega_4, \end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = \frac{y}{f'(x)}$, $Z = \frac{z}{f'^m(x)} + \varphi(x)$, $T = \frac{t}{f'^n(x)} + \psi(x)$;
(5)	$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_2, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_2 + m\omega_2\omega_3, \\ \omega_4 = \omega_1\varpi_3 + m\omega_2\omega_4 + \omega_2\omega_3, \end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = \frac{y}{f'(x)}$, $Z = \frac{z}{f'^m(x)} + \varphi(x)$, $T = \frac{t - z\ln f'(x)}{f'^m(x)} + \psi(x)$;
(6)	$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_4, \\ \omega_3' = 0, \\ \omega_4' = \omega_3\varpi_3, \end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = ay + \varphi(x) + \psi(z)$, $Z = az$, $T = at + \psi'(z)$;
(7)	$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\omega_3, \\ \omega_3' = 0, \\ \omega_4' = \omega_3\varpi_3, \end{cases}$	$X = f(x)$, $Y = ay + \varphi(x)$, $Z = az$, $T = t + \psi(z)$;

$$(8)\qquad \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\varpi_1, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_2 + \omega_3\omega_4, \\ \omega_3' = 0, \\ \omega_4' = \omega_3\varpi_3, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &X = f(x), \\ &Y = ay + \varphi(x) + \psi(z), \\ &Z = z + a, \\ &T = t + \psi'(z). \end{aligned}$$

И, наконец, имеется интранзитивная группа, представимая теми же структурными формулами, что и последняя из указанных групп, для которой z является инвариантом.

78. Вид (16) структурных уравнений очень удобен для исследования групп, изоморфных данной группе G. Действительно, нетрудно показать, что всякая группа $\mathcal{G}$, такая что одно из нормальных продолжений группы G служит ее голоэдрическим продолжением, голоэдрически изоморфна G и интегралы уравнений

$$h_{i1}\omega_1 + h_{i2}\omega_2 + \ldots + h_{i\sigma}\omega_\sigma = 0, \qquad (i = 1, \ldots, \sigma)$$

преобразуются группой $\mathcal{G}$. Следовательно, если выбрать среди уравнений полной системы, определяющей переменные, на которых действует группа $\mathcal{G}$, те, левые части которых выражаются через инвариантные формы группы G или одного из ее нормальных продолжений, то они образуют полную систему.

Можно доказать также, что σ форм, соответствующих σ корням характеристического уравнения, *инвариантны*, т. е. они совпадают для всех групп, изоморфных группе G и имеющих структурные уравнения вида (16).

ПОДГРУППЫ
НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Этот мемуар можно рассматривать как продолжение Мемуара, появившего ранее в двух частях [1]), где изложена структурная теория непрерывных групп преобразований, применяемая как к бесконечномерным, так и к конечномерным группам. В классической теории Ли структура конечномерной группы определяется так называемыми *структурными константами*; эти константы возникают при рассмотрении композиций инфинитезимальных преобразований группы. Следовательно, в основе этой классической структурной теории лежит понятие инфинитезимального преобразования. Но если оставаться на этой точке зрения, то теория ограничится конечномерными группами и ее невозможно будет распространить на бесконечномерные группы. Напротив, в теории, которую я предлагаю, исходным пунктом являются *определяющие уравнения* алгебраических уравнений группы, и именно они порождают константы, которые я называю *структурными константами* группы. Эти константы совпадают с константами Ли в частном случае конечномерной группы, но они существуют всегда, независимо от того, будет ли группа конечномерной или бесконечномерной.

Известно, как введение понятия структуры позволило С. Ли свести к чисто *алгебраическим* операциям проблему определения и классификации подгрупп данной группы, по крайней мере, ограничиваясь нахождением инфинитезимальных преобразований подгрупп, если известны инфинитезимальные преобразования группы, или же нахождением структуры подгрупп, если известна структура группы.

В настоящем мемуаре показано, как новое понятие структуры позволяет свести к чисто *алгебраическим* операциям построение систем дифференциальных уравнений, необходимых для выписывания определяющих урав-

---

Перевод статьи «Les sous-groupes des groupes continus de transformations», *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXV, 1908, p. 57 – 194.

[1]) E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXI, 1904, p. 153–206; 3-e série, t. XXII, 1905, p. 219-308). (Русский перевод: стр. 9 – 139 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

нений подгрупп данной группы, когда известны определяющие уравнения этой группы; если известна лишь структура группы, то те же чисто алгебраические операции позволяют найти и классифицировать структуры ее различных подгрупп; они также непосредственно дают для каждой подгруппы структуру наибольшей подгруппы, в которой она инвариантна.

Изложенный ниже метод сводит нахождение подгрупп данной группы к решению частной проблемы эквивалентности относительно группы, заданной некоторой вполне интегрируемой системой уравнений в полных дифференциалах. Поэтому в первой главе излагается решение общей проблемы эквивалентности дифференциальных систем в форме, наиболее удобной для последующих приложений. Общее решение проблемы уже дано в работах С. Ли и его последователей; таким образом, новое здесь — лишь *форма* данного решения; при этом я указываю на следующее важное (и новое) обстоятельство. Если две дифференциальные системы эквивалентны относительно некоторой группы, то совокупность всех преобразований группы, переводящих первую систему во вторую, получается, если сначала осуществить частное преобразование, обладающее этим свойством, а затем общее преобразование, сохраняющее вторую дифференциальную систему. Такие преобразования образуют подгруппу; приводимое решение выявляет *структуру* этой подгруппы и, следовательно, до некоторой степени, *природу* множества преобразований первой системы во вторую.

В главе II изложен общий метод нахождения подгрупп данной группы; этот метод применяется сначала к конечномерным группам, затем к бесконечномерной группе конформных преобразований плоскости; указаны различные типы конформных групп, и для каждой из них найдена наибольшая подгруппа, в которой она инвариантна.

В главах III и IV этот метод применяется к нахождению различных типов непрерывных групп с двумя переменными, рассматриваемых как подгруппы общей группы преобразований пространства двух переменных.(1)). Для каждой полученной группы указана наибольшая подгруппа, в которой она инвариантна. Только этот результат является новым, поскольку С. Ли уже определил все конечномерные(2)) и бесконечномерные(3)) группы с двумя переменными. Таким образом, целью глав III и IV является скорее иллюстрация метода, чем получение новых результатов. Заметим, что нахождение конечномерных и бесконечномерных групп происходит одним и тем же еди-

---

(1)) В современной терминологии — группы диффеоморфизмов плоскости. — *Прим. ред.*

(2)) *Nouv. Arch.* t. III, 1878, p. 125; *Nouv. Arch.*, t. X, 1885, p. 74; *Math. Ann.*, t. XMI, 1888, p. 455.

(3)) *Leipz. Abh.*, t. XXI, 1895, p. 51

нообразным способом. Можно заметить также, что нахождение подгрупп требует лишь *рациональных* операций, после того как найдены так называемые подгруппы *степени* 1; что касается последних, их нахождение сводится по существу к нахождению подгрупп однородной линейной группы с двумя переменными.

Нахождение конечномерных и бесконечномерных групп преобразований пространства теперь не представляет особой трудности, кроме громоздкости их перечисления. Действительно, если ограничиться *транзитивными бесконечномерными* группами, существует 137 типов групп степени 1, которые легко находятся, поскольку известны все группы с тремя переменными. Каждая из этих 137 групп порождает другие группы степени большей 1; одна из них, например, порождает 98 различных групп. Впрочем, полное перечисление не представляет большого интереса, оно не дает никакой новой простой транзитивной группы, но возможно, стоит изучить среди интранзитивных групп те, которые я назвал несобственно простыми и которые представляют трудность для столь важной задачи, как построение нормального ряда подгрупп данной группы.¹)

---

¹) См. E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXII, 1905, p. 284 – 285. (Русский перевод: стр. 117 – 118 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

См. также заметку, появившуюся после того, как эта статья была послана в редакцию *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXLIV, 21 мая 1907, под названием «Les groupes de transformations continus, infinis, simples».

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ПРОБЛЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

1. Рассмотрим две системы n линейно независимых 1-форм от n переменных: одна система с n переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} \omega_1 = a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + \dots + a_{1n}dx_n, \\ \omega_2 = a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + \dots + a_{2n}dx_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ \omega_n = a_{n1}dx_1 + a_{n2}dx_2 + \dots + a_{nn}dx_n; \end{cases} \tag{1}$$

вторая с n переменными $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\begin{cases} \Omega_1 = A_{11}dX_1 + A_{12}dX_2 + \dots + A_{1n}dX_n, \\ \Omega_2 = A_{21}dX_1 + A_{22}dX_2 + \dots + A_{2n}dX_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ \Omega_n = A_{n1}dX_1 + A_{n2}dX_2 + \dots + A_{nn}dX_n; \end{cases} \tag{2}$$

где через a_{ik} обозначены данные функции от x, а через A_{ik} — данные функции от X. Задача, которую мы сейчас будем решать, состоит в том, чтобы узнать, можно ли для переменных X найти такие выражения через переменные x, что формы $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ сводятся к формам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ соответственно.

Решение, которое сейчас будет изложено, основано на рассмотрении билинейного ковариантa.¹) Ковариантыˀ) форм $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ можно выразить в виде

$$\omega'_s = \sum_{(ik)}^{1,2,\dots,n} c_{iks}\omega_i\omega_k \qquad (s = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

---

¹) См. E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXI, 1904, p. 154 – 156. (Русский перевод: стр. 10 – 12 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

²) Напомним, что ковариантом Картан называет внешний дифференциал и обозначает его штрихом. — *Прим. ред.*

а также коварианты Ω' — в виде

$$\Omega'_s = \sum_{(ik)}^{1,2,\ldots,n} C_{iks}\Omega_i\Omega_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Если какая-нибудь замена переменных преобразует ω_s в Ω_s, то она также преобразует ω'_s в Ω'_s и, следовательно,

$$C_{iks} = c_{iks}. \tag{5}$$

Предположим, что среди $n^2(n-1)/2$ коэффициентов c_{iks} имеется r независимых, а остальные являются их функциями.

Обозначим их через $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Дифференциалы dy_i можно выразить в виде

$$\begin{cases} dy_1 = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1n}\omega_n, \\ dy_2 = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 + \ldots + h_{2n}\omega_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_r = h_{r1}\omega_1 + h_{r2}\omega_2 + \ldots + h_{rn}\omega_n. \end{cases} \tag{6}$$

Предположим, что среди новых коэффициентов h имеется $r_1 - r$ независимых между собой и с y, обозначим их через $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{r_1}$. Вычислим их дифференциалы:

$$\begin{cases} dy_{r+1} = h_{r+1,1}\omega_1 + h_{r+1,2}\omega_2 + \ldots + h_{r+1,n}\omega_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_{r_1} = h_{r_1,1}\omega_1 + h_{r_1,2}\omega_2 + \ldots + h_{r_1,n}\omega_n. \end{cases} \tag{7}$$

Если среди новых коэффициентов h имеется $r_2 - r_1$ независимых между собой и с y, то, обозначив их через $y_{r_1+1}, y_{r_1+2}, \ldots, y_{r_2}$, вычислим их дифференциалы, и так далее до тех пор, пока не перестанем получать новые независимые функции.

В результате мы получим некоторое число $p \leqslant n$ независимых функций $y_1, y_2, \ldots, y_p$ от x, обладающих следующими двумя свойствами:

1° Коэффициенты формул (3) выражаются через y.

2° Коэффициенты в выражениях дифференциалов dy через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ также выражаются через y.

2. Далее, если преобразование системы (1) в систему (2) возможно, то *необходимо, чтобы те же самые операции, произведенные над системой* (2), *приводили бы к тому же числу* p *функций* Y, *и чтобы, кроме того, коэффициенты* C_{iks} *формул* (4) *и коэффициенты* H_{ik} *при* Ω *в разложении* dY_i *были теми же функциями* Y, *какими функциями от* y *являются соответствующие величины* c_{iks} *и* h_{ik}.

Это необходимое условие является также и достаточным; мы сейчас увидим, что самое общее преобразование, переводящие систему (1) в систему (2), зависит от $n-p$ параметров.

Действительно, предположим для определенности, что p дифференциалов dy линейно независимы относительно $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, и рассмотрим систему

$$\begin{cases} Y_1 - y_1 = 0, \\ Y_2 - y_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ Y_p - y_p = 0, \\ \Omega_{p+1} - \omega_{p+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_n - \omega_n = 0. \end{cases} \tag{8}$$

В силу предположения, эта система влечет равенства

$$\begin{gathered} \Omega_1 = \omega_1, \\ \ldots\ldots, \\ \Omega_p = \omega_p, \end{gathered}$$

и достаточно ее проинтегрировать, чтобы найти общее решение.

Принимая во внимание равенства $Y = y$, видим, что билинейные коварианты левых частей $\Omega_{p+1} - \omega_{p+1}, \ldots, \Omega_n - \omega_n$ уравнений этой системы обращаются в нуль в силу (8).

Следовательно, *эта система вполне интегрируема и ее общее решение зависит от* $n-p$ *произвольных постоянных.*

Если найдено частное преобразование, переводящее систему (1) в систему (2), то самое общее такое преобразование получится, если осуществить над x самое общее преобразование, оставляющее инвариантными формы ω_i. Это преобразование порождает группу с $n-p$ параметрами, *структура* которой определяется формулами (3), с инвариантами $y_1, y_2, \ldots, y_p$.[1]) *Эта*

---

[1]) E. Cartan. *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXI, 1904, p. 186. (Русский перевод: стр. 39 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

структура, по доказанной в другом месте[1]) теореме, *определяется также константами* $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = p+1, \ldots, n)$, *где переменным* x *присвоены произвольные числовые значения.*

3. Можно искать эквивалентность между системами (1) и (2), добавляя то ограничение, что некоторое число h данных независимых функций $z_1, z_2, \ldots, z_h$ от x преобразуется в то же число h (также произвольно заданных) функций $Z_1, \ldots, Z_h$ от X. В решении ничего не изменится, кроме того, что данные функции x должны рассматриваться как функции y; за $y_1, y_2, \ldots, y_r$ принимаем h функций z и $r-h$ коэффициентов c_{iks}, независимых между собой и с z; предполагается, что все остальные выражаются через z и эти $r-h$ коэффициентов.

4. Поставим теперь следующую общую проблему:

Пусть даны, с одной стороны, n *линейно независимых форм* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *относительно* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и* m *независимых функций* $y_1, \ldots, y_n$ *от* n *переменных* x, *и, с другой стороны, система* n *линейно независимых форм* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ *относительно* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *и* m *независимых функций* $Y_1, \ldots, Y_m$ *от этих же* n *переменных* X. *Нужно определить, существует ли замена переменных, преобразующая соответственно функции* $y_1, \ldots, y_m$ *в* $Y_1, \ldots, Y_m$, *такая, что после этой замены формы* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ *будут получаться из* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *линейным преобразованием, принадлежащим данной линейной группе* Γ *с* r *параметрами, причем коэффициенты уравнений этой группы могут зависеть от* $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Другими словами, должны выполняться соотношения вида

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_1 = \alpha_{11}(y,u)\omega_1 + \alpha_{12}(y,u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{1n}(y,u)\omega_n, \\ \Omega_2 = \alpha_{21}(y,u)\omega_1 + \alpha_{22}(y,u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{2n}(y,u)\omega_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Omega_n = \alpha_{n1}(y,u)\omega_1 + \alpha_{n2}(y,u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{nn}(y,u)\omega_n, \end{array}\right. \tag{9}$$

где α — данные функции от $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и от r величин $u_1, u_2, \ldots, u_r$, которые после каждой замены переменных (являющейся решением задачи) будут некоторыми функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; кроме того, эти функции α таковы, что если рассматривать переменные u как параметры, а переменные y как константы, то формулы (9) определяют линейную группу Γ (с n переменными $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$).

---

[1]) E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXI, 1904, p. 201. (Русский перевод: стр. 52 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

Можно формулировать задачу другим образом. Рассмотрим переменные u как r новых вспомогательных переменных и положим

$$\overline{\omega}_s = \alpha_{s1}(y,u)\omega_1 + \alpha_{s2}(y,u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{sn}(y,u)\omega_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Положим также

$$\overline{\Omega}_s = \alpha_{s1}(Y,U)\Omega_1 + \alpha_{s2}(Y,U)\Omega_2 + \ldots + \alpha_{sn}(Y,U)\Omega_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Исходная задача может быть заменена следующей:

Найти для $X_1, X_2, \ldots, X_n; U_1, \ldots, U_r$ *систему* $n+r$ *независимых функций от* $x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r$, *таких, что функции* Y *станут равны соответствующим функциям* y, *а формы* $\overline{\Omega}$ — *соответствующим формам* $\overline{\omega}$.

Теперь перейдем к изучению инвариантов системы, образованной m функциями y и n формами $\overline{\omega}$.

5. Рассмотрим дифференциалы $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ и выразим их через формы ϖ:

$$\begin{cases} dy_1 = h_{11}\overline{\omega}_1 + h_{12}\overline{\omega}_2 + \ldots + h_{1n}\overline{\omega}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_m = h_{m1}\overline{\omega}_1 + h_{m2}\overline{\omega}_2 + \ldots + h_{mn}\overline{\omega}_n. \end{cases} \tag{12}$$

Коэффициенты h_{ij} (функции от x, u) являются ковариантами рассматриваемой системы.

Предположим, что к $\overline{\omega}$ применено преобразование из группы Γ, тогда коэффициенты h_{ij} подвергаются линейному преобразованию, принадлежащему группе Γ' (двойственной к группе Γ). Точнее, если обозначить через h^0_{ij} функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, к которым сводятся h^0_{ij}, когда параметрам u присвоены значения, соответствующие единичному элементу — преобразованию из группы Γ, то h_{ij} будут получаться из h^0_{ij} преобразованием из группы Γ'. Две системы величин h^0_{ij} и h_{ij} будем называть *сопряженными* относительно группы Γ'. Теперь можно найти частное преобразование из группы Γ' такое, что система станет *частной* сопряженной системой; например, если среди величин h, рассмотренных как функции u, существует $r - r'$ независимых, то можно присвоить этим независимым функциям *фиксированные числовые значения*, а остальные тогда станут функциями от x, которые можно выразить через $y_1, \ldots, y_m$ и $m' - m$ из этих функций. Эти $m' - m$ новых функций, которые мы обозначим $y_{m+1}, \ldots, y_{m'}$, — инварианты *системы*.

Таким образом, нам удалось найти в качестве инвариантов: целые числа r' и m' и функции, при помощи которых h_{ij} выражаются через $y_1, \ldots, y_{m'}$ при условии, что $r - r'$ из них принимают фиксированные значения.

После этого *можно всегда выбрать формы* ω *и формы* Ω *так, чтобы* $r - r'$ *рассмотренных коэффициентов* h_{ij} *приняли заранее заданные числовые значения* (это сводится к замене, при необходимости, форм ω другими формами, которые получаются из них некоторым линейным преобразованием из группы Γ, что ничего не изменит в условии задачи).

Тогда общее линейное преобразование из группы Γ, *которое переводит формы* ω *в* Ω, *соответствует общему преобразованию из группы* Γ', *сохраняющему систему* h_{ij}^0. Это преобразование порождает, очевидно, r'-параметрическую подгруппу группы Γ'. Так как h_{ij} — функции от $y_1, \ldots, y_{m'}, u_1, \ldots, u_r$ (поскольку они получаются из h_{ij}^0 преобразованием из группы Γ'), эта подгруппа определяется $r - r'$ соотношениями между $u_1, u_2, \ldots, u_r, y_1, \ldots, y_{m'}$.

Следовательно, мы вернулись к исходной задаче, только теперь имеем $m' \geqslant m$ *функций* y, *а вместо группы* Γ — *одну из ее* r'*-параметрических подгрупп; коэффициенты уравнений этой подгруппы могут зависеть от* $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Будем обращаться с этой новой задачей так же, как со старой, до тех пор, пока оба числа m и r не перестанут изменяться. В конце концов это приведет к тому, что *коэффициенты* h_{ij} *в* (12) *будут зависеть только от* $y_1, y_2, \ldots, y_m$, *но не от* $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

6. После этого первого сведе́ния задачи рассмотрим билинейные ковarianты форм $\overline{\omega}_s$. Формулы (10) дают

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_s' = {} & \alpha_{s1}(y,u)\omega_1' + \alpha_{s2}(y,u)\omega_2' + \ldots + \alpha_{sn}(y,u)\omega_n' + \\ & + \sum_i^{1,\ldots,m} dy_i \left(\frac{\partial \alpha_{s1}}{\partial y_i}\omega_1 + \frac{\partial \alpha_{s2}}{\partial y_i}\omega_2 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{sn}}{\partial y_i}\omega_n \right) + \\ & + \sum_k^{1,\ldots,r} du_k \left(\frac{\partial \alpha_{s1}}{\partial u_k}\omega_1 + \frac{\partial \alpha_{s2}}{\partial u_k}\omega_2 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{sn}}{\partial u_k}\omega_n \right). \qquad (13)\end{aligned}$$

Но коварианты ω_i' линейно выражаются через dx, следовательно, также и через ω, или, наконец, через $\overline{\omega}$; то же верно для dy_i. Кроме того, пусть

$$\sum_\rho^{1,\ldots,r} \sum_{i,s}^{1,\ldots,n} e_\rho b_{i\rho s}\omega_i \frac{\partial f}{\partial \omega_s}$$

— самое общее инфинитезимальное преобразование из группы Г, где $b_{i\rho s}$ — функции от $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Как известно,

$$\frac{\partial\overline{\omega}_s}{\partial u_k} = \frac{\partial\alpha_{s1}}{\partial u_k}\omega_1 + \ldots + \frac{\partial\alpha_{sn}}{\partial u_k} = \sum \lambda_{k\rho}(u) b_{i\rho s}\overline{\omega}_i.$$

Тогда коварианты $\overline{\omega}'_s$ можно представить в виде

$$\overline{\omega}'_s = \sum_{(ik)} a_{iks}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k - \sum_{i,\rho} b_{i\rho s}\overline{\omega}_i \sum \lambda_{k\rho} du_k$$

или же, наконец, в виде

$$\overline{\omega}'_s = \sum_{(ik)} a_{iks}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k + \sum_{i,\rho} b_{i\rho s}\overline{\omega}_i\varpi_\rho \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

где через a_{iks} обозначены некоторые функции от x и u, а ϖ_ρ означают r форм относительно переменных x и u, линейно независимых относительно $du_1, du_2, \ldots, du_r$.

Предположим, что замена переменных, выражающая X через x и U через x и u, как указано выше, преобразует $\overline{\omega}_s$ в Ω_s. Имеем

$$\overline{\Omega}'_s = \sum_{(ik)} A_{iks}\overline{\Omega}_i\overline{\Omega}_k + \sum b_{i\rho s}\overline{\Omega}_i\Pi_\rho,$$

откуда

$$\sum (A_{iks} - a_{iks})\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k + \sum b_{i\rho s}\overline{\omega}_i(\Pi_\rho - \varpi_\rho) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Эти n равенств возможны, только если выполняются соотношения вида

$$\Pi_\rho = \varpi_\rho + v_{\rho 1}\overline{\omega}_1 + v_{\rho 2}\overline{\omega}_2 + \ldots + v_{\rho n}\overline{\omega}_n \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \tag{15}$$

$$A_{iks} = a_{iks} + \sum_{\rho}^{1,\ldots,r} (b_{k\rho s}v_{\rho i} - b_{i\rho s}v_{\rho k}), \tag{16}$$

где $v_{\rho i}$ — некоторые подходящим образом выбранные функции x и u.

Положим тогда

$$\begin{cases} \overline{\varpi}_\rho = \varpi_\rho + v_{\rho 1}\overline{\omega}_1 + \ldots + \overline{\omega}_n, \\ \overline{a}_{iks} = a_{iks} + \displaystyle\sum_{\rho}^{1,\ldots,r} (b_{k\rho s}v_{\rho i} - b_{i\rho s}v_{\rho k}), \end{cases} \tag{17}$$

где $v_{\rho i}$ — вспомогательные переменные.

Если дана какая-нибудь замена переменных x на X, то можно определить nr величин $V_{\rho i}$ таких, что

$$\overline{\Omega}_s = \overline{\omega}_s, \qquad \overline{\Pi}_\rho = \overline{\varpi}_\rho, \qquad \overline{A}_{iks} = \overline{a}_{iks}.$$

Итак, мы подошли к изучению инвариантов системы форм $\overline{\omega}_s$ и $\overline{\varpi}_\rho$, функций y_i и коэффициентов $\overline{a}_{iks}$.

7. С этими последними коэффициентами поступим аналогично тому, как в п. 5 с коэффициентами h_{ij}. Применим к $\overline{\omega}$ инифинитезимальное преобразование из группы Γ:

$$\delta\overline{\omega}_s = \sum_\rho \sum_i e_\rho b_{i\rho s} \overline{\omega}_i.$$

Из формул

$$\overline{\omega}'_s = \sum \overline{a}_{iks} \overline{\omega}_i \overline{\omega}_k + \sum b_{i\rho s} \overline{\omega}_i \overline{\varpi}_\rho$$

следует, что

$$\delta\overline{\omega}'_s = \sum \delta\overline{a}_{iks} \overline{\omega}_i \overline{\omega}_k + \sum \overline{a}_{iks} (\delta\overline{\omega}_i \overline{\omega}_k + \overline{\omega}_i \delta\overline{\omega}_k) + \sum b_{i\rho s} (\delta\overline{\omega}_i \overline{\varpi}_\rho + \overline{\omega}_i \delta\overline{\varpi}_\rho).$$

Но легко видеть, что приращение формы $\overline{\omega}'_s$ равно билинейному коварианту от $\delta\overline{\omega}^s$:

$$\delta\overline{\omega}'_s = \sum de_\rho b_{i\rho s} \overline{\omega}_i + \sum e_\rho db_{i\rho s} \overline{\omega}_i + \sum e_\rho b_{i\rho s} \overline{\omega}'_i.$$

Приравнивая найденные для $\delta\overline{\omega}'_s$ выражения и заменяя $\overline{\omega}'_i, \delta\overline{\omega}_i, \ldots$ их значениями, получим

$$\begin{gathered}
\sum_{\lambda,\rho} b_{\lambda\rho s} \overline{\omega}_\lambda (\delta\overline{\varpi}_\rho + de_\rho) + \sum_{\rho,\lambda,\sigma} e_\rho \sum_i (b_{\lambda\rho i} b_{i\sigma s} - b_{\lambda\sigma i} b_{i\rho s}) \overline{\omega}_\lambda \overline{\varpi}_\sigma + \\
+ \sum_{\lambda,\mu} \Biggl\{ \delta\overline{a}_{\lambda\mu s} + \sum_\rho e_\rho \Biggl[\sum_i (\overline{a}_{i\mu s} b_{\lambda\rho i} + \overline{a}_{\lambda i s} b_{\mu\rho i} - \overline{a}_{\lambda\mu i} b_{i\rho s}) + \\
+ \sum_k \left(\frac{\partial b_{\lambda\rho s}}{\partial y_k} h_{k\mu} - \frac{\partial b_{\mu\rho s}}{\partial y_k} h_{k\lambda} \right) \Biggr] \Biggr\} \overline{\omega}_\lambda \overline{\omega}_\mu = 0. \qquad (18)
\end{gathered}$$

Вводя структурные константы $c_{\rho\sigma\tau}$ группы Γ, перепишем (18) в виде

$$\sum_i (b_{\lambda\rho i} b_{i\sigma s} - b_{\lambda\sigma i} b_{i\rho s}) = \sum_\tau c_{\rho\sigma\tau} b_{\lambda\tau s};$$

первая строчка (18) превратится в

$$\sum_{\lambda,\rho} b_{\lambda\rho s}\left(\delta\overline{\varpi}_\rho + de_\rho - \sum_{\sigma,\tau} e_\tau c_{\delta\tau\rho}\overline{\varpi}_\sigma\right).$$

Отсюда вытекают формулы

$$\begin{cases} \delta\overline{\varpi}_\rho = -de_\rho - \sum\limits_{\sigma,\tau} e_\sigma c_{\sigma\tau\rho}\overline{\varpi}_\tau + \sum\limits_i e_{\rho i}\overline{\omega}_i, \\ \delta\overline{a}_{\lambda\mu s} = \sum\limits_\rho e_\rho \Bigg[\sum\limits_i (\overline{a}_{\lambda\mu i} b_{i\rho s} - \overline{a}_{\lambda i s} b_{\mu\rho i} + \overline{a}_{\mu i s} b_{\lambda\rho i}) + \\ \qquad + \sum\limits_k \left(\dfrac{\partial b_{\mu\rho s}}{\partial y_k} h_{k\lambda} - \dfrac{\partial b_{\lambda\rho s}}{\partial y_k} h_{k\mu}\right)\Bigg] + b^s_{\mu\rho} e_{\rho\lambda} - b_{\lambda\rho s} e_{\rho\mu}, \end{cases} \tag{19}$$

где $e_{\rho i}$ обозначают nr новых форм.

Эти формулы показывают, что коэффициенты $\overline{a}_{iks}$ преобразуются группой Γ_1 с $r(n+1)$ параметрами (коэффициенты могут зависеть от y). Величины $u_\rho, v_{\rho i}$ входят как параметры в уравнения этой группы. Иначе говоря, если обозначить через $\overline{a}^0_{iks}$ значения $\overline{a}_{iks}$ при частных значениях u и v, то общие выражения $\overline{a}_{iks}$ получаются из $\overline{a}^0_{iks}$ общим преобразованием из группы Γ_1.

Отсюда получим, что если среди функций $\overline{a}_{iks}$ (рассматриваемых как функции от u, v) имеется l независимых, то формы ω можно выбрать таким образом, что эти l коэффициентов примут заранее заданные числовые значения; остальные будут *инвариантными* функциями от x, которые можно выразить через $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и через $m' - m$ других, скажем, через $y_{m+1}, \ldots, y_{m'}$. Кроме того, *группа* Γ_1 *приведется к той из своих подгрупп, которая сохраняет заранее заданные числовые значения* l *рассмотренных коэффициентов* $\overline{a}_{iks}$.

Возможны два случая. Так как Γ мериэдрически изоморфна Γ_1, то приведение Γ_1 может не являться приведением Γ, а может и являться. В этом втором случае можно будет из соотношений между u, v, y, определяющих подгруппу в Γ_1, вывести соотношения только между u и y; это — соотношения, определяющие подгруппу группы Γ, к которой она сводится, если m' больше m; из рассмотрения инвариантов $y_{m+1}, \ldots, y_{m'}$ можно также получить приведение группы Γ.

Таким образом, шаг за шагом все сводится к случаю, когда *все коэффициенты* $\overline{a}_{iks}$ *зависят только от* $y_1, y_2, \ldots, y_m$, *но не зависят ни от* u, *ни от* v. Вообще говоря, nr величин $v_{\rho i}$ не являются произвольными, например,

$nr - r_1$ из них выражаются через y, u и r_1 остальных величин $v_{\rho i}$. Новая группа Γ_1 будет иметь $r + r_1$ параметров. Формы $\overline{\varpi}_\rho$ (в количестве r) зависят только от x, u и r_1 оставшихся параметров v. Если учесть, что все $\delta\overline{a}_{\lambda\mu s}$ равны нулю, то получается $nr - r_1$ линейных соотношений между e_ρ и e_i^ρ:

$$\sum_\rho (b_{\mu\rho s} e_{\rho\lambda} - b_{\lambda\rho s} e_{\rho\mu}) + \sum_\rho e_\rho \sum_i (\overline{a}_{\lambda\mu i} b_{i\rho s} - \overline{a}_{\lambda i s} b_{\mu\rho i} + \overline{a}_{\mu i s} b_{\lambda\rho i}) + \\ + \sum_\rho e^\rho \sum_k \left(\frac{\partial b_{\mu\rho s}}{\partial y_k} h_{k\lambda} - \frac{\partial b_{\lambda\rho s}}{\partial y_k} h_{k\mu} \right) = 0 \qquad (\lambda, \mu, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти соотношения позволяют, например, линейно выразить $e_{\rho i}$ через e_ρ и r_1 новых произвольных форм $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1}$

$$e_{\rho i} = \sum_\sigma^{1,\ldots,r} \alpha_{i\sigma\rho} e_\sigma + \sum_n^{1,\ldots,\tau} \beta_{i\lambda\rho} \varepsilon_\lambda, \qquad (i = 1, \ldots, n, \quad \rho, \sigma = 1, \ldots, r), \tag{20}$$

где коэффициенты являются функциями от y.

8. Предположим, что для двух данных систем таких форм эта процедура дала одно и то же число m инвариантов: $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — для первой системы, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ — для второй; пусть коэффициенты h_{ij} для обеих этих систем будут одними и теми же функциями и пусть то же верно по отношению к коэффициентам $\overline{a}_{iks}$. Требуется определить, эквивалентны ли эти две системы, т. е. можно ли выразить X и U в виде функций от x и u, преобразующих y в Y и $\overline{\omega}$ в $\overline{\Omega}$. Для этого предположим, что определитель

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ h_{m1} & h_{m2} & \ldots & h_{mm} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} Y_1 - y_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ Y_m - y_m = 0, \\ \overline{\Omega}_{m+1} - \overline{\omega}_{m+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{\Omega}_n - \overline{\omega}_n = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Если для X и U найдутся выражения в виде функций от x и u, удовлетворяющие этим уравнениям, то они будут также (в силу сделанных предположений) удовлетворять уравнениям

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\Omega}_1 - \overline{\omega}_1 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \overline{\Omega}_m - \overline{\omega}_m = 0. \end{array}\right. \tag{22}$$

Принимая во внимание равенство $Y = y$, видим, что билинейные коварианты левых частей уравнений

$$\begin{gathered} \overline{\Omega}_{m+1} - \overline{\omega}_{m+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \overline{\Omega}_n - \overline{\omega}_n = 0 \end{gathered}$$

имеют вид

$$\begin{gathered} \sum_{i,\rho} b_{i,\rho,m+1}\overline{\omega}_i(\overline{\Pi}_\rho - \overline{\varpi}_\rho), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum_{i,\rho} b_{i,\rho,n}\overline{\omega}_i(\overline{\Pi}_\rho - \overline{\varpi}_\rho). \end{gathered}$$

Воспользуемся теорией систем в инволюции.[1] Обозначим через

$$t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_n; \dots; t_1^{(n-1)}, \dots, t_n^{(n-1)}$$

n систем от n произвольных переменных и рассмотрим матрицу с $n(n-m)$ строками и r столбцами

$$\begin{vmatrix}
\sum b_{i,1,m+1}t_i & \sum b_{i,2,m+1}t_i & \dots & \sum b_{i,r,m+1}t_i \\
\hdotsfor{4} \\
\sum b_{i,1,n}t_i & \sum b_{i,2,n}t_i & \dots & \sum b_{i,r,n}t_i \\
\sum b_{i,1,m+1}t'_i & \sum b_{i,2,m+1}t'_i & \dots & \sum b_{i,r,m+1}t'_i \\
\hdotsfor{4} \\
\sum b_{i,1,n}t'_i & \sum b_{i,2,n}t'_i & \dots & \sum b_{i,r,n}t'_i \\
\sum b_{i,1,m+1}t''_i & \sum b_{i,2,m+1}t''_i & \dots & \sum b_{i,r,m+1}t''_i \\
\hdotsfor{4} \\
\sum b_{i,1,n}t_i^{(n-1)} & \sum b_{i,2,n}t_i^{(n-1)} & \dots & \sum b_{i,r,n}t_i^{(n-1)}
\end{vmatrix}.$$

---

[1] См. E. Cartan. *Annales de l'École Normale*, 3-e serie, t. XXI, 1904, p. 154–175. (Русский перевод: стр. 10–29 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

Обозначим через σ_1 степень главного минора матрицы из первых $n-m$ строк, через $\sigma_1+\sigma_2$ — степень главного минора матрицы из первых $2(n-m)$ строк, ..., через $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n$ — степень главного минора матрицы из $n(n-m)$ строк.

Наконец, рассмотрим систему линейных уравнений с rn неизвестными $z_{\rho i}$

$$\begin{cases} \sum\limits_{\rho} b_{\mu\rho,m+1}z_{\rho\lambda} - \sum\limits_{\rho} b_{\lambda\rho,m+1}z_{\rho\mu} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{\rho} b_{\mu\rho,n}z_{\rho\lambda} - \sum\limits_{\rho} b_{\lambda\rho,n}z_{\rho\mu} = 0 \end{cases} \qquad (\lambda,\mu=1,2,\ldots,n). \qquad (23)$$

Система (21) *будет системой в инволюции, если число неизвестных* $z_{\rho i}$, *которые в* (23) *можно выбрать произвольно, равно*

$$\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+n\sigma_n.$$

В этом случае система (21) допускает бесконечное множество решений, зависящее от σ_n произвольных функций n аргументов, σ_{n-1} произвольных функций $n-1$ аргумента и т.д. Если имеется частное решение, то общее решение получается, если к x и u применить самое общее преобразование, сохраняющее инвариантными функции y и формы $\overline{\omega}$. Эти преобразования образуют группу, структура которой непосредственно определяется формулами, дающими $\overline{\omega}'_1, \overline{\omega}'_2, \ldots, \overline{\omega}'_n$.

Предположения, сделанные относительно коэффициентов h_{ik}, показывают, что

$$\sum_{i}^{1,\ldots,n} h_{ki}b_{\lambda\rho i} = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,m, \quad \lambda=1,2,\ldots,n, \quad \rho=1,2,\ldots,r).$$

Поэтому можно заменить систему $mn(n-1)/2$ линейных уравнений (23) системой $n^2(n-1)/2$ уравнений

$$\sum_{\rho}^{1,\ldots,r} b_{\mu\rho s}z_{\rho\lambda} - b_{\lambda\rho s}z_{\rho\mu} = 0 \qquad (\lambda,\mu,s=1,2,\ldots,n). \qquad (24)$$

Теперь мы видим, что число неизвестных $z_{\rho i}$, которые можно выбирать произвольно, есть не что иное, как r_1. Следовательно, условие инволютивности имеет вид

$$r_1=\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+n\sigma_n.$$

9. Теперь предположим, что система (21) не инволютивна, т. е.

$$r_1 < \sigma_2 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n.$$

Рассмотрим билинейные ковarианты r форм $\overline{\varpi}_\rho$, зависящих от x, u и r_1 новых вспомогательных переменных (r_1 величин v_i^ρ). В силу того, как эти r_1 величин входят в формы $\overline{\varpi}_\rho$, видно, что имеются формулы вида

$$\overline{\varpi}'_\tau = \sum_{(ik)} A_{ik\tau}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k + \sum_{i,\rho} B_{i\rho\tau}\overline{\omega}_i\overline{\varpi}_\rho + \sum_{(\rho,\sigma)} C_{\rho\sigma\tau}\overline{\varpi}_\rho\overline{\varpi}_\sigma + \sum_{i,\lambda} D_{i\lambda\tau}\overline{\omega}_i\chi_\lambda,$$

где буквами χ обозначены r_1 новых форм Пфаффа, независимых от $\overline{\omega}$ и $\overline{\varpi}$.

Применив к формулам (14) *фундаментальное тождество* [1], получим

$$\overline{\varpi}'_\tau = \sum_{(ik)} A_{ik\tau}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k + \sum_{i,\rho} \alpha_{i\rho\tau}\overline{\omega}_i\overline{\varpi}_\rho + \sum_{(\rho,\sigma)} c_{\rho\sigma\tau}\overline{\varpi}_\rho\overline{\varpi}_\sigma + \sum_{i,\lambda} \beta_{i\lambda\tau}\overline{\omega}_i\chi_\lambda \qquad (25)$$
$$(\tau = 1, 2, \ldots, r),$$

где $c_{\rho\sigma\tau}$ — структурные константы группы Γ, а коэффициенты $\alpha_{i\rho\tau}$ и $\beta_{i\lambda\tau}$ — те же самые, что в формулах (20).

Следовательно, только коэффициенты $A_{ik\tau}$ могут не зависеть от y. Если положить

$$\overline{\chi}_\lambda = \chi_\lambda + w_{\lambda 1}\overline{\omega}_1 + w_{\lambda 2}\overline{\omega}_2 + \ldots + w_{\lambda n}\overline{\omega}_n,$$
$$\overline{A}_{ik\tau} = A_{ik\tau} + \sum_{\lambda}^{1,\ldots,r_1} (\beta_{i\lambda\tau}w_{\lambda k} - \beta_{k\lambda\tau}w_{\lambda i}),$$

то формы $\overline{\chi}_\lambda$ и коэффициенты $\overline{A}_{ik\tau}$ — *инварианты*. Теперь коэффициенты $\overline{A}_{ik\tau}$ зависят от n переменных x, r величин u, r_1 величин v и nr_1 величин w.

Так же, как и выше (п. 7), доказывается, что эти коэффициенты преобразуются группой Γ_2 с $r + r_1 + nr_1$ параметрами. Действительно, давая обеим частям уравнения (25) приращение δ, получим

$$\sum_{i,\lambda} \beta_{i\lambda\tau}\overline{\omega}_i\delta\overline{\chi}_\lambda + \sum \delta\overline{A}_{ik\tau}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k = \ldots,$$

---

[1] См. E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXI, 1904, p. 155. (Русский перевод: стр. 11 настоящего издании. — *Прим. ред.*)

где правые части — известные выражения. Отсюда легко выводится, что

$$\delta\overline{\chi}_\lambda = -d\varepsilon_\lambda + \sum_i \varepsilon_{\lambda i}\overline{\omega}^i + \ldots, \tag{26}$$

где последующие члены линейны относительно e и ε, равно как и относительно $\overline{\varpi}$ и $\overline{\chi}$, а коэффициенты зависят только от y. Величины $\delta A_{ik\tau}$ линейно выражаются через $A_{ik\tau}$, причем коэффициенты являются линейными по e и ε формами с коэффициентами — функциями от y. Таким образом, имеем инфинитезимальное преобразование $(r+r_1+nr_1)$-параметрической группы Γ_2.

10. Если коэффициенты $\overline{A}_{ik\tau}$ на самом деле зависят от некоторых из этих параметров, то всегда можно некоторое число из них приравнять константам, тогда остальные будут инвариантами (функциями только переменных x), и группа Γ_2 приводится к своей подгруппе. Приведение группы Γ_2 к подгруппе может привести также Γ или Γ_1; новые инварианты, если они есть, также могут повлечь приводимость группы Γ.

В любом случае, после приведения и, при необходимости, введения новых инвариантов y, можно прийти к случаю, когда $\overline{A}_{ik\tau}$ являются функциями только инвариантов y и группа Γ_2 приводится к одной из своих $(r+r_1+r_2)$-параметрических подгрупп.

Рассмотрим характеристические числа $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n$, соответствующие системе коэффициентов $\beta_{i\lambda\rho}$. Если

$$r_2 = \sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n,$$

то система форм $\overline{\Omega}$ эквивалентна системе форм $\overline{\omega}$ при условии, что вторая система имеет то же число m инвариантов Y, а коэффициенты $h_{ik}, \overline{a}_{iks}, \overline{A}_{iks}$ будут теми же функциями своих аргументов, что и для системы $\overline{\omega}$. Общее преобразование, переводящее формы $\overline{\omega}$ в $\overline{\Omega}$, зависит от σ'_n произвольных функций n переменных, σ'_{n-1} произвольных функций $n-1$ переменной и т. д. Если имеется частное преобразование, переводящее $\overline{\omega}$ в $\overline{\Omega}$, то общее получается, если к x применить преобразования группы с m инвариантами, структура которой задается формулами (14) и (25).

Если же

$$r_2 < \sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n,$$

то мы получим билинейные коварианты форм $\overline{\chi}_\lambda$; таким образом, будут введены r_2 новых форм θ, причем можно считать, что все коэффициенты $\overline{\chi}_\lambda$, кроме коэффициентов при $\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k$, будут функциями от y. Рассуждая как выше, получим $(r+r_1+r_2+r_3)$-параметрическую группу Γ_3, и т. д.

Теория систем в инволюции показывает, что эта процедура при некотором целом α завершится, и тогда

$$r_\alpha = \sigma_1^{(\alpha-1)} + 2\sigma_2^{(\alpha-1)} + \ldots + n\sigma_n^{(\alpha-1)}.$$

Тогда мы получим структуру общей группы, сохраняющей формы $\overline{\omega}$, и найдем степень неопределенности преобразования, переводящего систему форм $\overline{\omega}$ в эквивалентную систему.

11. Обобщим задачу еще дальше. Рассмотрим, с одной стороны, m независимых функций $y_1, \ldots, y_m$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и два набора по n независимых форм

$$\begin{gathered} \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n, \\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_n; \end{gathered}$$

и, с другой стороны, m независимых функций $Y_1, \ldots, Y_m$ от n переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и два набора по n линейно независимых форм

$$\begin{gathered} \Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_n, \\ \Theta_1,\ \Theta_2,\ \ldots,\ \Theta_n. \end{gathered}$$

Поставим задачу определить, существует ли замена переменных, преобразующая функции y в функции Y, такая, что формы Ω получаются из ω линейным преобразованием, принадлежащим данной r-параметрической группе Γ, а формы Θ получаются из форм θ линейным преобразованием, принадлежащим r'-параметрической группе Γ', причем коэффициенты уравнений этих групп могут зависеть, помимо параметров, еще и от функций y.

Обозначим через

$$\begin{gathered} u_1, u_2, \ldots, u_r, \\ v_1, v_2, \ldots, v_{r'} \end{gathered}$$

параметры групп Γ и Γ', а через

$$\overline{\omega}_s,\ \overline{\theta}_s$$

— образы ω_s и θ_s при общем преобразовании группы Γ или Γ'. Тогда, очевидно, формы $\overline{\theta}$ линейно выражаются через $\overline{\omega}$ по формулам

$$\overline{\theta}_s = l_{s1}\overline{\omega}_1 + l_{s2}\overline{\omega}_2 + \ldots + l_{sn}\overline{\omega}_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где коэффициенты l_{ik} — функции x, u, v. Если применить к $\overline{\omega}$ преобразование из группы Γ, а к $\overline{\theta}$ преобразование из группы Γ', то коэффициенты l_{ik} подвергнутся преобразованию из $(r+r')$-параметрической линейной группы. Рассуждая как выше, видим, что некоторое число из этих коэффициентов можно считать постоянными, а остальные будут инвариантными функциями только переменных x. Тогда каждая из групп Γ и Γ' будет приведена к своей подгруппе, и эти две подгруппы будут, очевидно, изоморфны. Теперь можно забыть о формах $\overline{\theta}$, и задача свелась к исходной, но группа Γ заменена своей подгруппой.

12. Предыдущая общая проблема возникает, например, в случае, когда нужно определить, эквивалентны ли две системы уравнений в полных дифференциалах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно данной группы G, конечномерной или бесконечномерной. Действительно, из общей теории групп[1]) следует, что добавляя при необходимости новые вспомогательные переменные, можно определить группу некоторым количеством инвариантов $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и n формами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, которые преобразуются общим линейным преобразованием из r-параметрической линейной группы Γ; с другой стороны, если

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_v = 0 \tag{27}$$

— уравнения одной из данных дифференциальных систем, а

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_v = 0 \tag{28}$$

— уравнения второй (где мы пишем X вместо x), и если обозначить через $\theta_{v+1}, \ldots, \theta_n$ $n-v$ форм, независимых с v первыми (формы $\Theta_{v+1}, \ldots, \Theta_n$ определяются аналогично), то формы θ_i должны переводиться в Θ_i линейным преобразованием, которое преобразует систему уравнений (27) в систему (28); эти преобразования порождают группу, которую мы выше обозначали Γ'.

13. В качестве примера рассмотрим распознавание эквивалентности двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{x} = f(x, y),$$
$$\frac{dY}{X} = F(X, Y)$$

---

[1]) См. E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXI, 1904, p. 176 и последующие. (Русский перевод: стр. 30 и последующие настоящего издании. — *Прим. ред.*)

относительно группы преобразований G, определяемой уравнениями

$$X = X(x), \qquad Y = Y(y),$$

где $X(x), Y(y)$ — произвольные функции.

Положим здесь

$$\omega_1 = dx, \qquad \theta_1 = dy - f(x,y)dx,$$
$$\omega_2 = dy, \qquad \theta_2 = dx.$$

Группа Γ задается уравнениями

$$\overline{\omega}_1 = u_1\omega_1,$$
$$\overline{\omega}_2 = u_2\omega_2,$$

а группа Γ' — уравнениями

$$\overline{\theta}_1 = v_1\theta_1,$$
$$\overline{\theta}_2 = v_2\theta_1 + v_3\theta_2.$$

Применяя общую теорию, получим

$$\overline{\theta}_1 = \frac{v_1}{u_2}\overline{\omega}_2 - \frac{v_1 f(x,y)}{u_1}\overline{\omega}_1,$$
$$\overline{\theta}_2 = \frac{v_2}{u_2}\overline{\omega}_2 + \frac{v_3 - v_2 f(x,y)}{u_1}\overline{\omega}_1.$$

Четыре коэффициента правых частей можно приравнять константам [1]) так, что

$$\overline{\theta}_1 = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1,$$
$$\overline{\theta}_2 = \overline{\omega}_2,$$

причем

$$u_2 = v_1,$$
$$u_1 = v_1 f(x,y),$$
$$v_2 = v_1,$$
$$v_3 = v_1 f(x,y).$$

Тогда

$$\overline{\omega}_1 = uf(x,y)\,dx,$$
$$\overline{\omega}_2 = u\,dy,$$

---

[1]) Мы предполагаем, что функции $f(x,y)$ и $F(X,Y)$ отличны от нуля.

и группа Γ свелась к однопараметрической подгруппе

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_1 &= u\omega_1,\\ \overline{\omega}_2 &= u\omega_2.\end{aligned}$$

Вычислим теперь $\overline{\omega}'_1$ и $\overline{\omega}'_2$. Имеем

$$\begin{aligned}\overline{\omega}'_1 &= \overline{\omega}_1\left(-d\ln u - \frac{f'_y}{uf}\overline{\omega}_2\right),\\ \overline{\omega}'_2 &= \overline{\omega}_2\left(-d\ln u\right).\end{aligned}$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned}\overline{\omega}'_1 &= \overline{\omega}_1\overline{\varpi},\\ \overline{\omega}'_2 &= \overline{\omega}_2\overline{\varpi},\end{aligned}$$

где мы положили

$$\overline{\varpi} = -\frac{du}{u} - \frac{f'_y}{uf}\overline{\omega}^2 = -\frac{du}{u} - \frac{f'_y}{f}dy.$$

Вычислим $\overline{\varpi}'$:

$$\overline{\varpi}' = -\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}dxdy = -\frac{1}{u^2 f}\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2.$$

Следует различать два случая:

1° $\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y} = 0$. Необходимо, чтобы выполнялось также равенство

$$\frac{\partial^2 \ln F}{\partial x\,\partial y} = 0;$$

оба соответствующие уравнения эквивалентны, каждое из них допускает трехпараметрическую группу, структура которой определяется формулами

$$\begin{aligned}\overline{\omega}'_1 &= \overline{\omega}_1\varpi,\\ \overline{\omega}'_2 &= \overline{\omega}_2\varpi,\\ \varpi' &= 0.\end{aligned}$$

Эта группа интегрируема; приведение уравнений друг к другу выполняется в квадратурах. Одним из таких уравнений является, например,

$$\frac{dy}{dx} = 1.$$

2° $\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y} \neq 0$. Тогда коэффициент $\overline{\varpi}'$ при $\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2$ не равен нулю, и его можно приравнять единице, полагая

$$u = \sqrt{-\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}}.$$

Получаем

$$\overline{\omega}_1 = f\sqrt{-\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}}dx = \sqrt{-f\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}}dx,$$
$$\overline{\omega}_2 = \sqrt{-\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}}dy.$$

Тогда группа Г приводится к тождественному преобразованию. Имеем

$$\overline{\omega}_1' = \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial \ln f}{\partial y} + \dfrac{\partial^3 \ln f}{\partial x\,\partial y^2}}{\left(-\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}\right)^{3/2}}\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2,$$
$$\overline{\omega}_2' = \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial \ln f}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 \ln f}{\partial x^2\,\partial y}}{\left(-f\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}\right)^{3/2}}\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2.$$

Коэффициенты при $\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2$ в этих формулах — инварианты, которые мы обозначим через A и B; все остальные инварианты можно вывести из этих двух. Если I — какой-нибудь инвариант, то коэффициенты при $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ в dI — тоже инварианты, которые мы обозначим через X_1I и X_2I:

$$dI = X_1I\overline{\omega}_1 + X_2I\overline{\omega}_2. \tag{29}$$

Отсюда находим

$$X_2I = \frac{1}{\sqrt{-f\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}}}\frac{\partial I}{\partial y},$$
$$X_1I = \frac{1}{\sqrt{-\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x\,\partial y}}}\frac{\partial I}{\partial x}.$$

Применяя к (29) фундаментальное тождество, получим

$$X_1(X_2I) - X_2(X_1I) = -AX_1I - BX_2I.$$

Наконец, между инвариантами, производными от A и B, имеется соотношение, которое получается, если приравнять единице билинейный ковариант от $\overline{\varpi} = A\overline{\omega}_2 - B\overline{\omega}_1$:

$$X_1A = X_2B = 1. \tag{30}$$

Имеются ли в этом случае уравнения, допускающие группу? Последнее соотношение показывает, что числа A и B не могут быть оба константами. Следовательно, искомая группа зависит самое большее от одного параметра, а все инварианты — функции одного из них. Положим, например,

$$dA = C(\omega_2 + u\omega_1) \qquad \left(X_2A = C, \quad u = \frac{X_1A}{X_2A} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial A}{\partial x}\Big/\frac{\partial A}{\partial y}\right).$$

Тогда du имеет вид

$$du = F(u)(\omega_2 + u\omega_1);$$

применяя фундаментальное тождество, получим

$$B + uA = F(u).$$

Применение соотношения (30) приводит к формулам

$$\begin{aligned} A &= F'(u) - \frac{1}{F(u)}, \\ B &= F(u) - uF'(u) + \frac{u}{F(u)}, \\ dA &= \left[F(u)F''(u) + \frac{F'(u)}{F(u)}\right](\omega_2 + u\omega_1). \end{aligned}$$

Тогда единственной функцией, которая характеризует дифференциальное уравнение относительно данной бесконечномерной группы, будет функция $F(u)$; иначе говоря, два дифференциальных уравнения, для которых все инварианты выражаются через один, эквивалентны, если для каждого из них величина

$$B + A\frac{X_1A}{X_2A}$$

является одной и той же функцией от $\dfrac{X_1A}{X_2A}$. Всякое уравнение этого типа приводится к виду

$$\frac{dx}{dy} = u(x + y),$$

и тогда

$$F(u) = \sqrt{\frac{uu'^2}{uu'' - u'^2}},$$

где u' и u'' обозначают две производные u по его аргументу $x + y$.

Итак, дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

может допускать либо трехпараметрическую группу вида

$$X = X(x),$$
$$Y = Y(y),$$

и тогда оно приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

либо однопараметрическую группу, и тогда оно приводится к виду

$$\frac{dx}{dy} = u(x + y);$$

в общем случае оно не допускает никакой группы.

ГЛАВА II

НАХОЖДЕНИЕ ПОДГРУПП ДАННОЙ ГРУППЫ

14. Если дана группа преобразований $\mathcal{G}$, конечномерная или бесконечномерная, то другую группу g называют *подгруппой* группы $\mathcal{G}$, если все преобразования из g принадлежат $\mathcal{G}$. Две подгруппы g_1 и g_2 группы $\mathcal{G}$ называются *сопряженными* в $\mathcal{G}$, или принадлежащими к одному и тому же *типу*, если существует преобразование S из $\mathcal{G}$, преобразующее g_1 в g_2, или символически $S^{-1}g_1S = g_2$, т. е. если к первоначальным и преобразованным переменным применить замену, определенную преобразованием S, то уравнения подгруппы g_1 заменятся на уравнения подгруппы g_2. Если g_1 и g_2 — две сопряженные подгруппы группы $\mathcal{G}$, то общее преобразование группы $\mathcal{G}$, преобразующее g_1 в g_2, получится, если после общего преобразования из некоторой группы G_1 выполнить частное преобразование, преобразующее g_1 в g_2; здесь G_1 — наибольшая подгруппа группы $\mathcal{G}$, в которой подгруппа g_1 инвариантна.

Общая задача нахождения подгрупп данной группы $\mathcal{G}$ может быть сформулирована следующим образом:

1° *найти все типы подгрупп $\mathcal{G}$ и представителя каждого типа*;

2° *для каждой полученной таким образом подгруппы найти наибольшую подгруппу группы $\mathcal{G}$, в которой g_1 инвариантна.*

Легко видеть, что если две группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ голоэдричны, то каждой подгруппе одной из них соответствует подгруппа другой, которая ей голоэдрична, и обратно. Если ограничиться нахождением *структур* различных подгрупп данной группы $\mathcal{G}$, то решение задачи будет зависеть только от *структуры* группы $\mathcal{G}$.

Тогда задачу можно решить, исходя из общей теории конечномерных или бесконечномерных групп[1]) и из теории, изложенной в предыдущей главе.

15. Рассмотрим группу $\mathcal{G}$, которую мы можем, при необходимости, голоэдрически продолжить так, чтобы ее определяющие уравнения имели бы

---

[1]) См. E. Cartan. Sur la structure des groupes infinis de transformations (*Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXI, 1904, p. 153 – 206; 3-e serie, t. XXII, 1905, p. 219 – 308). (Русский перевод: стр. 9 – 139 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

1-й порядок; обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переменные, преобразуемые этой группой. Если g — одна из ее подгрупп, то определяющие уравнения g могут быть 1-го порядка, но могут быть и более высокого. Предположим, что они имеют порядок p.

Если рассмотреть последовательные нормальные продолжения[1] $\mathcal{G}', \mathcal{G}''$, $\mathcal{G}''', \ldots$ группы $\mathcal{G}$, то в каждом из них группе g соответствуют подгруппы $g', g'', g''', \ldots$. В силу теории нормальных продолжений, определяющие уравнения групп g', g'', g''' имеют порядки $p-1$, $p-2$, $\ldots$; таким образом, подгруппа $g^{(p-1)}$ группы $\mathcal{G}^{(p-1)}$ имеет определяющие уравнения 1-го порядка и подгруппа $g^{(p)}$ группы $\mathcal{G}^{(p)}$ имеет определяющие уравнения нулевого порядка. Итак, мы получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Пусть g — подгруппа группы $\mathcal{G}$. Тогда существует нормальное продолжение $\mathcal{G}^{(q)}$ группы $\mathcal{G}$ такое, что подгруппа $g^{(q)}$ группы $\mathcal{G}^{(q)}$, соответствующая подгруппе g, будет наибольшей подгруппой группы $\mathcal{G}^{(q)}$, сохраняющей некоторое число функций от переменных, преобразуемых группой $\mathcal{G}^{(q)}$.*

Назовем *степенью* подгруппы g наименьшее число q, для которого продолжение $g^{(q)}$ обладает свойством, объявленном в предыдущей теореме. Следует заметить, что порядок определяющих уравнений подгруппы g может превосходить ее степень.

В дальнейшем будем говорить, что функция от переменных, преобразуемых группой $\mathcal{G}^{(r)}$, имеет *порядок* r, если она не выражается через переменные, преобразуемые группой $\mathcal{G}^{(r-1)}$.

Пусть g — произвольная подгруппа степени q; если q' — какое-нибудь целое число, меньшее q, то, очевидно, существует подгруппа степени не большей q', содержащая g: эта подгруппа g' образована преобразованиями из группы $\mathcal{G}^{(q')}$, сохраняющими все инварианты подгруппы g порядка, меньшего или равного q'.

Если подгруппы g_1 и g_2 сопряжены, они обязательно имеют одну и ту же степень; более того, если одна из них, например g_1, содержится в подгруппе g_1' степени $q' < q$, то g_2 содержится в подгруппе g_2' той же степени q', и подгруппы g_1' и g_2' сопряжены.

Наконец, если подгруппы g_1 и g_2 степени q содержатся в одной и той же подгруппе g' степени $q' < q$, то для того, чтобы подгруппы g_1 и g_2 были сопряжены в $\mathcal{G}$, необходимо и достаточно, чтобы они были сопряжены в наибольшей подгруппе G' группы $\mathcal{G}$, в которой подгруппа g' инвариантна.

---

[1] E. Cartan. *Annales de l'Ecole Normale*, 3-e série, t. XXII, 1905, p. 229–234. (Русский перевод: стр. 66–71 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

Действительно, всякое преобразование из $\mathcal{G}$, которое преобразует g_1 в g_2, должно сохранять все инварианты подгруппы g', поскольку это общие для g_1 и g_2 инварианты порядка, меньшего или равного q'; следовательно, это преобразование принадлежит подгруппе G'.

16. С учетом предыдущих замечаний, все типы подгрупп группы $\mathcal{G}$ можно найти следующим образом.

Сначала найдем все типы подгрупп группы $\mathcal{G}$ степени нуль; пусть для каждого из этих типов найдены представители

$$g_0 = \mathcal{G}, \quad g_1, \; g_2, \; g_3, \; \dots \; ;$$

найдем для этих подгрупп наибольшие подгруппы группы $\mathcal{G}$, преобразующие их в себя:

$$G_0 = \mathcal{G}, \quad G_1, \; G_2, \; G_3, \; \dots \; .$$

Затем рассмотрим подгруппы G_i, для каждой из них найдем различные типы тех ее подгрупп, которые содержатся в g_i и имеют степень, меньшую или равную 1; для каждого из этих типов возьмем представителя и найдем его наибольшую подгруппу группы G_i, в которой представитель инвариантен. Таким образом, получим последовательность

$$g_{i,0} = g_i, \quad g_{i,1}, \; g_{i,2}, \; g_{i,3}, \; \cdots$$

инвариантных подгрупп в группах

$$G_{i,0} = G_i, \quad G_{i,1}, \; G_{i,2}, \; G_{i,3}, \; \dots \; .$$

Для каждой группы $G_{i,j}$ найдем различные типы ее подгрупп порядка $\leqslant 2$, содержащихся в $g_{i,j}$; для каждого из этих типов найдем представителя и определим для него наибольшую подгруппу группы $G_{i,j}$, в которой представитель инвариантен. Это даст последовательность

$$g_{i,j,0} = g_{i,j}, \quad g_{i,j,1}, \; g_{i,j,2}, \; \cdots$$

инвариантных подгрупп в группах

$$G_{i,j,0} = G_{i,j}, \quad G_{i,j,1}, \; G_{i,j,2}, \; \dots \; ,$$

и так далее.

Каждый тип подгрупп группы G будет получен через конечное число подобных операций, причем только один раз.

17. Заметим, что подгруппа степени q группы $\mathcal{G}$ является подгруппой степени нуль q-го нормального продолжения $\mathcal{G}^{(q)}$. Тогда различные частные задачи, возникающие по ходу дела, можно сформулировать следующим образом.

Для данной группы $\mathcal{G}$ найти все типы ее подгрупп степени нуль и для подгруппы каждого типа найти наибольшую подгруппу, в которой она инвариантна.

Заметим, что систему инвариантов (степени нуль) одной из искомых подгрупп g можно заменить вполне интегрируемой системой уравнений в полных дифференциалах, для которой эти инварианты являются интегралами. Эта система не является произвольной вполне интегрируемой системой, она имеет следующее характеристическое свойство: *наибольшая подгруппа группы $\mathcal{G}$, сохраняющая все ее интегралы, не сохраняет никакие функции порядка нуль, не являющиеся интегралами этой системы.*

Назовем вполне интегрируемые системы, обладающие этим характеристическим свойством, *системами* (Σ).

В силу этого, для того, чтобы подгруппы g и g' группы $\mathcal{G}$ были сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие системы (Σ) были *эквивалентны* относительно группы $\mathcal{G}$. Более того, наибольшая подгруппа G группы $\mathcal{G}$, которая сохраняет систему (Σ), соответствующую подгруппе g, — это в точности наибольшая подгруппа группы $\mathcal{G}$, сохраняющая совокупность интегралов системы (Σ).

18. Итак, общая задача нахождения подгрупп степени нуль данной группы $\mathcal{G}$ сводится к следующим задачам:

1° *Найти все типы вполне интегрируемых систем (Σ), где каждый тип образован совокупностью эквивалентных относительно группы $\mathcal{G}$ систем (Σ); для каждого типа найти представляющую его частную систему.*

2° *Для каждой системы (Σ) найти структуру наибольшей подгруппы G группы $\mathcal{G}$, которая сохраняет эту систему.*

3° *Для каждой системы (Σ) найти структуру наибольшей подгруппы g группы G, которая сохраняет каждый из ее интегралов.*

4° *Для каждой системы (Σ) найти определяющие и алгебраические уравнения соответствующей группы G.*

5° *Для каждой системы (Σ) найти определяющие и алгебраические уравнения соответствующей группы g.*

Задачи 1° и 2° решены в первой главе; в случае, если группа $\mathcal{G}$ задана структурой или определяющими уравнениями, решение требует выполнения только *алгебраических* операций. Задача 3° решена в предыдущей статье [1]), где содержится также способ определения, является ли вполне интегрируемая система системой (Σ); решение задачи 3° также требует выполнения только алгебраических операций.

В задачах 4° и 5° нахождение определяющих уравнений групп g и G требует (в случае, если группа $\mathcal{G}$ задана своими определяющими уравнениями) интегрирования *автоморфных* дифференциальных систем в смысле Вессио [2]). Это интегрирование приводит к алгебраическим уравнениям, если группа $\mathcal{G}$ задана алгебраическими уравнениями. Мы не будем здесь рассматривать эти две последние задачи.

Сейчас мы применим описанный выше общий метод сначала к нахождению подгрупп конечномерных групп, затем к нахождению подгрупп группы конформных отображений плоскости, и наконец, к нахождению подгрупп общей (бесконечномерной) группы общих преобразований пространства двух переменных [3]) .

Подгруппы конечномерных групп

19. Рассмотрим конечномерную группу $\mathcal{G}$ порядка r, которую можно считать просто транзитивной. Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_r$ переменные, которые она преобразует. Тогда $\mathcal{G}$ будет образована преобразованиями, сохраняющими r форм Пфаффа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$, линейно независимых относительно дифференциалов $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$. Кроме того, имеем

$$\omega_s' = \sum_{(i,k)}^{1,\dots,r} c_{iks}\omega_i\omega_k \qquad (s = 1, 2, \dots, r), \tag{1}$$

где коэффициенты c_{iks} — *структурные константы* группы.

Всякая подгруппа g порядка ρ порождается преобразованиями из группы $\mathcal{G}$, сохраняющими все интегралы вполне интегрируемой системы Пфаффа

---

[1]) E. Cartan. *Annales de l'Ecole Normale*, 3-e serie, t. XXII, 1905, p. 235 – 243. (Русский перевод: стр. 72 – 78 настоящего издания. — *Прим. ред.*) В главе, на которую здесь дана ссылка, рассмотрена, по существу, задача нахождения *инвариантных* подгрупп данной группы (задача, эквивалентная нахождению групп, мериэдрически изоморфных данной группе).

[2]) E. Vessiot. Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations (*Acta mathematica*, t. XXVIII, 1904, p. 307 – 349).

[3]) В современной терминологии — группы диффеоморфизмов плоскости. — *Прим. ред.*

из $r-\rho$ уравнений. Эту систему можно представить в виде

$$\begin{cases} \theta_1 \equiv \omega_{\rho+1} - a_{11}\omega_1 - a_{12}\omega_2 - \ldots - a_{1\rho}\omega_\rho = 0, \\ \theta_2 \equiv \omega_{\rho+2} - a_{21}\omega_1 - a_{22}\omega_2 - \ldots - a_{2\rho}\omega_\rho = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_{r-\rho} \equiv \omega_r - a_{r-\rho,1}\omega_1 - a_{r-\rho,2}\omega_2 - \ldots - a_{r-\rho,\rho}\omega_\rho = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Всякое преобразование из g, сохраняя систему (2) и все формы ω, будет сохранять все коэффициенты a_{ik}. *Следовательно, эти коэффициенты являются интегралами системы* (2).

Учитывая, что система (2) вполне интегрируема, и принимая во внимание, что дифференциалы da_{ik} обращаются в нуль в силу уравнений (2), получим алгебраические соотношения между a_{ik}. Действительно, образуем θ'_s; выражая $\omega_{\rho+1}, \ldots, \omega_r$ через $\omega_1, \ldots, \omega_\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{r-\rho}$, получим

$$\theta'_s = \sum_{(i,k)}^{1,\ldots,\rho} A_{iks}\omega_i\omega_k + \sum_{i=1}^{i=r-\rho}\sum_{k=1}^{k=\rho} B_{iks}\theta_i\omega_k + \sum_{(i,k)}^{1,\ldots,r-\rho} C_{ks}\theta_i\theta_k - \sum_{k=1}^{k=\rho} da_{sk}\omega_k$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r-\rho),$$

где A_{iks} — полиномы третьей степени относительно $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{r-\rho,\rho}$. Эти полиномы должны обращаться в нуль при любых $x_1, \ldots, x_r$:

$$A_{iks} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \rho; \;\; s = 1, 2, \ldots, r-\rho). \tag{3}$$

Но это не единственные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений (2). Требуется также, чтобы самое общее преобразование, сохраняющее все интегралы (2), не сохраняло никакую другую функцию от x. Для этого необходимо, чтобы уравнения

$$\frac{\partial\theta'_s}{\partial\theta_i} = 0$$

были бы следствиями уравнений (2), если заменить в θ'_s дифференциалы da_{sk} их выражениями в виде функций от θ. Это дает

$$da_{sk} = \sum_{i=1}^{i=r-\rho} B_{iks}\theta_i \qquad (s = 1, 2, \ldots, r-\rho; \;\; k = 1, 2, \ldots, \rho). \tag{4}$$

При этом B_{iks} — полиномы второй степени относительно a_{ik}.

Окончательно получаем, что коэффициенты a_{ik} удовлетворяют алгебраическим уравнениям (3) и дифференциальным уравнениям (4).

20. Докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть* a^0_{ik} *— система чисел, удовлетворяющих соотношениям* (3). *Тогда существует система коэффициентов* a_{ik}, *являющихся функциями от* $x_1, x_2, \dots, x_r$, *которая принимает значения* a^0_{ik} *при некоторых значениях переменных и удовлетворяющая уравнениям* (3) *и* (4).

Для доказательства можно предположить, что все a^0_{ik} равны нулю. Тогда система

$$\omega_{\rho+1} = \omega_{\rho+2} = \omega_r = 0$$

вполне интегрируема, и мы можем предположить, что $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \dots, x_r$ — ее интегралы. Тогда группа $\mathcal{G}$ преобразует $r-\rho$ переменных $x_{\rho+1}, \dots, x_r$. Пусть

$$\begin{aligned}
&X_1 = f_1(x_1, \dots, x_r; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&X_\rho = f_\rho(x_1, \dots, x_r; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r),\\
&X_{\rho+1} = f_{\rho+1}(x_{\rho+1}, \dots, x_r; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&X_r = f_r(x_{\rho+1}, \dots, x_r; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)
\end{aligned}$$

— ее конечные уравнения. Обозначим через g подгруппу, образованную преобразованиями из группы $\mathcal{G}$, сохраняющими набор значений $(x^0_{\rho+1}, \dots, x^0_r)$ переменных $x_{\rho+1}, \dots, x_r$. Это подгруппа порядка ρ, и поэтому она имеет $r-\rho$ инвариантов. Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ — один из них, то, очевидно, $\varphi(x_1, \dots, x_\rho, x^0_{\rho+1}, \dots, x^0_r)$ также является инвариантом. Если выбрать $x^0_{\rho+1}, \dots, x^0_r$ так, что якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_r)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)}$$

не обращается в нуль тождественно при $x_{\rho+1} = x^0_{\rho+1}$, $\dots$, $x_r = x^0_r$, то легко видим, что функция вида $\varphi(x_1, \dots, x_\rho, x^0_{\rho+1}, \dots, x^0_r)$, может быть инвариантна относительно преобразований подгруппы g, только если она становится константой при $x_i = x^0_i$. Следовательно, дифференциал $d\varphi(x_1, \dots, x_r)$ линейно выражается через дифференциалы $dx_{\rho+1}, \dots, dx_r$, т. е. через формы $\omega_{\rho+1}, \dots, \omega_r$, если в его коэффициентах положить $x_{\rho+1} = x^0_{\rho+1}$, $\dots$, $x_r = x^0_r$. Иначе говоря, система (2) для подгруппы g сводится к системе

$$\omega_{\rho+1} = \omega_{\rho+2} = \dots = \omega_r = 0,$$

если положить $x_{\rho+1} = x^0_{\rho+1}, \ldots, x_r = x^0_r$ в коэффициентах a_{ik}. Теорема доказана.

Впрочем, структуру подгруппы g найти легко. Обозначим через $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_\rho$ формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\rho$, в которых положили $x_{\rho+1} = x^0_{\rho+1}, \ldots, x_r = x^0_r$, $dx_{\rho+1} = \cdots = dx_r = 0$. Тогда уравнения

$$\begin{gathered}
X_1 = f_1(x_1, \ldots, x_\rho, x^0_{\rho+1}, \ldots, x^0_r; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_\rho = f_\rho(x_1, \ldots, x_\rho, x^0_{\rho+1}, \ldots, x^0_r; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),
\end{gathered}$$

где параметры α удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}
x^0_{\rho+1} = f_{\rho+1}(x^0_{\rho+1}, \ldots, x^0_r; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x^0_r = f_r(x^0_{\rho+1}, \ldots, x^0_r; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),
\end{gathered}$$

определяют группу, изоморфную подгруппе g, и эта группа образована преобразованиями, сохраняющими ρ форм $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_\rho$. С другой стороны, имеем

$$\overline{\omega}'_s = \sum_{(i,k)}^{1,\ldots,\rho} c_{iks} \overline{\omega}_i \overline{\omega}_k,$$

где c_{iks} — коэффициенты, которые входят в формулы (1).

Следовательно, структура подгруппы g определяется структурными константами группы $\mathcal{G}$, индексы которых меньше или равны ρ.

Предыдущие рассуждения достаточны для того, чтобы перечислить *все возможные структуры* подгрупп группы $\mathcal{G}$, но не для того, чтобы *классифицировать* эти подгруппы по классам сопряженных подгрупп. Поэтому вернемся к изучению уравнений (3) и (4).

21. Предыдущая теорема показывает, что система Пфаффа (4), в которой коэффициенты a_{ik} связаны соотношениями (3), *совместна*, и более того, *вполне интегрируема*. В самом деле, в противном случае она влекла бы в качестве следствий новые алгебраические соотношения между коэффициентами a_{ik}, что, как мы только что доказали, невозможно. Итак, рассмотрим числа a_{ik} как координаты точки в $\rho(r-\rho)$-мерном пространстве; тогда уравнения (3) определяют в этом пространстве одно или несколько неприводимых алгебраических многообразий M_1, M_2 и т. д.

Каждой подгруппе g группы $\mathcal{G}$ уравнения (3) и (4) ставят в соответствие многообразие μ, целиком лежащее в одном из этих многообразий $M_1, M_2, \ldots$.

Это многообразие μ — геометрическое место точек a_{ik} при всевозможных значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$. *Для того, чтобы подгруппы g и g' были сопряжены, очевидно необходимо, чтобы соответствующие им многообразия μ совпадали.*

Обратно, две подгруппы, которым соответствует одно и то же многообразие μ, сопряжены. Действительно, для одной из подгрупп коэффициенты a_{ik} — некоторые функции $x_1, x_2, \ldots, x_r$, для другой — функции от тех же переменных; обозначим эти функции через A_{ik}. По предположению, равенства

$$A_{ik}(X_1, X_2, \ldots, X_r) = a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \tag{5}$$

совместны, т. е. они выполняются, если X — подходящим образом выбранные функции от переменных x. Теперь остается доказать, что эти функции можно выбрать таким образом, чтобы они соответствовали некоторому преобразованию из группы $\mathcal{G}$. Итак, пусть h — размерность многообразия μ; это значит, что дифференциалы da_{ik} (выраженные через dx_i или через θ_i) образуют h линейно независимых форм; предположим, что они линейно независимы относительно $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h$. Рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{c} A_{ik}(X_1, X_2, \ldots, X_r) = a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_r), \\ \Omega_1 = \omega_1, \quad \ldots, \quad \Omega_\rho = \omega_\rho, \quad \Omega_{\rho+h+1} = \omega_{\rho+h+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_r = \omega_r, \end{array}\right. \tag{6}$$

где Ω_i — это формы ω_i, в которых переменные x заменены переменными X. Эта система вполне интегрируема, потому что уравнения (5) влекут за собой, если их продифференцировать и принять во внимание (6), равенства

$$\Omega_{\rho+1} = \omega_{\rho+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{\rho+h} = \omega_{\rho+h}.$$

Следовательно, система (6) допускает бесконечное множество решений, зависящих от $r - h$ параметров, и каждое из этих решений определяет преобразование из группы $\mathcal{G}$.

Итак, *две подгруппы, которым соответствует одно и то же многообразие μ, сопряжены*; *самое общее преобразование группы $\mathcal{G}$, которое переводит одну подгруппу в другую, зависит от $r-h$ параметров, если многообразие μ имеет размерность h. Каждая из этих подгрупп, следовательно, инвариантна в подгруппе G группы $\mathcal{G}$ порядка $r - h$.*

Для того, чтобы получить структуру одной из подгрупп, соответствующих некоторому многообразию μ, можно присвоить инвариантам этой подгруппы произвольные значения, например, значения, которые они имеют для (произвольных) данных значений $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Тогда получим группу, которая определяется формами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\rho$. Их внешние дифференциалы задаются формулами (1), в которых $\omega_{\rho+1}, \ldots, \omega_r$ заменены их значениями, полученными из формул (2), где a_{ik} — координаты некоторой произвольной точки многообразия μ. Структура наибольшей подгруппы G, в которой подгруппа g инвариантна, также определяется формами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$, удовлетворяющими h соотношениям $\sum B_{iks}\theta_i = 0$, где величины a_{ik} (от которых зависят B_{iks}) принимают те же значения, что и для подгруппы g.

22. Итак, классификация подгрупп группы $\mathcal{G}$ основывается на классификации многообразий μ. Эти многообразия сначала будут классифицироваться по их размерности. Для тех, которые содержатся в одном из неприводимых многообразий M, определяемых уравнениями (3), это число не превышает фиксированного значения, являющегося рангом матрицы из чисел B_{iks}, взятых в произвольной точке многообразия M. Если этот ранг меньше числа измерений M, то многообразия μ максимальной размерности, содержащиеся в M, зависят от параметров. Многообразия μ размерности $\sigma - 1$ содержатся в многообразии, которое получится, если приравнять нулю все миноры матрицы B_{iks} размера $\sigma \times \sigma$; то же верно для многообразий размерности $\sigma - 2$, $\sigma - 3$, ... Нульмерные многообразия μ (точки) соответствуют инвариантным подгруппам.

Отсюда следует (что, впрочем, очевидно), что типы подгрупп зависят не более чем от конечного числа *параметров*. Теорема п. 7 доказывает, что через каждую точку многообразия M проходит по крайней мере одно многообразие μ. То же верно для любого многообразия M_1, для которого ранг матрицы B_{iks} постоянен.

Вычисления, которые позволяют найти структуру подгрупп данной группы $\mathcal{G}$ и классифицировать эти подгруппы по типам, практически такие же, как в случае, когда группа определена r независимыми инфинитезимальными преобразованиями

$$X_1 f, \ X_2 f, \ \ldots, \ X_r f,$$

удовлетворяющими соотношениям

$$(X_i X_k) f = \sum_{s=1}^{s=r} c_{jks} X_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Однако интерпретация этих вычислений несколько различается. В частности, вместо того, чтобы получать инфинитезимальные преобразования, порождающие подгруппу g группы $\mathcal{G}$ (заданной также инфинитезимальными преобразованиями), мы получаем уравнения этой подгруппы g, при условии, что заданы определяющие уравнения группы $\mathcal{G}$.

Классический метод нахождения подгрупп, основанный на рассмотрении инфинитезимальных преобразований, не может быть распространен на случай бесконечномерных групп, тогда как метод, изложенный в предыдущих пунктах, применяется ко всем группам, как конечномерным, так и бесконечномерным.

Подгруппы группы конформных преобразований плоскости

23. Применим теперь этот метод для нахождения подгрупп бесконечномерной группы $\mathcal{G}$, преобразующей две переменные x и y и определенной уравнениями

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{1}$$

Если положить

$$\omega_1 = dx, \qquad \omega_2 = dy,$$

то $\mathcal{G}$ — наиболее общая группа, при которой ω_1 и ω_2 подвергаются линейному преобразованию, принадлежащему двухпараметрической группе Γ, определенной формулами

$$\begin{cases} \Omega_1 = u\omega_1 - v\omega_2, \\ \Omega_2 = v\omega_1 + u\omega_2. \end{cases} \tag{2}$$

Введем вспомогательные переменные u и v и положим

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= u\omega_1 - v\omega_2, \\ \overline{\omega}_2 &= v\omega_1 + u\omega_2. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \overline{\omega}'_1 &= \overline{\omega}_1\varpi_1 - \overline{\omega}_2\varpi_2, \\ \overline{\omega}'_2 &= \overline{\omega}_1\varpi_2 + \overline{\omega}_2\varpi_1; \end{aligned}$$

эти формулы определяют *структуру* группы.

Немного изменив обозначения, можно представить структуру группы $\mathcal{G}$ и ее последовательных нормальных продолжений $\mathcal{G}', \mathcal{G}'', \ldots$ следующими формулами:

$$\begin{cases} \omega_1' + i\varpi_1' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega_2 + i\varpi_2' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_3 + i\varpi_3), \\ \omega_3' + i\varpi_3' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_4 + i\varpi_4) + (\omega_2 + i\varpi_2)(\omega_3 + i\varpi_3), \\ \omega_4' + i\varpi_4' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_5 + i\varpi_5) + 2(\omega_2 + i\varpi_2)(\omega_4 + i\varpi_4), \\ \omega_5' + i\varpi_5' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_6 + i\varpi_6) + 3(\omega_2 + i\varpi_2)(\omega_5 + i\varpi_5) + \\ \qquad\qquad + 2(\omega_3 + i\varpi_3)(\omega_4 + i\varpi_4), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{3}$$

Например, можно положить

$$\begin{aligned} \omega_1 + i\varpi_1 &= (x_2 + iy_2)(dx_1 + i\,dy_1), \\ \omega_3 + i\varpi_2 &= -\frac{dx_2 + i\,dy_2}{x_2 + iy_2} + (x_3 + iy_3)(dx_1 + i\,dy_1), \\ \omega_3 + i\varpi_3 &= -\frac{dx_3 + i\,dy_3}{x_2 + iy_2} + (x_4 + iy_4)(dx_1 + i\,dy_1), \\ \omega_4 + i\varpi_4 &= -\frac{dx_4 + i\,dy_4}{x_2 + iy_2} + \frac{(x_3 + iy_3)(dx_3 + i\,dy_3)}{(x_2 + iy_2)^2} - \\ &\qquad - \frac{(x_4 + iy_4)(dx_2 + i\,dy_2)}{(x_2 + iy_2)^2} + (x_5 + iy_5)(dx_1 + i\,dy_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Группа $\mathcal{G}^{(n-1)}$ преобразует переменные $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Предположим, что подгруппа g группы $\mathcal{G}$ имеет степень n и минимальный порядок инвариантов подгруппы $g^{(n)}$ равен $p - 1$; тогда число независимых инвариантов минимального порядка $p - 1$ будет равно *одному* или *двум*.

В первом случае инвариант задается вполне интегрируемым уравнением вида

$$a_0\omega_p + b_0\varpi_p + a_1\omega_{p-1} + b_1\varpi_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega_1 + b_{p-1}\varpi_1 = 0; \tag{4}$$

во втором же случае инварианты задаются вполне интегрируемой системой вида

$$\begin{cases} \omega_p + a_1\omega_{p-1} + b_1\varpi_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega_1 + b_{p-1}\varpi_1 = 0, \\ \varpi_p + \alpha_1\omega_{p-1} + \beta_1\varpi_{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}\omega_1 + \beta_{p-1}\varpi_1 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

24. Первый случай. Будем отличать случай $p = 1$ от случая, когда число p больше 1.

1° $p = 1$. Будем искать все подгруппы g группы $\mathcal{G}$, которые имеют ровно один инвариант нулевого порядка. Этот инвариант является интегралом уравнения

$$a_0\omega_1 + b_0\varpi_1 = 0. \tag{4}$$

Приводя линейную группу Γ, можно считать, что уравнение (4) имеет вид

$$\varpi_1 = 0.$$

Тогда группа Γ приводится к своей подгруппе γ с уравнениями

$$\begin{cases} \Omega_1 = u\omega_1, \\ \Pi_1 = u\varpi_1. \end{cases} \tag{2'}$$

Имеем, следовательно, формулы вида

$$\omega_1' = \omega_1\omega_2,$$
$$\varpi_1' = \varpi_1\omega_2,$$

откуда вытекает

$$\omega' = A\omega_1\varpi_1.$$

Коэффициент A равен нулю, потому что в противном случае всякое преобразование подгруппы g сохраняло бы все интегралы системы $\varpi_1 = \omega_2 = 0$ и, следовательно, все интегралы системы $\varpi_1 = \omega_2 = \omega_1 = 0$ [1]), а тогда подгруппа g имела бы два инварианта порядка нуль.

Итак, наибольшая подгруппа g_1, сохраняющая все интегралы уравнения (4), инвариантна в трехпараметрической подгруппе G_1, определяемой формулами

$$G_1 \quad \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_1\omega_2, \\ \omega_2' = 0, \end{cases}$$

и она сохраняет также все интегралы системы $\varpi_1 = \omega_2 = 0$. Подгруппа g_1 — однопараметрическая; ее структура задается уравнением

$$\omega_1' = 0.$$

---

[1]) E. Cartan. *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXII, 1905, p. 237. (Русский перевод: стр. 73 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

Итак, *при* $p = 1$ *имеются подгруппы* g_1 *лишь одного типа; все они — однопараметрические инвариантные подгруппы в трехпараметрической подгруппе.*

Можно положить

$$\omega_1 = x_2\,dx_1,$$
$$\varpi_1 = x_2\,dy_1,$$
$$\omega_2 = -\frac{dx_2}{x_2}.$$

Тогда получим подгруппу сдвигов вдоль оси X

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + a, \\ Y_1 = y_1, \end{cases}$$

инвариантную в

$$\begin{cases} X_1 = \alpha x_1 + \beta, \\ Y_1 = \alpha y_1 + \gamma; \end{cases}$$

или же, полагая $z = x_1 + iy_1$, получим подгруппу

$$\boxed{g_1 \left\{ Z = z + a \right.},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_1 \left\{ Z = \alpha z + \beta + i\gamma \right.}.$$

25. 2° $p > 1$. Найдем все подгруппы g, имеющие один и только один инвариант порядка $p - 1 > 0$; этот инвариант определяется уравнением

$$\theta \equiv a_0\omega_p + b_0\varpi_p + a_1\omega_{p-1} = b_1\varpi_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega_1 + b_{p-1}\varpi_1 = 0. \qquad (4)$$

Здесь линейная группа $\Gamma^{(p-1)}$, присоединенная к $\mathcal{G}^{(p-1)}$, не меняет значения переменных $\omega_1, \varpi_1, \ldots, \omega_{p-1}, \varpi_{p-1}$ и заменяет ω_p и ϖ_p соответственно на $\omega_p + u\omega_1 - v\varpi_1$ и $\varpi_p + v\omega_1 + u\varpi_1$.

Можно, следовательно, считать, что коэффициенты a_{p-1} и b_{p-1} равны нулю. Тогда отношения любых двух коэффициентов $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{p-2}, b_{p-2}$ будут инвариантами рассмотренной подгруппы g порядка $\leqslant p - 1$; следовательно, с учетом (4), ясно, что их дифференциалы обращаются в нуль. Далее, можно предположить, что один из коэффициентов, a_0 или b_0, равен единице.

Учитывая, что уравнение (4) вполне интегрируемо, находим из него, что p равно 2. Действительно, ковариант θ' можно выразить (с учетом (4)) через $\omega_1, \varpi_1, \omega_2, \varpi_2, \ldots, \omega_{p-1}, \varpi_{p-1}, b_0\omega_p - a_0\varpi_p$, причем коэффициент при $\varpi_2(b_0\omega_p - a_0\varpi_p)$ равен $p-2$.

Итак, предположим, что $p = 2$. Уравнение (4) примет вид

$$\theta \equiv a_0\omega_2 + b_0\varpi_2 = 0. \tag{4}$$

Так как один из коэффициентов a_0, b_0 равен единице, то

$$\theta' = 0;$$

иначе всякое преобразование подгруппы g имело бы инварианты, не удовлетворяющие уравнению (4). Откуда находим

$$da_0 = db_0 = 0,$$
$$\omega_2' = b_0\alpha\omega_1\varpi_1, \qquad \varpi_2' = -a_0\alpha\omega_1\varpi_1.$$

Следовательно, коэффициенты a_0 и b_0 — константы, а коэффициент α — инвариант группы G, сохраняющей уравнение (4), а потому, в частности, и инвариант подгруппы g. Следовательно,

$$d\alpha = \alpha'\theta.$$

Применяя фундаментальное тождество к ω_2' и ϖ_2', получим

$$\omega_1\varpi_1(\alpha'\theta - 2\alpha\omega_2) = 0,$$

или, другими словами,

$$b_0\alpha' = 0, \qquad a_0\alpha' = 2\alpha.$$

а. $\alpha = 0$. Тогда имеется бесконечное множество типов подгрупп g_2, параметризованное значением отношения b_0/a_0; каждая из них инвариантна в четырехпараметрической подгруппе G_2, определяемой уравнениями

$$G_2 \begin{cases} \omega_1' + i\varpi_1' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega_2' + i\varpi_2' = 0; \end{cases}$$

подгруппа g_2 образована преобразованиями, сохраняющими все интегралы системы

$$a_0\omega_2 + b_0\varpi_2 = 0;$$

чтобы получить ее структуру, положим

$$\omega_2 \equiv b_0\omega, \qquad \varpi_2 = -a_0\omega,$$

откуда находим

$$g_2\ \begin{cases} \omega_1' = (b_0\omega_1 + a_0\varpi_1)\omega, \\ \varpi_1' = (-a_0\omega_1 + b_0\varpi_1)\omega, \\ \omega' = 0. \end{cases}$$

Можно, например, положить

$$\begin{aligned} \omega_1 + i\varpi_1 &= (x_2 + iy_2)(dx_1 + i\,dy_1), \\ \omega_2 + i\varpi_2 &= -\frac{dx_2 + i\,dy_2}{x_2 + iy_2}. \end{aligned}$$

Тогда при $a_0 = 1,\ \ b_0 = -m$ получаем подгруппу

$$\boxed{g_2\ \Big\{ Z = e^{(m+i)a}z + b + ic}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_2\ \Big\{ Z = (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta}\ .$$

Если же $a_0 = 0,\ \ b_0 = 1$, то получим подгруппу

$$\boxed{g_2\ \Big\{ Z = az + b + ic}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_2\ \Big\{ Z = (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta}\ .$$

b. $\alpha \neq 0$. Тогда получаем $b_0 = 0,\ \ a_0 = 1,\ \ \alpha' = 2\alpha$,

$$d\alpha = 2\alpha\omega_2.$$

Всякое преобразование, сохраняющее подгруппу g, сохраняет и α, и, следовательно, принадлежит подгруппе g. Имеем

$$\begin{aligned} \omega_1' + i\varpi_1' &= (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega_2' &= 0, \\ \varpi_2' &= -\alpha\omega_1\varpi_1. \end{aligned}$$

Функция α от переменных x^1, y^1, x^2, y^2 не меняет знак. Поэтому все подгруппы g, для которых этот знак один и тот же, сопряжены. Чтобы выяснить структуру полученных таким образом двух типов подгрупп, достаточно приравнять α к константе, например, ± 1; это приводит к $\omega_2 \equiv 0$. Тогда получаем

$$g_3, g_3' \begin{cases} \omega_1' = -\varpi_1\varpi_2, \\ \varpi_1' = \omega_1\varpi_2, \\ \varpi_2' = \mp\omega_1\varpi_1. \end{cases}$$

Можно, например, положить

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 \pm 1}(\cos u\, dx_1 - \sin u\, dy_1), \\ \varpi_1 &= \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 \pm 1}(\sin u\, dx_1 + \cos u\, dy_1), \\ \varpi_2 &= -du - 2\frac{x_1 dy_1 - y_1 dx_1}{(x_1)^2 + (y_1)^2 \pm 1}; \end{aligned}$$

это даст трехпараметрические простые группы

$$\boxed{g_3, g_3' \; \left\{ Z = \frac{(a+ib)z + c + id}{\mp(c-id)z + a - ib}, \quad [a^2 + b^2 \pm (c^2 + d^2) = 1] \right.} \; ,$$

инвариантные лишь в себе.

26. Второй случай. В этом случае подгруппа g имеет два независимых инварианта порядка $p-1$. Очевидно, можно считать, что $p > 1$, так как в противном случае подгруппа g состоит только из тождественного преобразования. Инварианты задаются системой

$$\begin{cases} \theta_1 \equiv \omega_p + a_1\omega_{p-1} + b_1\varpi_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega_1 + b_{p-1}\omega_1 = 0, \\ \theta_2 \equiv \varpi_p + \alpha_1\omega_{p-1} + \beta_1\varpi_{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}\omega_1 + \beta_{p-1}\varpi_1 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Линейная группа $\Gamma^{(p-1)}$ позволяет заменить формы ω_p, ϖ_p на формы $\omega_p + u\omega_1 - v\varpi_1$ и $\varpi_p + v\omega_1 + u\varpi_1$. Следовательно, можно считать, что коэффициенты уравнений (5) удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_{p-1} = b_{p-1}, \qquad \beta_{p-1} = -a_{p-1}.$$

Тогда всякое преобразование из группы $\mathcal{G}$, сохраняющее систему (5), сохраняет также формы $\omega_1, \varpi_1\omega_2, \varpi_2, \ldots, \omega_p, \varpi_p$ и, кроме того, коэффициенты $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$. Следовательно, эти коэффициенты являются инвариантами системы (5).

Требуя, чтобы система (5) была вполне интегрируема, т. е. чтобы из уравнений (5) следовало, что θ_1' и θ_2' обращаются в нуль, получаем $p \leqslant 4$. Действительно, в противном случае θ_1' содержит ненулевой член с $\omega_3\omega_{p-1}$. Итак, надо исследовать три случая:

1° $p = 2$. Система (5) записывается в виде

$$\begin{cases} \theta_1 \equiv \omega_2 + a\omega_1 + b\varpi_1 = 0, \\ \theta_2 \equiv \varpi_2 + b\omega_1 - a\varpi_1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

или же в виде

$$\theta \equiv \theta_1 + i\theta_2 = \omega_2 + i\varpi_2 + A(\omega_1 - i\varpi_1) = 0, \tag{6}$$

где A обозначает комплексное число $a + ib$.

Для того, чтобы подгруппа g не имела других инвариантов первого порядка, кроме интегралов системы (5), необходимо, чтобы θ' имело вид $\alpha\theta_1\theta_2$. С другой стороны,

$$\omega_2' + i\varpi_2' = (\omega_1 + i\varpi_1)\left[B(\omega_1 - i\varpi_1) + C(\omega_2 + i\varpi_2) + D(\omega_2 - i\varpi_2)\right],$$

где B, C, D — комплексные коэффициенты (являющиеся функциями от x_1, y_1, x_2, y_2); кроме того, имеем

$$dA = A'\left[\omega_2 + i\varpi_2 + A(\omega_1 - i\varpi_1)\right] + A''\left[\omega_2 - i\varpi_2 + A_0(\omega_1 + i\varpi_1)\right],$$

где A_0 — комплексное число, сопряженное с A.

Вычисляя внешний дифференциал θ', получим

$$\begin{aligned} \theta' = (B + A''A_0)(\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_1 - i\varpi_1) + C(\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2) - \\ - A'(\omega_1 - i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2) + D(\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 - i\varpi_2) + \\ + (A - A'')(\omega_1 - i\varpi_1)(\omega_2 - i\varpi_2). \end{aligned}$$

Отсюда вытекают равенства

$$C = D = A' = 0, \qquad A'' = A, \qquad B = -AA_0 = -(a^2 + b^2).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} &\omega_1' + i\varpi_1' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ &\omega_2' + i\varpi_2' = -(a^2 + b^2)(\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_1 - i\varpi_1), \\ &da + i\,db = (a + ib)(\omega_2 - i\varpi_2) + (a^2 + b^2)(\omega_1 + i\varpi_1). \end{aligned}$$

а. Предположим, что $a = b = 0$. Тогда находим единственный тип двухпараметрических подгрупп g_4. Каждая из них инвариантна в четырехпараметрической подгруппе G_4, определяемой формулами

$$G_4 \quad \begin{cases} \omega_1' + i\varpi_1' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega_2' + i\varpi_2' = 0; \end{cases}$$

подгруппа g_4 характеризуется тем, что она сохраняет все интегралы вполне интегрируемой системы

$$\omega_2 = \varpi_2 = 0,$$

а ее структура задается уравнением

$$g_4 \; \{\omega_1' + i\varpi_1' = 0.$$

В качестве представителя можно взять подгруппу

$$\boxed{g_4 \; \Big\{ Z = z + a + ib} \; ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_4 \; \Big\{ Z = (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta} \; .$$

b. Предположим, что $a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда из выражения для $da + i\, db$ видно, что a и b — независимые функции от x_1, y_1, x_2, y_2. Всякое преобразование, сохраняющее подгруппу g, сохраняет функции a и b, т. е. эта подгруппа инвариантна лишь в себе. Если присвоить инвариантам a и b фиксированные значения, например, $a = 0$, $b = -1$, то получим

$$\omega_2 \equiv \varpi_1, \qquad \varpi_2 \equiv \omega_1,$$

что даст структуру подгруппы g_5:

$$g_5 \; \begin{cases} \omega_1' = 2\omega_1\varpi_1, \\ \overline{\omega}_1' = 0. \end{cases}$$

Можно положить

$$\omega_1 = \frac{dx_1}{y_1},$$

$$\varpi_1 = \frac{dy_1}{2y_1},$$

что приведет к группе

$$\boxed{g_5 \; \Big\{ Z = az + b} \; ,$$

инвариантной лишь в себе.

2° $p = 3$. Система (5) принимает вид

$$\begin{cases} \theta_1 \equiv \omega_3 + a_1\omega_2 + b_1\varpi_2 + a_2\omega_1 + b_2\varpi_1 = 0, \\ \theta_2 \equiv \varpi_3 + \alpha_1\omega_2 + \beta_1\varpi_2 + b_2\omega_1 - a_2\varpi_1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

или же

$$\theta \equiv \theta_1 + i\theta_2 = \omega_3 + i\varpi_3 + A(\omega_2 + i\varpi_2) + B(\omega_2 - i\varpi_2) + \\ + C(\omega_1 - i\varpi_1) = 0, \qquad (6)$$

где A, B, C — комплексные коэффициенты.

Учитывая, что θ' равно нулю (в силу уравнений (5)), и пренебрегая членами с $\omega_1 + i\varpi_1$, получим

$$B = C = 0.$$

Далее, поскольку θ' должно быть пропорционально $\theta_1\theta_2$, находим, что

$$dA = \omega_3 + i\varpi_3 + A(\omega_2 + i\varpi_2),$$
$$\omega_3' + i\varpi_3' = [\omega_2 + i\varpi_2 - A(\omega_1 + i\varpi_1)]\,(\omega_3 + i\varpi_3).$$

Действительная и мнимая части A являются двумя независимыми интегралами системы (5). Следовательно, все подгруппы типа g_6 сопряжены; все они четырехпараметрические и инвариантны лишь в себе. Чтобы найти структуру такой группы, приравняем A к нулю, что приводит к равенствам $\omega_3 \equiv \varpi_3 \equiv 0$. Следовательно,

$$g_6 \begin{cases} \omega_1' + i\varpi_1' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega_2' + i\varpi_2' = 0. \end{cases}$$

В качестве представителя можно, например, взять подгруппу

$$\boxed{g_6 \,\left\{ Z = (a + ib)z + c + id \right.},$$

инвариантную лишь в себе.

3° $p = 4$. Систему (5) можно записать в виде

$$\theta \equiv \theta_1 + i\theta_2 = \omega_4 + i\varpi_4 + A(\omega_3 + i\varpi_3) + B(\omega_3 - i\varpi_3) + \\ + C(\omega_2 + i\varpi_2) + D(\omega_2 - i\varpi_2) + E(\omega_1 - i\varpi_1)) = 0,$$

где коэффициенты A, B, C, D, E — комплексные числа.

Учитывая, что система (5) вполне интегрируема, точнее, что θ' пропорционально $\theta_1\theta_2$, получаем

$$A = B = D = E = 0;$$

затем находим

$$dC = 2(\omega_4 + i\varpi_4) + 2C(\omega_2 + i\varpi_2).$$

Так как действительная и мнимая части C являются двумя независимыми интегралами системы (5), то имеется только один тип подгрупп g_7; эти подгруппы шестипараметрические и инвариантны лишь в себе. Чтобы найти их структуру, положим, например, $C = 0$, $\omega_4 \equiv \varpi_4 \equiv 0$, что приводит к уравнениям

$$g_7 \begin{cases} \omega_1' + i\varpi_1' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega_2' + i\varpi_2' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_3 + i\varpi_3), \\ \omega_3' + i\varpi_3' = (\omega_2 + i\varpi_2)(\omega_3 + i\varpi_3). \end{cases}$$

Можно, например, положить

$$\begin{aligned} \omega_1 + i\varpi_1 &= (x_2 + iy_2)(dx_1 + i\,dy_1), \\ \omega_2 + i\varpi_2 &= -\frac{dx_2 + i\,dy_2}{x_2 + iy_2} + (x_3 + iy_3)(dx_1 + i\,dy_1), \\ \omega_3 + i\varpi_3 &= -\frac{dx_3 + i\,dy_3}{x_2 + iy_2} + \frac{(x_3 + iy_3)^2}{2(x_2 + iy_2)}(dx_1 + i\,dy_1); \end{aligned}$$

тогда получим подгруппу с шестью существенными параметрами

$$\boxed{g_7 \left\{ Z = \frac{(a + ib)z + c + id}{(m + in)z + p + iq} \right.} \;,$$

инвариантную лишь в себе.

Итак, бесконечномерная группа

$$Z = f(z)$$

имеет только следующие конечномерные подгруппы:

1-параметрические подгруппы одного типа;

2-параметрические подгруппы двух типов;

3-параметрические подгруппы трех типов (один из которых зависит от произвольной константы);

4-параметрические подгруппы одного типа;

6-параметрические подгруппы одного типа.

ГЛАВА III

ИНТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

---

27. Задача нахождения групп с двумя переменными эквивалентна задаче нахождения подгрупп бесконечномерной группы $\mathcal{G}$ общих преобразований плоскости[1], заданной уравнениями

$$\begin{cases} X = f(x, y), \\ Y = \varphi(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Структура этой группы $\mathcal{G}$ определяется формулами

$$\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},$$
$$\varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}.$$

Структура первого нормального продолжения $\mathcal{G}'$ определяется предыдущими формулами, к которым добавлены следующие:

$$\begin{aligned} \omega'_{10} &= \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11} + \varpi_{10}\omega_{01}, \\ \omega'_{01} &= \omega\omega_{11} + \omega_{01}\omega_{10} + \varpi\omega_{02} + \varpi_{01}\omega_{01}, \\ \varpi'_{10} &= \omega\varpi_{20} + \omega_{10}\varpi_{10} + \varpi\varpi_{11} + \varpi_{10}\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= \omega\varpi_{11} + \omega_{01}\varpi_{10} + \varpi\varpi_{02}. \end{aligned}$$

Вообще, структура n-го нормального продолжения $\mathcal{G}^{(n)}$ определяется $(n+1)(n+2)$ формами $\omega, \varpi, \omega_{pq}, \varpi_{pq}$, $(p + q \leqslant n)$, инвариантными при преобразованиях $\mathcal{G}^{(n)}$, ковarианты которых зависят от $2(n + 2)$ новых форм ω_{pq}, ϖ_{pq} $(p + q = n + 1)$. А именно, имеем

---

[1] На современном языке — группы диффеоморфизмов плоскости. — *Прим. ред.*

$$\left\{\begin{aligned}
\omega'_{pq} &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p-1}\sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_{p-1}^{\alpha}C_q^{\beta}\omega_{\alpha,\beta}\omega_{p-\alpha+1,q-\beta} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p}\sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_p^{\alpha}C_q^{\beta}\varpi_{\alpha,\beta}\omega_{p-\alpha,q-\beta+1},\\
\varpi'_{pq} &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p}\sum_{\beta=0}^{\beta=q-1} C_p^{\alpha}C_{q-1}^{\beta}\varpi_{\alpha,\beta}\varpi_{p-\alpha,q-\beta+1} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p}\sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_p^{\alpha}C_q^{\beta}\omega_{\alpha,\beta}\varpi_{p-\alpha+1,q-\beta},\\
\omega'_{0q} &= \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^{\beta}\omega_{0\beta}\omega_{1,q-\beta} + \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^{\beta}\varpi_{0\beta}\omega_{0,q-\beta+1},\\
\varpi'_{p0} &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^{\alpha}\varpi_{\alpha,0}\varpi_{p-\alpha,1} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^{\alpha}\omega_{\alpha,0}\varpi_{p-\alpha+1,0}.
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

В этих формулах через ω_{00} и ϖ_{00} обозначены формы ω и ϖ, C_m^n обозначает число сочетаний из m элементов по n, причем $C_m^0 = 1$.

В этом разделе мы будем исследовать случай, когда искомая подгруппа имеет инвариант нулевого порядка — функцию от x и y (интранзитивные подгруппы), в следующей главе — случай, когда подгруппа не имеет таких инвариантов (транзитивные подгруппы).

28. Инвариант — функция от x, y — определяется одним вполне интегрируемым уравнением вида

$$a\omega + b\varpi = 0. \tag{3}$$

Группа $\mathcal{G}$ действует на формы ω, ϖ преобразованиями из линейной группы Γ:

$$\begin{aligned}\Omega &= u\omega + v\varpi,\\ \Pi &= w\omega + s\varpi,\end{aligned}$$

поэтому уравнение (3) можно привести к виду

$$\varpi = 0. \tag{3}$$

Тогда линейная группа Γ приводится к подгруппе

$$\begin{aligned}\Omega &= u\omega + v\varpi,\\ \Pi &= s\varpi;\end{aligned}$$

это позволяет написать структурные уравнения группы G_1, сохраняющей уравнение (3):

$$\begin{cases} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}. \end{cases} \tag{4}$$

Следовательно, все интранзитивные подгруппы g_1 нулевого порядка относятся к одному и тому же типу; каждая из них инвариантна в группе G_1, а структуры подгрупп g_1 и G_1 определяются, соответственно, формулами

$$g_1 \ \{\omega' = \omega\omega_{10} + dy\omega_{01}, \qquad G_1 \begin{cases} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

В качестве g_1 можно взять группу

$$\boxed{g_1 \begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = y \end{cases}}\ , \quad \text{инвариантную в} \quad \boxed{G_1 \begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = \varphi(y) \end{cases}}\ .$$

29. Теперь найдем различные типы подгрупп степени 1 в группе G_1 среди подгрупп группы g_1.

Структура группы G_1 определяется формулами (4), а структура ее последовательных нормальных продолжений — формулами (2), в которых вычеркнуты все формы ϖ_{pq} с $p \neq 0$. При этом число переменных, преобразуемых группой $G_1^{(n)}$, равно $(n+1)(n+4)/2$.

Вполне интегрируемая система, из которой определяются инварианты одной из искомых подгрупп, содержит уравнения

$$\varpi = \varpi_{01} = 0,$$

и, кроме того, одно или два линейных соотношения между формами ω, ω_{10}, ω_{01}.

30. 1° *Инварианты первого порядка определяются тремя уравнениями*

$$\varpi = \varpi_{01} = a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\omega = 0. \tag{5}$$

Группа G_1' сохраняет формы ω и ϖ и действует на формы $\omega_{10}, \omega_{01}, \varpi_{01}$ преобразованиями из линейной группы

$$\begin{cases} \Omega_{10} &= \omega_{10} + u\omega + v\varpi, \\ \Omega_{01} &= \omega_{01} + v\omega + w\varpi, \\ \Pi_{01} &= \varpi_{01} + s\varpi. \end{cases} \tag{6}$$

Поэтому всегда можно считать, что коэффициент c в (5) равен нулю; тогда отношение b/a (или a/b) является функцией порядка 0 или 1 и, следовательно, интегралом системы (5); впрочем, один из коэффициентов a, b можно приравнять к единице. Тогда линейная группа (6) приводится к подгруппе, определенной соотношением $au + bv = 0$. Это равносильно тому, что $a\omega_{20} + b\omega_{11}$ является линейной комбинацией форм $\omega, \varpi, \omega_{10}, \varpi_{01}$.

a. $b = 0$, $a = 1$. В это случае имеем

$$\omega'_{10} = \omega(A\omega_{10} + B\omega_{01} + C\varpi_{01}) + \varpi\omega_{11}.$$

Для того, чтобы подгруппа g не имела инвариантов, кроме интегралов системы (5), необходимо, чтобы уравнения

$$\frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\omega} = \frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\varpi} = \frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\omega_{01}} = \frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\omega_{10}} = \frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\varpi_{01}} = 0$$

не влекли соотношений между $\omega, \varpi, \omega_{10}, \omega_{11}, \varpi_{01}$, не следующих из (5). Следовательно, коэффициенты A, B, C равны нулю.

Таким образом, имеется только один тип подгрупп g_2, причем они инвариантны в группе G_2. Их структуры задаются, соответственно, формулами

$$g_2\ \left\{\omega' = dy\,\omega_1^0\right., \qquad G_2\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}. \end{cases}$$

Например, в качестве g_2 можно взять подгруппу

$$\boxed{g_2\ \begin{cases} X = x + f(y) \\ Y = y \end{cases}}\ , \quad \text{инвариантную в} \quad \boxed{G_2\ \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = \psi(y) \end{cases}}\ .$$

b. $b = 1$. Билинейный ковариант формы $\theta \equiv \omega_{01} + a\omega_{10}$ равен

$$\theta' = \varpi\bar{\omega}_{02} + \omega_{01}\omega_{10} + \varpi_{01}\omega_{01} + \omega(A\omega_{10} + B\omega_{01} + C\varpi_{01}) + (\alpha\omega_{01} + \alpha'\varpi_{01})\omega_{10},$$

где

$$da = \alpha(\omega_{01} + a\omega_{10}) + \alpha'\varpi_{01} + \alpha''\varpi.$$

Учитывая, что подгруппа g не имеет инвариантов первого порядка, кроме интегралов системы (5), получаем

$$A = B = C = 0, \qquad \alpha = -1, \qquad \alpha' = a.$$

Можно добиться, чтобы α'' было равно нулю; это приведет к дальнейшей редукции линейной группы (6) $(w = as - au)$.

Тогда получим

$$da + \omega_{01} + a(\omega_{10} - \varpi_{01}) = 0.$$

Всякое преобразование, которое сохраняет систему (5), сохраняет и форму a. Если присвоить этому инварианту a фиксированное значение, например, нуль, то получим

$$\omega_{01} \equiv 0.$$

Таким образом, получаем один тип групп g_3, которые инвариантны в группе G_3; их структуры задаются соответственно формулами

$$g_3 \ \{\omega' = \omega\omega_{10}\,, \qquad G_3 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

Можно, например, в качестве представителя выбрать подгруппу

$$\boxed{g_3 \begin{cases} X = f(x) \\ Y = y \end{cases}}\ , \quad \text{инвариантную в} \quad \boxed{G_3 \begin{cases} X = f(x) \\ Y = \varphi(y) \end{cases}}\ .$$

31. 2° *Инварианты первого порядка подгруппы g определяются четырьмя уравнениями*

$$\varpi = \varpi_{01} = \omega_{10} + a\omega = \omega_{01} + b\omega = 0. \tag{7}$$

Преобразованием из линейной группы (6) можно обратить коэффициенты a и b в нуль; это приведет подгруппу g к ее подгруппе, заданной уравнениями $u = v = 0$. Формы ω_2^0 и ω_1^1 окажутся линейными комбинациями форм $\omega, \varpi, \omega_{10}, \omega_{01}, \varpi_{01}$.

Следовательно, получаем формулы вида

$$\begin{aligned} \omega_{10}' &= A\omega\varpi + B\omega\omega_{10} + C\omega\omega_{01} + E\omega\varpi_{01} + F\varpi\omega_{10} + G\varpi\omega_{01} + H\varpi\varpi_{01}, \\ \omega_{01}' &= F\omega\omega_{10} + G\omega\omega_{01} + H\omega\varpi_{01} + \omega_{01}\omega_{10} + \varpi_{01}\omega_{01} + \varpi\omega_{02}. \end{aligned}$$

Учитывая, что подгруппа g не имеет никаких инвариантов первого порядка, отличных от интегралов системы (7), получаем

$$A = B = C = E = F = G = H = 0.$$

Таким образом, имеем только один тип подгрупп g_4, и эти подгруппы инвариантны в G_4. Их структуры определяются, соответственно, формулами

$$g_4\ \{\omega' = 0\ , \qquad G_4\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ D\omega_1^0 = 0.\end{cases}$$

Например, в качестве g_4 можно взять подгруппу

$$\boxed{g_4\ \begin{cases} X = x + a\\ Y = y\end{cases}}\ ,\quad \text{инвариантную в}\quad \boxed{G_4\ \begin{cases} X = ax + f(y)\\ Y = \varphi(y)\end{cases}}\ .$$

Таким образом, мы нашли все типы интранзитивных групп с двумя переменными степени $\leqslant 1$ *и для каждой из этих подгрупп нашли наибольшую группу, в которой она инвариантна.*

32. Теперь мы снова рассмотрим последовательно четыре группы G_1, G_2, G_3, G_4 и для каждой из них найдем все типы подгрупп, содержащихся в группах g_1, g_2, g_3, g_4 соответственно и не имеющих инвариантов порядка 0 и 1, кроме инвариантов подгрупп g_1, g_2, g_3, g_4. Впрочем, для G_4 задача полностью решена: группа g_4 не имеет других подгрупп, отличных от себя и от тождественного преобразования.

I. *Группы, допускающие те же инварианты порядка* 0 *и* 1, *что и подгруппа* g_1. Рассмотрим n-ое нормальное продолжение $G_1^{(n)}$ группы G_1, оно преобразует между собой $(n+1)(n+4)/2$ переменных — интегралов системы уравнений

$$\varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = \omega = \omega_{pq} = 0 \qquad (p + q \leqslant n).$$

Если g — одна из искомых групп, то вполне интегрируемая система, дающая ее инварианты порядка $\leqslant n$, заведомо содержит $n + 1$ уравнение

$$\varpi = \varpi_{01} = \varpi_{02} = \ldots = \varpi_{0n} = 0 \tag{8}$$

(но может содержать и другие). Рассмотрим наименьшее значение n, при котором g имеет более $n + 1$ инварианта порядка $\leqslant n$. Это число n не меньше 2. Вполне интегрируемая система, дающая эти инварианты, получается добавлением к уравнениям (8) одного или нескольких уравнений вида

$$\theta \equiv \sum A_{pq}\omega_{pq} + A\omega = 0, \tag{9}$$

в каждом уравнении среди коэффициентов, для которых $p+q=n$, по крайней мере один отличен от нуля. Далее, всегда можно сделать так, чтобы все коэффициенты A при ω стали равны нулю; это приведет линейную группу, отвечающую группе $G_1^{(n)}$ преобразований форм ω_{pq}, к одной из подгрупп этой линейной группы. Тогда оставшиеся коэффициенты будут инвариантами порядка $\leqslant n$.

Выразим условие того, что каждая внешняя производная θ' обращается в нуль, учитывая уравнения (8) и (9). Сначала сохраним в θ' только члены, содержащие ω_{10} или ω_{01}, и пренебрежем всеми членами с $\omega, \varpi, \varpi_{01}, \ldots, \varpi_{0n}$. Используя формулы (2), мы получим

$$\theta' = \omega_{10} \sum (p-1) A_{pq} \omega_{pq} + \omega_{01} \sum q A_{pq} \omega_{p+1,q-1}.$$

Следовательно, выполняются равенства вида

$$\sum (p-1) A_{pq} \omega_{pq} = \alpha \omega_{10} + \beta \omega_{01}, \tag{10}$$

$$\sum q A_{pq} \omega_{p+1,q+1} = \beta \omega_{10} + \gamma \omega_{01}. \tag{11}$$

Из (10) вытекает, что в каждом из уравнений (9) все индексы p форм ω_{pq} $(p+q \geqslant 2)$ можно считать имеющими одно и то же значение. Из (11) вытекает, что по крайней мере для одного из уравнений (9) это общее значение индекса p равно n. Следовательно, можно взять за θ выражение

$$\theta \equiv \omega_{n0} + a\omega_{10} + b\omega_{01};$$

тогда из формул (10) и (11) следует, что b должно быть нулем.

Итак, *одно из уравнений* (9) (*которые определяют вместе с* (8) *инварианты порядка* $\leqslant n$) *имеет вид*

$$\theta \equiv \omega_{n0} + a\omega_{10} = 0.$$

Далее, число n не превосходит 3, поскольку в противном случае θ' содержит член с $\omega_{20}\omega_{n-1,0}$ с ненулевым коэффициентом $C_{n-1}^2 - 1 = n(n-3)/2 \neq 0$.

Следовательно, нужно рассмотреть два случая: $n=2$ и $n=3$.

1° $n = 3$. Группа $\overline{G}_1$, голоэдричная[1] группе G_1, определяется пятью формами $\omega, \omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, \varpi$ посредством формул

$$\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega\omega_{30} + \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \omega_{30} = \omega\omega_{40} + 2\omega_{10}\omega_{30} + \varpi\omega_{31}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases} \tag{12}$$

Все искомые группы являются подгруппами группы $g_{1,1}$, инварианты которой определяются из уравнений

$$\varpi = 0, \qquad \theta \equiv \omega_{30} + a\omega_{10} = 0.$$

Полагая

$$da = a'\varpi + a''(\omega_{30} + a\omega_{10}),$$

получаем $a'' = 0$, и тогда, приводя линейную группу, преобразующую формы $\omega, \omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}$, можно сделать так, что a' обратится в нуль. В результате получим

$$da = 2(\omega_{30} + a\omega_{10}).$$

Поэтому имеется единственный тип групп $g_{1,1}$. Наибольшая подгруппа $G_{1,1}$, в которой $g_{1,1}$ инвариантна, сохраняет также a; чтобы найти ее структуру, положим $a = 0$, т. е. $\omega_{30} \equiv 0$. Структуры $g_{1,1}$ и $G_{1,1}$ определяются, соответственно, формулами

$$g_{1,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + dy\,\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + dy\,\omega_{21}, \end{cases} \qquad G_{1,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

Например, в качестве $g_{1,1}$ можно взять подгруппу

$$\boxed{g_{1,1} \begin{cases} X = \dfrac{xf(y) + \varphi(y)}{x\psi(y) + 1} \\ Y = y \end{cases}}\ , \quad \text{инвариантную в} \quad \boxed{G_{1,1} \begin{cases} X = \dfrac{xf(y) + \varphi(y)}{x\psi(y) + 1} \\ Y = \chi(y) \end{cases}}\ .$$

---

[1] В тексте Картана здесь (и еще раз на стр. 195) сказано «голоморфная». — *Прим. ред.*

Чтобы закончить нахождение групп, соответствующих случаю $n = 3$, нужно найти подгруппы $G_{1,1}$, допускающие все инварианты подгруппы $g_{1,1}$ и, кроме того, некоторые другие инварианты порядка $\geqslant 3$. Структура продолжения $G_{1,1}^{(n)}$ группы $G_{1,1}$ дается также формулами (2), в которых вычеркнуты все ω_{pq} с $p \geqslant 3$. Следовательно, имеем

$$\begin{cases} \omega'_{2q} = \sum\limits_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^\beta (\omega_{1\beta}\omega_{2,q-\beta} + \varpi_{0\beta}\omega_{2,q-\beta+1}), \\ \omega'_{1q} = \sum\limits_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^\beta (\omega_{0\beta}\omega_{2,q-\beta} + \varpi_{0\beta}\omega_{1,q-\beta+1}), \\ \omega'_{0q} = \sum\limits_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^\beta (\omega_{0\beta}\omega_{1,q-\beta} + \varpi_{0\beta}\omega_{0,q-\beta+1}). \end{cases} \tag{13}$$

Предположим, что инварианты порядка n искомых групп даются уравнениями

$$\varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = 0,$$

и, кроме того, по крайней мере одним уравнением вида

$$\theta \equiv A\omega_{2,n-2} + B\omega_{1,n-1} + C\omega_{0n} + \ldots = 0, \tag{14}$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля. Формулы (13) тогда показывают, что $A \neq 0$, $B = C = 0$ по крайней мере для одного из уравнений (14); тогда первая из формул (13) показывает, что θ' содержит член $\omega_{11}\omega_{2,n-3}$ с ненулевым коэффициентом. Следовательно, в случае $n = 3$ нет никаких других подгрупп, кроме $g_{1,1}$.

2° $n = 2$. Совершенно так же, как в случае $n = 3$, доказывается, что все искомые группы содержатся в инвариантной подгруппе $g_{1,2}$ группы $G_{1,2}$; структуры $g_{1,2}$ и $G_{1,2}$ таковы:

$$g_{1,2} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = dy\,\omega_{11}, \end{cases} \qquad G_{1,2} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

В качестве представителя можно, например, взять подгруппу

$$\boxed{g_{1,2} \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = y \end{cases}}\,, \quad \text{инвариантную в} \quad \boxed{G_{1,2} \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = \psi(y) \end{cases}}\,.$$

Структура продолжения $G_{1,2}^{(n)}$ группы $G_{1,2}$ определяется формулами (2), в которых вычеркнуты все ω_{pq} с $p \geqslant 2$. Следовательно, имеем

$$\begin{cases} \omega'_{1q} = \sum\limits_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^{\beta} \varpi_{0\beta}\omega_{1,q-\beta+1}, \\ \omega'_{0q} = \sum\limits_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^{\beta} (\omega_{0\beta}\omega_{1,q-\beta} + \varpi_{0,\beta}\omega_{0,q-\beta+1}). \end{cases} \tag{15}$$

Пусть $n \geqslant 2$ — наименьшее число, при котором вполне интегрируемая система, дающая инварианты порядка $a \leqslant n$ одной из искомых групп (отличной от $g_{1,2}$), содержит уравнения, отличные от

$$\varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = 0; \tag{16}$$

тогда она содержит еще одно или два уравнения вида

$$A_{n-1}\omega_{1,n-1} + A_{n-2}\omega_{1,n-2} + \ldots + A_0\omega_{10} + \\ + B_n\omega_{0n} + B_{n-1}\omega_{0,n-1} + \ldots + B_1\omega_{01} + B\omega = 0;$$

один из коэффициентов при ω можно приравнять нулю, если один из коэффициентов B_n отличен от нуля. Во всяком случае, из формул (15) следует, что одно из уравнений имеет вид

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} + a_1\omega_{1,n-2} + \ldots + a_{n-1}\omega_{10} + b\omega = 0. \tag{17}$$

Все искомые группы являются подгруппами в группе, инварианты которой определяются уравнениями (16) и (17). Далее, можно ограничиться рассмотрением группы $\overline{G}_{1,2}^{(n)}$, голоэдричной группе $G_{1,2}^{(n)}$ и определенной только формами $\omega, \omega_{10}, \omega_{11}, \ldots, \omega_{1,n-1}, \varpi, \varpi_{01}, \ldots, \varpi_{0,n-1}$. Рассматривая в θ' член с $\omega\omega_{10}$, видим, что $b = 0$ и что $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ являются интегралами системы

$$\varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0,n-1} = 0.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} da_1 - a_1\varpi_{01} + C_{n-1}^2\varpi_{02} + \alpha_1\varpi = 0, \\ da_2 - 2a_2\varpi_{01} + C_{n-2}^2 a_1\varpi_{02} + C_{n-1}^3\varpi_{03} + \alpha_2\varpi = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ da_{n-2} - (n-2)a_{n-2}\varpi_{01} + C_2^2 a_{n-3}\varpi_{02} + C_3^3 a_{n-4}\varpi_{03} + \ldots + \\ \qquad + \varpi_{0,n-1} + \alpha_{n-2}\varpi = 0, \\ da_{n-1} - (n-1)a_{n-1}\varpi_{01} + \alpha_{n-1}\varpi = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Наконец, можно считать, что коэффициент α_{n-2} равен нулю.

Первые $(n-2)$ из уравнений (18) показывают, что $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ являются независимыми инвариантами искомой группы g, а также группы G, в которой g является инвариантной подгруппой. Поскольку y не является функцией этих инвариантов, можно присвоить им фиксированные значения, например, нулевые. Тогда получим уравнение

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} + a_{n-1}\omega_{10} = 0 \tag{17}$$

и тождества вида

$$\begin{cases} \varpi_{02} \equiv b_1\varpi, \\ \varpi_{03} \equiv b_2\varpi, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \varpi_{0,n-2} \equiv b_{n-3}\varpi, \\ \varpi_{0,n-1} \equiv 0. \end{cases} \tag{19}$$

Теперь легко видеть, что коэффициенты $a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} db_1 = b_1\varpi_{01} + c_1\varpi, \\ db_2 = 2b_2\varpi_{01} + c_2\varpi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ db_{n-3} = (n-3)b_{n-3}\varpi_{01} + c_{n-3}\varpi, \\ da_{n-1} = (n-1)a_{n-1}\varpi_{01} + c_{n-1}\varpi. \end{cases} \tag{20}$$

Далее следует различать три случая.

а. *Все коэффициенты $a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$ равны нулю.* Тогда имеется единственный тип подгрупп; обозначим его через $g_{1,3}$. Подгруппы этого типа инвариантны в подгруппе $G_{1,3}$. Структуры групп $g_{1,3}$ и $G_{1,3}$ задаются, соответственно, формулами

$$g_{1,3}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = dy\,\omega_{11}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-3} = dy\,\omega_{1,n-2}, \\ \omega'_{1,n-2} = 0, \end{cases} \qquad G_{1,3}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Можно, например, в качестве представителя взять подгруппу

$$\boxed{g_{1,3}\ \begin{cases} X = xe^{a_1y^{n-2}+a_2y^{n-3}+\ldots+a_{n-2}y+a_{n-1}} + f(y) \\ Y = y \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{1,3}\ \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = ay + b \end{cases}}\ .$$

b. *Не все коэффициенты* $a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$ *равны нулю.* Тогда одному из них, не равному нулю, можно присвоить постоянное значение, например, 1. Тогда получим тождество

$$\varpi_{01} \equiv b_0\varpi.$$

Сначала рассмотрим случай, когда *все коэффициенты* $b_0, b_1, \ldots, b_{n-3}$, a_{n-1} — *константы.* Тогда имеется бесконечное множество типов подгрупп, зависящих от значений этих $n-1$ констант (одна из которых равна 1). Каждая из этих подгрупп, которые мы обозначим через $g_{1,4}$, инвариантна в $G_{1,4}$. Структуры групп $g_{1,4}$ и $G_{1,4}$ задаются, соответственно, формулами

$$g_{1,4}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = dy\,\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = dy(\omega_{12} + b_0\omega_{11}), \\ \omega'_{12} = dy(\omega_{13} + 2b_0\omega_{12} + b_1\omega_{11}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-3} = dy(\omega_{1,n-2} + C^1_{i-3}b_0\omega_{1,n-4} + C^2_{n-3}b_1\omega_{1,n-4} + \ldots + b_{n-4}\omega_{11}), \\ \omega'_{1,n-2} = dy(-a_{n-1}\omega_{10} + C^1_{n-2}b_0\omega_{1,n-2} + \\ \qquad\qquad + C^2_{n-2}b_1\omega_{1,n-3} + \ldots + b_{n-3}\omega_{11}), \end{cases}$$

$$G_{1,4}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = 0. \end{cases}$$

В качестве представителя можно взять подгруппу

$$\boxed{g_{1,4}\ \begin{cases} X = xe^{P(y)} + f(y) \\ Y = y \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{1,4}\ \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = y + a \end{cases}},$$

где через $P(y)$ обозначено общее решение линейного дифференциального уравнения порядка $n+1$ с *постоянными* коэффициентами, имеющего характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 - r & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_1 & 2b_0 - r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & 3b_1 & 3b_0 - r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n-1} & b_{n-3} & C^1_{n-2}b_{n-4} & C^2_{n-2}b_{n-5} & \ldots & (n-2)b_0 - r \end{vmatrix} = 0, \qquad (21)$$

причем один из коэффициентов $a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$ равен 1.

c. Некоторые из коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-3}, a_{n-1}$ являются непостоянными функциями от y. Тогда мы придем к аналогичному результату. Так как один из коэффициентов равен 1, то один из оставшихся — непостоянная функция от y, и его можно считать равным y. Тогда получим соотношение

$$dy = m(y)\varpi.$$

Теперь остается $n-2$ произвольных функций от y. Любому выбору значений этих функций соответствует тип групп $g_{1,5}$; каждая из них — инвариантная подгруппа интранзитивной группы $G_{1,5}$. Структуры группы $g_{1,5}$ и $G_{1,5}$ задаются формулами

$$g_{1,5}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \dfrac{dy}{m(y)}\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{dy}{m(y)}\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \dfrac{dy}{m(y)}(\omega_{12} + b_0\omega_{11}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-2} = \dfrac{dy}{m(y)}(-a_{n-1}\omega_{10} + C^1_{n-2}b_0\omega_{1,n-2}) + \ldots + b_{n-3}\omega_{11}), \end{cases}$$

$$G_{1,5}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \dfrac{dy}{m(y)}\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{dy}{m(y)}\omega_{11}. \end{cases}$$

В качестве примера можно взять подгруппу

$$\boxed{g_{1,5}\ \begin{cases} X = xe^{P(y)} + f(y) \\ Y = y \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{1,5}\ \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = y \end{cases}},$$

где через $P(y)$ обозначено общее решение линейного дифференциального уравнения порядка $n-1$ с коэффициентами — функциями от y, с характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} -m(y)r & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 - m(y)r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & 2b_0 - m(y)r & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ -a_{n-1} & b_{n-3} & C^1_{n-2}b_{n-4} & C^2_{n-2}b_{n-5} & \dots & (n-2)b_0 - m(y)r \end{vmatrix} = 0.$$

Напомним, что один из коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_{n-3}, a_{n-1}$ равен 1, а один из коэффициентов $b_0, b_1, \dots, b_{n-3}, a_{n-1}$ равен y.

В предыдущих рассуждениях мы пропустили один случай, в котором $n = 2$. Тогда система (18) сводится к

$$da_1 - a_1\varpi_{01} = 0.$$

Если $a_1 \neq 0$, то снова получаем группу типа $g_{1,4}$. Но если $a_1 = 0$, то получим подгруппу

$$\boxed{g_{1,6}\ \begin{cases} X = ax + f(y) \\ Y = y \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{1,6}\ \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = \psi(y) \end{cases}},$$

со структурами, соответственно,

$$g_{1,6}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = 0, \end{cases} \qquad G_{1,6}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

33. Теперь снова рассмотрим группы $G_{1,3}, G_{1,4}, G_{1,5}, G_{1,6}$ последовательно, и для каждой подгруппы $G_{1,i}$ будем искать подгруппы, содержащиеся в $g_{1,i}$, для которых вполне интегрируема система, дающая инварианты, включает в себя уравнение, содержащее ω_0^q. Легко видеть, что это возможно только для группы $G_{1,6}$.

Рассмотрим группу $G_{1,6}^{(n)}$ — n-е нормальное продолжение группы $G_{1,6}$. Система, дающая инварианты порядка n какой-нибудь подгруппы группы $g_{1,6}$, содержит уравнения

$$\begin{cases} \varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = 0, \\ \omega_{11} = \omega_{12} = \ldots = \omega_{1,n-1} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Пусть $n \geqslant 2$ — наименьшее целое, для которого система содержит, кроме уравнений (22), еще и уравнение вида

$$\theta = \omega_{0n} + a_1\omega_{0,n-i} + \ldots + a_{n-1}\omega_{01} + a_n\omega + b\omega_{10} = 0. \tag{23}$$

Группа $G_{1,6}^{(n)}$ действует на формы $\omega_{1,n-1}, \omega_{0n}, \varpi_{0n}$ линейными преобразованиями

$$\begin{cases} \Omega_{1,n-1} = \omega_{1,n-1} + u\varpi, \\ \Omega_{0n} = \omega_{0n} + u\omega + v\varpi, \\ \Pi_{0n} = \varpi_{0n} + w\varpi. \end{cases} \tag{24}$$

Приводя эту линейную группу к ее подгруппе ($u = 0$), можно добиться того, что в уравнении (23) коэффициент a_n обратится в нуль. Тогда форма ω_{1n} будет тождественно равна линейной комбинации форм $\omega, \varpi, \omega_{1q}$ ($q \leqslant n-1$), ω_{0q} ($q \leqslant n$), ϖ_{0q} ($q \leqslant n$).

Вычисляя θ' и учитывая, что группа g не имеет инвариантов порядка n, отличных от интегралов уравнений (23) и (24), получим равенство

$$db = -\theta + nb\varpi_{01} + \beta\varpi.$$

Можно добиться того, что β обратится в нуль, выполняя дальнейшее приведение линейной группы (24) к ее подгруппе $u = v = 0$; тогда форма $\omega_{0,n+1}$ станет тождественно равна линейной комбинации форм $\omega, \omega_{10}, \ldots, \omega_{1,n-1}$, $\omega_{01}, \ldots, \omega_{0n}, \varpi, \varpi_{01}, \ldots, \varpi_{0q}$.

Всякое преобразование, сохраняющее подгруппу g, сохраняет функцию b. Можно присвоить этому инварианту b фиксированное числовое значение, например, нуль; тогда $\theta \equiv 0$ для любого преобразования, сохраняющего g.

Далее, получаем

$$
\begin{aligned}
da_1 &= -C_n^2\varpi_{02} + a_1\varpi_{01} + C_n^1\omega_{11} + A_1\varpi,\\
da_2 &= -C_n^3\varpi_{03} + C_{n-1}^2 a_1\varpi_{02} + 2a_2\varpi_{01} + C_n^2\omega_{12} + C_{n-1}^1\omega_{11} + A_2\varpi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
da_\alpha &= -C_n^{\alpha+1}\varpi_{0\alpha+1} - C_{n-1}^{\alpha} a_1\varpi_{0\alpha} - C_{n-2}^{\alpha-1} a_2\varpi_{0\alpha-1} + \ldots + \alpha a_\alpha\varpi_{01} + C_n^\alpha\omega_{1\alpha} +\\
&\qquad + C_{n-1}^{\alpha-1}\alpha_1\omega_{1,\alpha-i} + \ldots + C_{n-\alpha+1}^1 a_{\alpha-1}\omega_{11} + A_\alpha\varpi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
da_{n-1} &= -\varpi_{0n} - a_1\varpi_{0n-1} - a_2\varpi_{0n-2} + \ldots + (n-1)a_{n-1}\varpi_{01} + n\omega_{1,n-1} +\\
&\qquad + (n-1)a_1\omega_{1,n-2} + \ldots + 2a_{n-2}\omega_{11} + A_{n-1}\varpi.
\end{aligned}
$$

Наконец, можно приравнять A_{n-1} нулю за счет окончательного приведения линейной группы (24) к тождественному преобразованию. Следовательно, наибольшая группа G, для которой подгруппа g инвариантна — *конечномерна.*

Очевидно, что $n-1$ коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — независимые функции. Им можно присвоить фиксированные значения, например, нуль, и тогда для всякой группы G будем иметь

$$
\begin{aligned}
\omega_{0n} &\equiv 0,\\
\omega_{11} &\equiv \frac{C_n^2}{C_n^1}\varpi_{02} + b_1\varpi,\\
\omega_{12} &\equiv \frac{C_n^3}{C_n^2}\varpi_{03} + b_2\varpi,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\omega_{1,n-2} &\equiv \frac{C_n^{n-1}}{C_n^{n-2}}\varpi_{0,n-1} + b_{n-2}\varpi,\\
\omega_{1,n-1} &\equiv \frac{1}{n}\varpi_{0n}.
\end{aligned}
$$

Сначала предположим, что $n = 2$. Тогда предыдущие тождества принимают вид

$$\omega_{02} \equiv \omega_{11} - \frac{1}{2}\varpi_{02} \equiv 0.$$

Структура группы G задается формулами

$$G_{1,7}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{1}{2}\varpi\varpi_{02}, \\ \omega'_{01} = \dfrac{1}{2}\omega\varpi_{02} + \omega_{01}\omega_{10} + \varpi_{01}\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02} + \lambda\omega\varpi, \end{cases}$$

где последнее уравнение является следствием первых. Из того, что группа g не имеет никаких инвариантов второго порядка, кроме указанных, получаем, что $\lambda = 0$.

Следовательно, имеется единственный тип (который мы обозначим $g_{1,7}$) трехпараметрических инвариантных подгрупп шестипараметрической группы $G_{1,7}$; структура подгруппы $g_{1,7}$ получается зачеркиванием форм ϖ, ϖ_{01} и ϖ_{02}:

$$g_{1,7}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \omega_{01}\omega_{10}. \end{cases}$$

Можно, например, взять в качестве представителя подгруппу

$$\boxed{g_{1,7}\ \begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = y \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{1,7}\ \begin{cases} X = \dfrac{ax + by + c}{py + q} \\ Y = \dfrac{my + n}{py + q} \end{cases}}\ .$$

Теперь предположим, что $n > 2$. Тогда получим соотношения

$$\begin{aligned}
&db_1 = \frac{n+1}{2\cdot 3}\varpi_{03} + 2b_1\varpi_{01} + c_1\varpi,\\
&db_2 = \frac{(n+1)}{3\cdot 4}\varpi_{04} + b_1\varpi_{01} + 3b_2\varpi_{02} + c_2\varpi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&db_\alpha = \frac{n+1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\varpi_{0,\alpha+2} + b_1\varpi_{0\alpha} + \frac{\alpha}{1}b_2\varpi_{0,\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}b_3\varpi_{0,\alpha-2} + \ldots +\\
&\qquad\qquad + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}b_{\alpha-1}\varpi_{02} + (\alpha+1)b_\alpha\varpi_{01} + c_\alpha\varpi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&db_{n-2} = \frac{n+1}{(n-1)n}\varpi_{0,n} + b_1\varpi_{0,n-2} + \frac{(n-2)}{1}b_2\varpi_{0,n-3} + \ldots +\\
&\qquad\qquad + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}b_{n-3}\varpi_{02} + (n-1)b_{n-2}\varpi_{01} + c_{n-2}\varpi,\\
&0 \equiv \frac{1}{n}\varpi_{0,n+1} + b_1\varpi_{0,n-1} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}b_{n-2}\varpi_{02} + \lambda\varpi.
\end{aligned}$$

Очевидно, что коэффициенты b_α представляют собой $n-2$ независимые функции. Поэтому можно присвоить им фиксированные значения, например, нуль, и тогда будем иметь тождества вида

$$\begin{aligned}
&\varpi_{03} \equiv c_1\varpi,\\
&\varpi_{04} \equiv c_2\varpi,\\
&\dots\dots,\\
&\varpi_{0n} \equiv c_{n-2}\varpi.
\end{aligned}$$

Наконец, вычисляя дифференциалы коэффициентов c_i, получим

$$\begin{aligned}
&dc_1 = 3c_1\varpi_{01} + h_1\varpi,\\
&dc_2 = 2c_1\varpi_{02} + 4c_2\varpi_{01} + h_2\varpi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&dc_\alpha = \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{2}c_{\alpha-1}\varpi_{02} + (\alpha+2)c_\alpha\varpi_{01} + h_\alpha\varpi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&dc_{n-2} = \frac{n(n-3)}{2}c_{n-3}\varpi_{02} + nc_{n-2}\varpi_{01} + h_{n-2}\varpi.
\end{aligned}$$

Теперь следует различать три случая.

а. *Все коэффициенты c_α равны нулю.* В этом случае имеется единственный тип групп, к которому в частности относится группа $g_{1,7}$, определенная ранее; все группы этого типа мы также обозначим $g_{1,7}$. Они задаются $n+1$ уравнением и инвариантны в группе $G_{1,7}$, заданной $n+4$ уравнениями. Структуры групп $g_{1,7}$ и $G_{1,7}$ задаются соответственно формулами

$$g_{1,7}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \omega_{01}\omega_{10}, \\ \dots\dots\dots, \\ \omega'_{0q} = \omega_{0q}\omega_{10}, \\ \dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} = \omega_{0,n-1}\omega_{10}, \end{cases}$$

$$G_{1,7}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{n-1}{2}\varpi\varpi_{02}, \\ \omega'_{01} = \dfrac{n-1}{2}\omega\varpi_{02} + \omega_{01}\omega_{10} + \varpi\omega_{02} = \varpi_{01}\omega_{01}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega_{0q} = q\dfrac{n-1}{2}\omega_0^{q-1}\varpi_0^2 + \omega_0^q\omega_1^0 + \varpi\omega_0^{q+1} + \\ \qquad + q\varpi_{01}\omega_{0q} + \dfrac{q(q-1)}{2}\varpi_{02}\omega_{0,q-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} = \dfrac{(n-1)^2}{2}\omega_{0,n-2}\varpi_{02} + \omega_{0,n-1}\omega_{10} + (n-1)\varpi\omega_{0,n-1} + \\ \qquad + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-2}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{cases}$$

Можно, например, в качестве представителя взять группу

$$\boxed{g_{1,7}\ \begin{cases} X = ax + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ Y = y \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{1,7}\quad \begin{cases} X = \dfrac{ax + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{(py+q)^{n-1}} \\[2ex] Y = \dfrac{my+n}{py+q} \end{cases}}\ .$$

b. *Не все коэффициенты c_α равны нулю.* Предположим для определенности, что $c_1, \ldots, c_{\alpha-1}$ равны нулю, а c_α не равно нулю. Тогда коэффициентам $c_\alpha, c_{\alpha+1}$, являющимся двумя независимыми функциями, можно присвоить фиксированные значения $c_\alpha = 1$, $c_{\alpha+1} = 0$. Тогда получим

$$\begin{cases} \varpi_{01} \equiv c_{n-1}\varpi, \\ \varpi_{02} \equiv c_n\varpi. \end{cases} \tag{25}$$

Исключением будет случай $\alpha = n-2$; в этом случае положим $c_{n-2} = 1$ и получим

$$\varpi_{01} \equiv c_{n-1}\varpi.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$dc_{n-1} = -\varpi_{02} + c_n\varpi;$$

теперь можно присвоить функции c_{n-1} значение нуль, и тогда получим тождество

$$\varpi_{02} \equiv c_n\varpi.$$

Окончательно, тождества (25) справедливы всегда, с оговоркой $c_{n-1} = 0$ в случае, когда $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-3} = 0$.

Во всех случаях остаются $n - \alpha - 1$ коэффициентов, которые могут зависеть от y.

Предположим сначала, что эти $n - \alpha - 1$ коэффициентов — константы. Тогда имеем бесконечное множество типов подгрупп $g_{1,8}$, зависящих от этих $n-\alpha-1$ коэффициентов. Каждая из них инвариантна в группе $G_{1,8}$, имеющей на один параметр больше. Структуры групп $g_{1,8}$ и $G_{1,8}$ задаются формулами

$$g_{1,8}\quad\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10},\\ \omega'_{10} = 0,\\ \omega'_{01} = \omega_{01}\omega_{10},\\ \omega'_{02} = \omega_{02}\omega_{10},\\ \ldots\ldots\ldots,\\ \omega_{0q} = \omega_{0q}\omega_{10},\\ \ldots\ldots\ldots,\\ \omega'_{0,n-1} = \omega_{0,n-1}\omega_{10},\end{cases}$$

$$G_{1,8}\quad\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} = 0,\\ \omega'_{01} = \omega_{01}\omega_{10} = \varpi\left(\omega_{02} + c_{n-1}\omega_{01} - \dfrac{n-1}{2}c_n\omega\right),\\ \omega'_{02} = \omega_{02}\omega_{10} = \varpi\left[\omega_{03} + 2c_{n-1}\omega_{02} - (n-2)c_n\omega_{01} - \dfrac{n-2}{3}c_n\omega\right],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega_{0q} = \omega_{0q}\omega_{10} + \varpi\Big(\omega_{0,q+1} + qc_{n-1}\omega_{0q} - C_q^1\dfrac{n-q}{2}c_n\omega_{0,q-1} -\\ \qquad -C_q^2\dfrac{n-q}{3}c_1\omega_{0,q-2} - \ldots - \dfrac{n-q}{q+1}c_{q-1}\omega\Big),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega'_{0,n-1} = \omega_{0,n-1}\omega_{10} + \varpi\Big((n-1)c_{n-1}\omega_{0,n-1} -\\ \qquad -C_{n-1}^1\dfrac{1}{2}c_n\omega_{0,n-2} - \ldots - \dfrac{1}{n}c_{n-2}\omega\Big),\\ \varpi' = 0.\end{cases}$$

В качестве представителя $g_{1,8}$ можно взять подгруппу

$$\boxed{g_{1,8}\quad\begin{cases}X = ax + P(y)\\ Y = y\end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{1,8}\quad\begin{cases}X = ax + P(y)\\ Y = y + b\end{cases}}\ ,$$

где $P(y)$ — общее решение линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{n-1}{2}c_n & c_{n-1}-r & 1 & \ldots & 0 \\ -\frac{n-2}{3}c_1 & -(n-2)c_n & 2c_{n-1}-r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{n}c_{n-2} & -c_{n-3} & -\frac{n-1}{2}c_{n-4} & \ldots & (n-1)c_{n-1}-r \end{vmatrix} = 0.$$

с. *Среди n коэффициентов c (из которых некоторые два последовательных равны единице и нулю) имеются функции от y.* Тогда можно принять один из них за y, и мы получим

$$dy = m(y)\varpi.$$

В этом случае существует бесконечно много типов групп $g_{1,9}$, каждый из которых характеризуется функцией $m(y)$ и $n - \alpha - 2$ другими функциями от y (коэффициентами $c_{\alpha+2}, \ldots, c_n$, отличными от y). Следовательно, каждый тип зависит от $n - \alpha - 1$ произвольных функций от y. Каждая из групп $g_{1,9}$ инвариантна лишь в себе, а ее структура та же, что и структура $g_{1,8}$. В качестве представителя можно взять подгруппу

$$\boxed{g_{1,9} \begin{cases} X = ax + P(y) \\ Y = y \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе, где $P(y)$ — общее решение линейного дифференциального уравнения n-ого порядка, не все коэффициенты которого постоянны; его характеристическое уравнение получается из предыдущего заменой r на $m(y)r$.

34. II. *Группы, имеющие те же инварианты порядков* 0 *и* 1, *что и* g_2.

Группа $G_2^{(n)}$, являющаяся нормальным продолжением группы G_2, определяется формами $\omega, \omega_{10}, \omega_{11}, \ldots, \omega_{1,n-1}, \omega_{01}, \ldots, \omega_{0n}, \varpi, \ldots, \varpi_{0n}$. Вполне интегрируемая система, дающая инварианты искомых групп порядка $\leqslant n$, содержит $2n + 1$ уравнений

$$\begin{cases} \varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = 0, \\ \omega_{10} = \omega_{11} = \ldots = \omega_{1,n-1} = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Обозначим через n наименьшее целое число, при котором к предыдущим уравнениям добавляется еще уравнение вида

$$\theta \equiv \omega_{0n} + a_1\omega_{0,n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega_{01} + a_n\omega = 0. \tag{27}$$

Группа $G_1^{(n)}$ линейно преобразует формы $\omega_{0n}, \varpi_{1,n-1}, \varpi_{0n}$:

$$\begin{cases} \Omega_{0n} = \omega_{0n} + u\omega + v\varpi, \\ \Omega_{1,n-1} = \omega_{1,n-1} + u\varpi, \\ \Pi_{0n} = \varpi_{0n} + w\varpi. \end{cases} \tag{28}$$

Коэффициент a_n при ω в уравнении (27) можно приравнять нулю, приводя линейную группу к ее подгруппе, заданной уравнением $u = 0$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} da_1 &= -C_n^2\varpi_{02} + a_1\varpi_{01} + C_n^1\omega_{11} + A_1\varpi, \\ da_2 &= -C_n^3\varpi_{03} - C_{n-1}^2 a_1\varpi_{02} + 2a_2\varpi_{01} + C_n^2\omega_{12} + C_{n-1}^1 a_1\omega_{11} + A_2\varpi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ da_{n-1} &= -\varpi_{0n} - a_1\varpi_{0,n-1} - \ldots - (n-1)a_{n-1}\varpi_{01} + \\ &\qquad + n\omega_{1,n-1} + (n-1)a_1\omega_{1,n-2} + \ldots + 2a_{n-2}\omega_{11} + A_{n-1}\varpi. \end{aligned}$$

Далее, можно приравнять коэффициент A_{n-1} к нулю, приведя линейную группу (28) к ее подгруппе $u = w = 0$.

Тогда можно повторить рассуждения, аналогичные проведенным при нахождении групп $g_{1,7}, g_{1,8}, g_{1,9}$. Однако имеются два существенных отличия: во-первых, в структурных уравнениях новых групп g форму ω_{10} нужно заменить нулем, и, во-вторых, наибольшая группа $G_{2,i}$, в которой подгруппа $g_{1,i}$ инвариантна, — бесконечномерна, поскольку форма ω_{0n} не равна тождественно нулю для $G_{2,i}$.

Имеются три возможных случая.

а. В бесконечномерной группе $G_{2,1}$ имеется единственный тип инвариантных групп $g_{2,1}$ конечного порядка. Структуры групп $g_{2,1}$ и $G_{2,1}$ задаются, соответственно, формулами

$$g_{2,1}\ \begin{cases} \omega' = 0, \\ \omega'_{01} = 0, \\ \ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = 0, \end{cases} \qquad G_{2,1}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{n-1}{2}\varpi\varpi_{02}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{cases}$$

Можно, например, взять подгруппу

$$\boxed{g_{2,1} \quad \begin{cases} X = x + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ Y = y \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{2,1} \quad \begin{cases} X = \dfrac{ax + f(y)}{(py+q)^{n-1}} \\ Y = \dfrac{my+n}{py+q} \end{cases}}.$$

b. Имеются типы подгрупп, зависящие от *параметров*. Каждая подгруппа $g_{2,2}$ инвариантна в бесконечномерной группе $G_{2,2}$. Структуры групп $g_{2,2}$ и $G_{2,2}$ задаются, соответственно, формулами

$$g_{2,2} \begin{cases} \omega' = 0, \\ \omega'_{01} = 0, \\ \ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = 0, \end{cases} \qquad G_{2,2} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \varpi' = 0. \end{cases}$$

Можно, например, взять подгруппу

$$\boxed{g_{2,2} \quad \begin{cases} X = x + P(y) \\ Y = y \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{2,2} \quad \begin{cases} X = ax + f(y) \\ Y = y + b \end{cases}},$$

где $P(y)$ — общее решение линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами.

c. Имеются типы подгрупп $g_{2,3}$, зависящие от *произвольных функций* одного аргумента. Эти подгруппы инвариантны в бесконечномерной группе $G_{2,3}$. Структуры групп $g_{2,3}$ и $G_{2,3}$ задаются, соответственно, формулами

$$g_{2,3} \begin{cases} \omega' = 0, \\ \omega'_{01} = 0, \\ \ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = 0, \end{cases} \qquad G_{2,3} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = 0. \end{cases}$$

В качестве представителя можно взять подгруппу

$$\boxed{g_{2,3}\ \begin{cases} X = x + P(y) \\ Y = y \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{2,3}\ \begin{cases} X = ax + f(y) \\ Y = y \end{cases}},$$

где $P(y)$ — общее решение некоторого линейного дифференциального уравнения порядка n, не все коэффициенты которого постоянны.

35. III. *Группы, имеющие те же инварианты порядка* 0 *и* 1, *что и группа* g_3. Легко найти два типа групп, отличных от g_3. Первая, $g_{3,1}$, — инвариантная подгруппа порядка 3 в группе $G_{3,1}$; структуры групп $g_{3,1}$ и $G_{3,1}$ определяются формулами

$$g_{3,1}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \omega_{10}\omega_{11}, \end{cases} \qquad G_{3,1}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \omega_{10}\omega_{11}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя подгруппу

$$\boxed{g_{3,1}\ \begin{cases} X = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ Y = y \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{3,1}\ \begin{cases} X = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ Y = f(y) \end{cases}}.$$

Вторая подгруппа, $g_{3,2}$ (конечномерная порядка 2), — инвариантная подгруппа бесконечномерной группы $G_{3,2}$; их структуры определяются формулами

$$g_{3,2}\ \begin{cases} \omega' = \omega_{10}, \\ \omega'_{10} = 0, \end{cases} \qquad G_{3,2}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

В качестве представителя возьмем подгруппу

$$\boxed{g_{3,2} \begin{cases} X = ax + b \\ Y = y \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{3,2} \begin{cases} X = ax + b \\ Y = f(y) \end{cases}}.$$

Таким образом, мы получили восемнадцать типов существенно различных интранзитивных групп с двумя переменными. Из этих восемнадцати типов девять — конечномерны, а именно

$$g_4,\ g_{1,7},\ g_{1,8},\ g_{1,9},\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{3,1},\ g_{3,2},$$

и девять — бесконечномерны, а именно

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_{1,1},\ g_{1,2},\ g_{1,3},\ g_{1,4},\ g_{1,5},\ g_{1,6}.$$

Для следующих шести типов конечномерных подгрупп наибольшие подгруппы, в которых они инвариантны, будут бесконечномерными:

$$g_4,\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{3,1},\ g_{3,2}.$$

Наконец, подгруппы типа $g_{1,9}$ инвариантны лишь в себе.

Группы g_1, g_3, g_4, $g_{1,1}$, $g_{3,1}$ — собственно простые, группа g_2 — несобственно простая.¹)

---

¹) См. E. Cartan. *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXII, 1905, p. 284. (Русский перевод: стр. 117 в настоящем издании. — *Прим. ред.*)

ГЛАВА IV

ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

36. Сначала найдем и классифицируем группы степени 1, определенные при помощи одного или нескольких инвариантов только *первого* порядка.

Группа $\mathcal{G}'$, нормальное продолжение группы $\mathcal{G}$, является группой с шестью переменными, и ее структура определяется формами $\omega, \varpi, \omega_{10}, \omega_{01}, \varpi_{10}, \varpi_{01}$. Эта группа $\mathcal{G}'$ действует на формы $\omega_{10}, \omega_{01}, \varpi_{10}, \varpi_{01}$ линейными преобразованиями из группы Γ:

$$\begin{cases} \Omega_{10} = \omega_{10} + u_{20}\omega + u_{11}\varpi, \\ \Omega_{01} = \omega_{01} + u_{11}\omega + u_{02}\varpi, \\ \Pi_{10} = \varpi_{10} + v_{20}\omega + v_{11}\varpi, \\ \Pi_{01} = \varpi_{01} + v_{11}\omega + v_{02}\varpi. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим последовательно четыре случая, когда группа имеет один, два, три или четыре независимых инварианта первого порядка.

1° *Группа g имеет один независимый инвариант первого порядка.* Этот инвариант задается уравнением вида

$$\theta \equiv a_0\omega_{10} + a_1\omega_{01} + b_0\varpi_{10} + b_1\varpi_{01} + h\omega + k\varpi = 0. \tag{2}$$

Всегда можно обратить коэффициенты h и k в нуль, приводя линейную группу Γ к одной из ее четырехпараметрических подгрупп. Отношения коэффициентов a_0, a_1, b_0, b_1 тогда будут инвариантами первого порядка группы g. Сначала выразим условие того, что θ' равняется нулю, учитывая уравнение (2). Пренебрегая членами, содержащими ω или ϖ, получим соотношения

$$\begin{gathered} a_0^2 - a_0b_1 + 2a_1b_0 = 0, \\ b_1^2 - a_0b_1 + 2a_1b_0 = 0, \\ a_1(a_0 + b_1) = 0, \\ b_0(a_0 + b_1) = 0. \end{gathered}$$

Эти уравнения имеют два решения

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & b_1 = a_0, & a_1 = b_0 = 0, \\ \text{b.} & b_1 = -a_0, & a_0^2 + a_1 b_0 = 0. \end{array}$$

a. Можно положить

$$\theta \equiv \omega_{10} + \varpi_{01} = 0. \tag{2}$$

Тогда имеется один тип подгрупп g_1, инвариантных в группе G_1; структуры групп g_1 и G_1 задаются соответственно формулами

$$g_1 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} - \varpi\omega_{10}, \end{cases} \qquad G_1 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} + \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя подгруппу

$$\boxed{g_1 \begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = \varphi(x,y) \end{cases} \quad \text{с} \quad \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)} = 1},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_1 \begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = \varphi(x,y) \end{cases} \quad \text{с} \quad \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)} = a}.$$

b. Можно положить

$$\theta \equiv \varpi_{10} + \alpha(\varpi_{01} - \omega_{10}) - \alpha^2\omega_{01},$$

тогда

$$d\alpha = -\theta = -\varpi_{10} - \alpha(\varpi_{01} - \omega_{10}) + \alpha^2\omega_{01}.$$

Инварианту α можно присвоить фиксированное значение, например, нуль, и тогда при всяком преобразовании, сохраняющем подгруппу g, будем иметь $\varpi_{10} \equiv 0$.

Имеется один тип групп g_2, инвариантных лишь в себе. Структура такой подгруппы задается формулами

$$g_2 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

Например, можно взять подгруппу

$$\boxed{g_2 \begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = \varphi(y) \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

37. 2° *Искомая группа g имеет два независимых инварианта первого порядка.*

Запишем уравнения, дающие эти инварианты, в виде

$$\begin{cases} \theta_1 \equiv a\varpi_{10} + b(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c\omega_{01} + h(\omega_{10} + \varpi_{01}) + m\omega + n\varpi = 0, \\ \theta_2 \equiv a'\varpi_{10} + b'(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c'\omega_{01} + h'(\omega_{10} + \varpi_{01}) + m'\omega + n'\varpi = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Пренебрегая слагаемыми с ω и ϖ, видим, что коэффициенты a, b, c, h, a', b', c', h' удовлетворяют следующим уравнениям:

$$h(ac' + ca' + 2bb') = 2h'(ac + b^2),$$
$$2h(a'c' + b'^2) = h'(ac' + ca' + 2bb').$$

Следует различать два случая.

а. $h = h' = 0$. Тогда можно положить

$$\theta_1 \equiv \varpi_{10} + a\omega_{01} + m\omega + n\varpi = 0,$$
$$\theta_2 \equiv \omega_{10} - \varpi_{01} + b\omega_{01} + m'\omega + n'\varpi = 0.$$

Коэффициенты m, n, m', n' можно обратить в нуль, приводя линейную группу Γ к одной из ее подгрупп.

Вычисление θ_1' и θ_2' приводит к соотношениям

$$da + b\theta_1 - 2a\theta_2 = 0,$$
$$db + 2\theta_1 - b\theta_2 = 0.$$

Здесь снова нужно различать два случая.

а$_1$. $b^2 - 4a = 0$.

Можно присвоить инварианту b фиксированное значение, например, нуль, и тогда для наибольшей подгруппы, в которой g инвариантна, получим $\varpi_{10} \equiv 0$. Этому случаю соответствует единственный тип подгрупп g_3, инвариантных в G_3. Структуры групп g_3 и G_3 задаются формулами

$$g_3 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\omega_{10}, \end{cases} \qquad G_3 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega_{10}' - \varpi_{01}' = 0. \end{cases}$$

В качестве примера можно взять подгруппу

$$\boxed{g_3 \begin{cases} X = xf'(y) + \varphi(y) \\ Y = f(y) \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_3 \begin{cases} X = axf'(y) + \varphi(y) \\ Y = f(y) \end{cases}}.$$

a_2. $b^2 - 4a \neq 0.$

Можно присвоить независимым инвариантам a и b фиксированные значения, например,

$$b = 0, \qquad a = \pm 1.$$

Таким образом, имеется два типа подгрупп g_4, которые инвариантны лишь в себе. Их структуры задаются формулами

$$g_4', g_4 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \mp\omega\omega_{01} + \varpi\omega_{10}. \end{cases}$$

Для знака «плюс» можно рассмотреть голоморфную структуру

$$g_4 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

В случае знака «минус», в качестве примера можно взять группу преобразований вида

$$\boxed{g_4' \begin{cases} X = f(x, y) \\ Y = \varphi(x, y) \end{cases} \quad \text{с} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

инвариантную лишь в себе, а в случае знака «плюс» можно взять подгруппу

$$\boxed{g_4 \begin{cases} X = f(x) \\ Y = \varphi(y) \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

b. Предположим теперь, что коэффициенты h и h' в уравнении (3) не равны одновременно нулю. Можно считать, что $h = 0$, $h' = 1$; тогда имеем

$$ac + b^2 = ac' + ca' + 2bb' = 0.$$

Можно положить

$$\begin{aligned}&\theta_1 \equiv \varpi_{10} + \alpha(\omega_{10} - \varpi_{01}) - \alpha^2\omega_{01} = 0,\\ &\theta_2 \equiv \omega_{10} + \varpi_{01} + \beta(\omega_{10} - \varpi_{01}) - 2\alpha\beta\omega_{01} + \gamma\omega = 0.\end{aligned}$$

Коэффициент γ можно приравнять к нулю, если только $\beta \neq -1$. Сначала рассмотрим противоположный случай.

b_1. $\beta = -1$. Тогда

$$\begin{aligned}&\theta_1 \equiv \varpi_{10} + \alpha(\omega_{10} - \varpi_{01}) - \alpha^2\omega_{01} = 0,\\ &\theta_2 \equiv \varpi_{01} + \alpha\omega_{01} + \gamma\omega = 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$d\alpha = \varpi_{10} + \alpha(\omega_{10} - \varpi_{01}) - \alpha^2\omega_{01}.$$

Коэффициент α можно приравнять к нулю:

$$\begin{aligned}&\varpi_{10} \equiv 0,\\ &\theta_2 \equiv \varpi_{01} + \gamma\omega = 0.\end{aligned}$$

Поскольку уравнение $\theta_2 = 0$ вполне интегрируемо, имеем $\gamma = 0$. Следовательно, имеется только один тип групп g_5. Структура этой подгруппы и наибольшей группы G_5, в которой она инвариантна, задается формулами

$$g_5 \begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = 0,\end{cases} \qquad G_5 \begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} = 0.\end{cases}$$

В качестве примера возьмем подгруппу

$$\boxed{g_5 \begin{cases}X = f(x,y)\\ Y = y + a\end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_5 \begin{cases}X = f(x,y)\\ Y = ay + b\end{cases}}.$$

b_2. Снова можно приравнять к нулю инвариант α, и тогда

$$\varpi_{10} \equiv 0,$$

откуда получаем

$$\theta_2 \equiv \omega_{10} - m\varpi_{01}.$$

Легко видеть, что

$$dm = 0.$$

Следовательно, имеется бесконечное множество различных типов, параметризованное значениями константы m. При $m = 1$ снова получим группу g_3. Будем обозначать через g_3 все группы, соответствующие какому-нибудь значению константы m. Для g_3 и G_3 получаем следующие структуры:

$$g_3 \begin{cases} \omega' = m\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \end{cases} \qquad G_3 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} - m\varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

В качестве представителя возьмем подгруппу

$$\boxed{g_3 \begin{cases} X = xf'^m(y) + \varphi(y) \\ Y = f(y) \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_3 \begin{cases} X = axf'^m(y) + \varphi(y) \\ Y = f(y) \end{cases}}.$$

38. 3° *Искомая группа g имеет три независимых инварианта первого порядка.*

Будем различать два случая в зависимости от того, входит или не входит уравнение

$$\omega_{10} + \varpi_{01} = 0$$

в систему, дающую инварианты первого порядка.

а. В первом случае положим

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv \omega_{10} + \varpi_{01} = 0, \\ \theta_2 &\equiv \varpi_{10} + a\omega_{01} = 0, \\ \theta_3 &\equiv \omega_{10} - \varpi_{01} + b\omega_{01} + c\omega = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты при ω и при ϖ удается привести к нулю, кроме коэффициента при ω в последнем уравнении, который нельзя уничтожить, если $b^2 - 4a = 0$.

а$_1$. $b^2 - 4a = 0$. После несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned} \theta_1' = 0, \quad \theta_2' &= \theta_3\theta_2, \quad \theta_3' = 0,\\ db &= -2\theta_2 + b\theta_3,\\ dc &= \frac{1}{2}c(\theta_1 + \theta_3). \end{aligned}$$

Если c равняется нулю, инвариант b можно приравнять нулю; получаем один тип групп g_6; их структура и структура наибольших подгрупп G_6, в которых g_6 инвариантны, определяются, соответственно, формулами

$$g_6 \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_6 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \omega_{10}' = 0,\\ \varpi_{01}' = 0. \end{cases}$$

Представителем группы g_6 является

$$\boxed{g_6 \begin{cases} X = x + f(y)\\ Y = y + a \end{cases}}\ , \quad \text{инвариантная в} \quad \boxed{G_6 \begin{cases} X = ax + f(y)\\ Y = by + c \end{cases}}\ .$$

Если $c \neq 0$, то инварианты b и c независимы и можно присвоить им фиксированные значения $b = 0$ и $c = 2$; получим единственный тип групп g_7, инвариантных в G_7; для группы G_7 выполняются тождества $\omega_{10} \equiv -\omega$, $\varpi_{10} \equiv 0$. Структуры групп g_7 и G_7 таковы

$$g_7 \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = -\omega\varpi, \end{cases} \qquad G_7 \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi_{01}' = \varpi\omega_{01}. \end{cases}$$

Можно взять

$$\boxed{g_7 \begin{cases} X = \dfrac{x}{f'(y)}\\ Y = f(y) \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_7 \begin{cases} X = \dfrac{ax}{f'(y)}\\ Y = f(y) \end{cases}}\ .$$

a₂. $b^2 - 4a \neq 0$. Тогда можно считать, что $c = 0$. Имеем

$$\theta_1' = 0, \quad \theta_2' = \theta_3\theta_2, \quad \theta_3' = 0,$$
$$da = -b\theta_2 + 2a\theta_3,$$
$$db = -2\theta_2 + b\theta_3.$$

Итак, a и b — два независимых инварианта. Можно присвоить им фиксированные значения, например,

$$b = 0, \qquad a = \mp 1.$$

Тогда для наибольшей группы G, в которой группа g инвариантна, получим

$$\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},$$
$$\varpi' = \pm\omega\omega_{01} + \varpi\omega_{10},$$
$$\omega_{10}' = 0.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\omega_{01}' = \lambda\omega\varpi,$$

где коэффициент λ — инвариант группы g. Применяя фундаментальное тождество, получаем

$$d\lambda = 2\lambda\omega_{10}.$$

Если $\lambda = 0$, то получим группу g_8 (или g_8'), инвариантную в G_8 (соответственно, G_8'). Структуры групп g_8 и G_8 определяются уравнениями

$$g_8, g_8' \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \pm\omega\omega_{01}, \\ \omega_{01}' = 0, \end{cases} \qquad G_8, G_8' \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \pm\omega\omega_{01} + \varpi\omega_{10}, \\ \omega_{10}' = 0, \\ \omega_{01}' = 0. \end{cases}$$

При $a = -1$ можно взять более простые структуры

$$g_8 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = -\varpi\omega_{10}, \\ \omega_{10}' = 0, \end{cases} \qquad G_8 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega_{10}' = 0, \\ \varpi_{01}' = 0, \end{cases}$$

что приводит к группе

$$\boxed{g_8 \begin{cases} X = ax + b \\ Y = \dfrac{1}{a} y + c \end{cases}},$$

инвариантной в

$$\boxed{G_8 \begin{cases} X = ax + b \\ Y = cy + h \end{cases}},$$

и к группе

$$\boxed{g_8' \begin{cases} X = a + x\cos c - y\sin c \\ Y = b + x\sin c + y\cos c \end{cases}},$$

инвариантной в

$$\boxed{G_8' \begin{cases} X = a + cx - hy \\ Y = b + hx + cy \end{cases}}.$$

Если λ отлично от нуля, то можно присвоить этому инварианту фиксированное значение ± 1, и тогда группа g_9 (или g_9', или g_9'') инвариантна лишь в себе. Ее структура определяется уравнениями

$$g_9, g_9', g_9'' \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \pm\omega\omega_{01}, \\ \omega_{01}' = \pm\omega\varpi. \end{cases}$$

Если $a = -1$, то можно взять более простые уравнения

$$g_9 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = -\varpi\omega_{10}, \\ \omega_{10}' = \omega\varpi; \end{cases}$$

это даст группу

$$\boxed{g_9 \begin{cases} X = \dfrac{ax + b}{cx + d} \\ Y = \dfrac{ay + b}{cy + d} \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Если $a = +1$, то, полагая $x + iy = z$, получим группы

$$\boxed{g'_9, g''_9 \left\{Z = \frac{(a+ib)z + c + id}{\pm(c - id)z + a - ib} \qquad \left[a^2 + b^2 \pm (c^2 + d^2) = 1\right]\right.},$$

инвариантные лишь в себе.

b. Во втором случае уравнение

$$\omega_{10} + \varpi_{01} = 0$$

не входит в систему, дающую три инварианта первого порядка группы g. Положим

$$\begin{aligned}
&\theta_1 \equiv \omega_{10} - \varpi_{01} + a(\omega_{10} + \varpi_{01}) + h\varpi = 0,\\
&\theta_2 \equiv \omega_{01} + b(\omega_{10} + \varpi_{01}) = 0,\\
&\theta_3 \equiv \varpi_{10} + c(\omega_{10} + \varpi_{01}) = 0.
\end{aligned}$$

Коэффициент h также можно приравнять нулю, если только не выполняется равенство

$$a^2 + 4bc = 1;$$

но даже в этом случае из полной интегрируемости предыдущей системы вытекает, что $h = 0$.

Итак, предположим, что $h = 0$. Несложные вычисления приводят к равенствам

$$\begin{gathered}
\theta'_1 = 2\theta_3\theta_2, \quad \theta'_2 = \theta_2\theta_1, \quad \theta'_3 = \theta_1\theta_3,\\
da = -2c\theta_2 + 2b\theta_3,\\
db = -b\theta_1 + a\theta_2,\\
dc = -a\theta_3 + c\theta_1.
\end{gathered}$$

Отсюда вытекает соотношение

$$a\,da + 2b\,dc + 2c\,db = 0;$$

следовательно, выражение $a^2 + 4bc$ равняется константе m, и эта константа *существенна* для различных искомых типов.

b_1. Предположим сначала, что $a = b = c = 0$. Получим группы g_{10}, инвариантные в G_{10}. Структура группы G_{10} задается формулами

$$\begin{aligned}
&\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
&\varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},\\
&\omega'_{10} - \varpi'_{01} = 2\varpi_{10}\omega_{01},\\
&\omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\
&\varpi'_{10} = (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10},
\end{aligned}$$

откуда вытекает равенство

$$\omega'_{10} + \varpi'_{01} = \lambda\omega\varpi.$$

Коэффициент λ — инвариант; с другой стороны, фундаментальное тождество, примененное к последней формуле, дает

$$\omega\varpi\,(d\lambda - \lambda(\omega_{10} + \varpi_{01})) = 0,$$

откуда следует, что $\lambda = 0$. Итак, структуры групп g_{10} и G_{10} задаются формулами

$$g_{10}\;\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10},\\ \varpi' = \varpi\omega_{10},\\ \omega'_{10} = 0,\end{cases}\qquad G_{10}\;\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10} = \varpi_{10}\omega_{01},\\ \omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\ \varpi'_{10} = (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10},\\ \varpi'_{01} = \omega_{01}\varpi_{10}.\end{cases}$$

Можно взять в качестве g_{10} группу

$$\boxed{g_{10}\;\begin{cases}X = ax + b\\ Y = ay + c\end{cases}}\,,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{10}\;\begin{cases}X = ax + by + c\\ Y = hx + ky + p\end{cases}}\,.$$

$\mathfrak{b}_2$. Если все три числа a, b, c не равны нулю, то среди этих трех инвариантов имеются два независимых. Рассмотрим различные предположения о знаке числа $a^2 + 4bc$.

Если число $a^2 + 4bc$ *положительно*, допустим, равно m^2, где $m > 0$, то присвоим этим инвариантам фиксированные значения

$$a = -m, \qquad b = c = 0.$$

Если обозначить через G_{11} группу, в которой искомая группа g_{11} инвариантна, то для группы G_{11} получим $\omega_{01} \equiv \varpi_{10} \equiv 0$. Структура группы G_{11} задается уравнениями

$$\begin{gathered}\omega' = \omega\omega_{10},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ (1 + m)\omega'_{10} = (1 - m)\varpi'_{01}.\end{gathered}$$

Если $m = +1$, то никаких других соотношений нет. Структуры групп g_{11} и G_{11} задаются уравнениями

$$g_{11}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_{11}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \end{cases}$$

а в качестве представителя можно взять группу

$$\boxed{g_{11}\ \begin{cases} X = f(x) \\ Y = y + a \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{11}\ \begin{cases} X = f(x) \\ Y = ay + b \end{cases}}\ .$$

Если m^2 отлично от 1, то получаем

$$\begin{aligned} \omega'_{10} &= (1 - m)\lambda\omega\varpi, \\ \varpi'_{10} &= (1 + m)\lambda\omega\varpi, \end{aligned}$$

причем так же, как выше, можно доказать, что λ равно нулю. Тогда структуры групп g_{12} и G_{12} задаются формулами

$$g_{12}\ \begin{cases} \omega' = (1 - m)\omega\chi, \\ \varpi' = (1 + m)\omega\chi, \\ \chi' = 0, \end{cases} \qquad G_{12}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{12}\ \begin{cases} X = a^{1-m}x + b \\ Y = a^{1+m}y + c \end{cases} \qquad (m \neq 0)}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{12}\ \begin{cases} X = ax + b \\ Y = cy + h \end{cases}}\ .$$

Если число a^2+4bc *отрицательно* и равно $-m^2$, то присвоим этим инвариантам значения

$$a=0, \quad b=-c=\frac{1}{2}m.$$

Тогда для наибольшей группы G'_{12}, в которой искомая группа g'_{12} инвариантна, выполнены равенства $\omega_{10}\equiv\varpi_{01}$, $\omega_{01}\equiv-\varpi_{10}$ и, следовательно, ее структура определяется уравнениями

$$\begin{aligned}&\omega'=\omega\omega_{10}-\varpi\varpi_{10},\\&\varpi'=\omega\varpi_{10}+\varpi\omega_{10},\\&\varpi'_{10}-m\omega'_{10}=0,\end{aligned}$$

откуда вытекает, как и выше, что

$$\omega'_{10}=0.$$

Следовательно, группы g'_{12} и G'_{12} имеют структуры

$$g'_{12}\begin{cases}\omega'=(\omega-m\varpi)\omega_{10},\\ \varpi'=(\varpi+m\omega)\omega_{10},\\ \omega'_{10}=0,\end{cases} \qquad G'_{12}\begin{cases}\omega'=\omega\omega_{10}-\varpi\varpi_{10},\\ \varpi'=\omega\varpi_{10}+\varpi\omega_{10},\\ \omega'_{10}=0,\\ \varpi'_{10}=0.\end{cases}$$

Полагая $x+iy=z$, получим группу

$$\boxed{g'_{12}\ \left\{Z=e^{(mi-1)a}z+b+ic \qquad (m\neq 0)\right.},$$

инвариантную в

$$\boxed{G'_{12}\ \left\{Z=(a+ib)z+c+ih\right.}.$$

Наконец, если a^2+4bc *равно нулю*, то можно присвоить инвариантам значения

$$a=b=0, \qquad c=\frac{1}{2}.$$

Для наибольшей группы G_{13}, в которой искомая группа g_{13} инвариантна, получаем соотношения

$$\begin{aligned}&\omega'=\omega\omega_{10},\\&\varpi'=\omega\varpi_{10}+\varpi\omega_{10},\\&\varpi'_{10}+\omega'_{10}=0,\end{aligned}$$

из которых следует, что

$$\omega'_{10} = \lambda\omega\varpi,$$

и так же, как и выше, $\lambda = 0$. Следовательно, структуры групп g_{13} и G_{13} имеют вид

$$g_{13} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = (\varpi - \omega)\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = 0, \end{cases} \qquad G_{13} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \varpi'_{10} = 0. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{13} \begin{cases} X = ax + b \\ Y = a(y - x\ln a) + c \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{13} \begin{cases} X = ax + b \\ Y = a(y - cx) + h \end{cases}}.$$

39. 4° *Искомая группа g имеет четыре независимых инварианта первого порядка.*

Вполне интегрируемую систему, дающую эти инварианты, можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv \omega_{10} + a\varpi = 0, \\ \theta_2 &\equiv \omega_{01} = 0, \\ \theta_3 &\equiv \varpi_{10} = 0, \\ \theta_4 &\equiv \varpi_{01} + b\omega = 0; \end{aligned}$$

коэффициенты a и b являются инвариантами первого порядка. Легко видеть, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \theta_3\theta_2, \\ \theta'_2 &= \theta_2(\theta_1 - \theta_4), \\ \theta'_3 &= (\theta_1 - \theta_4)\theta_3, \\ \theta'_4 &= \theta_2\theta_3, \end{aligned}$$

а также соотношения

$$\begin{aligned} da &= a\theta_4 + b\theta_2, \\ db &= a\theta_3 + b\theta_1. \end{aligned}$$

a. Сначала предположим, что $a = b = 0$. Тогда получим группу g_{14}, инвариантную в G_{14}; структуры этих групп имеют вид

$$g_{14}\begin{cases}\omega' = 0,\\ \varpi' = 0,\end{cases}\qquad G_{14}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10} = \varpi_{10}\omega_{01},\\ \omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\ \varpi'_{10} = (\omega_{10} - \varpi_{01})\omega_{01},\\ \varpi'_{01} = \omega_{01}\varpi_{10}.\end{cases}$$

В качестве представителя выберем группу параллельных переносов

$$\boxed{g_{14}\begin{cases}X = x + a\\ Y = y + b\end{cases}}\;,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{14}\begin{cases}X = ax + by + c\\ Y = hx + ky + p\end{cases}}\;.$$

b. Предположим теперь, что a и b не обращаются одновременно в нуль; тогда они являются двумя независимыми инвариантами. Можно присвоить им фиксированные значения

$$a = -1, \qquad b = 0.$$

Получим группу g_{15}, инвариантную в G_{15}; структурные уравнения имеют вид

$$g_{15}\begin{cases}\omega' = \omega\varpi,\\ \varpi' = 0,\end{cases}\qquad G_{15}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = 0,\\ \omega'_{10} = 0,\\ \omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi).\end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{15}\begin{cases}X = ax + b\\ Y = ay\end{cases}}\;,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{15}\ \begin{cases} X = ax + by + h \\ Y = cy \end{cases}}\ .$$

Нахождение транзитивных групп с двумя переменными, имеющих инварианты только первого порядка, завершено. Остается рассмотреть последовательно все найденные группы g, включая общую группу преобразований $\mathcal{G}$, и выяснить, содержат ли они подгруппы, не имеющие других инвариантов первого порядка (отличные от самой группы g), но имеющие инварианты более высокого порядка. Впрочем, очевидно, что для групп

$$g_8,\ g_9,\ g_{10},\ g_{12},\ g_{13},\ g_{14},\ g_{15}$$

это исследование не требуется. Но оно необходимо для остальных групп, а именно, для

$$\mathcal{G},\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6,\ g_7,\ g_{11}.$$

40. I. *Транзитивные группы, не имеющие инвариантов первого порядка.*

Предположим, что минимальный порядок инвариантов такой группы равен n, и предположим, что одно из уравнений вполне интегрируемой системы, определяющей инварианты порядка n, имеет вид

$$\theta = \sum_{p+q\leqslant n} A_{pq}\omega_{pq} + \sum_{p+q\leqslant n} B_{pq}\varpi_{pq} = 0.$$

Если пренебречь в θ' всеми членами с ω и ϖ и оставить только члены с $\omega_{10}, \omega_{01}, \varpi_{01}, \varpi_{10}$, то получим

$$\begin{aligned}\theta' = &\omega_{10}\left(\sum (p-1)A_{pq}\omega_{pq} + \sum pB_{pq}\varpi_{pq}\right) + \\ &+ \omega_{01}\left(\sum A_{pq}(q\omega_{p+1,q-1} - \varpi_{pq}) + \sum qB_{pq}\varpi_{p+1,q-1}\right) + \\ &+ \varpi_{10}\left(\sum pA_{pq}\omega_{p-1,q+1} + \sum B_{pq}(p\varpi_{p-1,q+1} - \omega_{pq})\right) + \\ &+ \varpi_{01}\left(\sum qA_{pq}\omega_{pq} + \sum (q-1)B_{pq}\varpi_{pq}\right).\end{aligned}$$

Отсюда, пренебрегая в уравнениях вполне интегрируемой системы, дающей инварианты порядка n, членами с $p + q \leqslant 1$, получаем, что наличие в системе уравнения $\theta = 0$ влечет за собой наличие всех уравнений вида

$$A_{pq}\omega_{pq} + B_{p-1,q+1}\varpi_{p-1,q+1} = 0,$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots, n$, $q = 0, 1, 2, \ldots, n$, $p + q \geqslant 2$.

Далее, нетрудно доказать (по крайней мере, при $n \geqslant 3$), что система содержит либо уравнения

$$\omega_{n0} + \ldots = \omega_{n-1,1} + \ldots = \ldots = \omega_{0n} + \ldots = \varpi_{n0} + \ldots = \ldots = \varpi_{0n} + \ldots = 0,$$

либо уравнения

$$\omega_{n0} + \varpi_{n-1,1} + \ldots = \omega_{n-1,1} + \varpi_{n-2,2} + \ldots = \ldots = \omega_{1,n-1} + \varpi_{0n} + \ldots = 0,$$

где многоточиями обозначены члены порядка 0 или 1.

В обоих случаях n *не может превосходить* 2. Действительно, если $n \geqslant 2$, то коэффициент при ϖ_{20} в ω'_{n0} равен

$$\frac{n(n-1)}{2}\omega_{n-2,1},$$

а в $\omega'_{n0} + \varpi'_{n-1,1}$ он равен

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}(\omega_{n-2,1} + \varpi_{n-3,2}),$$

и эти слагаемые не сокращаются.

Итак, предположим, что $n = 2$. Рассмотрение коэффициентов при ω_{01} и ϖ_{10} в θ' показывает, что наличие уравнений вида

$$\omega_{02} + \ldots = 0, \quad \varpi_{20} + \ldots = 0, \quad a\omega_{20} + b\varpi_{11} + \ldots = 0, \quad a\varpi_{02} + b\omega_{11} + \ldots = 0$$

влечет за собой наличие, соответственно, уравнений

$$\begin{gathered}
\varpi_{02} - 2\omega_{11} + \ldots = 0,\\
\omega_{20} - 2\varpi_{11} + \ldots = 0,\\
(a-b)\varpi_{20} + \ldots = b\varpi_{02} + (2a-b)\omega_{11} + \ldots = 0,\\
b\omega_{20} + (2a-b)\varpi_{11} + \ldots = (a-b)\omega_{02} + \ldots = 0.
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что система должна иметь один из следующих видов:

$$\omega_{20} + \varpi_{11} + \ldots = \varpi_{02} + \omega_{11} + \ldots = 0,$$

$$\omega_{02} + \ldots = \varpi_{20} + \ldots = \omega_{20} - 2\varpi_{11} + \ldots = \varpi_{02} - 2\omega_{11} + \ldots = 0,$$

$$\omega_{20} + \ldots = \omega_{11} + \ldots = \omega_{02} + \ldots = \varpi_{20} + \ldots = \varpi_{11} + \ldots = \varpi_{02} + \ldots = 0.$$

Следовательно, существует два, четыре или шесть инвариантов второго порядка, в соответствии с этими тремя случаями.

1° *Существует два инварианта второго порядка.* Можно положить

$$\theta_1 \equiv \omega_{20} + \varpi_{11} + a_{10}\omega_{10} + a_{01}\omega_{01} + b_{10}\varpi_{10} + b_{01}\varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_2 \equiv \omega_{11} + \varpi_{02} + a'_{10}\omega_{10} + a'_{01}\omega_{01} + b'_{10}\varpi_{10} + b'_{01}\varpi_{01} + c\omega = 0,$$

после того, как три коэффициента при ω и ϖ обращены в нуль (что всегда возможно). Очевидно, имеем

$$\theta'_1 = \theta'_2 = 0.$$

Рассматривая эти равенства, последовательно получим

$$\begin{gathered} da_{10} = \theta_1, \qquad db_{10} = \theta_2, \\ a_{01} = b_{01} = a'_{10} = b'_{10} = 0, \\ a'_{01} = a_{10}, \qquad b'_{01} = b_{10}, \\ c = 0. \end{gathered}$$

Тогда можно присвоить инвариантам a_{10}, b_{10} нулевые значения; получим группу $g_{0,1}$, инвариантную лишь в себе, структура которой задается уравнениями

$$g_{0,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} + \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Можно взять, например, группу

$$\boxed{g_{0,1} \left\{ \frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = a \right.},$$

инвариантную лишь в себе.

Для этой группы можно выразить все формы ϖ_{pq} с $(q > 0)$ через формы ω_{pq}:

$$\varpi_{pq} = -\omega_{p+1,q-1};$$

таким образом, остаются только формы порядка n, а именно,

$$\varpi_{n0}, \ \omega_{n0}, \ \omega_{n-1,1}, \ \omega_{n-2,2}, \ \ldots, \ \omega_{1,n-1}, \ \omega_{0n}.$$

Теперь предположим, что группа $g_{0,1}$ содержит подгруппы, имеющие инварианты порядка n, $n \geqslant 3$, но не имеющие инвариантов порядка $n-1$.

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что система, дающая эти инварианты, имеет вид

$$\varpi_{n0} + \ldots = \omega_{n0} + \ldots = \omega_{n-1,1} + \ldots = \ldots = \omega_{0n} + \ldots = 0,$$

где многоточия обозначают формы порядка 0 или 1. Но тогда из системы следует, что коэффициент при ϖ_{20} в ω'_{20} не обращается в нуль. Следовательно, группа $g_{0,1}$ не содержит искомых подгрупп.

2° *Существует четыре инварианта второго порядка.* Можно положить

$$\begin{aligned}
\theta_1 &\equiv \omega_{02} + a_{10}\omega_{10} + a_{01}\omega_{01} + b_{10}\varpi_{10} + b_{01}\varpi_{01} = 0,\\
\theta_2 &\equiv \varpi_{02} - 2\omega_{11} + \alpha_{10}\omega_{10} + \alpha_{01}\omega_{01} + \beta_{10}\varpi_{10} + \beta_{01}\varpi_{01} = 0,\\
\theta_3 &\equiv \omega_{20} - 2\varpi_{11} + \alpha'_{10}\omega_{10} + \alpha'_{01}\omega_{01} + \beta'_{10}\varpi_{10} + \beta'_{01}\varpi_{01} = 0,\\
\theta_4 &\equiv \varpi_{20} + a'_{10}\omega_{10} + a'_{01}\omega_{01} + b'_{10}\varpi_{10} + b'_{01}\varpi_{01} = 0.
\end{aligned}$$

Коэффициенты при ω и ϖ обращены в нуль путем приведения линейной группы, действующей на формы $\omega_{20}, \omega_{11}, \omega_{02}, \varpi_{20}, \varpi_{11}, \varpi_{02}$, к тождественному преобразованию.

Очевидно, получаем, как и выше, соотношения

$$\theta'_1 = \theta'_2 = \theta'_3 = \theta'_4 = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{array}{llll}
da_{10} = -\theta_1, & da_{01} = -\theta_2, & db'_{10} = -\theta_3, & db'_{01} = -\theta_4,\\
b_{10} = 0, & b_{01} = -2a_{10}, & a'_{10} = -2b_{01}', & a'_{01} = 0,\\
\alpha_{10} = 0, & \alpha_{01} = 2b'_{10}, & \beta_{10} = 3a_{10}, & \beta_{01} = -a_{01},\\
\alpha'_{10} = -b'_{10}, & \alpha'_{01} = 3b'_{01}, & \beta'_{10} = 2a_{01}, & \beta'_{01} = 0.
\end{array}$$

Четырем независимым инвариантам $a_{10}, a_{01}, b'_{10}, b'_{01}$ можно присвоить фиксированные значения, например, нулевые и тогда будем тождественно иметь

$$\omega_{02} \equiv \varpi_{02} - 2\omega_{11} \equiv \omega_{20} - 2\varpi_{11} \equiv \varpi_{20} \equiv 0.$$

Отсюда вытекают равенства

$$\begin{aligned}
\omega'_{11} &= \omega_{01}\varpi_{11} + \varpi_{01}\omega_{11},\\
\varpi'_{11} &= \omega_{10}\varpi_{11} + \varpi_{10}\omega_{11}.
\end{aligned}$$

Следовательно, получается один тип $g_{0,2}$ конечномерных 8-параметрических групп, инвариантных лишь в себе; их структура определяется уравнениями

$$g_{0,2}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10} = \varpi_{10}\omega_{01} + 2\omega\varpi_{11} + \varpi\omega_{11},\\ \omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}) + \omega\omega_{11},\\ \varpi'_{10} = (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10} + \varpi\varpi_{11},\\ \varpi'_{01} = \omega_{01}\varpi_{10} + \omega\varpi_{11} + 2\varpi\omega_{11},\\ \omega'_{11} = \omega_{01}\varpi_{11} + \varpi_{01}\omega_{11},\\ \varpi'_{11} = \omega_{10}\varpi_{11} + \varpi_{10}\omega_{11}.\end{cases}$$

Можно взять в качестве примера группу

$$\boxed{g_{0,2}\begin{cases}X = \dfrac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + c_3}\\[2ex] Y = \dfrac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + c_3}\end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

3° *Существует шесть инвариантов второго порядка.* В этом случае группу $g_{0,3}$ можно рассматривать как подгруппу группы $g_{0,2}$, определяющуюся двумя дополнительными инвариантами второго порядка. Можно взять

$$\theta_1 \equiv \omega_{11} + a_{10}\omega_{10} + a_{01}\omega_{01} + b_{10}\varpi_{10} + b_{01}\varpi_{01} + c\omega + h\varpi = 0,$$
$$\theta_2 \equiv \varpi_{11} + a'_{10}\omega_{10} + a'_{01}\omega_{01} + b'_{10}\varpi_{10} + b'_{01}\varpi_{01} + c'\omega + h'\varpi = 0.$$

Очевидно, имеем также

$$\theta'_1 = \theta'_2 = 0.$$

Отсюда последовательно получаются равенства

$$\begin{gathered}da_{01} = \theta_2, \qquad db_{01} = \theta_1,\\ a_{10} = b_{10} = a'_{01} = b'_{01} = 0,\\ a'_{10} = a_{01}, \qquad b'_{10} = b_{01},\\ c = h' = a_{01}b_{01},\\ c' = a_{01}^2, \qquad h = b_{01}^2.\end{gathered}$$

Если присвоить независимым инвариантам a_{01} и b_{01} нулевые значения, то получим

$$\omega_{11} \equiv \varpi_{11} \equiv 0.$$

Таким образом, получается один тип групп $g_{0,3}$, инвариантных лишь в себе.

Их структура задается уравнениями

$$g_{0,3} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi_{10}\omega_{01}, \\ \omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}), \\ \varpi'_{10} = (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10}, \\ \omega'_{01} = \omega_{01}\varpi_{10}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{0,3} \begin{cases} X = a_1x + a_2y + a_3 \\ Y = b_1x + b_2y + b_3 \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Итак, всего существует (считая саму группу G) четыре типа групп (два типа — конечномерных, и два типа — бесконечномерных), не имеющих инвариантов первого порядка, т. е. групп, под действием которых *линейные элементы* плоскости преобразуются общей линейной однородной группой. Впрочем, этот результат справедлив для случая любого числа переменных и был доказан в общей форме Софусом Ли¹).

41. II. *Транзитивные группы, имеющие тот же инвариант первого порядка, что и группа* g_1. Здесь роль группы G_1 играет только что определенная группа $g_{0,1}$. Вполне интегрируемая система, которая дает инварианты порядка n искомых групп, всегда содержит уравнение

$$\omega_{10} + \varpi_{01} = 0.$$

Пусть n — наименьшее число, при котором имеются другие уравнения, и пусть

$$\theta \equiv B\varpi_{n0} + A_n\omega_{n0} + A_{n-1}\omega_{n-1,1} + \ldots + A_1\omega_{1,n-1} + A_0\omega_{0,n} = 0$$

---

¹) *Leipz. Abh.* t. XXI, 1895, p. 81 (под редакцией Ф. Энгеля).

— одно из этих уравнений (выписаны только члены порядка n). Если в θ' сохранить только члены с $\omega_{10}, \omega_{01}, \varpi_{10}$, а в коэффициентах при них — только формы порядка n, то, учитывая уравнения системы, получаем

$$\begin{aligned}\theta' = \omega_{10}\,((n{+}1)B\varpi_{n0}+(n-1)A_n\omega_{n0}+(n-3)A_{n-1}\omega_{n-1,1}+\ldots-(n{+}1)A_0\omega_{0n})+\\ +\omega_{01}\,(-A_n\varpi_{n0}+2A_{n-1}\omega_{n,0}+3A_{n-2}\omega_{n-1,1}+\ldots+(n{+}1)A_0\omega_{1,n-1})+\\ +\varpi_{10}\,(-(n{+}1)B\omega_{n0}+nA_{n-1}\omega_{n-1,1}+(n-1)A_{n-2}\omega_{n-2,2}+\ldots+A_1\omega_{0n})+\ldots.\end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что система содержит $n{+}2$ уравнения порядка n. Но тогда из рассмотрения коэффициента при ϖ_{20} в ω'_{n0} видно, что $n \leqslant 2$.

Итак, предположим, что $n = 2$. Можно положить

$$\begin{aligned}&\theta \equiv \omega_{10} + \varpi_{01} = 0,\\ &\theta_1 \equiv \varpi_{20} + a_1\varpi_{10} + b_1(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c_1\omega_{01} = 0,\\ &\theta_2 \equiv \omega_{20} + a_2\varpi_{10} + b_2(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c_2\omega_{01} + h_2\omega = 0,\\ &\theta_3 \equiv \omega_{11} + a_3\varpi_{10} + b_3(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c_3\omega_{01} + h_3\omega = 0,\\ &\theta_4 \equiv \omega_{02} + a_4\varpi_{10} + b_4(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c_4\omega_{01} + h_4\omega = 0,\end{aligned}$$

где коэффициенты при ω и ϖ, отличные от h_2, h_3, h_4, обращены в нуль за счет приведения линейной группы, действующей на формы $\omega_{20}, \varpi_{20}, \omega_{11}, \omega_{02}$, к тождественному преобразованию.

Получим последовательно

$$\theta' = 0, \quad \theta_1' = \frac{1}{2}\theta\theta_1, \quad \theta_2' = \frac{1}{2}\theta\theta_2, \quad \theta_3' = \frac{1}{2}\theta\theta_3, \quad \theta_4' = \frac{1}{2}\theta\theta_4,$$

$$\begin{aligned}db_1 &= \frac{3}{2}\theta_1 + \frac{1}{2}b_1\theta,\\ da_1 &= -3\theta_2 + \frac{1}{2}a_1\theta,\\ da_2 &= 2\theta_3 + \frac{1}{2}a_2\theta,\\ da_3 &= \theta_4 + \frac{1}{2}a_3\theta,\end{aligned}$$

$$c_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{6}a_1, \quad c_2 = -\frac{2}{3}b_1, \quad b_3 = -\frac{1}{4}a_2,$$

$$c_3 = -\frac{2}{3}a_1, \quad a_4 = 0, \quad b_4 = -\frac{3}{2}a_3, \quad c_4 = \frac{3}{2}a_2.$$

Инварианты b_1, a_1, a_2, a_3 независимы; им можно присвоить фиксированные значения, например, нулевые. Тогда получим равенства

$$\theta \equiv \omega_{10} + \varpi_{01} = 0,$$

$$\varpi_{20} \equiv \omega_{20} + h_2\omega \equiv \omega_{11} + h_3\omega \equiv \omega_{02} + h_4\omega \equiv 0.$$

Отсюда легко выводится, что

$$h_2 = h_3 = h_4 = 0.$$

Следовательно, имеется один тип групп $g_{1,1}$, инвариантных в группе $G_{1,1}$; структуры групп $g_{1,1}$ и $G_{1,1}$ задаются, соответственно, формулами

$$g_{1,1}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} - \varpi\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = \varpi_{10}\omega_{01}, \\ \omega'_{01} = 2\omega_{01}\omega_{10}, \\ \varpi'_{10} = 2\omega_{10}\varpi_{10}, \end{cases} \qquad G_{1,1}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi_{10}\omega_{01}, \\ \omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}), \\ \varpi'_{10} = (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10}, \\ \varpi'_{01} = \omega_{01}\varpi_{10}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{1,1}\ \begin{cases} X = a_1x + a_2y + a_3 \\ Y = b_1x + b_2y + b_3 \end{cases} \qquad (a_1b_2 - b_1a_2 = 1)}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{1,1}\ \begin{cases} X = a_1x + a_2y + a_3 \\ Y = b_1x + b_2y + b_3 \end{cases}}\ .$$

42. III. *Транзитивные группы, имеющие тот же инвариант первого порядка, что и группа g_2.*

Группа $G_2^{(n)}$, n-е нормальное продолжение группы g_2, определяется формами ω_{pq} с $p+q \leqslant n$ и формами $\varpi, \varpi_{01}, \ldots, \varpi_{0n}$. Ее структура определяется теми же формулами, что и структура группы $G^{(n)}$, при отбрасывании в них форм ω_{pq} с $p > 0$.

Пусть n — минимальный порядок инвариантов искомой группы, рассматриваемой как подгруппа группы G_2. Пусть

$$\theta \equiv \sum A_{pq}\omega_{pq} + \sum B_q\varpi_{0q} = 0$$

— одно из уравнений системы, определяющей эти инварианты n-го порядка. Вычислим θ', пренебрегая членами с ω и ϖ и учитывая уравнения системы; при этом будем рассматривать только коэффициенты при $\omega_{10}, \omega_{01}, \varpi_{01}$, а в этих коэффициентах — только формы порядка $\geqslant 2$. Тогда получим

$$\theta' = \omega_{10}\sum(p-1)A_{pq}\omega_{pq} + \omega_{01}\sum A_{pq}(q\omega_{p+1,q-1} - \varpi_{pq}) + \\ + \varpi_{01}\left(\sum qA_{pq}\omega_{pq} + \sum(q-1)B_q\varpi_{0q}\right) + \ldots$$

Следовательно, можно предположить (пренебрегая формами порядка 0 и 1), что каждое уравнение системы имеет один из видов

$$\omega_{pq} + \ldots = 0 \qquad (p \neq 1,\ p+q = n),$$
$$A\omega_{1,n-1} + B\varpi_{0n} + \ldots = 0.$$

Кроме того, система, разумеется, содержит одно из уравнений

$$\varpi_{0n} + \ldots = 0,$$
$$\omega_{n0} + \ldots = 0.$$

Впрочем, в обоих случаях можно доказать (как уже было отмечено), что тогда $n \leqslant 3$.

1° *Минимальный порядок инвариантов равен* 3.

Будем различать три случая: в первом случае система, дающая инварианты третьего порядка, не содержит уравнений вида $\varpi_{03} + \ldots = 0$, во втором случае она не содержит уравнений вида $\omega_{30} + \ldots = 0$, и, наконец, в третьем случае она содержит уравнения обоих видов.

а. *Система, дающая инварианты третьего порядка, не содержит уравнений вида* $\varpi_{03} + \ldots = 0$. Тогда она содержит уравнение

$$\theta \equiv \omega_{30} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} = 0$$

(где коэффициенты при ω и ϖ обращены в нуль). Тогда получим

$$\theta' = 0, \qquad da = 2\theta, \qquad b = c = 0.$$

Таким образом, имеется один тип групп $g_{2,1}$, инвариантных лишь в себе, их структура получается, если положить $\omega_{30} \equiv 0$:

$$g_{2,1}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

Например, можно взять группу

$$\boxed{g_{2,1}\ \begin{cases} X = \dfrac{xf(y)+\varphi(y)}{x\psi(y)+1} \\ Y = \chi(y) \end{cases}}\ ,$$

инвариантную лишь в себе.

Теперь продолжение $g_{2,1}^{(n)}$ этой группы определяется формами ω_{0q} с $q \leqslant n$, ω_{1q} с $q \leqslant n-1$, ω_{2q} с $q \leqslant n-2$ и ϖ_{0q} с $q \leqslant n$. Если одна из ее подгрупп имеет инварианты минимального порядка $n \geqslant 3$, то система, дающая эти инварианты, содержит одно из уравнений

$$\theta \equiv \varpi_{0n} + \ldots = 0,$$
$$\theta \equiv \omega_{2,n-2} + \ldots = 0.$$

Первый случай невозможен, так как тогда $n = 3$, что противоречит предположению. Второй случай также невозможен, так как тогда θ' содержит член $(n-2)\omega_{11}\omega_{2,n-3}$, который не сокращается.

$\mathfrak{b}$. *Система, дающая инварианты 3-го порядка, не содержит уравнений вида* $\omega_{30} + \ldots = 0$. Тогда она содержит уравнение

$$\theta \equiv \varpi_{03} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} + h\omega = 0,$$

откуда находим

$$\theta' = 0, \quad dc = 2\theta, \quad a = b = h = 0.$$

Таким образом, получается один тип групп $g_{2,2}$, инвариантных лишь в себе. Их структура получается, если положить $\varpi_{03} = 0$:

$$g_{2,2}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{2,2}\ \begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}}\ ,$$

инвариантную лишь в себе.

Нормальное продолжение $g_{2,2}^{(n)}$ группы $g_{2,2}$ определяется формами ϖ, ϖ_{01}, ϖ_{02} и ω_{pq} с $p+q \leqslant n$. Если одна из подгрупп группы $g_{2,2}$ имеет инварианты минимального порядка $n \geqslant 3$, то система, дающая эти инварианты, содержит уравнение

$$\omega_{n0} + \ldots = 0;$$

но это возможно только при $n = 3$, что противоречит предположению.

с. *Система, дающая инварианты* 3*-го порядка, содержит уравнения двух видов* $\omega_{30} + \ldots = \varpi_{03} + \ldots = 0$. Этот случай объединяет два предыдущих и приводит к типу $g_{2,3}$, структура которого получается, если положить $\omega_{30} \equiv \equiv \varpi_{03} \equiv 0$:

$$g_{2,3}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве примера группу

$$\boxed{g_{2,3}\ \begin{cases} X = \dfrac{xf(y) + \varphi(y)}{x\psi(y) + 1} \\[2ex] Y = \dfrac{ay + b}{cy + h} \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Продолжение $g_{2,3}^{(n)}$ группы $g_{2,3}$ определяется формами $\varpi, \varpi_{01}, \varpi_{02}, \omega_{0q}$, ω_{1q}, ω_{2q}. Если одна из подгрупп группы $g_{2,3}$ имеет инварианты минимального порядка $n \geqslant 3$, то система, дающая эти инварианты, должна содержать уравнение вида

$$\theta \equiv \omega_{2,n-2} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} + \delta\omega = 0,$$

но тогда θ' содержит член $(n-2)\omega_{11}\omega_{2,n-3}$, который не сокращается.

2° *Минимальный порядок инвариантов равен* 2.

Будем различать еще три случая.

а. *Система, которая дает инварианты порядка* 2*, не содержит уравнений вида* $\varpi_{02} + \ldots = 0$.

Тогда она содержит уравнение

$$\theta \equiv \omega_{20} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} = 0.$$

Отсюда получим

$$\theta' = 0, \quad da = \theta, \quad b = c = 0.$$

Это дает тип подгрупп $g_{2,4}$, инвариантных лишь в себе; их структура получается, если положить $\omega_{20} \equiv 0$:

$$g_{2,4} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве примера группу

$$\boxed{g_{2,4} \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = \psi(y) \end{cases}}\ ,$$

инвариантную лишь в себе.

Продолжение $g_{2,4}^{(n)}$ группы $g_{2,4}$ определяется формами $\varpi_{0q}, \omega_{0q}, \omega_{1q}$. Если одна из подгрупп группы $g_{2,4}$ имеет инварианты минимального порядка $n \geqslant 2$, то система, дающая эти инварианты, содержит при $n = 2$ уравнение

$$\omega_{11} + \alpha\varpi_{02} + \ldots = 0,$$

а при $n > 2$ — одно из уравнений

$$\omega_{1,n-1} + \alpha\varpi_{0n} + \ldots = 0,$$
$$\varpi_{0n} + \ldots = 0.$$

a$_1$. *Система, которая дает инварианты минимального порядка $n \geqslant 2$, не содержит уравнения $\varpi_{0n} + \ldots = 0$.* Тогда она содержит уравнение

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} - m\varpi_{0n} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} + \delta\omega = 0.$$

Легко видеть, что $n = 2$, и тогда

$$\theta' = 0, \quad dm = 0, \quad d\gamma = \theta, \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Таким образом, получаем тип групп $g_{2,5}$, инвариантных лишь в себе; их структура получается, если положить $\omega_{11} \equiv m\varpi_{02}$:

$$g_{2,5} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} - m\varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Можно взять в качестве группы $g_{2,5}$ группу

$$\boxed{g_{2,5} \begin{cases} X = axf'^{m}(y) + \varphi(y) \\ Y = f(y) \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Продолжение $g_{2,5}^{(n)}$ группы $g_{2,5}$ определяется формами $\omega_{10}, \omega_{0q}, \varpi_{0q}$. Если подгруппа группы $g_{2,5}$ имеет инварианты минимального порядка $n \geqslant 2$, то наличие в дающей их системе уравнения

$$A\omega_{0n} + B\varpi_{0n} + \ldots = 0$$

влечет за собой наличие уравнений

$$A\omega_{0n} + \ldots = 0,$$
$$B\varpi_{0n} + \ldots = 0,$$
$$(mn - 1)A\varpi_{0n} + \ldots = 0.$$

Легко видеть, что если $B \neq 0$, то $n > 2$. Тогда следует рассмотреть еще два различных случая, в зависимости от того, входит ли в систему уравнение $\varpi_{0n} + \ldots = 0$.

Если это уравнение не входит в систему, то

$$m = \frac{1}{n} \qquad (n \geqslant 2),$$
$$\theta \equiv \omega_{0n} + A\omega_{10} + B\omega_{01} + C\varpi_{10} = 0.$$

Если $n > 2$, то θ' содержит член

$$\frac{(n+1)(n-2)}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-1},$$

который не сокращается. Следовательно, $n = 2$. Тогда получаем

$$\theta' = 0, \quad dA = -\theta, \quad C = -2A, \quad B = 0.$$

Присваивая инварианту A нулевое значение, получаем, что $\omega_{02} \equiv 0$ и

$$\begin{aligned}
&\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
&\omega'_{10} = \frac{1}{2}\varpi\varpi_{02},\\
&\omega'_{01} = \frac{1}{2}\omega\varpi_{02} + \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\
&\varpi' = \varpi\varpi_{01},\\
&\varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}.
\end{aligned}$$

Из этих формул следует, что

$$\varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02} + \lambda\omega\varpi;$$

фундаментальное тождество, примененное к последней формуле, дает $\lambda = 0$. Таким образом, получим тип групп $g_{2,6}$, инвариантных лишь в себе; их структура задается формулами

$$g_{2,6}\ \begin{cases}
\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\omega'_{10} = \frac{1}{2}\varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{01} = \frac{1}{2}\omega\varpi_{02} + \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\
\varpi' = \varpi\varpi_{01},\\
\varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02},\\
\varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}.
\end{cases}$$

Например, можно взять группу

$$\boxed{g_{2,6}\ \begin{cases}
X = \dfrac{ax + by + c}{py + q}\\[2ex]
Y = \dfrac{mx + n}{py + q}
\end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Во втором случае система, дающая инварианты искомых подгрупп группы $g_{2,5}$, содержит уравнение

$$\varpi_{0n} + \ldots = 0 \qquad (n \geqslant 3),$$

что влечет $n = 3$. Полагая

$$\theta \equiv \varpi_{03} + A\omega_{10} + B\omega_{01} + C\varpi_{01} + D\omega = 0,$$

находим

$$\theta' = 0, \quad dC = 2\theta, \quad A = B = D = 0.$$

Это дает тип групп $g_{2,7}$, инвариантных лишь в себе; их структура определяется формулами

$$g_{2,7}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}, \\ \omega'_{10} = m\varpi\varpi_{02}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу преобразований вида

$$\boxed{g_{2,7}\ \begin{cases} X = \dfrac{ax}{(py+q)^{2m}} + f(y) \\ Y = \dfrac{by+c}{py+q} \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Эта группа может содержать подгруппы, имеющие инвариант минимального порядка $n \geqslant 3$, задаваемый уравнением

$$\theta \equiv \omega_{0n} + A'\omega_{10} + B'\omega_{01} + C'\varpi_{01} + D'\omega = 0.$$

Имеем

$$\omega'_{0n} = \omega_{0n}\omega_{10} + \varpi\omega_{0,n+1} + n\varpi_{01}\omega_{0n} + n\left(\frac{n-1}{2} - m\right)\varpi_{02}\omega_{0,n-1}.$$

Эта формула показывает, что

$$m = \frac{n-1}{2},$$

откуда получаем равенства

$$\theta' = 0, \quad dA' = -\theta, \quad C' = -nA', \quad B' = D' = 0.$$

Таким образом, приходим к типу, содержащему $g_{2,6}$ как частный случай; мы его также обозначим $g_{2,6}$. Чтобы получить его структуру, положим $\omega_{0n} \equiv 0$:

$$g_{2,6}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{01} = \omega_{01}\omega_{10} + \varpi\omega_{02} + \varpi_{01}\omega_{01} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega, \\ \omega'_{02} = \omega_{02}\omega_{10} + \varpi\omega_{03} + 2\varpi_{01}\omega_{02} - (n-2)\varpi_{02}\omega_{01}, \\ \omega'_{03} = \omega_{03}\omega_{10} + \varpi\omega_{04} + 3\varpi_{01}\omega_{03} - 3\dfrac{n-3}{2}\varpi_{02}\omega_{02}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} = \omega_{0,n-1}\omega_{10} + C^1_{n-1}\varpi_{01}\omega_{0,n-1} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-2}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{n-1}{2}\varpi\varpi_{02}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{cases}$$

В качестве представителя можно взять группу

$$\boxed{g_{2,6}\ \begin{cases} X = \dfrac{ax + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n}{(py+q)^{n-1}} \qquad (n \geqslant 2) \\ Y = \dfrac{by+c}{py+q} \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

a_2. *Система, дающая инварианты минимального порядка $n \geqslant 3$ подгрупп группы $g_{2,4}$, содержит уравнение $\varpi_{0n} + \ldots = 0$.*

Тогда $n = 3$. Положим

$$\theta \equiv \varpi_{03} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} + \delta\omega = 0.$$

Получим

$$\theta' = 0, \quad d\gamma = 2\theta, \quad d\alpha = d\beta = d\delta = 0.$$

Имеем, следовательно, тип групп $g_{2,8}$, инвариантных лишь в себе; их структура получается, если положить $\varpi_0^3 \equiv 0$:

$$g_{2,8}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{cases}$$

Возьмем в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{2,8}\ \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = \dfrac{ax+b}{cy+h} \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Если бы эта группа содержала подгруппу, имеющую инварианты порядка $n \geqslant 3$, то система, дающая эти инварианты, содержала бы уравнение

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} + \ldots = 0.$$

Тогда в θ' имеется член

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}\omega_{1,n-3}\varpi_{02},$$

который нельзя сократить.

b. *Система, дающая инварианты* 2*-го порядка подгрупп группы* g_2*, не содержит уравнения вида* $\omega_{20} + \ldots = 0$.

Тогда она содержит уравнение

$$\theta \equiv \varpi_{02} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} + h\omega = 0,$$

откуда легко следует, что

$$\theta' = 0, \quad dc = 0, \quad a = b = h = 0.$$

Следовательно, сначала получим тип групп $g_{2,9}$, инвариантных лишь в себе, структура которых задается формулами

$$g_{2,9}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Например, можно взять группу

$$\boxed{g_{2,9}\ \begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = ay + b \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Продолжение $g_{2,9}^{(n)}$ группы $g_{2,9}$ определяется формами $\varpi, \varpi_{01}, \omega_{pq}$ для которых $p + q \leqslant n$. Если подгруппа группы $g_{2,9}$ имеет инварианты порядка $n \geqslant 2$, то система, которая ее определяет, содержит уравнение

$$\theta \equiv \omega_{n0} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} = 0.$$

При этом $n = 3$.

Тогда имеем

$$\theta' = 0, \quad d\alpha = 2\theta, \quad \beta = \gamma = 0.$$

Это приводит к типу групп $g_{2,10}$, инвариантных лишь в себе; его структура определяется формулами

$$g_{2,10}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{2,10}\ \begin{cases} X = \dfrac{xf(y) + \varphi(y)}{x\psi(y) + 1} \\ Y = ay + b \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Как и выше, можно доказать, что эта группа не имеет подгрупп, имеющих те же инварианты третьего порядка.

c. *Система, дающая инварианты 2-го порядка подгрупп группы g_2, содержит два уравнения вида*

$$\varpi_{02} + \ldots = \omega_{20} + \ldots = 0.$$

Эти уравнения приводят сначала к группе $g_{2,11}$, инвариантной лишь в себе; ее структура определяется уравнениями

$$g_{2,11}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} = 0.\end{cases}$$

В качестве представителя рассмотрим группу

$$\boxed{g_{2,11}\begin{cases}X = xf(y) + \varphi(y)\\ Y = ay + b\end{cases}}\,,$$

инвариантную лишь в себе.

Если подгруппа группы $g_{2,11}$ имеет инварианты минимального порядка $n \geqslant 2$, то система, дающая эти инварианты, содержит уравнение вида

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} + h\omega = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\theta' = 0, \quad dc = (n-1)\theta, \quad a = b = h = 0.$$

Это приводит к группе $g_{2,12}$, инвариантной лишь в себе, структура которой определяется уравнениями

$$g_{2,12}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11},\\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12} + \varpi_{01}\omega_{11},\\ \omega'_{12} = \varpi\omega_{13} + 2\varpi_{01}\omega_{12},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \omega'_{1,n-2} = (n-2)\varpi_{01}\omega_{1,n-3},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} = 0.\end{cases}$$

При $n \geqslant 2$ в качестве представителя можно взять группу

$$\boxed{g_{2,12}\begin{cases}X = xe^{P_{n-2}(y)} + f(y) \qquad (n \geqslant 2)\\ Y = ay + b\end{cases}}\,,$$

инвариантную лишь в себе, где через $P_{n-2}(y)$ обозначен произвольный целый многочлен от y степени $n-2$.

Если группа $g_{2,12}$ содержит подгруппы, имеющие инварианты порядка $n' \geqslant n$, то легко видеть, что n должно быть равно 2; тогда можно положить

$$\theta \equiv \omega_{0n} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} + \delta\omega,$$

откуда находим

$$\theta' = 0, \quad d\alpha = -\theta, \quad \beta = \delta = 0, \quad \gamma = -n\alpha.$$

Таким образом, получим группу $g_{2,13}$, инвариантную лишь в себе, структура которой задается уравнениями

$$g_{2,13} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \omega_{01}\omega_{10} + \varpi\omega_{02} + \varpi_{01}\omega_{01}, \\ \omega'_{02} = \omega_{02}\omega_{10} + \varpi\omega_{03} + 2\varpi_{01}\omega_{02}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} = \omega_{0,n-1}\omega_{10} + (n-1)\varpi_{01}\omega_{0,n-1}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{2,13} \begin{cases} X = ax + P_{n-1}(y) \qquad (n \geqslant 2) \\ Y = by + c \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе, где $P_{n-1}(y)$ — произвольный целый многочлен от y степени $n-1$.

43. IV. *Транзитивные группы, имеющие те же инварианты первого порядка, что и* g_3.

Продолжение $G_3^{(n)}$ группы G_3, которая есть не что иное, как группа $g_{2,5}$, можно определить формами $\omega_{10}, \omega, \omega_{0q}, \varpi, \varpi_{0q}$. Вполне интегрируемая система, которая дает инварианты искомых групп порядка, меньшего или равного n, всегда содержит уравнение

$$\theta \equiv \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0.$$

Пусть $n \geqslant 2$ — наименьшее целое число, при котором эта система содержит другие уравнения; пусть

$$\theta_1 = \sum_{q=2}^{q=n} A_q \omega_{0q} + \sum_{q=2}^{q=n} B_q \varpi_{0q} + \ldots = 0,$$

где многоточиями обозначены члены порядка 0 или 1. Если в θ_1' принять во внимание уравнения системы и сохранить только члены с ω_{01}, ϖ_{01}, а в них сохранить только члены порядка, большего или равного 2, то получим

$$\theta_1' = \varpi_{01} \sum \left((q-m) A_q \omega_{0q} + (q-1) B_q \varpi_{0q}\right) + \omega_{01} \sum A_q (mq-1) \varpi_{0q}.$$

Тогда простые рассуждения показывают, что система содержит или уравнение вида

$$\varpi_{0n} + \ldots = 0,$$

или уравнение вида

$$\omega_{0n} + \ldots = 0 \qquad \left(m = \frac{1}{n}\right).$$

1° *Система содержит уравнение порядка n вида*

$$\theta_1 \equiv \varpi_{0n} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} + c\omega = 0.$$

Будем различать два случая: $n = 3$ и $n = 2$.

а. $n = 3$. Полагая

$$\theta_1 = \varpi_{03} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} + c\omega = 0,$$
$$\theta = \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0,$$

получаем

$$\theta' = \theta_1' = 0, \quad db = 2\theta_1, \quad dc = c\theta, \quad a = 0, \quad (m+2)c = 0.$$

Если $c = 0$, то получим группу $g_{3,1}$, инвариантную в группе $G_{3,1}$; их структуры определяются уравнениями

$$g_{3,1} \begin{cases} \omega' = m\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi_{01}' = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi_{02}' = \varpi_{01}\varpi_{02}, \end{cases} \qquad G_{3,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi_{01}' = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi_{02}' = \varpi_{01}\varpi_{02}, \\ \omega_{10}' = m\varpi\varpi_{02}. \end{cases}$$

Можно взять подгруппу

$$\boxed{g_{3,1}\ \begin{cases} X = \dfrac{(ah-bc)^m x}{(cy+h)^{2m}} + f(y) \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{3,1}\ \begin{cases} X = \dfrac{kx}{(cy+h)^{2m}} + f(y) \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}}.$$

Если $c \neq 0$, $m = -2$, то можно присвоить независимым инвариантам a и b значения 0 и 1; тогда получим тип подгрупп $g_{3,2}$, инваринатных лишь в себе; структура групп этого типа задается уравнениями

$$g_{3,2}\ \begin{cases} \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02} + \omega\varpi, \\ \omega' = -2\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{3,2}\ \begin{cases} X = \dfrac{x}{f'^2(y)} - \dfrac{f'''(y)}{f'^2(y)} + \dfrac{3}{2}\dfrac{f''^2(y)}{f'^4(y)} \\ Y = f(y) \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Легко видеть, что группа $g_{3,2}$, которая голоморфна бесконечномерной группе преобразований одной переменной, не порождает никаких дальнейших подгрупп.

Что касается группы $g_{3,1}$, то если она содержит подгруппу, имеющую инвариант порядка $n \geqslant 3$, то этот инвариант задается уравнением

$$\theta_1 \equiv \omega_{0n} + \lambda\varpi_{02} + \alpha\omega_{01} + \beta\varpi_{01} + \gamma\omega = 0, \qquad (m-n+1)\lambda = 0.$$

С другой стороны,

$$\omega'_{0n} = \varpi\omega_{0,n+1} + (n\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{0n} - n\left(m - \frac{n-1}{2}\right)\varpi_{02}\omega_{0,n-1}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{n-1}{2}, \quad \lambda = 0,$$

и тогда находим, что

$$\theta' = 0, \quad \theta'_1 = -\theta\theta_1, \quad d\beta = \frac{n+1}{2}\theta_1 - \beta\theta, \quad \alpha = \gamma = 0.$$

Таким образом, получаем тип группы $g_{3,3}$, инвариантной в $G_{3,3}$; структуры этих групп задаются уравнениями

$$g_{3,3}\ \begin{cases} \omega' = \dfrac{n-1}{2}\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} - \dfrac{n-3}{2}\varpi_{01}\omega_{01} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} - \dfrac{n-5}{2}\varpi_{01}\omega_{02} - 2\dfrac{n-2}{2}\varpi_{02}\omega_{01}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} = \dfrac{n-1}{2}\varpi_{01}\omega_{0,n-1} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-2}, \end{cases}$$

$$G_{3,3}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{n-1}{2}\varpi\varpi_{02}, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + (\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{01} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + (2\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{02} - 2\dfrac{n-2}{2}\varpi_{02}\omega_{01}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} = \left((n-1)\varpi_{01} - \omega_{10}\right)\omega_{0,n-1} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-2}. \end{cases}$$

Например, можно взять подгруппу

$$\boxed{g_{3,3}\ \begin{cases} X = \dfrac{(ah-bc)^{\frac{n-1}{2}}x + k_1y^{n-1} + k_2y^{n-2} + \ldots + k_n}{(cy+h)^{n-1}} & (n \geqslant 3) \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{3,3}\ \begin{cases} X = \dfrac{kx + k_1y^{n-1} + \ldots + k_n}{(cy+h)^{n-1}} \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}}.$$

Далее мы увидим, что такая группа существует также при $n = 2$.

b. Система, которая дает инварианты подгрупп группы g_3, содержит уравнение

$$\theta_1 = \varpi_{02} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} + c\omega = 0.$$

Полагая

$$\theta \equiv \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0,$$

получим

$$\theta' = \theta_1' = 0, \quad db = \theta_1, \quad da = a\theta, \quad dc = c\theta, \quad ma = (m+1)c = 0.$$

b_1. Если $a = c = 0$, то получим группу $g_{3,4}$, инвариантную в $G_{3,4}$; структуры групп $g_{3,4}$ и $G_{3,4}$ задаются уравнениями

$$g_{3,4}\ \begin{cases} \omega' = m\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi_{01}' = 0, \end{cases} \qquad G_{3,4}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi_{01}' = 0, \\ \omega_{10}' = 0. \end{cases}$$

В качестве представителя можно взять группу

$$\boxed{g_{3,4}\ \begin{cases} X = a^mx + f(y) \\ Y = ay + b \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{3,4}\ \begin{cases} X = cx + f(y) \\ Y = ay + b \end{cases}}\ .$$

Если группа $g_{3,4}$ содержит подгруппу, имеющую инварианты минимального порядка $n \geqslant 2$, то они задаются уравнениями

$$\begin{aligned} &\theta \equiv \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0, \\ &\theta_1 \equiv \omega_{0n} + \alpha\omega_{01} + \beta\varpi_{01} + \gamma\omega = 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\theta' = 0, \quad \theta_1' = \theta_1\theta, \quad d\beta = (n-m)\theta_1 - \beta\theta, \quad \alpha = \gamma = 0.$$

Если $m - n$ отлично от нуля, то получим группу $g_{3,5}$, инвариантную в $G_{3,5}$; структуры групп $g_{3,5}$ и $G_{3,5}$ задаются уравнениями

$$g_{3,5}\ \begin{cases} \omega' = m\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi_{01}' = 0, \\ \omega_{01}' = \varpi\omega_{02} + (1-m)\varpi_{01}\omega_{01}, \\ \omega_{02}' = \varpi\omega_{03} + (2-m)\varpi_{01}\omega_{02}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega_{0,n-1}' = (n-1-m)\varpi_{01}\omega_{0,n-1}, \end{cases}$$

$$G_{3,5}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega_{10}' = 0, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi_{01}' = 0, \\ \omega_{01}' = \varpi\omega_{02} + (\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{01}, \\ \omega_{02}' = \varpi\omega_{03} + (2\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{02}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega_{0,n-1}' = ((n-1)\varpi_{01} - \omega_{10})\,\omega_{0,n-1}. \end{cases}$$

Например, можно взять группу

$$\boxed{g_{3,5}\ \begin{cases} X = a^m x + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_{n-1}y + c_n \qquad (n \geqslant 2, \quad m \neq n) \\ Y = ay + b \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{3,5}\ \begin{cases} X = hx + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n \\ Y = ay + b \end{cases}}\ .$$

Если $m - n = \beta = 0$, то получим группу $g_{3,6}$, инвариантную в $G_{3,6}$; их структуры задаются уравнениями

$$g_{3,6}\ \begin{cases} \omega' = n\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + (1-n)\varpi_{01}\omega_{01}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + (2-n)\varpi_{01}\omega_{02}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = -\varpi_{01}\omega_{0,n-1}, \end{cases}$$

$$G_{3,6}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + (\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{01}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + (2\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{02}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0n} = (n\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{0n}. \end{cases}$$

В качестве представителя можно взять группу

$$\boxed{g_{3,6}\ \begin{cases} X = a^n x + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_{n-1}y + c_n \qquad (n \geqslant 2) \\ Y = ay + b \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{3,6}\ \begin{cases} X = hx + c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n \\ Y = ay + b \end{cases}}\ .$$

Наконец, если $m - n = 0$ и $\beta \neq 0$, то можно присвоить β значение -1, и тогда $\theta \equiv 0$. Получим группу $g_{3,7}$, инвариантную в $G_{3,7}$; структуры групп $g_{3,7}$ и $G_{3,7}$ задаются уравнениями

$$g_{3,7} \begin{cases} \omega' = n\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + (1-n)\varpi_{01}\omega_{01}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + (2-n)\varpi_{01}\omega_{02}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} = \varpi\varpi_{01} - \varpi_{01}\omega_{0,n-1}, \end{cases}$$

$$G_{3,7} \begin{cases} \omega' = n\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + (1-n)\varpi_{01}\omega_{01}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + (2-n)\varpi_{01}\omega_{02}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} = \varpi\omega_{0n} - \varpi_{01}\omega_{0,n-1}, \\ \omega'_{0n} = 0. \end{cases}$$

Возьмем в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{3,7} \begin{cases} X = a^n x + a^n \ln a y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n \\ Y = ay + b \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{3,7} \begin{cases} X = a^n x + c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n \\ Y = ay + b \end{cases}}.$$

b$_2$. Если $a \neq 0$, то $m = 0$, $c = 0$, и получим тип группы $g_{3,8}$, инвариантной лишь в себе. Чтобы найти его структуру, положим $\varpi_{02} \equiv \omega_{01}$:

$$g_{3,8} \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\omega_{01}. \end{cases}$$

Представитель имеет вид

$$\boxed{g_{3,8}\quad \begin{cases} X = x + \ln f'(y) + a \\ Y = f(y) \end{cases}}$$

(и инвариантен лишь в себе).

Эта группа может содержать подгруппу, определяемую новым инвариантом второго порядка с уравнением

$$\omega_{02} + \ldots = 0.$$

Это дает новый тип групп $g_{3,9}$, инвариантных лишь в себе; их структура определяется уравнениями

$$g_{3,9}\quad \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{01} = \varpi_{01}\omega_{01}. \end{cases}$$

Можно взять группу

$$\boxed{g_{3,9}\quad \begin{cases} X = x + k - 2\ln(cy + h) \\ Y = \dfrac{ay + b}{cy + h} \end{cases}}\ ,$$

инвариантную лишь в себе.

$\mathfrak{b}_3$. Если $c \neq 0$, то $m = -1$, $a = 0$, и получаем тип групп $g_{3,10}$, инвариантных лишь в себе; их структура получается, если положить $\varpi_{02} \equiv \omega$, $\omega_{10} \equiv -\varpi_{01}$:

$$g_{3,10}\quad \begin{cases} \omega' = -\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\omega. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{3,10}\quad \begin{cases} X = \dfrac{x}{f'(y)} - \dfrac{f''(y)}{f'^2(y)} \\ Y = f(y) \end{cases}}\ ,$$

инвариантную лишь в себе.

Эта группа не содержит подгрупп с инвариантами порядка $\geqslant 2$.

2° *Система, дающая инварианты минимального порядка n подгрупп группы g_3, не содержит уравнений вида $\varpi_{0n} + \ldots = 0$.*

Тогда она содержит уравнение вида

$$\theta_1 \equiv \omega_{0n} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} = 0 \qquad \left(m = \frac{1}{n}\right),$$

к которому нужно добавить уравнение

$$\theta \equiv \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0.$$

Внешняя производная ω'_{0n} содержит, с учетом предыдущих уравнений, член

$$-\frac{n+1}{2}\omega_{02}\varpi_{0,n-1},$$

поэтому

$$n = 2, \qquad m = \frac{1}{2}.$$

Тогда получаем

$$\theta' = 0, \quad \theta'_1 = \theta_1\theta, \quad db = \frac{3}{2}\theta_1 - b\theta, \quad a = 0.$$

Если положить $b = 0$, $\omega_{02} \equiv 0$, то это дает соотношение

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\
\varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{10} &= \frac{1}{2}\varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{01} &= \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}) + \frac{1}{2}\omega\varpi_{02}.
\end{aligned}$$

Из этих формул вытекает равенство

$$\varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02} + \lambda\omega\varpi;$$

применение к нему фундаментального тождества показывает, что $\lambda = 0$. Таким образом, получаем тип, являющийся частным случаем типа $g_{3,3}$; достаточно присвоить числу n (от которого зависит группа $g_{3,3}$) значение 2.

44. V. *Транзитивные группы с теми же инвариантами первого порядка, что* g_4.

Легко получаются пять типов групп $g_{4,1}, g_{4,2}, g_{4,3}, g_{4,4}, g_{4,5}$, инвариантных лишь в себе.

Структура типа $g_{4,1}$, задается формулами

$$g_{4,1}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10},\\ \varpi' = \omega\varpi_{01},\\ \omega'_{10} = 0,\\ \varpi'_{01} = 0,\end{cases}$$

и в качестве представителя этого типа можно взять группу

$$\boxed{g_{4,1}\begin{cases}X = ax + b\\ Y = cy + h\end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Структура типа $g_{4,2}$ задается формулами

$$g_{4,2}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20},\\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02},\\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20},\\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02},\end{cases}$$

и можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{4,2}\begin{cases}X = \dfrac{ax + b}{cx + h}\\[2ex] Y = \dfrac{a'y + b'}{c'y + h'}\end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Структура типа $g_{4,3}$ задается формулами

$$g_{4,3}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02},\\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02},\end{cases}$$

и можно взять группу

$$\boxed{g_{4,3}\ \begin{cases} X = f(x) \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Структура типа $g_{4,4}$ задается формулами

$$g_{4,4}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \end{cases}$$

и в качестве представителя можно взять группу

$$\boxed{g_{4,4}\ \begin{cases} X = f(x) \\ Y = ay+b \end{cases}},$$

инвариантную лишь в себе.

Наконец, структура типа $g_{4,5}$ задается формулами

$$g_{4,5}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \end{cases}$$

и можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{4,5}\ \begin{cases} X = \dfrac{ax+b}{cx+h} \\ Y = a'y+b' \end{cases}},$$

также инвариантную лишь в себе.

45. V$'$. *Транзитивные группы, имеющие те же инварианты первого порядка, что и* g'_4.

Эта задача уже была решена раньше, поскольку g_4 — группа конформных отображений плоскости. Получаем группы двух типов, $g'_{4,1}$ и $g'_{4,2}$, которые инвариантны лишь в себе.

Структура типа $g'_{4,1}$ задается символическими формулами

$$g'_{4,1}\quad \begin{cases} \omega' + i\varpi' = (\omega + i\varpi)(\omega_{10} + i\varpi_{01}), \\ \omega'_{10} + i\varpi'_{01} = 0, \end{cases}$$

и в качестве представителя этого типа можно взять группу

$$\boxed{g'_{4,1}\quad \Big\{ X + iY = (a + ia')(x + iy) + b + ib'}\,,$$

инвариантную лишь в себе.

Структура группы типа $g'_{4,2}$ задается формулами

$$g'_{4,2}\quad \begin{cases} \omega' + i\varpi' = (\omega + i\varpi)(\omega_{10} + i\varpi_{01}), \\ \omega'_{10} + i\varpi'_{01} = (\omega + i\varpi)(\omega_{20} + i\varpi_{02}), \\ \omega'_{20} + i\varpi'_{02} = (\omega_{10} + i\varpi_{01})(\omega_{20} + i\varpi_{02}), \end{cases}$$

и в качестве представителя возьмем группу

$$\boxed{g'_{4,2}\quad \Big\{ X + iY = \frac{(a + ia')(x + iy) + (b + ib')}{(c + ic')(x + iy) + h + ih'}}\,,$$

инвариантную лишь в себе.

Группы $g'_{4,1}$ и $g'_{4,2}$ сопряжены (при помощи мнимого преобразования) группам $g_{4,1}$ и $g_{4,2}$ соответственно.

46. VI. *Транзитивные группы, имеющие те же инварианты первого порядка, что группа g_3.*

Продолжение $G_5^{(n)}$ группы G_5 определяется формами $\varpi, \varpi_{01}, \omega$ и ω_{pq} с $p + q \leqslant n$. Вполне интегрируемая система, дающая инварианты искомой группы порядка $\leqslant n$, должна содержать уравнение

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0.$$

Пусть n — наименьшее число, при котором эта система содержит другие уравнения, и пусть

$$\theta_1 \equiv \sum A_{pq}\omega_{pq} + \ldots = 0$$

— одно из этих уравнений; многоточие обозначает члены порядка 0 и 1. Если, учитывая уравнения системы, сохранить в θ'_1 лишь члены с ω_{10}, ω_{01}, а в коэффициентах при ω_{10}, ω_{01} — только члены порядка $\geqslant 2$, то получим

$$\theta'_1 = \omega_{10}\sum (p-1)A_{pq}\omega_{pq} + \omega_{01}\sum qA_{pq}\omega_{p+1,q-1} + \ldots\ .$$

Отсюда вытекает, что система содержит уравнение вида

$$\theta_1 \equiv \omega_{n0} + a\omega_{10} + b\omega_{01} = 0.$$

Как мы уже не раз видели, это возможно только при $n = 3$ или $n = 2$.

1° *Минимальный порядок инвариантов равен* 3.

Тогда положим

$$\begin{aligned} &\theta \equiv \varpi_{01} = 0, \\ &\theta_1 \equiv \omega_{30} + a\omega_{10} + b\omega_{01} \equiv 0. \end{aligned}$$

Получим

$$\theta' = \theta_1' = 0, \quad da = 2\theta_1, \quad b = 0,$$

что даст тип групп $g_{5,1}$, инвариантных в $G_{5,1}$; их структуры задаются формулами

$$g_{5,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega_{10}' = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega_{20}' = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \end{cases} \qquad G_{5,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi_{01}' = 0, \\ \omega_{10}' = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega_{20}' = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}. \end{cases}$$

Можно взять группу

$$\boxed{g_{5,1} \begin{cases} X = \dfrac{xf(y) + \varphi(y)}{x\psi(y) + 1} \\ Y = y + a \end{cases}} ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{5,1} \begin{cases} X = \dfrac{xf(y) + \varphi(y)}{x\psi(y) + 1} \\ Y = ay + b \end{cases}} .$$

Если бы группа $g_{5,1}$ содержала подгруппу, имеющую инварианты минимального порядка $n \geqslant 3$, то эти инварианты задавались бы системой, содержащей оба уравнения

$$\begin{aligned} &\theta \equiv \varpi_{01} = 0, \\ &\theta_1 \equiv \omega_{2,n-2} + \alpha_1\omega_{2,n-3} + \ldots + \alpha_{n-2}\omega_{20} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\omega = 0; \end{aligned}$$

но легко видеть, что это невозможно, так как θ_1' содержит член $\omega_{1,n-2}\omega_{20}$, который не сокращается.

2° *Минимальный порядок инвариантов равен* 2.

Положим

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{20} + a\omega_{10} + b\omega_{01} = 0.$$

Получим

$$\theta' = \theta_1' = 0, \quad da = \theta_1, \quad b = 0.$$

Это дает тип групп $g_{5,2}$, инвариантных в $G_{5,2}$; их структуры имеют вид

$$g_{5,2}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = 0,\\ \omega_{10}' = \varpi\omega_{11},\end{cases} \qquad G_{5,2}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi_{01}' = 0,\\ \omega_{10}' = \varpi\omega_{11}.\end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя этого типа группу

$$\boxed{g_{5,2}\begin{cases}X = xf(y) + \varphi(y)\\ Y = y + a\end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{5,2}\begin{cases}X = xf(y) + \varphi(y)\\ Y = ay + b\end{cases}}\ .$$

Если $g_{5,2}$ содержит подгруппу, имеющую инварианты минимального порядка $n \geqslant 2$, то эти инварианты задаются системой, содержащей оба уравнения

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{1,n-1} + \alpha_1\omega_{1,n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi = 0.$$

Отсюда получим

$$\theta' = 0, \quad \theta_1' = (n-1)\theta\theta_1, \quad \beta = \gamma = 0,$$
$$d\alpha_1 = \alpha_1\theta, \quad d\alpha_2 = 2\alpha_2\theta, \quad \ldots, \quad d\alpha_{n-1} = (n-1)\alpha_{n-1}\theta.$$

Будем различать два случая в зависимости от того, обращаются ли коэффициенты α одновременно в нуль или нет.

а. *Все коэффициенты* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ *равны нулю.* Получим тип групп $g_{5,3}$, инвариантных в $G_{5,3}$. Структуры этих групп задаются формулами

$$g_{5,3} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12}, \\ \omega'_{12} = \varpi\omega_{13}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-2} = 0, \end{cases}$$

$$G_{5,3} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12} + \varpi_{01}\omega_{11}, \\ \omega'_{12} = \varpi\omega_{13} + 2\varpi_{01}\omega_{12}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-2} = \varpi\omega_{1,n-1} + (n-2)\varpi_{01}\omega_{1,n-2}, \\ \omega'_{1,n-1} = (n-1)\varpi_{01}\omega_{1,n-1}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{5,3} \begin{cases} X = xe^{a_1 y^{n-2} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} + f(y) \\ Y = y + a \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{5,3} \begin{cases} X = xe^{a_0 y^{n-1} + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}} + f(y) \\ Y = ay + b \end{cases}}.$$

Если группа $g_{5,3}$ содержит подгруппу, имеющую инварианты минимального порядка $n' \geqslant n$, то эти инварианты задаются системой вида

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$

$$\theta_1 \equiv \omega_{1,n-1} = 0,$$

$$\theta_2 \equiv \omega_{0,n'} + A_1\omega_{0,n'-1} + \ldots + A_{n'-1}\omega_{01} + +A_{n'}\omega + B\omega_{10}.$$

Легко видеть, что это возможно только при $n = 2$. Изменим обозначения: вместо n' будем писать n; имеем

$$\begin{aligned}
&\theta' = 0, \quad \theta_1' = \theta\theta_1, \quad \theta_2' = n\theta\theta_2,\\
&\quad dB = -\theta_2 + nB\theta,\\
&\quad dA_1 = n\theta_1 + A_1\theta,\\
&\quad dA_2 = (n-1)A_1\theta_1 + 2A_2\theta,\\
&\quad dA_3 = (n-2)A_1\theta_1 + 3A_3\theta,\\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\quad dA_n = A_{n-1}\theta_1 + nA_n\theta.
\end{aligned}$$

Двум независимым инвариантам B и A_1 можно присвоить нулевые значения, и тогда $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv 0$. Следует различать два случая.

а$_1$. $A_2 = A_3 = \ldots = A_n = 0$. Получим тип групп $g_{5,4}$, инвариантных в $G_{5,4}$; их структуры задаются, соответственно, формулами

$$g_{5,4}\ \begin{cases}
\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\varpi' = 0,\\
\omega_{10}' = 0,\\
\omega_{01}' = \varpi\omega_{02} + \omega_{01}\omega_{10},\\
\omega_{02}' = \varpi\omega_{03} + \omega_{02}\omega_{10},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\omega_{0,n-1}' = \omega_{0,n-1}\omega_{10},
\end{cases}$$

$$G_{5,4}\ \begin{cases}
\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\varpi' = \varpi\varpi_{01},\\
\varpi_{01}' = 0,\\
\omega_{10}' = 0,\\
\omega_{01}' = \varpi\omega_{02} + \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\
\omega_{02}' = \varpi\omega_{03} + \omega_{02}(\omega_{10} - 2\varpi_{01}),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\omega_{0,n-1}' = \omega_{0,n-1}(\omega_{10} - (n-1)\varpi_{01}).
\end{cases}$$

В качестве представителя этого типа можно взять группу

$$\boxed{g_{5,4}\ \begin{cases} X = ax + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (n \geqslant 2)\\ Y = y + b \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{5,4}\ \begin{cases} X = ax + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_n \\ Y = by + c \end{cases}}\ .$$

a$_2$. Не все коэффициенты $A_2, A_3, \ldots, A_n$ равны нулю. Одному из них, не равному нулю, можно присвоить значение 1. Получим тип $g_{5,5}$ групп, инвариантных лишь в себе и имеющих структуру

$$g_{5,3}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + \omega_{01}\omega_{10}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + \omega_{02}\omega_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = \varpi\left(m_2\omega_{0,n-2} + m_3\omega_{0,n-3} + \ldots + m_n\omega)\right) + \omega_{0,n-1}\omega_{10}; \end{cases}$$

здесь коэффициенты $m_2, \ldots, m_n$ — константы, одна из которых равна 1. Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{5,5}\ \begin{cases} X = ax + P(y) \\ Y = y + b \end{cases}}\ ,$$

инвариантную лишь в себе, где $P(y)$ — общее решение линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами, для которого характеристическим уравнением является

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -r & 1 \\ m_n & m_{n-1} & m_{n-2} & \ldots & m_2 & -r \end{vmatrix} = 0,$$

что эквивалентно уравнению

$$r^n - m_2r^{n-2} - m_3r^{n-3} - \ldots - m_{n-1}r = 0.$$

b. *Не все коэффициенты* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ *равны нулю.* Тогда можно одному из них, не равному нулю, присвоить значение 1. Тогда получим тип групп

$g_{5,6}$, инвариантных в $G_{5,6}$. Структуры этих групп задаются, соответственно, формулами

$$g_{5,6}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = 0,\\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11},\\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12},\\ \quad\dots\dots\dots,\\ \omega'_{1,n-2} = -\varpi(\alpha_1\omega_{1,n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{10}),\end{cases}$$

$$G_{5,6}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = 0,\\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11},\\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12},\\ \quad\dots\dots\dots,\\ \omega'_{1,n-2} = \varpi\omega_{1,n-1},\\ \omega'_{1,n-1} = -\varpi(\alpha_1\omega_{1,n-1} + \alpha_2\omega_{1,n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{11}).\end{cases}$$

В качестве представителя можно взять группу

$$\boxed{g_{5,6}\ \begin{cases}X = xe^{P'(y)} + f(y)\\ Y = y + a\end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{5,6}\ \begin{cases}X = xe^{P(y)} + f(y)\\ Y = y + a\end{cases}}\ ,$$

где $P(y)$ — общее решение линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

$$P^{(n)}(y) + \alpha_1 P^{(n-1)}(y) + \ldots + \alpha_{n-1}P'(y) = 0.$$

Нетрудно показать, что если $g_{5,6}$ содержит подгруппу, имеющую инварианты минимального порядка $n' \geqslant n$, то $n = 2$. Нетрудно также доказать, что это невозможно.

47. VII. *Транзитивные группы, имеющие те же инварианты первого порядка, что и g_6.*

Структуры групп g_6 и G_6 определяются формулами

$$g_6 \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_6 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{10} = 0. \end{cases}$$

Вполне интегрируемая система, дающая инварианты одной из искомых групп порядка $\leqslant n$, должна содержать уравнения

$$\theta \equiv \omega_{10} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \varpi_{01} = 0.$$

Пусть $n \geqslant 2$ — наименьшее целое число, при котором она содержит также другое уравнение. Пусть

$$\theta_2 \equiv \omega_{0n} + a_1\omega_{0,n-1} + a_2\omega_{0,n-2} + \ldots + a_{n-1}\omega_{01} + a_n\omega = 0$$

— это уравнение. Тогда получаем

$$\theta' = 0, \quad \theta'_1 = 0, \quad \theta'_2 = \theta_2(\theta - n\theta_1),$$
$$\begin{aligned} da_1 &= a_1\theta_1, \\ da_2 &= 2a_2\theta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ da_{n-1} &= (n-1)a_{n-1}\theta_1, \\ da_n &= na_n\theta_1. \end{aligned}$$

1° *Все n коэффициентов $a_1, a_2 \ldots, a_n$ равны нулю.* Тогда получим тип групп $g_{6,1}$, инвариантных в $G_{6,1}$; структуры групп $g_{6,1}$ и $G_{6,1}$ задаются уравнениями

$$g_{6,1} \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = 0, \end{cases} \qquad G_{6,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}), \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + \omega_{02}(\omega_{10} - 2\varpi_{01}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0n} = \omega_{0n}(\omega_{10} - n\varpi_{01}). \end{cases}$$

Можно взять группу

$$\boxed{g_{6,1}\ \begin{cases} X = x + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_n \\ Y = y + b \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{6,1}\ \begin{cases} X = hx + a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n \\ Y = by + c \end{cases}}\ .$$

2° *Не все коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *равны нулю.* Одному из них (ненулевому), можно присвоить значение 1, что приводит к тождеству $\varpi_{01} \equiv 0$. Тогда получаем тип групп $g_{6,2}$, инвариантных в $G_{6,2}$; структуры групп $g_{6,2}$ и $G_{6,2}$ задаются уравнениями

$$g_{6,2}\ \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = -\varpi(m_1\omega_{n-1} + \ldots + m_n\omega), \end{cases}$$

$$G_{6,2}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + \omega_{01}\omega_{10}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + \omega_{02}\omega_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = \varpi\omega_{0n} + \omega_{0,n-1}\omega_{10}, \\ \omega'_{0n} = -\varpi(m_1\omega_{0n} + m_2\omega_{0,n-1} + \ldots + m_n\omega_{01}) + \omega_{0n}\omega_{10}. \end{cases}$$

В качестве представителя можно взять группу

$$\boxed{g_{2,6}\ \begin{cases} X = x + P'(y) \\ Y = y + a \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{6,2}\ \begin{cases} X = bx + P(y) \\ Y = y + a \end{cases}},$$

где $P(y)$ — общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$P^{(n+1)}(y) + m_1 P^{(n)}(y) + \ldots + m_{n-1}P''(y) + m_n P'(y) = 0,$$

один из коэффициентов которого равен 1: $m_i = 1$.

48. VIII. *Транзитивные группы, имеющие те же инварианты первого порядка, что и g_7.*

Структура группы G_7 задается формулами

$$\begin{aligned} \omega' &= \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= \varpi\omega_{01}. \end{aligned}$$

Возможен только один тип, который получается, если рассмотреть систему

$$\begin{aligned} &\theta \equiv \omega - \varpi_{01}, \\ &\theta_1 \equiv \omega_{02} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} = 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\theta' = 0, \quad \theta'_1 = 0, \\ &db = 2\theta_1, \quad a = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем тип групп $g_{7,1}$, инвариантных в $G_{7,1}$. Их структуры задаются формулами

$$g_{7,1} \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = -\omega\varpi, \\ \omega'_{01} = \omega\omega_{01}, \end{cases} \qquad G_{7,1} \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi_{01}\omega_{01}. \end{cases}$$

Можно взять в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{7,1}\ \begin{cases} X = \dfrac{x(cy+h)^2}{ah - bc} \\[2ex] Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}},$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{7,1}\ \begin{cases} X = kx(cy+h)^2 \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}}\ .$$

49. IX. *Транзитивные группы, имеющие те же инварианты первого порядка, что и* g_{11}.

Структуры групп g_{11} и G_{11} задаются формулами

$$g_{11}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_{11}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Если группа g_{11} содержит подгруппу, имеющую относительно группы G_{11}, кроме инвариантов группы g_{11}, еще инварианты минимального порядка $n \geqslant 2$, то эти инварианты задаются системой

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{n0} + a\omega_{10} + b\varpi = 0,$$

причем $n = 2$ или $n = 3$.

1° $n = 3$. Тогда имеем

$$\theta'_1 = 0, \quad da = 2\theta_1, \quad b = 0,$$

что дает тип групп $g_{11,1}$, инвариантных в $G_{11,1}$. Их структуры таковы:

$$g_{11,1}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20}, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_{11,1}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Можно взять группу

$$\boxed{g_{11,1}\ \begin{cases} X = \dfrac{ax+b}{cx+h} \\ Y = y + a' \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{11,1}\ \begin{cases} X = \dfrac{ax+b}{cx+h} \\ Y = a'y + b' \end{cases}}\ .$$

2° $n = 2$. Аналогично получаем тип групп $g_{11,2}$ и тип наибольшей подгруппы $G_{11,2}$, в которых $g_{11,2}$ инвариантны. Их структуры задаются формулами

$$g_{11,2}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_{11,2}\ \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Возьмем в качестве представителя группу

$$\boxed{g_{11,2}\ \begin{cases} X = ax + b \\ Y = y + c \end{cases}}\ ,$$

инвариантную в

$$\boxed{G_{11,2}\ \begin{cases} X = ax + b \\ Y = cy + h \end{cases}}\ .$$

50. Итак, мы закончили перечисление различных типов действительных транзитивных групп преобразований, действующих на пространство из двух переменных. Их число можно несколько сократить, заметив, что если уравнения группы g_{12} записать в виде

$$X = a^{m-1}x + b,$$
$$Y = a^{m+1}y + c,$$

то группа g_8 входит в тип g_{12}, а если положить $m = 0$, то также g'_8 входит в тип группы g'_{12}.

Заметим, кроме того, что группы

$$g'_4,\ g'_9,\ g''_9,\ g'_{12},\ g'_{4,1},\ g'_{4,2}$$

сопряжены с группами

$$g_4,\ g_5,\ g_{12},\ g_{4,1},\ g_{4,2}$$

посредством *мнимой* замены переменных.

Итак, среди 64 полученных типов типы

$$g_3,\ g_{12},\ g'_{12},\ g_{2,5},\ g_{2,7},\ g_{3,1},\ g_{3,4}$$

зависят от одного произвольного параметра, а типы

$$g_{2,6},\ g_{2,12},\ g_{2,13},\ g_{3,3},\ g_{3,6},\ g_{3,7},\ g_{5,3},\ g_{5,4}, g_{6,1}$$

зависят от одного произвольного натурального числа; типы

$$g_{5,5},\ g_{5,6},\ g_{6,2}$$

зависят от произвольного целого n и от произвольных параметров, число которых связано с целым n.

С другой стороны, заметим, что среди 64 полученных типов 33 бесконечномерных и 31 конечномерных. Бесконечномерны следующие группы:

g	зависит от 2-х произвольных функций 2 аргументов,
$g_1, g_2, g_5, g_{0,1}, g_{2,2}, g_{2,9}$	зависят от 1-й произвольной функции 2 аргументов,
$g_{2,1}, g_{2,3}, g_{2,4}, g_{2,10}$	зависят от 3-х произвольных функций 1 аргумента,
$g_3, g_4, g'_4, g_{2,5}$ $g_{2,8}, g_{2,11}, g_{5,2}$	зависят от 2-х произвольных функций 1 аргумента,
$g_6, g_7, g_{11}, g_{2,7}, g_{2,12}$ $g_{3,1}, g_{3,2}, g_{3,4}, g_{3,8}$ $g_{3,10}, g_{4,3}, g_{4,4}, g_{5,3}, g_{5,6}$	зависят от 1-й произвольной функции 1 аргумента;

подгруппы остальных 31 типов

$$\begin{gathered} g_9,\ g'_9,\ g''_9,\ g_{10},\ g_{12},\ g'_{12},\ g_{13},\ g_{14},\ g_{15},\ g_{0,2},\ g_{0,3},\ g_{1,1},\ g_{2,6}, \\ g_{2,13},\ g_{3,3},\ g_{3,5},\ g_{3,6},\ g_{3,7},\ g_{3,9},\ g_{4,1},\ g'_{4,1},\ g_{4,2},\ g'_{4,2}, \\ g_{4,5},\ g_{5,4},\ g_{5,5},\ g_{6,1},\ g_{6,2},\ g_{7,1},\ g_{11,1},\ g_{11,2} \end{gathered}$$

конечномерны.

Группы 34 типов

$$\begin{gathered} G,\ g_2,\ g_4,\ g'_4,\ g_9,\ g'_9,\ g''_9,\ g_{0,1},\ g_{0,2},\ g_{0,3},\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{2,4}, \\ g_{2,5},\ g_{2,6},\ g_{2,7},\ g_{2,8},\ g_{2,9},\ g_{2,10},\ g_{2,11},\ g_{2,12},\ g_{2,13},\ g_{3,2},\ g_{3,8}, \\ g_{3,9},\ g_{3,10},\ g_{4,1},\ g'_{4,1},\ g_{4,2},\ g'_{4,2},\ g_{4,3},\ g_{4,4},\ g_{4,5},\ g_{5,5} \end{gathered}$$

инвариантны лишь в себе.

Любая группа типа $g_{5,6}$ (которая зависит от произвольного целого n) является инвариантной подгруппой другой группы того же типа, для которой целое число n принимает значение, большее на единицу.

Наконец, следующая таблица указывает для каждой из остальных 26 групп тип, которому принадлежит наибольшая группа, в которой она инвариантна.

g_1	$g_{0,1}$	g_{14}	$g_{0,3}$	$g_{5,2}$	$g_{2,11}$
g_3	$g_{2,5}$	g_{15}	$g_{5,5}$	$g_{5,3}$	$g_{2,12}$
g_5	$g_{2,9}$	$g'_{1,1}$	$g'_{0,3}$	$g_{5,4}$	$g_{2,13}$
g_6	$g_{2,12}$	$g_{3,1}$	$g_{2,7}$	$g_{6,1}$	$g_{3,5}$
g_7	$g_{3,8}$	$g_{3,3}$	$g_{2,6}$	$g_{6,2}$	$g_{5,5}$
g_{10}	$g_{1,1}$	$g_{3,4}$	$g_{2,12}$	$g_{7,1}$	$g_{3,9}$
g_{11}	$g_{4,4}$	$g_{3,5}$	$g_{2,13}$	$g_{11,1}$	$g_{4,5}$
g_{12}	$g_{4,1}$	$g_{3,6}$	$g_{2,13}$	$g_{11,2}$	$g_{4,1}$
g'_{12}	$g'_{4,1}$	$g_{3,7}$	$g_{3,5}$		
g_{13}	$g_{3,5}$	$g_{5,1}$	$g_{2,10}$		

Группы

$$G,\ g_1,\ g_7,\ g_9,\ g'_9,\ g_{0,2},\ g_{1,1},\ g_{3,2},\ g_{3,10},\ g_{7,1}$$

являются *простыми*.

ПРОСТЫЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Важность простых групп в различных приложениях теории групп преобразований хорошо известна. В частности, для интегрирования дифференциальных систем, структура непрерывной группы G преобразований которых известна[1]), эта важность вытекает из старых работ С. Ли и сравнительно недавних результатов Вессио[2]). Интегрирование данной дифференциальной системы, допускающей в качестве группы преобразований группу G, требует интегрирования во-первых, *разрешающей системы*, природа которой может быть произвольной, и, во-вторых, последовательности специальных систем (*автоморфные* системы Вессио), каждая из которых соответствует одной из простых групп, входящих в разложение группы G в нормальный ряд подгрупп. Природа такой специальной системы определяется структурой рассматриваемой простой группы.

Структура *конечномерных* простых групп полностью определяется исследованиями Киллинга[3]), подтвержденными моими[4]); все простые группы, за исключением очень ограниченного набора специальных, разделяются на четыре больших класса, известных уже в течение длительного времени.

Напротив, что касается бесконечномерных простых групп, С. Ли также указал четыре больших класса, однако неизвестно, существуют ли другие группы; к этой задаче трудно подступиться ввиду полного отсутствия структурной теории бесконечномерных групп. Эта проблема оказалась более сложной, чем можно было ожидать *a priori*, ввиду того, что, в отличие

Перевод статьи «Les groupes de transformations continus, infinis, simples», *Annales de l'École Normale*, 3-e série, XXVI, 1909, p. 93–161.

[1]) Эта структура известна, если мы знаем определяющие уравнения конечных преобразований группы.

[2]) E. Vessiot, Sur l'intégration des systémes differentiels, etc., *Acta Mathem.*, t. XXVIII, 1904, p. 307–349.

[3]) Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transforatsionsgruppen, *Ath. Ann.*, t. XXXI, 1888, p. 252; t. XXXIII, 1889, p. 1; t. XXXIV, 1889, p. 57; t. XXXVI, 1890, p. 161.

[4]) E. Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse). Paris, Nony, 1884.

от конечномерного случая, существуют бесконечномерные *интранзитивные* группы, неизоморфные ни одной из транзитивных групп, и среди этих интранзитивных групп могут существовать простые.

Нахождение структуры всех *примитивных* бесконечномерных групп на пространстве n переменных позволило бы сразу же узнать структуру всех бесконечномерных простых групп. С. Ли для $n = 2, 3$ и Ковалевский для $n = 5$ нашли эту структуру, частично в виде побочного результата. Оказалось, что в каждом из трех изученных случаев все бесконечномерные примитивные группы относятся к одному из известных общих типов. Я попробовал одолеть проблему во всей общности и получил следующий результат, оказавшийся значительно проще, чем можно было ожидать. Он состоит в том, что *все бесконечномерные примитивные группы на пространстве n переменных разбиваются на шесть больших классов*, а именно:

1° *Группа всех преобразований пространства n переменных.*

2° *Группа преобразований пространства n переменных, сохраняющих объемы.*

3° *Группа преобразований пространства n переменных, сохраняющих объемы с точностью до постоянного множителя.*

4° *Группа преобразований пространства n переменных (четное $n > 4$), сохраняющих двойной интеграл*

$$\iint dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{n-1} dx_n.$$

5° *Группа преобразований пространства n переменных (четное $n > 4$), сохраняющих приведенный выше двойной интеграл с точностью до постоянного множителя.*

6° *Группа преобразований пространства $(n+1)/2$ переменных (n нечетно), рассматриваемая как группа поточечных преобразований пространства n переменных ($n \geqslant 3$).*

Группы 1°, 2°, 4°, 6° просты; группа 3° содержит в качестве инвариантной подгруппы группу 2°; группа 5° содержит в качестве инвариантной подгруппы группу 4°.

Все предыдущее показывает, что *существует четыре больших класса бесконечномерных транзитивных простых групп*, а именно, группы 1°, 2°, 4° и 6°.

Бесконечномерные простые группы, не изоморфные никакой транзитивной группе, можно достаточно легко найти, применив предыдущие результаты. Они разбиваются на два класса:

1° *Собственно простые группы, которые можно получить, взяв простую транзитивную (конечномерную или бесконечномерную) группу и заставив ее элементы зависеть дополнительно от* p *общих переменных, инвариантных относительно действия группы*; при этом простая транзитивная конечномерная группа размерности r становится бесконечномерной интранзитивной группой, зависящей от r произвольных функций p переменных.

2° *Несобственно простые группы; каждая из таких групп изоморфна группе, уравнения которой имеют следующий вид*:

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}' = x_{n-1},$$
$$x_n' = x_n + f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

где через f *обозначено общее решение некоторой линейной однородной системы уравнений в частных производных, коэффициенты которой — заданные функции от* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Приведенные выше утверждения вкупе с результатами Вессио приводят к следующему заключению, которое не имеет прямого отношения к настоящему мемуару.

Автоморфные системы, возникающие при интегрировании данной дифференциальной системы с известной структурной группой G, *интегрируются либо с помощью обыкновенных уравнений, либо с помощью системы линейных уравнений в частных производных, в которую входит одна неизвестная функция некоторого набора независимых переменных.*

Мемуар разбит на пять частей. В двух первых, самых коротких, описывается подход, который привел меня к классификации всех бесконечномерных примитивных групп. Этот подход опирается на фундаментальные теоремы о структуре бесконечномерных групп[1]), в частности, о свойствах группы линейных преобразований Γ, описывающей действие данной бесконечномерной транзитивной группы G на пространстве линейных элементов, приложенных в произвольной точке пространства n переменных. Кроме того, в его основе лежат свойства некоторых групп линейных преобразований, не сохраняющих никаких подпространств; я называю такие группы *полуинволютивными*.

Третья и четвертая части посвящены вычислениям, которые, при применении указанного подхода, позволяют найти бесконечномерные примитивные и бесконечномерные интранзитивные простые группы. В этих частях,

---

[1]) См. E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis, *Annales de l'École Normale*, 3-e série, t. XXI, 1904, p. 153; t. XXII, 1905, p. 219) (Русский перевод: стр. 9 – 139 настоящего издания. — *Прим. ред.*).

как побочный результат, найдены все, как конечномерные, так и бесконечномерные, группы, для которых линейные элементы, приложенные в произвольной точке, преобразуются в той же общности, что и для бесконечномерных примитивных групп на пространстве n переменных. Это уже было проделано С. Ли для первых трех классов примитивных групп.

В пятой части описываются все линейные однородные полуинволютивные группы, не сохраняющие никакого подпространства. Их описание базируется на результатах о структуре конечномерных простых групп, приведенных автором в его диссертации¹).

Июнь 1907 г.

---

¹) Результаты, содержащиеся в настоящем мемуаре, были представлены в Академию в виде краткой заметки с тем же названием, опубликованной в *Comptes rendus* 21 мая 1907 года. Текст введения почти дословно следует этой заметке.

I. Инволютивные и полуинволютивные линейные группы

Если определяющие уравнения бесконечномерной группы G преобразований пространства n переменных имеют первый порядок, то r-мерная линейная группа Γ, описывающая действие группы G на пространстве линейных элементов, приложенных в произвольной точке (действия присоединенной группы), обладает следующими свойствами.

Пусть

$$\frac{\delta x_s}{\delta t} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{i,\rho,s} e_\rho x_i \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

— определяющие уравнения общего инфинитезимального преобразования из группы Γ; здесь $a_{i,\rho,s}$ — постоянные коэффициенты, e_ρ — это r параметров, не зависящих от выбранного инфинитезимального преобразования. Обозначив через $t_\rho, t'_\rho, \ldots, t_\rho^{(n-1)}$ n наборов из r независимых переменных, образуем матрицу из n столбцов и n^2 строк:

$$\left\| \begin{array}{cccc}
\sum a_{1,\rho,1} t_\rho & \sum a_{2,\rho,1} t_\rho & \cdots & \sum a_{n,\rho,1} t_\rho \\
\sum a_{1,\rho,2} t_\rho & \sum a_{2,\rho,2} t_\rho & \cdots & \sum a_{n,\rho,2} t_\rho \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\sum a_{1,\rho,n} t_\rho & \sum a_{2,\rho,n} t_\rho & \cdots & \sum a_{n,\rho,n} t_\rho \\
\sum a_{1,\rho,1} t'_\rho & \sum a_{2,\rho,1} t'_\rho & \cdots & \sum a_{n,\rho,1} t'_\rho \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\sum a_{1,\rho,n} t'_\rho & \sum a_{2,\rho,n} t'_\rho & \cdots & \sum a_{n,\rho,n} t'_\rho \\
\sum a_{1,\rho,1} t''_\rho & \sum a_{2,\rho,1} t''_\rho & \cdots & \sum a_{n,\rho,1} t''_\rho \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\sum a_{1,\rho,n} t_\rho^{(n-1)} & \sum a_{2,\rho,n} t_\rho^{(n-1)} & \cdots & \sum a_{n,\rho,n} t_\rho^{(n-1)}
\end{array} \right\|$$

Обозначим через

σ_1 ранг (размерность максимального ненулевого определителя) матрицы, образованной первыми n строчками;

$\sigma_1 + \sigma_2$ ранг матрицы, образованной первыми $2n$ строчками;

$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ранг матрицы, образованной первыми $3n$ строчками;

. . . . ;

$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n$ ранг всей матрицы.

Наконец, обозначим через r_1 число линейно независимых решений линейной системы уравнений на $u_{\rho,k}$ ($\rho = 1, \ldots, r$; $k = 1, 2, \ldots, r$),

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r}(a_{i,\rho,s}u_{\rho,k} - a_{k,\rho,s}u_{\rho,i}) = 0 \qquad (i, k, s = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

При сделанных ранее предположениях целые числа σ_i и r_1 связаны соотношением

$$r_1 = \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots + n\sigma_n. \tag{3}$$

Группа линейных преобразований Г, удовлетворяющая приведенному выше свойству, называется *инволютивной линейной группой.* Таким образом, соотношение (3) характеризует инволютивные группы.

Если порядок определяющих уравнений группы G отличен от единицы, то группа Г не инволютивна. Рассмотрим тогда систему (2) и пусть

$$u_{\sigma,\rho} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r_1} b_{s,\rho,\sigma}\eta_\rho, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

— общее решение этой системы, где r_1 величин η_ρ являются произвольными параметрами. Рассмотрим, наконец, r_1-мерную группу Γ_1 линейных преобразований пространства $n + r$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_r$, общее инфинитезимальное преобразование которой задается формулами

$$\begin{cases} \dfrac{\delta x_s}{\delta t} = 0 & (s = 1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{\delta y_\sigma}{\delta t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\sigma=1}^{\rho=r_1} b_{i,\rho,\sigma}\eta_\rho x_i & (\sigma = 1, 2, \ldots, r). \end{cases} \tag{4}$$

Группа Γ_1 называется первой *производной* группой группы Г.

Из группы Γ_1 можно вывести новую группу Γ_2 посредством той же самой процедуры; эта группа Γ_2 действует на пространстве $n + r + r_1$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_{r_1}$ и зависит от некоторого числа r_2 параметров. И так далее.

Если группа G бесконечномерна, то одна из производных групп группы Г инволютивна. В этом случае мы говорим, что примитивная группа Г полуинволютивна.

Если линейная группа Г не полуинволютивна, то одна из ее последовательных производных групп сводится к тождественному преобразованию.

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ n независимых форм Пфаффа, выбранных подходящим образом, выраженных через n переменных, преобразуемых группой G, и их дифференциалы; группа G задает на этих n формах действие присоединенной группы Γ линейных преобразований. Если группа G бесконечномерна, то можно показать, что *каждая из систем уравнений*

$$\sum a_{i,\rho,s}\omega_i = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n;\ \ \rho = 1, \ldots, r), \tag{5}$$

$$\sum b_{i,\rho,\sigma}\omega_i = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, r;\ \ \rho = 1, 2, \ldots, r_1), \tag{6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

соответствующих группе Γ *и производным группам* $\Gamma_1, \ldots,$ *вполне интегрируема.* Кроме того, *группа* G *сохраняет каждую из этих вполне интегрируемых систем, т.е. преобразует их интегралы.*

Отсюда следует, что если группа G *примитивна*, то каждая из систем уравнений (5), (6), ... эквивалентна системе

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0.$$

Можно сформулировать этот результат в следующем виде:

Теорема I. *Если бесконечномерная группа* G *примитивна, то бесконечно малые приращения переменных относительно присоединенной группы* Γ *и каждой из производных линейных групп группы* Γ *не могут зависеть от менее, чем* n *независимых линейных комбинаций переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Предположим теперь, что G — *примитивная* бесконечномерная группа и что присоединенная группа линейных преобразований сохраняет плоское многообразие M, которое можно считать заданным уравнениями

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Тогда

$$\frac{\delta x_{p+1}}{\delta t}, \ldots, \frac{\delta x_n}{\delta t}$$

зависят только от $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Преобразования из группы Γ, сохраняющие значения каждой из переменных $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, образуют инвариантную подгруппу γ, задаваемую, скажем, уравнениями

$$e_{q+1} = e_{q+2} = \ldots = e_r = 0.$$

Согласно уравнениям (2) приращения

$$\frac{\delta y_{q+1}}{\delta t},\ \frac{\delta y_{q+2}}{\delta t},\ \ldots,\ \frac{\delta y_r}{\delta t}$$

величин $y_{q+1},\ldots,y_r$ в группе Γ_1 тоже зависят лишь от переменных $x_{p+1},\ldots,x_n$. Переменные $x_1,x_2,\ldots,x_p$ могут входить только в q первых уравнений (4), из которых выражаются

$$\frac{\delta y_1}{\delta t},\ \frac{\delta y_2}{\delta t},\ \ldots,\ \frac{\delta y_q}{\delta t}.$$

С другой стороны, они остаются, если вычеркнуть в p первых уравнениях (1) все члены, содержащие либо

$$x_{p+1},\ x_{p+2},\ \ldots,\ x_n,$$

либо

$$e_{q+1},\ e_{q+2},\ \ldots,\ e_r.$$

Предыдущие утверждения остаются верными для последовательных производных групп.

Если группа G примитивна, то переменные $x_1,x_2,\ldots,x_p$ существенно входят во все группы $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots$; следовательно, *группа* $\overline{\gamma}$ *линейных преобразований переменных* $x_1,x_2,\ldots,x_p$, *которая получается, если положить в формулах* (1)

$$x_{p+1}=\ldots=x_n=0, \qquad e_{q+1}=\ldots=e_r=0,$$

полуинволютивна.

Эта группа линейных преобразований, кроме того, описывает, как группа γ действует на многообразие M. Поскольку группа γ, с другой стороны, является инвариантной подгруппой группы Γ, группа $\overline{\gamma}$ является инвариантной подгруппой группы $\overline{\Gamma}$, описывающей действие группы Γ на M. Теперь можно сформулировать следующую теорему:

Теорема II. *Если бесконечномерная группа* G *примитивна и если присоединенная группа* Γ *сохраняет плоское многообразие* M

$$x_{p+1}=\ldots=x_n=0,$$

то как группа $\overline{\Gamma}$ *преобразований пространства* p *переменных, описывающая действие группы* Γ *на многообразии* M, *так и инвариантная подгруппа* $\overline{\gamma}$ *группы* $\overline{\Gamma}$, *описывающая действие на этом многообразии преобразований группы* Γ, *сохраняющих значения каждой из переменных* $x_{p+1},\ldots,x_n$, — *полуинволютивны.*

Предположим, наконец, что группа Г не сохраняет никакого плоского многообразия, содержащегося в M; тогда *группа* $\overline{\Gamma}$ *преобразований пространства* p *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *сама не сохраняет никаких плоских многообразий и она полуинволютивна.*

Приведенные выше замечания и теоремы указывают, что нам нужно изучать линейные полуинволютивные группы, не сохраняющие никаких плоских многообразий.

II. Нахождение групп, присоединенных к примитивным бесконечномерным группам

Сформулируем теперь теорему, доказательство которой мы, для непрерывности изложения, отложим до раздела IV.

ТЕОРЕМА III. *Всякая линейная (и однородная) полуинволютивная группа преобразований пространства* n *переменных, не сохраняющая никакого плоского многообразия, принадлежит к одному из четырех классов:*

1° *Общая линейная однородная.*

2° *Специальная линейная однородная группа.*

3° *При четном* n, *самая общая линейная группа, сохраняющая дифференциальное выражение*

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 dx_4 - x_4 dx_3 + \ldots + x_{n-1} dx_n - x_n dx_{n-1}.$$

4° *При четном* n, *самая общая линейная группа, сохраняющая указанное дифференциальное выражение с точностью до постоянного множителя.*

Группы 2° и 3° — простые; группы 1° и 4° образованы, соответственно, из групп 2° и 3° вместе с группой, порожденной инфинитезимальным преобразованием

$$Uf = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Следовательно, все инвариантные полуинволютивные подгруппы групп 1°, 2°, 3°, 4° *совпадают, соответственно, с группами* 1° *или* 2°, 2°, 3°, 3° *или* 4°.

Рассмотрим теперь бесконечномерную примитивную группу G преобразований пространства n переменных. Присоединенная группа линейных преобразований Г преобразует некоторый набор из n линейно независимых пфаффовых форм

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n.$$

Следует различать два случая:

1° Присоединенная группа Γ не сохраняет никакого плоского многообразия; тогда она совпадает с одной из описанных выше четырех групп.

2° Присоединенная группа Γ сохраняет по меньшей мере одно плоское многообразие. Предположим, что она сохраняет плоское многообразие M

$$\omega_{p+1} = \omega_{p+2} = \ldots = \omega_n = 0, \tag{1}$$

причем никакое из плоских многообразий, содержащихся в M, не инвариантно относительно действия группы. Прежде всего, очевидно, что $p \geqslant 2$; в противном случае система (1) была бы вполне интегрируемой и группа G, преобразующая ее интегралы, не была бы примитивной.

Билинейные коварианты форм $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ имеют вид, с учетом равенств (1),

$$\begin{cases} \omega'_{p+1} = \sum\limits_{i,k}^{1,\ldots,p} A_{i,k,1}\omega_i\omega_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_n = \sum\limits_{i,k}^{1,\ldots,p} A_{i,k,n-p}\omega_i\omega_k, \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициенты $A_{i,j,k}$ — это константы. Группа линейных преобразований $\overline{\gamma}$, о которой говорится в теореме II предыдущего раздела, описывающая действие на формах $\omega_1, \ldots, \omega_p$ тех преобразований группы Γ, которые сохраняют формы $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$, очевидно, сохраняет каждую из билинейных форм в правых частях равенств (2). При этом группа $\overline{\gamma}$ полуинволютивна; кроме того, она инвариантна относительно полуинволютивной группы $\overline{\Gamma}$, не сохраняющей никакого плоского многообразия. Поэтому $\overline{\gamma}$ является одной из четырех перечисленных выше групп линейных преобразований.

Правые части в равенствах (2) не могут все равняться нулю. В противном случае система (1) была бы вполне интегрируемой и, следовательно, группа G была бы импримитивной. Поэтому группа $\overline{\gamma}$ не содержит инфинитезимального преобразования Uf и совпадает, таким образом, с одной из групп 2° или 3°. Группой 2° она также быть не может, так как последняя не сохраняет никакой билинейной формы. Значит, это группа 3°.

Для простой группы 3° легко показать, что она сохраняет единственную билинейную форму, а именно,

$$\omega_1\omega_2 + \ldots + \omega_{p-1}\omega_p,$$

и, следовательно, коварианты $\omega'_{p+1}, \ldots, \omega'_n$, вычисленные с учетом равенств (1), попарно пропорциональны и можно добиться того, чтобы, при $p < n-1$,

$$\left\{\begin{array}{l} \omega'_{p+1} \equiv 0 \\ \cdots\cdots \\ \omega'_{n-1} \equiv 0 \\ \omega'_n \equiv \omega_1\omega_2 + \ldots + \omega_{p-1}\omega_p \end{array}\right\} \quad (\mathrm{mod}\ \omega_{p+1}, \ldots, \omega_n). \tag{3}$$

Предположим сначала, что $p < n-1$. Тогда имеют место следующие равенства

$$\left\{\begin{array}{l} \omega'_{p+1} \equiv \omega_n \sum\limits_{i=1}^{i=p} a_{1,i}\omega_i \\ \omega'_{p+2} \equiv \omega_n \sum\limits_{i=1}^{i=p} a_{2,i}\omega_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega'_{n-1} \equiv \omega_n \sum\limits_{i=1}^{i=p} a_{n-1-p,i}\omega_i \end{array}\right\} \quad (\mathrm{mod}\ \omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \ldots, \omega_{n-1}). \tag{4}$$

Среди $n-p-1$ линейных комбинаций форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, входящих в правые части равенств (3), имеется p независимых, так как в силу общей теоремы система

$$\omega_{p+1} = \omega_{p+2} = \ldots = \omega_{n-1} = \omega_n = \sum a_{1,i}\omega_i = \ldots = \sum a_{n-p+1,i}\omega_i = 0$$

вполне интегрируема и, кроме того, группа G примитивна.

Применим теперь теорему II из первого раздела к плоскому многообразию

$$\omega_{p+1} = \omega_{p+2} = \ldots = \omega_{n-1} = 0,$$

инвариантному относительно Г. Соответствующая группа $\overline{\gamma}$, действующая на пространстве $p+1$ переменного сохраняет как уравнение $\omega_n = 0$, так и все правые части равенств (4); эта группа $\overline{\gamma}$ *полуинволютивна* и остается таковой, если положить $\omega_n = 0$; однако она сводится к однопараметрической группе

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} = e_1 x_1, \quad \ldots, \quad \frac{\delta x_p}{\delta t} = e_1 x_p,$$

которая *не полуинволютивна.*

Поэтому предположение $p < n - 1$ невозможно. Значит, число n нечетно и

$$p = n - 1.$$

Теорема IV. *Если G — примитивная бесконечномерная группа на пространстве n переменных, то присоединенная группа линейных преобразований удовлетворяет одному из следующих пяти предположений:*

A. *Группа Γ не сохраняет никакого плоского многообразия и совпадает с общей линейной однородной группой n переменных.*

B. *Группа Γ не сохраняет никакого плоского многообразия и совпадает со специальной линейной однородной группой n переменных.*

C. *Группа Γ не сохраняет никакого плоского многообразия и совпадает с наиболее общей линейной группой, сохраняющей билинейную дифференциальную форму*

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{n-1}\omega_n.$$

(n четно).

D. *Группа Γ не сохраняет никакого плоского многообразия и совпадает с наиболее общей линейной группой, сохраняющей, с точностью до постоянного множителя, билинейную дифференциальную форму*

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{n-1}\omega_n$$

(n четно).

E. *Группа Γ сохраняет единственное $(n-1)$-мерное плоское многообразие (n нечетно)*

$$\omega_n = 0$$

и преобразует точки этого плоского многообразия как наиболее общая линейная группа, сохраняющая, с точностью до постоянного множителя, билинейную форму

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{n+2}\omega_{n-1},$$

которая получается, если положить

$$\omega_n = 0$$

в билинейном коварианте ω'_n.

В этом последнем случае группа Γ не сохраняет, если положить $\omega_n = 0$, ковариант ω'_n; в противном случае Γ сохраняла бы форму ω_n и система

$$\frac{\partial\omega'_n}{\partial\omega_1} = \frac{\partial\omega'_n}{\partial\omega_2} + \ldots + \frac{\partial\omega'_n}{\partial\omega_n} = 0,$$

имеющая *четный* порядок $n - 1$, была бы вполне интегрируемой, что противоречит примитивности группы G.

Заметим, наконец, что в последнем случае группа Γ определена не вполне; окончательное описание таких групп будет дано в следующем разделе вместе с описанием соответствующих групп G.

III. Нахождение примитивных бесконечномерных групп на пространстве n переменных

Нам осталось восстановить для каждой из пяти групп линейных преобразований соответствующую группу G.

В двух первых случаях соответствующие результаты получены С. Ли. Вот в чем они состоят.

A. *Имеется две бесконечномерные группы, присоединенная группа к которым является общей группой линейных преобразований, а именно*:

1° *Группа общих преобразований пространства n переменных.*

2° *Группа, сохраняющая объемы с точностью до постоянного множителя, другими словами, группа, определяемая уравнением*

$$\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = a,$$

где через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *обозначены исходные переменные, через* $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$ *— преобразованные переменные, и через* a *— произвольная константа.*

B. *Имеется единственная бесконечномерная группа на пространстве n переменных, присоединенная группа к которой является специальной линейной группой*; *это группа преобразований, сохраняющих объемы. Она задается уравнением*

$$\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1.$$

Нам остается только рассмотреть случаи C, D и E. Начнем со случая D, организовав наши вычисления таким образом, чтобы они одновременно подошли и к случаю C.

D. Группа Γ — самая общая линейная группа с четным числом $2n$ переменных, сохраняющая, с точностью до постоянного множителя, билинейное выражение

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n}.$$

Инфинитезимальные преобразования группы Γ дают формам ω_i следующие приращения:

$$\left\{\begin{aligned} \delta\omega_{2i-1} &= e_0\omega_{2i-1} + \sum_{k=1}^{k=2n} e_{2i,k}\omega_k \\ \delta\omega_{2i} &= e_0\omega_{2i} - \sum_{k=1}^{k=2n} e_{2i-1,k}\omega_k \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где через $e_{i,j} = e_{j,i}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 2n)$ обозначены $n(2n + 1)$ независимых параметров, а через e_0 — еще один параметр, не зависящий от предыдущих (в случае D) и равный тождественно нулю (в случае C).

Среди структурных уравнений искомой группы G содержатся, во-первых, следующие:

$$\left\{\begin{aligned} \omega'_{2i-1} &= \omega_{2i-1}\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\varpi_{2i,k} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{2i,j,k}\omega_j\omega_k \\ \omega'_{2i} &= \omega_{2i}\varpi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\varpi_{2i-1,k} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{2i-1,j,k}\omega_j\omega_k \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Если прибавить к формам $\varpi_0, \varpi_{i,j}$ линейные комбинации форм ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{2n}$ с произвольными постоянными коэффициентами, то коэффициенты $A_{i,j,k}$ изменятся; их новые значения $\overline{A}_{i,j,k}$ определяются по старым из уравнений

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} (\overline{A}_{2i,j,k} - A_{2i,j,k})\omega_j\omega_k &= \omega_{2i-1}\Omega_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\Omega_{2i,k}, \\ \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} (\overline{A}_{2i-1,j,k} - A_{2i-1,j,k})\omega_j\omega_k &= \omega_{2i}\Omega_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\Omega_{2i-1,k}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

В уравнениях (3) через Ω_0 и

$$\Omega_{i,j} = \Omega_{j,i}$$

обозначены

$$n(2n+1)+1$$

линейных комбинаций форм ω_i с произвольными коэффициентами. Если обозначить эти

$$n(2n^2+n+1)$$

произвольных коэффициентов символами α_ρ, то с помощью уравнений (3) каждая разность

$$\overline{A}_{i,j,k} - A_{i,j,k}$$

записывается в виде некоторой линейной комбинации коэффициентов α.

Однако, с другой стороны, структурные уравнения (2) инвариантны относительно действия группы Г; выпишем условия их инвариантности относительно подгруппы группы Г, определенной уравнениями

$$\begin{aligned} \delta\omega_{2i-1} &= e_{2i-1,2i}\omega_{2i-1}, \\ \delta\omega_{2i} &= -e_{2i-1,2i}\omega_{2i}. \end{aligned}$$

Для удобства положим

$$\eta_{2i-1} = -\eta_{2i} = e_{2i-1,2i}$$

и выпишем уравнения

$$\begin{aligned} \eta_{2i-1}\omega'_{2i-1} = \eta_{2i-1}\omega_{2i-1}\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \eta_k\omega_k\varpi_{2i,k} + \sum_{j,k}^{1,\ldots,2n} A_{2i,j,k}(\eta_j+\eta_k)\omega_j\omega_k + {} \\ + \omega_{2i-1}\delta\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\delta\varpi_{2i,k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{2i}\omega'_{2i} = \eta_{2i}\omega_{2i}\varpi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \eta_k\omega_k\varpi_{2i-1,k} + \sum_{j,k}^{1,\ldots,n} A_{2i-1,j,k}(\eta_j+\eta_k)\omega_j\omega_k + {} \\ + \omega_{2i}\delta\varpi_0 - \sum_{k=1} k = 2n\omega_k\delta\varpi_{2i-1,k}, \end{aligned}$$

выражающие инвариантность формул (2) относительно рассматриваемой подгруппы группы Г. Эти уравнения можно переписать в виде

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{j,k} A_{2i,j,k}(\eta_j+\eta_k+\eta_{2i})\omega_j\omega_k+\omega_{2i-1}\delta\varpi_0+\\ &\qquad+\sum_{k=1}^{k=2n}\omega^k[\delta\varpi_{2i,k}+(\eta_{2i}+\eta_k)\varpi_{2i,k}]=0,\\ &\sum_{j,k} A_{2i-1,j,k}(\eta_j+\eta_k+\eta_{2i-1})\omega_j\omega_k+\omega_{2i}\delta\varpi_0-\\ &\qquad-\sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k[\delta\varpi_{2i-1,k}+(\eta_{2i-1}+\eta_k)\varpi_{2i-1,k}]=0, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

и мы видим, что в них $\delta\varpi_0$, $\delta\varpi_{i,j}-(\eta_i+\eta_j)\varpi_{i,j}$ являются подходящими линейными комбинациями форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$.

Обратим внимание на аналогию между формулами (3) и (4); последние выводятся из первых, если заменить

$$\begin{array}{ccc} A_{i,j,k}-\overline{A}_{i,j,k} & \text{на} & (\eta_i+\eta_j+\eta_k)A_{i,j,k},\\ \Omega_0 & \text{на} & \delta\varpi_0,\\ \Omega_{i,j} & \text{на} & \delta\varpi_{i,j}+(\eta_i+\eta_j)\varpi_{i,j}. \end{array}$$

Теперь мы можем воспользоваться неопределенностью в выборе $n(2n^2+n+1)$ коэффициентов α, входящих в Ω_0 и $\Omega_{i,j}$, и зафиксировать значения, например нулевые, наибольшего возможного числа коэффициентов $A_{i,j,k}$. Мы можем предполагать, что исходные значения этих последних коэффициентов были равны нулю. Это означает, что исключение параметров α из уравнений (3) приводит к уравнениям

$$\overline{A}_{i,j,k}=A_{i,j,k},$$

где через $A_{i,j,k}$ последовательно обозначены коэффициенты, которые нельзя считать равными нулю *a priori*. Но тогда исключение неизвестных коэффициентов при $\delta\varpi_0$ и $\delta\varpi_{i,j}+(\eta_i+\eta_j)\varpi_{i,j}$ из уравнений (4) приводит к аналогичным равенствам

$$(\eta_i+\eta_j+\eta_k)A_{i,j,k}=0,$$

где $A_{i,j,k}$ — те же самые коэффициенты, которые нельзя считать равными нулю *a priori*. Однако, *так как $\eta_i+\eta_j+\eta_k$ не могут обращаться в нуль, все коэффициенты $A_{i,j,k}$ должны равняться нулю.*

Поэтому всегда можно предполагать, что в структурных уравнениях (2) *все коэффициенты* $A_{i,j,k}$ *равны нулю.*

Если бы теперь группа Γ была инволютивной, то уравнения (2) полностью определяли бы структуру бесконечномерной группы и все искомые группы G были бы подгруппами одной и той же бесконечномерной группы — той, которая определена уравнениями (2). Однако группа Γ не инволютивна, по крайней мере в случае D. Ее характеры равны

$$\sigma_1 = n, \quad \sigma_2 = n, \quad \sigma_3 = n-1, \quad \sigma_4 = n-2, \quad \ldots, \quad \sigma_n = 2.$$

С другой стороны, производная группа Γ_1 имеет вид

$$\frac{\delta x_i}{\delta t} = 0,$$

$$\frac{\delta y_0}{\delta t} = 0,$$

$$\frac{\delta y_{i,j}}{\delta t} = \sum_{k=1}^{k=2n} e_{i,jjk} x_k \qquad (y_{i,j} = y_{j,i}; \quad i,j = 1,2,\ldots,2n),$$

куда входят параметрами

$$r_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

величин

$$e_{i,j,k} = e_{i,k,j} = e_{j,i,k} = e_{j,k,i} = e_{k,i,j} = e_{k,j,i}.$$

Итак,

$$r_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} < \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n.$$

Но то, что переменная y_0 соответствует параметру e, подводит нас к вычислению билинейного ковариантa формы ϖ_0. Применив фундаментальное тождество к уравнениям (2), получаем равенства

$$\omega_{2i-1}\varpi'_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi'_{2i,k} = \omega'_{2i-1}\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega'_k \varpi_{2i,k},$$

$$\omega_{2i}\varpi'_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi'_{2i-1,k} = \omega'_{2i}\varpi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega'_k \varpi_{2i-1}.$$

Они выполняются, в частности, если положить

$$\varpi'_0 = 0,$$

$$\varpi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\varpi_{i,2\rho}\varpi_{j,2\rho-1} + \varpi_{j,2\rho}\varpi_{i,2\rho-1}) \qquad (i,j = 1,2,\ldots,2n).$$

Их общее решение получается прибавлением к правым частям билинейных форм Π_0, $\Pi_{i,j}$, представляющих собой общее решение уравнений

$$\omega_{2i-1}\Pi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \Pi_{2i,k} = 0,$$

$$\omega_{2i}\Pi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \Pi_{2i-1,k} = 0.$$

Форма Π_0, в частности, имеет вид

$$\Pi_0 = \sum_{i,k} a_{ik}\omega_i\omega_k + \sum b_{i,j,k}\omega_i\varpi_{j,k}$$

откуда

$$\varpi_0' = \sum a_{i,k}\omega_i\omega_k + \sum b_{i,j,k}\omega_i\varpi_{j,k}.$$

Записав условие инвариантности структурных уравнений относительно преобразований

$$\frac{\delta\omega_i}{\delta t} = e_0\omega_i,$$

куда включаются и

$$\frac{\delta\varpi_0}{\delta t} = \frac{\delta\varpi_{i,j}}{\delta t} = 0,$$

получаем

$$0 = 2e_0\sum a_{ik}\omega_i\omega_k + e_0\sum b_{i,j,k}\omega_i\varpi_{j,k},$$

откуда, наконец,

$$\varpi_0' = 0. \tag{5}$$

Теорема. *Структурные уравнения всякой группы G с присоединенной группой Γ, удовлетворяющей условию* D, *содержат уравнения*

$$\begin{cases} \omega_{2i-1}' = \omega_{2i-1}\varpi_0 + \sum\limits_{k=1}^{k=2n} \omega_k\varpi_{2i,k}, \\ \omega_{2i}' = \omega_{2i}\varpi_0 - \sum\limits_{k=1}^{k=2n} \omega_k\varpi_{2i-1,k}, \\ \varpi_0' = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Кроме того, уравнения (6) — это структурные уравнения вполне определенной бесконечномерной группы, а именно, той, которая сохраняет, с точностью до постоянного множителя, дифференциальную билинейную форму

$$dx_1dx_2 + dx_3dx_4 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n}.$$

Поэтому всякая искомая группа G является бесконечномерной подгруппой указанной группы.

Теорема V. *Всякая бесконечномерная примитивная группа G, присоединенная группа которой удовлетворяет условию* D, *подобна либо наибольшей группе, сохраняющей, с точностью до постоянного множителя, билинейное дифференциальное выражение*

$$dx_1dx_2 + dx_3dx_4 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n},$$

либо одной из ее подгрупп.

Для окончательного решения проблемы классификации в случае D нам осталось только найти все такие подгруппы группы (6), среди структурных уравнений которых есть уравнения (6).

Образуем нормальные продолжения уравнений (6); их структурные уравнения получаются последовательным присоединением к уравнениям (6) уравнений

$$\varpi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_{i,2\rho}\varpi_{j,2\rho-1} + \varpi_{j,2\rho}\varpi_{i,2\rho-1}) + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,j,k}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\varpi'_{i,j,k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}\Big(&\varpi_{i,2\rho}\varpi_{j,k,2\rho-1} + \varpi_{j,2\rho}\varpi_{i,k,2\rho-1} + \varpi_{k,2\rho}\varpi_{i,j,2\rho-1} + \\ &+ \varpi_{i,j,2\rho}\varpi_{k,2\rho-1} + \varpi_{i,k,2\rho}\varpi_{j,2\rho-1} + \varpi_{j,k,2\rho}\varpi_{i,2\rho-1}\Big) + \\ &+ \sum_{h=1}^{h=2n}\omega_h\varpi_{i,j,k,h},\end{aligned} \tag{8}$$

. . . .

Здесь $\varpi_{i,j,k}, \varpi_{i,j,k,h}, \ldots$ — новые пфаффовы формы, индексы в которых можно переставлять произвольным образом; *степенью* такой формы мы назовем количество индексов в ней.

Рассмотрев какое-нибудь нормальное продолжение группы (6), скажем, p-е, и, наложив на формы $\omega_i, \varpi_0, \varpi_{i,j}, \varpi_{i,j,k}, \dots, \varpi_{i_1,i_2,\dots,i_{p+1}}$ некоторые линейные соотношения с постоянными коэффициентами, мы получим структурные уравнения одной из искомых подгрупп группы (6). По предположению, между формами ω_i, ϖ_0 и $\varpi_{i,j}$ нет никаких соотношений. Мы собираемся показать, что между формами $\omega_i, \varpi_0, \varpi_{i,j}$ и $\varpi_{i,j,k}$ соотношения обязательно существуют. Действительно, предположим, что не существует никакого соотношения между ω_i, ϖ_0 и формами ϖ степени, меньшей q, $q \leqslant 4$, но имеется по меньшей мере одно соотношение, в которое входит форма ϖ степени q, скажем,

$$\sum A_{i_1,i_2,\dots,i_q}\omega_{i_1,i_2,\dots,i_q} + \dots = 0, \tag{9}$$

где многоточием обозначены слагаемые, степень которых не превосходит q. Билинейный ковариант формы в левой части равенства (9) должен равняться нулю в силу искомых соотношений. Рассмотрим в выражении для этого ковариантa члены, имеющие вид произведения формы третьей степени на форму степени $q-1$. Сумма этих членов должна равняться нулю. Поэтому

$$\sum A_{i_1,i_2,\dots,i_q}(\varpi_{i_1,i_2,2\rho}\varpi_{i_3,i_4,\dots,i_q,2\rho-1} - \varpi_{i_1,i_2,2\rho-1}\varpi_{i_3,\dots,i_q,2\rho}) = 0. \tag{10}$$

Из этого равенства вытекает, во-первых, что все коэффициенты A, по крайней мере два из индексов которых совпадают, равны нулю. Достаточно рассмотреть в (10) слагаемые, содержащие

$$\varpi_{1,1,1}\varpi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{q-2},2};$$

этот моном входит в сумму с коэффициентом $A_{1,1,\alpha_1,\dots,\alpha_{q-2}}$ с точностью до числового множителя. Кроме того, все коэффициенты A, два из индексов которых равны $2\lambda-1$ и 2λ, также равны нулю; для доказательства этого достаточно рассмотреть в (10) слагаемое, содержащее, скажем, произведение

$$\varpi_{1,2,2}\varpi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{q-2},1},$$

коэффициент при котором есть $A_{1,2,\alpha_1,\dots,\alpha_{q-2}}$. Наконец, все остальные коэффициенты A также равны нулю. Для того, чтобы увидеть это, достаточно рассмотреть в (10) коэффициент при мономе

$$\varpi_{1,1,3}\varpi_{\alpha_1,\dots,\alpha_{q-2},2},$$

который равен $A_{1,3,\alpha_1,\dots,\alpha_{q-2}}$.

Тем самым доказано, что q не может превосходить трех.

Рассмотрим теперь какое-нибудь соотношение на $\omega_i, \varpi_0, \varpi_{i,j}, \varpi_{i,j,k}$, скажем,

$$\sum A_{i,j,k}\varpi_{i,j,k} + \ldots = 0. \tag{11}$$

Возьмем ковариант левой части равенства (11) и оставим в нем только члены, не содержащие форм ω_i. Это — произведения одной формы второй и одной формы третьей степени, а также произведения двух форм второй степени. Поскольку формы $\varpi_{i,j}$ не подчиняются никаким соотношениям, мы видим, что в первых группах членов коэффициент при каждой из форм $\varpi_{\alpha,\beta}$ должен обращаться в нуль с точностью до форм второй степени. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ переменные, подчиняющиеся n условиям

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = \ldots = r_{2n-1} + r_{2n} = 0,$$

и назовем величину $r_i + r_j + r_k$ *весом* формы $\varpi_{i,j,k}$. Тогда, рассматривая коэффициенты при $\varpi_{1,2}, \varpi_{3,4}, \ldots, \varpi_{2n-1,2n}$, мы приходим к следующему заключению.

Если выполняется соотношение вида (11), *то выполняется и соотношение*

$$\sum (r_i + r_j + r_k)A_{i,j,k}\varpi_{i,j,k} + \ldots = 0.$$

Другими словами, можно предполагать, что в каждом из соотношений (11) веса всех форм $\varpi_{i,j,k}$ одинаковы.

Этот общий вес может быть одного из четырех типов

$$3r_1,\ 2r_1 + r_3,\ r_1 + r_3 + r_5,\ r_1.$$

Из вида формы $\varpi'_{1,1,1}$ вытекает, что соотношение первого типа

$$\varpi_{1,1,1} + \ldots = 0$$

влечет $2n$ соотношений

$$\varpi_{1,1,1} + \ldots = \varpi_{1,1,2} + \ldots = \varpi_{1,1,3} + \ldots = \ldots = \varpi_{1,1,2n} + \ldots = 0,$$

а также $n(2n+1)$ соотношений

$$\varpi_{1,i,j} + \ldots = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

и, наконец, $2n(n+1)(2n+1)/3$ соотношений

$$\varpi_{i,j,k} + \ldots = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Из вида формы $\varpi'_{1,1,3}$ вытекает, что соотношение второго типа

$$\varpi_{1,1,3} + \ldots = 0$$

влечет выполнение некоторого соотношения первого типа и, как следствие, $2n(n+1)(2n+1)/3$ различных соотношений. То же самое справедливо и для соотношений третьего типа,

$$\varpi_{1,3,5} + \ldots = 0.$$

Наконец, если выполняется соотношение четвертого типа,

$$A_1\varpi_{1,1,2} + A_2\varpi_{1,3,4} + A_3\varpi_{1,5,6} + \ldots + A_n\varpi_{1,2n-1,2n} + \ldots = 0,$$

то, при A_1 отличном от нуля, из него можно вывести, рассмотрев коэффициент при $\varpi_{2,2}$ в коварианте, существование соотношения

$$\varpi_{1,1,1} + \ldots = 0,$$

а при A_2 отличном от нуля, рассмотрев коэффициент при $\varpi_{2,2}$ в коварианте, справедливость соотношения

$$\varpi_{1,3,3} + \ldots = 0,$$

а значит, и справедливость $2n(n+1)(2n+1)/3$ различных соотношений в каждом из случаев.

Отсюда видно, что *всякая форма $\varpi_{i,j,k}$ представляется в виде линейной комбинации форм $\omega_i, \varpi_0, \varpi_{i,j}$ с постоянными коэффициентами.*

Отсюда в конце концов вытекает, что *всякая подгруппа группы* (6), *присоединенная группа к которой такая же, как и у группы* (6), *конечномерна.*

Нетрудно показать, что в группе (6) все эти подгруппы сопряжены и можно положить, к примеру,

$$\varpi_{i,j,k} = 0 \qquad (i, j, k = 1, \ldots, 2n).$$

Доказательство этого результата выходит за рамки настоящей статьи, поэтому мы его приводить не будем. Однозначно определяемая таким образом подгруппа оказывается линейной (неоднородной) группой. Она порождена наибольшей линейной однородной группой, сохраняющей уравнение

$$x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0$$

и группой сдвигов.

Теорема VI. *На пространстве $2n$ переменных действуют две группы, присоединенные группы к которым удовлетворяют условию* D:

1° *Бесконечномерная группа, сохраняющая, с точностью до постоянного множителя, билинейное дифференциальное выражение*

$$dx_1dx_2 + dx_3dx_4 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n}.$$

2° *Группа линейных преобразований конечной размерности* $(n+1)(2n+1)$, *полученная композицией группы сдвигов с линейной однородной группы, сохраняющих уравнение*

$$x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0.$$

С. Рассуждения в случае С воспроизводят предыдущие; необходимо лишь опустить форму ϖ_0, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема VII. *На пространстве $2n$ переменных действуют две группы, присоединенная группа к которым удовлетворяет условию* С:

1° *Бесконечномерная группа, сохраняющая билинейное дифференциальное выражение*

$$dx_1dx_2 + dx_3dx_4 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n}.$$

2° *Линейная группа конечной размерности* $n(2n+3)$, *полученная композицией группы сдвигов с линейной однородной группой, сохраняющей уравнение*

$$x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1}.$$

Первая из этих групп проста.

Е. Несколько изменив обозначения, мы можем задать группу линейных преобразований Г уравнениями

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\delta\omega_0}{\delta t} = 2e_{0,0}\omega_0 \\ &\frac{\delta\omega_{2i-1}}{\delta t} = e_{0,0}\omega_{2i-1} + \sum_{k=1}^{k=2n} e_{2i,k}\omega_k + e_{2i,0}\omega_0 \\ &\frac{\delta\omega_{2i}}{\delta t} = e_{0,0}\omega_{2i} - \sum_{k=1}^{k=2n} e_{2i-1,k}\omega_k - e_{2i-1,0}\omega_0 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n), \qquad (12)$$

где через

$$e_{0,0}, \quad e_{i,j} = e_{j,i}, \quad e_{i,0}$$

обозначены $(n+1)(2n+1)$ параметров, причем параметры $e_{0,0}$ и $e_{i,j}$ независимы, а $e_{i,0}$ могут быть как независимыми, так и связанными с другими параметрами и между собой какими-либо линейными соотношениями.

Структурные уравнения всякой искомой группы G обязательно содержат уравнения вида

$$\begin{cases} \omega_0' = 2\omega_0\varpi_{0,0} + \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \dots + \omega_{2n-1}\omega^{2n}, \\ \omega_{2i-1}' = \omega_0\varpi_{2i,0} + \omega_{2i-1}\varpi_{0,0} + \sum\limits_{k=1}^{k=2n} \omega_k\varpi_{2i,k} + \sum\limits_{j,k}^{1,2,\dots,2n} A_{2i,j,k}\omega_j\omega_k, \\ \omega_{2i}' = -\omega_0\varpi_{2i-1,0} + \omega_{2i}\varpi_{0,0} - \sum\limits_{k=1}^{k=2n} \omega_k\varpi_{2i-1,k} + \sum\limits_{j,k}^{1,2,\dots,2n} A_{2i-1,j,k}\omega_j\omega_k. \end{cases} \tag{13}$$

Формы $\omega_0, \omega_i, \varpi_{i,j}$ независимы между собой, а формы $\varpi_{i,0}$ могут быть как независимыми, так и связанными между собой и с предыдущими формами некоторыми линейными соотношениями с постоянными коэффициентами.

Прибавляя к формам $\varpi_{i,j}$ линейные комбинации форм $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ с произвольными коэффициентами, мы меняем постоянные коэффициенты $A_{i,j,k}$; формулы, связывающие их новые значения со старыми, можно свести к уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{j,k}^{1,2,\dots,2n} (\overline{A}_{2i,j,k} - A_{2i,j,k})\omega_j\omega_k &= \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\Omega_{2i,k}, \\ \sum_{j,k}^{1,2,\dots,2n} (\overline{A}_{2i-1,j,k} - A_{2i-1,j,k})\omega_j\omega_k &= -\sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\Omega_{2i-1,k}, \end{aligned} \tag{14}$$

где через $\Omega_{i,j} = \Omega_{j,i}$ обозначены $n(2n+1)$ линейных комбинаций форм $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ с произвольными коэффициентами.

Запишем теперь условие инвариантности структурных уравнений (13) относительно группы линейных преобразований (12); эта группа (12) содержит, в частности, преобразование следующего вида:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta\omega_0}{\delta t} = 2\omega_0, \\ &\frac{\delta\omega_{2i-1}}{\delta t} = \omega_{2i-1} + \alpha_{2i}\omega_0, \\ &\frac{\delta\omega_{2i}}{\delta t} = \omega_{2i} - \alpha_{2i-1}\omega_0, \end{aligned}$$

где через α_i обозначены n подходящим образом выбранных констант. Отсюда получаем

$$\delta\varpi_{0,0} = -\frac{1}{2}(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \cdots + \alpha_{2n}\omega_{2n})$$

и, следовательно,

$$\sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{2i,j,k}\omega_j\omega_k = \sum \omega_{2k-1}\left(\frac{\delta\varpi_{2i,2k-1}}{\delta t} + \frac{1}{2}\alpha_{2k-1}\omega_{2i-1} - \frac{1}{2}\alpha_{2i}\omega_{2k}\right) + \\ + \omega_{2k}\left(\frac{\delta\varpi_{2i,2k}}{\delta t} + \frac{1}{2}\alpha_{2k}\omega_{2i} + \frac{1}{2}\alpha_{2i}\omega_{2k-1}\right),$$

$$\sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{2i-1,j,k}\omega_j\omega_k = -\sum \omega_{2k-1}\left(\frac{\delta\varpi_{2i-1,2k-1}}{\delta-}\frac{1}{2}\alpha_{2k-1}\omega_{2i} - \frac{1}{2}\alpha_{2i-1}\omega_{2k}\right) - \\ - \sum \omega_{2k}\left(\frac{\delta\varpi_{2i-1,2k}}{\delta t} - \frac{1}{2}\alpha_{2k}\omega_{2i} + \frac{1}{2}\alpha_{2i-1}\omega_{2k-1}\right).$$

Сравнивая полученные уравнения с равенством (14), мы заключаем, что, как и в случае D, *можно предполагать, что все коэффициенты* $A_{i,j,k}$ *равны нулю.*

Уравнения (13), в которых мы полагаем все коэффициенты $A_{i,j,k}$ равными нулю, определяют структуру бесконечномерной группы, известной под именем группы контактных преобразований пространства n измерений. Все искомые группы G являются такими подгруппами группы (13), для которых формы $\omega_0, \omega_i, \varpi_{0,0}, \varpi_{i,j}$ независимы.

Найдем сначала те из ее подгрупп, для которых формы $\omega_0, \omega_i, \varpi_{0,0}, \varpi_{i,j}$ и $\varpi_{i,0}$ связаны по крайней мере одним соотношением. Выпишем для этого структурные уравнения нормального продолжения группы (13); они получаются добавлением к структурным уравнениям (13) следующих уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} \varpi'_{0,0} &= -\frac{1}{2}(\omega_1\varpi_{1,0} + \omega_2\varpi_{2,0} + \cdots + \omega_{2n}\varpi_{2n,0})\omega_0\varpi_{0,0,0}, \\ \varpi'_{i,j} &= \frac{1}{2}(-1)^{i+1}\omega_{i'}\varpi_{j,0} + \frac{1}{2}(-1)^{j+1}\omega_{j'}\varpi_{i,0} + \\ &\quad + \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_{i,2\rho}\varpi_{j,2\rho-1} + \varpi_{j,2\rho}\varpi_{i,2\rho-1}) + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,j,k} + \omega_0\varpi_{i,j,0}, \\ \varpi'_{i,0} &= \varpi_{0,0}\varpi_{i,0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_{i,2\rho}\varpi_{2\rho-1,0} + \varpi_{2\rho,0}\varpi_{i,2\rho-1}) + \\ &\quad + (-1)^i\omega_{i'}\varpi_{0,0,0} + \omega_0\varpi_{i,0,0} + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,k,0}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

В этих уравнениях использовано обозначение i' для индекса $i+1$ (при i нечетном) и для $i-1$ (при i четном).

Покажем теперь, как и в случае D, что если формы подчиняются соотношению

$$\sum A_i\varpi_{i,0}+\ldots=0,$$

где многоточием обозначены члены, зависящие лишь от $\omega_0,\omega_i,\varpi_{0,0},\varpi_{i,j}$, то существует $2n$ независимых соотношений той же природы. Рассмотрим для этого коэффициенты при различных формах $\varpi_{i,j}$ в выражении для коварианта формы $\Sigma A_i\varpi_{i,0}$.

Пусть

$$\varpi_{i,0}=\sum_{j,k} a_{i,j,k}\varpi_{j,k}+a_{i,0}\varpi_{0,0}+\sum_k a_{i,k}\omega_k+a_i\omega_0 \qquad (i=1,2,\ldots,2n) \qquad (16)$$

искомые $2n$ соотношений. Из теории подгрупп и того факта, что разложение для $\varpi'_{i,0}$ содержит члены $\varpi_{0,0},\varpi_{i,0}$, вытекает, что все коэффициенты $a_{i,0}$ можно считать равными нулю. Поэтому, рассматривая коэффициент при $\varpi_{0,0}$ в коварианте формы в левой части какого-нибудь из равенств (16), мы заключаем, что *все коэффициенты* $a_{i,j,k}$ *равны нулю.* Поэтому структурные уравнения группы имеют вид

$$\begin{cases}\omega'_0=2\omega_0\varpi_{0,0}+\omega_1\omega_2+\ldots+\omega_{2n-1}\omega_{2n},\\ \omega'_{2i-1}=\omega_{2i-1}\varpi_{0,0}+\sum\limits_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{2i,k}+\sum\limits_{k=1}^{k=2n}a_{2i,k}\omega_0\omega_k,\\ \omega'_{2i}=\omega_{2i}\varpi_{0,0}-\sum\limits_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{2i-1,k}-\sum\limits_{k=1}^{k=2n}a_{2i-1,k}\omega_0\omega_k,\end{cases} \qquad (17)$$

и мы можем показать, как и выше, что, прибавляя к формам ϖ_0 и $\varpi_{i,j}$ выражения $\alpha_0\omega_0$, $\alpha_{i,j}\omega_0$, *мы можем добиться обращения в нуль всех коэффициентов* a_{ik}.

Полученная таким образом группа не примитивна, так как система

$$\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_{2n}=0$$

вполне интегрируема.

Таким образом, *для всякой, конечно- или бесконечномерной примитивной группы, удовлетворяющей условию* E, *размерность линейной группы* Γ *равна* $(n+1)(2n+1)$, *и* $(n+1)(2n+1)$ *форм* $\varpi_{0,0},\varpi_{i,j},\varpi_{i,0}$ *независимы и не зависят от форм* ω_0 *и* ω_i.

Построим теперь последовательные нормальные продолжения группы (13). В первом нормальном продолжении вводятся формы

$$\varpi_{0,0,0},\ \varpi_{i,0,0},\ \varpi_{i,j,0},\ \varpi_{i,j,k}$$

степени 3, во втором — формы

$$\varpi_{0,0,0,0},\ \varpi_{i,0,0,0},\ \varpi_{i,j,0,0},\ \varpi_{i,j,k,0},\ \varpi_{i,j,k,h}$$

степени 4, и т.д.

В частности, для форм третьей степени имеем

$$\left\{\begin{aligned}
\varpi'_{0,0,0} &= 2\varpi_{0,0}\varpi_{0,0,0} + \varpi_{1,0}\varpi_{2,0} + \ldots + \varpi_{2n-1,0}\varpi_{2n,0} - \\
&\quad -\frac{1}{2}(\omega_1\varpi_{1,0,0} + \ldots + \omega_{2n}\varpi_{2n,0,0}) + \omega_0\varpi_{0,0,0,0},\\
\varpi'_{i,0,0} &= 3\varpi_{0,0}\varpi_{i,0,0} + 2\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho\varpi_{\rho,0}\varpi_{i,\rho',0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho\varpi_{i,\rho}\varpi_{\rho',0,0} + \\
&\quad +(-1)^i\omega_{i'}\varpi_{0,0,0,0} + \omega_0\varpi_{i,0,0,0} + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,k,0,0},\\
\varpi'_{i,j,0} &= 2\varpi_{0,0}\varpi_{i,j,0} - \frac{1}{2}(-1)^i\omega_{i'}\varpi_{j,0,0} - \frac{1}{2}(-1)^j\omega_{j'}\varpi_{i,0,0} + \\
&\quad + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(\varpi_{\rho,0}\varpi_{i,j,\rho'} + \varpi_{i,\rho}\varpi_{j,\rho',0} + \varpi_{j,\rho}\varpi_{i,\rho',0}) + \\
&\quad +\omega_0\varpi_{i,j,0,0} + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,j,k,0},\\
\varpi'_{i,j,k} &= \varpi_{0,0}\varpi_{i,j,k} - \frac{1}{2}(-1)^i\omega_{i'}\varpi_{j,k,0} - \\
&\quad -\frac{1}{2}(-1)^j\omega_{j'}\varpi_{i,k,0} - \frac{1}{2}(-1)^k\omega_{k'}\varpi_{i,j,0} + \\
&\quad + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(\varpi_{i,\rho}\varpi_{j,k,\rho'} + \varpi_{j,\rho}\varpi_{i,k,\rho'} + +\varpi_{k\rho}\varpi_{i,j,\rho'}) + \\
&\quad +\omega_0\varpi_{i,j,k,0} + \sum_{h=1}^{h=2n}\omega_h\varpi_{i,j,k,h}.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

А формы степени $h > 3$ имеют вид

$$\begin{cases} \varpi'_{\underbrace{0,\ldots,0}_{h}} = (2h-4)\varpi_{0,0}\varpi_{\underbrace{0,\ldots,0}_{h}} + \\ \qquad +(h-1)(h-4)\varpi_{0,0,0}\varpi_{\underbrace{0,\ldots,0}_{h-1}} + \ldots, \\ \varpi'_{i,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-1}} = (2h-3)\varpi_{0,0}\varpi_{i,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-1}} + \\ \qquad +(h-1)(h-3)\varpi_{0,0,0}\varpi_{i,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-2}} + \ldots, \\ \varpi'_{i,j,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-2}} = (2h-4)\varpi_{0,0}\varpi_{i,j,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-2}} + \\ \qquad +(h-2)(h-3)\varpi_{0,0,0}\varpi_{i,j,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-3}} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi'_{i_1,i_2,\ldots,i_q,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-q}} = (2h-q-2)\varpi_{0,0}\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_q\underbrace{0,\ldots,0}_{h-q}} + \\ \qquad +(h-q)(h-3)\varpi_{0,0,0}\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_q\underbrace{0,\ldots,0}_{h-q-1}} + \ldots. \end{cases} \tag{19}$$

В правых частях этих равенств опущены члены, не содержащие ни форм $\varpi_{0,0}$, ни форм $\varpi_{0,0,0}$, а также те, в которых сумма степеней сомножителей не превосходит $h+1$.

Предположим теперь, что искомая группа не удовлетворяет никаким соотношениям, содержащим форму степени, меньшей h, и что хотя бы одно соотношение, в которое входит форма степени h, существует. Если $h > 3$, то возьмем в билинейном коварианте левой части соотношения слагаемые полной степени $h+2$ и выберем среди них те, которые содержат форму $\varpi_{0,0,0}$. Тогда из (19) вытекает, что единственным членом соотношения степени h может быть только форма $\varpi_{0,0,\ldots,0}$, и поэтому $h = 4$, по крайней мере если в соотношение входят только формы вида $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. В этом случае, доведя до конца вычисление формы $\varpi'_{0,0,0,0}$, получаем

$$\varpi'_{0,0,0,0} = 4\varpi_{0,0}\varpi_{0,0,0,0,0} - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{i=2n}(-1)^i\varpi_{i,0,0}\varpi_{i',0} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2n}\omega_i\varpi_{i,0,0,0} + \omega_0\varpi_{0,0,0,0,0}.$$

В силу того, что форма $\varpi_{0,0,0,0}$ выражается через формы младших степеней, коэффициент при $\varpi_{i,0,0}\varpi'_{i,0}$ не может обратиться в нуль. Если же в соотношение входят формы $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$, то независимость доказывается так же, как и в случае C. Поэтому неравенство $h > 3$ не может выполняться.

Таким образом, всякая искомая группа G определена линейными соотношениями на формы степеней $3, 2$ и 1. Как и при обсуждении случая D, видим, что каждой форме степени 3 можно сопоставить *вес*, равный

$$\begin{array}{ccc} 2r_0 & \text{для} & \varpi_{0,0,0}, \\ 3r_0 + r_i & \text{для} & \varpi_{i,0,0}, \\ 2r_0 + r_i + r_j & \text{для} & \varpi_{i,j,0}, \\ r_0 + r_i + r_j + r_k & \text{для} & \varpi_{i,j,k}, \end{array}$$

где через $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$ обозначены переменные, связанные соотношениями

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = \ldots = r_{2n-1} + r_{2n} = 0.$$

Можно предполагать, что каждое соотношение содержит только формы третьей степени одного веса. Вид такого соотношения может быть лишь одним из следующих:

$$\begin{gathered} \varpi_{0,0,0} + \ldots = 0, \\ \varpi_{i,0,0} + \ldots = 0, \\ \varpi_{i,j,0} + \ldots = 0 \qquad (i + j \neq 0), \\ A_0\varpi_{0,0,0} + A_1\varpi_{1,2,0} + A_2\varpi_{3,4,0} + \ldots + A_n\varpi_{2n-1,2n,0} + \ldots = 0, \\ \varpi_{i,j,k} + \ldots = 0 \qquad [(i + j)(i + k)(j + k) \neq 0], \\ A_1\varpi_{i,1,2} + A_2\varpi_{i,3,4} + \ldots + A_n\varpi_{i,2n-1,2n} + \ldots = 0, \end{gathered}$$

где многоточием обозначены члены, зависящие лишь от ω_j и $\varpi_{i,j}$.

Из существования соотношения второго вида вытекает (в силу природы формы $\varpi'_{i,0,0}$) существование $2n$ соотношений того же вида, а также $n(2n+1)$ соотношений третьего вида, а также $2n(n + 1)(2n + 1)/3$ соотношений вида

$$\varpi_{i,j,k} + \ldots = 0.$$

Из существования соотношения третьего (соответственно, четвертого) вида вытекает существование соотношений пятого (соответственно, шестого) вида. Из существования соотношения пятого или шестого вида вытекает существование $2n(n + 1)(2n + 1)/3$ соотношений

$$\varpi_{i,j,k} + \ldots = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

В частности, наверняка существует либо соотношение вида

$$\varpi_{0,0,0} + \ldots = 0,$$

либо $2n(n+1)(2n+1)/3$ соотношений вида

$$\varpi_{i,j,k} + \ldots = 0 \qquad (i,j,k = 1,2,\ldots,2n).$$

Первое предположение невозможно, так как в выражении для коварианта левой части рассматриваемого соотношения члены

$$\varpi_{1,0}\varpi_{2,0} + \ldots + \varpi_{2n-1,0}\varpi_{2n}$$

не могут исчезнуть.

Во втором случае мы всегда можем предполагать, что соотношения записываются в виде

$$\varpi_{i,j,k} + \sum A^{\alpha,\beta}_{i,j,k}\varpi_{\alpha,\beta} + \sum A^{\alpha,0}_{i,j,k}\varpi_{\alpha,0} + \sum A^{\alpha}_{i,j,k}\omega_\alpha + A^{0}_{i,j,k}\omega_0 = 0,$$

причем форма $\varpi_{0,0}$ в левую часть не входит. Рассмотрев коэффициент при $\varpi_{0,0}$ в билинейном коварианте, мы немедленно заключаем, что все коэффициенты $A^{\alpha,\beta}_{i,j,k}$ равны нулю. Коэффициенты же при $\varpi_{\alpha,0}$ приводят к равенствам

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho (A^{\alpha,0}_{j,k,\rho'}\varpi_{i,\rho} + A^{\alpha,0}_{k,i,\rho'}\varpi_{j,\rho} + A^{\alpha,0}_{i,j,\rho'}\varpi_{k,\rho}) = (-1)^\alpha \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} A^{\rho,0}_{i,j,k}\varpi_{\rho,\alpha'},$$

откуда, положив сначала $i = j = k$, затем $i = j$, затем $i \neq j \neq k$, мы заключаем, что все коэффициенты $A^{\alpha,0}_{i,j,k}$ равны нулю.

Теперь сравнение коэффициентов при $\omega_{k'}$ и ω_k в ковариантах выражений для $\varpi_{i,j,k}$ и $\varpi_{i,j,k'}$ показывает, что форма $\varpi_{i,j,0}$ выражается через $\varpi_{\alpha,\beta}$ и ω_α. Отсюда, как и для формы $\varpi_{i,j,k}$, видим, что $\varpi_{i,j,0}$ зависит только от форм ω_α. Поэтому

$$\left\{\begin{aligned} \varpi_{i,0,0} &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n} A^{\alpha}_{i,0,0}\omega_\alpha, \\ \varpi_{i,j,0} &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n} A^{\alpha}_{i,j,0}\omega_\alpha, \\ \varpi_{i,j,k} &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n} A^{\alpha}_{i,j,k}\omega_\alpha. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Не меняя структурных уравнений (15), можно предполагать, что форма ω_0 не входит в правые части последних соотношений и, кроме того, прибавить к этим правым частям формы

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n} a_{i,\alpha,0,0}\omega_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n} a_{i,j,\alpha,0}\omega_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n} a_{i,j,k,\alpha}\omega_\alpha$$

при условии, что в коэффициентах $a_{i,j,k,h}$ можно произвольным образом менять порядок индексов.

Сравнением соответствующих членов в уравнениях, выражающих равенство нулю коэффициентов при ω_j в коварианте

$$\varpi'_{0,0,0} - \sum A^\alpha_{i,0,0}\omega'_\alpha$$

и коэффициентов при ω_i в форме

$$\varpi'_{j,0,0} - \sum A^\alpha_{j,0,0}\omega'_\alpha,$$

получаем

$$\begin{gathered}
4(A^j_{i,0,0} - A^i_{j,0,0})\varpi_{0,0} + 2\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(A^j_{i,\rho',0} - A^i_{j,\rho',0})\varpi_{\rho,0} + \\
+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(A^j_{\rho',0,0} - A^{\rho'}_{j,0,0})\varpi_{i,\rho} + \\
+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(A^i_{\rho',0,0} - A^{\rho'}_{i,0,0})\varpi_{j,\rho} \equiv 0 \pmod{\omega_\alpha} \\
(j + i \neq 0),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
4(A^{i'}_{i,0,0} - A^i_{i',0,0})\varpi_{0,0} + 2\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(A^{i'}_{i,\rho',0} - A^i_{i',\rho',0})\varpi_{\rho,0} + \\
+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(A^{i'}_{\rho',0,0} - A^{\rho'}_{i',0,0})\varpi_{i,\rho} + \\
+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(A^i_{\rho',0,0} - A^{\rho'}_{i,0,0})\varpi_{i',\rho} + 2(-1)^i\varpi_{0,0,0,0} \equiv 0 \pmod{\omega_\alpha}.
\end{gathered}$$

Из первого соотношения вытекает, что значение $j + i$ отлично от нуля, а также

$$A^j_{i,0,0} = A^i_{j,0,0}, \qquad A^j_{k,i,0} = A^i_{j,k,0},$$
$$A^{i'}_{i,0,0} - A^i_{i',0,0} = A^{j'}_{j,0,0} - A^j_{j',0,0} = A^j_{j',0,0} - A^{j'}_{j,0,0} = 0.$$

Следовательно, *можно считать, что все* $A^{\alpha}_{i,0,0}$ *равны нулю.*

Второе соотношение дает

$$(-1)^i \varpi_{0,0,0,0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^{\rho} (A^{i'}_{i,\rho',0} - A^{i}_{i',\rho',0}) \varpi_{\rho,0} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}),$$

откуда

$$\varpi_{0,0,0,0} = \alpha_1 \varpi_{1,0} + \alpha_2 \varpi_{2,0} + \ldots + \alpha_{2n} \varpi_{2n,0} + \beta_1 \omega_1 + \ldots + \beta_{2n} \omega_{2n}. \tag{21}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при $\varpi_{0,0}$ в коварианте, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2n} = 0,$$

а значит,

$$A^{i'}_{i,k,0} = A^{i}_{i',k,0}.$$

Следовательно, *все коэффициенты* $A^{\alpha}_{i,j,0}$ *можно считать равными нулю.*

Выражая теперь равенство нулю ковариант $\varpi'_{i,j,0}$, получаем

$$\sum_{\rho,\alpha} (-1)^{\rho} A^{\alpha}_{i,j,\rho'} \omega_{\alpha} \varpi_{\rho,0} = \omega_0 \varpi_{i,0,0,0} + \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \varpi_{i,j,\alpha,0},$$

откуда

$$A^{\alpha}_{i,j,\rho'} = A^{j}_{i,\alpha,\rho'},$$

и, следовательно, все коэффициенты $A^{\alpha}_{i,j,k}$ можно считать равными нулю.

Наконец, мы заключаем, что формы $\varpi_{i,0,0,0,}, \varpi_{i,j,0,0}, \varpi_{i,j,h,0}$ выражаются через ω. Поэтому, если рассмотреть коэффициенты при $\varpi_{0,0}$ в ковариантах обеих частей равенства (21), то получим

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{2n} = 0.$$

В конце концов мы приходим к следующим равенствам:

$$\begin{cases} \varpi_{i,0,0} = 0, \\ \varpi_{i,j,0} = 0, \\ \varpi_{i,j,k} = 0, \\ \varpi_{i,0,0,0} = 0, \end{cases} \tag{22}$$

которые определяют конечномерную $(n+1)(2n+3)$-параметрическую группу.

Структурные уравнения этой конечномерной группы имеют вид

$$\begin{cases}
\omega_0' = 2\omega_0\varpi_{0,0} + \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n}, \\
\omega_i' = \omega_i\varpi_{0,0} + (-1)^{i+1}\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=2n}\omega_\rho\varpi_{i',\rho} + (-1)^{i+1}\omega_0\varpi_{i',0}, \\
\omega_{0,0}' = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=2n}\omega_\rho\varpi_{\rho,0} + \omega_0\varpi_{0,0,0}, \\
\omega_{i,0}' = \varpi_{0,0}\varpi_{i,0} + \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho\varpi_{i,\rho}\varpi_{\rho',0} + (-1)^i\varpi_{i'}\varpi_{0,0,0}, \\
\varpi_{i,j}' = \dfrac{1}{2}(-1)^{i+1}\omega_{i'}\varpi_{j,0} + \dfrac{1}{2}(-1)^{j+1}\omega_{j'}\varpi_{i,0} + \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho\varpi_{i,\rho}\varpi_{i,\rho'}, \\
\varpi_{0,0,0}' = 2\varpi_{0,0}\varpi_{0,0,0} + \varpi_{1,0}\varpi_{2,0} + \ldots + \varpi_{2n-1}\varpi_{2n,0}.
\end{cases} \tag{23}$$

Это группа всех проективных преобразований, сохраняющих уравнение

$$dx_0 + x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0.$$

В результате мы доказали следующую теорему.

Теорема VIII. *Существует две группы преобразований пространства $2n+1$ переменной, присоединенная группа Γ к которым удовлетворяет условию* E:

1° *Самая общая бесконечномерная группа, сохраняющая уравнение Пфаффа*

$$dx_0 + x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0.$$

2° *Самая общая $(n+1)(2n+3)$-мерная проективная группа, сохраняющая то же самое уравнение Пфаффа.*

Тем самым, мы получили полное описание всех бесконечномерных примитивных групп.

Теорема IX. *Имеется шесть классов бесконечномерных примитивных групп*:

1° *Общая группа преобразований пространства n переменных.*

2° *Группа преобразований пространства n переменных, сохраняющих объемы с точностью до постоянного множителя.*

3° *Группа преобразований пространства n переменных, сохраняющих объемы.*

4° *Группа преобразований пространства $2n$ переменных, сохраняющих, с точностью до постоянного множителя, билинейное дифференциальное выражение*

$$dx_1dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n}.$$

5° *Группа преобразований пространства $2n$ переменных $(n \geqslant 2)$, сохраняющих билинейное дифференциальное выражение*

$$dx_1dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n}.$$

6° *Группа преобразований пространства $2n+1$ переменной, сохраняющих уравнение Пфаффа*

$$dx_0 + x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0$$

(группа всех контактных преобразований пространства $n+1$ переменной).

В то же время мы доказали для трех последних классов следующую теорему, обобщающую результат С. Ли для первого и третьего класса.

ТЕОРЕМА X. *Если группа преобразует линейные элементы, приложенные в произвольной точке так же, как и группа 4°, то она конечномерна и подобна самой общей линейной (неоднородной) группе, сохраняющей, с точностью до постоянного множителя, выражение*

$$dx_1dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n}.$$

Если группа преобразует линейные элементы, приложенные в произвольной точке так же, как и группа 5°, то она конечномерна и подобна группе линейных (неоднородных) преобразований, сохраняющих дифференциальное выражение

$$dx_1dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n}.$$

Если группа преобразует линейные элементы, приложенные в произвольной точке так же, как и группа 6°, то она конечномерна и подобна самой общей проективной группе, сохраняющей уравнение

$$dx_0 + x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0.$$

Наконец, заметив, что среди шести бесконечномерных групп, перечисленных в теореме IX, группы 1°, 3°, 5° и 6° простые, а группы 2° и 4° разложимые, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА XI. *Простые бесконечномерные транзитивные группы делятся на четыре класса. В каждом классе группы изоморфны соответственно*:

1° *Общей группе преобразований пространства n переменных.*

2° *Группе преобразований пространства n переменных, сохраняющих объемы.*

3° *Группе преобразований пространства $2n$ переменных, сохраняющих билинейное дифференциальное выражение*

$$dx_1 dx_2 + dx_3 dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n}.$$

4° *Группе преобразований пространства $2n+1$ переменного, сохраняющих уравнение Пфаффа*

$$dx_0 + x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{2n-1} dx_{2n} - x_{2n} dx_{2n-1} = 0.$$

IV. Простые бесконечномерные интранзитивные группы

Рассмотрим бесконечномерную интранзитивную группу G. Обозначим через

$$u_1, u_2, \ldots, u_p;\ x_1, \ldots, x_n$$

переменные, на которых действует группа, причем первые p переменных инвариантны относительно указанного действия. Обозначим через $\overline{G}$ группу, которая получается, если в конечных уравнениях группы G зафиксировать конкретные значения инвариантов $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Эта непрерывная группа $\overline{G}$ действует на пространстве n переменных и может быть как бесконечномерной, так и конечномерной. В любом случае существует по меньшей мере одна *простая* группа $\overline{g}$, которой она (голоэдрически или мериэдрически) изоморфна. Мы всегда можем предполагать, что если эта группа $\overline{g}$ конечномерна, то она просто транзитивна, и что она примитивна в противном случае. Можно предполагать также, что преобразуемые ею переменные — это некоторые из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, скажем,

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu.$$

Обозначим через g (интранзитивную) группу, описывающую действие группы G на переменных

$$u_1, u_2, \ldots, u_p;\ x_1, x_2, \ldots, x_\nu.$$

Эта группа g изоморфна (голоэдрически или мериэдрически) группе G. С другой стороны, если произвольные элементы группы $\overline{g}$ считать произвольными функциями переменных $u_1, u_2, \dots, u_p$, то группа g является подгруппой полученной группы.

Предыдущие рассуждения доказывают следующую теорему.

ТЕОРЕМА XII. *Всякую простую бесконечномерную интранзитивную группу можно получить, взяв некоторую простую транзитивную конечно- или бесконечномерную группу и введя в ее конечные уравнения зависимость произвольных элементов от p новых инвариантных переменных $u_1, u_2, \dots, u_p$.*

I. *Простые интранзитивные группы, выводимые из простых транзитивных конечномерных групп.* Пусть g — простая конечномерная транзитивная группа (просто транзитивная) размерности $r > 1$. (Случай $r = 1$ мы рассмотрим в последнюю очередь.) Пусть структурные уравнения этой группы имеют вид

$$\omega'_s = \sum_{i,k}^{1,\dots,r} c_{i,k,s}\omega_i\omega_k.$$

Считая параметры группы g произвольными функциями параметров u_1, $u_2, \dots, u_p$, мы получаем бесконечномерную группу G, структурные уравнения которой имеют вид

$$\omega'_s = \sum_{(i,k)}^{1,\dots,r} c_{i,k,s}\omega_i\omega_k + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho\varpi_{s,\rho} \quad (s = 1, \dots, r). \tag{1}$$

Очевидно, что эта интранзитивная группа G проста. Она параметризуется r произвольными функциями p переменных $u_1, u_2, \dots, u_p$. Мы хотим определить, содержит ли она простые подгруппы. Очевидно, можно предполагать, что у этих подгрупп ровно p *существенных* инвариантов.

Построим последовательные нормальные продолжения группы G. Они получаются последовательным добавлением к равенствам (1) следующих уравнений:

$$\varpi'_{s,i} = \sum_{(\rho,\sigma)} c_{\rho,\sigma,s}(\omega_\rho\varpi_{\sigma,i} + \varpi_{\rho,i}\omega_\sigma) + \sum_{\rho} du_\rho\varpi_{s,i,\rho},$$

$$\varpi'_{s,i,j} = \sum_{(\rho,\sigma)} c_{\rho,\sigma,s}(\omega_\rho\varpi_{\sigma,i,j} + \varpi_{\rho,i}\varpi_{\sigma,j} + \varpi_{\rho,j}\varpi_{\sigma,i} + \varpi_{\rho,i,j}\omega_\sigma) + \sum_{\rho} du_\rho\varpi_{s,i,j,\rho},$$

$$\varpi'_{s,i,j,k} = \sum_{(\rho,\sigma)} c_{\rho,\sigma,s}(\omega_\rho \varpi \sigma, i, j, k + \varpi_{\rho,i}\varpi_{\sigma,j,k} + \varpi_{\rho,j}\varpi_{\sigma,i,k} + \varpi_{\rho,k}\varpi_{\sigma,i,j} +$$
$$+ \varpi_{\rho,i,j}\varpi_{\sigma,k} + \varpi_{\rho,i,k}\varpi_{\sigma,j} + \varpi_{\rho,j,k}\varpi_{\sigma,i} + \varpi_{\rho,i,j,k}\omega_\sigma) + \sum_\rho du_\rho \varpi_{s,i,j,k,\rho},$$

. . . .

Всякую подгруппу группы G можно получить, наложив на формы ω_s, $\varpi_{s,i}, \varpi_{s,i,j}, \ldots$ линейные соотношения, коэффициенты которых зависят от переменных u, причем соотношения только на формы ω отсутствуют. Предположим, что все соотношения содержат только формы ϖ с как минимум $h+1$ индексом, и пусть сначала $h \geqslant 2$. Возьмем такое соотношение

$$\sum A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h}\omega_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h} + \ldots = 0.$$

Взяв в выражении для билинейного коварианта левой части коэффициент при

$$\varpi_{\rho,i_1}\varpi_{\sigma,i_2,\ldots,i_h},$$

где $\rho, \sigma, i_1, i_2, \ldots, i_h$ — фиксированные индексы, мы видим, что

$$\sum_{s=1}^{s=r} A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h} c_{\rho,\sigma,s} = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^{s=r} A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h}\omega'_s = 0,$$

что возможно только если все коэффициенты $A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h}$ равны нулю. Противоречие.

Пусть теперь

$$h = 1,$$

и предположим, что имеет место соотношение

$$\sum_{s=1}^{s=r}\sum_{i=1}^{i=p} A_{s,i}\varpi_{s,i} + \ldots = 0$$

где многоточием обозначены члены, зависящие только от формы ω; коэффициенты $A_{s,i}$ являются функциями от u. Вид коварианта $\varpi'_{s,i}$ показывает, что из существования предыдущего соотношения вытекает существование всех соотношений

$$\sum_{\rho,s,i} c_{k,s,\rho} A_{\rho,i} \varpi_{s,i} + \ldots = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Сохранив в рассматриваемых соотношениях на $\varpi_{s,i}$ и ω только члены, не содержащие ω, мы получим уравнения плоского многообразия (в координатах $\varpi_{1,i}, \varpi_{2,i}, \ldots, \varpi_{r,i}$). Это плоское многообразие инвариантно относительно действия группы линейных преобразований, инфинитезимальные преобразования которой имеют вид

$$\sum_{s,\rho,i} c_{k,s\rho} \varpi_{s,i} \frac{\partial f}{\partial \varpi_{\rho,i}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Поэтому группа преобразований Γ, линейных по $t_1, t_2, \ldots, t_r$,

$$\sum_{s,\rho,i} c_{k,s,\rho} t_s \frac{\partial f}{\partial t_\rho} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

не сохраняет никакого плоского многообразия. Отсюда следует, что если все $A_{s,i}$ отличны от нуля, то искомая система уравнений содержит по меньшей мере r соотношений вида

$$\begin{gathered}
\varpi_{1,1} + \sum_{s=1}^{s=r} \sum_{i=2}^{i=p} A^{(1)}_{s,i} \varpi_{s,i} + \ldots = 0, \\
\varpi_{2,1} + \sum_{s=1}^{s=r} \sum_{i=2}^{i=p} A^{(2)}_{s,i} \varpi_{s,i} + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
\varpi_{r,1} + \sum_{s=1}^{s=r} \sum_{i=2}^{i=p} A^{(r)}_{s,i} \varpi_{s,i} + \ldots = 0.
\end{gathered}$$

Если таких соотношений ровно r, то группа линейных преобразований Γ сохраняет плоское многообразие

$$\begin{gathered}
\sum A^{(1)}_{s,2} t_s - \rho t_1 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
\sum A^{(r)}_{s,2} t_s - \rho t_r = 0,
\end{gathered}$$

где через ρ обозначена произвольная постоянная. Если положить ρ равным одному из корней определителя, составленного из коэффициентов при t в этих уравнениях, то они обратятся в тождества; следовательно,

$$A_{s,i}^{(j)} = 0 \text{ при } i \neq j, \qquad A_{s,1}^{(1)} = A_{s,2}^{(2)} = \ldots = A_{s,r}^{(r)}.$$

Поэтому искомые соотношения имеют вид

$$\begin{gathered} a_1\varpi_{1,1} + a_2\varpi_{1,2} + a_3\varpi_{1,3} + \ldots + a_p\varpi_{1,p} = 0, \\ a_1\varpi_{2,1} + a_2\varpi_{2,2} + a_3\varpi_{2,3} + \ldots + a_p\varpi_{2,p} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_1\varpi_{r,1} + a_2\varpi_{r,2} + a_3\varpi_{r,3} + \ldots + a_p\varpi_{r,p} = 0. \end{gathered}$$

Если бы число соотношений превосходило r, мы пришли бы к аналогичному результату, получив некоторый набор групп из r соотношений такого же вида.

Из предыдущего результата вытекает, что делая замену переменных u_ρ, можно перейти к равенствам вида

$$\varpi_{s,1} + \ldots = 0 \qquad (s = 1, \ldots, r),$$

и, следовательно, число существенных инвариантов рассматриваемой подгруппы группы G меньше p.

Окончательно, *всякая подгруппа группы G с тем же числом существенных инвариантов совпадает с самой этой группой.*

ТЕОРЕМА XIII. *Из простой транзитивной конечномерной группы g можно вывести только бесконечномерную простую интранзитивную группу G с данным числом p существенных инвариантов. Эта группа получается, если параметры группы g считать произвольными функциями указанных p инвариантов.*

II. *Интранзитивные простые группы, выводимые из бесконечномерных простых транзитивных групп.* Перейдем теперь к обзору четырех классов бесконечномерных простых транзитивных групп.

1° *Общая группа g преобразований пространства n переменных.* В этом случае структурные уравнения группы G имеют вид

$$\omega_s' = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_\rho \omega_{s,\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} du_\rho \varpi_s^{(\rho)}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Построим последовательные нормальные продолжения группы G. Они получаются присоединением к предыдущим равенствам уравнений

$$\varpi'_{s,i} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\omega_{\rho,i}\omega_{s,\rho} + \omega_\rho\omega_{s,i,\rho}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i}^{(\rho)},$$

$$\varpi'_{s,i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\omega_{\rho,i,j}\omega_{s,\rho} + \omega_{\rho,i}\omega_{s,j,\rho} + \omega_{\rho,j}\omega_{s,i,\rho} + \omega_\rho\omega_{s,i,j,\rho}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i,j}^{(\rho)},$$

$$\varpi'_{s,i,j,k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\omega_{\rho,i,j,k}\omega_{s,\rho} + \omega_{\rho,i,j}\omega_{s,k,\rho} + \omega_{\rho,i,k}\omega_{s,j,\rho} + \omega_{\rho,j,k}\omega_{s,i,\rho} + \omega_{\rho,i}\omega_{s,j,k,\rho} +$$

$$+ \omega_{\rho,j}\omega_{s,i,k,\rho} + \omega_{\rho,k}\omega_{s,i,j,\rho} + \omega_\rho\omega_{s,i,j,k,\rho}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i,j,k}^{(\rho)},$$

. . . . ,

$$\varpi_s^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_\rho^{(\alpha)}\omega_{s,\rho} + \omega_\rho\varpi_{s\rho}^{(\alpha)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i}^{(\alpha,\rho)},$$

$$\varpi_{s,i}^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_{\rho,i}^{(\alpha)}\omega_{s,\rho} + \omega_{\rho,i}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha)}\varpi_\rho^{(\alpha)}\omega_{s,i,\rho} + \omega_\rho\varpi_{s,i,\rho}^{(\alpha)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i}^{(\alpha,\rho)},$$

$$\varpi_{s,i,j}^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_{\rho,i,j}^{(\alpha)}\omega_{s,\rho} + \omega_{\rho,i,j}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha)} + \varpi_{\rho,i}^{(\alpha)}\omega_{s,j,\rho} + \varpi_{\rho,j}^{(\alpha)}\omega_{s,i,\rho} + \omega_{\rho,i}\varpi_{s,j,\rho}^{(\alpha)} +$$

$$+ \omega_{\rho,j}\varpi_{s,i,\rho}^{(\alpha)} + \varpi_\rho^{(\alpha)}\omega_{s,i,j,\rho} + \omega_\rho\varpi_{s,i,j,\rho}^{(\alpha)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i,j}^{(\alpha,\rho)},$$

. . . . ,

$$\varpi_s^{(\alpha,\beta)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_\rho^{(\alpha,\beta)}\omega_{s,\rho} + \varpi_\rho^{\alpha)}\varpi_{s,\rho}^{(\beta)} + \varpi_\rho^{(\beta)}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha)} + \omega_\rho\varpi_{s,\rho}^{(\alpha,\beta)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_s^{(\alpha,\beta,\rho)},$$

$$\varpi_{s,i}^{(\alpha,\beta)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_{\rho,i}^{(\alpha,\beta)}\omega_{s,\rho} + \varpi_{\rho,i}^{(\alpha)}\varpi_{s,\rho}^{(\beta)} + \varpi_{\rho,i}^{(\beta)}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha)} + \omega_{\rho,i}\varpi_{s,\rho,j}^{(\alpha,\beta)} + \varpi_\rho^{(\alpha,\beta)}\omega_{s,i,\rho} +$$

$$+ \varpi_\rho^{(\alpha)}\varpi_{s,i,\rho}^{(\beta)} + \varpi_\rho^{(\beta)}\omega_{s,i,\rho} + \omega_\rho\varpi_{s,i,\rho}^{(\alpha,\beta)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i}^{(\alpha,\beta,\rho)},$$

. . . . ,

Степенью формы ω или ϖ назовем число индексов в ней. Предположим, что среди соотношений, определяющих одну из искомых подгрупп группы G, нет таких, степень которых меньше h, причем по крайней мере одно соотношение степени h есть. Предположим сначала, что $h \geqslant 4$. Пусть одно из рассматриваемых соотношений имеет вид

$$\begin{aligned}\sum A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_{h-1}}\omega_{s,i_1,i_2,\ldots,i_{h-1}} + \sum A^{(\alpha)}_{s,i_1,i_2,\ldots,i_{h-2}}\varpi^{(\alpha)}_{s,i_1,i_2,\ldots,i_{h-2}} &+ \\ + \sum A^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{s,i_1,i_2,\ldots,i_{h-3}}\varpi^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{s,i_1,i_2,\ldots,i_{h-3}} + \ldots &+ \\ + \sum A_s^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})}\varpi_s^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})} + \ldots &= 0,\end{aligned}$$

где многоточиями обозначены все члены, степень которых не превосходит h. В билинейных ковариантах левых частей рассмотрим члены вида

$$\begin{gathered}\omega_{s,\rho,i_1}\omega_{\rho,i_2,\ldots,i_{h-1}},\\ \varpi^{(\alpha)}_{s,\rho}\omega_{\rho,i_1,\ldots,i_{h-2}},\\ \varpi^{(\alpha_1)}_{s,\rho}\varpi^{(\alpha_2)}_{\rho,i_1,\ldots,i_{h-3}},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varpi^{(\alpha_1)}_{s,\rho}\varpi_\rho^{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})},\end{gathered}$$

без труда получим, что все коэффициенты обращаются в нуль, за исключением, возможно, случая $n = 1$ и $h = 4$. В этом последнем случае

$$\omega_{1,1,1,1} + \sum A^{(\alpha)}_{1,1,1}\varpi^{(\alpha)}_{1,1,1} + \sum A^{(\alpha,\beta)}_{1,1}\varpi^{(\alpha,\beta)}_{1,1} + \sum A_1^{(\alpha,\beta,\gamma)}\varpi_1^{(\alpha,\beta,\gamma)} = 0,$$

и легко заключить, что такое соотношение не может иметь места.

При $h = 3$ ограничимся в искомом соотношении только членами, содержащими формы $\omega_{s,i,j}$, $\varpi^{(\alpha)}_{j,i}$, $\varpi_s^{(\alpha,\beta)}$, $\varpi_s^{(\alpha)}$. Мы можем считать, что *веса* этих форм не меняются от соотношения к соотношению, договорившись, что

$$\begin{array}{lll}\omega_{s,i,j} & \text{имеет вес} & r_s - r_i - r_j,\\ \varpi^{(\alpha)}_{s,i} & \text{имеет вес} & r_s - r_i,\\ \varpi_s^{(\alpha,\beta)} & \text{имеет вес} & r_s,\\ \varpi_s^{(\alpha)} & \text{имеет вес} & r_s.\end{array}$$

Тогда формы $\omega_{s,i,j}$ не входят ни в одно из этих соотношений. Изучение коэффициента при $\varpi_\rho^{(\alpha)}\omega_{s,i,\rho}$ в билинейном коварианте формы в левой части рассматриваемого соотношения показывает, что в это соотношение не входит и никакая из форм $\varpi_{s,i}^{(\alpha)}$; аналогично, изучение коэффициента при $\varpi_\rho^{(\alpha)}\varpi_{s,\rho}^{(\beta)}$ позволяет исключить формы $\varpi_s^{(\alpha,\beta)}$. Поэтому h не может равняться трем.

Если, наконец, $h = 2$, то из справедливости соотношения

$$\sum_{s,\alpha} A_s^{(\alpha)}\varpi_s^{(\alpha)} + \ldots = 0,$$

в котором многоточием обозначены члены, зависящие только от ω_{si} и ω_i, вытекает справедливость всех соотношений, которые получаются из предыдущего фиксированием значения s. Кроме того, из справедливости соотношения

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} a_\alpha\varpi_s^{(\alpha)} + \ldots = 0$$

вытекает справедливость n соотношений

$$\sum a_\alpha\varpi_1^{(\alpha)} + \ldots = \sum a_\alpha\varpi_2^{(\alpha)} + \ldots = \ldots = \sum a_\alpha\varpi_n^{(\alpha)} + \ldots = 0.$$

Выполнив замену переменных u, мы можем считать, что

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_p = 0.$$

Наконец, вид формы $\varpi^{(1)}$ показывает, что, согласно теории подгрупп, можно предполагать выполнение равенств

$$\varpi_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j,1}\omega_{i,j} + \ldots,$$
$$\varpi_2^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j,2}\omega_{i,j} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varpi_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j,n}\omega_{i,j} + \ldots,$$

в которых многоточиями обозначены слагаемые, зависящие только от $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. Вид ковариантa формы $\varpi_1^{(1)}$ показывает теперь, что все коэффициенты $a_{i,j,1}$ равны нулю, также, как и коэффициенты $a_{i,j,2}, \ldots, a_{i,j,n}$, в которых индекс i отличен от единицы, и, кроме того, $a_{1,k,j} = a_{1,j,k}$. Рассматривая ковариантн форм $\varpi_2^{(1)}, \ldots, \varpi_n^{(1)}$, заключаем, что и все остальные коэффициенты тоже равны нулю. Формы $\varpi_1^{(1)}, \ldots, \varpi_n^{(1)}$ зависят только от форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Отсюда немедленно вытекает, что искомая подгруппа группы G допускает меньше p существенных инвариантов, что противоречит сделанному предположению.

Теорема XIV. *Из общей группы преобразований пространства n переменных выводится только простая интранзитивная группа с p существенными инвариантами. Эта группа задается уравнениями*

$$\begin{gathered} u'_1 = u_1, \quad \ldots, \quad u'_p = u_p; \\ x'_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_p), \quad \ldots, \quad x'_n = f_n(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_p), \end{gathered}$$

где $f_i \ (i = 1, \ldots, n)$ — произвольные функции своих $n + p$ аргументов.

2° *Группа g преобразований пространства n переменных, сохраняющих объемы.* Этот случай изучается аналогично предыдущему. Использованные ранее обозначения сохраняются при условии добавления форм, определяемых равенствами

$$\begin{gathered} \omega_{1,1} + \omega_{2,2} + \ldots + \omega_{n,n} = 0, \\ \omega_{1,1,i_1,\ldots,i_h} + \omega_{2,2,i_1,\ldots,i_h} + \ldots + \omega_{n,n,i_1,\ldots,i_h} = 0, \\ \omega_{1,1,i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} + \omega_{2,2,i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} + \ldots + \omega_{n,n,i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} = 0. \end{gathered}$$

Как и в предыдущем случае, показываем, что целое число, обозначенное через h, не может превосходить трех. Если $h = 3$, то различным формам можно присвоить веса, однако на этот раз переменные $r_1, \ldots, r_n$ связаны соотношением

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 0.$$

Формы $\omega_{s,i,j}$ могут входить в искомые соотношения только при $n = 2$, причем тогда в них входят только формы $\omega_{1,1,1}$ и $\omega_{1,1,2}$, что, как нетрудно показать, невозможно. Как и раньше, мы доказываем, что ни одна из форм $\varpi_{s,i}^{(\alpha)}, \varpi_s^{(\alpha,\beta)}$ не может входить в искомые соотношения и, следовательно, что h не может равняться трем.

Если $h = 2$, то проведенное выше рассуждение приводит к тому же заключению.

Теорема XV. *Из бесконечномерной группы преобразований пространства n переменных, сохраняющих объемы, можно вывести единственную* *простую интранзитивную группу с p существенными инвариантами; эта группа задается уравнениями*

$$u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2, \quad \ldots, \quad u'_p = u_p;$$
$$x'_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_p), \quad \ldots, \quad x'_n = f_n(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_p),$$

где функции f_i подчиняются единственному условию

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = 1.$$

3° *Группа g преобразований пространства $2n$ переменных, сохраняющих форму*

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n}.$$

Структурные уравнения группы G имеют вид

$$\omega'_i = (-1)^{i+1} \left(\sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i',\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_i^{(\rho)} \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1, 2n),$$

где обозначение i' используется для индекса $i+1$ (при i нечетном) и для $i-1$ (при i четном). Формы $\varpi_{i,j}$ связаны соотношениями

$$\varpi_{j,i} = \varpi_{i,j}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Структурные уравнения последовательных нормальных продолжений группы G получаются присоединением к предыдущим уравнениям таких:

$$\varpi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho \varpi_{i,\rho} \varpi_{i,\rho'} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,j,\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{i,j}^{(\rho)},$$

$$\varpi'_{i,j,k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho (\varpi_{i,\rho} \varpi_{j,k,\rho'} + \varpi_{j,\rho} \varpi_{i,k,\rho'} + \varpi_{k,\rho} \varpi_{i,j,\rho'}) +$$
$$+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,j,k,\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{i,j,k}^{(\rho)},$$

. . . . ,

$$\varpi_i^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho \varpi_\rho^{(\alpha)} \varpi_{i,\rho'} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,\rho}^{(\alpha)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_i^{(\alpha,\rho)},$$

$$\varpi_{i,j}^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho (\varpi_{i,\rho}^{(\alpha)} \varpi_{j,\rho'} + \varpi_{j,\rho}^{(\alpha)} \varpi_{i,\rho'} + \varpi_\rho^{(\alpha)} \varpi_{i,j,\rho'}) +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,j,\rho}^{(\alpha)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{i,j}^{(\alpha,\rho)},$$

. . . . ,

$$\varpi_i^{(\alpha,\beta)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho (\varpi_\rho^{(\alpha,\beta)} \varpi_{i,\rho'} + \varpi_\rho^{\alpha)} \varpi_{i,\rho'}^{(\beta)} + \varpi_\rho^{(\beta)} \varpi_{i,\rho'}^{(\alpha)}) +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,\rho}^{(\alpha,\beta)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_i^{(\alpha,\beta,\rho)},$$

. . . .

Всякая искомая подгруппа группы G определяется некоторыми линейными соотношениями на формы ϖ, которые относятся к одному из нормальных продолжений этой группы. Из рассуждений предыдущего раздела вытекает, что если коэффициенты при $\varpi_{i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha)}, \varpi_{i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1,\alpha_2)}, \ldots$ сделать равными нулю, то оставшиеся соотношения содержат либо только формы ω и ϖ_{ij}, либо также формы $\varpi_{i,j,k}$, но в этом случае число различных соотношений не меньше числа форм $\varpi_{i,j,k}$, причем каждая форма входит лишь в одно из этих соотношений.

Назовем теперь *степенью соотношения* максимальное число индексов у форм, входящих в это соотношение; обозначим через h минимальную степень искомых соотношений. Если $h \geqslant 4$, то ни одна из форм $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$ не входит в искомые соотношения в силу того, что было сказано выше. Последовательное изучение коэффициентов при

$$\varpi_\rho^{(\alpha)} \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_{h-1},\rho'},$$

$$\varpi_\rho^{(\alpha_1)} \varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_{h-2},\rho'}^{(\alpha_2)},$$

$$\varpi_\rho^{(\alpha_1)} \varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_{h-3},\rho'}^{(\alpha_2,\alpha_3)},$$

$$\varpi_\rho^{(\alpha_1)} \varpi_{i,\rho'}^{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})}$$

в билинейном коварианте правой части соотношения показывает, что ни одна из форм степени h не может входить в это соотношение.

Если $h = 3$, то можно добиться того, чтобы ни в одно из соотношений не входили формы $\varpi_{i,j,k}, \varpi_{i,j}^{(\alpha)}, \varpi_{i}^{(\alpha,\beta)}, \varpi_{i}^{(\alpha)}$ различного *веса*. Из сказанного выше вытекает, что если какая-нибудь из форм $\varpi_{i,j,k}$ входит в соотношение, то каждая из них также входит. Например, одно из соотношений могло бы иметь вид

$$\varpi_{1,1,3} + \sum A_i^{(\alpha)} \varpi_i^{(\alpha)} + \ldots = 0,$$

но вес r_i ни одной из форм $\varpi_i^{(\alpha)}$ не равен весу $2r_1 + r_3$ формы $\varpi_{1,1,3}$; в результате мы получаем соотношение на формы $\varpi_{1,1,3}$, $\varpi_{i,j}$ и ω, что невозможно. Рассуждение, проведенное для $h \geqslant 4$ переносится теперь на случай $h = 3$.

Если $h = 2$, то изучение весов показывает, что каждое соотношение можно привести к виду

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} A_i^{(\alpha)} \varpi_i^{(\alpha)} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{j,k} \varpi_{j,k} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} B_\rho \omega \rho = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где индекс i принимает одно и то же значение для всех слагаемых. Кроме того, взяв в билинейном коварианте левой части члены, содержащие $\varpi_{i,j}$, мы видим, что предыдущее соотношение порождает $2n$ соотношений вида

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} A_i^{(\alpha)} \varpi_j^{(\alpha)} + \ldots = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Наконец, заменой переменных u можно привести эти $2n$ соотношений к виду

$$\varpi_i^{(1)} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{i,j,k} \varpi_{j,k} + \sum_{j=1}^{j=2n} B_{i,j} \omega_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Вид коварианта $\varpi_1^{(1)}$ показывает, что, согласно теории подгрупп, можно считать нулевыми коэффициенты $A_{i,j,k}$, в которых j, k равны 1. Результат вычисления билинейного коварианта первого соотношения показывает, что все коэффициенты $A_{i,j,k}$ равны нулю.

Отсюда вытекает, что формы $\varpi_i^{(1)}$ зависят только от форм ω; следовательно, искомая подгруппа группы G допускает не более, чем $p - 1$ существенный инвариант.

ТЕОРЕМА XVI. *Из бесконечномерной группы преобразований пространства* $2n$ *переменных, сохраняющих билинейную форму* $dx_1dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n}$*, можно вывести лишь интранзитивную простую бесконечномерную группу с* p *существенными инвариантами* $u_1, u_2, \ldots, u_p$*; эти инварианты определяются сравнением*

$$dx_1'dx_2' + \ldots + dx_{2n-1}'dx_{2n}' \equiv dx_1dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}dx_{2n} \pmod{du_1, \ldots, du_p}.$$

4° *Группа* g *контактных преобразований* $(n+1)$*-мерного пространства.* Структурные уравнения группы G имеют вид

$$\omega_0' = 2\omega_0\varpi_{0,0} + \omega_1\omega_2 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho\varpi_0^{(\rho)},$$

$$\omega_i' = \omega_i\varpi_{0,0} + (-1)^{i+1}\left(\varpi_0\varpi_{i',0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}\omega_\rho\varpi_{i',\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho\varpi_i^{(\rho)}\right).$$

В уравнения последовательных нормальных продолжений группы G входят формы

$$\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}, \quad \varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{(\alpha)}, \quad \ldots, \quad \varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)},$$

где нижний индекс i может принимать значения $0, 1, 2, \ldots, 2n$, а верхний индекс α — значения $1, 2, \ldots, p$.

Мы показываем, что для всякой искомой подгруппы группы G минимальная степень h определяющих соотношений не превосходит трех. Действительно, если $h \geqslant 4$, то, согласно обсуждению группы g в предыдущем разделе, соотношения степени h не могут содержать ни одной из форм $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Рассматривая в билинейном коварианте правой части такого соотношения последовательно коэффициенты при

$$\varpi_\rho^{(\alpha)}\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_{h-1},\rho'},$$

$$\varpi_\rho^{(\alpha_1)}\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_{h-2},\rho'}^{(\alpha_2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varpi_\rho^{(\alpha_1)}\omega_{i,\rho'}^{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})}$$

мы докажем, что никакой член степени h не может входить в такое соотношение.

При $h=3$ изучение весов

$$\begin{array}{ccl}
2r_0 & \text{для} & \varpi_{0,0,0}, \\
3r_0+r_i & \text{для} & \varpi_{i,0,0}, \\
2r_0+r_i+r_j & \text{для} & \varpi_{i,j,0}, \\
r_0+r_i+r_j+r_k & \text{для} & \varpi_{i,j,k}, \\
0 & \text{для} & \varpi_{0,0}^{(\alpha)}, \\
r_0+r_i & \text{для} & \varpi_{i,0}^{(\alpha)}, \\
r_i+r_j & \text{для} & \varpi_{i,j}^{(\alpha)}, \\
-2r_0 & \text{для} & \varpi_{0}^{(\alpha,\beta)}, \\
-r_i & \text{для} & \varpi_{i}^{(\alpha,\beta)}
\end{array}$$

показывает, что в каждое соотношение входят только формы одинакового веса. Так как, с другой стороны, в эти соотношения могут входить только формы $\varpi_{0,0,0}, \varpi_{i,0,0}, \varpi_{i,j,0}, \varpi_{i,j,k}$, мы видим, что, скажем, форма $\varpi_{1,1,3}$ никуда не входит. Из результатов обсуждения группы g вытекает теперь, что ни одна из форм $\varpi_{0,0,0}, \varpi_{i,0,0}, \varpi_{i,j,0}, \varpi_{i,j,k}$ не входит в искомые соотношения. Изучение коэффициентов при

$$\varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{0,0,0},\quad \varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{i,0,0},\quad \varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{i,j,0},\quad \varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{0,0}^{(\beta)},\quad \varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{i,0}^{(\beta)}$$

в билинейном коварианте первого члена такого соотношения показывает, что в это соотношение не может входить ни одна из форм третьей степени.

Предположим, наконец, что

$$h=2.$$

Из справедливости соотношения

$$\sum_{\alpha} A_0^{(\alpha)}\varpi_0^{(\alpha)}+\sum_{i,\alpha} A_i^{(\alpha)}\varpi_i^{(\alpha)}+\ldots=0,$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие форм $\varpi_{i,j}, \varpi_{i,0}, \varpi_{0,0}$, ω_i, ω_0, вытекает справедливость соотношений

$$\sum_{\alpha} A_0^{\alpha}\varpi_0^{(\alpha)}+\ldots=0,$$

$$\sum_{\alpha} A_1^{\alpha}\varpi_1^{(\alpha)}+\ldots=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{\alpha} A_i^{(\alpha)} \varpi_0^{(\alpha)} + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

$$\sum_{\alpha} A_i^{(\alpha)} \varpi_j^{(\alpha)} + \ldots = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n),$$

вытекающих из рассмотрения билинейного ковариантa.

Следовательно, можно всегда предполагать выполнение соотношения вида

$$\varpi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{i=2n} A_{i,0}\varpi_{i,0} + \sum_{i,j}^{1,2,\ldots,2n} A_{i,j}\varpi_{i,j} + \sum_{i=1}^{i=2n} B_i \omega_i;$$

мы здесь не пишем слагаемое, содержащее $\varpi_{0,0}$, так как в ковариант формы $\varpi_0^{(1)}$ входит член $2\varpi_0^{(1)}\varpi_{0,0}$. Вычислив билинейный ковариант, мы немедленно заключаем, что все коэффициенты $A_{i,0}$ и $A_{i,j}$ равны нулю и, кроме того, что все формы $\varpi_i^{(1)}$ представляются в виде линейных комбинаций форм $\varpi_{0,0}, \varpi_{i,0}, \varpi_{i,j}, \omega_0, \omega_i$. Присутствие в выражении для ковариантa формы $\varpi_i^{(1)}$ члена $\varpi_i^{(1)}\varpi_{0,0}$ показывает, что формы $\varpi_i^{(1)}$ можно считать не зависящими от $\varpi_{0,0}$. Отсюда легко вытекает, что формы $\varpi_i^{(1)}$ зависят только от формы ω.

Формы $\varpi_0^{(1)}, \varpi_1^{(1)}, \ldots, \varpi_{2n}$ зависят только от $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{2n}$, поэтому у рассматриваемой подгруппы группы G не больше $p - 1$ существенного инварианта.

Теорема XVII. *Из бесконечномерной группы контактных преобразований пространства n переменных выводится единственная интранзитивная бесконечномерная простая группа с p существенными инвариантами $u_1, \ldots, u_p$; она состоит из преобразований, сохраняющих сравнение*

$$dx_0 - x_2dx_1 - x_1dx_2 - \ldots - x_{2n}dx_{2n-1} \equiv 0 \pmod{du_1, \ldots, du_p}.$$

III. *Интранзитивные простые в несобственном смысле группы.* Нам осталось исследовать только случай, когда транзитивная группа g конечномерна и зависит от одного параметра. В этом случае группа G задается уравнениями

$$u_1' = u_1, \quad u_2' = u_2, \quad \ldots, \quad u_p' = u_p,$$
$$x' = x + f(u_1, u_2, \ldots, u_p).$$

Соответствующие простые интранзитивные группы, отличные от самой группы G, являются ее подгруппами. Функция f, помимо того, что она является произвольной функцией своих p аргументов, может также удовлетворять некоторой системе линейных уравнений с частными производными, коэффициенты которых — заданные функции инвариантов $u_1, \ldots, u_p$.

Обсуждение условий, которым должна удовлетворять подобная система уравнений с частными производными, чтобы соответствующая группа попрежнему была *простой*, выходит за рамки настоящей статьи. Заметим лишь, что у всякой такой группы есть инвариантные подгруппы (так как всякая подгруппа такой группы инвариантна). Такая группа $\mathcal{G}$ называется *простой в несобственном смысле*, если для произвольной такой инвариантной подгруппы $\mathcal{G}_1$ существует подгруппа $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$ (которая может быть и единичной подгруппой), такая что факторгруппа $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2$ голоэдрически изоморфна группе $\mathcal{G}$. При этом может оказаться, что сама группа $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$ не изоморфна голоэдрически группе $\mathcal{G}$. В этом случае естественно называть группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$ голоэдрически изоморфными *в расширенном смысле.* На самом деле эти группы полностью *эквивалентны* с точки зрения приложений к интегрированию дифференциальных систем.

Упомянем, к примеру, группу $\mathcal{G}$,

$$\begin{cases} u' = u, \\ v' = v, \\ x' = x + f(u,v), \end{cases} \tag{1}$$

где $f(u,v)$ — общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial f}{\partial v}. \tag{2}$$

Возьмем в качестве $\mathcal{G}_1$ подгруппу с двумя параметрами

$$\begin{aligned} u' &= u, \\ v' &= v, \\ x' &= x + a(u^2 + 2v) + b, \end{aligned}$$

заданную условием

$$\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Уравнения группы $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$ имеют вид

$$\begin{cases} u' = u, \\ v' = v, \\ \xi' = \xi + \varphi(u,v), \end{cases} \tag{3}$$

где мы положили

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v},$$

т.е. φ является общим решением уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{2}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}. \tag{4}$$

Как нетрудно показать, группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$ не изоморфны голоэдрически, так как уравнения (2) и (4) не сводятся друг к другу заменой переменных. Тем не менее, если рассмотреть в $\mathcal{G}_1$ подгруппу, заданную уравнением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,$$

так что ее уравнения имеют вид

$$\begin{cases} u' = u, \\ v' = v, \\ \xi' = \xi + a, \end{cases} \tag{5}$$

то уравнения группы $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} u' &= u, \\ v' &= v, \\ X' &= X + \psi(u, v), \end{aligned}$$

где

$$\psi = \frac{-1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v},$$

т. е. ψ является общим решением уравнения

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = \frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

Поэтому группа $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2$ голоэдрически изоморфна группе $\mathcal{G}$. Поэтому группы (1) и (3) голоэдрически изоморфны *в расширенном смысле*. Это означает, по существу, что общее решение каждого из уравнений (2) и (4) можно получить из решения другого уравнения *дифференцированием*.

V. Нахождение полуинволютивных линейных групп, не сохраняющих никакого плоского многообразия

Нам осталось доказать теорему III, сформулированную в начале раздела II. Предварим доказательство несколькими необходимыми замечаниями о структуре линейных однородных групп, не сохраняющих никакого плоского многообразия.

С. Ли показал, что *интегрируемая* линейная однородная группа Г сохраняет по меньшей мере одно одномерное плоское многообразие (прямую) M_1, по меньшей мере одно двумерное плоское многообразие M_2, содержащее M_1, по меньшей мере одно трехмерное плоское многообразие M_3, содержащее M_2, и т. д. Можно показать, что если (неплоское) многообразие (C) состоит из прямых, инвариантных относительно действия группы Г, то наименьшее плоское многообразие M, содержащее (C), инвариантно относительно этого действия и *то же самое справедливо и для всех прямых, лежащих в* M.

Последнее утверждение основывается на том, что всякой инвариантной прямой соответствует корень *характеристического уравнения* группы линейных преобразований и, по соображениям непрерывности, всем прямым, входящим в (C), соответствует *один и тот же корень.*

Значит, если линейная однородная группа не сохраняет никакого плоского многообразия, значит она не интегрируема. При этом она может быть или не быть *полупростой.*

Если группа Г не полупроста, то в ней содержится наибольшая инвариантная интегрируемая подгруппа γ; возьмем какую-нибудь прямую M_1, инвариантную относительно действия группы γ, и рассмотрим объединение (C) всех прямых, в которые переходит M_1 под действием группы Г. Ясно, что многообразие (C) состоит из прямых, инвариантных относительно действия группы γ. Наименьшее плоское многообразие, содержащее (C), инвариантно относительно действия группы Г; с другой стороны, оно состоит из прямых, инвариантных относительно действия группы γ. Первое утверждение может выполняться только в том случае, если это наименьшее многообразие совпадает со всем пространством. Второе свойство показывает, что γ сохраняет все прямые этого пространства. Другими словами, γ порождена единственным инфинитезимальным преобразованием

$$\mathrm{U}f = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Таким образом, группа Г раскладывается в сумму однопараметрической группы гомотетий и простой или полупростой группы, состоящей из преобразований с единичным определителем.

ТЕОРЕМА XVIII. *Если однородная линейная группа не сохраняет никакого плоского многообразия, то она*

либо проста или полупроста;

либо раскладывается в сумму простой или полупростой группы и однопараметрической группы преобразований гомотетии.

Эта теорема сводит изучение групп линейных преобразований, не сохраняющих никакого плоского многообразия, к исследованию *полупростых* групп линейных преобразований.

Напомним следующие теоремы о структуре простых и полупростых групп.

Пусть Г — простая или полупростая группа *ранга* l и размерности r. Тогда можно выбрать r независимых инфинитезимальных преобразований следующим образом:

1° l попарно коммутирующих преобразований $Y_1 f, Y_2 f, \ldots, Y_l f$;

2° $r - l = L$ преобразований $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_L f$, таких что преобразование $(Y_i X_j)$ сохраняет $X_j f$ с точностью до постоянного множителя.

Каждому преобразованию $X_i f$ можно сопоставить *вес* r_i — линейную форму от l переменных. Эти L весов r_i попарно равны по модулю и имеют противоположные знаки; каждому весу соответствует единственное преобразование Xf.

Существует набор из L^2 целых чисел $a_{i,j}$, удовлетворяющий тому свойству, что для каждой пары преобразований $X_i f$ веса r_i и $X_j f$ веса r_j имеется также преобразование $X_l f$ веса

$$r_k = r_i + a_{i,j} r_j;$$

кроме того, если a_{ij} отлично от нуля и от ±1, то для любого целого m между нулем и a_{ij} имеется преобразование веса $r_i + m r_{ij}$.

Коммутатор $(X_i X_j)$ двух преобразований равен нулю, если преобразования веса $r_i + r_j$ не существует. В противном случае он равен, с точностью до постоянного множителя, этому преобразованию. Если $r_i + r_j = 0$, то $(X_i X_j)$ представляется в виде линейной комбинации преобразований Yf.

Преобразования $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_l f$ можно выбрать так, чтобы веса r_1, $r_2, \ldots, r_l$ были линейно независимыми и, кроме того, чтобы остальные $L - l$ весов выражались через r_i в виде линейных комбинаций *с целыми коэффи-*

циентами. Если

$$r_{l+i} = m_{i,1}r_1 + m_{i,2}r_2 + \ldots + m_{i,l}r_l, \qquad (i = 1, 2, \ldots, L - l),$$

то

$$a_{l+i,j} = m_{i,1}a_{1,j} + m_{i,2}a_{2,j} + \ldots + m_{i,l}a_{i,j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, L - l; \quad j = 1, 2, \ldots, L).$$

В то же время преобразования $Y_1f, Y_2f, \ldots, Y_lf$ можно выбрать так, чтобы

$$(Y_iX_j) = a_{j,i}X_jf, \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Если группа линейных однородных преобразований действует на пространстве n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то можно считать, что координаты выбраны таким образом, что:

Каждой переменной x_α поставлен в соответствие вес ρ_α, представляющий собой линейную комбинацию с рациональными коэффициентами весов $r_1, r_2, \ldots, r_l$ преобразований $X_1f, X_2f, \ldots, X_lf$:

$$\rho_\alpha = m_{\alpha,1}r_1 + m_{\alpha,2}r_2 + \ldots + m_{\alpha,l}r_l.$$

Разным переменным могут отвечать одинаковые веса.

Если положить

$$b_{\alpha,i} = m_{\alpha,1}a_{1,i} + m_{\alpha,2}a_{2,i} + \ldots + m_{\alpha,l}a_{l,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, L),$$

то переменных веса $\rho_\alpha + b_{\alpha,i}r_i$ существует столько же, сколько и переменных веса ρ_α; кроме того, если целое число $b_{\alpha,i}$ отлично от нуля и от ± 1, то переменных веса $\rho_\alpha + mr_i$ существует *по крайней мере столько же*, сколько переменных веса ρ_α. Целое число $b_{\alpha,i}$ мы называем *относительным весом* переменной x_α по отношению к преобразованию X_if.

Производная $\delta x_\alpha/\delta t$ переменной веса ρ_α относительно инфинитезимального преобразования

$$Y_if \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

равна $b_{\alpha,i}$, а относительно преобразования

$$X_if \qquad (i = 1, 2, \ldots, L)$$

она равна нулю, если среди переменных нет переменных веса $\rho_\alpha + r_i$; в противном случае она представляет собой линейную комбинацию таких переменных. Если вес $b_{\alpha,i}$ переменной x_α относительно преобразования X_if положителен, то указанная линейная комбинация, во всяком случае, отлична от нуля.

Если группа Γ не сохраняет никакого плоского многообразия, то все веса ρ_α получаются последовательным прибавлением весов $r_1, r_2, \ldots, r_l$ к одному из них.

Мы хотим описать все *полуинволютивные* полупростые группы линейных однородных преобразований, не сохраняющие никаких плоских многообразий. Соответствующие вычисления слишком длинны и однообразны, поэтому мы не приводим их деталей, ограничиваясь указаниями, позволяющими читателю выполнить их самостоятельно.

Начнем с решения более общей задачи описания групп линейных однородных преобразований, не сохраняющих никаких плоских многообразий и таких, что *их производная группа нетривиальна*. Можно предполагать, что в этой производной группе содержится преобразование Uf, которое мы будем обозначать через Y_0f.

Производная группа действует на пространстве $n + r + 1$ переменной: примитивных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, переменных

$$y_0, y_1, \ldots, y_l,$$

которые мы сопоставляем преобразованиям

$$Y_0f,\ Y_1f,\ \ldots,\ Y_lf,$$

и переменных

$$z_1, z_2, \ldots, z_L,$$

которые мы сопоставляем преобразованиям

$$X_1f,\ X_2f,\ \ldots,\ X_Lf.$$

Если общее инфинитезимальное преобразование группы Γ записать в виде

$$e_0Y_0f + e_1Y_1f + \ldots + e_lY_lf + \eta_1X_1f + \ldots + \eta_LX_Lf,$$

то производная группа действует на пространстве $n + r + 1$ переменной: примитивных переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

$(l + 1)$-й переменной

$$y_0, y_1, \ldots, y_l, \quad \text{соответствующих} \quad e_0, e_1, \ldots, e_l,$$

и, наконец, L переменных

$$z_1, z_2, \ldots, z_L, \quad \text{соответствующих} \quad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_L.$$

Производная переменной x_α относительно общего инфинитезимального преобразования группы Γ имеет вид

$$\frac{\delta x_\alpha}{\delta t} = (e_0 + b_{\alpha,1}e_1 + \ldots + b_{\alpha,l}e_l)x_\alpha + \sum_{i=1}^{i=l} \eta_i X_{\alpha_i}, \tag{1}$$

где через X_{α_i} обозначены, в зависимости от ситуации, нуль или линейная комбинация переменных веса $\rho_\alpha + r_i$.

Легко видеть, что в производной группе Γ_1 по крайней мере одна из производных

$$\frac{\delta z_1}{\delta t}, \ldots, \frac{\delta z_L}{\delta t}$$

отлична от нуля. Действительно, если все эти производные были бы равны нулю, то, как вытекает из (1), выражение

$$\frac{\delta y_0}{\delta t} + b_{\alpha,1}\frac{\delta y_1}{\delta t} + \ldots + b_{\alpha,l}\frac{\delta y_l}{\delta t},$$

зависело бы только от x_α. Придавая α последовательно значения $1, 2, \ldots, n$, мы получили бы по меньшей мере $l+1$ линейно независимую линейную комбинацию производных

$$\frac{\delta y_0}{\delta t}, \frac{\delta y_1}{\delta t}, \ldots, \frac{\delta y_l}{\delta t};$$

однако, если число n переменных x превышает $l+1$, то все эти производные должны равняться нулю. То есть, как подтверждается вычислениями, если все производные $\frac{\delta z_i}{\delta t}$ равны нулю, то среди весов ρ_α есть по крайней мере $l+2$ различных.

Таким образом, достаточно выразить отличие от нуля одной из производных $\frac{\delta z_i}{\delta t}$.

Здесь нам понадобятся следующие замечания.

Предположим, что производная $\frac{\delta z_i}{\delta t}$ относительно группы Γ_1 отлична от нуля и что имеется два различных веса ρ_α, ρ_β, таких что среди переменных x есть переменные как веса $\rho_\alpha + r_i$, так и веса $\rho_\beta + r_i$.

Тогда равенство (1) показывает, что $\frac{\delta z_i}{\delta t}$ зависит только от переменных веса

$$\rho_\alpha,\ \rho_\alpha + r_1,\ \rho_\alpha + r_2,\ \ldots,\ \rho_\alpha + r_L;$$

а также, что $\frac{\delta z_i}{\delta t}$ зависит только от переменных веса

$$\rho_\beta,\ \rho_\beta + r_1,\ \rho_\beta + r_2,\ \ldots,\ \rho_\beta + r_L.$$

Поэтому в этих наборах должны существовать по крайней мере два одинаковых веса, скажем,

$$\rho_\alpha + r_j = \rho_\beta + r_k \qquad (j, k = 0, 1, 2, \ldots, L)$$

(удобно положить $r_0 = 0$).

Другими словами, разность $\rho_\alpha - \rho_\beta$ равна разности какой-то пары весов $r_0 = 0, r_1, r_2, \ldots, r_L$.

ТЕОРЕМА. *Если приращение* $\frac{\delta z_i}{\delta t}$ *переменной* z_i *относительно производной группы* Γ_1 *отлична от нуля и при этом существуют два различных веса* ρ_α *и* ρ_β, *такие что среди переменных* x *есть переменные как веса* $\rho_\alpha + r_i$, *так и веса* $\rho_\beta + r_i$, *то разность* $\rho_\alpha - \rho_\beta$ *представима в виде разности пары весов* $r_0 = 0, r_1, r_2, \ldots, r_L$. *Если* $\rho_\alpha - \rho_\beta$ *можно представить в виде разности весов* p *различными способами,*

$$\rho_\alpha - \rho_\beta = r_{k_1} - r_{j_1} = r_{k_2} - r_{j_2} = \ldots = r_{k_p} - r_{j_p},$$

то производная $\frac{\delta z_i}{\delta t}$ *зависит лишь от переменных* x *веса*

$$\rho_\beta + r_{k_1},\ \rho_\beta + r_{k_2},\ \rho_\beta + r_{k_p}.$$

Эта теорема позволяет для каждой простой или полупростой группы построить все возможные системы весов, соответствующие переменным, на которых действуют искомые линейные группы. Некоторые наборы весов, допускаемые данной теоремой, могут быть исключены, если производная группа Γ_1 тривиальна.

Перейдем к обзору всех классов простых и полупростых групп и укажем для каждого из них соответствующие группы Γ (которые все содержат преобразование Uf).

Простые группы разбиваются на шесть классов, обозначаемых буквами A, B, C, D, E, F, G.

Простые группы класса A. Для групп этого класса можно, изменив несколько обозначения, записать веса преобразований $X_i f$ в виде

$$r_i - r_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l + 1).$$

Вес ρ_α переменной x_α представляется в виде

$$\rho_\alpha = m_{\alpha,1} r_1 + m_{\alpha,2} r_2 + \ldots + m_{\alpha,l+1} r_{l+1},$$

где $m_{\alpha,i}$ — рациональные числа, связанные соотношением

$$m_{\alpha,1} + m_{\alpha,2} + \ldots + m_{\alpha,l+1} = 0.$$

В этом классе существует четыре группы линейных однородных преобразований, не сохраняющих никакого плоского многообразия, и таких, что их производная группа нетривиальна.

1° Группа, отвечающая системе весов

$$\frac{1}{l+1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l+1} r_\lambda - r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l+1);$$

это группа общих линейных однородных преобразований пространства $(l+1)$-й переменной; она инволютивна.

2° Группа, отвечающая системе весов

$$\frac{2}{l+1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l+1} r_\lambda - 2r_i, \quad \frac{2}{l+1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l+1} r_\lambda - r_i - r_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l+1) \quad (l \geqslant 2);$$

эта группа описывает поведение коэффициентов квадратичной формы

$$x_{11}t_1^2 + \ldots + x_{l+1,l+1}t_{l+1}^2 + 2x_{1,2}t_1t_2 + \ldots + 2x_{l,l+1}t_lt_{l+1}$$

при действии на переменных $t_1, \ldots, t_{l+1}$ группы общих линейных однородных преобразований. Имеем

$$\frac{\delta x_{i,j}}{\delta t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=l+1} (e_{i,\rho}x_{j,\rho} + e_{j,\rho}x_{i,\rho}).$$

Производная группа задается формулами

$$\frac{\delta z_{ij}}{\delta t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=l+1} a_{j,\rho}x_{i,\rho} \qquad (a_{i,j} = a_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, l+1),$$

а вторая производная группа тривиальна.

3° Группа, отвечающая системе весов

$$\frac{2}{l+1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l+1} r_\lambda - r_i - r_j \qquad (l \geqslant 3);$$

эта группа описывает поведение коэффициентов

$$x_{i,j} = -x_{j,i}$$

билинейной альтернированной формы

$$x_{1,2}(t_1 dt_2 - t_2 dt_1) + x_{1,3}(t_1 dt_3 - t_3 dt_1) + \ldots + x_{l,l+1}(t_l dt_{l+1} - t_{l+1} dt_l)$$

при действии на переменных t группы общих линейных однородных преобразований. Эта группа задается формулами

$$\frac{\delta x_{ij}}{\delta t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=l+1} (e_{i,\rho} x_{\rho,j} + e_{j,\rho} x_{i,\rho}) \qquad (i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots l+1).$$

Производная группа задается формулами

$$\frac{\delta z_{ij}}{\delta t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=l+1} a_{j,\rho} x_{i,\rho} \qquad (a_{i,i} = 0, \quad a_{i,j} = -a_{j,i}, \quad i, j, = 1, 2, \ldots, l+1),$$

а вторая производная группа Γ_2 тривиальна.

4° Группа, отвечающая системе весов

$$0, \; r_i - r_j;$$

эта группа описывает поведение параметров общего инфинитезимального преобразования простой группы G класса A при действии на них самой группы G (*присоединенная линейная группа* в смысле С. Ли). Ее производная группа Γ_1 тривиальна при $l \geqslant 2$, а при $l = 1$ задается формулами

$$\begin{aligned}
\frac{\delta z_0}{\delta t} &= a x_1 + 2b x_2 + c x_3, \\
\frac{\delta z_1}{\delta t} &= \frac{1}{2} a x_1 - \frac{1}{2} c x_3, \\
\frac{\delta z_2}{\delta t} &= a x_1 + b x_3, \\
\frac{\delta z_3}{\delta t} &= b x_1 + c x_2.
\end{aligned}$$

Вторая производная группа Γ_2 тривиальна.

Простые группы класса B. В этом случае веса преобразований Xf_i можно представить в следующем виде:

$$r_i, \; r_i + r_j \qquad (i^2 \neq j^2, \quad i, j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l) \quad (l \geqslant 3)$$

с условием

$$r_i + r_{-i} = r_i + r_{i'} = 0 \qquad (i' = -i).$$

Класс состоит из единственной группы Г, отвечающей системе весов

$$0,\ r_i \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l);$$

это группа линейных однородных преобразований, сохраняющих уравнение

$$x_0^2 + 2x_1x_{1'} + 2x_2x_{2'} + \ldots + 2x_lx_{l'} = 0.$$

Она задается формулами

$$\frac{\delta x_0}{\delta t} = e_0x_0 - \sum_{\rho}^{\pm 1,\ldots,\pm l} e_{\rho,0}x_{\rho'},$$

$$\frac{\delta x_i}{\delta t} = e_0x_i + \sum_{\rho}^{0,\pm 1,\ldots,\pm l} e_{i,\rho}x_{\rho'} \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l),$$

в которых параметрами служат

$$e_0 \quad \text{и} \quad e_{i,j} = -e_{j,i}.$$

Производная группа Γ_1 задается формулами

$$\frac{\delta z_0}{\delta t} = a_0x_0 + a_1x_1 + a_{1'}x_{1'} + \ldots + a_{l'}x_{l'},$$

$$\frac{\delta z_{i,j}}{\delta t} = a_jx_i - a_{i'}x_j.$$

Вторая производная группа Γ_2 тривиальна.

Простые группы класса C. Здесь веса преобразований X_if можно представить в виде

$$r_i,\ \frac{1}{2}(r_i + r_j) \qquad (i^2 \neq j^2,\ i, j = 1, 2, \ldots, l) \quad (l \geqslant 2)$$

с условием

$$r_i + r_{-i} = r_i + r_{i'} = 0 \qquad (i' = -i).$$

В этом классе имеется единственная группа Г, отвечающая системе весов

$$\frac{1}{2}r_i \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l);$$

она полуинволютивна и состоит из линейных однородных преобразований, сохраняющих уравнение

$$x_1 dx_{1'} - x_{1'} dx_1 + x_2 dx_{2'} - x_{2'} dx_2 + \ldots + x_l dx_{l'} - x_{l'} dx_l = 0.$$

Простые группы класса D. В этом случае веса преобразований Xf_i можно представить в виде

$$r_i + r_j \qquad (i^2 \neq j^2, \quad i, j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l)$$

с условием

$$r_i + r_{-i} = r_i + r_{i'} = 0 \qquad (i' = -i).$$

Системе весов

$$r_i \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l)$$

соответствует единственная группа Γ; это группа линейных однородных преобразований, сохраняющих уравнение

$$x_1 x_{1'} + x_2 x_{2'} + \ldots + x_l x_{l'} = 0.$$

Она задается формулами

$$\frac{\delta x_i}{\delta t} = e_0 x_i - \sum_{\rho}^{\pm 1, \ldots, \pm l} e_{i,\rho} x_{\rho'} \qquad (i = \pm 1, \ldots, \pm l),$$

параметрами в которых служат

$$e_0 \quad \text{и} \quad e_{i,j} = -e_{j,i}.$$

Производная группа Γ_1 задается формулами

$$\frac{\delta z_0}{\delta t} = a_1 x_1 + a_{1'} x_{1'} + \cdots + a_{l'} x_{l'},$$
$$\frac{\delta z_{i,j}}{\delta t} = a_{j'} x_i - a_{i'} x_j.$$

Вторая производная группа Γ_2 тривиальна.

Простые группы классов E, F, G. Таких групп не существует.

Полупростые группы. Для существования группы Г необходимо, чтобы полупростая группа раскладывалась в сумму двух простых групп типа A. В этом случае мы получаем группу Г, описывающую действие на пространстве коэффициентов $x_{i,j}$ билинейной формы

$$\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} x_{i,j}u_i v_j = 0,$$

индуцированное действием на переменных u и v пары произвольных независимых линейных преобразований. Группа Г задается уравнениями

$$\frac{\delta x_{i,j}}{\delta t} = e_0 x_{i,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} x_{\rho,i}x_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \eta_{\rho,j}x_{i,\rho}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n),$$

параметрами в которых служат $e_0, e_{i,j}, \eta_{i,j}$. Параметры связаны между собой соотношениями

$$e_{1,1} + e_{2,2} + \ldots + e_{m,m} = \eta_{1,1} + \eta_{2,2} + \ldots + \eta_{n,n} = 0.$$

Производная группа Γ_1 задается уравнениями

$$\frac{\delta z_0}{\delta t} = \frac{m+n}{mn}\sum_{\rho=1}^{\rho=m}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\rho,\sigma}x_{\rho,\sigma},$$

$$\frac{\delta z_{ij}}{\delta t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{i,\rho}x_{j,\rho} - \frac{\varepsilon_{ij}}{n}\sum_{\rho=1}^{\rho=m}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\rho,\sigma}x_{\rho,\sigma} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\frac{\delta \zeta_{i,j}}{\delta t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=m} a_{\rho,i}x_{\rho,j} - \frac{\varepsilon_{kl}}{m}\sum_{\rho=1}^{\rho=m}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\rho,\sigma}x_{\rho,\sigma} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

в которых параметрами служат mn величин $a_{\rho,\sigma}$, а $\varepsilon_{i,j}$ равно нулю, если i и j различны, и равно единице в противном случае.

Вторая производная группа Γ_2 тривиальна.

Из приведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА XIX. *Полуинволютивные линейные однородные группы, не сохраняющие никакого плоского многообразия, делятся на четыре класса:*

1° *Общая группа линейных однородных преобразований пространства n переменных.*

2° *Специальная группа линейных однородных преобразований пространства n переменных.*

3° *Группа линейных однородных преобразований пространства* $2n \geqslant 4$ *переменных, сохраняющих уравнение*

$$x_1dx_2 - x_2dx_1 + x_3dx_4 - x_4dx_3 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0.$$

4° *Группа линейных однородных преобразований пространства* $2n \geqslant 4$ *переменных, сохраняющих выражение*

$$x_1dx_2 - x_2dx_1 + x_3dx_4 - x_4dx_3 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1}.$$

Помимо описанных четырех классов существуют еще четыре класса линейных однородных групп, не сохраняющих никаких плоских многообразий и таких что их производная группа нетривиальна.

α. *Группа линейных однородных преобразований пространства* $n(n+1)/2 \geqslant 6$ *переменных, описывающая поведение коэффициентов уравнения конуса в пространстве* $n \geqslant 3$ *измерений при действии группы линейных преобразований на координатном пространстве конуса.*

β. *Группа линейных однородных преобразований пространства* $n(n+1)/2 \geqslant 10$ *переменных, описывающая поведение коэффициентов однородного уравнения линейного подпространства в пространстве* $n-1 \geqslant 4$ *измерений при действии группы линейных преобразований на однородных координатах.*

γ. *Группа линейных однородных преобразований пространства* $n \geqslant 3$ *переменных, сохраняющих невырожденный конус в этом пространстве.*

δ. *Группа линейных однородных преобразований пространства* $mn \geqslant 6$ *переменных, описывающая поведение коэффициентов билинейного уравнения*

$$\sum x_{i,j}u_iv_j = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

при действии в пространствах переменных u *и* v *произвольных независимых линейных преобразований.*

Каждая из этих четырех групп содержит инфинитезимальное преобразование

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Наконец, из предыдущей теоремы нетрудно вывести следующее утверждение.

Теорема XX. *Пусть конечномерная группа* G *действует на пространстве* n *переменных. Предположим, что индуцированное этим действием* *действие r-мерной группы линейных преобразований Γ в пространстве линейных элементов, приложенных в произвольной точке, не сохраняет никаких плоских многообразий. Тогда либо размерность группы G равна $n+r$, либо Γ принадлежит к одному из описанных в предыдущей теореме классов.*

Если группа Γ принадлежит классу α и действует на пространстве $n(n+1)/2$ переменных, то группа G проста, $n(2n+1)$-мерна и принадлежит классу C. *Ее структурные уравнения имеют вид*

$$\omega'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{\rho,j}\varpi_{i,\rho} + \omega_{i,\rho}\varpi_{j,\rho}) \qquad (\omega_{i,j} = \omega_{j,i}),$$

$$\varpi'_{i,j} = -\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varpi_{i,\rho}\varpi_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_{i,\rho}\chi_{j,\rho},$$

$$\chi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{\rho,i}\chi_{\rho,j} + \varpi_{\rho,j}\chi_{i,\rho}) \qquad (\chi_{i,j} = \chi_{j,i}).$$

Если группа Γ принадлежит классу β и действует на пространстве $n(n-1)/2$ переменных, то группа G проста, $n(2n-1)$-мерна и принадлежит классу D. *Ее структурные уравнения имеют вид*

$$\omega'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{\rho,j}\varpi_{i,\rho} + \omega_{i,\rho}\varpi_{j,\rho}) \qquad (\omega_{i,i} = 0, \quad \omega_{i,j} = -\omega_{j,i}),$$

$$\varpi'_{i,j} = -\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varpi_{i,\rho}\varpi_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_{i,\rho}\chi_{j,\rho},$$

$$\chi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{\rho,i}\chi_{\rho,j} + \varpi_{\rho,j}\chi_{i,\rho}) \qquad (\chi_{i,i} = 0, \quad \chi_{i,j} = -\chi_{j,i}).$$

Если группа Γ принадлежит классу γ и действует на пространстве n переменных, то группа G (конформная группа) проста, $(n+1)(n+2)/2$-мерна и принадлежит классу B *или* D *в зависимости от четности n (или классу* A *при $n=4$). Ее структурные уравнения имеют вид*

$$\omega'_i = \omega_i \varpi_0 + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_\rho \varpi_{i,\rho},$$

$$\varpi'_0 = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_\rho \chi_\rho,$$

$$\varpi'_{i,j} = \omega_i \chi_j - \omega_j \chi_i + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varpi_{i,\rho} \varpi_{j,\rho} \qquad (\varpi_{i,i} = 0,\ \varpi_{i,j} = -\varpi_{j,i}),$$

$$\chi'_i = \varpi_0 \chi_i + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varpi_{\rho,i} \chi_\rho.$$

Если группа Γ *принадлежит классу* δ *и действует на пространстве* mn *переменных, то группа* G *проста,* $((m+n)^2-1)$*-мерна и принадлежит классу* A. *Ее структурные уравнения имеют вид*

$$\omega'_{i,j} = \omega_{i,j} \varpi_0 + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \omega_{\rho,j} \varpi_{\rho,i} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_{i,\rho} \overline{\varpi}_{\rho,j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\varpi'_0 = \frac{m+n}{mn} \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \omega_{\rho,\sigma} \chi_{\rho,\sigma},$$

$$\varpi'_{i,j} = -\sum_{\rho=1}^{\rho=m} \varpi_{i,\rho} \varpi_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_{j,\rho} \chi_{i,\rho} - \frac{\varepsilon_{i,j}}{n} \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \omega_{\rho,\sigma} \chi_{\rho,\sigma} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\overline{\varpi}'_{i,j} = -\sum_{\rho=1}^{\rho=m} \overline{\varpi}_{i,\rho} \overline{\varpi}_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \omega_{\rho,j} \chi_{\rho,i} - \frac{\varepsilon_{i,j}}{m} \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \omega_{\rho,\sigma} \chi_{\rho,\sigma} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\chi'_{i,j} = \varpi_0 \chi_{i,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \varpi_{i,\rho} \chi_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \overline{\varpi}_{j,\rho} \chi_{i,\rho} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(\varpi_{1,1} + \varpi_{2,2} + \ldots + \varpi_{m,m} = \overline{\varpi}_{1,1} + \overline{\varpi}_{2,2} + \ldots + \overline{\varpi}_{n,n} = 0).$$

СТРУКТУРА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП

(*Seminaire de Mathématiques*, 4-e année, 1936 – 1937)

В этом и следующем докладах я предполагаю изложить основные идеи теории непрерывных групп, как конечномерных, так и бесконечномерных, которую я развил в двух статьях в *Annales de l'École Normale* (1904–1905 и 1908). Речь идет о группах, которые рассматривал С. Ли, т. е. о группах аналитических преобразований конечномерного пространства, таких, что общий элемент группы удовлетворяет системе уравнений в частных производных, задающих преобразованные переменные в виде функций от первоначальных переменных. Конечные и непрерывные группы Ли входят в этот общий класс, так как всякая система функций от n переменных и некоторого числа произвольных постоянных представляет собой общее решение некоторой вполне интегрируемой системы. Но группа, указанная самим Ли,

$$x' = f(x), \qquad y' = f(y),$$

где $f(x)$ — произвольная аналитическая функция своего аргумента, *не является* группой Ли в описанном выше смысле. Впрочем, в действительности в приложениях теории групп к дифференциальным системам группы, не являющиеся группами Ли, никогда не встречаются.

Обобщение на бесконечномерные группы структурной теории конечномерных групп, принадлежащей Ли и основанной на рассмотрении инфинитезимальных преобразований, оказывается очень трудным (если вообще возможным), несмотря на работы Ли, Энгеля, Медалаги и т. д., посвященные этому вопросу. То, что сейчас будет изложено, основано на совершенно другом принципе: исходной точкой теории являются определяющие уравнения группы, взятые в подходящей форме; эта теория использует теорию проблем эквивалентности, изложенную в предыдущем докладе¹), и теорию систем в инволюции.

Доклад сделан Э. Картаном в понедельник 1-го марта 1937 г.

¹) *Seminaire de Mathématiques*, 4-e année, 1936 – 1937. Les problèmes d'équivalence, доклад Э. Картана 11 января 1937 г. (См. также стр. 144 – 164 настоящего издания — *Прим. ред.*)

Понятие *абстрактной группы* здесь не сохраняется в той чистоте, как в случае конечномерных групп. Это связано с тем, что простое аналитическое определение понятия изоморфизма найти трудно. Весьма примечательно, что Вессио, в своих прекрасных работах по автоморфным функциям, и я одновременно пришли к одному и тому же новому определению гомоморфизма групп Ли, которое к тому же эквивалентно классическому определению в случае конечномерных групп. Это определение основывается на понятии *продолжения* группы. Пусть группа G преобразует n переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Тогда группа G' называется продолжением группы G, если она преобразует те же переменные $x^1, x^2, \ldots, x^n$, но одновременно еще и другие переменные $y^1, y^2, \ldots, y^n$, таким образом, что отдельно взятые переменные x она преобразует таким же образом, как и группа G. Итак, одному преобразованию из группы G соответствует по крайней мере одно преобразование из группы G'. Если оно единственно, то продолжение называется *голоэдрическим*; в этом случае имеет место взаимно-однозначное соответствие между преобразованиями обеих групп. В противном случае продолжение называется *мериэдрическим*. Ясно, что в первом случае имеется голоэдрический изоморфизм между группами G и G' в классическом смысле слова; во втором случае G изоморфна G' мериэдрически. Далее группы G_1 и G_2 называются *изоморфными* (*голоэдрически*), если они допускают два подобных голоэдрических продолжения (т. е. два продолжения с одним и тем же числом переменных, сводящиеся друг к другу заменой переменных); если существует голоэдрическое продолжение группы G_1, подобное мериэдрическому продолжению группы G_2, то будем говорить, что G_2 *мериэдрически изоморфна* G_1. Нетрудно показать, что две группы, голоэдрически изоморфные третьей, изоморфны между собой, и что если G_1 голоэдрически изоморфна G_2 и G_2 мериэдрически изоморфна G_3, то G_1 мериэдрически изоморфна G_3.

Основная теорема

Следующая теорема лежит в основе теории групп Ли.

Всякая группа Ли допускает голоэдрическое продолжение, преобразующее некоторое число r переменных x^i и определяющееся как совокупность преобразований, оставляющих инвариантными:

1° *некоторое число функций от x;*

2° *r форм Пфаффа $\omega^i(x, y, dx)$, линейно независимых относительно дифференциалов dx^i, коэффициенты которых могут зависеть от некоторых вспомогательных переменных y^r.*

Это продолжение задается уравнениями первого порядка.

Сделанные предположения о продолжении группы показывают, что она является группой Ли; мы увидим, что ее всегда можно рассматривать как заданную системой уравнений в частных производных первого порядка.

Перейдем к доказательству. По определению, данная группа, будучи группой Ли, образована множеством решений системы уравнений в частных производных (определяющих уравнений), которые можно считать находящимися в инволюции. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — исходные переменные, $X^1, X^2, \ldots, X^n$ — преобразованные переменные. Определяющие уравнения могут содержать некоторое число $n - \nu$ алгебраических соотношений между x и X; эти соотношения можно считать разрешенными относительно $X^{\nu+1}, X^{\nu+2}, \ldots, X^n$:

$$X^{\nu+k} = F^k(x^1, \ldots, x^n; X^1, \ldots, X^\nu) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - \nu). \tag{1}$$

Теперь мы имеем уравнения в частных производных первого порядка, которые можно переписать в форме системы Пфаффа:

$$dX^i = \omega^i(x, X, u, dx) = a^i_k(x, X, u)\, dx^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{2}$$

где коэффициенты a^i_k — аналитические функции от $x^1, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^\nu$ и еще p_1 переменных u, причем уравнения первого порядка могут быть разрешены относительно $n\nu - p_1$ из них в виде функций от некоторых p_1 из переменных x и X. Если полученная после этого система содержит уравнения второго порядка, то их можно записать в виде

$$du^h = b^h_k(x, X, u, v)\, dx^k \qquad (h = 1, 2, \ldots, p_1), \tag{3}$$

введя p_2 новых переменных v и т. д. Таким образом, мы получаем последовательность систем (1), (2), (3), …; если группа G конечномерная, то последняя система уравнений не введет никаких новых переменных.

Прежде всего заметим, что уравнения (1) можно упростить. Действительно, применим к переменным x фиксированное преобразование из группы; пусть $\overline{x}$ — преобразованные переменные. Очевидно, что от $\overline{x}$ к X можно перейти преобразованием из группы и, следовательно,

$$F^k(x^1, \ldots, x^n; X^1, \ldots, X^\nu) = F^k(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n; X^1, \ldots, X^\nu) \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{4}$$

Эти соотношения станут тождествами относительно $x^1, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^\nu$, если подставить в них вместо переменных $\overline{x}$ их значения. Действительно, в противном случае найдется по крайней мере одно нетождественное соотношение

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n; X^1, \ldots, X^\nu) = 0.$$

Но всегда существует преобразование группы, переводящее произвольные данные значения переменных x в произвольные данные значения X^1, $X^2, \dots, X^\nu$, что приводит к противоречию. Добавим еще, что функции $F^k(x, X)$, рассматриваемые как функции от x, независимы; действительно, в противном случае из уравнений (1) можно было бы вывести по крайней мере одно нетождественное соотношение между $X^1, \dots, X^\nu, X^{\nu+1}, \dots, X^n$, что невозможно.

Из этих замечаний следует, что при достаточно общих фиксированных числовых значениях X_0 соотношения (4) показывают, что ν функций $F^k(x^1, \dots, x^n; X_0^1, \dots, X_0^\nu)$ являются инвариантами группы в количестве $n-\nu$. Можно считать, что переменные выбраны таким образом, чтобы инвариантами были $x^{\nu+1}, \dots, x^n$, так что уравнения (1) принимают вид

$$X^{\nu+k} = x^{\nu+k} \qquad (k = 1, 2, \dots, n-\nu). \tag{1'}$$

После этих предварительных действий, в системе (1), (2), (3), ... сделаем замену независимых переменных, определенную некоторым фиксированным преобразованием S группы G:

$$\overline{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \qquad (\varphi^{\nu+1} \equiv x^{\nu+1},\ \dots,\ \varphi^n \equiv x^n). \tag{5}$$

Система (1), (2), (3), ... обязательно сохранит тот же вид и относительно этих новых независимых переменных, поскольку, если рассмотреть какое-нибудь преобразование T группы, переводящее x в X, то преобразование TS^{-1} будет переводить $\overline{x}$ в X; в новые уравнения войдут замененные частные производные $(u, v, \dots)$. Очевидно, из уравнений (2) следуют соотношения

$$a_k^i(\overline{x}, X, \overline{u}) \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^h} = a_h^i(x, X, u). \tag{6}$$

Эти соотношения можно рассматривать как уравнения на $\overline{u}^1, \dots, \overline{u}^{p_1}$ (надо заменить $\overline{x}$ и $\partial\overline{x}^k/\partial x^h$ их значениями $\varphi^k(x)$ и $\partial\varphi^k/\partial x^h$). Рассмотрим в этих уравнениях x, X и u как *независимые* переменные. Легко видеть, что эти $n\nu$ уравнений с p_1 неизвестными $\overline{u}$ совместны. Действительно, в противном случае существует по крайней мере одно нетождественное соотношение

$$\psi(x, X, u) = 0;$$

это соотношение выполняется при любых данных значениях аргументов $x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^\nu, u^1, \dots, u^{p_1}$. Но это невозможно: в группе G всегда существует по крайней мере одно решение системы (1), (2), (3), ..., соответствующее произвольным начальным значениям этих $n + \nu + p_1$ величин.

Следовательно, уравнения (6) разрешимы относительно $\overline{u}$:

$$\overline{u}^k = \psi^k(x, X, u). \tag{7}$$

Можно продолжить рассуждения, переходя от уравнений (2) к уравнениям (3), что приведет к

$$\overline{v}^h = \chi^h(x, X, u, v), \tag{8}$$

и т. д. Таким образом, к уравнениям (5) добавляются уравнения (7) и (8). Наконец, можно также присоединить соотношения

$$\overline{X}^i = X^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{9}$$

Итак, всякое преобразование S *группы* G *может быть продолжено единственным способом до преобразования* Σ, *преобразующего переменные* $x, X, u, v, \ldots$. *По построению, это продолженное преобразование обладает следующими свойствами*:

1° *оно оставляет инвариантными переменные* $x^{\nu+1}, \ldots, x^n, X^1, X^2, \ldots$ $\ldots, X^\nu$;

2° *оно оставляет инвариантной систему* (2), (3), ... *определяющих уравнений группы* G.

Обратно, рассмотрим преобразование Σ, обладающее предыдущими свойствами. Инвариантность dX^i, с одной стороны, и системы (2), (3), ..., с другой стороны, показывает, что преобразование Σ оставляет инвариантными формы $\omega^i = a^i_k(x, X, u)\, dx^k$. Далее, всякий дифференциал $d\overline{x}^i$ есть линейная комбинация дифференциалов dx^k, поэтому преобразованные переменные $\overline{x}^i$ зависят только от $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Следовательно, преобразование Σ определяет некоторое преобразование S переменных x. *Это преобразование принадлежит группе* G. Действительно, так как преобразование Σ сохраняет определяющие уравнения группы G, всякое преобразование T $(x \to X)$ из группы G переходит в другое преобразование $\overline{T}$ $(\overline{x} \to X)$ из группы G; следовательно, преобразование S, будучи равным $\overline{T}^{-1}T$, принадлежит группе G. Ясно, что преобразование Σ получается из преобразования S продолжением, построенным выше.

Итак, группу G *можно голоэдрически продолжить до группы* Γ, *преобразующей переменные* $x, X, u, v, \ldots$, *и определенной перечисленными выше свойствами инвариантности.*

Остается доказать, что Γ — группа Ли и что ее определяющие уравнения являются уравнениями первого порядка. Первое свойство вытекает из теории проблем эквивалентности. Оно очевидно, если определяющие уравнения группы G имеют первый порядок, поскольку Γ — это совокупность преобразований, оставляющих инвариантными переменные $x^{\nu+1}, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^\nu$ и ν форм $\omega^i(x, X, u, dx)$, к которым можно также добавить $n - \nu$ форм $\omega^{\nu+k} = dx^{\nu+k}$.

Проведем доказательство для случая, когда определяющие уравнения имеют второй порядок, и образованы, следовательно, из уравнений (1), (2) и (3). Так как группа Γ сохраняет формы ω^i, она сохраняет и их внешние дифференциалы[1] $d\omega^i$. Так как каждый член формы $\omega^i = a^i_k(x, X, u)\, dx^k$ содержит дифференциал dx^k, форму $d\omega^i$ можно записать в виде

$$d\omega^i = \omega^k \varpi^i_k,$$

где формы ϖ^i_k линейны относительно dx^i, dX^i и du^k; впрочем, эти формы ϖ^i_k определяются только с точностью до линейных комбинаций форм ω^k; для каждого значения i коэффициенты линейных комбинаций форм ω^k, которые можно прибавить к ϖ^i_k, образуют симметрическую матрицу. Во всяком случае, для любого преобразования Σ из группы Γ имеем

$$\omega^i(\overline{x}, \overline{X}, \overline{u}, d\overline{x}^k) = \omega^i(x, X, u, dx^k),$$

откуда

$$\omega^k \left[\varpi^i_k(\overline{x}, \overline{X}, \overline{u}; d\overline{x}, d\overline{X}, d\overline{u}) - \varpi^i_k(x, X, u; dx, dX, du)\right] = 0;$$

следовательно, для каждой пары индексов i, k

$$\varpi^i_k(\overline{x}, \overline{X}, \overline{u}; d\overline{x}, d\overline{X}, d\overline{u}) \equiv \varpi^i_k(x, X, u; dx, dX, du) \pmod{dx^h}.$$

Ясно, что p_1 из форм ϖ^i_k линейно независимы относительно du^h. Выберем эти p_1 форм; каждая из них может быть записана в виде

$$c_h du^h + \gamma_k dX^k \pmod{\omega^i},$$

где c_h, γ_k — функции от x, X, u, или, с учетом уравнений (2) и (3), в виде

$$c_h(du^h - b^h_l(x, X, u, v)\, dx^l) + \gamma_k(dX^k - \omega^k) \pmod{\omega^i}.$$

Аналогичная форма, выраженная через переменные $\overline{x}, \overline{X}, \overline{u}, \overline{v}$, должна равняться этой предыдущей форме по модулю dx^k, но так как группа Γ оставляет инвариантными уравнения (2) и (3) и обе рассматриваемые формы являются линейными комбинациями левых частей этих уравнений, то обе формы

---

[1] В этой статье, опубликованной в 1937 г., автор уже пользуется современным термином и обозначением для внешнего дифференциала. — *Прим. ред.*

будут не только *сравнимы* по модулю dx^k, но и *равны*. Обозначим через ϖ^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, p_1)$ p_1 форм, полученных таким образом. Ясно, что *группа* Γ *сохраняет не только переменные* $x^{\nu+1}, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^\nu$, *но также* $n + p_1$ *форм Пфаффа* ω^i, ϖ^α, *линейно независимых относительно дифференциалов переменных* x, X, u, *коэффициенты которых зависят от вспомогательных переменных* v, что и требовалось доказать.

Если определяющие уравнения группы G — третьего порядка, то рассуждения продолжаются таким же образом, и т. д. В результате основная теорема приобретает самую общую формулировку: *Всякая группа Ли допускает голоэдрическое продолжение* Γ, *определяющееся как совокупность преобразований, оставляющих инвариантными некоторое число переменных и столько же форм Пфаффа, линейно независимых относительно дифференциалов этих переменных.*

Добавим одно очень простое, но важное замечание. Группа G преобразует переменные $x^1, \ldots, x^n$ так же, как группа Γ; так как группа Γ сохраняет переменные $X^1, \ldots, X^\nu$, то мы не изменим способ, по которому Γ преобразует $x^1, \ldots, x^n$, если зафиксируем числовые значения всех X^i. *Следовательно, можно считать, что формы* ω^i *и* ϖ^α, *инвариантные относительно группы* Γ, *не содержат ни* X^i, *ни* dX^i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Таким образом, переменные u, добавленные к переменным x для того, чтобы образовать переменные, преобразуемые группой Γ, есть не что иное, как значения, которые принимают в фиксированной точке (X_0) частные производные функций $X = X(x)$, задающих преобразования группы, переводящие (x) в (X_0): совокупность переменных (x, u) образует аналог *репера* в теории конечномерных групп.

Структурные уравнения и вторая основная теорема

Займемся опять случаем, когда группа G определяется уравнениями второго порядка в инволюции. Мы продолжили голоэдрически группу G до группы преобразований переменных x, u, сохраняющей $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$ и $n + p_1$ форм ω^i, ϖ^α.

Уравнения

$$\overline{x}^{\nu+1} = x^{\nu+1}, \quad \ldots, \quad \overline{x}^n = x^n,$$
$$\varpi^i = \omega^i, \qquad \overline{\varpi}^\alpha = \varpi^\alpha$$

являются, в некотором смысле, определяющими уравнениями группы G, но записанными так, что *они симметричны относительно исходных и преобразованных переменных.* Следовательно, эти уравнения образуют систему в инволюции. Их можно также рассматривать как определяющие уравнения группы Г преобразований переменных x и u; с этой точки зрения, мы видим, что определяющие уравнения группы Г имеют первый порядок. Назовем *нормальной* группу Ли с определяющими уравнениями первого порядка; таким образом, всякая группа Ли допускает нормальное голоэдрическое продолжение. Если группа Ли — конечномерная, то нормальное голоэдрическое продолжение будет преобразовывать $r+h$ переменных, где r — число параметров группы и h — число ее инвариантов; следовательно, если группа с r параметрами транзитивна, то ее нормальное голоэдрическое продолжение подобно просто транзитивной группе параметров.

Рассмотрим теперь нормальную группу G, действующую в пространстве n переменных x^i, из которых $n-\nu$ переменных $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$ — инварианты. Она характеризуется свойством инвариантности этих $n-\nu$ переменных и n линейных форм $\omega^i(x, u; dx)$ (где $\omega^{\nu+k} = dx^{\nu+k}$). Внешний дифференциал $d\omega^i$, как мы отметили, можно записать в виде

$$d\omega^i = \omega^k \varpi_k^i,$$

где формы ϖ_k^i линейны относительно p дифференциалов $du^1, \ldots, du^p$, но определены только с точностью до линейных комбинаций дифференциалов форм dx^k, т. е. ω^k. Возьмем p форм ϖ_k^i, линейно независимых относительно du^k, и обозначим их через $\varpi^1, \varpi^2, \ldots, \varpi^p$; тогда форма $d\omega^i$ будет определенным образом построена из ω^k и ϖ^α; присоединяя к ϖ^α линейные комбинации форм ω^k с *неопределенными* коэффициентами, обратим в нуль как можно большее число коэффициентов формы $d\varpi^\alpha$. После этого получим

$$d\omega^i = a_{k\rho}^i \omega^k \varpi^\rho + \frac{1}{2} c_{kh}^i \omega^k \omega^h \qquad (c_{kh}^i = -c_{kh}^i). \tag{10}$$

Очевидно, что *оставшиеся коэффициенты являются инвариантами и, следовательно, функциями от* $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$. Этот результат является обобщением *второй основной теоремы Ли*. Заметим, что к ω^i можно применить линейную замену, коэффициенты которой являются функциями инвариантов группы. Тогда уравнения (10) сохранят тот же вид, а дифференциалы $dx^{\nu+1}, \ldots, dx^n$ будут линейно выражаться через ω^i с коэффициентами, зависящими от инвариантов.

Наконец, используем предположение о том, что определяющие уравнения группы G имеют первый порядок, откуда следует, что система уравнений

$$\overline{x}^{\nu+1} = x^{\nu+1}, \quad \ldots, \quad \overline{x}^n = x^n, \quad \overline{\omega}^i = \omega^i \tag{11}$$

находится в инволюции. Внешнее дифференцирование этих уравнений дает

$$a_{k\rho}^i \omega^k (\overline{\varpi}^\rho - \varpi^\rho) = 0. \tag{12}$$

Следовательно, коэффициенты $a^i_{k\rho}$ *образуют инволютивную систему.* Чтобы установить это, пользуясь теорией систем в инволюции, следует вычислить характеры $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ системы (11) и найти число констант, от которых зависит общее n-мерное интегральное многообразие. Система будет в инволюции, если это число параметров равно $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r$; впрочем, это число есть не что иное, как число параметров, входящих в решение уравнений

$$a^i_{k\rho}\omega^k\varpi^\rho = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где ϖ^ρ — неизвестные формы, линейные относительно $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$. Что касается чисел σ, то они получаются следующим образом. Образуем системы уравнений относительно ϖ^ρ:

$$a^i_{1\rho}\varpi^\rho = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

$$a^i_{2\rho}\varpi^\rho = 0, \tag{14}$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$a^i_{n\rho}\varpi^\rho = 0. \tag{15}$$

Тогда σ_1 — число независимых уравнений (13); $\sigma_1 + \sigma_2$ — число независимых уравнений (13) и (14), и т. д.; наконец, $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_r$ — число независимых уравнений (13), (14), …, (15). Отметим, что мы предполагаем выполненным предварительно такое линейное преобразование форм ω^i, что числа σ_1, $\sigma_1 + \sigma_2, \ldots$ последовательно принимают наибольшие возможные значения.

Уравнения (10) называются *структурными уравнениями* нормальной группы G.

Вторая основная теорема допускает обращение, которое, впрочем, почти очевидно:

Пусть имеются n линейно независимых 1-форм ω^i с коэффициентами — функциями от переменных x и других переменных u. Предположим, что эти формы удовлетворяют уравнениям вида (10), где коэффициенты $a^i_{k\rho}$ и c^i_{kh} зависят только от $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$. Предположим, кроме того, что коэффициенты в выражении дифференциалов $dx^{\nu+1}, \ldots, dx^n$ через $\omega^1, \ldots, \omega^n$ зависят лишь от этих переменных; предположим, наконец, что таблица $a^i_{k\rho}$ — инволютивная. Тогда существует нормальная группа G с инвариантами $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$, для которой уравнения (10) являются структурными уравнениями.

Действительно, уравнения

$$\overline{x}^{\nu+k} = x^{\nu+k}, \quad \ldots, \quad \overline{x}^n = x^n, \quad \overline{\omega}^i = \omega^i,$$

очевидно, образуют систему в инволюции; таким образом, переменные $\overline{x}$, рассмотренные как функции от x, составляют общее решение системы уравнений в частных производных первого порядка в инволюции.

Если коэффициенты структурных уравнений — константы, то группа G транзитивна, а эти коэффициенты — ее *структурные константы.* Все транзитивные группы с одними и теми же структурными уравнениями подобны.

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим несколько примеров.

Пример I. Начнем с конечномерной группы $X = ax + b$, определяющие уравнения которой, очевидно, таковы

$$dX = \omega^1 = u\,dx,$$
$$du = 0$$

(уравнение $\dfrac{d^2X}{dx^2} = 0$ — второго порядка). Имеем

$$d\omega^1 = d(udx) = \frac{du}{u}\omega^1;$$

группа Г, продолжающая группу G, в пространстве переменных x и u, определяется инвариантностью форм

$$\omega^1 = u\,dx, \qquad \omega^2 = \frac{du}{u}.$$

Непосредственно получаем структурные уравнения

$$d\omega^1 = \omega^2\omega^1, \qquad d\omega^2 = 0.$$

Пример II. Рассмотрим группу G с двумя переменными x, y, инвариантом y и уравнениями

$$X = x + ay, \qquad Y = y;$$

определяющие уравнения

$$Y = y, \qquad dX = \omega^1 = dx + \frac{X - x}{y}dy;$$

здесь группа Г совпадает с G. Следовательно, чтобы получить структурные уравнения, можно заменить X в форме ω^1 фиксированным числом, например, нулем; тогда получим

$$\omega^1 = dx - \frac{x}{y}dy \quad \text{и} \quad d\omega^1 = -\omega^1\frac{dy}{y},$$

или

$$\omega^1 = dx - \frac{x}{y}dy, \qquad \omega^2 = dy,$$

где

$$d\omega^1 = \frac{1}{y}\omega^2\omega^1, \qquad d\omega^2 = 0.$$

Пример III. Возьмем группу дробно-линейных преобразований одной переменной

$$X = \frac{ax+b}{cx+d};$$

известно, что определяющее уравнение группы имеет вид

$$X'X''' - \frac{3}{2}X''^2 = 0.$$

Полагая

$$X' = u, \qquad X'' = v,$$

получим систему

$$\begin{aligned} &dX = \omega^1 = u\,dx, \\ &du = v\,dx, \\ &dv = \frac{3}{2}\frac{v^2}{u}\,dx. \end{aligned}$$

Имеем

$$d\omega^1 = du\,dx = \frac{du - v\,dx}{u}u\,dx = \frac{du - v\,dx}{u}\omega^1.$$

Следовательно, форма $\frac{du - v\,dx}{u}$ инвариантна; обозначим ее через ω^2:

$$\omega^2 = \frac{du}{u} - \frac{v}{u}\,dx.$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= -\frac{1}{u}dv\,dx + \frac{v}{u^2}du\,dx = \left(-\frac{1}{u^2}dv + \frac{v}{u^3}du\right)\omega^1 = \\ &= \left[-\frac{1}{u^2}\left(dv - \frac{3}{2}\frac{v^2}{u}dx\right) + \frac{v}{u^3}(du - v\,dx)\right]\omega^1, \end{aligned}$$

откуда получается новая инвариантная форма

$$\omega^3 = -\frac{1}{u^2}\,dv + \frac{v}{u^3}\,du + \frac{1}{2}\frac{v^2}{u^3}\,dx.$$

Дифференцируя, находим

$$d\omega^3 = \frac{1}{u^3}\,du\,dv + \frac{v}{u^3}\,dv\,dx - \frac{3}{2}\frac{v^2}{u^4}\,du\,dx = \omega^3\omega^2.$$

Итак, структурные уравнения таковы:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega^2\omega^1, \\ d\omega^2 &= \omega^3\omega^1, \\ d\omega^3 &= \omega^3\omega^2. \end{aligned}$$

Пример IV. Рассмотрим группу, определенную уравнениями

$$X = x + f(y), \qquad Y = y,$$

где $f(y)$ — произвольная аналитическая функция от y. Определяющими уравнениями будут

$$Y = y, \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = 1,$$

или же

$$\begin{aligned} Y &= y, \\ dX &= dx + u\,dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega^1 = dx + u\,dy, \qquad \omega^2 = dy,$$

а структурные уравнения имеют вид

$$d\omega^1 = \varpi\,dy = \varpi\omega^2, \qquad d\omega^2 = 0,$$

где ϖ обозначает форму du с точностью до прибавления произвольного кратного dy.

Пример V. Рассмотрим транзитивную группу

$$X = f(x), \qquad Y = \frac{y}{f'(x)},$$

где $f(x)$ — произвольная функция от x, $f'(x)$ — ее производная. Определяющие уравнения

$$\begin{aligned} dX &= \frac{y}{Y}dx, \\ dY &= \frac{Y}{y}dy + u\,dx \end{aligned}$$

имеют первый порядок. Приравняем в правых частях Y к 1; получим формы

$$\omega^1 = y dx, \qquad \omega^2 = \frac{dy}{y} + u\,dx$$

и структурные уравнения

$$d\omega^1 = \omega^2\omega^1, \qquad d\omega^2 = \varpi\omega^1 \qquad \left[\varpi = \frac{du}{y} \pmod{dx}\right].$$

Заметим, что группа G является голоэдрическим продолжением группы $X = f(x)$ (с определяющим уравнением $dX = u\,dx$) с

$$\omega^1 = u\,dx, \qquad d\omega^1 = \varpi\omega^1.$$

Третья основная теорема

Третья основная теорема отвечает на следующий вопрос: могут ли коэффициенты $c^i_{kh} = -c^i_{hk}$, $a^i_{k\rho}$, которые входят в определяющие уравнения нормальной группы, быть произвольными функциями инвариантов группы? Мы ограничимся случаем транзитивной группы (если группа интранзитивна, то доказательство очень мало изменится).

Итак, задача состоит в следующем: *можно ли найти $n+p$ независимых форм ω^i, ϖ^α от $n+p$ переменных, удовлетворяющих уравнениям* (10)

$$d\omega^i = a^i_{k\rho}\omega^k\varpi^\rho + \frac{1}{2}c^i_{kh}\omega^k\omega^h \qquad (c^i_{kh} = -c^i_{hk}), \tag{10}$$

коэффициенты которых — данные константы, причем числа $a^i_{k\rho}$ образуют инволютивную систему?

На самом деле достаточно найти формы, удовлетворяющие этим условиям. Тогда (так как в силу (10) уравнения $\omega^i = 0$ образуют, очевидно, вполне интегрируемую систему) можно предположить, что $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — первые интегралы этой системы, и в силу теоремы, обратной ко второй основной теореме, существует нормальная группа G, преобразующая эти переменные и допускающая уравнения (10) в качестве структурных уравнений. Более общим образом, можно искать формы ω^i, ϖ^α, линейные по $N \geqslant n+p$ данным переменным, при условии, что эти $n+p$ форм линейно независимы. Обозначим переменные через ξ^n.

Тогда, если

$$\omega^i = p^i_\lambda d\xi^\lambda, \qquad \varpi^\alpha = q^\alpha_\lambda d\xi^\lambda, \tag{16}$$

то подстановка в уравнения (10) даст квадратичные уравнения

$$dp_\lambda d\xi^\lambda = a^i_{k\rho}\omega^k\varpi^\rho + \frac{1}{2}c^i_{kh}\omega^k\omega^h, \tag{I}$$

в правых частях которых формы ω^i, ϖ^α можно заменить их значениями (16).

По общей теории систем Пфаффа, следует присоединить к уравнениям (I) уравнения, которые выводятся из них внешним дифференцированием, учитывая при этом сами уравнения (I). Вычисление дает

$$\begin{aligned} a^i_{k\rho}\omega^h d\varpi^\rho = a^i_{k\sigma}a^k_{h\rho}\omega^h\varpi^\rho\varpi^\alpha + \left(c^i_{kh}a^k_{i\rho} + \frac{1}{2}c^k_{hl}a^i_{k\rho}\right)\omega^h\omega^l\varpi^\rho +{}\\ + \frac{1}{2}c^i_{kh}c^k_{lm}\omega^h\omega^l\omega^m, \end{aligned} \tag{II}$$

причем формы ω^i и ϖ^α заменены выражениями (16).

Необходимые условия совместности выражают возможность удовлетворить уравнениям (II) при помощи замены форм $d\varpi^\alpha$ некоторыми квадратичными формами, построенными из ω^i и ϖ^ρ, такими, что

$$d\varpi^\alpha = \frac{1}{2}\gamma^\alpha_{\lambda\mu}\varpi^\lambda\varpi^\mu + \delta^\alpha_{k\lambda}\omega^k\varpi^\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha_{kh}\omega^k\omega^h. \tag{17}$$

Сравнение этих соотношений дает

$$a^i_{k\beta}a^k_{h\alpha} - a^i_{k\alpha}a^k_{h\beta} - a^i_{h\rho}\gamma^\rho_{\alpha\beta} = 0, \tag{18}$$

$$c^i_{kh}a^k_{i\alpha} - c^i_{kl}a^k_{h\alpha} + a^i_{k\alpha}c^k_{hl} - a^i_{h\rho}\delta^\rho_{l\alpha} + a^i_{l\rho}\delta^\rho_{h\alpha} = 0, \tag{19}$$

$$c^i_{kh}c^k_{lm} + c^i_{kl}c^k_{mh} + c^i_{km}c^k_{hl} - a^i_{h\rho}\varepsilon^\rho_{lm} - a^i_{l\rho}\varepsilon^\rho_{mh} - a^i_{m\rho}\varepsilon^\rho_{hl} = 0, \tag{20}$$

где $i, h, l, m = 1, 2, \ldots, n$ и $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p$.

Необходимо, чтобы эти уравнения (рассматриваемые как линейные уравнения относительно неизвестных $\gamma^\alpha_{\lambda\mu}, \delta^\alpha_{k\lambda}, \varepsilon^\alpha_{kh}$) были совместны; это влечет алгебраические соотношения между константами $a^i_{k\rho}$ и c^i_{kh}.

Предположим, что эти соотношения выполнены. Тогда система (I) окажется в инволюции. Чтобы это доказать, следует подсчитать число параметров, от которых зависит общий n-мерный интегральный элемент, вычислить характеры $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ системы и проверить, что первое число имеет значение, которое дается теорией систем в инволюции, исходя из характеров S_i.

Чтобы выполнить первое вычисление (т. е. найти число параметров, от которых зависит общий N-мерный интегральный элемент), сначала рассмотрим уравнения (II). По предположению, им удовлетворяют значения $d\varpi^\alpha$

вида (17) с определенными коэффициентами $\gamma, \delta, \varepsilon$. Общее решение уравнений (II) получится, если к (17) прибавить формы Π^α, удовлетворяющие уравнениям

$$a^i_{k\rho}\omega^k\Pi^\rho = 0. \tag{21}$$

Но уравнения $a^i_{k\rho}\omega^k\varpi^\rho = 0$, где неизвестные — линейные формы ϖ^α, имеют общее решение, зависящее от $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r$ параметров:

$$\varpi^\alpha = b^\alpha_{\lambda k}t^\lambda\omega^k,$$

где t^λ — эти параметры. Тогда, очевидно, уравнения (21) будут выполнены, если положить

$$\Pi^\alpha = b^\alpha_{\lambda k}\omega^k\chi^\lambda, \tag{22}$$

где χ^λ — 1-формы от $d\xi^1, \ldots, d\xi^N$ *с произвольными коэффициентами*. Таким образом, в общее решение $d\varpi^\alpha$ уравнений (II) входит $N(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r)$ параметров. Но это число должно быть уменьшено, потому что в Π^α имеются два члена, один с $\omega^1\omega^2$, другой с $\omega^2\omega^1$, и приведение этих слагаемых (а также аналогичных пар) уменьшит число параметров. Можно вычислить, на сколько нужно уменьшить $N(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r)$, чтобы получить число оставшихся произвольных коэффициентов. Оставляя в стороне этот подсчет, укажем результат: число H параметров (независимых относительно p^i_λ и q^α_λ), которые входят в решение $d\varpi^\alpha$ уравнений (II), равно

$$(N-1)\sigma_1 + (2N-3)\sigma_2 + (3N-6)\sigma_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{r}\left[iN - \frac{i(i+1)}{2}\right]\sigma_i.$$

На самом деле H может превышать указанное число, потому что могут существовать решения уравнений (21), не представимые в виде (22). Следовательно,

$$H \geqslant \sum_{i=1}^{r}\left[iN - \frac{i(i+1)}{2}\right]\sigma_i.$$

Это еще не есть число параметров, от которых зависит общий N-мерный интегральный элемент уравнений (I) и (II). Чтобы его получить, заменим уравнения (II) уравнениями

$$dq^\alpha_\lambda d\xi^\lambda = d\varpi^\alpha, \tag{II$'$}$$

где $d\varpi^\alpha$ заменены их значениями, включающими H параметров. Такой N-мерный интегральный элемент определяется соотношениями

$$dp^i_\lambda = p^i_{\lambda\mu} d\xi^\mu,$$
$$dq^\alpha_\lambda = q^\alpha_{\lambda\mu} d\xi^\mu.$$

Сразу видим (подставив в уравнения (I) и (II$'$) члены с $d\xi^\lambda d\xi^\mu$), что эти уравнения имеют вид

$$p^i_{\lambda\mu} - p^i_{\mu\lambda} = \ldots,$$
$$q^\alpha_{\lambda\mu} - q^\alpha_{\mu\lambda} = \ldots,$$

где правые части — функции от p^i_λ, q^α_λ и H параметров, рассмотренных выше. Таким образом, при фиксированных значениях этих H параметров имеется $N^2(N-1)/2$ линейных соотношений с N^3 неизвестными. Следовательно, полное число произвольных параметров, от которых зависит общий N-мерный интегральный элемент системы (I), (II), равно

$$\frac{N^2(N+1)}{2} + H \geqslant \frac{N^2(N+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left[iN - \frac{i(i+1)}{2} \right] \sigma_i.$$

Перейдем к вычислению характеров $S_1, S_2, \ldots, S_{N-1}$ системы. Мы сейчас определим целые числа $\Sigma_1, \Sigma_1 + \Sigma_2, \ldots$, такие что

$$S_1 \geqslant \Sigma_1, \quad S_1 + S_2 \geqslant \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad \ldots,$$
$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{N-1} > \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_{N-1}.$$

Для того, чтобы система была в инволюции, необходимо и достаточно, чтобы число $N^2(N+1)/2 + H$, которое мы только что нашли и которое не может превышать

$$N^3 - (N-1)S_1 - (N-2)S_2 - \ldots - S_{N-1},$$

было бы равно этому выражению. Оно не превосходит

$$N^3 - (N-1)\Sigma_1 - (N-2)\Sigma_2 - \ldots - \Sigma_{N-1}.$$

Докажем, что оно равно

$$\frac{N^2(N+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left[iN - \frac{i(i+1)}{2} \right] \sigma_i;$$

тогда

$$\frac{N^2(N+1)}{2} + H \geqslant \frac{N^2(N+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left[iN - \frac{i(i+1)}{2} \right] \sigma_i \geqslant$$
$$\geqslant N^3 - (N-1)S_1 - (N-2)S_2 - \ldots - S_{N-1}.$$

Следовательно, система инволютивна, и знак неравенства надо везде заменить знаком равенства. Отсюда вытекает, что $S_i = \Sigma_i$ и что выражения (22) дают общее решение системы (21).

Чтобы вычислить числа Σ, рассмотрим левые части уравнений (I) и (II); это левые части только тех уравнений, которые содержат дифференциалы неизвестных функций p^i_λ, q^α_λ. Получим

$$dp^i_\lambda d\xi^\lambda = \ldots, \tag{I}$$
$$a_{k\rho} p^k_\lambda dq^\rho_\mu d\xi^\lambda d\xi^\mu = \ldots. \tag{II}$$

Мы будем иметь $\Sigma_1 \leqslant S_1$, если возьмем в (I) коэффициенты при $d\xi^1$, т. е. n дифференциалов dp^i_1; следовательно, можно положить $\Sigma_1 = n$. Чтобы выполнялось неравенство $\Sigma_1 + \Sigma_2 \leqslant S_1 + S_2$, возьмем в (I) коэффициенты при $d\xi^1$ и $d\xi^2$ и в (II) коэффициенты при $d\xi^1 d\xi^2$, что даст формы

$$dp^i_1, \quad dp^i_2, \quad a^i_{k\rho}(p^k_1 dq^\rho_2 - p^k_2 dq^\rho_1),$$

т. е. по крайней мере $2n + \sigma_1$ линейно независимых форм (достаточно, например, положить $p^1_1 = 1$, а остальные p^k_1 приравнять нулю). Положим, следовательно, $\Sigma_2 = n + \sigma_1$. Продолжая таким образом, найдем

$$\Sigma_1 = n, \quad \Sigma_2 = n + \sigma_1, \quad \Sigma_3 = n + \sigma_1 + \sigma_2, \quad \Sigma_4 = n + \sigma_1 + \sigma + \sigma_3,$$
$$\ldots, \quad \Sigma_{N-1} = n + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{N-1},$$

где мы полагаем

$$\sigma_{n+1} = \ldots = \sigma_{N-1} = 0.$$

Таким образом, получим анонсированное равенство

$$N^3 - (N-1)\Sigma_1 - (N-2)\Sigma_2 - \ldots - \Sigma_{N-1} = \frac{N^2(N+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left[iN - \frac{i(i+1)}{2} \right] \sigma_i.$$

Нет нужды пояснять, что эта третья основная теорема обобщает третью теорему Ли, классические соотношения Ли между c^i_{kh} сводятся к соотношениям (20), в которых опущены члены с ε^i_{kh}.

Линейный стабилизатор и плоский систатический элемент

Если дана группа Ли G, не обязательно нормальная, то множество преобразований группы G, сохраняющих общую точку (x), образует подгруппу g группы G, которая называется стабилизатором точки (x). Если группа G конечномерна, то g — группа Ли, но это, вообще говоря, не так, если группа G бесконечномерна. Как бы то ни было, g линейно преобразует векторы dx^i, исходящие из точки (x), и группа преобразований этих векторов есть линейная группа, которая называется линейным стабилизатором [1]) точки (x). Мы покажем, что инфинитезимальные преобразования этой группы вычисляются по структурным уравнениям группы G.

Начнем с исходной формы определяющих уравнений группы

$$X^{\nu+1} = x^{\nu+1}, \quad \ldots, \quad X^n = x^n, \tag{1}$$

$$dX^i = a^i_k(x, X, u)dx^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Если фиксировать точки x и X, формулы (2) показывают, что элемент T группы G, переводящий (x) в (X), преобразует вектор (dx) в (dX); это преобразование состоит в линейной замене S_u коэффициентов a^i_k, примененной к компонентам dx^k вектора (dx). Если два преобразования T и T' переводят (x) в (X), то элемент $T'^{-1}T$ группы G принадлежит стабилизатору точки (x), а соответствующий элемент присоединенной линейной группы есть $S^{-1}_{u'}S_u$. Следовательно, преобразования $S^{-1}_{u'}S_u$ со всевозможными u и u' порождают линейный стабилизатор γ; он также порождается преобразованиями $S_0^{-1}S$, где S_0 соответствует фиксированным числовым значениям u'. Преобразования $\Sigma_u = S_u S_0^{-1}$ также порождают группу, поскольку

$$S_u S_0^{-1} = S_0(S_0^{-1}S_u)S_0^{-1}.$$

Эта группа сопряжена с γ при помощи S_0. Она также является линейным стабилизатором, если в качестве компонент вектора (dx) взять величины $\omega^i(x, X, u_0, dx)$, получающиеся заменой S_0, осуществленной применением к dx^k оператора S_0. Обозначим эту группу также через γ.

Тогда рассмотрим инфинитезимальное преобразование $\Sigma_{u+\delta u}\Sigma_u^{-1}$ группы γ, которое, будучи применено к величинам $\omega^i(x, X, u, dx)$, дает величины $\omega^i(x, X, u + \delta u, dx)$. Имеем

$$\omega^i(x, X, u + \delta u, dx) = \omega^i(x, X, u, dx) + \frac{\partial \omega^i}{\partial u^k}\delta u^k.$$

---

[1]) В предыдущих работах использовались термины «присоединенная группа» и «линейная группа»; на современном языке — это алгебра Ли данной группы Ли. — *Прим. ред.*

Но в силу структурных уравнений

$$d\omega^i = \frac{1}{2}c^i_{kh}\omega^k\omega^h + a^i_{h\rho}\omega^h\varpi^\rho$$

получаем

$$\frac{\partial\omega^i}{\partial u^k} = a^i_{k\rho}\omega^k e^\rho,$$

где через e^ρ обозначены формы ϖ^ρ, в которых dx^k заменены нулями, а du^k заменены на $-\delta u^k$. Отсюда следует, что *уравнения инфинитезимальных преобразований линейного стабилизатора группы имеют вид*

$$\delta\omega^i = a_{k\rho}e^\rho\omega^k \tag{23}$$

с p_1 *параметрами* $e^1, e^2, \ldots, e^{p_1}$.

Выше неявно предполагалось, что группа G является нормальной; в этом случае условия того, что инфинитезимальные преобразования

$$E^\alpha f = a^i_{k\alpha}\xi^k\frac{\partial f}{\partial\xi} \tag{24}$$

порождают структурную группу $\gamma^\alpha_{\lambda\mu}$, совпадают с уравнениями (18). Следовательно, *совместность уравнений, о которой говорится в прямой третьей основной теореме, просто означает, что преобразования* (23) *порождают группу.*

Если группа G не является нормальной, то предыдущие результаты сохраняются, но тогда формы ϖ^α заменяются инвариантными формами ω нормального голоэдрического продолжения группы G, появляющимися при рассмотрении тех определяющих уравнений группы G, которые имеют первый порядок.

Во всяком случае, предыдущий результат приводит к новому понятию. Возьмем вектор, компоненты которого обращают в нуль np_1 форм $a^i_{k\alpha}\omega^k$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ \ \alpha = 1, 2, \ldots, p_1)$, входящих в правые части уравнений (23). Всякое инфинитезимальное преобразование из группы γ оставляет его инвариантным, и обратно, всякий вектор, инвариантный относительно группы γ, обращает в нуль эти np_1 форм. Назовем систему Пфаффа

$$a^i_{k\alpha}\omega^k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n, \ \ \alpha = 1, \ldots, p) \tag{25}$$

систатической системой.

Векторы, исходящие из точки (x) и удовлетворяющие уравнениям этой системы, порождают плоский элемент E, который мы назовем *систатическим плоским элементом, приложенным в точке* (x). Это название объясняется тем, что всякое преобразование группы G, сохраняющее точку (x), сохраняет также все бесконечно близкие точки к (x), расположенные в плоском элементе E, связанным с (x).

Отсюда вытекает, что *система* (25) *вполне интегрируема.* Это можно проверить вычислением, но можно это понять и интуитивно[1]). Рассмотрим кривую (C), касающуюся в каждой своей точке систатического элемента, приложенного в этой точке. Всякое преобразование из группы G, сохраняющее точку (x) кривой C, сохраняет также ее бесконечно близкие точки и, следовательно, шаг за шагом, все точки кривой C. Итак, геометрическое место точек, инвариантных при преобразованиях стационарной группы (не линейной) точки (x), есть многообразие, все касательные к которому в каждой его точке содержатся в систатических элементах. Эти многообразия являются интегральными многообразиями систатической системы (25), которая, следовательно, вполне интегрируема.

Разумеется, может случиться, что плоский систатический элемент сводится к самой точке (x); тогда группа G — *асистатическая*; это случается, если число уравнений (25) равно числу переменных, т. е. равно n.

Существенные инварианты

Рассмотрение систатической системы Пфаффа приводит к важному понятию *существенного инварианта.*

Сначала заметим, что систатическая система остается инвариантной при заменах переменных; это является простым следствием ее геометрического смысла. Установив это, рассмотрим среди всех линейных комбинаций уравнений этой системы те, которые зависят только от дифференциалов $dx^{\nu+1}, \ldots, dx^n$ инвариантов группы. Можно считать (после незначительной замены обозначений), что они являются дифференциалами некоторого числа инвариантов, которые мы обозначим $y^1, \ldots, y^r$. Через $z^1, \ldots, z^s$ обозначим остальные инварианты; наконец, сохраним обозначение x для переменных $x^1, x^2, \ldots, x^\nu$. Можно также предположить, что первыми интегралами систатической системы являются $x^1, x^2, \ldots, x^q$ (и инварианты $y^1, \ldots, y^r$).

Условившись об этом, рассмотрим определяющие уравнения группы G, не обязательно нормальной, и среди них — уравнения

$$\overline{y}^k = y^k, \qquad \overline{z}^h = z^h, \qquad \varpi^i = \omega^i,$$

где независимыми переменными являются x и неизвестные функции от $\overline{x}$. Рассмотрим величины $x^1, \ldots, x^q, y^1, \ldots, y^r$, первые интегралы систатической

---

[1]) Нижеследующее доказательство Э. Картан впоследствии считал сомнительным. — *Примечание редактора французского издания Полного собрания сочинений Э. Картана.*

системы, как постоянные *параметры*, а величины $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^q$ — как неизвестные функции других переменных $x^{q+1}, \ldots, x^\nu, z^1, \ldots, z^s$. Тогда, так как все величины $a^i_{k\rho}\omega^k$ станут равны нулю (а, следовательно, в силу уравнений $\varpi^i = \omega^i$, обратятся в нуль и величины $a^i_{k\rho}\varpi^k$), внешнее дифференцирование уравнений $\varpi^i = \omega^i$ с ν неизвестными функциями $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^\nu$ даст тождество, ибо формы $d\varpi^i - d\omega^i$ обращаются в нуль в силу самих уравнений $\varpi^i = \omega^i$. Следовательно, рассматриваемая система вполне интегрируема. Пусть

$$\overline{x}^i = F^i(x, y, z, A^2, \ldots, A^\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{26}$$

— ее общее решение, где A — постоянные интегрирования.

Этот результат показывает, что всякое преобразование группы G можно представить в виде (26), где F^i — некоторые функции своих аргументов и A^i — некоторые функции первых интегралов $x^1, x^2, \ldots, x^q, y^1, y^2, \ldots, y^r$ систатической системы. Можно добавить, что для *данного* преобразования S группы G функции A^i вполне определены; чтобы их найти, достаточно рассмотреть $\overline{x}^i$ как функции от x, y, z и разрешить уравнения (26) относительно $A^1, A^2, \ldots, A^\nu$; получим функции, которые зависят только от $x^1, x^2, \ldots, x^q, y^1, y^2, \ldots, y^r$.

После этого зафиксируем значения x^k_0 для ν переменных x^k и сделаем замену переменных

$$x^i = F^i(x_0, y, z, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^\nu); \tag{27}$$

эти уравнения определяют ξ^i как функции от x, y и z. Подействуем на точку (x_0, y, z) некоторым преобразованием T группы; пусть (ξ, y, z) — ее образ (в новых координатах). Преобразованию T соответствуют вполне определенные функции $A^i(x^1, \ldots, x^q; y^1, \ldots, y^r)$, которые при $x = x_0$ сводятся к функциям $A^i(y)$. Сравнивая (26) и (27), видим, что координаты ξ образа точки есть в точности величины $A^i(y)$. Следовательно, если применить это же преобразование T к точке (x_0, y, z'), получим точку (ξ, y, z') с теми же значениями $A^i(y)$ координат ξ.

Пусть теперь

$$\overline{\xi}^i = \varphi^i(\xi, y, z)$$

— уравнения какого-нибудь преобразования S группы (выраженные в новых переменных). Зафиксируем значения переменных ξ, y, z (произвольные); тогда существует по крайней мере одно преобразование T группы, переводящее точку со старыми координатами (x_0, y, z) в точку с новыми координатами (ξ, y, z), преобразование ST переведет эту же точку (x_0, y, z) в точку $(\overline{\xi}, y, z)$. Теперь начнем с точки (x_0, y, z'); преобразование T даст точку (ξ, y, z') и преобразование ST даст точку $(\overline{\xi}, y, z')$ с теми же значениями ξ^i и $\overline{\xi}^i$. Итак, преобразование S одновременно переводит точку (ξ, y, z) в точку $(\overline{\xi}, y, z)$ и точку (ξ, y, z') в точку $(\overline{\xi}, y, z')$. Имеем, следовательно,

$$\overline{\xi}^i = \varphi^i(\xi, y, z) = \varphi^i(\xi, y, z');$$

поскольку равенства

$$\varphi^i(\xi, y, z) = \varphi(\xi, y, z')$$

выполнены при любых значениях аргументов ξ, y, z, z', функции φ^i не зависят от z.

Следовательно, *можно осуществить такую замену переменных, что группа G будет преобразовывать лишь переменные ξ, y.* Следовательно, группа G является прямым произведением группы G', преобразующей $n - s$ переменных, r из которых — инварианты, и группы с s тождественно преобразуемыми переменными.

Таким образом, можно в некотором смысле отбросить инварианты $z^1, z^2, \ldots, z^s$. *Но сделать что-либо еще в этом направлении нельзя*, поскольку, как уже было сказано, систатическая система инвариантна при заменах переменных; следовательно, она всегда содержит уравнения $dy^1 = 0, \ldots, dy^r = 0$. Если бы можно было исключить какой-нибудь из инвариантов y, как исключались инварианты z, то дифференциалы этих исключенных инвариантов y не могли бы, очевидно, присутствовать в левых частях уравнений систатической системы группы G (которая такая же, как и для группы G').

Мы назовем инварианты y, первые интегралы систатической системы, *существенными инвариантами группы.*

Если группа конечномерна и действует в пространстве размерности ν, то линейный систатический элемент заполняет все пространство; следовательно, систатической системы и существенных инвариантов нет: *всякая конечномерная группа изоморфна транзитивной группе*, что хорошо известно. Эта теорема не верна для бесконечномерных групп (пример: $X = x + f(y)$, $Y = y$, где y — существенный инвариант, остающийся существенным инвариантом для всех изоморфных групп).

Пример I. Снова рассмотрим группу

$$X = x + ay, \quad Y = y \qquad (\nu = 1,\ n = 1),$$

где

$$d\omega^1 = \frac{1}{y}\omega^2\omega^1, \qquad d\omega^2 = 0;$$

у нее нет систатической системы и, следовательно, существенного инварианта. Действительно, полагая $x = \xi y$, получим

$$\overline{\xi} = \xi + a, \qquad \overline{y} = y.$$

Эта группа является прямым произведением транзитивной группы $\overline{\xi} = \xi + a$ на группу $\overline{y} = y$. Легко видеть, что стабилизатор точки (x_0, y_0) состоит только из тождественного преобразования. Следовательно, линейный систатический элемент двумерен и систатической системы нет.

Пример II. Рассмотрим группу

$$X = x + ay + b, \quad Y = y \qquad (\nu = 1,\ n = 2).$$

Имеем

$$\omega^1 = dx + u\,dy, \qquad \omega^2 = dy,$$

и, следовательно,

$$d\omega^1 = du\,dy = \varpi^1\omega^2, \quad d\omega^2 = 0 \qquad (\varpi^1 = du) \qquad \text{и} \qquad d\varpi^1 = 0.$$

Систатическая система образована уравнением $\omega^2 \equiv dy = 0$, инвариант y — существенный.

Пример III. Рассмотрим группу

$$X = x + ay + bz, \quad Y = y, \quad Z = z \qquad (\nu = 1,\ n = 3).$$

Имеем

$$\omega^1 = dx - x\frac{dz}{z} + u\left(dy - y\frac{dz}{z}\right), \quad \omega^2 = dy, \quad \omega^3 = dz,$$

откуда

$$d\omega^1 = -\omega^1\frac{dz}{z} + \varpi^1\left(\omega^2 - \frac{y}{z}\omega^3\right) \qquad (\varpi^1 = du) \qquad \text{и} \qquad d\varpi^1 = 0.$$

Систатическая система имеет вид

$$\omega^2 - \frac{y}{z}\omega^3 \equiv dy - \frac{y}{z}dz = 0;$$

инвариант $\frac{y}{z}$ *— существенный.* Действительно, полагая $\xi = \frac{x}{z}$, получим

$$\overline{\xi} = \xi + a\frac{y}{z} + b$$

и остается только существенный инвариант $\frac{y}{z}$.

Библиографические сведения[1]

Этот доклад покрывает первую часть статьи о структуре бесконечномерных групп (*Annales de l'École Normale*, 1904)[2] и часть статьи, которая является ее продолжением (*Annales de l'École Normale*, 1905)[3]. Обозначения незначительно изменены. Доказательство основной теоремы уточнено, так же как и все, что касается линейного стабилизатора (названного присоединенной группой в статье 1905 г.) и теории существенных инвариантов. Доказательство обратной третьей основной теоремы, набросанное в этом докладе, упрощено при помощи теорем Кэлера и уточнено. Наконец, названия нормальной группы, стабилизатора и плоского систатического элемента являются новыми.

---

[1] Эти сведения добавлены редактором французского издания Полного собрания сочинений Э. Картана. — *Прим. ред.*

[2] Русский перевод: стр. 10–57 настоящего издания. — *Прим. ред.*

[3] Русский перевод: стр. 58–139 настоящего издания. — *Прим. ред.*

СТРУКТУРА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП

ПРОДОЛЖЕНИЕ

(*Seminaire de Mathématiques*, 4-e année, 1936–1937)

Этот доклад посвящен двум важным задачам теории групп.

Задача A. *Исследование групп Ли, изоморфных данной группе Ли.*

Задача B. *Исследование подгрупп Ли данной группы Ли.*

A. Группы, изоморфные данной группе

Мы уже ввели понятие изоморфизма, исходя из понятия продолжения группы (голоэдрического или мериэдрического). Две группы G_1 и G_2 голоэдрически изоморфны, если они допускают два подобных голоэдрических продолжения; группа G_1 мериэдрически изоморфна G_2, если существует мериэдрическое продолжение группы G_1, подобное голоэдрическому продолжению группы G_2. Важно заметить, что необходимо различать собственные и несобственные мериэдрические изоморфизмы. Рассмотрим, например, группу Ли G:

$$X = x, \qquad Y = y + f(x), \qquad Z = z + f'(x),$$

где f — произвольная аналитическая функция, $f'(x)$ — ее производная. Пусть G_1 — группа, которая показывает, как G преобразует x и y, и G_2 — группа, которая показывает, как G преобразует x и z. Тогда G — голоэдрическое продолжение G_1 и мериэдрическое продолжение G_2; отсюда вытекает, что G_2 мериэдрически изоморфна G_1. Но, с другой стороны, G_1 и G_2 имеют одни и те же определяющие уравнения:

$$X = x, \ \ \frac{\partial Y}{\partial y} = 1 \ \text{ для } G_1; \qquad X = x, \ \ \frac{\partial Z}{\partial z} = 1 \ \text{ для } G_2.$$

Доклад сделан Э. Картаном в понедельник 15-го марта 1937 г.

Таким образом, их следует рассматривать и как голоэдрически изоморфные; в этом случае назовем мериэдрический изоморфизм несобственным. В силу этого, имеются собственно простые группы и несобственно простые группы.

Прежде чем приступить к решению задачи А, следует сказать несколько слов о *нормальном продолжении нормальной группы* G (т.е. группы, определяющие уравнения которой имеют первый порядок). Пусть $x^{\nu+1}, \dots, x^n$ — инварианты группы G и

$$d\omega^i = \frac{1}{2} c^i_{jk} \omega^j \omega^k + a^i_{k\rho} \omega^k \varpi^\rho \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

— ее структурные уравнения. Нормальное продолжение показывает, как G преобразует переменные $x^1, x^2, \dots, x^n$ и величины $u^1, u^2, \dots, u^p$, которые входят в коэффициенты форм ω^i. Мы уже видели, что уравнения

$$\omega^i(\overline{x}, \overline{u}, d\overline{x}) = \omega^i(x, u, dx)$$

приводят к соотношениям

$$a^i_{k\rho} \omega^k(x, u, dx) \left[\varpi^\rho(\overline{x}, \overline{u}, d\overline{x}, d\overline{u}) - \varpi^\rho(x, u, dx, du)\right] = 0,$$

из которых вытекают уравнения

$$\varpi^\alpha(\overline{x}, \overline{u}, d\overline{x}, d\overline{u}) - \varpi^\alpha(x, u, dx, du) = b^\alpha_{\lambda k} t^\lambda \omega^k$$

с $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n$ произвольными параметрами t^λ. Их можно записать в виде

$$(\varpi^\alpha)^*(\overline{x}, \overline{v}, d\overline{x}, d\overline{u}) = (\varpi^\alpha)^*(x, u, v, dx, du),$$

где

$$(\varpi^\alpha)^* = \varpi^\alpha + b^\alpha_{\lambda k} v^\lambda \omega^k.$$

Будем писать ϖ^α вместо $(\varpi^\alpha)^*$; тогда продолженная группа сохраняет формы ω^i и ϖ^α. Кроме того, имеем

$$d\varpi^\alpha = \frac{1}{2} \gamma^\alpha_{\rho\sigma} \varpi^\rho \varpi^\sigma + \delta^\alpha_{k\rho} \omega^k \varpi^\rho + \frac{1}{2} \varepsilon^\alpha_{kh} \omega^k \omega^h + b^\alpha_{\lambda k} \omega^k \chi^\lambda, \tag{2}$$

где χ^λ — новые формы, линейно независимые относительно dv; можно воспользоваться неопределенностью этих форм, чтобы обратить в нуль как можно больше других коэффициентов.

Заметим еще, что формулы (2) можно получить, если решить уравнения, которые получаются приравниванием нулю внешних дифференциалов правых частей уравнений (1), что является чисто алгебраической задачей.

Легко доказывается, что систатическая система Пфаффа продолженной группы,

$$b^{\alpha}_{\lambda k}\omega^k = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p; \quad \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r),$$

эквивалентна такой же системе исходной группы G. Следовательно, *существенные инварианты нормальной группы сохраняются при нормальном продолжении.*

Исследование групп Ли, изоморфных данной группе Ли G (которую можно всегда предполагать нормальной) основывается на следующей лемме, которую мы приведем без доказательства.

Лемма. *Если G_1 и G_2 — две нормальные группы, такие что G_1 допускает G_2 в качестве голоэдрического продолжения, то группа G_2 также допускает в качестве своего голоэдрического продолжения одно из последовательных нормальных голоэдрических продолжений группы G_1, дополненное при необходимости несколькими переменными, преобразуемыми тождественно.*

Далее, пусть G — данная нормальная группа, $\mathcal{G}$ — группа, изоморфная (голоэдрически или мериэдрически) группе G. По определению, существуют две подобные группы Γ_1 и Γ_2, одна из которых, Γ_1, есть голоэдрическое продолжение G, а другая, Γ_2, — продолжение (голоэдрическое или мериэдрическое) группы $\mathcal{G}$. Можно предположить, что группа Γ_1 (а, следовательно, и Γ_2) нормальна. По лемме, группа Γ_1 допускает в качестве продолжения нормальное продолжение G' группы G, дополненное до $\overline{G}'$ при необходимости переменными, преобразующимися тождественно. Следовательно, $\overline{G}'$ после соответствующей замены переменных становится продолжением $\mathcal{G}$, откуда вытекает следующая

Основная теорема. *Всякая группа $\mathcal{G}$, изоморфная голоэдрически или мериэдрически данной нормальной группе G, допускает в качестве продолжения одно из последовательных нормальных продолжений группы G, дополненное при необходимости переменными, преобразующимися тождественно.*

Итак, переформулированная задача сводится к трем следующим:

1° *Построить последовательные нормальные продолжения данной нормальной группы.*

2° *Найти все группы, допускающие в качестве продолжения данную нормальную группу.*

3° *В случае, когда нормальная группа G является продолжением группы $\mathcal{G}$, определить, будет это продолжение голоэдрическим или мериэдрическим.*

Мы дали достаточные указания, касающиеся первой из этих задач. Займемся второй из них.

Нахождение групп, допускающих в качестве продолжения данную нормальную группу. Пусть G — нормальная группа, имеющая только существенные инварианты (но к переменным x^i группы G можно добавить произвольное число переменных y, преобразуемых тождественно — несущественных инвариантов). Пусть $\mathcal{G}$ — группа, допускающая G в качестве продолжения. Переменные, преобразуемые группой $\mathcal{G}$, будут функциями от x и y; всегда можно считать, что они содержат все инварианты, существенные и несущественные, группы G (оставляя за собой право освободиться от тех из них, которые не являются существенными для $\mathcal{G}$). Переменные, преобразуемые группой $\mathcal{G}$, отличные от ее инвариантов, можно рассматривать как первые интегралы системы Пфаффа; мы предположим, что эта система приведена к виду

$$\theta^i \equiv \omega^i + \alpha^i_k \omega^{s+k} + \beta^i_k dy^k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ \ k = 1, 2, \ldots, n - s). \tag{3}$$

Группа $\mathcal{G}$ указывает, как G преобразует между собой первые интегралы (3) и y^k; но так как группа G сохраняет формы ω^i и dy^k и должна, с другой стороны, сохранять предыдущую систему (поскольку G преобразует переменные группы $\mathcal{G}$), то коэффициенты α^i_k и β^i_k зависят только от инвариантов группы G и от y^k; можно, следовательно, опустить в уравнениях (3) члены с dy^k и привести их к виду

$$\theta^i \equiv \omega^i + \alpha^i_k \omega^{s+k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ \ k = 1, 2, \ldots, n - s). \tag{3$'$}$$

Поскольку коэффициенты α^i_k являются инвариантами групп G и $\mathcal{G}$, их можно рассматривать как независимые инварианты (оставляя за собой право установить между ними, если потребуется, некоторые соотношения).

Вычислим $d\theta^i$:

$$d\theta^i \equiv d\omega^i + \alpha^i_k d\omega^{s+k} + d\alpha^i_k \omega^{s+k},$$

и заменим $d\omega^i$ и $d\omega^{s+k}$ их значениями. С учетом уравнений (3$'$), это дает выражение, содержащее члены вида

$$\theta^k\theta^h,\ \theta^k\omega^{s+h},\ \omega^{s+k}\omega^{s+h},\ d\alpha^i_k\omega^{s+k},\ \theta^k\varpi^\rho,\ \omega^{s+k}\varpi^\rho.$$

Система (3′), к которой добавлены уравнения $dy^h = 0$, $d\alpha^i_k = 0$, вполне интегрируема. Следовательно, нужно, чтобы:

1° совокупность членов с $\omega^{s+k}\omega^{s+h}$ была тождественно равна нулю;

2° совокупность членов с $\omega^{s+k}\varpi^\rho$ была тождественно равна нулю.

Эти условия выражаются алгебраическими соотношениями между α^i_k *и структурными коэффициентами группы* G. Можно считать эти соотношения разрешенными таким образом, что они выражают α^i_k в виде функций существенных инвариантов группы G и параметров z^k, которые можно временно рассматривать как новые независимые инварианты. Тогда преобразования, которые указывают, как группа G преобразует между собой первые интегралы системы (3), составляют группу $\mathcal{G}$, изоморфную G, инвариантами которой являются существенные инварианты группы G и инварианты z^k. Образуем систатическую систему группы $\mathcal{G}$, получающуюся приравниванием нулю частных производных $d\theta^i$ по ω^{s+k} и ϖ^ρ. Левые части уравнений этой системы линейны по θ^i и dz^k. Отсюда находятся существенные инварианты группы $\mathcal{G}$.

Следовательно, предыдущий метод позволяет *при помощи чисто алгебраических вычислений* образовать структурные уравнения групп $\mathcal{G}$, допускающих G в качестве продолжения и имеющих только существенные инварианты.

Если группа G конечномерна, то существенных инвариантов нет и она просто транзитивна; пусть r — ее порядок. Всякая изоморфная ей группа $\mathcal{G}$ с $n+h$ переменными и h инвариантами может существовать только при $n \leqslant r$; если $n = r$, то $\mathcal{G}$ не имеет существенных инвариантов и совпадает с G.

Пример I. Возьмем просто транзитивную группу параллельных переносов плоскости

$$\overline{x} = x + a, \qquad \overline{y} = y + b.$$

Здесь имеем

$$\omega^1 = dx, \quad \omega^2 = dy, \quad d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = 0.$$

Так можно представить только группу $\mathcal{G}$ с $h+1$ переменной, h из которых являются инвариантами. Следуя общему методу, положим

$$\theta^1 \equiv \omega^1 + z\omega^2,$$

откуда $d\theta^1 = dz\omega^2$. Систатическая система имеет вид $dz = 0$; z является существенным инвариантом. Переменная группы $\mathcal{G}$, отличная от z, есть $x + zy = X$; получаем уравнения группы $\mathcal{G}$

$$\overline{X} = x + a + bz, \qquad \overline{Z} = z.$$

Можно было бы взять в качестве z константу, но тогда группа $\mathcal{G}$ была бы мериэдрически изоморфна группе G.

Пример II. Рассмотрим просто транзитивную группу преобразований вида

$$\overline{x} = ax, \qquad \overline{y} = ay + b,$$

где

$$\omega^1 = \frac{dx}{x}, \quad \omega^2 = \frac{dy}{x}; \quad d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = \omega^2\omega^1.$$

Подлежит рассмотрению лишь случай, когда $s = 1$ (т. е. число переменных равно $h+1$, и из них h являются инвариантами). Рассмотрим сначала случай $\theta^1 \equiv \omega^1$; тогда система $\theta^1 = 0$ вполне интегрируема с первым интегралом x. В этом случае группа $\mathcal{G}$ не имеет существенного инварианта и задается уравнением $\overline{x} = ax$, т. е. она мериэдрически изоморфна G.

В общем случае положим

$$\theta^1 \equiv \omega^2 + z\omega^1, \qquad d\theta^1 = (\theta^1 + dz)\omega^1.$$

Систатическая система $\mathcal{G}$ имеет вид $\theta^1 + dz = 0$; инвариант z несущественный, и его можно приравнять к нулю. Единственная переменная группы $\mathcal{G}$ — первый интеграл y уравнения $\omega^2 = 0$; группа $\mathcal{G}$ имеет уравнение

$$\overline{y} = ay + b$$

и, следовательно, голоэдрически изоморфна G.

Пример III. Возьмем в качестве G бесконечномерную группу с одной переменной x

$$\omega^1 = u dx, \qquad d\omega^1 = \omega^1\varpi.$$

Изменяя обозначения и образуя последовательные нормальные продолжения, мы получим, дифференцируя,

$$\begin{aligned}
d\omega^1 &= \omega^1\omega^2,\\
d\omega^2 &= \omega^1\omega^3,\\
d\omega^3 &= \omega^1\omega^4 + \omega^2\omega^3,\\
d\omega^4 &= \omega^1\omega^5 + 2\omega^2\omega^4,\\
d\omega^5 &= \omega^1\omega^6 + 3\omega^2\omega^5 + 2\omega^3\omega^4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Тогда i-е нормальное продолжение группы G имеет в качестве своих структурных уравнений набор первых $i+1$ уравнений этой последовательности.

Можно легко найти последовательные формы ω^i; имеем

$$\begin{aligned}
&\omega^1 = u\,dx,\\
&\omega^2 = -\frac{du}{u} + v\,dx,\\
&\omega^3 = -\frac{dv}{u} + w\,dx,\\
&\omega^4 = -\frac{dw}{u} + \frac{w\,dv}{u^2} - \frac{w}{u^2}\,du + s\,dx,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

с уравнениями

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = f(x) = X(x),\\
&\overline{u} = \frac{u}{X'},\\
&\overline{v} = \frac{v}{X'} - \frac{X''}{X'^2},\\
&\overline{w} = \frac{w}{X'} - \frac{v}{u}\frac{X''}{X'^2} - \frac{1}{u}\frac{X'''}{X'^2} + \frac{2}{u}\frac{X''^2}{X'^3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ограничимся нахождением групп $\mathcal{G}$ с $h{+}2$ переменными, среди которых h инвариантов. В качестве θ^1 и θ^2 нужно взять линейные комбинации форм ω^i:

$$\begin{aligned}
&\theta^1 \equiv \omega^\alpha + p_{\alpha-1}\omega^{\alpha-1} + \ldots + p_2\omega^2 + p_1\omega^1 = 0,\\
&\theta^2 \equiv \omega^\beta + q_{\beta-1}\omega^{\beta-1} + \ldots + q_2\omega^2 + q_1\omega^1 = 0\\
&\qquad\qquad (\beta > \alpha \geqslant 1).
\end{aligned}$$

Если $\alpha > 1$, то $d\theta^2$ содержит член $\omega^1\omega^{\beta+1}$, который не может сохраниться в силу самих уравнений системы; следовательно, $\alpha = 1$, и система принимает вид [1])

$$\begin{aligned}
&\theta^1 \equiv \omega^1 = 0,\\
&\theta^2 \equiv \omega^\alpha + p_{\alpha-1}\omega^{\alpha-1} + \ldots + p_2\omega^2 = 0.
\end{aligned}$$

---

[1]) Из общих соображений следует, что система (3), первые интегралы которой являются переменными группы $\mathcal{G}$, инвариантна относительно линейного стабилизатора G. Это можно доказать простым геометрическим рассуждением: стабилизатор группы $G^{(\beta)}$ есть $\delta\omega^\beta = \omega^1$; следовательно, уравнения $\theta^1 = \theta^2 = 0$ сохраняются при замене ω^β на (ω^β + произвольное кратное ω^1).

Легко убедиться, что здесь показатель α не может превышать 4. Следовательно, имеем только три возможных случая.

1-й случай:

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0, \qquad \theta^2 \equiv \omega^2 = 0$$

с дифференциалами

$$d\theta^1 = \theta^1\theta^2, \qquad d\theta^2 = \theta^1\omega^3;$$

систатическая система сводится к $\theta^1 = 0$; существенного инварианта нет. Группа $\mathcal{G}$ преобразует переменные x, u по формулам

$$\overline{x} = X, \qquad \overline{u} = \frac{u}{X}.$$

2-й случай:

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0, \qquad \theta^2 \equiv \omega^3 + \alpha\omega^2$$

с дифференциалами

$$d\theta^1 = \theta^1\omega^2, \qquad d\theta^2 = \alpha\theta^1\theta^2 + \theta^1\omega^4 + (d\alpha - \alpha^2\theta^1 - \theta^2)\omega^2.$$

Систатическая система имеет вид

$$\theta^1 = 0, \qquad d\alpha - \alpha^2\theta^1 - \theta^2 = 0.$$

Следовательно, существенных инвариантов нет, и можно положить $\alpha = 0$. Переменные группы $\mathcal{G}$ — первые интегралы x и v системы $\omega^1 = \omega^3 = 0$. Уравнения группы принимают вид

$$\overline{x} = X, \qquad \overline{v} = \frac{v}{X'} - \frac{X''}{X'^2},$$

и имеем

$$d\theta^1 = \theta^1\omega^2, \qquad d\theta^2 \equiv \omega^4 + \alpha\omega^3 + \beta\omega^2 = 0.$$

3-й случай:

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0, \qquad \theta^2 \equiv \omega^4 + \alpha\omega^3 + \beta\omega^2 = 0$$

с дифференциалами

$$\begin{aligned} &d\theta^1 = \theta^1\omega^2,\\ &d\theta^2 = -\alpha\omega^2\omega^3 + \alpha\theta^1\theta^2 + \theta^1\omega^5 + \left[d\alpha + (\beta - \alpha^2)\theta^1\right]\omega^3 + (d\beta - 2\theta^2 + \alpha\beta\theta^1)\omega^2; \end{aligned}$$

здесь нужно положить $\alpha = 0$ и

$$d\theta^2 = \theta^1\omega^5 + \beta\theta^1\omega^3 + (d\beta - 2\theta^2)\omega^2.$$

Систатическая система имеет вид

$$\theta^1 = 0, \qquad d\beta - 2\theta^2 = 0,$$

следовательно, никакого существенного инварианта нет. Коэффициент β можно считать нулевым, и тогда

$$d\theta^1 = \theta^1\omega^2, \qquad d\theta^2 = \theta^1\omega^5 - 2\theta^2\omega^2.$$

Переменные, преобразуемые группой $\mathcal{G}$ — это первые интегралы системы $\omega^1 = \omega^2 = 0$, а именно, x и $uw - \frac{1}{2}v^2 = \xi$. Алгебраические уравнения имеют вид

$$\overline{x} = X, \qquad \overline{\xi} = \frac{\xi}{X'^2} - \frac{X'''}{X'^3} + \frac{3}{2}\frac{X''^2}{X'^4}.$$

Заметим, что все эти группы не имеют существенных инвариантов; но можно найти группу $\mathcal{G}$, изоморфную G, с 6-ю переменными, одна из которых — существенный инвариант. В Мемуаре Э. Картана[1]) содержится перечень групп с тремя переменными, так же как и некоторые другие примеры. Отметим только следующую группу, изоморфную группе $\overline{x} = X(x)$, $\overline{y} = Y(y)$:

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = X(x),\\
&\overline{y} = Y(y),\\
&\overline{z} = z\sqrt{\frac{X'}{Y'}},\\
&\overline{t} = \frac{t}{\sqrt{X'Y'}} - z\frac{X''}{X'\sqrt{X'Y'}} - \frac{1}{z}\frac{Y''}{Y'\sqrt{X'Y'}}.
\end{aligned}$$

Замечание. Задача, которую мы только что решили, лежит в основе определения различных *геометрических объектов* (аналитических) в смысле Веблена и Схоутена. Например, последние формулы определяют геометрический объект с двумя компонентами z и t, рассматриваемый по отношению к бесконечномерной группе $\overline{x} = f(x)$, $\overline{y} = \varphi(y)$; две последние формулы указывают закон, по которому эти две компоненты преобразуются при преобразованиях из исходной группы. Классический геометрический объект — квадратичная дифференциальная форма $g_{ij}dx^i dx^j$, определенная ее *компонентами* g_{ij}. Эти g_{ij} преобразуются группой, изоморфной общей линейной группе с n переменными. Если положить $\omega^i = u^i_k dx^k$ и рассмотреть форму $(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2$, то коэффициенты $\sum\limits_i u^i_k u^i_h$ будут преобразовываться искомой группой.

---

[1]) Русский перевод: стр. 9 – 139 настоящего издания. — *Прим. ред.*

Выяснение, является ли группа G голоэдрическим или мериэдрическим продолжением группы $\mathcal{G}$. Мы скажем только несколько слов об этой второй задаче, полное решение которой содержится в цитированном выше Мемуаре Э. Картана. Вот идея этого решения.

Можно предположить, что к существенным инвариантам группы G присоединены существенные инварианты группы $\mathcal{G}$ (если они есть). Тогда можно считать, что переменные группы $\mathcal{G}$ являются первыми интегралами уравнений, получающихся приравниванием нулю первых s форм ω^i, входящих в структурные уравнения группы G. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^s$ — эти переменные. Имеем соотношения вида

$$\omega^i = a^i_k(x^1, \ldots, x^s; \xi^1, \ldots, \xi^q)\, dx^k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s),$$

где ξ не зависят от $x^1, \ldots, x^s$. Найдем преобразования группы G, соответствующие тождественному преобразованию группы $\mathcal{G}$. Поскольку они сохраняют формы ω^i, для этих преобразований группы G имеем

$$a^i_j(x^1, \ldots, x^s; \overline{\xi}^1, \ldots, \overline{\xi}^q) = a^i_j(x^1, \ldots, x^s; \xi^1, \ldots, \xi^q).$$

Коэффициенты a^j_i можно считать независимыми функциями от $\xi^1, \ldots, \xi^q$. Следовательно, всякое преобразование группы G, соответствующее тождественному преобразованию группы $\mathcal{G}$, сохраняет не только переменные $x^1, x^2, \ldots, x^s$, но также и переменные $\xi^1, \ldots, \xi^q$. Эти последние переменные вместе с первыми образуют первые интегралы уравнений, получающихся приравниванием нулю форм ω^i и форм $\dfrac{\partial(d\omega^i)}{\partial(dx^k)}$, и, возможно, еще форм $\dfrac{\partial(d\omega^i)}{\partial\omega^k}$, где $i, k = 1, 2, \ldots, s$. Действительно, имеем

$$\frac{\partial(d\omega^i)}{\partial(dx^k)} = \frac{\partial a^i_k}{\partial\xi^h} d\xi^h \pmod{\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s}.$$

Ясно, что действуя таким образом, шаг за шагом найдем все переменные группы G (точнее, все функции этих переменных), инвариантные при преобразованиях группы G, соответствующих тождественному преобразованию группы $\mathcal{G}$. Если в результате мы найдем столько независимых функций, каково число переменных, то группа G является голоэдрическим продолжением группы $\mathcal{G}$; в противном случае продолжение мериэдрическое. Знание одних только структурных уравнений позволяет в каждом случае определить это и даже узнать структуру инвариантной подгруппы G, соответствующей тождественному преобразованию группы $\mathcal{G}$. Детальное изложение содержится в Мемуаре Э. Картана (*Annales École Normale*, 1905). ^{1})

---

^{1}) Русский перевод: стр. 58–139 настоящего издания. — *Прим. ред.*

В случае, когда G — бесконечномерная группа преобразований одной переменной x, изоморфизм всегда голоэдрический, потому что тождественному преобразованию группы $\mathcal{G}$ всегда соответствует преобразование $\overline{x} = x$.

В приведенном выше примере I имеем

$$d\theta^1 = dz\omega^2.$$

Если z не константа, а инвариант, то

$$\frac{\partial(d\theta^1)}{\partial(dz)} = \omega^2;$$

тождественному преобразованию группы $\mathcal{G}$ соответствуют в G преобразования, которые сохраняют первые интегралы $\theta^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$, т. е. x и y; изоморфизм является голоэдрическим. Если z — константа, то изоморфизм — мериэдрический.

В примере II (с одной переменной, т. к. несущественный инвариант z равен нулю), имеем

$$d\theta^1 = \theta^1\omega^1, \qquad \frac{\partial(d\theta^1)}{\partial\theta^1} = \omega^1.$$

Система

$$\theta^1 \equiv \omega^2 = 0, \qquad \omega^1 = 0$$

показывает, что изоморфизм в этом случае голоэдрический.

B. Подгруппы Ли данной группы

Зададимся целью отыскать все подгруппы Ли данной группы. Мы уже видели, что некоторые очевидные подгруппы, как, например, подгруппа преобразований, сохраняющих данную точку, не всегда будут группами Ли, когда данная группа бесконечномерна; их мы рассматривать не будем.

В принципе, подгруппы Ли g (в дальнейшем будем рассматривать только такие) данной группы Ли G получаются присоединением к определяющим уравнениям группы Ли G новых уравнений таким образом, чтобы новая система уравнений определяла бы группу Ли. Трудность заключается в определении тех уравнений, которые нужно присоединить. Прежде всего, можно предполагать, что группа G нормальная, ибо в противном случае ее можно голоэдрически продолжить таким образом, что она станет нормальной, при этом подгруппа g продолжится автоматически. Тогда определяющие уравнения группы G будут иметь первый порядок, определяющие же уравнения подгруппы g могут быть первого порядка, но могут быть и более высокого.

Как бы там ни было, предположим, что к определяющим уравнениям группы G для получения определяющих уравнений группы g добавлено некоторое число алгебраических уравнений. В силу результатов предыдущего доклада, это означает, что группа g допускает в качестве инвариантов не только инварианты группы G, но и еще некоторое число инвариантов, среди которых столько независимых, сколько присоединено независимых алгебраических уравнений между исходными и преобразованными переменными. Может случиться, что таким образом будут получены все определяющие уравнения группы g. *В этом первом случае, группа g будет представлять собой совокупность преобразований из G, сохраняющих некоторое число независимых функций от переменных.* Эти функции можно назвать *характеристическими инвариантами* подгруппы g.

Теперь предположим, что для того, чтобы получить подгруппу g, к определяющим уравнениям группы G нужно прибавить новые уравнения в частных производных 1-го порядка. Вернемся к определению группы G как совокупности преобразований, сохраняющих n форм Пфаффа

$$\omega^i = a^i_k(x,u)dx^k \qquad (i=1,\dots,n;\quad k=1,\dots,p).$$

Преобразования, по которым переменные u преобразуются группой G, определяются уравнениями

$$a^i_k(\overline{x},\overline{u})d\overline{x}^k = a^i_k(x,u)dx^k,$$

или

$$a^i_k(\overline{x},\overline{u})\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^k} = a^i_k(x,u).$$

Известно, что эти уравнения относительно $u^1,\dots,u^p$ совместны, если $\overline{x}$ можно получить из x преобразованием группы G. Таким образом, исключение $\overline{x}$ из n^2 предыдущих уравнений даст определяющие уравнения группы G (после этого исключения переменных u не остается). Если предположить, что $\overline{x}$ можно получить из x преобразованием подгруппы g, то будут выполняться новые соотношения между величинами $x,\overline{x}$ и $\partial\overline{x}^m/\partial x^k$, т.е. алгебраические соотношения между переменными x, $\overline{x}$, u и $\overline{u}$. Иначе говоря, если рассматривать нормальное продолжение G^1 группы G (преобразующее переменные x и u) и соответствующее продолжение g^1 подгруппы g, то группа g^1 допускает новые инварианты — функции от x и u, которые добавляются к уже полученным существенным инвариантам — функциям только переменных x. Свойство преобразования группы G допускать эти инварианты эквивалентно свойству этого преобразования удовлетворять алгебраическим уравнениям и уравнениям в частных производных 1-го порядка, которые добавлены к определяющим уравнениям группы G, чтобы получить все (или часть) определяющие уравнения подгруппы g.

Если добавленные уравнения составляют все определяющие уравнения группы g (т. е. если определяющие уравнения группы g ограничиваются уравнениями 1-го порядка и образуют систему в инволюции), то группа g определяется тем, что имеет своими инвариантами некоторое число функций от переменных, преобразуемых группой G^1. В противном случае следует продолжить процесс, рассматривая переменные v, вводимые нормальным продолжением G^2 группы G; добавление новых определяющих уравнений (которые будут второго порядка относительно первоначальных переменных подгруппы g) даст новые инварианты подгруппы g — функции x, u, v; и так далее. Таким образом, мы придем к следующей теореме.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Если g является подгруппой нормальной группы Ли G, то существует нормальное продолжение $G^{(h)}$ группы G, такое что соответствующая подгруппа $g^{(h)}$ (продолжение g) определяется совокупностью преобразований группы $G^{(h)}$, которые сохраняют некоторое число функций от переменных, преобразуемых группой $G^{(h)}$.* Эти функции называются *характеристическими инвариантами* подгруппы g.

Эта теорема является обобщением хорошо известной теоремы о группах подстановок. Доказательство также приводит к различению характеристических инвариантов разных порядков, которые образуют непрерывную последовательность чисел, начинающуюся с целого числа $p \geqslant 0$ (где p — минимальный порядок определяющих уравнений, которые нужно добавить к определяющим уравнениям группы G, чтобы получить определяющие уравнения подгруппы g) и заканчивающуюся целым числом h. Эти порядки относятся к первоначальной группе G; по отношению к группе $G^{(h)}$ все эти инварианты имеют нулевой порядок.

Теперь приходят в голову несколько задач.

Первая задача. Можно ли характеристические инварианты подгруппы задать произвольно? Мы укажем метод решения; заметим сразу, что если некоторые функции даны в качестве характеристических инвариантов подгруппы, то необходимо, чтобы преобразования группы G, которые сохраняют эти функции, не сохраняли бы (все одновременно) функцию, независимую от данных инвариантов. Это ограничивает выбор характеристических инвариантов.

Второй важной задачей является нахождение различных *типов* подгрупп данной группы и нахождение представителей каждого типа. Две подгруппы относятся к одному типу, если они сопряжены во всей группе, т. е. если можно преобразовать одну в другую некоторым преобразованием всей группы. Всегда можно предположить, что существует нормальное продолжение $G^{(h)}$ группы G такое, что характеристические инварианты обеих групп будут функциями от переменных, преобразуемых группой $G^{(h)}$. Тогда обе подгруппы будут сопряжены, если они имеют одно и то же число независимых характеристических инвариантов и существует преобразование группы $G^{(h)}$, преобразующее характеристические инварианты первой подгруппы в характеристические инварианты второй. Возвращаясь к группе G, видим, что в обеих подгруппах должно быть одно и то же число независимых характеристических инвариантов нулевого порядка, и они должны преобразовываться друг в друга преобразованием группы G; характеристических инвариантов нулевого и первого порядков также должно быть поровну, и они должны преобразовываться друг в друга преобразованием $G^{(1)}$; и так далее. С другой стороны, множество преобразований группы G, сохраняющих различные характеристические инварианты нулевого порядка подгруппы g группы G, образует подгруппу g^*, в которой g сама будет подгруппой. Пусть γ^* — множество преобразований группы G, преобразующих характеристические инварианты g^*, т. е. сохраняющих подгруппу g^*; для того, чтобы две подгруппы группы g^* были сопряжены в G, необходимо и достаточно, чтобы они были сопряжены в γ^*.

Теперь предположим, что мы умеем находить различные типы подгрупп группы G, все характеристические инварианты которых имеют нулевой порядок, и представителей каждого типа, и предположим, что мы для каждого из этих представителей g^* умеем находить наибольшую подгруппу $\gamma^* \subset G$, которая оставляет его инвариантным. Аналогичные задачи для подгрупп, все характеристические инварианты которых имеют порядок один (или нуль), решаются тем же методом, если, исходя из каждого полученного представителя g^*, заменить для g^* всю группу G на γ^* (точнее на группу, которая получается из γ^* первым нормальным продолжением группы G). Таким образом, получим метод последовательного нахождения всех типов подгрупп данной группы и представителей каждого из этих типов.

Окончательно, приходим к следующим задачам:

1° *Для данной нормальной группы* G *найти различные системы характеристических инвариантов подгруппы нулевого порядка.*

2° *Определить, являются ли сопряженными две системы характеристических инвариантов нулевого порядка.*

3° *Для каждого типа системы характеристических инвариантов нулевого порядка найти соответствующую подгруппу.*

4° *Для данного представителя рассматриваемого типа найти наибольшую подгруппу G, которая оставляет его инвариантным.*

Все эти задачи можно решить, зная только структурные уравнения группы G. При этом характеристические инварианты будут задаваться как первые интегралы вполне интегрируемой системы Пфаффа, а структурные уравнения каждой подгруппы g и наибольшей группы γ, в которой g инвариантна, получаются при помощи чисто алгебраического процесса.

Идея этого метода такова. Предположим, что подгруппа g имеет s независимых характеристических инвариантов нулевого порядка (*помимо инвариантов самой группы G*).

Их можно рассматривать как первые интегралы системы Пфаффа вида

$$\theta^i \equiv \omega^i + \alpha^i_k \omega^{s+k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\quad k = 1, 2, \ldots, n - s). \tag{1}$$

Так как всякое преобразование из группы G (а, следовательно, и из подгруппы g) сохраняет формы ω, а преобразования g, очевидно, сохраняют систему (1), отсюда вытекает, что коэффициенты α^i_k являются инвариантами g, т. е. первыми интегралами системы (1). С другой стороны, $d\alpha^i_k$ являются линейными комбинациями дифференциалов $dI^1, dI^2, \ldots, dI^s$ характеристических инвариантов, но так как g сохраняет каждую форму θ^i, коэффициенты dI^k сами являются инвариантами и, следовательно, дифференциалы $d\theta^i$ можно выразить через одни только формы θ^k с коэффициентами-инвариантами. Если $s = 1$, то $d\theta^1 = 0$. Вычисление $d\theta^i$ приводит, как мы уже видели выше, к внешним формам второй степени, которые можно выразить в виде линейных комбинаций произведений

$$\theta^k\theta^h,\ \theta^k\omega^{s+h},\ \omega^{s+k}\omega^{s+h},\ d\alpha^i_k\omega^{s+k},\ \theta^k\varpi^\rho,\ \omega^{s+k}\varpi^\rho.$$

Так как $d\alpha^i_k$ являются линейными комбинациями θ^h, коэффициенты которых — функции инвариантов, мы положим

$$d\alpha^i_k = \gamma^i_{kh}\theta^h.$$

Следует учесть то обстоятельство, что формы ϖ^α можно выбрать в виде линейных комбинаций θ^k и ω^{s+k} таким образом, что $d\theta^i$ примет вид

$$\frac{1}{2}\gamma^i_{kh}\theta^k\theta^h.$$

Отсюда вытекают алгебраические соотношения между коэффициентами α^i_k; эти соотношения являются целыми алгебраическими и определяют в $(h-s)^2$-мерном пространстве коэффициентов α^i_k одно или несколько неприводимых алгебраических многообразий. Для каждого многообразия V координаты α^i_k можно выразить в виде функций параметров β^k, которые также являются инвариантами; тогда получим линейные соотношения между их ковариантными производными $\beta^k_{\cdot h}$ (коэффициент при θ^h в $d\beta^k$) и β^k. Естественно, эти соотношения должны быть совместны. Если исключение $\beta^k_{\cdot h}$ даст новые соотношения между β^k, то придем к алгебраическому многообразию, содержащемуся в V, которое тоже может оказаться приводимым.

Предположим, что этот частный случай не имеет места. Сопряжены ли различные подгруппы, соответствующие одному и тому же многообразию V? Пусть $I^1(x), \ldots, I^s(x)$ — инварианты одной из них, а $J^1(x), \ldots, J^s(x)$ — инварианты другой. Из уравнений

$$J^i(\overline{x}) = I^i(x), \qquad \omega^{s+h}(\overline{x}, \overline{u}, d\overline{x}) = \omega^{s+h}(x, u, dx)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s, \quad h = 1, 2, \ldots, n - s)$$

следует, что

$$\omega^i(\overline{x}, \overline{u}, d\overline{x}) = \omega^i(x, u, dx) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Если полученная таким образом система совместна, то, очевидно, существует преобразование группы G, преобразующее первую группу во вторую. Преобразования группы G, сохраняющие данную подгруппу, т. е. преобразующие характеристические инварианты этой подгруппы между собой, — это те, которые сохраняют коэффициенты α^i_k, т. е. инварианты β^k. Если среди инвариантов имеется s независимых (это можно установить, исследовав коэффициенты $\beta^k_{\cdot h}$), то подгруппа будет инвариантна лишь в себе самой; в противном случае, она инвариантна в более широкой группе.

Чтобы отойти от этих, по необходимости несколько расплывчатых, общих слов, рассмотрим несколько примеров.

Пример I. Рассмотрим группу параллельных переносов плоскости

$$\overline{x} = x + a, \qquad \overline{y} = y + b,$$

где

$$\omega^1 = dx, \quad \omega^2 = dy; \quad d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = 0.$$

Единственный возможный случай — это случай однопараметрической подгруппы. Тогда

$$\theta^1 \equiv \omega^2 + \alpha\omega^1,$$

и, следовательно,

$$d\theta^1 = d\alpha\omega^1;$$

значит, $d\alpha = 0$. Тогда α есть константа m (впрочем, любая); инвариант подгруппы имеет вид $y + mx$, а уравнения подгруппы —

$$\overline{x} = x + a, \qquad \overline{y} = y - ma.$$

Две подгруппы, соответствующие двум различным значениям m, не сопряжены, т. к. преобразование из G не может преобразовать уравнение $\omega^2 + m\omega^1 = 0$ в уравнение $\omega^2 + m'\omega^1 = 0$, если $m' \neq m$. С другой стороны, любая подгруппа инвариантна во всей группе, так как все преобразования группы сохраняют уравнение $\omega^2 + m\omega^1 = 0$, где m — данная константа.

Пример II. Рассмотрим группу

$$\overline{x} = ax, \qquad \overline{y} = ay + b,$$

где

$$\omega^1 = \frac{dx}{x}, \quad \omega^2 = \frac{dy}{x}; \qquad d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = \omega^2\omega^1.$$

Здесь также нужно положить $s = 1$.

Возьмем сначала

$$\theta^1 \equiv \omega^1 = 0, \qquad d\theta^1 = 0.$$

Имеем подгруппу, характеризующуюся инвариантом x. Это инвариантная подгруппа, так как любое преобразование из G сохраняет уравнение $\omega^1 = 0$. Ее уравнения имеют вид

$$\overline{x} = x \qquad \overline{y} = y + b,$$

где x — инвариант.

Теперь положим

$$\theta^1 \equiv \omega^2 + \alpha\omega^1;$$

имеем

$$d\theta^1 = (\theta^1 + d\alpha)\omega^1;$$

следовательно, $d\alpha + \theta^1 = 0$, Иначе говоря, α — инвариант подгруппы, и он определяется как решение вполне интегрируемого уравнения

$$d\alpha + \omega^2 + \alpha\omega^1 = 0.$$

Имеется бесконечное множество решений, и, следовательно, бесконечное множество подгрупп. Они сопряжены друг другу, поскольку если α, β — два решения, то система

$$\beta(\overline{x}, \overline{y}) = \alpha(x, y), \qquad \omega^1(\overline{x}, \overline{y}, d\overline{x}, d\overline{y}) = \omega^1(x, y, dx, dy)$$

влечет

$$\omega^2(\overline{x}, \overline{y}, d\overline{x}, \overline{y}) = \omega^2(x, y, dx, dy);$$

последняя система, будучи внешним образом продифференцирована, ведет себя как вполне интегрируемая в силу структурных уравнений группы. Общее значение α есть $(C - y)/x$, и уравнение имеет вид

$$\frac{C' - \overline{y}}{\overline{x}} = \frac{C - y}{x},$$

где x заменено на ax, а $\overline{x}$ — на $ay + b$. Отсюда $C' = aC + b$, что дает бесконечное множество преобразований группы G, переводящих C в C'.

Наконец, одна из полученных подгрупп инвариантна лишь в себе, так как всякое преобразование группы, сохраняющее уравнения $\theta = 0$, сохраняет также функцию α и, следовательно, принадлежит подгруппе.

Уравнения подгруппы, после замены b на $(1 - a)C$, принимают вид

$$\overline{x} = ax, \qquad \overline{y} - C = a(y - C).$$

При $C = 0$ получаем представителя рассматриваемого типа

$$\overline{x} = ax, \qquad \overline{y} = ay.$$

Пример III. Группа

$$\overline{x} = \frac{ax + b}{cx + d},$$

будучи продолжена, приводит к формам

$$\omega^1 = u\,dx, \qquad \omega^2 = \frac{du}{u} - \frac{v}{u}\,dx,$$
$$\omega^3 = -\frac{1}{u^2}\,dv + \frac{v}{u^3}\,du + \frac{1}{2}\frac{v^2}{u^3}\,dx$$

со структурными уравнениями

$$d\omega^1 = \omega^2\omega^1, \qquad d\omega^2 = \omega^3\omega^1, \qquad d\omega^3 = \omega^3\omega^2.$$

Найдем сначала двухпараметрические подгруппы. Положим

$$\theta^1 \equiv \omega^3 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^1.$$

Тогда

$$d\theta^1 \equiv (\alpha^2 - 2\beta)\omega^1\omega^2 + (\theta^1 + d\alpha)\omega^2 + (\alpha\theta^1 + d\beta)\omega^1.$$

Правая часть должна тождественно равняться нулю, поэтому

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha^2, \qquad d\alpha + \theta^1 = 0$$

и, таким образом, характеристический инвариант α удовлетворяет вполне интегрируемому уравнению

$$d\alpha + \omega^3 + \alpha\omega^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^1 = 0.$$

Здесь все соответствующие подгруппы снова сопряжены: достаточно рассмотреть вполне интегрируемую систему

$$\begin{gathered}\alpha(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) = \alpha(x, u, v),\\ \omega^1(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}, d\overline{x}, d\overline{u}, \overline{v}) = \omega^1(x, u, v, dx, du, dv),\\ \omega^2(\overline{x}, \dots) = \omega^2(x, \dots),\end{gathered}$$

общее решение которой зависит от двух параметров. Наибольшие подгруппы, в которых эти подгруппы инвариантны, совпадают с ними, так как всякое преобразование из G, сохраняющее g, сохраняет уравнения Пфаффа, определяющее α, а, следовательно, и коэффициенты α и $\alpha^2/2$ этого уравнения.

Структурные уравнения подгруппы имеют вид

$$d\omega^1 = \omega^2\omega^1, \qquad d\omega^2 = -(d\alpha + \alpha\omega^2)\omega^1;$$

инвариант α — несущественный, и эта группа подобна группе, которая получается, если положить в предыдущих уравнениях $\alpha = 0$, $d\alpha = 0$, т. е. написать

$$d\omega^1 = \omega^2\omega^1, \qquad d\omega^2 = 0.$$

Уравнение относительно α легко интегрируется:

$$\alpha = \frac{v}{u^2} + \frac{2}{u(x - C)}.$$

Если положить, например, $\alpha = \frac{v}{u^2}$, то из уравнений

$$\overline{x} = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \overline{u} = u\frac{(cx+d)^2}{ad-bc}, \quad \overline{v} = \frac{v(cx+d)^4 + 2cu(cx+d)^3}{ad-bc}$$

следуют уравнения подгруппы $c = 0$,

$$\overline{x} = ax + b.$$

Теперь найдем однопараметрические подгруппы. Положим

$$\theta^1 \equiv \omega^2 + \alpha\omega^1,$$
$$\theta^2 \equiv \omega^3 + \beta\omega^1.$$

Имеем

$$d\theta^1 = (\theta^2 + \alpha\theta^1 + d\alpha)\omega^1,$$
$$d\theta^2 = \theta^2\theta^1 + (2\beta\theta^1 - \alpha\theta^2 + d\beta)\omega^1;$$

следовательно, если взять

$$d\alpha + \alpha\theta^1 + \theta^2 = 0, \qquad d\beta + 2\beta\theta^1 - \alpha\theta^2 = 0,$$

то система станет вполне интегрируемой.

В зависимости от того, будут ли инварианты α и β независимыми или нет (это зависит от величины $\alpha^2 + 2\beta$), возможны два различных случая.

1° Если $\alpha^2 + 2\beta = 0$, т.е. $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2$, то имеем одно соотношение

$$d\alpha + \alpha\theta^1 + \theta^2 \equiv d\alpha + \omega^3 + \alpha\omega^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^1 = 0,$$

которое вместе с $\theta^1 = 0$ образует вполне интегрируемую систему. Все полученные таким образом подгруппы сопряжены. Однако преобразования группы G, сохраняющие одну из этих подгрупп, сохраняют один инвариант подгруппы, но не обязательно другой: они оставляют инвариантным только уравнение $\theta^1 = 0$, которое дает этот другой инвариант; следовательно, g — инвариантная подгруппа двухпараметрической подгруппы группы G. Можно взять в качестве α уже определенную функцию v/u^2; тогда другой инвариант задается уравнением $du/u = 0$, и уравнение подгруппы g имеет вид

$$\overline{x} = x + a.$$

2° Если $\alpha^2 + 2\beta \neq 0$, в плоскости α, β нужно различать две области, разделенные параболой $\alpha^2 + 2\beta = 0$. Подгруппы, соответствующие точкам одной из этих областей, сопряжены друг другу. Точки одной области соответствуют подгруппам, образованным преобразованиями, имеющими две данные действительные двойные точки; точки другой области — подгруппам, образованным преобразованиями, имеющими две комплексно-сопряженные двойные точки. Каждая из этих подгрупп инвариантна только в самой себе, тогда как подгруппы случая 1°, образованные параболическими преобразованиями с данной двойной точкой, инвариантны в группе всех дробно-линейных преобразований, сохраняющих эту двойную точку.

Пример IV. Возьмем в качестве G бесконечномерную группу преобразований пространства одной переменной. Напомним ее структурные уравнения:

$$\begin{aligned}
d\omega^1 &= \omega^1\omega^2,\\
d\omega^2 &= \omega^1\omega^3,\\
d\omega^3 &= \omega^1\omega^4 + \omega^2\omega^3,\\
d\omega^4 &= \omega^1\omega^5 + 2\omega^2\omega^4,\\
d\omega^5 &= \omega^1\omega^6 + 3\omega^2\omega^5 + 2\omega^3\omega^4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= u\,dx,\\
\omega^2 &= -\frac{du}{u} + v\,dx,\\
\omega^3 &= -\frac{dv}{u} + w\,dx,\\
\omega^4 &= -\frac{dw}{u} + \frac{v\,dv}{u^2} - \frac{w}{u^2}\,du + s\,dx,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Если взять в качестве G группу, которая преобразует только переменную x, то подгруппа может иметь характеристический инвариант нулевого порядка, только если она сохраняет x. Тогда она сводится к тождественному преобразованию.

Пусть α — минимальный порядок характеристических инвариантов подгруппы g; очевидно, существует один инвариант этого порядка, заданный уравнением вида

$$\theta = \omega^{\alpha+1} + p_\alpha\omega^\alpha + p_{\alpha-1}\omega^{\alpha-1} + \ldots + p_2\omega^2 + p_1\omega^1 = 0,$$

где можно положить $p_1 = 0$, поскольку линейный стабилизатор группы $G^{(\alpha)}$ задается уравнением $\delta\omega^{\alpha+1} = c\omega^1$. Непосредственно проверяется, что α не может превышать 3: если, например, $\alpha = 4$, то в $d\theta$ есть член $3\omega^2\omega^5$, который не сокращается.

Следовательно, возможны три случая.

1° $\alpha = 1$. Тогда можно предположить, что

$$\theta = \omega^2,$$

и, следовательно,

$$d\theta = \omega^1\omega^3 = \omega^1\varpi$$

(ω^3 для группы $G^{(1)}$ играет роль формы ϖ). Нужно, следовательно, чтобы ϖ здесь была бы вида $A\omega^1$. Все подгруппы, полученные таким образом, сопряжены, потому что для любых двух из них существует преобразование группы G, преобразующее инвариант первой подгруппы в функцию инварианта второй; достаточно проинтегрировать уравнения

$$\omega^1(\overline{x}, \overline{u}, d\overline{x}) = \omega^1(x, u, dx),$$
$$\omega^2(\overline{x}, \overline{u}, d\overline{x}, d\overline{u}) = \omega^2(x, u, dx, du)$$

(соотношения между внешними дифференциалами показывают, что они составляют вполне интегрируемую систему, т. к. соотношение $\omega^1\omega^3 = 0$ выполнено в обеих подгруппах). Каждая из этих подгрупп инвариантна в группе, определенной уравнениями

$$d\omega^1 = \omega^1\omega^2, \qquad d\omega^2 = 0.$$

Уравнение $\omega = 0$ записываются в виде

$$\frac{du}{u} - v dx = 0$$

и имеет первый интеграл

$$\frac{u}{H(x)} = I.$$

Непосредственно получаем определяющие уравнения подгруппы, сохраняющей форму

$$\omega^1 = u\, dx = I\, H(x)\, dx;$$

поскольку I — инвариант, подгруппа определяется так:

$$H(\overline{x})\, d\overline{x} = H(x)\, dx.$$

Сопряженную группу получим, полагая

$$H(x) = 1, \quad \text{откуда} \quad \overline{x} = x + a.$$

Наибольшая группа, в которой сопряженная группа инвариантна, сохраняет две формы

$$u\,dx \quad \text{и} \quad \frac{du}{u} - \frac{H'(x)}{H(x)}\,dx;$$

если положить $\overline{x} = X(x)$, получим определяющие уравнения

$$\frac{X''}{X'} + \frac{H'(X)}{H(X)}X' = \frac{H'(x)}{H(x)},$$

т. е.

$$X'' = 0, \quad \text{если} \quad H(x) = 1.$$

2° $\alpha = 2$. Можем положить

$$\theta = \omega^3 + \beta\omega^2,$$

тогда

$$d\theta = \omega^2\theta + \omega^1\omega^4 + \beta\omega^1\omega^2 + d\beta\omega^2.$$

Полагая

$$\omega^4 = \varpi = A\omega^1 + B\omega^2 + C\theta,$$

находим

$$d\theta = (B + \beta)\omega^1\omega^2 + C\omega^1\theta + \omega^2(\theta - d\beta),$$

откуда

$$B = -\beta, \quad C = 0, \quad d\beta = \theta; \quad \omega^1\omega^4 = -\beta\omega^1\omega^2.$$

Так как уравнение

$$d\beta = \omega^3 + \beta\omega^2$$

вполне интегрируемо, легко установить, что все полученные подгруппы сопряжены, и что каждая из них инвариантна лишь в себе.

Структурные уравнения одной из этих подгрупп таковы:

$$d\omega^1 = \omega^1\omega^2, \qquad d\omega^2 = \omega^1(d\beta - \beta\omega^2),$$

где инвариант β несущественный; можно положить $\beta = 0$, и тогда

$$d\omega^1 = \omega^1\omega^2, \qquad d\omega^2 = 0.$$

Вычислить β легко: надо проинтегрировать уравнение

$$d\beta + \frac{dv}{u} + \beta\frac{du}{u} - (w + \beta v)\,dx = 0.$$

Это даст

$$\beta = \frac{H(x) - v}{u}, \quad \text{откуда} \quad v = H(x) - \beta u.$$

Определяющие уравнения подгруппы g выражают инвариантность двух форм

$$\begin{aligned} &\omega^1 = u\,dx, \\ &\omega^2 = -\frac{du}{u} + v\,dx = -\frac{du}{u} + H(x)\,dx - \beta u\,dx; \end{aligned}$$

так как β — инвариант, вторую форму можно заменить на

$$(\omega^2)^* = -\frac{du}{u} + H(x)\,dx.$$

Тогда получим соотношения

$$\overline{x} = X, \qquad \overline{u} = \frac{u}{X'}$$

и определяющее уравнение подгруппы:

$$\frac{X''}{X'} + H(X)X' = H(x).$$

Полагая $H(x) = 0$, получим

$$X'' = 0, \quad \text{или} \quad \overline{x} = ax + b.$$

3° $\alpha = 3$. Можем положить

$$\theta = \omega^4 + \beta\omega^3 + \gamma\omega^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} d\theta = \omega^1\omega^5 + 2\omega^2(\theta - \beta\omega^3) + \beta\omega^1(\theta - \beta\omega^3 - \gamma\omega^2) + \\ + \beta\omega^2\omega^3 + \gamma\omega^1\omega^3 + d\beta\omega^3 + d\gamma\omega^2. \end{aligned}$$

Рассматривая члены без ω^1, видим, что $\beta = 0$. Следовательно,

$$d\theta = \omega^1\omega^5 + \gamma\omega^1\omega^3 + \omega^2(2d\theta - d\gamma) = 0,$$

откуда

$$d\gamma = 2\theta, \qquad \omega^1\omega^5 = -\gamma\omega^1\omega^3.$$

Следовательно, инвариант γ задается уравнением

$$d\gamma = 2\omega^4 + 2\gamma\omega^2.$$

Все полученные группы сопряжены и каждая из них инвариантна лишь в себе самой. Их структурные уравнения таковы:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega^1\omega^2, \\ d\omega^2 &= \omega^1\omega^3, \\ d\omega^3 &= \omega^2\omega^3 + \omega^1\left(\frac{1}{2}d\gamma - \gamma\omega^2\right); \end{aligned}$$

но, так как инвариант γ — несущественный, в предыдущем уравнении можно положить $\gamma = 0$, и снова получаем структурные уравнения проективной группы.

Вычислить γ легко: достаточно проинтегрировать уравнение

$$d\gamma + 2\frac{dw}{u} - 2v\frac{dv}{u^2} + 2\left(\frac{\gamma}{u} + \frac{w}{u^2}\right)du - 2(s + \gamma v)dx = 0.$$

Это даст искомый характеристический инвариант

$$\gamma = -\frac{2w}{u} + \frac{v^2}{u^2} + \frac{H(x)}{u^2}.$$

Инвариантность этой функции дает определяющие уравнения подгруппы:

$$2\frac{X'''}{X'} - 3\frac{(X'')^2}{(X')^2} + H(X)(X')^2 = H(x).$$

Замечание. Мы решили следующую задачу: *найти все группы Ли с одной переменной*; кроме бесконечномерной группы всех преобразований имеются только конечномерные группы с одним, двумя или тремя параметрами. Это — классический результат.

Для каждого типа конечномерных групп с одной переменной преобразования, показывающие, как G преобразует характеристический инвариант различных подгрупп рассматриваемого типа, образуют функциональную группу, так как преобразуемые элементы — функции; действительно, в каждом случае инвариант характеризуется функцией $H(x)$, и формулы, выражающие преобразованную функцию $\overline{H} = H(X)$, присоединенные к формуле $\overline{x} = X$, дают заведомо различные группы с двумя переменными (x и H), изоморфные группе G, в чем можно убедиться несложным вычислением.

Библиографические сведения [1]

Относительно первой части этого доклада см. статью Э. Картана в *Annales de l'École Normale* (1905) [2], а относительно второй — см. статью о подгруппах бесконечномерных групп в *Annales de l'École Normale* (1908). В последней статье содержится эффективное определение всех групп Ли с двумя переменными, рассматриваемых как подгруппы общей группы преобразований пространства двух переменных.

Последняя статья о бесконечномерных группах (*Annales de l'École Normale*, 1909) посвящена определению простых групп. *Собственно простые* бесконечномерные группы делятся на транзитивные простые группы и интранзитивные простые группы.

Имеется четыре больших класса транзитивных групп, указанных уже Ли:

1° группа общих преобразований [3] n-мерного пространства;

2° группа преобразований с якобианом, равным 1 (т. е. сохраняющих объем);

3° группа контактных преобразований n-мерного пространства;

4° группа, которая сохраняет 2-форму

$$dx^1dx^2 + \ldots + dx^{2n-1}dx^{2n}.$$

Интранзитивные простые группы соответствуют транзитивным простым группам (бесконечномерным или конечномерным):

1° группа

$$\overline{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^p), \quad \overline{y}^k = y^k$$
$$(f^i \text{ — произвольные функции});$$

2° предыдущая группа с

$$\frac{D(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} = 1;$$

3° группа, сохраняющая уравнение

$$dz - p_1dx^1 - \ldots - p_ndx^n = 0 \quad (\mathrm{mod}\; dy^1 \ldots dy^p),$$

где y^k — инварианты;

---

[1] Эти сведения добавлены редактором французского издания Полного собрания сочинений Э. Картана. — *Прим. ред.*

[2] Русский превод: стр. 58–139 настоящего издания. — *Прим. ред.*

[3] В современной терминологии — диффеоморфизмов. — *Прим. ред.*

4° группа, сохраняющая 2-форму

$$dx^1 dx^2 + \ldots + dx^{2n-1} dx^{2n} \quad (\mathrm{mod}\ dy^1, \ldots, dy^n),$$

где y^k — инварианты;

5° произвольная конечномерная простая группа, где параметры рассматриваются как произвольные функции от p независимых тождественно преобразуемых переменных.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ