

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: Ю. И. МАНИН, С. П. НОВИКОВ

49

ТРУДЫ СЕМИНАРА
Н. БУРБАКИ
за 1991 г.

СБОРНИК СТАТЕЙ

Перевод с английского
и французского
под редакцией
В. А. ВАСИЛЬЕВА и
М. И. МОНАСТЫРСКОГО



МОСКВА «МИР» 1998

УДК 517 + 514
ББК 22.16 + 22.151
Т77

Труды семинара Н. Бурбаки за 1991 г.: Сб. статей: Пер. с
Т77 англ. и франц./Сост. В. А. Васильев и М. И. Монастырский. —
М: Мир, 1998. — 413 с., ил.

ISBN 5-03-003259-2

Продолжение публикации трудов известного семинара Н. Бурбаки, начатой издательством «Мир» в 1990 г. В очередной выпуск включены доклады, посвященные новейшим достижениям в различных областях математики: алгебраической геометрии, современной математической физики, теории динамических систем и др. Среди авторов такие известные французские математики, как Ж.-П. Бургиньон, Ж.-К. Йоккоз, О. Матье и др.

Для математиков разных специальностей, аспирантов и студентов.

ББК 22.16+22.151



Издание осуществлено при поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований согласно проекту 96-01-14108

Редакция литературы по математическим наукам

© Société Mathématique de France, 1991
Tous droits réservés

© состав. В. А. Васильев, М. И. Монастырский, 1998

© перевод на русский язык, «Мир», 1998

ISBN 5- 03-003259-2 (рус.)

Настоящим сборником продолжается издание на русском языке трудов семинара Бурбаки (сборники «Труды семинара Н. Бурбаки за 1988 г.», «Труды семинара Н. Бурбаки за 1989 г.» и «Труды семинара Н. Бурбаки за 1990 г.» были выпущены в 1990 г., 1991 г. и 1996 г. соответственно). Прочитанные на этом семинаре доклады традиционно отличаются высоким научным уровнем и отражают широкий спектр современных математических достижений. Большинство тем, затрагиваемых на семинаре Н. Бурбаки, в течение многих лет остаются актуальными и активно развиваются.

В настоящий сборник вошли доклады по алгебраической геометрии (Ж.-Б. Боста, Ж. Денефа, Ф. Лёзера), теории представлений (Г. Энъяра, О. Матье), современной математической физике (М. Россо, Ж.-П. Бургиньона), топологии (А. Грамэна, Ж. Скандалиса, Ж.-К. Сикорава), теории динамических систем (Ж.-К. Йоккоза, Ф. Комеца, П. Пансю) и др.

В целом сборник будет способствовать ознакомлению российских специалистов с достижениями мировой науки.

Пользуемся случаем выразить благодарность ряду авторов, любезно прочитавших рукописи переводов своих статей и приславших замечания.

*В. А. Васильев,
М. И. Монастырский*

ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКИХ БРОУНОВСКИХ КРИВЫХ

Жерар Бен Ару¹⁾

Введение

Мы дадим обзор некоторых новых результатов о геометрии траекторий плоского броуновского движения. По существу мы выбрали, с одной стороны, результаты Питмана и Йора о поведении при $t \rightarrow \infty$ некоторых броуновских функционалов, таких, например, как время, проведенное в данном множестве, или число оборотов вокруг одной или нескольких точек, и, с другой стороны, результаты о геометрии броуновской кривой в конечные моменты времени; последние мы взяли в основном из лекций Лё Галля в Сан-Флур. Мы советуем всем заинтересованным читателям ознакомиться с этим очень насыщенным и ясно написанным курсом.

1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Напомним вкратце некоторые основные свойства. Всюду ниже через $(B_t)_{t \geq 0}$ обозначается плоское броуновское движение, начинающееся из точки $z_0 \in \mathbb{C}$, т.е. случайный процесс $B_t = B_t^1 + iB_t^2$, параметризованный временем $t \in \mathbb{R}_+$, с почти наверное непрерывными траекториями, такой, что:

- $B_0 = z_0$ почти наверное;
- вещественные процессы $(B_t^1)_{t \geq 0}$ и $(B_t^2)_{t \geq 0}$ независимы;
- для $i \in \{1, 2\}$ и для всех $0 < t_1 < \dots < t_n$ случайная величина $B_{t_n}^i - B_{t_{n-1}}^i$ не зависит от $(B_{t_1}^i, \dots, B_{t_{n-1}}^i)$ и имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $t_n - t_{n-1}$.

1.1. Конформная инвариантность и косое произведение. Ясно, что образ броуновского движения при изометрии является броуновским движением. Леви следующим образом обобщил этот результат:

Теорема 1. Если f — голоморфное отображение открытого множества U из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ (причем $z_0 \in U$) и $\tau_U = \inf\{t \geq 0, B_t \notin U\}$, то существует броуновское движение $(\zeta_t)_{t \geq 0}$, такое, что $f(B_t) = \zeta_t$, для всех $t \in [0, \tau_U[$, где $U_t = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds$.

¹⁾Ben Arous Gérard. Géométrie de la courbe brownienne plane. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 730, Astérisque, 201-202-203, 1991, p. 7–42.

Этот результат доказывается просто: если $f = g + ih$, то функции g и h гармонические и $g(B_t)$, $h(B_t)$ — локальные мартингалы. Формула Ито и уравнения Коши–Римана показывают, что этим локальным мартингалам соответствует один и тот же возрастающий процесс U_t и что процесс $\langle g(B_t), h(B_t) \rangle$ нулевой. Это влечет за собой существование двух независимых вещественных броуновских движений β_t и θ_t , таких, что $g(B_t) = \beta_{U_t}$, $h(B_t) = \theta_{U_t}$ при $t \in [0, \tau_U[$. $\square$

Отсюда выводится представление плоского броуновского движения в виде «косого произведения»: при $z_0 \neq 0$ существует комплексное броуновское движение $\zeta_t = \beta_t + i\theta_t$, начинающееся в нуле и такое, что

$$B_t = z_0 \exp \zeta_{U_t},$$

где

$$U_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2} = \inf \left(u \geq 0, \int_0^u \exp(2\beta_v) dv > t \right).$$

Итак, если $R_t = |B_t|$ и $\phi(t)$ обозначает непрерывную версию аргумента $\arg B_t$ процесса B_t , такую, что $\phi(0) = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$, то $R_t = |z_0| \exp \beta_{U_t}$ и $\phi(t) = \theta_{U_t}$. Следовательно, $\phi(t)$ — вещественное броуновское движение, у которого время t изменено некоторыми независимыми «часами» (в данном случае U_t).

Из этого представления совсем просто выводится, что

(а) плоское броуновское движение возвратно, т.е. для любого открытого множества $D \subset \mathbb{C}$ почти наверное для любого t существует $T > t$, такое, что $B_T \in D$;

(б) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = +\infty$ и $\liminf_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = -\infty$ с вероятностью 1.

Действительно, $|B_t| = |z_0| \exp \beta_{U_t}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} U_t = +\infty$. Поскольку $\limsup_{v \rightarrow \infty} \beta_v = +\infty$ и $\liminf_{v \rightarrow \infty} \beta_v = -\infty$, утверждение (а) справедливо для шара D с центром в нуле, а этого достаточно, чтобы доказать (а). Кроме того, $\phi(t) = \theta_{U_t}$ и $U_t \rightarrow \infty$, откуда следует (б).

В связи с этими двумя свойствами плоского броуновского движения возникают два существенных вопроса.

С одной стороны, траектория плоского броуновского движения бесконечно много раз посещает любое открытое множество $D \subset \mathbb{C}$. Можно спросить, какую долю времени она в нем проводит, или, точнее, каково асимптотическое поведение $\int_0^t 1_{B_s \in D} ds$ при $t \rightarrow \infty$. Ответ давно известен: это время имеет порядок $\log t$.

Более подробное изложение этой теоремы, принадлежащей Каллианпуру и Роббинсу, см. ниже, в п. 2.4(б).

С другой стороны, утверждение (б) показывает, что броуновское движение совершает бесконечно много оборотов вокруг нуля при

$t \rightarrow \infty$ ». Можно также исследовать точное асимптотическое поведение функции $\phi(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Ответ дает теорема Спитцера: $\phi(t)$ имеет порядок $\log t$; подробнее см. ниже п. 2.4(а).

Питман и Йор создали чрезвычайно гибкий метод, позволяющий, во-первых, показать, что эти две теоремы (Каллианпура–Роббинса и Спитцера) выражают два аспекта одного и того же явления, и, во-вторых, существенно обобщить их формулировки. Обзор этих результатов содержится в разд. 2.

1.2. Хаусдорфова размерность броуновской кривой. Броуновская кривая $\{B_s, s \in [0, \infty)\}$ имеет меру нуль. Действительно,

$$m(\{B_s, s \in [0, \infty)\}) = \int dy P(T_y < \infty),$$

где $T_y = \inf(s, B_s = y)$.

Но $P(T_y < \infty) = 0$ для всех $y \neq z_0$ (т.е. эти точки являются полярными). Тем не менее можно проверить, что хаусдорфова размерность этой кривой равна двум. Более точный результат сформулирован ниже, см. п. 3.2.

Леви [Lé4] так объясняет различие между броуновской кривой (меры нуль) и кривой Пеано:

«Чтобы заполнить область траекторией броуновского движения без бесконечно больших осцилляций, потребовались бы методичные действия, которые случай не может осуществить».

В частности, броуновская траектория много раз сама себя пересекает. Из работ Дворецкого, Эрдёша и Какутани известно, что у нее существуют кратные точки любой, как конечной, так и бесконечной кратности. В разд. 3 мы изложим новые результаты о самопересечениях плоской броуновской кривой, подчеркивая основной рабочий инструмент: локальное время самопересечения, т.е. случайную меру Радона, сосредоточенную в моментах кратности. Близко связан с предыдущим вопрос об объеме трубчатой окрестности броуновской кривой. Мы коснемся его в разд. 4, не останавливаясь, однако, на результатах о больших отклонениях (которые были затронуты Шнитманом в его докладе на семинаре Бурбаки в феврале 1987 г.; см. также [DV]).

Наконец, в разд. 5 мы покажем, насколько сложна геометрия броуновской кривой, приведя новые результаты относительно выпуклой оболочки, связанных компонент дополнения и точек разреза этой кривой на конечном отрезке времени. Как сказал Леви по этому поводу (цитируя Лейбница), «Скорее наше воображение устанет постигать, чем природа — предоставлять».

Введем следующие обозначения:

$B_{[u,v]}$ — броуновская траектория между моментами времени u и v :

$$B_{[u,v]} = \{B_s, s \in [u, v]\} \quad \text{при } 0 \leq u < v;$$

$m(A)$ — мера Лебега множества A ;

$D(a, r)$ — круг в $\mathbb{C}$ радиуса r с центром a , $D = D(0, 1)$;

$T_A = \inf(t, B_t \in A)$ — время достижения множества A броуновской кривой B_s .

2. ЧИСЛО ОБОРОТОВ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Питман и Йор ([PY1] и [PY2]) выделили в доказательствах двух самых важных теорем о поведении на большом отрезке времени плоского броуновского движения (т. е. теорем Спитцера и Каллианпура-Роббинса) общие соображения и выработали образ действий (в двух словах: «изменять шкалу в представлении броуновского движения в виде косоугольного произведения»), который позволил им значительно обобщить упомянутые теоремы и установить их связь с другими вопросами. При этом они доказали большое число новых результатов и обнаружили область, которая кажется неисчерпаемой. Мы не можем затронуть здесь все аспекты их работ. Мы лишь введем унифицирующий формализм «пределов в логарифмической шкале» (не слишком удачный перевод выражения *log-scaling limit*) и укажем несколько следствий.

2.1. Пределы в логарифмической шкале: определения. Обозначим через $\Omega(\mathbb{C})$ пространство непрерывных комплекснозначных функций на $[0, \infty[$.

Пусть $(\psi(h, \omega), h > 0, \omega \in \Omega(\mathbb{C}))$ — случайный процесс и φ — измеримая функция на $\Omega(\mathbb{C})$.

Пусть B — броуновское движение, начинающееся в точке $z_0 \neq 0$. Через ζ будем обозначать начинающееся в нуле броуновское движение, входящее в разложение процесса B в косоугольное произведение, и положим при $h > 0$

$$\zeta_u^h = \frac{1}{h} \zeta_{h^2 u}.$$

Будем говорить, что процесс ψ сходится к φ в логарифмической шкале (с полюсом 0), если для всякого начинающегося в $z_0 \neq 0$ броуновского движения B разность $\psi(h, B) - \varphi(\zeta^h)$ сходится по вероятности к нулю при $h \rightarrow \infty$.

Ясно, что если $\psi(h)$ сходится к φ в логарифмической шкале, то $\psi(h)$ сходится к φ по распределению. Однако все сходимости по распределению, получаемые таким образом, имеют место одновременно.

Можно было бы также определить понятие предела в логарифмической шкале с полюсом, отличным от нуля. Все сходимости по распределению, получаемые с помощью предела в логарифмической шкале с разными полюсами, также имеют место одновременно.

2.2. Некоторые примеры. Приведем полезные для дальнейшего примеры последовательности случайных моментов времени, которая сходится в логарифмической шкале. Все эти моменты будут иметь вид

$$V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}.$$

а) Если $T_h = \inf(t, R_t = e^{vh})$, $v \in \mathbb{R}$, то ясно, что $V_h = \sigma_v(\zeta^{(h)})$ (где $\sigma_v = \inf(t, \beta_t = v)$) и, следовательно, V_h сходится в логарифмической шкале к σ_v (это тавтология).

б) Если $T_h = e^{2vh}$, где $v > 0$, то V_h сходится в логарифмической шкале к σ_v .

Этот результат служит ключом к теореме Спитцера. При этом он очень прост и устанавливается методом Лапласа (см., например, [L12]).

с) Пусть A_t — аддитивный непрерывный возрастающий функционал конечной массы. Если $v > 0$, то положим $T_h = \inf(t, A_t = vh)$. Тогда $V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$ сходится в логарифмической шкале к $\inf(u, L_u(\beta)) = \frac{2\pi}{\|A\|} v$. Через $L_u(\beta)$ здесь обозначено локальное время в нуле одномерного броуновского движения $\beta = \operatorname{Re} \zeta$.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим сначала случай, когда A_t — локальное время ℓ_t процесса $\log |B_t|$ в нуле. В этом случае $V_h = \inf(u, L_u(\beta^{(h)}) = v)$, и очевидно, что V_h сходится в логарифмической шкале к $\inf(u, L_u(\beta) = v)$.

Общий случай сводится к предыдущему частному случаю с помощью эргодической теоремы для аддитивных функционалов [ИМК, р. 277]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{\ell_t} = \frac{\|A\|}{2\pi}.$$

2.3. Логарифмические аттракторы. Пусть $G(t, B)$ — функция времени и броуновского движения B . Ее можно записать в форме $G(t, B) = \Gamma(U_t, \zeta)$ с некоторым процессом $\Gamma(u) = \Gamma(u, \zeta)$. Достаточно положить

$$\Gamma(u, \zeta) = G(U^{-1}(u), z_0 \exp \zeta(U)).$$

Изменением шкалы можно определить процесс $\Gamma^{(h)}$:

$$\Gamma^{(h)}(u) = \frac{1}{h} \Gamma(h^2 u).$$

Следовательно, способ нахождения $\Gamma^{(h)}$ по G таков: выражаем функционал G через функцию броуновского движения ζ (которая входит в его представление в виде косоого произведения), забываем время U_t , т.е. заменяем t на u , и затем производим изменение масштаба по u .

Например, если ϕ_t — непрерывная версия аргумента процесса B_t , такая, что $\phi_0 = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$ (т.е. число оборотов вокруг нуля), то построенный таким образом процесс есть

$$\Gamma^{(h)}(u) = \frac{1}{h} \theta(h^2 u) \quad (\text{где } \theta = \text{Im } \zeta).$$

Определение. Говорят, что G логарифмически притягивается процессом γ , если процесс $\Gamma^{(h)}$ сходится к γ в логарифмической шкале, т.е. $\Gamma^{(h)}(\zeta) - \gamma(\zeta^{(h)})$ сходится к нулю по вероятности в смысле равномерной сходимости на компактах.

Замечание. Питман и Йор [PY2] охарактеризовали логарифмические аттракторы среди всех непрерывных процессов как процессы, коммутирующие с изменением броуновской шкалы, т.е. записывающиеся в виде $\gamma(u, \zeta) = \sqrt{u} \hat{\gamma}(\zeta(\sqrt{u}))$, где $\hat{\gamma}$ — случайная величина.

Вот два примера логарифмических аттракторов:

1) для $i \in \{1, 2, 3\}$ положим

$$G_i(t) = \int_0^t 1_{(R_s \in I_i)} d\phi_s \quad \text{и} \quad \gamma_i(t) = \int_0^u 1_{(\beta_v \in J_i)} d\theta_v,$$

где

$$I_1 =]r, \infty[, \quad I_2 =]0, r[, \quad I_3 =]0, \infty[\quad (r > 0)$$

и

$$J_1 =]0, \infty[, \quad J_2 =]-\infty, 0[, \quad J_3 =]-\infty, \infty[.$$

Тогда G_i логарифмически притягивается процессом γ_i .

2) Если $G(t) = A_t$ — аддитивный непрерывный возрастающий функционал конечной массы, то G логарифмически притягивается процессом $\frac{\|A\|}{2\pi} L_u(\beta)$.

Справедлива очевидная, но существенная теорема:

Теорема 2. Если $(T_h)_{h>0}$ — семейство случайных моментов времени, такое, что $V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$ сходится в логарифмической шкале к случайному моменту времени τ , а $G = (G(t), t > 0)$ — броуновский функционал, логарифмически притягиваемый процессом $\gamma = (\gamma(u), u > 0)$, то $\frac{1}{h} G(T_h)$ сходится в логарифмической шкале к $\gamma(\tau)$.

Следствие. Если G логарифмически притягивается процессом γ , то $\frac{2}{\log t} G(t)$ сходится по распределению к $\gamma(\sigma_1)$ при $t \rightarrow \infty$.

Действительно, теорема и пример 2.2.2 показывают, что $\frac{1}{h}G(e^{2h})$ сходится по распределению к $\gamma(\sigma_1)$. Теперь достаточно положить $h = \frac{1}{2} \log t$.

2.4. Число оборотов и время, проведенное в области.

а) Теорема Спитцера. Пусть $\phi(t)$ — непрерывная версия аргумента процесса B_t , такая, что $\phi(0) = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$. Тогда очевидно, что ϕ логарифмически притягивается процессом $\theta(u)$ (мнимой частью броуновского движения ζ , начинающегося в нуле). Из следствия теоремы 2 и примера 2.2.2 получаем теорему Спитцера [S1]:

$$\frac{2}{\log t} \phi(t) \text{ сходится по распределению к } \theta(\sigma_1) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Теперь, чтобы получить полную формулировку теоремы Спитцера, достаточно вспомнить, что $\theta(\sigma_1)$ имеет стандартное распределение Коши, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{2}{\log t} \phi(t) \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{dy}{\pi(1+y^2)}.$$

б) Теорема Калианпура–Роббинса. Для аддитивного непрерывного возрастающего функционала конечной массы A_t то же следствие показывает, что

$$\frac{2}{\log t} A_t \text{ сходится по распределению к } \frac{\|A\|}{2\pi} L_{\sigma_1}(\beta) \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

поскольку A притягивается процессом $\frac{\|A\|}{2\pi} L_u(\beta)$.

В частности, если $A_t = \int_0^t f(B_s) ds$, причем f положительна, то

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t f(B_s) ds \xrightarrow{D} \frac{\int f(x+iy) dx dy}{2\pi} L_{\sigma_1}(\beta).$$

Чтобы получить полную формулировку теоремы Калианпура–Роббинса [KR], достаточно вспомнить, что величина $L_{\sigma_1}(\beta)$ распределена по экспоненциальному закону со средним 2. Например, имеем

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t 1_{B_s \in D} ds \xrightarrow{D} \frac{m(D)}{\pi} e,$$

где $D \subset \mathbb{R}^2$ — борелевское подмножество конечной меры, а e — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром 1.

Кроме того,

$$\frac{2}{\log t} L(t, R, 1) \xrightarrow{D} L_{\sigma_1}(\beta),$$

где $L(t, R, 1)$ — локальное время в единице семимартингала $R_s (= |B_s|)$ в момент времени 1.

На самом деле $L(t, R, 1)$ (эта величина подсчитывает время, проведенное броуновской частицей в круге радиуса 1 с центром 0) является аддитивным непрерывным возрастающим функционалом массы 2π .

с) Малые и большие обороты. В условиях следствия теоремы 2 можно исследовать поведение числа «больших оборотов» и числа «малых оборотов» вокруг нуля. Так, при $r > 0$ положим

$$\phi_+(t) = \int_0^t 1_{R_s > r} d\phi(s) \quad \text{и} \quad \phi_-(t) = \int_0^t 1_{R_s < r} d\phi(s).$$

Ясно, что эти процессы логарифмически притягиваются к $\gamma_+(u) = \int_0^u 1_{\beta_v > 0} d\theta(v)$ и $\gamma_-(u) = \int_0^u 1_{\beta_v < 0} d\theta(v)$.

Значит, известно, что пара $\frac{2}{\log t}(\phi_+(t), \phi_-(t))$ сходится по распределению к (W_+, W_-) , где $W_+ = \gamma_+(\sigma_1)$, $W_- = \gamma_-(\sigma_1)$. Преимущество представления, которое мы здесь используем, состоит в том, что не нужно ничего доказывать о сходимости распределения пары.

В действительности Питман и Йор уточнили этот результат, введя величину, описывающую переход между малыми и большими оборотами, т. е. локальное время $L(t, R, 1)$. Итак, ничего больше не доказывая, мы видим, что

$$\frac{2}{\log t} (\phi_+(t), \phi_-(t), L(t, R, 1)) \xrightarrow{D} (W_+, W_-, \Lambda),$$

где

$$W_+ = \gamma_+(\sigma_1) = \int_0^{\sigma_1} 1_{\beta_v > 0} d\theta_v, \quad W_- = \gamma_-(\sigma_1) = \int_0^{\sigma_1} 1_{\beta_v < 0} d\theta_v,$$

$\Lambda = L_{\sigma_1}(\beta)$ — локальное время процесса β в нуле в момент σ_1 .

Распределение предельной тройки (W_+, W_-, Λ) вычислено в [PY1]:

- Λ распределено по экспоненциальному закону с параметром 2;
 - величины W_+ и W_- условно независимы при известном Λ ;
 - величина W_- имеет условное распределение Коши с параметром $\Lambda/2$ при условии W_+ и Λ ;
 - плотность распределения величины W_+ равна $[2 \operatorname{ch}(\pi\omega/2)]^{-1}$.
- Действительно, при $a \geq 0$ и $b, c \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$E(\exp(-a\Lambda + ibW_- + icW_+)) = f(2a + |b|, c),$$

где

$$f(u, v) = \begin{cases} (\operatorname{ch} v + (u/v) \operatorname{sh} v)^{-1} & \text{при } v \neq 0, \\ (1 + u)^{-1} & \text{при } v = 0. \end{cases}$$

В [PY1] читатель сможет найти значительно лучшее описание величин (W_-, W_+) с помощью экскурсий броуновского движения $\zeta_t = \beta_t + i\theta_t$ в верхней и нижней полуплоскостях.

д) Число оборотов вокруг нескольких точек. Рассмотрим различные точки $z_0, z_1, \dots, z_n$. Пусть B_t — броуновское движение, начинающееся в z_0 . Рассмотрим углы поворота $\phi^1(s), \dots, \phi^n(s)$ вокруг n точек $z_1, \dots, z_n$.

Как и прежде, введем в рассмотрение малые и большие обороты, полагая

$$\phi_+^j(t) = \int_0^t 1_{|B_s - z_j| > r_j} d\phi^j(s) \quad \text{и} \quad \phi_-^j(t) = \int_0^t 1_{|B_s - z_j| < r_j} d\phi^j(s),$$

где $r_j > 0$ — произвольные положительные числа.

Для аддитивного возрастающего функционала A_t массы 2π верна

Теорема 3. $(2n+1)$ -набор $\frac{2}{\log t}(\phi_+^j(t), \phi_-^j(t); 1 \leq j \leq n; A_t)$ при $t \rightarrow \infty$ сходится по распределению к $(W_+, W_-^j; 1 \leq j \leq n; \Lambda)$, где при каждом j тройка (W_+, W_-^j, Λ) имеет распределение (W_+, W_-, Λ) , описанное в предыдущей теореме, и $n+1$ величин $(W_+, W_-^1, \dots, W_-^n)$ условно независимы при условии Λ .

Итак, предельное распределение задается общим пределом W_+ , описывающим «большие обороты», которые происходят в броуновском движении в окрестности бесконечности, и n величинами W_-^j , описывающими движение в окрестности каждой точки z_j . Эти $n+1$ величин не являются независимыми: они становятся таковыми лишь условно, при фиксированном Λ , «измеряющем» переход между окрестностями точек $z_1, \dots, z_n$ и окрестностью бесконечности. В [PY1] (теорема 6.2) дается также весьма точное описание предельного распределения этого $(2n+1)$ -набора посредством экскурсий.

Наконец, эту теорему можно обобщить и получить «теорему о вычетах»:

Теорема 4. Пусть $(z_1, \dots, z_n)$ суть n различных точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть f — комплекснозначная функция, такая, что

- (i) f голоморфна в $D_j \setminus \{z_j\}$, где D_j — окрестность точки z_j ;
- (ii) f ограничена на дополнении объединения этих окрестностей;
- (iii) f голоморфна в окрестности бесконечности и $\lim_{z \rightarrow \infty} f = 0$.

Тогда $\frac{2}{\log t} \int_0^t f(B_s) dB_s$ при $t \rightarrow \infty$ сходится по распределению к

$$\sum_j \operatorname{Res}(f, z_j) \left(\frac{\Lambda}{2} + iW_-^j \right) + \operatorname{Res}(f, \infty) \left(\frac{\Lambda}{2} - 1 + iW_+ \right).$$

В частном случае, когда f в каждой точке z_j имеет простой полюс, вновь получаем предыдущий результат. Доказательство теоремы состоит в сведении к этому частному случаю.

В заключение напомним, что мы лишь слегка затронули область (и результаты), разработанную Питманом и Йором.

3. КРАТНЫЕ ТОЧКИ БРОУНОВСКОЙ КРИВОЙ

3.1. Пересечения независимых броуновских кривых. Если $B^1, \dots, B^p$ ($p \geq 2$) суть p независимых броуновских движений в $\mathbb{C}$, начинающихся в $x^1, \dots, x^p$, то существует ли у траекторий $B^1, \dots, B^p$ общая точка?

Самый эффективный метод, позволяющий ответить на этот вопрос, использует построение локального времени пересечения. Наиболее общим образом, чтобы показать непустоту случайного множества и, в частности, изучить свойства «типичных» точек этого множества, достаточно построить (разумную случайную) меру, сосредоточенную на этом множестве.

Эта мера здесь будет сначала построена на множестве моментов кратности (а не на кратных точках), т. е. на

$$\{(t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}_+^p : B_{t_1}^1 = \dots = B_{t_p}^p\}.$$

Эта мера, называемая локальным временем пересечения, формально определяется так:

$$\alpha(ds_1, \dots, ds_p) = \left[\int \delta_y(B_{s_1}) \cdots \delta_y(B_{s_p}) dy \right] ds_1 \cdots ds_p.$$

Положим $\delta_y^\epsilon(z) = \frac{1}{\pi \epsilon^2} 1_{|z-y| \leq \epsilon}$ и

$$\alpha_\epsilon(ds_1, \dots, ds_p) = \left[\int \delta_y^\epsilon(B_{s_1}) \cdots \delta_y^\epsilon(B_{s_p}) dy \right] ds_1 \cdots ds_p.$$

Тогда имеет место

Теорема 5. С вероятностью 1 на $\mathbb{R}_+^p$ существует мера Радона $\alpha(ds_1, \dots, ds_p)$, такая, что для всех борелевских подмножеств A^1 ,

$\dots, A^p \subset \mathbf{R}_+$ и для всех $n < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon(A^1 \times \dots \times A^p) = \alpha(A^1 \times \dots \times A^p) \quad (\text{в } L^n).$$

Носитель меры α содержится в

$$\{(s_1, \dots, s_p) \in \mathbf{R}_+^p, B_{s_1}^1 = \dots = B_{s_p}^p\}$$

и с вероятностью 1 для всех $j \in \{1, \dots, p\}$ и всех $t > 0$

$$\alpha(\{s_j = t\}) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha([0, t]^p) > 0.$$

Эта теорема показывает, конечно, что кривые $B^1, \dots, B^p$ пересекаются; точнее,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (t_1, \dots, t_p) \in]0, \varepsilon[^p, \text{ такой, что } B_{t_1}^1 = \dots = B_{t_p}^p.$$

Меру α можно описать более точно, вычислив явно все моменты $E(\alpha(A^1 \times \dots \times A^p)^n)$ (см., например, [L3]).

В дальнейшем мы приведем интерпретацию локального времени пересечения как предела (нормализованной) поверхности пересечения p независимых «сосисок Винера».

Локальное время пересечения было введено Вольпертом [Wo] и Дынкиным [Dy1] и [Dy2] и изучалось, среди прочих, Жеманом, Горовицем и Розеном в [GHR], Розеном в [R1, R2] и Йором [Y3, Y4].

3.2. Локальное время самопересечения. Рассмотрим теперь одно броуновское движение в $\mathbf{C}$, начинающееся в нуле.

Для изучения кратных точек траектории строится локальное время самопересечения (кратности p) как случайная мера β на множестве

$$\mathcal{I}_p = \{(t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{R}_+^p, t_1 < \dots < t_p\},$$

формально определенная равенством

$$\beta(ds_1, \dots, ds_p) = \left(\int \delta_y(B_{s_1}) \dots \delta_y(B_{s_p}) dy \right) ds_1 \dots ds_p.$$

Теорема 6. С вероятностью 1 существует мера Радона β на $\mathcal{I}_p$, такая, что для всякого компакта вида $A_1 \times \dots \times A_p \subset \mathcal{I}_p$ и для всех $n < \infty$ имеем

$$\beta(A_1 \times \dots \times A_p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(A_1 \times \dots \times A_p)$$

по норме пространства L^n , где

$$\beta_\varepsilon(ds_1, \dots, ds_p) = 1_{\mathcal{I}_p}(s_1, \dots, s_p) \left(\int \prod_{i=1}^p \delta_y^\varepsilon(B_{s_i}) dy \right) ds_1 \dots ds_p.$$

Мера β сосредоточена на множестве моментов кратности p

$$\{(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{J}_p, B_{s_1} = \dots = B_{s_p}\}.$$

С вероятностью 1 для всех $j \in \{1, \dots, p\}$ и всех $t > 0$

$$\beta(\{s_j = t\}) = 0.$$

Кроме того, $\beta(\mathcal{J}_p \cap [a, b]^p) = +\infty$ для всех $0 \leq a \leq b$.

В качестве следствия из этой теоремы получаем существование кратных точек броуновской траектории, имеющих кратность p или выше (первоначально установленное в [DEK2]).

Эта теорема позволяет также сформулировать некоторые свойства типичных моментов самопересечения, например, такие: «часть траектории броуновского движения, заключенная между двумя типичными двойными точками, есть часть броуновской петли (т.е. броуновского движения, которое возвращается в начальную точку)» (изложение неформальное).

Предыдущее высказывание не может быть верным для произвольных двойных точек. Лё Галль [L6] предложил формулировку, «охватывающую все двойные точки». Точнее, для $0 \leq u \leq v \leq 1$ положим

$${}_u B_v(t) = \begin{cases} B_{u+t} - B_u & \text{при } 0 \leq t \leq v - u, \\ B_v - B_u & \text{при } t > v - u. \end{cases}$$

Для любой борелевской функции Φ на пространстве непрерывных функций из $[0, 1]$ в $\mathbb{R}^2$ имеем

$$E\left(\int_{0 \leq u < v \leq 1} \Phi({}_u B_v) \beta_2(du dv)\right) = \int_{0 \leq u < v \leq 1} \frac{du dv}{2\pi(v-u)} E(\Phi(L^{(v-u)})),$$

где $L^{(a)}$ обозначает броуновскую петлю (броуновское движение, траектория которого начинается в нуле и возвращается в нуль в момент a). При этом если $t \in]a, 1]$, то считается, что $L_t^{(a)} = 0$.

(У Лё Галля приводится также естественная модификация этого результата для точек кратности p .)

Важное следствие подобной формулы состоит в том, что любое свойство, выполняющееся почти наверное для броуновских петель, будет также выполняться для ${}_u B_v$ для β_2 -почти всех пар (u, v) .

Таким же образом нетрудно показать, что для β_2 -почти всех (u, v) двойная точка $B_u = B_v$ не является тройной точкой.

Следующая теорема обобщает сказанное выше:

Теорема 7. С вероятностью 1 для β_p -почти всех $s_1, \dots, s_p$ точка $B_{s_1} = \dots = B_{s_p}$ не является точкой кратности $p+1$.

В частности, существуют точки кратности ровно p , см. [AD]. Эта теорема показывает, что точки кратности $p + 1$ редко встречаются среди точек кратности p . Мера ℓ_p на множестве точек кратности p , являющаяся образом меры β_p при отображении $(s_1, \dots, s_p) \rightarrow B_{s_1}$, не имеет отношения к мере ℓ_{p+1} .

Чтобы оценить «тонкость» множества точек кратности $p + 1$, можно также попытаться сравнить соответствующие меры Хаусдорфа.

Лё Галль [L9] показал, что если

$$\varphi_p(x) = x^2 \left(\log \frac{1}{x} \log \log \log \frac{1}{x} \right)^p,$$

то мера Хаусдорфа φ_p является «хорошей» мерой для точек кратности p . Точнее, множество точек кратности p является счетным объединением множеств, имеющих конечную ненулевую φ_p -меру.

В частности, хаусдорфовой размерности недостаточно для того, чтобы различать множества точек кратности p и $p + 1$: эта размерность всегда равна двум.

В действительности два подхода (локальное время и мера Хаусдорфа) вполне сравнимы, поскольку Лё Галль показал, что существуют константы C_p , C'_p , такие, что для любого борелевского подмножества F плоскости $\mathbb{R}^2$ почти наверное имеет место неравенство

$$C_p \ell_p(F) \leq \varphi_p - m(F \cap D_p) \leq C'_p \ell_p(F),$$

где D_p — множество точек кратности $p + 1$.

Наконец, отметим, что благодаря упомянутому выше свойству, касающемуся броуновского движения между двумя двойными точками, Лё Галль сумел обойти то, что казалось незаконным использованием марковского свойства в первоначальном доказательстве (Дворецкий–Эрдёш–Какутани) существования точек бесконечной кратности. Ему принадлежит также

Теорема 8. Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — вполне несвязный компакт. Тогда с вероятностью 1 существуют точка $z \in \mathbb{R}^2$ и возрастающий гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

$$\varphi(K) = \{t \geq 0, B_t = z\}.$$

Следовательно, существуют точки в точности счетной кратности или точки кратности континуум. По-видимому, соответствующее локальное время самопересечения построено не было.

3.3. Ренормализация локального времени самопересечения. В этом разделе изучается особенность меры β_2 на диагонали. Вопрос

о ренормализации локального времени для двойных точек решил Варадан [V]. Аналогичный вопрос для точек кратности $p > 2$ является значительно более трудным; см. [Dy2, Dy6, R4, RY, L12, LJ].

Для $k \geq 0$ и $\ell \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ положим

$$A_\ell^k = \left[\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}} \right] \times \left[\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}} \right];$$

A_ℓ^k образуют разбиение множества $\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2$. Известно, что $\beta_2(\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2) = +\infty$, однако имеет место

Теорема 9. Для всех борелевских подмножеств множества $\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{2^k-1} \beta_2(A \cap A_\ell^k) - E(\beta_2(A \cap A_\ell^k)) \right)$$

сходится (в L^2 и почти наверное). Сумма этого ряда обозначается через $\gamma(A)$, а отображение $A \rightarrow \gamma(A)$ называется ренормализованным локальным временем самопересечения.

4. СОСИСКА ВИНЕРА

4.1. Поверхность маленькой сосиски Винера.

Определение. Для неполярного компакта $K \subset \mathbb{R}^2$ сосиска Винера (с базой K) между моментами u и v определяется формулой

$$\begin{aligned} S_K(u, v) &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in [u, v], \text{ такой, что } y - B_s \in K\} \\ &= \bigcup_{u \leq s \leq v} (B_s + K). \end{aligned}$$

В наиболее частом случае K — единичный круг и тогда $S_D(u, v)$ есть трубчатая окрестность траектории броуновского движения от момента u до момента v .

Здесь речь идет об асимптотическом (при $\varepsilon \rightarrow 0$) поведении меры $m(S_{\varepsilon K}(0, 1))$ или, иначе говоря, асимптотическом поведении меры $m(S_K(0, t))$ (при $t \rightarrow \infty$).

Оба эти вопроса связаны между собой вследствие инвариантности масштаба: на самом деле $m(S_K(0, t))$ имеет то же распределение, что $t m(S_{t^{-1/2}K}(0, 1))$.

Теорема 10.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) m(S_{\varepsilon K}(0, 1)) = \pi$$

(в смысле сходимости в L^2 ; если компакт K звездный, то сходимость имеет место почти наверное).

Следствие.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} m(S_K(0, t)) = 2\pi$$

(сходимость в L^2 и почти наверное).

Доказательство состоит в установлении равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1))) = \pi \quad (a)$$

и неравенства

$$(\text{var } m(S_{\varepsilon K}(0, 1)))^{1/2} \leq C \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}. \quad (b)$$

Это дает

$$E \left(\left[\frac{m(S_{\varepsilon K}(0, 1))}{E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1)))} - 1 \right]^2 \right) = O \left(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^2} \right),$$

откуда вытекает сходимость в L^2 .

Положив $\varepsilon_k = e^{-k^2}$, из (a) и (b) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} E \left(\left[\frac{m(S_{\varepsilon_k K}(0, 1))}{E(m(S_{\varepsilon_k K}(0, 1)))} - 1 \right]^2 \right) < \infty$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(S_{\varepsilon_k K})}{E(m(S_{\varepsilon_k K}))} = 1$$

почти наверное. Если компакт K звездный, то $m(S_{\varepsilon K})$ — возрастающая функция от ε , и это завершает доказательство «по модулю» соотношений (a) и (b).

Для доказательства (a) заметим, что

$$E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1))) = E \left(\int 1_{S_{\varepsilon K} + (0, 1)}(y) dy \right) = \int P(T_{y - \varepsilon K} \leq 1) dy,$$

где $T_{y - \varepsilon K} = \inf(s, B_s \in y - \varepsilon K)$.

Теория потенциала позволяет оценить эти времена достижения и убедиться в том, что если величина ζ имеет экспоненциальное распределение, не зависящее от броуновского движения, и если $G_{\lambda}(x, y)$

является функцией Грина броуновского движения, прерванного в момент ζ , то (если компакт K неполярный)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) P(T_{y-2K} < \zeta) = \pi G_\lambda(0, y).$$

Иначе говоря, преобразование Лапласа функции $(\log \frac{1}{\varepsilon}) \gamma_\varepsilon(ds)$ (где γ_ε — распределение $T_{y-\varepsilon K}$) сходится к преобразованию Лапласа функции $\pi p_s(0, y) ds$. Отсюда выводится, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) \gamma_\varepsilon([0, t]) = \pi \int_0^t p_s(0, y) ds,$$

или, другими словами,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) P(T_{y-\varepsilon K} \leq t) = \pi \int_0^t p_s(0, y) ds.$$

Кроме того, можно показать, что существует константа $C(\lambda, K)$, такая, что

$$P(T_{y-\varepsilon K} \leq \zeta) \leq C(\lambda, K) G_\lambda\left(0, \frac{y}{2}\right) \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

откуда

$$P(T_{y-\varepsilon K} \leq 1) \leq e^\lambda P(T_{y-\varepsilon K} \leq \zeta) \leq e^\lambda C(\lambda, K) \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) G_\lambda\left(0, \frac{y}{2}\right),$$

где G_λ интегрируема, и в силу мажорируемой сходимости (а) доказано.

Доказательство (b) сложнее, и мы отсылаем читателя к [L4].

Замечание. Предел величины $\log \frac{1}{\varepsilon} m(S_{\varepsilon K}(0, 1))$ не зависит от K .

Это явление характерно для размерности 2. В размерности $d \geq 3$ доказан следующий результат: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2-d} m(S_{\varepsilon K}(0, 1)) = C(K)$, где $C(K)$ — ньютоновская емкость множества K .

4.2. Интерпретация предыдущих результатов в терминах теплопроводности. Асимптотическое поведение объема сосиски Винера прямо связано со следующей задачей теплопроводности.

Пусть в неполярном компакте $K \subset \mathbb{R}^2$ поддерживается температура 1, когда время меняется от нуля до $+\infty$, а дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus K$ в начальный момент $t = 0$ имеет температуру 0. Каково асимптотическое поведение при $t \rightarrow +\infty$ количества тепла $E_K(t)$, перешедшего за время t из K в $\mathbb{R}^2 \setminus K$?

Пусть u — решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$$

в области $\mathbb{R}^2 \setminus K$ с начальным условием $u(0, x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} u(t, x) = 1$ для всех регулярных точек $x_0 \in \partial K$ и всех $t > 0$. Тогда

$$E_K(t) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} u(t, x) dx.$$

Отсюда $u(t, x) = P(T_{x-K} \leq t)$ и, следовательно,

$$E_K(t) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} P(T_{x-K} \leq t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} P(T_{x-K} \leq t) dx - m(K),$$

откуда $E_K(t) = E(m(S_K(0, t))) - m(K)$.

Кроме того, мы показали, что $E_K(t) \sim 2\pi \frac{t}{\log t}$ при $t \rightarrow +\infty$.

В размерности ≥ 3 $E_K(t) \sim C(K)t$, где $C(K)$ — ньютоновская емкость K .

Спитцер [S2] доказал эту теорему и получил асимптотическое разложение для $E_K(t)$. Мы вернемся к этому вопросу в п. 4.4.

4.3. Пересечения независимых сосисок Винера. Рассмотрим p независимых броуновских движений $B^1, \dots, B^p$ в $\mathbb{C}^2$; пусть K — неполярный компакт. Следующая теорема (принадлежащая Лё Галлю [L3]) позволяет интерпретировать локальное время пересечения как меру пересечения p должным образом нормализованных сосисок $S_{\varepsilon K}^\gamma(0, t)$.

Теорема 11. При любом $n < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^p m(S_{\varepsilon K}^1(0, t) \cap \dots \cap S_{\varepsilon K}^p(0, t)) = \pi^p \alpha([0, t]^p)$$

по норме L^n .

4.4. Флуктуации и ренормализация. Ренормализация Варадана (описанная в п. 3.3) позволяет получить следующий член асимптотического разложения для $m(S_{\varepsilon K}(0, 1))$:

Теорема 12. Пусть K — неполярный компакт. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 (m(S_{\varepsilon K}(0, 1)) - E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1)))) = -\pi^2 \gamma(\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2)$$

по норме L^2 .

Как следствие из этой теоремы можно получить асимптотическое разложение

$$m(S_{\varepsilon K}(0, 1)) = \frac{\pi}{\log 1/\varepsilon} + \frac{\pi}{(\log 1/\varepsilon)^2} \left(\frac{1 + \kappa - \log 2}{2} + R(K) - \pi \gamma(\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2) \right) + O((\log 1/\varepsilon)^2),$$

где κ — константа Эйлера, а $R(K)$ — логарифм логарифмической емкости компакта K .

Для этого достаточно использовать, помимо предыдущей теоремы, асимптотическое разложение величины $E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1)))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (или, что то же самое, количества перенесенного тепла $E_K(t)$ при $t \rightarrow +\infty$), данное Спитцером [S2].

Можно также обратить рассуждения и получить это асимптотическое разложение прежде, чем разложение Спитцера. Можно даже получить разложение до членов более высокого порядка, но при условии, что разложена ренормализация локальных времен пересечения кратности больше 2, что гораздо сложнее. Сошлемся здесь на Дынкина [Dy3], Лё Галля [L10] или Розена и Йора [RY] (для тройных точек).

Набросок доказательства. Если ℓ и k — целые числа, такие, что $\ell \leq 2^k - 1$, то

$$\left(B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}} - t - B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}}, t \in \left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right] \right) \quad \text{и} \quad \left(B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}} + t - B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}}, t \in \left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right] \right)$$

— независимые броуновские процессы.

Локальное время самопересечения

$$\beta \left(\left[\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}} \right] \times \left[\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}} \right] \right)$$

имеет то же распределение, что и локальное время пересечения $\alpha([0, \frac{1}{2^{k+1}}]^2)$. Таким образом (обозначая для случайной величины U через $\{U\} = U - E(U)$ соответствующую центрированную величину), мы получаем в силу п. 4.3, что

$$\left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 m \left(S_{\varepsilon K} \left(\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}} \right) \cap S_{\varepsilon K} \left(\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}} \right) \right)$$

сходится в L^2 (при $\varepsilon \rightarrow 0$) к $\pi^2 \{\beta(A_\ell^k)\}$, где

$$A_\ell^k = \left[\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}} \right] \times \left[\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}} \right].$$

Отсюда вытекает, что

$$\{m(S_{\varepsilon K}(0, 1))\} = \sum_{i=1}^{2^n} \left\{ m \left(S_{\varepsilon K} \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right) \right) \right\} \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \left\{ m \left(S_{\varepsilon K} \left(\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}} \right) \cap S_{\varepsilon K} \left(\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}} \right) \right) \right\}.$$

Вследствие теоремы 11 и инвариантности масштаба

$$E \left(\sum_{i=1}^{2^n} \left\{ m \left(S_{\varepsilon K} \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right) \right) \right\} \right) \leq \frac{C}{2^{n/2}} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}$$

при $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n)$. Отсюда (детали см. в [L12]) получаем равенство

$$L^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \{m(S_{\varepsilon K}(0, 1))\} = -\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \{\beta(A_\ell^k)\} \\ = -\pi^2 \gamma(\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2).$$

5. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКИХ БРОУНОВСКИХ КРИВЫХ

5.1. Конические точки. Пусть B — броуновское движение. Из теоремы Спитцера следует, что при фиксированном t кривые $(B_{t+s}, 0 < s \leq 1)$ и $(B_{t-s}, 0 < s \leq t)$ с вероятностью 1 совершают бесконечное число оборотов вокруг B_t . Усилить предыдущее утверждение так, чтобы оно было справедливо с вероятностью 1 для всех t , невозможно. Существуют исключительные (и случайные) моменты, когда вместо того, чтобы вращаться вокруг точки $B_t(\omega)$, броуновская кривая находится в некотором конусе с вершиной $B_t(\omega)$.

Например, если $B_t = B_t^1 + iB_t^2$ и

$$T = \inf \left(t \geq 0, B_t^1 = \sup_{0 \leq s \leq 1} B_s^1 \right),$$

то ясно, что обе кривые $(B_{T-s}, 0 \leq s \leq T)$ и $(B_{T+s}, 0 \leq s \leq 1-T)$ содержатся в полуплоскости $\{x \leq B_T^1\}$.

Более общим образом, дадим

Определение. Точка B_t называется двусторонней (соотв. односторонней) конической точкой с углом α ($\alpha \in]0, 2\pi[$), если существуют $\delta > 0$ и замкнутый конус с углом α при вершине B_t , который содержит обе кривые (соотв. одну из кривых) $(B_{t+s}, 0 < s < \delta)$ и $(B_{t-s}, 0 < s < \delta)$.

Мы сейчас видели, что существуют двусторонние конические точки с углом π . Речь идет о предельном случае: в самом деле, для множества Γ_α двусторонних конических точек с углом α Эванс [Ev] доказал следующее:

Теорема 13. *С вероятностью 1*

- (1) $\Gamma_\alpha = \emptyset$ при $\alpha \in]0, \pi[$;
- (2) $\dim \Gamma_\alpha = 2 - 2\pi/\alpha$ при $\alpha \in [\pi, 2\pi[$.

Напротив, Бурджи [B1] и Симура [Sh2] установили существование односторонних конических точек с углом $\alpha \in]\pi/2, \pi]$. Можно также вычислить хаусдорфову размерность их множества. Лё Галль [L7] построил локальное время (меру Радона, сосредоточенную на некоторых односторонних конических точках) и получил таким образом точное вероятностное описание таких множеств как замыкания траектории некоторых устойчивых процессов, вложенных в броуновское движение, обобщив тем самым результаты Спитцера [S1], относящиеся к случаю $\alpha = \pi$. В случае $\alpha < \pi/2$ односторонних конических точек не существует. При $\alpha = \pi/2$ вопрос остается открытым.

5.2. Выпуклая оболочка броуновской кривой. Обозначим через $C(t)$ выпуклую оболочку броуновской траектории за время t $\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$. Как ведут себя $C(t)$, $\partial C(t)$?

Известно, что средний периметр области $C(t)$ равен $\sqrt{8\pi t}$ (Такач [Ta]) и что ее средняя площадь равна $\pi t/2$ (Эль Башир [EB]).

Кроме того, для площади $A(t)$ области $C(t)$ справедлив закон повторного логарифма (Леви [Lé3]): $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{2t \log \log t} = \frac{1}{2\pi}$ почти наверное.

Граница $\partial C(t)$ обладает следующим свойством:

Теорема 14. 1) Для всех $t > 0$ с вероятностью 1 на $C(t)$ нет конических точек, т. е. не существует конуса с углом меньше, чем π , и вершиной на $\partial C(t)$, содержащего $C(t)$.

Кроме того, с вероятностью 1

- 2) $\partial C(t)$ является C^1 -гладкой кривой и не является кривой класса $C^{1,\alpha}$ с $\alpha > 0$.
- 3) Множество $e(t)$ крайних точек кривой $\partial C(t)$ имеет размерность 0.
- 4) $\partial C(t) \setminus e(t)$ является счетным объединением прямолинейных отрезков.
- 5) На $C(t)$ нет изолированных крайних точек.

Утверждение 1) принадлежит Эль Баширу [EB]; в работе [CHM] исследовалась регулярность $\partial C(t)$ и получено точное значение мо-

дуля непрерывности, откуда следует п. 2) теоремы. См. также [BSM]. Утверждения 3), 4) и 5) доказал Эванс [Ev].

Доказательство. 1) (Следуя подходу Лё Галля.) Если на $C(t)$ имеется коническая точка z , то это точка броуновской траектории. В действительности $z \in \{B_s, s \in]0, t[\}$, потому что B_0 и B_t — внутренние точки области $C(t)$ по теореме Спитцера. Такая точка z является конической двусторонней точкой с углом $\alpha < \pi$. Мы видели, что таких точек нет.

Доказательство того, что $\partial C(t) \in C^1$, столь же просто. По поводу отсутствия регулярности класса $C^{1,\alpha}$ (т.е. негёльдеровости касательной) см. [CHM].

Утверждение 5) устанавливается совсем легко: изолированная крайняя точка является конической, поскольку $C(t)$ также является выпуклой оболочкой множества $\{z\} \cup C(t) \setminus D(x, \delta)$ (при достаточно малом δ по Крейну–Мильману).

Легко доказывается и утверждение 3): крайняя точка является двусторонней конической точкой с углом α . Мы видели, что размерность множества таких точек равна нулю.

5.3. Точки разреза. Возможно ли разорвать броуновскую кривую, удалив лишь одну точку?

Такую точку будем называть точкой разреза. Ответ положителен (в размерности ≥ 2) и принадлежит Буржи. В размерности ≥ 4 это тривиально: поскольку на броуновских кривых в этом случае нет двойных точек, все точки будут точками разреза. В размерности 2 (и 3) доказательство Буржи тоньше, оно основано на подходе с позиций теории потенциала. Подробности см. в [B4], здесь мы приведем лишь результат и некоторые вопросы.

Теорема 15. *С вероятностью 1 при любом $\varepsilon > 0$ существует $t \in]0, \varepsilon[$, такое, что*

$$B_s \neq B_t \quad \forall s \in [0, 1] \setminus \{t\}$$

и

$$\{B_s, 0 \leq s < t\} \cap \{B_s, t < s \leq 1\} = \emptyset.$$

Замечание. Буржи использовал этот результат для опровержения гипотезы Мандельброта: броуновская кривая не гомеоморфна ковру Серпинского.

О множестве точек разреза почти ничего не известно, кроме того, что оно непусто. Какова его размерность? Является ли оно несчетным? Содержится ли оно в множестве двусторонних конических точек?

5.4. Внешность броуновской кривой: спиральные точки.

Пусть F — неограниченная связная компонента дополнения броуновской кривой $C \setminus B_{[0,1]}$. Буржи [ВЗ] показал, что граница ∂F устроена очень сложно: «почти все точки ∂F достижимы лишь по приходящей из бесконечности непрерывной кривой с бесконечным числом оборотов в обоих направлениях».

Точка z принадлежит ∂F тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $\varphi[0, 1] \rightarrow C$, такая, что

$$\varphi(s) \in F \quad \forall s \in [0, 1[, \quad (1)$$

$$\varphi(1) = z. \quad (2)$$

Говорят, что $z \in \partial F$ — спиральная точка, если для всякой функции ϕ , удовлетворяющей (1) и (2), имеем

$$\begin{cases} \limsup_{s \in [0, 1[} \arg(\phi(s) - z) = +\infty, \\ \liminf_{s \in [0, 1[} \arg(\phi(s) - z) = -\infty. \end{cases}$$

Двусторонняя коническая точка не может быть спиральной. В действительности двусторонние конические точки с углом π образуют плотное подмножество в ∂F . Тем не менее спиральные точки являются общими на ∂F в смысле гармонической меры.

Теорема 16. *С вероятностью 1 почти любая (в смысле гармонической меры) точка $z \in \partial F$ является спиральной точкой.*

Доказательство. Существует биективное аналитическое отображение единичного круга D на $\hat{F} = F \cup \{\infty\}$. Можно продолжить f по непрерывности до отображения $\bar{D}$ на $\hat{F} \cup \partial F$, поскольку радиальные пределы существуют при любом $\theta \in [0, 2\pi[$ (так как $C \setminus F$ связно). Это продолжение не инъективно, потому что существуют точки разреза, см. [Ро]. Пусть A_f — множество точек $\zeta \in \partial D$, в которых f имеет ненулевую угловую производную. Ключевой момент доказательства — следующая лемма:

Лемма. *Множество $f(A_f)$ нульмерно.*

Действительно, $f(A_f)$ при любом $\alpha > \pi$ содержится в множестве двусторонних конических точек с углом α . Теперь приведенная в п. 5.1 оценка хаусдорфовой размерности множества таких конических точек показывает, что $\dim f(A_f) = 0$.

Далее следует отметить, что существует $\beta > 0$, такое, что если $H \subset \partial F$ и $\dim H < \beta$, то гармоническая мера множества H равна

нулю. Это — следствие теоремы Макарова [Ma], которая дополнительно утверждает, что можно взять $\beta = 1$.

Но используемая здесь слабая версия теоремы Макарова может быть совсем просто доказана вероятностными методами, см. [L12]. Отсюда следует, что гармоническая мера множества $f(A_f)$ равна нулю.

Для завершения доказательства достаточно использовать теорему Макмиллана: говорят, что $\zeta \in \partial F$ является f -спиральной точкой, если величина $\arg(f(z) - f(\zeta))$ не является ограниченной как сверху, так и снизу на всей кривой в D , оканчивающейся в ζ . Обозначим через S_f множество всех f -спиральных точек.

Теорема Макмиллана утверждает, что гармоническая мера множества $\partial D \setminus (S_f \cap A_f)$ равна нулю, а следовательно, равна нулю и гармоническая мера множества $f(\partial D \setminus S_f \cap A_f)$ (в силу конформной инвариантности гармонической меры).

Однако из определений следует, что если $z \in \partial F$ не является спиральной точкой, то существует не f -спиральная точка $\zeta \in \partial D$, такая, что $f(\zeta) = z$. Тогда дополнение множества спиральных точек границы ∂F содержится в множестве

$$f(\partial D \setminus S_f \cap A_f) \cap f(A_f),$$

которое имеет меру нуль. $\square$

5.5. Малые связные компоненты дополнения броуновской кривой. Сколько «маленьких дыр» в плоскости оставляет броуновская кривая?

Мандельброт [M] предположил, что число N_ε связных компонент дополнения броуновской кривой площади больше ε имеет порядок $L(\varepsilon)/\varepsilon$, где L — функция медленного роста, такая, что $\int_0^1 L(u)/u \, du < \infty$. Маунтфорд [Mo] доказал эту гипотезу с $L(\varepsilon) = 2\pi(\log \varepsilon)^{-2}$. Мы приведем подход Лё Галля [L11], который улучшает этот результат. Пусть $N_{[u,v]}$ при $u < v$ означает число связных компонент дополнения броуновской кривой, площадь которых попадает в промежуток $[u, v]$.

Теорема 17. С вероятностью 1 при всех $\delta > 0$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sup_{v \geq (1+\delta)u} \left| \frac{(\log u)^2 N_{[u,v]}}{u^{-1} - v^{-1}} - 2\pi \right| = 0.$$

В частности, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (\log \varepsilon)^2 N_\varepsilon = 2\pi$.

Доказательство. Пусть W_ε — объединение всех связных компонент площади $\leq \pi \varepsilon^2$. Ясно, что W_ε лежит в $S_{\varepsilon D}(0, 1)$, т. е. в сиске Винера

радиуса ε . Обратно, покажем, что если $y \in S_{\varepsilon D}(0, 1)$, то связная компонента точки y содержится в круге радиуса ε (следовательно, площади $\leq \pi\varepsilon^2$) с центром y с вероятностью, близкой к 1. Тогда мера множества W_ε имеет тот же порядок, что и мера множества $S_{\varepsilon D}(0, 1)$, т. е. является величиной порядка $\pi/|\log \varepsilon|$.

Если $\lambda \in [0, 1[$ и $U_\varepsilon^\lambda = W_\varepsilon \setminus W_{\lambda\varepsilon}$, то можно проверить (хотя это гораздо труднее), что

$$m(U_\varepsilon^\lambda) = m(W_\varepsilon) - m(W_{\lambda\varepsilon}) \sim \frac{\pi}{|\log \varepsilon|} - \frac{\pi}{|\log \lambda\varepsilon|},$$

т. е. что $m(U_\varepsilon^\lambda) \sim \pi|\log \lambda|(\log \varepsilon)^{-2}$. Это позволяет доказать теорему, если, кроме того, заметить, что

$$(M\lambda^{2n})^{-1}m(U_{\lambda^n}^\lambda) \leq N_{[\pi\lambda^{2n+2}, \pi\lambda^{2n}]} \leq (\pi\lambda^{2n+2})^{-1}m(U_{\lambda^n}^\lambda).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [AD] Adelman O., Dvoretzky A., Plane Brownian motion has strictly n -multiple points, Israel J. Math. **52** (1985), 361–364.
- [B1] Burdzy K., Brownian paths and cones, Ann. Probab. **13** (1985), 1006–1010.
- [B2] Burdzy K., Multidimensional Brownian Excursions and Potential Theory, Longman, New York, 1987.
- [B3] Burdzy K., Geometric properties of two-dimensional Brownian paths, Probab. Theory Related Fields **81** (1989), 485–505.
- [B4] Burdzy K., Cut points on Brownian paths, Ann. Probab. **17** (1989), 1012–1036.
- [BSM] Burdzy K., San Martin J., Curvature of the convex hull of planar Brownian motion near its minimum point, Stock. Process. Appl. **33** (1989), 89–103.
- [CT] Ciesielski Z., Taylor S. J., First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1963), 434–450.
- [CHM] Cranston M., Hsu P., March P., Smoothness of the convex hull of planar Brownian motion, Ann. Probab. **17** (1989), 144–150.
- [Da] Davis B., Brownian motion and analytic functions, Ann. Probab. **7** (1979), 913–932.
- [DV] Donsker M. D., Varadhan S. R. S., Asymptotics for the Wiener sausage, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 525–565.
- [Du1] Durrett R., A new proof of Spitzer's result on the winding of two-dimensional Brownian motion, Ann. Probab. **10** (1982), 244–246.
- [Du2] Durrett R., Brownian Motion and Martingales in Analysis, Wadsworth, Belmont Ca., 1984.

- [DE] Dvoretzky A., Erdős P., Some problems on random walk in space, Proc. Second Berkeley Symposium on Math, Statistics and Probability, 353-367, University of California Press, Berkeley, 1951.
- [DK1] Dvoretzky A., Erdős P., Kakutani S., Double points of paths of Brownian motion in n -space, Acta Sci. Math. (Szeged) 12 (1950), 74-81.
- [DK2] Dvoretzky A., Erdős P., Kakutani S., Multiple points of Brownian motion in the plane, Bull. Res. Council Israel Sect. F3 (1954), 364-371.
- [DK3] Dvoretzky A., Erdős P., Kakutani S., Points of multiplicity of plane Brownian paths, Bull. Res. Council Israel Sect. F7 (1958), 175-180.
- [DKT] Dvoretzky A., Erdős P., Kakutani S., Taylor S. J., Triple points of Brownian motion in 3-space, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957), 856-862.
- [Dy1] Dynkin E. B., Additive functionals of several time-reversible Markov processes, J. Funct. Anal. 42 (1981), 64-101.
- [Dy2] Dynkin E. B., Local times and quantum fields, Seminar on Stochastic Processes 1983, Birkhäuser, Boston, 1984, 69-84.
- [Dy3] Dynkin E. B., Polynomials of the occupation field and related random fields, J. Funct. Anal. 42 (1984), 64-101.
- [Dy4] Dynkin E. B., Random fields associated with multiple points of the Brownian motion, J. Funct. Anal. 62 (1985), 397-434.
- [Dy5] Dynkin E. B., Functionals associated with self-intersections of the Brownian motion. Séminaire de Probabilités XX, Lect. Notes in Math., vol. 1204, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 553-571.
- [Dy6] Dynkin E. B., Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion, Ann. Probab. 16 (1988), 1-57.
- [Dy7] Dynkin E. B., Regularized self-intersection local times of the planar Brownian motion, Ann. Probab. 16 (1988), 58-74.
- [E] Edwards S. F., The statistical mechanics of polymers with excluded volume, Proc. Phys. Sci. 85 (1965), 613-624.
- [EB] EL Bachir M., L'enveloppe convexe du mouvement brownien. Thèse de troisième cycle, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1983.
- [Ev] Evans S. N., On the Hausdorff dimension of Brownian cone points, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 98 (1985), 343-353.
- [GHR] Geman D., Horowitz J., Rosen J., A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane, Ann. Probab. 12 (1984), 86-107.
- [H] Hawkes J., Some geometric aspects of potentials theory. Stochastic Analysis and Applications, Lect. Notes in Math., vol. 1095, Springer-Verlag, New York, 1984, 130-154.
- [IMK] Ito K., McKean H. P., Diffusion Processes and their Sample Paths, Springer-Verlag, New York, 1965. [Имеется перевод: Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. — М.: Мир, 1968.]
- [Kn] Knight F. B., Essentials of Brownian Motion and Diffusion, Amer. Math. Soc., Providence, 1981.
- [KR] Kallianpur G., Robbins H., Ergodic property of the Brownian Motion process, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39, 525-533.
- [L1] Le Gall J. F., Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne, Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math., vol. 1123, Springer-Verlag, New York, 1985, 297-313.

- [L2] Le Gall J. F., Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan, Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math., vol. 1123, Springer-Verlag, New York, 1985, 314–331.
- [L3] Le Gall J. F., Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. Ann. Probab. **14** (1986), 1219–1244.
- [L4] Le Gall J. F., Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double, J. Funct. Anal. **71** (1987), 246–262.
- [L5] Le Gall J. F., Mouvement brownien, cônes et processus stables, Probab. Theory Related Fields **76** (1987), 587–627.
- [L6] Le Gall J. F., Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Levy, Séminaire de probabilités XXI, Lect. Notes in Math., vol. 1247, Springer-Verlag, New York, 1987, 341–375.
- [L7] Le Gall J. F., The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points, Seminar on Stochastic Processes 1986, Birkhauser, Boston, 1987, 107–137.
- [L8] Le Gall J. F., Fluctuation results for the Wiener sausage, Ann. Probab. **16** (1988), 991–1018.
- [L9] Le Gall J. F., Sur une conjecture de M. Kac, Probab. Theory Related Fields **78** (1988), 389–402.
- [L10] Le Gall J. F., Wiener sausage and self-interaction local times, J. Funct. Anal. **88** (1990), 299–341.
- [L11] Le Gall J. F., On the connected components of the complement of a two-dimensional Brownian path, in: Random walks, Brownian motion, and interacting particle systems, Birkhauser, Boston, M.A., 1991, 323–338.
- [L12] Le Gall J. F., Cours à l'Ecole d'été de St Flour 1990, Lect. Notes in Math., vol. 1527, Springer-Verlag, 1992.
- [LY] Le Gall J. F., Yor M., Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift, Probab. Theory Related Fields **71** (1986), 183–229.
- [LJ] Le Jan Y., On the Fock space representation of functionals of the occupation field and their renormalization, J. Funct. Anal. **80** (1988), 88–108.
- [Lé1] Lévy P., Le mouvement brownien plan, Amer. J. Math. **62** (1940), 487–550.
- [Lé2] Lévy P., La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien, Giornale de l'istituto Italiano degli Attuari **16** (1953), 1–37.
- [Lé3] Lévy P., Le caractère universel de la courbe du mouvement brownien et la loi du logarithme itéré, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, II, **4** (1955), 337–366.
- [Lé4] Lévy P., Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [Ma] Makarov N. G., On the distortion of boundary sets under conformal mappings, Proc. London Math. Soc. (3) **51** (1985), 369–384.
- [M] Mandelbrot B. B., The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Co., New York, 1982.
- [MM] McMillan J. E., Boundary behaviour of a conformal mapping. Acta Math. **123** (1969), 43–68.

- [Mo] Mountford T. S., On the asymptotic number of small components created by planar Brownian motion, *Stochastics* **28** (1989), 177–188.
- [PY1] Pitman J. W., Yor M., Asymptotic laws of planar Brownian motion, *Ann. Probab.* **14** (1986), 733–779.
- [PY2] Pitman J. W., Yor M., Further asymptotic laws of planar Brownian Motion, *Ann. Probab.* **17**, No. 3 (1989), 965–1011.
- [Po] Pommerenke G., *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [PS] Port S. C., Stone C. J., *Brownian Motion and Classical Potential Theory*, Academic Press, New York, 1978.
- [ReY] Revuz D., Yor M., *Continuous Martingale and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [RoW] Rogers L. C. G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Vol. II, Wiley, Chichester, 1987.
- [R1] Rosen J., A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space, *Comm. Math. Physics* **88** (1983), 327–338.
- [R2] Rosen J., Self-intersections of random fields, *Ann. Probab.* **12** (1984), 108–119.
- [R3] Rosen J., Tanaka formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion, *Séminaire de Probabilités XX*, *Lect. Notes in Math.*, vol. 1204, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 515–531.
- [RY] Rosen J., Yor M., Tanaka formulae and renormalization for triple intersections of Brownian motion in the plane, *Ann. Probab.* **19** (1991), No. 1, 142–159.
- [Shi] Shimura M., A limit theorem for two-dimensional conditioned random walk, *Nagoya Math. J.* **95** (1984), 105–116.
- [Sh2] Shimura M., Excursions in a cone for two-dimensional Brownian motion, *J. Math. Kyoto Univ.* **25** (1985), 433–443.
- [Sh3] Shimura M., Meandering points of two-dimensional Brownian motion, *Kodai Math. J.* **11** (1988), 169–176.
- [Si] Spitzer F., Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion, *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958), 187–197.
- [S2] Spitzer F., Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **3** (1964), 110–121.
- [Sz] Sznitman A. S., Some bounds and limiting results for the Wiener sausage of small radius associated with elliptic diffusions, *Stochastic Process. Appl.* **25** (1987), 1–25.
- [Ta] Takacs L., Expected perimeter length, *Amer. Math. Monthly*, 87–142.
- [T1] Taylor S. J., The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 253–258.
- [T2] Taylor S. J., Sample path properties of processes with stationary independent increments, *Stochastic Analysis*, D. Kendall, E. Harding eds., Wiley, London, 1973.
- [T3] Taylor S. J., The measure theory of random fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **100** (1986), 383–406.
- [V] Varadhan S. R. S., Appendix to “Euclidean quantum field theory”, by K. Symaznik, in: *Local Quantum Theory* (R. Jost ed.), Academic, New York, 1969.

- [Wo] Wolpert R., Wiener path intersections and local time, J. Funct. Anal. 30 (1978), 329–340.
- [Y1] Yor M., Compléments aux formules de Tanaka–Rosen, Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math., vol. 1123, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 332–349.
- [Y2] Yor M., Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^3$, Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math., vol. 1123, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 350–365.
- [Y3] Yor M., Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$, Séminaire de Probabilités XX, Lect. Notes in Math., vol. 1204, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 532–541.
- [Y4] Yor M., Sur la représentation comme intégrales stochastiques des temps d'occupation du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$, Séminaire de Probabilités XX, Lect. Notes in Math., vol. 1204, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 543–552.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ И АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА РИМАНА-РОХА¹⁾

Жан-Бенуа Бост

С конца девятнадцатого века важнейшую роль в алгебраической геометрии и в арифметике играла аналогия между числовыми полями (т. е. расширениями поля $\mathbb{Q}$ конечной степени) и полями алгебраических функций одной переменной (т. е. полями рациональных функций на алгебраической кривой, определенной над полем). Свидетельством тому служат, например, работы Дедекинда и Вебера по алгебраическим кривым и двенадцатая проблема Гильберта.

В первой трети XX в. эта аналогия была пополнена наблюдением, что она становится более удовлетворительной, если рассматривать наряду с простыми идеалами кольца целых $\mathcal{O}_K$ числового поля K и соответствующими вложениями поля K в p -адические поля также и вложения поля K в архимедовы поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ («бесконечные точки» поля K). Это наблюдение²⁾ стало ключевым моментом в определении аделей числового поля и, таким образом, оказалось необычайно продуктивным.

В то же время поиски функциональных аналогов для проблем дифантовой геометрии (таких, как изучение рациональных точек многообразия, определенного над числовым полем) вызвали интерес к многообразиям, определенным над полем функций одной переменной $k(C)$, связанным с кривой C над полем k . Для того чтобы изучать такие многообразия V , для них выбирают модель над C , т. е. многообразие $\mathcal{V}$, которое снабжено плоским морфизмом $\mathcal{V} \rightarrow C$, определенным над k , причем V изоморфно общему слою этого морфизма. Если V имеет размерность n над $k(C)$, то размерность многообразия $\mathcal{V}$ над k равна $n+1$. Именно поэтому изучение кривых над $k(C)$ требует использования теории поверхностей над k (Манин, Грауэрт, Самюэль).

¹⁾Bost Jean-Benoît. Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques. — Séminaire Bourbaki, 1990-91, n°731, Astérisque, 201-202-203, 1991, p. 43-88.

²⁾По-видимому, первыми, кто понял, как важно рассматривать одновременно все точки числового поля, и конечные, и бесконечные, были Гензель и его ученик Хассе. В любом случае первое явное упоминание о глобальных результатах, аналогичных классическим результатам о римановых поверхностях и учитывавших все точки числового поля, встречается, насколько нам известно, в статье Вейля [W1] 1939 г. Немного позже, в письме к сестре [W2, p. 252], Вейль приписывал открытие роли бесконечных точек Хассе или Артину.

Этот подход можно использовать и в изучении многообразий V над числовым полем K . В этом случае моделью для V будет схема $\mathcal{V}$, плоская над $\mathcal{O}_K$ и такая, что $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ изоморфно V . Если, например, V — кривая, то $\mathcal{V}$ — схема (абсолютной) размерности 2, называемая *арифметической поверхностью* (Шафаревич, Лихтенбаум). Способ включить при этом в рассмотрение и бесконечные точки поля K был открыт (по крайней мере в случае, когда $\mathcal{V}$ — арифметическая поверхность) Аракеловым: нужно использовать *эрмитову геометрию* комплексно-аналитической кривой $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. Именно так, снабжая $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ кэлеровой метрикой, а линейные расслоения над $\mathcal{V}$ (точнее, полученные из них голоморфные линейные расслоения над $\mathcal{V}(\mathbb{C})$) — эрмитовыми метриками, Аракелов, а затем Фальтингс перенесли на арифметические поверхности многие из классических теорем теории поверхностей над полем (см. [A1, A2, Fa1, Sz, La2] и доклад на семинаре Бурбаки n° 713). Идеи «в духе Аракелова» также сыграли важную роль в доказательстве Фальтингса гипотезы Морделла (см. доклады на семинаре Бурбаки n° 616 и 619).

В этой статье мы даем введение в работы Жилле и Суле, которые обобщили эту «геометрию Аракелова» на многообразия произвольной размерности. Они построили теорию пересечений на общих «арифметических многообразиях», а также теорию характеристических классов для эрмитовых векторных расслоений над ними. Затем, используя работы Бисмю и Лебо [BL1, BL2], они доказали «арифметическую теорему Римана–Роха» [GS10]. Мы попытаемся дать лишь общее представление об этих результатах, не приводя их в наиболее общем виде и опуская доказательства, зачастую весьма технически сложные. (Настоящее доказательство теоремы 4.2 использует результаты статей Жилле и Суле [GS3–GS7], Бисмю, Жилле и Суле [BGS1–BGS3], Бисмю [Bi1–Bi2] и Бисмю и Лебо [BL1–BL2].) Мы сосредоточили внимание на основах теории пересечений и арифметических характеристических классах и почти ничего не говорим о результатах из «эрмитова комплексного анализа», касающихся аналитического кручения, которые играют ключевую роль в доказательстве и сами по себе заслуживают отдельной статьи.

Геометрия Аракелова в высших размерностях уже получила ярчайшее приложение — новое доказательство гипотезы Морделла, данное Войтой [V]. Арифметическая теория пересечений также играет важную роль в недавних работах Фальтингса по диофантовой аппроксимации в абелевых многообразиях, где она используется для того, чтобы приписать высоту подмногообразиям проективного пространства [Fa2].

Закончим введение несколькими историческими замечаниями.

Определения арифметических групп Чжоу и их мультипликативной структуры обобщают определения, введенные Аракеловым [A1] и Делинем [De] в случае «арифметических поверхностей». Частные случаи «арифметических пересечений» в относительной размерности > 1 рассматривались также Блохом [Bl] и Бейлинсоном [Be1, Be2]. Что касается арифметической теоремы Римана-Роха, то она обобщает на высшие размерности результаты Фальтингса [Fa1] и Делиня [De] по арифметическим поверхностям.

Более отдаленные истоки «аракеловской геометрии» можно проследить в работах Вейля по арифметике кривых и алгебраических многообразий, в которых он, развивая «кронекеровский» подход к арифметической геометрии, вводит «высоты» и «распределения» (см. статью [W3] и цитированную в ней литературу). Несомненно, определяющую роль также играли работы Нерона и Тэйта по высотам на абелевых многообразиях и их локальным разложениям (см., например, [La1]), которые давно уже стали архетипом точной теории высот. Наконец, нельзя переоценить роль русской школы Шафаревича, из которой и вышел Аракелов (см. по этому поводу обзорные статьи Паршина [P] и Манина [M]).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Определения и обозначения.

Определение 1.1. *Арифметическим многообразием* называется целая регулярная схема X , плоская и квазипроективная над $\mathbb{Z}$. Через F_∞ обозначается антиголоморфная инволюция комплексного многообразия $X(\mathbb{C})$, индуцированная комплексным сопряжением.

Эрмитовым расслоением над комплексно-аналитическим многообразием V называется набор $\bar{E} = (E, h)$, состоящий из голоморфного векторного расслоения E над V и эрмитова скалярного произведения h на слоях расслоения E класса гладкости C^∞ .

Эрмитовым расслоением над арифметическим многообразием X называется набор $\bar{E} = (E, h)$, состоящий из локально свободного $\mathcal{O}_X$ -модуля E на X и эрмитова скалярного произведения h на голоморфном векторном расслоении $E(\mathbb{C})$ над $X(\mathbb{C})$ класса гладкости C^∞ , инвариантного относительно F_∞ .

Заметим, что всякая целая регулярная схема X , плоская и квазипроективная над кольцом целых числового поля, является арифметическим многообразием.

Пусть $\bar{E} = (E, h)$ и $\bar{E}' = (E', h')$ — эрмитовы векторные расслоения над комплексно-аналитическим или арифметическим многообразием. Тогда можно определить прямую сумму $\bar{E} \oplus \bar{E}' = (E \oplus E', h \oplus h')$ (где через $h \oplus h'$ обозначена ортогональная прямая сумма метрик

h и h') и тензорное произведение $\bar{E} \otimes \bar{E}' = (E \otimes E', h \otimes h')$. Через $\det \bar{E}$ будем обозначать высшую внешнюю степень $\det E$ расслоения E , снабженную метрикой $\det h$. Это эрмитово линейное расслоение. Наконец, определим обратный образ $f^* \bar{E}$ расслоения $\bar{E}$ относительно морфизма f комплексных или арифметических многообразий как расслоение $f^* E$, снабженное такой метрикой $f^* h$, что изоморфизмы $(f^* E)_x \cong E_{f(x)}$ — изометрии.

В дальнейшем мы будем задавать структуру эрмитова векторного расслоения на векторном расслоении E либо с помощью скалярного произведения h , либо, что эквивалентно, с помощью эрмитовой метрики $\| \cdot \|$, связанной с h формулой $\|v\| = h(v, v)^{1/2}$.

Через $\operatorname{rg} E$ мы будем обозначать ранг векторного расслоения E , а через $\alpha^{(k)}$ — компоненту степени k дифференциальной формы, класса когомологий или алгебраического цикла α .

Пусть K — поле, а E есть $\mathbf{Z}$ -модуль; тогда через E_K мы обозначаем тензорное произведение $E \otimes_{\mathbf{Z}} K$. Более общо, пусть $\mathcal{F}$ — пучок модулей на $\mathbf{Z}$ -схеме X ; тогда через X_K и $\mathcal{F}_K$ мы будем обозначать K -схему и пучок на X_K , полученные из X и $\mathcal{F}$ с помощью замены базы $\operatorname{Spec} K \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$.

1.2. Аракеловская степень (см. [W1, A1] и [Sz, exp. 1]). В том, насколько важны бесконечные точки в аналогии между числовыми и функциональными полями, легко убедиться, если, например, попытаться перенести на случай числового поля понятие степени линейного расслоения.

Пусть K — числовое поле, $\mathcal{O}_K$ — его кольцо целых и $\sigma_i, 1 \leq i \leq r_1$, — вещественные вложения поля K , а $\sigma_i, \bar{\sigma}_i, r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + r_2$, — его комплексные вложения. Тогда $\sigma_i, 1 \leq i \leq r_1 + r_2$, — бесконечные точки поля K , и мы полагаем $\varepsilon_i = 1$, если $1 \leq i \leq r_1$, и $\varepsilon_i = 2$, если $r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + r_2$. Пусть $\bar{L} = (L, \| \cdot \|)$ — линейное эрмитово расслоение над $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Расслоение L однозначно определяется проективным $\mathcal{O}_K$ -модулем $\Lambda = H^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K; L)$ ранга 1. Эрмитова структура на L — это эрмитова метрика на расслоении $L_{\mathbf{C}}$ над пространством $X(\mathbf{C})$, инвариантная относительно F_{∞} . Так как точки этого пространства — это $[K:\mathbf{Q}]$ отображений из K в $\mathbf{C}$, то задание эрмитовой структуры на L эквивалентно заданию эрмитовой нормы $\| \cdot \|$ на каждой из комплексных прямых $\Lambda \otimes_K \mathbf{C}_{\sigma_i}, 1 \leq i \leq r_1 + r_2$.

Пусть $\mathbf{P}$ — множество простых идеалов кольца $\mathcal{O}_K$. Для каждого $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}$ обозначим через

$$N_{\mathfrak{p}} = \# \mathcal{O}_K / \mathfrak{p}$$

его норму, а через $v_{\mathfrak{p}}$ — соответствующее нормирование поля K . Используя то, что, локально по $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, L изоморфно структурному

пучку, можно определить $v_p(s)$ также и для сечений s расслоения L . Тогда для каждого $s \in \Lambda \setminus \{0\}$

$$\#(\Lambda/s\mathcal{O}_K) - \sum_{x \in X(\mathbb{C})} \log \|s(x)\| = \sum_{p \in P} v_p(s) \log Np - \sum_{i=1}^{r_1+r_2} \varepsilon_i \log \|s\|_i. \quad (1.2.1)$$

Формула произведения, утверждающая, что для каждого $x \in K \setminus \{0\}$

$$\prod_{p \in P} Np^{v_p(x)} \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |\sigma_i(x)|^{-\varepsilon_i} = 1,$$

показывает, что это выражение не зависит от s . Это — *археловская степень* расслоения $\bar{L}$, обозначаемая через $\widehat{\deg} \bar{L}$.

Очевидно, что алгебраическая часть формулы (1.2.1), т. е. первый член левой или правой части, не обладает сама по себе этим свойством инвариантности: для того чтобы корректно определить степень линейного расслоения, необходимо «компактифицировать» аффинную схему $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ бесконечными точками поля K .

Более общо, для каждого эрмитова векторного расслоения $\bar{E}$ над $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ положим

$$\widehat{\deg} \bar{E} = \widehat{\deg} \det \bar{E}.$$

Если $K = \mathbb{Q}$, то $\Lambda := H^0(\text{Spec } \mathbb{Z}, E)$ изоморфен $\mathbb{Z}^{r_E E}$, а эрмитова структура на $\bar{E}$ определяет скалярное произведение на $\Lambda_{\mathbb{C}}$, инвариантное относительно комплексного сопряжения, т. е. евклидову структуру на $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Кроме того, $\widehat{\deg} \bar{E}$ — не что иное, как взятый с обратным знаком логарифм кообъема модуля Λ в $\Lambda_{\mathbb{R}}$ по отношению к этой евклидовой структуре.

Пусть X — арифметическое многообразие, а $\bar{L}$ — эрмитово линейное расслоение над X . Для каждого элемента $x: \text{Spec } \mathcal{O}_K \rightarrow X$ множества $X(\mathcal{O}_K)$ определим его *высоту по отношению к $\bar{L}$* формулой

$$h_{\bar{L}}(x) = \widehat{\deg} x^* \bar{L}.$$

Пусть $X = \mathbb{P}^N = \text{Proj } \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_N]$, а $\bar{L}$ — эрмитово расслоение $\mathcal{O}(1)$, равное по определению расслоению $\mathcal{O}(1)$ со стандартной метрикой $\|\cdot\|$, т. е. слой расслоения $\mathcal{O}(1)$ в точке $P = [x_0 : \dots : x_N] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ совпадает с прямой $\text{Hom}(\mathbb{C}(x_0, \dots, x_N), \mathbb{C})$ и по определению

$$\left\| (z_i)_{0 \leq i \leq N} \mapsto \sum_{i=0}^N z_i \bar{x}_i \right\| = \left(\sum_{i=0}^N |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда высота $h_{\mathcal{L}}$ на $\mathbf{P}^N(\mathcal{O}_K) (= \mathbf{P}^N(K))$ в силу собственности) совпадает с обычной логарифмической высотой: для каждого $(x_0, \dots, x_N) \in \mathcal{O}_K^{N+1} \setminus \{0\}$ мы имеем

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([x_0 : \dots : x_N]) = \log \frac{\prod_{i=1}^{r_1+r_2} (\sum_{j=0}^N |\sigma_i(x_j)|^2)^{\varepsilon_i/2}}{N (\sum_{j=0}^N x_j \mathcal{O}_K)}.$$

В частности, если $K = \mathbf{Q}$, а $(x_0, \dots, x_N) \in \mathbf{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ и, кроме того, Н. О. Д. $(x_0, \dots, x_N) = 1$, то

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([x_0 : \dots : x_N]) = \log \left(\sum_{j=0}^N x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Проблема Римана–Роха. (α) В наивной форме проблему Римана–Роха можно сформулировать так:

Пусть даны гладкое проективное комплексное многообразие V и голоморфное векторное расслоение E над V . Какова размерность пространства $H^0(V, E)$ голоморфных сечений расслоения E над V ?

(β) По меньшей мере со времен Римана было известно, что на этот вопрос не может быть простого ответа из-за явления «иррегулярности», т. е. нетривиальности высших групп когомологий. «Правильная» постановка вопроса такова:

Вычислить характеристику Эйлера–Пуанкаре

$$\chi(V; E) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(V; E).$$

Одно из решений, в терминах когомологических инвариантов многообразия V и расслоения E , дается формулой

$$\chi(V; E) = \int_V (\text{ch } E \cdot \text{Td } T_V)^{(2n)}, \quad (1.3.1)$$

где $n = \dim_{\mathbf{C}} V$, через $\text{Td } T_V$ обозначен класс Тодда касательного расслоения к V , а через $\text{ch } E$ — характер Чженя расслоения E . Различные варианты этой формулы в частных случаях кривой или поверхности V были известны с конца девятнадцатого века. Общая формула была доказана Хирцебрухом, обобщена Вашницером и, далее, Гротендиком (см., например, [Fu, гл. 15]). Последние два автора работали в чисто алгебраической ситуации, используя теорию пересечений на V : с векторными расслоениями E и T_V связаны характеристические классы $\text{ch } E$ и $\text{Td } T_V$ в группах Чжоу $\text{CH}^*(V)_{\mathbf{Q}}$; интегрирование $\int_V$ классов когомологий по фундаментальному классу

имеет алгебраический аналог, а именно отображение *степени*

$$\deg_V: CH^n(V) \rightarrow \mathbf{Z}, \quad \left[\sum_i n_i P_i \right] \mapsto \sum n_i,$$

и формула Римана–Роха записывается так:

$$\chi(V; E) = \deg_V(\text{ch } E \cdot \text{Td } T_V)^{(n)}.$$

(γ) При надлежащих предположениях на E (положительность, ...) высшие группы когомологий $H^i(V; E)$, $i \geq 1$, обращаются в нуль, и формула Римана–Роха–Хирцебруха (1.3.1) позволяет вычислить $\dim H^0(V; E)$. Это возможно, например, когда E имеет вид $E_0 \otimes \mathcal{L}^n$, где $\mathcal{L}$ — обильное линейное расслоение над V , а n достаточно велико.

1.4. Арифметическая проблема Римана–Роха. Теория Жилле-Суле дает арифметический аналог геометрических утверждений предыдущего параграфа.

(α) «Наивный» арифметический вариант проблемы Римана–Роха можно сформулировать так:

Пусть V — арифметическое многообразие, собственное над $\text{Spec } \mathbf{Z}$, и пусть $\bar{E} = (E, \|\cdot\|)$ — эрмитово векторное расслоение над V . Сколько существует таких сечений s расслоения E над V , что $\|s_C\| \leq 1$ на $V(\mathbf{C})$?

Заметим, что $\mathbf{Z}$ -модуль $H^0(V; E)$ сечений расслоения E над V свободен, конечного типа и отождествляется с решеткой в векторном $\mathbf{Q}$ -пространстве конечной размерности

$$H^0(V_{\mathbf{Q}}; E_{\mathbf{Q}}) \cong H^0(V; E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

Сечения, которые нас интересуют — это элементы из $H^0(V_{\mathbf{Q}}; E_{\mathbf{Q}})$, удовлетворяющие одновременно и условиям целочисленности (т. е. лежащие в решетке $H^0(V; E)$), и условию на их архимедову норму, которое играет роль условия целочисленности «в бесконечных точках».

(β) Аналогия между числовыми и функциональными полями позволяет придать арифметической проблеме Римана–Роха более коhomологический вид. Для этого надо переписать формулу (1.3.1) в случае, когда гладкое проективное многообразие V снабжено (плоским) морфизмом $\pi: V \rightarrow C$ на гладкую проективную кривую C .

Характеристику Эйлера–Пуанкаре $\chi(V; E)$ можно вычислить с помощью морфизма π : она совпадает с характеристикой $\chi(C; R\pi_* E)$ прямого образа $R\pi_* E$ расслоения E (в производной категории когерентных пучков на C). Формула Римана–Роха на C записывается для него так:

$$\chi(C; R\pi_* E) = \text{rg } R\pi_* E \cdot \int_C (\text{Td } T_C)^{(2)} + \deg R\pi_* E. \quad (1.4.1)$$

Более того, ранг $\operatorname{rg} R \pi_* E$ выражается формулой

$$\operatorname{rg} R \pi_* E = \chi(\pi^{-1}(y); E) \quad (1.4.2)$$

для любого $y \in C$, а степень $\deg R \pi_* E$ совпадает со степенью «детерминантного» линейного расслоения (Гротендик, Кнудсен, Мамфорд; см. [KM])

$$\lambda(E) := \det R \pi_* E, \quad (1.4.3)$$

слой которого в точке $y \in C$ естественно изоморфен тензорному произведению

$$\bigotimes_{i \geq 0} [\det H^i(\pi^{-1}(y); E)]^{(-1)^i}.$$

Положим

$$\operatorname{Td} V/C = \operatorname{Td} T_V \cdot (\pi^* \operatorname{Td} T_C)^{-1}. \quad (1.4.4)$$

Применяя соотношение (1.4.2) и формулу Римана–Роха–Хирцебруха (1.3.1) к гладким слоям морфизма π и полагая $n = \dim_C V$, мы получаем

$$\operatorname{rg} R \pi_* E \cdot \int_C (\operatorname{Td} T_C)^{(2)} = \int_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} V/C)^{(2n-2)} \pi^* (\operatorname{Td} T_C)^{(2)}.$$

Соотношение (1.4.1) вместе с равенствами

$$\chi(C; R \pi_* E) = \chi(V; E) \quad \text{и} \quad \deg R \pi_* E = \deg \lambda(E)$$

показывает теперь, что (1.3.1) эквивалентно

$$\deg \lambda(E) = \int_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} T_V)^{(2n)} - \int_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} V/C)^{(2n-2)} \pi^* (\operatorname{Td} T_C)^{(2)},$$

или, учитывая (1.4.4),

$$\deg \lambda(E) = \int_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} V/C)^{(2n)}.$$

Аналогичная формула имеет место для характеристических классов в группе Чжоу многообразия V :

$$\deg \lambda(E) = \deg_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} V/C)^{(n)}. \quad (1.4.5)$$

Эта формула на самом деле является частным случаем относительной теоремы Римана–Роха, доказанной Гротендиком. Мы только что показали, что если известна формула Римана–Роха для общего слоя морфизма π , то эта относительная формула по существу эквивалентна формуле Римана–Роха для всего V .

В арифметической ситуации, т. е. когда V — арифметическое многообразие, такое, что морфизм $\pi: V \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ собственный, а E — локально свободный когерентный пучок на V , конструкция детерминантного расслоения $\det R\pi_* E$ по-прежнему имеет смысл и дает линейное расслоение $\lambda(E)$ над $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, т. е. свободный $\mathbb{Z}$ -модуль ранга 1, снабженный каноническим изоморфизмом

$$\lambda(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \bigotimes_{i \geq 0} [H^i(V_{\mathbb{Q}}; E_{\mathbb{Q}})]^{(-1)^i}.$$

Чтобы для этого линейного расслоения была определена аракеловская степень, необходимо снабдить его метрикой. В случае когда на $V(\mathbb{C})$ задана кэлерова метрика, а на $E_{\mathbb{C}}$ — эрмитова структура, для этого существует естественная процедура Квиллена, использующая аналитическое кручение Рэя–Зингера (см. [Q, RS]). Мы опишем эту процедуру далее в тексте статьи (п. 4.1).

Все изложенное выше позволяет сформулировать арифметическую проблему Римана–Роха следующим образом:

Вычислить аракеловскую степень линейного расслоения $\lambda(E)$, снабженного метрикой Квиллена, ассоциированной с эрмитовой метрикой $\|\cdot\|_E$ на $E_{\mathbb{C}}$ и кэлеровой метрикой на $V(\mathbb{C})$.

Формула для этой степени была предложена в качестве гипотезы [GS7], а затем доказана [GS10] Жилле и Суле. Их формула аналогична геометрической формуле Римана–Роха (1.4.5), но использует арифметическую теорию пересечений и теорию арифметических характеристических классов.

2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ (см. [GS5])

2.1. Потоки Грина. Пусть V — комплексно-аналитическое многообразие.

Обозначим через $A^{p,q}(V)$ (соотв. $D^{p,q}(V)$) пространство C^∞ -дифференциальных форм (соотв. потоков) на V типа (p, q) . Оператор внешнего дифференцирования d разлагается в сумму $d = d' + d''$ так, что $d' A^{p,q}(V) \subset A^{p+1,q}(V)$ и $d'' A^{p,q} \subset A^{p,q+1}(V)$. Полагая

$$d^c = \frac{1}{4\pi i} (d' - d''),$$

имеем

$$dd^c = -d^c d = -\frac{1}{2\pi i} d' d''.$$

Положим

$$\tilde{A}^{p,q}(V) = A^{p,q}(V) / (d' A^{p-1,q}(V) + d'' A^{p,q-1}(V)),$$

а также

$$\tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V) = \mathcal{D}^{p,q}(V) / (d' \mathcal{D}^{p-1,q}(V) + d'' \mathcal{D}^{p,q-1}(V)).$$

Отображение $dd^c: \mathcal{D}^{p,q}(V) \rightarrow \mathcal{D}^{p+1,q+1}$ пропускается через фактор и определяет отображение $dd^c: \tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V) \rightarrow \mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$.

Из классических свойств d - и d'' -когомологий комплексных многообразий легко выводится следующее

Предложение 2.1. (1) *Естественное отображение*

$$\tilde{A}^{p,q}(V) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V)$$

инъективно.

(2) *Для каждого $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V)$*

$$dd^c \varphi \in A^{p+1,q+1}(V) \implies \varphi \in \tilde{A}^{p,q}(V).$$

(3) *Если многообразие V компактно и кэлерово, то ограничение канонического отображения $\mathcal{D}^{p,q}(V) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^{p,q}$ на пространство $\mathcal{H}^{p,q}(V)$ гармонических форм типа (p, q) на V является инъективным, его образ равен ядру отображения dd^c , а образ отображения dd^c состоит из d -точных потоков в $\mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$.*

Пусть Z — комплексно-аналитическое подмногообразие в V коразмерности p . Обозначим через δ_Z поток интегрирования по Z , т.е. поток в $\mathcal{D}^{p,p}(V)$, определяемый формулой

$$\int_V \delta_Z \alpha = \int_Z \alpha.$$

Поток интегрирования δ_Z корректно определен и тогда, когда Z — комплексно-аналитическое подмножество в V коразмерности p , даже если множество Z , особых точек множества Z непусто. В таком случае это — единственное продолжение потока $\delta_{Z \setminus Z_s}$ на $V \setminus Z_s$ до замкнутого потока порядка 0 в $\mathcal{D}^{p,p}(V)$. Определение потока δ_Z продолжается по линейности на любые аналитические циклы Z в V .

Пусть f — мероморфная функция на неприводимом аналитическом подмножестве Z в V коразмерности $p-1$, не равная тождественно нулю. Тогда функция $\log |f|^2$ определена почти всюду и локально принадлежит классу L^1 по отношению к классу мер на Z , отвечающему δ_Z . Поэтому она определяет поток $\log |f|^2 \cdot \delta_Z$ в $\mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$. Этот поток удовлетворяет уравнению Пуанкаре-Лелона

$$dd^c[\log |f|^2 \cdot \delta_Z] = \delta_{\text{div } f}, \quad (2.1.1)$$

где через $\text{div } f$ обозначен дивизор функции f (представляющий собой аналитический цикл коразмерности p на V).

Потоком Грина для аналитического цикла Z коразмерности p на V называется любой элемент $g \in \tilde{D}^{p-1, q-1}(V)$, такой, что $dd^c g + \delta_Z$ — форма класса C^∞ . *Формой Грина* для Z называется любой поток $g \in D^{p-1, q-1}(V)$ локально класса L^1 на V и класса C^∞ на дополнении к носителю $[Z]$ цикла Z , такой, что $dd^c g + \delta_Z$ — форма класса C^∞ .

Формула Пуанкаре–Лелона показывает, что всякий цикл вида $\operatorname{div} f$ допускает поток Грина. На самом деле можно показать, что *всякий алгебраический цикл на гладком квазипроективном комплексном многообразии допускает по крайней мере одну форму Грина*.

2.2. Арифметические группы Чжоу. Пусть X — арифметическое многообразие.

Для каждого $p \in \mathbb{N}$ обозначим через $X^{(p)}$ множество целых подсхем в X коразмерности p , а через $Z^p(X)$ группу циклов коразмерности p на X , т.е. свободную абелеву группу, порожденную множеством $X^{(p)}$. Будем обозначать поле вычетов точки x многообразия X через $k(x)$ и для $x \in X^{(p-1)}$ и $f \in k(x)^*$ обозначим через $\operatorname{div} f$ дивизор функции f ; этот дивизор — элемент из $Z^p(X)$.

По определению $\operatorname{CH}^p(X)$, p -я группа Чжоу многообразия X ; есть факторгруппа группы $Z^p(X)$ по подгруппе $R^p(X)$, порожденной циклами вида $\operatorname{div} f$, $f \in k(x)^*$, $x \in X^{(p-1)}$.

Обозначим через $D^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ (соотв. $A^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$) подпространство в $D^{p,p}(X(\mathbb{C}))$ (соотв. в $A^{p,p}(X(\mathbb{C}))$), образованное такими вещественными потоками T , что $F_\infty^* T = (-1)^p T$. Обозначим через $\tilde{D}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ и $\tilde{A}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ образы этих подпространств соответственно в $\tilde{D}^{p,p}(X(\mathbb{C}))$ и в $\tilde{A}^{p,p}(X(\mathbb{C}))$. Из предложения 2.1 легко вывести аналогичное утверждение, в котором V заменено на $X_{\mathbb{R}}$.

Арифметическим циклом коразмерности p на X называется пара $(Z, g) \in Z^p(X) \oplus \tilde{D}^{p-1, p-1}(X_{\mathbb{R}})$, такая, что g — поток Грина для аналитического цикла $Z(\mathbb{C})$ на $X(\mathbb{C})$. Мы будем обозначать множество арифметических циклов через $\hat{Z}^p(X)$. Для каждого $x \in X^{(p-1)}$ и $f \in k(x)^*$ обозначим через $\widehat{\operatorname{div}} f$ арифметический цикл

$$(\operatorname{div} f, [-\log |f_{\mathbb{C}}|^2 \cdot \delta_{x(\mathbb{C})}]).$$

Определим p -ю арифметическую группу Чжоу $\widehat{\operatorname{CH}}^p(X)$ многообразия X как факторгруппу группы $\hat{Z}^p(X)$ по подгруппе $\hat{R}^p(X)$, порожденной элементами вида $\widehat{\operatorname{div}} f$, $f \in k(x)^*$, $x \in X^{(p-1)}$. Положим $\widehat{\operatorname{CH}}^*(X) = \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{\operatorname{CH}}^p(X)$.

Мы имеем канонические морфизмы абелевых групп

$$\begin{aligned}\zeta: \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) &\rightarrow \mathrm{CH}^p(X), & [(Z, g)] &\mapsto [Z], \\ \omega: \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) &\rightarrow \ker d \cap \ker d^c (\subset A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})), & [(Z, g)] &\mapsto \delta_Z(\mathbf{C}) + dd^c g, \\ \alpha: \tilde{A}^{p-1,p-1}(X) &\rightarrow \mathrm{CH}^p(X), & \eta &\mapsto [(0, \eta)].\end{aligned}$$

Вспомним, что помимо групп Чжоу $\mathrm{CH}^p(X)$ со схемой X связаны группы $\mathrm{CH}^{p,q}(X)$, равные по определению членам $E_2^{p,-q}$ спектральной последовательности Квиллена для вычисления алгебраической K -теории схемы X (см., например, [G1]). В частности,

$$\mathrm{CH}^{p,p-1}(X) = \frac{\ker(d^{p-1}: \bigoplus_{x \in X^{(p-1)}} k(x)^* \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \mathbf{Z})}{\mathrm{im}(d^{p-2}: \bigoplus_{x \in X^{(p-2)}} K_2 k(x) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p-1)}} k(x)^*)},$$

где d^{p-1} переводит $f \in k(x)^*$ в $\mathrm{div} f$, а d^{p-2} по существу совпадает с отображением ручного символа. Определим также морфизм групп

$$\rho: \mathrm{CH}^{p,p-1}(X) \rightarrow \tilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}),$$

полагая

$$\rho([(f^x)_{x \in X^{(p-1)}}]) = - \sum_{x \in X^{(p-1)}} \log |f_{\mathbf{C}}^x|^2 \delta_x(\mathbf{C}).$$

(Эта сумма — элемент из $\tilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}})$ в силу уравнения Пуанкаре-Лелона (2.1.1) и предложения 2.1.2, поскольку $\sum_{x \in X^{(p-1)}} \mathrm{div} f^x = 0$.) Отображение ρ тесно связано с регулятором Бейлинсона (см. [Be1] и [GS5, §3.5]).

Наконец, обозначим через $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ подпространство в $A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$, состоящее из замкнутых форм, через $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ — его образ в когомологиях де Рама многообразия $X(\mathbf{C})$, через h — каноническое отображение из $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ на $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ и через c — естественное отображение из групп Чжоу в когомологии де Рама

$$c: \mathrm{CH}^p(X) \rightarrow H^{p,p}(X_{\mathbf{R}}), \quad [Z] \mapsto [\delta_Z(\mathbf{C})].$$

Мы имеем $c \circ \zeta = h \circ \omega$. Если многообразие $X_{\mathbf{Q}}$ проективно, то $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ можно отождествить с образом подпространства $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ в $\tilde{A}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ и с пространством $\mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ гармонических форм в $A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ (по отношению к какой-либо кэлеровой структуре на $X(\mathbf{C})$).

Арифметические группы Чжоу $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$ можно также описать с помощью пятичленных точных последовательностей:

Теорема 2.2. Диаграмма

$$\mathrm{CH}^{p,p-1}(X) \xrightarrow{\rho} \tilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{\alpha} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{CH}^p(X) \rightarrow 0 \quad (2.2.1)$$

— точная последовательность. Если X_Q проективно, то точной последовательностью будет и диаграмма

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^{p,p-1}(X) &\xrightarrow{\rho} H^{p-1,p-1}(X_R) \xrightarrow{\alpha} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \\ &\xrightarrow{(\zeta, -\omega)} \mathrm{CH}^p(X) \oplus Z^{p,p}(X) \xrightarrow{c+h} H^{p,p}(X_R) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

2.3. Линейные эрмитовы расслоения и арифметические циклы коразмерности 1. Пусть X — арифметическое многообразие. Тензорное произведение задает на множестве $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ классов изоморфизма эрмитовых векторных расслоений ранга 1 структуру группы. Нулевой элемент этой группы — класс расслоения $\mathcal{O}_X$ с тривиальной метрикой ($\|1\| = 1$). Обратный элемент к классу изоморфизма линейного эрмитова расслоения (L, h) — это класс расслоения L^{-1} с метрикой, двойственной к метрике h .

Пусть $\bar{F} = (F, \|\cdot\|)$ — линейное эрмитово расслоение над комплексно-аналитическим многообразием V . Напомним, что его первая форма Чженя — это по определению элемент из $A^{1,1}(V)$, локально заданный равенством

$$c_1(\bar{F}) = -dd^c \log \|s\|^2, \quad (2.3.1)$$

где через s обозначено ненулевое голоморфное локальное сечение расслоения F (правая часть в (2.3.1) не зависит от выбора s , поскольку логарифм модуля всякой голоморфной функции плюригармоничен, т.е. лежит в ядре отображения dd^c).

Пусть $\bar{L} = (L, \|\cdot\|)$ — линейное эрмитово расслоение над арифметическим многообразием X , и пусть s — ненулевое рациональное сечение расслоения L . Это сечение определяет мероморфное сечение s_C расслоения L_C . Функция $\log \|s_C\|$ локально класса L^1 на $X(\mathbb{C})$ и поэтому задает элемент в $\mathcal{D}^{0,0}(X_R)$ (см. п. 2.1). Пусть $\mathrm{div}(s) \in Z^1(X)$ — дивизор сечения s , а $c_1(\bar{L}_C)$ — первая форма Чженя расслоения $(\bar{L}_C, \|\cdot\|)$. Из уравнения Пуанкаре–Лелона (2.1.1) и из равенства (2.3.1) следует, что

$$dd^c \log \|s_C\|^2 = \delta_{\mathrm{div}(s_C)} - c_1(\bar{L}_C).$$

Поэтому пара $\widehat{\mathrm{div}}(s) := (\mathrm{div}(s), -\log \|s_C\|^2)$ определяет элемент из $\widehat{Z}^1(X)$.

Следующее предложение представляет собой обобщение на арифметические многообразия классического соответствия между классами линейной эквивалентности дивизоров и классами изоморфизма линейных расслоений.

Предложение 2.3. (1) Класс $\hat{c}_1(\bar{L})$ цикла $\widehat{\text{div}}(s)$ в $\widehat{\text{CH}}^1(X)$ не зависит от выбора s .

(2) $\omega(\hat{c}_1(\bar{L})) = c_1(\bar{L})$, $\zeta(\hat{c}_1(\bar{L})) = c_1(L)$.¹⁾

(3) Если $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|' = e^{\varphi/2}\|\cdot\|$ — две эрмитовы метрики на линейном расслоении L над X , то

$$\hat{c}_1(L, \|\cdot\|) - \hat{c}_1(L, \|\cdot\|') = \alpha(\varphi). \quad (2.3.2)$$

(4) «Арифметический первый класс Чженя» $\hat{c}_1$ задает изоморфизм

$$\hat{c}_1: \widehat{\text{Pic}}(X) \xrightarrow{\sim} \widehat{\text{CH}}^1(X).$$

С помощью этого изоморфизма точная последовательность (2.2.1) отождествляется при $p = 1$ с

$$\mathcal{O}(X)^* \xrightarrow{\rho} A^{0,0}(X_R) \xrightarrow{a} \widehat{\text{Pic}}(X) \xrightarrow{b} \text{Pic}(X) \rightarrow 0, \quad (2.3.3)$$

где

$$\rho(f) = -\log |f_C|^2,$$

$$a(g) = [(\mathcal{O}_X, \|\cdot\|_g)], \quad \text{где } \|1\|_g^2 = e^g,$$

$$b([\bar{L}]) = [L].$$

В случае когда X — спектр кольца целых $\mathcal{O}_K$ числового поля K , эта точная последовательность превращается в

$$\mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\rho} \mathbf{R}^{r_1+r_2} \rightarrow \widehat{\text{Pic}}(\text{Spec } \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Cl } \mathcal{O}_K \rightarrow 0,$$

где через r_1 и r_2 обозначено число вещественных и комплексных точек поля K , а через $\text{Cl } \mathcal{O}_K$ — группа классов идеалов поля K . Отображение ρ совпадает с регулятором Дирихле.

2.4. Фунториальность и мультипликативная структура. Следующая теорема представляет собой сводку основных результатов статьи [GS5].

Теорема 2.4. (1) Обратный образ. Каждому морфизму $f: X \rightarrow Y$ арифметических многообразий соответствует морфизм абелевых групп $f^*: \widehat{\text{CH}}^*(Y) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^*(X)$. Для любых двух морфизмов $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ арифметических многообразий мы имеем $f^*g^* = (g \circ f)^*$; таким образом, $\widehat{\text{CH}}(X)$ — функтор от X . Группы $\text{CH}^{p,p-1}$, CH^p и т. д. также функториальны по X , и точные последовательности (2.2.1) и (2.2.2) — точные последовательности функторов.

¹⁾Через $c_1(L)$ обозначен первый класс Чженя расслоения L в $\text{CH}^1(X)$, т. е. класс линейной эквивалентности дивизора $\text{div}(s)$.

(2) Прямой образ по отношению к собственному морфизму. Для любого собственного морфизма $f: X \rightarrow Y$ относительной размерности d , такого, что $f_C: X_C \rightarrow Y_C$ — гладкий морфизм, существует морфизм абелевых групп $f_*: \widehat{CH}^*(X) \rightarrow \widehat{CH}^{*-d}(Y)$. При этом выполняется формула проекции

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y.$$

(3) Мультипликативная структура. Векторное $\mathbb{Q}$ -пространство $\widehat{CH}^*(X)$ снабжено структурой градуированной коммутативной алгебры с единицей. Под действием отображения ζ эта мультипликативная структура переходит в мультипликативную структуру на $\widehat{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$, заданную пересечением классов алгебраических циклов, а под действием отображения ω — во внешнее умножение дифференциальных форм. Кроме того, она совместима с функторами обратного образа.

Чтобы строго построить эти морфизмы и мультипликативную структуру, приходится преодолеть многочисленные технические трудности. Эвристически эти отображения определяются следующими формулами:

• $f^*[(Z, g)] = [(f^{-1}(Z), f_C^*g)]$, если f трансверсально к Z , т.е. если $\text{codim } f^{-1}(|Z|) = \text{codim } |Z|$.

• $f_*[(Z, g)] = [(f_*Z, f_{C*}g)]$.

• $[(Z_1, g_1)][(Z_2, g_2)] = [(Z_1 \cap Z_2, g_1 * g_2)]$, если Z_1 и Z_2 пересекаются трансверсально, т.е. $\text{codim } |Z_1| \cap |Z_2| = \text{codim } |Z_1| + \text{codim } |Z_2|$. В этой формуле $Z_1 \cap Z_2$ — цикл коразмерности $\text{codim } |Z_1| + \text{codim } |Z_2|$ с носителем в $|Z_1| \cap |Z_2|$, причем кратности даются «формулой Тор'ов» Серра (см. [Se]), а $g_1 * g_2$ — «*-произведение» классов g_1 и g_2 , т.е. поток Грина для $Z_1 \cap Z_2$, «определенный» в терминах представителей $\check{g}_1$ и $\check{g}_2$ классов g_1 и g_2 формулой

$$g_1 * g_2 = \check{g}_1 \delta_{Z_2(C)} + \omega(Z_1, g_1) \check{g}_2 \mod (\text{im } d' + \text{im } d''). \quad (2.4.1)$$

Формально это равенство влечет за собой

$$\begin{aligned} dd^c(g_1 * g_2) &= dd^c g_1 \delta_{Z_2(C)} + \omega(Z_1, g_1) dd^c g_2 \\ &= (-\delta_{Z_1(C)} + \omega(Z_1, g_1)) \delta_{Z_2(C)} \\ &\quad + \omega(Z_1, g_1) (-\delta_{Z_2(C)} + \omega(Z_2, g_2)) \\ &= \omega(Z_1, g_1) \omega(Z_2, g_2) - \delta_{Z_1(C) \cap Z_2(C)}. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Чтобы придать этим формулам смысл, необходимо преодолеть трудности двух типов:

• *Аналитические трудности*: для того чтобы придать смысл формуле (2.4.1), необходимо определить произведение потоков $\check{g}_1 \delta_{Z_2(C)}$. На самом деле Жилле и Суле показывают, что в качестве представителя $\check{g}_1$ класса g_1 можно выбрать такую форму Грина, что интегрирование по гладкой части пространства $Z_2(C) \setminus |Z_1(C)|$ с весом, заданным ограничением $\check{g}_1$, действительно задает поток и вычисление (2.4.2) приобретает смысл. Для этого они вводят класс форм Грина с «хорошими» особенностями (формы Грина «логарифмического типа»). С помощью таких форм они также доказывают различные свойства $*$ -произведения, например ассоциативность и коммутативность.

• *Алгебро-геометрические трудности*: для того чтобы определить, например, умножение на $\widehat{CH}^*$ при помощи приведенных выше формул, следовало бы иметь в распоряжении «лемму о сдвиге», которая гарантировала бы, что, заменяя при необходимости циклы на X на рационально эквивалентные, можно предполагать, что они пересекаются трансверсально. Это верно на общем слое X_Q , так как этот слой — гладкое квазипроективное многообразие над Q и к нему применима классическая лемма Чжоу о сдвиге. К сожалению, для циклов на арифметическом многообразии коразмерности > 1 аналогичный результат неизвестен.

Эта трудность появляется уже при попытке определить умножение на $CH^*(X)$, и ее можно преодолеть после тензорного умножения на Q с помощью следующей конструкции, использующей K -теорию (см. [S1, GS4]). Пусть Z_1 и Z_2 — два цикла на X коразмерностей p_1 и p_2 , и пусть они пересекаются в X_Q трансверсально. Для любой замкнутой подсхемы Y в X обозначим через $K_0^Y(X)$ K -теорию многообразия X с носителями в Y , а через $K_0^Y(X)^{(j)}$, $j \in N$, часть группы $K_0^Y(X)_Q$ веса j по отношению к операциям Адамса. Пусть $[Z_i] \in K_0^{|Z_i|}(X)^{(p_i)}$ — класс цикла Z_i , и пусть $Z \in Z^{p_1+p_2}(X)_Q$ — цикл с носителем в $|Z_1| \cap |Z_2|$, образ которого в $K_0^{|Z_1|+|Z_2|}(X)^{(p_1+p_2)}$ совпадает с компонентой веса $p_1 + p_2$ произведения $[Z_1] \cdot [Z_2]$. Тогда класс цикла Z в $CH^{p_1+p_2}(X)_Q$ определяет «произведение-пересечение» классов циклов Z_1 и Z_2 в $CH^*(X)$, и если g_1 и g_2 — потоки Грина для $Z_1(C)$ и $Z_2(C)$, то арифметический цикл $(Z, g_1 * g_2)$ определяет произведение в $CH^*(X)_Q$ классов (Z_1, g_1) , (Z_2, g_2) в $CH^*(X)$.

Отметим, что произведение двух элементов из $\widehat{CH}^*(X)$ можно определить в $\widehat{CH}^*(X)$ и без тензорного умножения на Q , если один из этих элементов имеет степень 1 или если X — гладкая схема над кольцом целых числового поля (используя конструкцию Фултона [Fu]).

Наконец, отметим следующие формулы:

$$a(\eta)C = a(\eta\omega(C)), \quad (2.4.3)$$

$$a(\eta)a(\eta') = a(dd^c\eta \cdot \eta') \quad (2.4.4)$$

$$= 0, \quad \text{если } \eta \text{ или } \eta' \text{ } d\text{-, } d'\text{- или } d''\text{-замкнута.}$$

2.5. Арифметическая степень и высота циклов. В случае когда $K = \mathbb{Q}$, точная последовательность (2.3.3) превращается в изоморфизм

$$a: \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathrm{Spec} \mathbf{Z}).$$

Легко проверить, что с учетом отождествления

$$\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathrm{Spec} \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathrm{Spec} \mathbf{Z})$$

изоморфизм, обратный к $2a$, переводит класс линейного эрмитова расслоения $\bar{L}$ над $\mathrm{Spec} \mathbf{Z}$ в его аракеловскую степень $\widehat{\deg} \bar{L}$. Обозначим этот обратный изоморфизм через

$$\widehat{\deg}: \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathrm{Spec} \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}.$$

Пусть X — такое арифметическое многообразие, что морфизм $f: X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbf{Z}$ собственный, и пусть d — относительная размерность морфизма f (таким образом; «абсолютная» круллевская размерность многообразия X равна $d + 1$). Тогда можно рассмотреть композицию отображения аракеловской степени $\widehat{\deg}$ с отображением

$$f_*: \widehat{\mathrm{CH}}^{d+1}(X) \rightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathrm{Spec} \mathbf{Z}).$$

Эта композиция называется *отображением арифметической степени*

$$\widehat{\deg}_X = \widehat{\deg} \circ f_*: \widehat{\mathrm{CH}}^{d+1}(X) \rightarrow \mathbf{R}$$

и представляет собой арифметический аналог отображения

$$\deg_V: \mathrm{CH}^d(V) \rightarrow \mathbf{Z},$$

определенного для любого многообразия размерности d , собственного над полем.

Если X — спектр кольца целых числового поля K , то $\deg_X$ совпадает также и с аракеловской степенью эрмитова линейного расслоения над $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_K$. В общем случае арифметический цикл коразмерности $d + 1$ на X имеет вид $(\sum_{i=1}^N n_i P_i, g)$, где P_i — замкнутые точки многообразия X , а $g \in \tilde{A}^{d,d}(X_{\mathbf{R}})$, и арифметическая степень выражается

формулой

$$\widehat{\deg}_X \left[\left(\sum_{i=1}^N n_i P_i, g \right) \right] = \sum_{i=1}^N n_i \log \#k(P_i) + \frac{1}{2} \int_{X(C)} g.$$

Пусть теперь $\bar{L}$ — линейное эрмитово расслоение над X . Для каждого арифметического подмногообразия Y в X , т.е. для каждого арифметического многообразия Y , снабженного замкнутым вложением $i: Y \hookrightarrow X$, положим

$$h_{\bar{L}} = \widehat{\deg}_Y i^* \hat{c}_1(\bar{L})^{d'+1},$$

где через d' обозначена относительная размерность многообразия Y над $\text{Spec } \mathbf{Z}$. Тогда эта формула дает обобщение понятия высоты точки $X(\mathbf{Z}) (= X(\mathbf{Q}))$ по отношению к $\bar{L}$. Можно также распространить это определение на нерегулярные циклы Y в X (см. п. 2.5). Если Y — дивизор ненулевого рационального сечения z расслоения L , то из определений $\widehat{\deg}_X$ и $\hat{c}_1$ можно вывести, что

$$h_{\bar{L}}(Y) = h_{\bar{X}} + \int_{X(C)} \log \|s_C\| c_1(\bar{L}_C)^d.$$

Применяя это равенство к $X = \mathbf{P}_Z^N$ и $\bar{L} = \overline{\mathcal{O}(1)}$ (см. п. 1.2), получаем

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\mathbf{P}^N) - h_{\overline{\mathcal{O}(1)}} &= \int_{\mathbf{P}^N(C)} \log \frac{|z_0|}{(|z_0|^2 + \dots + |z_N|^2)^{1/2}} \omega_{FS}^N \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right), \end{aligned}$$

где через ω_{FS} обозначена форма Фубини-Штудии

$$c_1(\overline{\mathcal{O}(1)})_C = dd^c \log \sum_{i=0}^N |z_i|^2$$

на $\mathbf{P}^N(C)$. Отсюда получается по индукции, что высота пространства $\mathbf{P}^N$ по отношению к $\overline{\mathcal{O}(1)}$ совпадает с N -м числом Штолля (см. [GS6] и [St]):

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\mathbf{P}_Z^N) = \sigma_N := \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^p \frac{1}{j}.$$

Получаем также, что если $P \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_N]$ — ненулевой однородный многочлен степени d , а Y — цикл в $\mathbf{P}_Z^N$, заданный уравнением

$P = 0$, то

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(Y) = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\mathbf{P}_Z^N) + \int_{\mathbf{P}^N(\mathbb{C})} \log \frac{|P(z_0, \dots, z_N)|}{(\sum_{i=0}^N |z_i|^2)^{d/2}} \omega_{FS}^N.$$

Высота $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}$ проективных многообразий используется в [Fa2], а также в теории трансцендентности (см. [S3, Ph]).

2.6. Многообразия Аракелова. В ситуации, когда общий слой арифметического многообразия X проективен, для изучения потоков Грина на $X(\mathbb{C})$ естественно использовать теорию гармонических форм. Именно это делал Аракелов в своих работах по арифметическим поверхностям. В общем случае для этого вводится следующее определение:

Определение 2.5. *Многообразием Аракелова* называется пара $\overline{X} = (X, \omega)$, состоящая из арифметического многообразия X с проективным общим слоем $X_{\mathbb{Q}}$ и *кэлеровой формы* ω на $X(\mathbb{C})$, такой, что $F_{\infty}^* \omega = -\omega$.

(Это условие означает, что риманова метрика, заданная формой ω , инвариантна относительно F_{∞} .)

Итак, пусть $\overline{X}$ — многообразие Аракелова. Проекция пространства $A^{p,p}(X(\mathbb{C}))$ на гармоническую составляющую $\mathcal{H}^{p,p}(X(\mathbb{C}))$ пропускается через отображение из $\tilde{A}^{p,p}(X(\mathbb{C}))$ на $\mathcal{H}^{p,p}(X(\mathbb{C}))$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{H}}^{\perp}(X_{\mathbb{R}})$ пересечение ядра этого отображения с $\tilde{A}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$. Определим p -ю группу Чжоу-Аракелова многообразия $\overline{X}$ как подгруппу

$$\mathrm{CH}^p(\overline{X}) = \omega^{-1}(\mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbb{R}}))$$

в $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$. На самом деле это прямое слагаемое в $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$: из утверждения (3) предложения 2.1 следует, что имеется изоморфизм

$$\mathrm{CH}^p(\overline{X}) \oplus \tilde{\mathcal{H}}^{\perp, p-1, p-1}(X_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X), \quad c \oplus \eta \mapsto c + a(\eta).$$

Точная последовательность (2.2.1) переписывается в виде

$$\mathrm{CH}^{p, p-1}(X) \rightarrow \mathcal{H}^{p-1, p-1}(X_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{a} \mathrm{CH}^p(\overline{X}) \xrightarrow{\hookrightarrow} \mathrm{CH}^p(X) \rightarrow 0.$$

Положим

$$\mathrm{CH}^*(\overline{X}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{CH}^p(\overline{X}).$$

В частном случае, когда $\bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ является подалгеброй в $\bigoplus_{p \geq 0} A^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$, например, когда $X(\mathbb{C})$ — кривая, абелево многообразие или эрмитово симметрическое пространство (такое, как проективное пространство или грассманиан), $\mathrm{CH}^*(\overline{X})_{\mathbb{Q}}$ — подалгебра в

$\widehat{\text{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$. Однако следует помнить, что в общем случае — например, для полных пространств флагов — это не так. Из-за этой трудности нельзя ограничиться группой $\text{CH}^* \bar{X}$ и приходится рассматривать «утолщенную» группу $\widehat{\text{CH}}^*(X)$.

Пусть Y — замкнутая подсхема в X с носителем коразмерности $\geq p$, и пусть $[Y] \in Z^p(X)$ — ассоциированный цикл. Пусть также g_Y — единственный поток Грина для $\delta_{[Y](C)}$ с нулевой гармонической составляющей, такой, что

$$dd^c g_Y + \delta_{[Y](C)} \in \mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$$

(см. предложение 2.1 (3)). По определению *фундаментальный класс* $[Y]_A$ *стеи* Y в $\text{CH}^p(\bar{X})$ равен классу арифметического цикла $([Y], g_Y)$ (см. [Fa2]).

Пусть $\bar{L}$ — линейное эрмитово расслоение над X , такое, что форма $c_1(\bar{L}_C)$ и ее степени гармоничны на $X(C)$. Тогда можно определить высоту схемы Y по отношению к $\bar{L}$ как

$$h_{\bar{L}}(Y) = \widehat{\deg}_X([Y]_A \cdot \hat{c}_1(\bar{L})^p)$$

и обобщить тем самым на $\bar{L}$ определение, данное в п. 2.4.

Примеры (см. [GS6, I]). (1) Снабдим проективное пространство $\mathbf{P}^N = \text{Proj } \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_N]$ формой Фубини–Штуди ω_{FS} и обозначим полученное многообразие Аракелова через $\bar{\mathbf{P}}^N$. Обозначим также через $\mathbf{P}^k$ подсхему в $\mathbf{P}^N$, заданную уравнениями

$$X_0 = \dots = X_{N-k-1} = 0.$$

Равенства

$$\begin{aligned} i_0^{-1}(n) &= [(X, 0)] = n[\mathbf{P}^N]_A, \\ i_p^{-1}(n \oplus \lambda) &= n[\mathbf{P}^{N-p}]_A + a(\lambda \omega_{FS}^{p-1}), \\ i_{N+1} &= \widehat{\deg}_{\mathbf{P}^N} \end{aligned}$$

задают изоморфизмы

$$\begin{aligned} i_0: \text{CH}^0(\bar{\mathbf{P}}^N) &\cong \mathbf{Z}, \\ i_p: \text{CH}^p(\bar{\mathbf{P}}^N) &\cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{R}, \quad \text{если } 1 \leq p \leq N, \\ i_{N+1}: \text{CH}^{N+1}(\bar{\mathbf{P}}^N) &\cong \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Кроме того, в обозначениях последней части п. 2.5, при $k = 0, \dots, N$ мы имеем

$$[\mathbf{P}^k]_A = \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(1)})^{N-k} - a(2(\sigma_N - \sigma_k) \omega^{N-k-1}) \quad (0 \leq k \leq N).$$

Эти соотношения вместе с равенствами (2.4.3), (2.4.4) и $\omega([P^k]_A) = \omega_{FS}^{N-k}$ полностью задают мультипликативную структуру в $CH^*(\bar{P}^N)$.

(2) В более общем случае пусть X — грассманиан над Z , и пусть K — числовое поле. Тогда кольца $CH^*(X)$, $CH^*(X_Q)$ и $H^*(X(C), Z)$ канонически изоморфны: все они совпадают с кольцом срезанных многочленов от классов Чженя тавтологического расслоения над X . Обозначим его через $M^*(X)$.

Пространство $X(C)$ обладает естественной структурой эрмитова симметрического пространства. Это позволяет определить и на X , и на $X_{O_K} := X \otimes_Z \text{Spec } O_K$ структуру многообразия Аракелова, и мы имеем изоморфизм градуированных абелевых групп

$$CH^*(\bar{X}_{O_K}) \cong M^*(X) \otimes \widehat{CH}^*(\text{Spec } O_K).$$

3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

3.1. Классы Ботта-Чженя. Пусть V — (гладкое) комплексно-аналитическое многообразие. Пусть $\bar{E} = (E, h)$ — любое эрмитово векторное расслоение над V ; тогда на E существует единственная унитарная связность $\nabla_{\bar{E}}$, такая, что ее антиголоморфная составляющая $\nabla_{\bar{E}}^{0,1}$ совпадает с оператором Коши-Римана $\bar{\partial}_{\bar{E}}$ на расслоении E (см. [BC, Prop. 3.2] или [GH, Lemma p. 73]). Обозначим через $K_{\bar{E}}$ кривизну $\nabla_{\bar{E}}^2$ этой связности; эта кривизна — $(1, 1)$ -форма на V со значениями в расслоении $\text{End}(E)$ эндоморфизмов расслоения E .

Пусть $\varphi \in \mathbb{Q}[[T_1, \dots, T_n]]$ — симметрический формальный ряд от n переменных, и пусть $\varphi^{(k)}$ — его однородная компонента степени k для каждого $k \geq 0$. Обозначим через $\varphi^{(k)}$ такую единственную полиномиальную функцию на множестве комплексных $n \times n$ -матриц, которая инвариантна относительно сопряжения и равна

$$\varphi^{(k)}(M) = \varphi^{(k)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

в случае, когда M — диагональная матрица с диагональными коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. В более общей ситуации для каждой коммутативной $\mathbb{Q}$ -алгебры A это полиномиальное отображение «продолжается» до отображения

$$\varphi^{(k)}: M_n(A) \rightarrow A.$$

Рассмотрим эрмитово векторное расслоение $\bar{E}$ ранга n над V . отождествляя локально $\text{End}(E)$ с $M_n(C)$ при помощи какого-либо

C^∞ -базиса в E и применяя изложенное выше рассуждение к алгебре дифференциальных форм четной степени на V , положим

$$\varphi(\bar{E}) := \sum_{k \geq 0} \varphi^{(k)} \left(-\frac{1}{2\pi i} K_{\bar{E}} \right) \in \bigoplus_{k \geq 0} A^{k,k}(V).$$

Обозначим через $c_i(E) (\in H^{2i}(V; \mathbb{Z}))$ i -й класс Чженя E , а через σ_i обозначим i -ю элементарную симметрическую функцию от $T_1, \dots, T_n$. По теории Чженя–Вейля $\varphi(\bar{E})$ — замкнутая форма, и, кроме того, если $\varphi = \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ для какого-либо $\psi \in \mathbb{Q}[[X_1, \dots, X_n]]$, то класс когомологий де Рама формы $\varphi(\bar{E})$ совпадает с характеристическим классом

$$\psi(c_1(E), \dots, c_n(E)) \in \bigoplus_{k \geq 0} H^{2k}(V; \mathbb{Q}) \left(\subset \bigoplus_{k \geq 0} H^{2k}(V; \mathbb{R}) \right).$$

В частности, класс когомологий формы $\varphi(\bar{E})$ не зависит от метрики h . Более общим образом, пусть

$$\bar{E}: 0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$$

— короткая точная последовательность эрмитовых векторных расслоений над V , т. е. набор из трех эрмитовых векторных расслоений $\bar{S}$, $\bar{E}$ и $\bar{Q}$ над V и короткой точной последовательности голоморфных векторных расслоений

$$0 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow 0,$$

связывающей подлежащие расслоения, и пусть при этом E — расслоение ранга n . Тогда дифференциальные формы $\varphi(\bar{S} \oplus \bar{Q})$ и $\varphi(\bar{E})$ когомологичны. Ботт и Чжень в своих работах по теории Неванлинны показали, что они на самом деле отличаются на форму из образа оператора dd^c (см. [BC]). Более точно, можно доказать следующую теорему ([BGS1, Theorem 1.2.9], [GS6]; см. также [Do]):

Теорема 3.1. Пусть $\varphi \in \mathbb{Q}[[T_1, \dots, T_n]]$ — симметрический формальный ряд. Каждой короткой точной последовательности

$$\bar{E}: 0 \rightarrow \bar{S} \xrightarrow{i} \bar{E} \xrightarrow{p} \bar{Q} \rightarrow 0$$

эрмитовых векторных расслоений над комплексно-аналитическим многообразием V , такой, что $\text{rg } E = n$, можно сопоставить, причем единственным образом, форму $\tilde{\varphi}(\bar{E}) \in \tilde{A}(V)$ так, что

$$(i) \quad dd^c \tilde{\varphi}(\bar{E}) = \varphi(\bar{S} \oplus \bar{Q}) - \varphi(\bar{E});$$

(ii) для каждого голоморфного отображения $f: W \rightarrow V$ комплексно-аналитический многообразий

$$\tilde{\varphi}(f^*(\bar{E})) = f^*(\tilde{\varphi}(\bar{E}));$$

(iii) если $\bar{E}$ расщепляется, т. е. имеет вид

$$0 \rightarrow \bar{S} \xrightarrow{i} \bar{S} \oplus \bar{Q} \xrightarrow{p} \bar{Q} \rightarrow 0,$$

где $i(x) = x \oplus 0$, $p(x \oplus y) = y$; то $\tilde{\varphi}(\bar{E}) = 0$.

Опишем конструкцию класса $\tilde{\varphi}$. Пусть $\mathcal{O}(1)$ — линейное расслоение степени 1 над $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, пусть σ — голоморфное сечение расслоения $\mathcal{O}(1)$ с единственным нулем в бесконечности, и пусть p_1 и p_2 — проекции многообразия $X \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ соответственно на X и на $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Обозначим также через S , E , Q и $\mathcal{O}(1)$ расслоения p_1^*S , p_1^*E , p_1^*Q и $p_2^*\mathcal{O}(1)$ над $X \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Рассмотрим расслоение

$$S(1) = S \otimes \mathcal{O}(1)$$

и морфизм

$$\text{id} \otimes \sigma: S \rightarrow S(1)$$

на $X \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Морфизм

$$i \oplus (\text{id} \otimes \sigma): S \rightarrow E \oplus S(1)$$

инъективен, и можно рассмотреть факторрасслоение $\tilde{E} = E \oplus S(1)/S$. Ядро проекции $\tilde{E} \rightarrow E/S = Q$ отождествляется с $S(1)$, и короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow S(1) \rightarrow \tilde{E} \rightarrow Q \rightarrow 0,$$

будучи ограничена на $X \times \{\infty\}$, отождествляется с

$$0 \rightarrow S \rightarrow S \oplus Q \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Пусть $\tilde{h}$ — такая эрмитова метрика на $\tilde{E}$, что изоморфизмы

$$\tilde{E}|_{X \times \{0\}} \cong E \quad \text{и} \quad \tilde{E}|_{X \times \{\infty\}} \cong S \oplus Q$$

являются изометриями. Из уравнения Пуанкаре-Лелона легко вывести, что

$$\tilde{\varphi}(\bar{E}) := - \int_{p_1} \varphi(\tilde{E}, \tilde{h}) \log |z|^2$$

удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii).

Помимо симметрических функций $c_i = \sigma_i(T_1, \dots, T_n)$ эта конструкция применима к полному классу Чженя $c = \sum_{i \geq 0} c_i$, к характеру Чженя

$$\text{ch}(T_1, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^n e^{T_i}$$

и к классу Тодда

$$\text{Td}(T_1, \dots, T_n) = \prod_{i=1}^n \frac{T_i}{1 - e^{-T_i}}.$$

3.2. Арифметические характеристические классы. Следующая теорема — главный результат работы [GS6, I]. Она показывает, что для эрмитовых векторных расслоений над арифметическими многообразиями существует теория характеристических классов, совместимая и с теорией характеристических классов на схемах (см. [S1, GS4]), и с теорией Чженя–Вейля. Это позволяет перенести конструкции п. 2.3 на эрмитовы расслоения ранга > 1 .

Теорема 3.2. Каждому эрмитову векторному расслоению $\bar{E}$ ранга n над арифметическим многообразием X и каждому симметрическому ряду $\varphi \in \mathbb{Q}[[T_1, \dots, T_n]]$ можно поставить в соответствие характеристический класс $\hat{\varphi}(\bar{E})$ так, что выполнены следующие условия:

I. Функториальность. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм арифметических многообразий, и пусть $\bar{E}$ — эрмитово векторное расслоение над X ; тогда

$$f^*(\hat{\varphi}(\bar{E})) = \hat{\varphi}(f^*(\bar{E})).$$

II. Нормализация. Если $\bar{E}$ — ортогональная прямая сумма линейных расслоений $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_n$, то

$$\hat{\varphi}(\bar{E}) = \varphi(\hat{c}_1(\bar{L}_1), \dots, \hat{c}_1(\bar{L}_n)).$$

III. Тензорное произведение с линейным расслоением. Положим

$$\varphi(T_1 + T, \dots, T_n + T) = \sum_{i \geq 0} \varphi_i(T_1, \dots, T_n) T^i.$$

Пусть $\bar{E}$ (соотв. $\bar{L}$) — эрмитово векторное расслоение (соотв. линейное эрмитово расслоение) над X ; тогда

$$\hat{\varphi}(\bar{E} \otimes \bar{L}) = \sum_i \hat{\varphi}_i(\bar{E}) \hat{c}_1(\bar{L})^i.$$

IV. Совместимость с характеристическими классами. Пусть $\varphi = \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\psi \in \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_n]]$; тогда для каждого эрмитова векторного расслоения $\bar{E}$ над X имеем

$$\omega(\hat{\varphi}(\bar{E})) = \varphi(\bar{E}_C) \quad \text{в} \quad \bigoplus_{p \geq 0} A^{p,p}(X_R), \quad (\text{IV.a})$$

$$\zeta(\hat{\varphi}(\bar{E})) = \psi(c_1(E), \dots, c_n(E)) \quad \text{в} \quad \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}. \quad (\text{IV.b})$$

V. Совместимость с короткими точными последовательностями. Для каждой короткой точной последовательности

$$\bar{E}: 0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$$

эрмитовых векторных расслоений над X имеем

$$\hat{\varphi}(\bar{S} \oplus \bar{Q}) - \hat{\varphi}(\bar{E}) = a(\tilde{\varphi}(\bar{E})).$$

Более того, свойства (I), (II), (III) и (IV.a) однозначно задают это соответствие.

Для доказательства этой теоремы используется вычисление арифметических групп Чжоу грассманианов (см. п. 2.5) и выводимый из него принцип расщепления (см. [GS6, §§3, 4]). Читатель может также обратиться к работам [E1, E2], в которых приведена конструкция, основанная на изучении расслоения на проективные пространства $\mathbf{P}_E$.

Итак, в арифметической ситуации мы располагаем классами Чженя $\hat{c}_p(\bar{E})$ и $\hat{c}(\bar{E}) = \sum_{p \geq 0} \hat{c}_p(\bar{E})$, характером Чженя $\hat{\text{ch}}(\bar{E})$ и классом Тодда $\widehat{\text{Td}}(\bar{E})$. Они удовлетворяют обычным тождествам (см. [GS6, I, Theorem 4.8; §4.9]):

Теорема 3.3. Пусть $\bar{E}$ и $\bar{F}$ — два эрмитовых векторных расслоения над арифметическим многообразием X ; тогда

$$\begin{aligned} \hat{c}(\bar{E} \oplus \bar{F}) &= \hat{c}(\bar{E}) \hat{c}(\bar{F}), & \hat{\text{ch}}(\bar{E} \oplus \bar{F}) &= \hat{\text{ch}}(\bar{E}) + \hat{\text{ch}}(\bar{F}), \\ \widehat{\text{Td}}(\bar{E} \otimes \bar{F}) &= \widehat{\text{Td}}(\bar{E}) \widehat{\text{Td}}(\bar{F}), & \hat{\text{ch}}(\bar{E} \otimes \bar{F}) &= \hat{\text{ch}}(\bar{E}) \hat{\text{ch}}(\bar{F}), \\ \hat{\text{ch}}^{(1)}(\bar{E}) &= \hat{c}_1(\bar{E}) = \hat{c}_1(\det \bar{E}) (\in \widehat{\text{CH}}^1(X)). \end{aligned}$$

Кроме того, если $p > \text{rg } E$, то $\hat{c}_p(\bar{E}) = 0$.

Пример. Пусть Q — универсальное факторрасслоение над $\mathbf{P}_N^Z$. Это расслоение ранга N ; снабдим его эрмитовой метрикой так, чтобы отображение $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N(\mathbb{C})} \otimes \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow Q_{\mathbb{C}}$ было для обычной эрмитовой метрики на $\mathbb{C}^{N+1}$ частичной изометрией. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{c}_p(\bar{Q}) &= [\mathbf{P}^{N-p}]_A + a(2(\sigma_N - \sigma_{p-1} - \sigma_{N-p}) \omega_{FS}^{p-1}) \\ &= \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(1)})^p - a(2\sigma_{p-1} \omega_{FS}^{p-1}). \end{aligned}$$

3.3. К-теория. Пусть X — арифметическое многообразие.

Обозначим через $\hat{K}_0(X)$ абелеву группу, порожденную парами $(\bar{E}, \eta)$, состоящими из эрмитова векторного расслоения $\bar{E}$ над X и элемента $\eta \in \tilde{A}(X_{\mathbf{R}})$, со следующими соотношениями: для любых

$\zeta, \eta \in \tilde{A}(X_{\mathbf{R}})$ и любой короткой точной последовательности эрмитовых расслоений над X

$$\bar{\mathcal{E}}: 0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$$

мы требуем, чтобы

$$(\bar{S}, \zeta) \oplus (\bar{Q}, \eta) = (\bar{E}, \zeta + \eta + \hat{\text{ch}}(\bar{\mathcal{E}})).$$

Группу $\hat{K}_0(X)$ можно описать с помощью регулятора Бейлинсона (см. [Bel])

$$\rho: K_1(X) \rightarrow \bigoplus_{p \geq 1} H_{\mathbf{Q}}^{2p-1}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(p)) \subset \tilde{A}(X_{\mathbf{R}}).$$

Теорема 3.4 [GS2, GS6, II], [De]. *Существует естественная точная последовательность*

$$K_1(X) \xrightarrow{2\rho} \tilde{A}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \hat{K}_0(X) \xrightarrow{b} K_0(X) \xrightarrow{*} 0,$$

где a и b определяются формулами $a(\eta) = [(0, \eta)]$ и $b([(E, \eta)]) = [E]$.

Наконец, в арифметической ситуации существует характер Чженя, устанавливающий изоморфизм между K -теорией и рациональными группами Чжоу:

Теорема 3.5 [GS2, GS6, II]. *Набор равенств*

$$\hat{\text{ch}}([(E, \eta)]) = \hat{\text{ch}}(E) + a(\eta),$$

по одному для каждой образующей (E, η) группы $\hat{K}_0(X)$, задает изоморфизм векторных $\mathbf{Q}$ -пространств

$$\hat{\text{ch}}: \hat{K}_0(X)_{\mathbf{Q}} \rightarrow \widehat{\text{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}.$$

4. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА РИМАНА-РОХА

4.1. Метрика Квиллена. Пусть V — компактное комплексно-аналитическое многообразие размерности n , снабженное кэлеровой формой ω , и пусть $\bar{E} = (E, \|\cdot\|_E)$ — эрмитово векторное расслоение над V .

Форма ω определяет эрмитово скалярное произведение g на голоморфном касательном расслоении T_V к V и, таким образом, на расслоениях комплекснозначных дифференциальных форм над V , а кроме того, форму объема μ на V ; они задаются соотношениями

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^n g \left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial z_{\beta}} \right) dz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta}$$

и

$$\mu = \frac{1}{n!} \omega^n$$

и определяют с помощью тензорного умножения эрмитовы скалярные произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на расслоениях дифференциальных форм с коэффициентами в E , а также « L^2 -скалярное произведение» на каждом из пространств $A^{0,i}(V; E)$ C^∞ -дифференциальных форм типа $(0, i)$ с коэффициентами в E , по определению равное

$$\langle s_1; s_2 \rangle_{L_2} = \int_V \langle s_1(x), s_2(x) \rangle \mu(x).$$

Теорема Дольбо устанавливает канонический изоморфизм между i -й группой когомологий $H^i(V; E)$ и i -й группой когомологий комплекса $(A^{0,i}(V; E), \bar{\partial}_E)$. Теория Ходжа позволяет отождествить эту группу когомологий с ядром оператора

$$\Delta_{E,i}: A^{0,i}(V; E) \rightarrow A^{0,i}(V; E),$$

равного по определению ограничению на $A^{0,i}(V; E)$ оператора

$$\Delta_E = \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* + \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E,$$

где через $\bar{\partial}_E^*$ обозначен оператор, сопряженный к $\bar{\partial}_E$ относительно L^2 -скалярного произведения.

В частности, ограничения L^2 -скалярных произведений на пространствах $A^{0,i}(V; E)$ задают эрмитовы скалярные произведения на группах когомологий $H^i(V; E)$ и тем самым на их внешних степенях и тензорных произведениях, а потому и эрмитово скалярное произведение на детерминантном пространстве¹⁾ E

$$\lambda(E) = \bigotimes_{i=0}^n [\det H^i(V; E)]^{(-1)^i}.$$

Все операторы $\Delta_{E,i}$ положительные и эллиптические. Пусть $(\lambda_{i,p})_{p \in \mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность их собственных значений, в которой каждое повторено столько раз, какова его кратность, и пусть

$$\zeta_i(s) = \sum_{\lambda_{i,p} \neq 0} \lambda_{i,p}^{-s}$$

— ряд Дирихле, построенный по этой последовательности. Можно показать, что этот ряд сходится при $\operatorname{Re} s > n$ и продолжается до мероморфной функции ζ_i на всей комплексной плоскости, которая голоморфна в окрестности нуля. Аналитическое кручение Рэя-Зингера

¹⁾Le déterminant de la cohomologie. — Прим. перев.

эрмитова расслоения $\bar{E}$ по определению равно

$$\tau(V, \omega, \bar{E}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i i \zeta'_i(0)$$

(см. [RS]). Наконец, метрика Квиллена $\| \cdot \|_Q$ на $\lambda(E)$ определяется как

$$\| \cdot \|_Q^2 = e^{-\tau(V, \omega, \bar{E})} \| \cdot \|_{L^2}^2. \quad (4.1.3)$$

Определение метрики Квиллена можно объяснить с помощью следующих рассуждений, касающихся «конечномерной модели» для теории Ходжа.

Пусть

$$0 \rightarrow E^0 \xrightarrow{b} E^1 \xrightarrow{b} \dots E^n \rightarrow 0$$

— комплекс, состоящий из комплексных векторных пространств конечной размерности. Обозначим через H^i i -ю группу когомологий этого комплекса; тогда существует канонический (с точностью до знака) изоморфизм

$$I: \bigotimes_{i \geq 0} (\det H^i)^{(-1)^i} \cong \bigotimes_{i \geq 0} (\det E^i)^{(-1)^i}.$$

Предположим, что E^i наделены, кроме того, эрмитовыми скалярными произведениями. Они задают с помощью перехода к внешним степеням и тензорным произведениям норму на $\bigotimes_{i=0}^n (\det E^i)^{(-1)^i}$. Кроме того, они позволяют построить оператор b^* , сопряженный к b , а тем самым и оператор $\Delta = bb^* + b^*b$. Ядро $\mathcal{H}^i$ оператора $\Delta|_{E^i}$ лежит в $\text{Ker } b|_{E^i}$ и изоморфно отображается на H^i , и изоморфизм $H^i \cong \mathcal{H}^i$ позволяет перенести на H^i скалярное произведение на $\mathcal{H}^i$, полученное ограничением скалярного произведения на E^i . Беря внешние степени и тензорные произведения, получаем норму на $\bigotimes_{i=0}^n (\det H^i)^{(-1)^i}$. Довольно легко проверить, что норма изоморфизма I по отношению к этим нормам равна

$$\|I\| = \prod_{i=0}^n (\det' \Delta_i)^{(-1)^i i/2},$$

где через $\det' \Delta_i$ обозначено произведение ненулевых собственных значений операторов $\Delta|_{E^i}$.

Формально $\exp(-\zeta'_i(0))$ — произведение ненулевых собственных значений оператора $\Delta_{E,i}$; действительно,

$$-\zeta'_i(s) = \sum_{\lambda_{i,p} \neq 0} \lambda_{i,p}^{-s} \log \lambda_{i,p}.$$

Формула (4.1.3) теперь показывает, по-прежнему формально, что метрика Квиллена — естественная L^2 -метрика на $\lambda(E)$, введенная с помощью «изоморфизма»

$$\lambda(E) \cong \bigotimes_{i=0}^n (\det A^{0,i}(E))^{(-1)^i}.$$

Примеры. (1) Пусть $V = \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ и $\omega = \omega_{FS}$, и пусть $\bar{E}$ — тривиальное эрмитово расслоение. Тогда

$$H^i(V; E) \cong \mathbf{C} \quad \text{при } i = 0,$$

$$H^i(V; E) = 0 \quad \text{при } i > 0,$$

а потому $\lambda(E) \cong \mathbf{C}$. Помимо этого собственные значения операторов $\Delta_{E,i}$ известны, а Жилле, Суле и Загир вычислили аналитическое кручение проективных пространств и показали (см. [GS7]), что, полагая

$$\rho(x) = \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \int_0^x \frac{\rho(t) - \rho(0)}{t} dt,$$

можно описать метрику Квиллена на $\lambda(E)$ следующим образом:

$\log \|1\|_Q^2 =$ коэффициент при x^N в

$$\left(\frac{x}{1 - e^{-x}} \right)^{N+1} \left[(N+1) \sum_{m \in 2N+1} \left(2\zeta'(-m) + \zeta(-m) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) \right) \frac{x^m}{m!} - 2\sigma_N x^{-1} - \psi(x) \right],$$

где через ζ обозначена дзета-функция Римана.

(2) Пусть M — комплексная эллиптическая кривая, и пусть α — ненулевая голоморфная дифференциальная форма на M . Пусть

$$\Gamma = \left\{ \int_{\gamma} \alpha; \gamma \in H_1(M; \mathbf{Z}) \right\}$$

— решетка периодов формы α в $\mathbf{C}$, и пусть g_2 и g_3 — инварианты решетки Γ ,

$$g_2 = 60 \sum_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \gamma^{-4} \quad \text{и} \quad g_3 = 140 \sum_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \gamma^{-6}.$$

Пусть, наконец, $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ — дискриминант пары (M, α) . Детерминантное пространство $\lambda(\mathcal{O})$ расслоения $\mathcal{O}$ над M отождествляется

(по алгебраической двойственности Серра) с одномерным векторным пространством голоморфных 1-форм на M . Если снабдить T_M и $\mathcal{O}$ метриками, инвариантными относительно сдвигов, то получающаяся метрика Квиллена $\|\cdot\|_Q$ на $\lambda(\mathcal{O})$ равна

$$\|\alpha\|_Q = |\Delta|^{-1/12}.$$

Это легко вывести из предельной формулы Кронекера, примененной к решетке, двойственной к Γ (см., например, [W4, formule (14), p. 75]).

Метрика Квиллена, связанная с семейством компактных аналитических многообразий и с голоморфным векторным расслоением над ним, обладает замечательными свойствами: она гладкая класса C^∞ , и ее кривизна вычисляется по формуле, похожей на формулу Римана-Роха-Гротендика. Кроме того, зависимость метрики Квиллена на $\lambda(E)$ от метрик на T_Y и на E выражается через классы Ботта-Чжена (см. [Q], доклад на семинаре Бурбаки n° 676, [BGS1] и выше, п. 4.2, пример 2).

4.2. Арифметическая теорема Римана-Роха. Пусть X — арифметическое многообразие, и пусть ω — кэлерова форма на $X(\mathbb{C})$, инвариантная относительно F_∞ .

Если морфизм $\pi: X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ гладкий, то относительное касательное расслоение T_π к π корректно определено как векторное расслоение над X . Кэлерова форма ω на $X(\mathbb{C})$ задает структуру эрмитова векторного расслоения на T_π , которой отвечает класс Тодда $\widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi$ в $\widehat{\text{CH}}^*(X)_Q$.

В общем случае X не обязательно гладко над $\text{Spec } \mathbb{Z}$, но $\bar{T}_X$ по-прежнему корректно определено как «виртуальное эрмитово векторное расслоение над X », т.е. как элемент из $\widehat{K}_0(X)$, и у него всегда есть класс Тодда $\widehat{\text{Td}}(\bar{T}_X)$ (см. [GS10]). Опишем конструкцию этого класса. Пусть $i: X \rightarrow Y$ — какое-либо замкнутое вложение многообразия X в арифметическое многообразие Y , гладкое над $\text{Spec } \mathbb{Z}$ (например, можно взять $Y = \mathbb{P}_Z^N$ с достаточно большим N). Обозначим через N нормальное расслоение к X в Y , а через $\mathcal{E}$ — каноническую точную последовательность расслоений над $X(\mathbb{C})$

$$0 \rightarrow T_{X(\mathbb{C})} \rightarrow i^* T_{Y, \mathbb{C}} \rightarrow N_{\mathbb{C}} \rightarrow 0.$$

Снабдим $T_{X(\mathbb{C})}$ эрмитовой метрикой с помощью формы ω , а $T_{Y, \mathbb{C}}$ и $N_{\mathbb{C}}$ — какими-либо эрмитовыми метриками. Тогда $\mathcal{E}$ становится точной последовательностью $\bar{\mathcal{E}}$ эрмитовых векторных расслоений, и мы имеем

$$\widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi = i^* \widehat{\text{Td}} \bar{T}_Y \cdot (\widehat{\text{Td}} \bar{N})^{-1} + a(\widehat{\text{Td}}(\bar{\mathcal{E}}) \cdot (\text{Td } \bar{N})^{-1}).$$

Для того чтобы сформулировать арифметическую теорему Римана-Роха, принадлежащую Жилле и Суле, нам понадобится еще одно определение (см. [GS7, GS10]).

Определение 4.1. Положим

$$R(X) = \sum_{m \in 2\mathbb{N}+1} \left[2\zeta'(-m) + \zeta(-m) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) \right] \frac{X^m}{m!} \quad (4.2.1)$$

и обозначим также через R ассоциированный аддитивный характеристический класс со значениями в когомологиях с вещественными коэффициентами.

Это означает, как мы помним, что R — единственный характеристический класс, который сопоставляет каждому комплексному векторному расслоению E над разумным топологическим пространством T (например, компактным либо обладающим гомотопическим типом конечного CW -комплекса) класс $R(E)$ в $H^*(T; \mathbb{R})$, причем функториально и так, что

- для двух векторных расслоений E_1 и E_2 над T

$$R(E_1 \oplus E_2) = R(E_1) \cdot R(E_2);$$

- для каждого линейного расслоения L над T

$$R(L) = R(c_1(L)),$$

где правая часть определена с помощью ряда (4.2.1).

Мы можем, наконец, сформулировать теорему.

Теорема 4.2 [GS7, GS10]. Пусть X — арифметическое многообразие, собственное над $\text{Spec } \mathbb{Z}$, и пусть $\bar{E} = (E, \|\cdot\|_E)$ — эрмитово векторное расслоение над X . Предположим, что $X(\mathbb{C})$ снабжено эрмитовой метрикой, инвариантной относительно F_∞ , а $\lambda(E)$ снабжено метрикой Квиллена $\|\cdot\|_Q$, полученной из $\|\cdot\|_E$ и эрмитовой структуры на $X(\mathbb{C})$. Имеем

$$\widehat{\deg}(\lambda(E), \|\cdot\|_Q) = \widehat{\deg}_X(\widehat{\text{ch}} \bar{E} \cdot \widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi) - \frac{1}{2} \int_{X(\mathbb{C})} \text{ch}(E_{\mathbb{C}}) \cdot R(T_{X(\mathbb{C})}) \cdot \text{Td}(T_{X(\mathbb{C})}). \quad (4.2.2)$$

Если определить арифметический класс Тодда многообразия X формулой

$$\text{Td}^A(X) = \widehat{\text{Td}}(\bar{T}_\pi)(1 - a(R(T_{X(\mathbb{C})}))),$$

то равенство (4.2.2) можно переписать в виде

$$\widehat{\deg}(\lambda(E), \|\cdot\|_Q) = \widehat{\deg}_X(\widehat{\text{ch}} \bar{E} \cdot \text{Td}^A X).$$

На самом деле Жилле и Суле доказали более общую теорему, которая имеет смысл для «семейств» и в которой не требуется регулярности X нигде, кроме общего слоя X_Q . Помимо упомянутых выше аналитических результатов и вычисления аналитического кручения проективных пространств, их доказательство требует изучения поведения комплексов эрмитовых расслоений при применении «грассмановой граф-конструкции» Баума, Фултона и Макферсона. Отметим также, что недавно Фальтингс дал доказательство теоремы 4.2, более простое в том, что касается анализа.

Примеры. (1) Применяя теорему 4.2 к P_Z^N с ω_{FS} и к тривиальному эрмитову расслоению, мы вновь получаем формулу из п. 4.1, пример (1). На самом деле именно вычисление аналитического кручения проективных пространств привело Жилле и Суле к необходимости введения класса R . Этот класс появлялся по другому поводу в [Bi2] и [BL1, BL2].

(2) Пусть $\bar{E}: 0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$ — точная последовательность эрмитовых векторных пространств; тогда мы имеем канонический (с точностью до знака) изоморфизм детерминантных пространств

$$I: \lambda(E) \cong \lambda(S) \otimes \lambda(Q).$$

Применяя теорему 4.2 к каждому из расслоений S , E и Q , мы опять получаем формулу аномалии (см. [BGS1]), которая выражает норму этого изоморфизма по отношению к метрикам Квиллена через формы Чженя и Ботта-Чженя:

$$\begin{aligned} \log \|I\|_Q &= \widehat{\deg}(\lambda(E), \|\cdot\|_Q) - \widehat{\deg}(\lambda(S), \|\cdot\|_Q) - \widehat{\deg}(\lambda(Q), \|\cdot\|_Q) \\ &= \widehat{\deg}_X((\widehat{\text{ch}}\bar{E} - \widehat{\text{ch}}\bar{S} - \widehat{\text{ch}}\bar{Q}) \cdot \widehat{\text{Td}}\bar{T}_\pi) \\ &= -\widehat{\deg}_X(a(\widehat{\text{ch}}(\bar{E}))\widehat{\text{Td}}\bar{T}_\pi) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{X(\mathbb{C})} \tilde{\varphi}(\bar{E}) \text{Td}\bar{T}_{X(\mathbb{C})}. \end{aligned}$$

(3) Пусть E — эллиптическая кривая над $\mathbb{Q}$, и пусть X — ее регулярная минимальная модель над $\mathbb{Z}$. Предположим для простоты, что E имеет полустабильную редукцию над $\mathbb{Z}$, выберем дифференциал Нерона α на X и обозначим через Δ дискриминант кривой E . Простые числа, в которых E имеет плохую редукцию, — это в точности делители числа Δ , и если p — такое простое число, то степень (над $\mathbb{F}_p$) цикла Z_p особых точек многообразия $X_{\mathbb{F}_p}$ равна нормированию числа Δ в p . Снабдим T_π метрикой так, что $\|\alpha_C^{-1}\| = 1$, а $\mathcal{O}_X$ — тривиальной метрикой. Детерминантное пространство $\lambda(\mathcal{O}_X)$

отождествляется с $\mathbb{Z}$ -модулем $\mathbb{Z}\alpha$, и поэтому

$$\widehat{\deg}_X(\lambda(\mathcal{O}_X), \|\cdot\|_Q) = -\log \|\alpha\|_Q.$$

Пусть $\bar{\omega}_\pi$ — относительный дуализующий пучок к π , снабженный такой метрикой, что $\|\alpha\| = 1$. Этот пучок — линейное эрмитово расслоение над X , причем тривиализованное сечением α . С другой стороны, вычислив явно изоморфизм между T_π и ω_π^{-1} на общем слое π , можно показать, что

$$\widehat{\text{Td}} \bar{T}_X = \widehat{\text{Td}} \bar{\omega}_\pi^{-1} + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0 \right) \right] = 1 + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0 \right) \right].$$

Получаем также

$$\begin{aligned} & \widehat{\deg}[\widehat{\text{ch}}(\bar{\mathcal{O}}_X) \cdot \text{Td}^A X] \\ &= \widehat{\deg}_X \widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi \quad (\text{поскольку } \bar{\mathcal{O}}_X \text{ и } T_{X(\mathbb{C})} \text{ тривиальны}) \\ &= \widehat{\deg}_X \left(1 + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0 \right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{p|\Delta} \log p \cdot v_p(\Delta) = \frac{1}{12} \log \Delta. \end{aligned}$$

В этом случае арифметическая теорема Римана-Роха сводится к предельной формуле Кронекера (см. п. 4.1, пример (2)).

4.3. Приложения. Сохраним обозначения теоремы 4.2 и рассмотрим, кроме того, линейное эрмитово расслоение $\bar{L}$ над X .

Бисмю и Вассеро показали [BV], что если форма кривизны $c_1(\bar{L}) \in A^{1,1}(X(\mathbb{C}))$ всюду строго положительна, то существует асимптотическое разложение

$$\tau(X(\mathbb{C}), \omega, \bar{E} \otimes \bar{L}^n) = \frac{1}{2(d-1)!} \text{rg } E \int_{X(\mathbb{C})} c_1(L)^d \cdot n^d \log n + O(n^d), \quad (4.3.1)$$

где $n \rightarrow +\infty$, а через d обозначена комплексная размерность многообразия $X(\mathbb{C})$.

С другой стороны, теорема 4.1, примененная к $\bar{E} \otimes \bar{L}^n$, дает¹⁾

$$\widehat{\deg}(\lambda(E \otimes L^n), \|\cdot\|_Q) = \frac{1}{(d+1)!} \text{rg } E \cdot \widehat{\deg}_X \hat{c}_1(\bar{L})^{d+1} \cdot n^{d+1} + O(n^d), \quad (4.3.2)$$

при $n \rightarrow +\infty$.

¹⁾Для того чтобы вывести это асимптотическое разложение, не требуется теоремы 4.2 в наиболее сильной форме. Достаточно результатов [GS7].

Из (4.3.1) и (4.3.2) следует

Теорема 4.3 (см. [GS9]). *Сотраним обозначения теоремы 4.2 и рассмотрим линейное эрмитово расслоение $\bar{L}$ над X , обильное по отношению к морфизму $\pi: X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ и такое, что $c_1(\bar{L}_{\mathbb{C}}) > 0$. Тогда при $n \rightarrow +\infty$*

$$\widehat{\deg}(H^0(X; E \otimes L^n), \| \cdot \|_{L^2}) = \frac{1}{(d+1)!} \text{rg } E \cdot \widehat{\deg}_X \hat{c}_1(\bar{L})^{d+1} \cdot n^{d+1} + \frac{1}{4(d-1)!} \text{rg } E \int_{X(\mathbb{C})} c_1(L)^d \cdot n^d \log n + O(n^d), \quad (4.3.3)$$

где через d обозначена комплексная размерность многообразия X , а через $\| \cdot \|_{L^2}$ L^2 -норма на $H^0(X; E \otimes L^n)$, полученная из эрмитовой метрики¹⁾ ω на $X(\mathbb{C})$ и из эрмитовой структуры на $\bar{E} \otimes \bar{L}^n$.

Напомним, что если V — проективное многообразие размерности d , скажем, для простоты, над $\mathbb{C}$, снабженное обильным линейным расслоением L , то его степень по отношению к L по определению равна

$$\int_V c_1(L)^d,$$

и ее можно вычислить «по Гильберту–Самюэлю» как предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d!}{n^d} \dim H^0(V; L^{\otimes n}).$$

Асимптотическая формула (4.3.3) позволяет получить аналогичное выражение для высоты арифметического многообразия.

Следствие 4.4. Пусть X — арифметическое многообразие, собственное над $\mathbb{Z}$ и относительной размерности d (и, значит, абсолютной размерности $d+1$), и пусть $\bar{L}$ — линейное эрмитово расслоение над X , обильное по отношению к морфизму $\pi: X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ и такое, что $c_1(\bar{L}_{\mathbb{C}}) > 0$. Высота $\widehat{\deg}_X \hat{c}_1(\bar{L})^{d+1}$ многообразия X по отношению к $\bar{L}$ равна

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \widehat{\deg}(H^0(X; L^{\otimes n}), \| \cdot \|_{L^2}),$$

где через $\| \cdot \|_{L^2}$ обозначена L^2 -метрика на $H^0(X; L^{\otimes n})$, полученная из эрмитовой метрики²⁾ на $X(\mathbb{C})$ и из эрмитовой структуры на $\bar{L}^{\otimes n}$.

¹⁾Заметим, что первые два члена правой части (4.3.3) на самом деле не зависят от ω .

²⁾Произвольной, но одной и той же для всех n .

Если положить

$$h(n) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X(\mathbb{C}); E_{\mathbb{C}} \otimes L_{\mathbb{C}}^n),$$

то теорема Минковского, примененная к решетке $H^0(X; E \otimes L^n)$, показывает, что

$$\begin{aligned} \# \{s \in H^0(X; E \otimes L^n) : \|s\|_{L^2} \leq 1\} \\ \geq \frac{\pi^{h(n)/2}}{a^{h(n)} \Gamma(h(n)/2 + 1)} \exp \widehat{\deg}(H^0(X; E \otimes L^n), \|\cdot\|_{L^2}). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Сопоставляя это неравенство с оценкой

$$h(n) = O(n^d), \quad (4.3.5)$$

которая получается, например, из формулы Римана-Роха на $X(\mathbb{C})$, и с асимптотическим выражением (4.3.3), получаем, что если выполнены предположения теоремы 4.3 и к тому же

$$\widehat{\deg}_X \hat{c}_1(\bar{L})^{d+1} > 0,$$

то расслоение $E \otimes L^n$ имеет при большом n сечения с архимедовой L^2 -нормой не больше 1.

На самом деле в предположениях теоремы можно сравнить норму $\|\cdot\|_{L^2}$ на сечениях расслоения $E_{\mathbb{C}} \otimes L_{\mathbb{C}}^n$ с нормой $\|\cdot\|_{L^\infty}$, равной по определению

$$\|s\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X(\mathbb{C})} \|s(x)\|_{\bar{E} \otimes \bar{L}^n}. \quad (4.3.6)$$

А именно можно показать, что существует не зависящая от n константа $C > 0$, такая, что для всякого $s \in H^0(X(\mathbb{C}); E \otimes L^n)$

$$\|s\|_{L^\infty} \leq C n^d \|s\|_{L^2}.$$

Из соотношений (4.3.3)–(4.3.6) выводится следующая теорема, дающая решение «наивной арифметической проблемы Римана-Роха» из п. 1.4:

Следствие 4.5. Пусть X — арифметическое многообразие, собственное и относительной размерности d над $\mathbb{Z}$, пусть $\bar{E}$ — эрмитово векторное расслоение над X , и пусть $\bar{L}$ — линейное эрмитово расслоение над X , обильное по отношению к $\pi: X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ и такое, что

$$c_1(\bar{L}_{\mathbb{C}}) > 0 \quad \text{и} \quad \widehat{\deg}_X \hat{c}_1(\bar{L})^{d+1} > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \log \# \{s \in H^0(X; E \otimes L^n) : \|s\|_{L^\infty} \leq 1\} \\ \geq \frac{1}{(d+1)!} \text{rg } E \cdot \widehat{\deg}_X \hat{c}_1(\bar{L})^{d+1} \cdot n^{d+1} + O(n^d). \end{aligned}$$

Это утверждение в другой форме играет ключевую роль в новом доказательстве гипотезы Морделла, данном Войтой [V]. Для арифметических поверхностей (т.е. для $d = 1$) это утверждение было доказано в менее точной форме Фальтингсом [Fa1], а недавно Шу-Бу Чжанг доказал его полностью под названием «критерий арифметической обильности» (см. [Z]).

ЛИТЕРАТУРА

- [A1] Аракелов С. Ю. Теория пересечения дивизоров на арифметической поверхности. — Изв. АН СССР, 1974, т. 38, №6, с. 1179–1192.
- [A2] Arakelov S. J., Theory of intersection on an arithmetic surface, Proc. Int. Cong. of Math., Vancouver, vol. 1, 1978, 405–408.
- [Be1] Бейлинсон А. А. Высшие регуляторы и значения L -функций. — В кн.: Соврем. пробл. математики. Новейшие достижения, т. 24, М.: ВИНТИ, 1984, с. 181–240.
- [Be2] Beilinson A. A., Height pairings between algebraic cycles, Contemp. Math. **67**, 1–24.
- [Bi1] Bismut J.-M., Superconnections, currents and complex immersions, Invent. Math. **99** (1990), 59–113.
- [Bi1] Bismut J.-M., Koszul complexes, harmonic oscillators and the Todd class, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 159–256.
- [BGS1] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsions; II. Direct images and Bott-Chern forms; III. Quillen metrics on holomorphic determinants, Comm. Math. Phys. **115** (1988), 49–78, 79–126, 301–351.
- [BGS2] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Complex immersions and Arakelov geometry, Grothendieck Festschrift, Birkhäuser, 1990.
- [BGS3] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Bott-Chern currents and complex immersions, Duke Math. J. **60** (1990), 255–284.
- [BL1] Bismut J.-M. et Lebeau G., Immersions complexes et métriques de Quillen, C. R. Acad. Sci. Paris **309**, Série 1 (1989), 487–491.
- [BL2] Bismut J.-M., Lebeau G., Complex immersions and Quillen metrics, Preprint, Orsay, 1990.
- [BV] Bismut J.-M., Vasserot E., The asymptotic of the Ray–Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle, Comm. Math. Phys. **125** (1989), 355–367.
- [Bl] Bloch S., Height pairings for algebraic cycles, Proc. Luminy conference on algebraic K -theory, J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), 119–145.
- [BC] Bott R., Chern S. S., Hermitian vector bundles and the equidistribution of zeroes of their holomorphic sections, Acta Math. **114** (1968), 71–112.
- [De] Deligne P., Le déterminant de la cohomologie, in Current trends in arithmetical algebraic geometry (K. Ribet, ed.), Contemp. Math. **67** (1987), 93–177.

- [Do] Donaldson S., Anti-self-dual Yang–Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, *Proc. London Math. Soc.* **50** (1986), 1–26.
- [E1] Elkik R., Fibrés d'intersection et intégrales de classes de Chern, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22**, 4^{ème} série (1989), 195–226.
- [E2] Elkik R., Métriques sur les fibrés d'intersection, *Duke Math. J.* **61** (1990), 303–328.
- [Fa1] Faltings G., Calculus on arithmetic surfaces, *Ann. of Math.* **119** (1984), 387–424.
- [Fa2] Faltings G., Diophantine approximation on Abelian varieties, preprint, 1989.
- [Fu] Fulton W., Intersection theory, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 2*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1984. [Имеется перевод: Фултон У. Теория пересечений. — М.: Мир, 1983.]
- [G1] Gillet H., Riemann–Roch theorems for higher algebraic K -theory, *Adv. in Math.* **40** (1981), 203–289.
- [G2] Gillet H., An introduction to higher dimensional Arakelov theory, *Contemp. Math.* **67**, 209–228.
- [GS1] Gillet H., Soulé C., Intersection sur les variétés d'Arakelov, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **299**, Série I (1984), 563–566.
- [GS2] Gillet H., Soulé C., Classes caractéristiques sur les variétés d'Arakelov, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **301**, Série I (1985), 439–442.
- [GS3] Gillet H., Soulé C., Direct images of Hermitian holomorphic bundles, *Bull. Amer. Math. Soc.* **15** (1986), 209–212.
- [GS4] Gillet H., Soulé C., Intersection theory using Adams operations, *Invent. Math.* **90** (1987), 243–277.
- [GS5] Gillet H., Soulé C., Arithmetic intersection theory, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 1990, No. 72, 93–174.
- [GS6] Gillet H., Soulé C., Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric, I, II, *Ann. of Math.* **131** (1990), 163–203.
- [GS7] Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and the arithmetic Todd germs, preprint I.H.E.S., 1988.
- [GS8] Gillet H., Soulé C., Differential characters and arithmetic intersection theory, in “Algebraic K -theory: connections with geometry and topology”, edited by J. F. Jardine and V. P. Snaith, NATO ASI Series C, Vol. 279, Kluwer Academic Publishers, 1989, 29–68.
- [GS9] Gillet H., Soulé C., Amplitude arithmétique, *C. R. Acad. Sci. Paris* **307**, Série I (1988), 887–890.
- [GS10] Gillet H., Soulé C., Un théorème de Riemann–Roch–Grothendieck arithmétique, *C. R. Acad. Sci. Paris* **309**, Série I (1989), 929–932.
- [GH] Griffiths P., Harris J., Principles of algebraic geometry, John Wiley and Sons, 1978. [Имеется перевод: Гриффитс Р., Харрис Дж., Основы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1982.]
- [KM] Knudsen F., Mumford D., The projectivity of the moduli space of stable curves, I, Preliminaries on “det” and “div”, *Math. Scand.* **39** (1976), 19–55.

- [La1] Lang S., Fundamentals of diophantine geometry, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983. [Имеется перевод: Ленг С. Основы диофантовой геометрии. — М.: Мир, 1986.]
- [La2] Lang S., Introduction to Arakelov theory, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1988.
- [M] Manin Yu. I., New dimensions in geometry, in Arbeitstagung Bonn 1984, Ed. by F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter, Lect. Notes in Math., vol. 1111, Springer-Verlag, 59–101.
- [P] Паршин А. Н. Модулярные соответствия, высоты и изогении абелевых многообразий. — Труды МИАН им. Стеклова, 1973, т. 132, с. 211–236.
- [Ph] Phillipon P., Sur des hauteurs alternatives, preprint, 1989.
- [Q] Quillen D., Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface, Funct. Anal. Appl. 14 (1985), 31–34.
- [RS] Ray D. B., Singer I. M., Analytic torsion for complex manifolds, Ann. of Math. 98 (1973), 154–177.
- [Se] Serre J.-P., Algèbre locale, multiplicités, troisième édition, Lecture Notes in Math., vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [St] Stoll W., About the value distribution of holomorphic maps into projective space, Acta Math. 123 (1969), 83–114.
- [Sz] Szpiro L., Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell, Astérisque 127 (1985).
- [S1] Soulé C., Opérations en K -théorie algébrique, Can. J. Math. 37 (1985), 488–550.
- [S2] Soulé C., Théorie de Nevanlinna et théorie d'Arakelov, Astérisque 183 (1990), 127–135.
- [S3] Soulé C., Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants, preprint I.H.E.S., 1989.
- [V] Vojta P., An extension of the Thue-Siegel-Dyson-Gel'fond theorem, preprint, 1989.
- [W1] Weil A., Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonction algébrique, Revue scientifique 77 (1939), 104–106. (= Oeuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, vol. I, 1980, [1939a], 236–240.)
- [W2] Weil A., Une lettre et un extrait de lettre à Simone Weil, [1940a] in Oeuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, vol. I, 1980, 244–255.
- [W3] Weil A., Number theory and algebraic geometry, Proc. Intern. Math. Congress, Cambridge, Mass., vol. II, 90–100 (= Oeuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, vol. I, 1980, [1950b], 442–452.)
- [W4] Weil A., Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 88, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976. [Имеется перевод: Вейль А. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. — М., 1978.]
- [Z] Zhang S., Ample Hermitian line bundles on arithmetic surfaces, Preprint, October 1989 and May 1990.

Addendum (сентябрь 1991).

За время, прошедшее с момента представления этой работы, появились следующие публикации:

- [F3] Faltings G., Lectures on the arithmetic Riemann–Roch theorem, notes by S. Zhang, preprint, 1991.
 [GS11] Gillet H., Soulé C., An arithmetic Riemann–Roch theorem, preprint I.H.E.S. 1991.

Статья [GS11] содержит более точные и подробные варианты результатов из заметок [GS9] и [GS10]. В частности, в ней развита техника, необходимая для того, чтобы сформулировать и доказать аналог теоремы 4.2 в случае, когда X регулярно только вдоль общего слоя $X_{\mathbf{Q}}$. Для этого усилены результаты из [GS5–7, BGS1–3, BL2], которых хватало для доказательства теоремы 4.2 для регулярного X . На самом деле так же, как и в [GS10], Жилле и Суле рассматривают более общую ситуацию, в которой $f: X \rightarrow Y$ — такой проективный морфизм арифметических многообразий, что $f_{\mathbf{Q}}: X_{\mathbf{Q}} \rightarrow Y_{\mathbf{Q}}$ — гладкий морфизм, и вычисляют с помощью арифметической теории пересечений класс $\hat{c}_1(\lambda(\bar{E}))$, связанный с детерминантом прямого образа относительно f эрмитова векторного расслоения $\bar{E}$ над X .

В [F3] Фальтингс доказывает более полную относительную теорему, в которой вычисляется не только $\hat{c}_1(\lambda(\bar{E}))$, но и высшие характеристические классы прямого образа расслоения $\bar{E}$ относительно f (это некоторый элемент из $\hat{K}_0(Y)$, определенный с помощью «высших аналитических кручений»; см. также [GS3] и [GS7]). Он всегда работает только с регулярными X и Y .

О КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УЗЛОВ

2-я часть¹⁾

Андре Грамэн

Узел (неориентированный) — это гладкое (или кусочно-линейное) подмногообразие сферы S^3 , диффеоморфное окружности. Говорят, что два узла k и k' *имеют один тип*, если существует гомеоморфизм h сферы S^3 на S^3 , такой, что $h(k') = k$. Если k и k' — узлы одного типа, то их дополнения $S^3 - k$ и $S^3 - k'$ гомеоморфны. Обратное было доказано Гордоном и Люке [GL].

Теорема 1. *Два узла, дополнения которых гомеоморфны, имеют один тип.*

Дело сводится к следующему: определяет ли задание дополнения $S^3 - k$ гомотопический класс меридиана узла k (предложение 1). Положительный ответ на этот вопрос был известен для различных классов узлов, в частности для составных узлов ([N], см. предложение 2) и для торических узлов (см. [BZ 85, p. 274]), но, разумеется, никаких контрпримеров известно не было. В 1987 г. был получен частичный результат [CGLS], согласно которому некоторое дополнение узла может быть получено, самое большее, из узлов двух типов.

Группа узла k — это фундаментальная группа $\pi_1(S^3 - k)$. Фёстел и Виттен доказали в 1978 г. [FW], что из теоремы 1 вытекает следующий результат:

Теорема 2. *Два неразложимых узла с изоморфными группами имеют гомеоморфные дополнения.*

Эта теорема была установлена Виттеном [Wh 87] раньше, чем была доказана теорема 1, при помощи лишь частичных результатов из [CGLS]. Для составного узла задание группы не определяет типа самого узла, однако определяет типы его неразложимых составляющих, которые при рассмотрении других ориентаций могут составить узел с изоморфной группой.

В статье [GL] Гордон и Люке излагают на 40 страницах полное доказательство теоремы 1, которое приятно читать. Мы даем его краткий обзор во второй части данной статьи. Для начала займемся вопро-

¹⁾Gramain André. Rapport sur la théorie classique des noeuds (2ème partie). — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 732, Astérisque 201-202-203, 1991, p. 89–113.

сом о восстановлении многообразия узла по его группе. Мы собрали в дополнении некоторые из используемых теорем; укажем на синюю книгу Г. Бурде и Х. Цишанга [BZ 85] как на основной источник ссылок, а также на первую часть нашей статьи [Gr], позволяющую быстро войти в курс дела.

1. ХИРУРГИЯ ДЕНА

Пусть задан узел k в S^3 ; окружим его замкнутой трубчатой окрестностью $U(k)$. Многообразием узла называется дополнение $E(k)$ к внутренности трубки $U(k)$. Оно имеет гомологии окружности. Общий край многообразий $U(k)$ и $E(k)$ есть тор $T(k)$. Обратно, согласно классической теореме Александера [A], вложенный тор разбивает сферу на две компоненты, одна из которых есть полноторие, а другая, следовательно, — многообразие узла. Назовем *меридианом* вложенную окружность m на торе $T(k)$, гомотопический класс $[m]$ которой есть, с точностью до ориентации, гомотопический класс слоя в расслоении рассматриваемой трубчатой окрестности. *Параллель* (или *долгота*) есть окружность, гомотопная сечению этого расслоения, класс гомологий которой является нулем в $E(k)$. Группа $G(k)$ узла k — это фундаментальная группа $\pi_1(E(k))$ относительно базисной точки $*$, которая по предположению лежит на $T(k)$. Если узел k нетривиален, то канонический гомоморфизм группы $\pi_1(T(k))$ в $G(k)$ инъективен (см. [Gr]); его образ $H(k)$ называется *периферической подгруппой*.

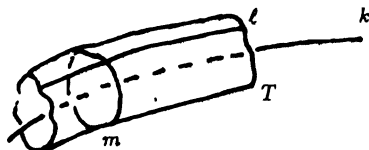


Рис. 1

Предложение 1. Пусть k и k' — два узла, а φ — изоморфизм группы $G(k')$ на группу $G(k)$.

(а) Существует гомотопическая эквивалентность $f: (E(k'), *) \sim (E(k), *)$, такая, что $\pi_1(f) = \varphi$.

(б) Если φ индуцирует изоморфизм подгруппы $H(k')$ на подгруппу $H(k)$, то существует гомеоморфизм h многообразия $E(k')$ на многообразие $E(k)$, такой, что $\pi_1(h) = \varphi$.

(с) Пусть m и m' — меридианы узлов k и k' , а $[m]$ и $[m']$ — их гомотопические классы. Если выполнено условие (б), то для того,

чтобы гомеоморфизм h продолжался до гомеоморфизма сферы S^3 на S^3 , необходимо и достаточно, чтобы $\varphi([m']) = \pm[m]$.

Многообразие E узла гомотопически эквивалентно 2-комплексу. Кроме того, группа $\pi_2(E)$ тривиальна: действительно, если бы это было не так, то существовала бы гладко вложенная сфера, негомотопная нулю (теорема о сфере), а такая сфера разбивает S^3 на два замкнутых шара (теорема Александера–Шёнфлиса), один из которых лежит в E , что невозможно. Следовательно, изоморфизм φ реализуется гомотопической эквивалентностью $f: (E(k'), *) \sim (E(k), *)$.

Обозначим через m, m', l, l' меридианы и параллели узлов k и k' , проходящие через базисную точку $*$. При выполнении условий (b) с помощью продолжения гомотопий можно продеформировать отображение f так, чтобы оно переводило m' и l' в край $bE(k)$ многообразия $E(k)$ и, поскольку $\pi_2(E(k)) = 0$, индуцировало гомеоморфизм края $b(E(k'))$ на край $b(E(k))$. Теорема Вальдтауэна позволяет продеформировать f в гомеоморфизм и даже в диффеоморфизм.

Параллели узла k характеризуются тем, что они являются образующими ядра гомоморфизма $H_1(bE(k)) \rightarrow H_1(E(k))$. Тогда при выполнении условия (b) мы имеем $\varphi([l']) = \pm[l]$ и $\varphi([m']) = \pm[m] + n[l]$. Для того чтобы h продолжался до гомеоморфизма сферы S^3 на S^3 , необходимо и достаточно, чтобы $n = 0$.

Замечание. Узел k обладает свойством (P), если существует единственный, с точностью до гомотопии, способ получить гомотопическую сферу путем приклеивания полнотория к многообразию $E(k)$ вдоль его края $bE(k)$. Это равносильно тому, что нормальная подгруппа группы $G(k)$, порожденная элементом $[m][l]^n$, равна $G(k)$, только если $n = 0$. Если многообразия двух узлов гомеоморфны и если оба эти узла обладают свойством (P), то они одного типа. Свойство (P) было введено при попытке построить контрпример к гипотезе Пуанкаре.

2. СУЩЕСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА

Положим $A = S^1 \times [0, 1]$, $bA = S^1 \times \{0, 1\}$. Сингулярным кольцом в многообразии V с краем называется отображение $f: (A, bA) \rightarrow (V, bV)$. Сингулярное кольцо называется *существенным*, если

- (а) кольцо f является несжимаемым (т.е. $\pi_1(f)$ инъективно),
- (б) путь $f|(* \times [0, 1])$ не является строго гомотопным пути, лежащему на крае bV .

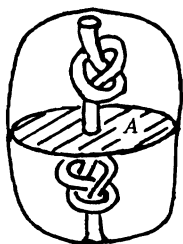
Предположим, что край bV несжимаем (т.е. гомоморфизм $\pi_1(bV_i) \rightarrow \pi_1(V)$ инъективен для каждой компоненты bV_i края bV), что $\pi_2(V) = 0$ и что $\pi_1(f)$ инъективно. Тогда, если кольцо f несущее

ственно, то отображение f гомотопно относительно края bA отображению в bV .

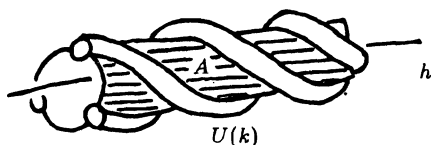
Теорема о кольце [CF, Ja, Sc] утверждает, что всякое многообразие размерности 3, которое содержит существенное сингулярное кольцо с вложенным краем, содержит вложенное существенное кольцо с тем же краем.

Если E — многообразие узла и $f: A \rightarrow E$ — вложенное несжимаемое кольцо, то образ $f(bA)$ края вырезает два кольца B_1 и B_2 на торе bE . Торы $B_1 \cup f(A)$ и $B_2 \cup f(A)$ разбивают E на два многообразия с торическим краем, которые являются либо полноториями, либо многообразиями узлов (теорема Александра). Если кольцо f не является существенным, то можно доказать с помощью теоремы о петле, что оно параллельно краю, другими словами, существует вложение $F: A \times [0, 1] \rightarrow E$, такое, что $F(x, 0) = f(x)$ для всех $x \in A$ и $F((A \times \{1\}) \cup (bA \times [0, 1])) \subset bE$.

Примеры. 1) Если узел k составлен из двух узлов k_1 и k_2 , то многообразие $E(k)$ есть объединение многообразий $E(k_1)$ и $E(k_2)$, склеенных вдоль кольца, край которого составлен из меридианов трех узлов k_1 , k_2 и k . Если ни один из узлов k_1 или k_2 не тривиален, то это кольцо существенно. Группа $G(k)$ есть амальгамированная сумма $G(k_1) *_Z G(k_2)$, где классы соответствующих меридианов $[m_1]$ и $[m_2]$ отождествляются между собой.



составной узел



обмотка

Рис. 2

2) Пусть h — узел, а m и l — его меридиан и параллель, и пусть (p, q) — пара взаимно простых чисел. Окружность k , вложенная в тор $T(h) = bE(h)$, класс (гомотопий или гомологий) которой равен $p[m] + q[l]$, есть по определению (p, q) -обмотка узла-носителя h . Возьмем трубчатую окрестность $U(k)$, пересечение которой с $T(h)$ есть кольцо B . Кольцо $A = T(h) - \text{int}(B)$ разбивает

$E(k)$ на полнотории $U(h) - \text{int}(U(k))$ с сердцевиной h и многообразие $E(h) - \text{int}(U(k))$, диффеоморфное многообразию $E(h)$. Класс $q[l]$ для компоненты края bA в полнотории $U(h) - \text{int}(U(k))$ равен образующей группы $H_1(E(h))$, умноженной на p , и образующей группы $H_1(E(k))$, умноженной на pq . Если узел h нетривиален и если $|q| \geq 2$, то, значит, кольцо A является существенным. Если узел h тривиален, то k — *торический узел* типа (p, q) ; если же $|p| \geq 2$ и $|q| \geq 2$, то этот узел не является тривиальным и кольцо A существенное.

Предложение 2 (ср. [FW, Wh 74, Si]). *Предположим, что многообразие узла k содержит вложенное существенное кольцо A . Тогда A разбивает многообразие $E(k)$ на два многообразия X_1, X_2 , и имеет место один из двух взаимно исключающих случаев:*

(а) Ни одно из многообразий X_1, X_2 не является полноторием, узел k разложим и каждая компонента края bA является меридианом узла k .

(б) По крайней мере одно из многообразий X_1, X_2 является полноторием, узел k является (p, q) -обмоткой, $|q| \geq 2$, сердцевина этого полнотория, и классом компонент края bA в группе $G(k)$ будет $[m]^n[l]^{\pm 1}$.

Мы уже видели, что bA разбивает тор $T(k)$ на два кольца B_1, B_2 и что кольцо A разбивает $E(A)$ на два многообразия X_1 и X_2 , краями которых являются торы $B_1 \cup A$ и $B_2 \cup A$.

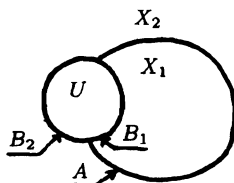


Рис. 3

Предположим, что ни X_1 , ни X_2 не являются полноториями. Многообразия $X_2 \cup U(k)$ и $X_1 \cup U(k)$, которые являются замыканиями их дополнений в S^3 , будут тогда полноториями (теорема Александра), их сердцевинны суть узлы k_1, k_2 и X_i есть многообразие узла k_i . Согласно теореме ван Кампена, группа $\pi_1(X_1 \cup U(k))$ есть амальгамированная сумма групп $\pi_1(X_1)$ и $\pi_1(U(k))$ по подгруппе $\pi(B_1)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(X_1) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \pi_1(B_1) = \mathbb{Z} & & & & \pi_1(X_1 \cup U(k)) = \mathbb{Z} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \pi_1(U(k)) = \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Если бы гомоморфизм $\pi_1(B_1) \rightarrow \pi_1(U(k))$ был инъективным, то и $\pi_1(X_1) \rightarrow \pi_1(X_1 \cup U(k))$ был бы инъективным, что невозможно, так как узел k_1 нетривиален. Значит, гомоморфизмы $\pi_1(B_1) \rightarrow \pi_1(U(k))$ и $\pi_1(B_1) \rightarrow \pi_1(X_1 \cup U(k))$ являются нулевыми; компоненты края $bB_1 (= bA)$ суть меридианы узлов k и k_2 и, аналогично, узла k_1 . Это доказательство, принадлежащее Нога [N], показывает также, что разложимый узел обладает свойством (P). Действительно, если приклеить к $X_1 \cup X_2$ полноторие V вместо $U(k)$ таким образом, чтобы $X_1 \cup X_2 \cup V$ было гомотопической сферой, то $X_1 \cup V$ будет гомотопическим тором и, кроме того, край bA будет состоять из меридианов полнотория V .

Предположим, напротив, что X_1 есть полноторие. Заметим прежде всего, что $X_1 \cup U(k)$ есть полноторие. Это следует из теоремы Александера при условии, что X_2 есть действительно многообразие узла. Если X_2 — полноторие, то многообразие $E(k) = X_1 \cup X_2$ есть многообразие некоторого торического узла k' . Так как торические узлы обладают свойством (P) [BZ 85, p. 274], узел k' и узел k имеют одни и те же меридианы и параллели на крае $bE(k)$; следовательно, $X_1 \cup U(k)$ есть полноторие, так как таково многообразие $X_1 \cup U(k')$. Применим тогда теорему ван Кампена к вычислению группы $\pi_1(X_1 \cup U(k))$:

$$\begin{array}{ccccc} & \varphi \nearrow & \pi_1(X_1) = \mathbb{Z} & \searrow & \\ \pi_1(B_1) = \mathbb{Z} & & & & \pi_1(X_1 \cup U(k)) = \mathbb{Z} \\ & \psi \searrow & \pi_1(U(k)) = \mathbb{Z} & \nearrow & \end{array}$$

Один из двух гомоморфизмов φ или ψ является изоморфизмом; так как кольцо A существенно, гомоморфизм φ инъективен, но не биективен, т.е. он является умножением на целое q , такое, что $|q| \geq 2$. Тогда узел k является (p, q) -обмоткой узла k_2 , сердцевины полнотория X_1 .

3. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (по [FW])

В этом разделе мы применяем теорему 1 для доказательства следующего результата:

Предложение 3. Пусть k и k' — два узла с изоморфными группами. Если один из них неразложим, то другой тоже неразложим и они являются узлами одного типа. Если $k = k_1 \# \dots \# k_{m+1}$, где k_i — неразложимые узлы, то $k' = k'_1 \# \dots \# k'_{m+1}$, причем k_i и k'_i — узлы одного типа (как неориентированные узлы).

Теорема Гордона–Люке была использована не только для перехода от многообразия узла к типу узла в случае неразложимых узлов, но

также чтобы доказать гомеоморфность многообразий в частном случае обмоток.

3.1. Если многообразие $E(k)$ не содержит существенных колец, глубокая теорема Йохансона [Jo, Prop. 14.9] и Фёстела [F, Theorem 10] (см. также [Ja, Theorem X.15]) утверждает, что многообразия $E(k)$ и $E(k')$ гомеоморфны, и теорема 1 завершает доказательство. Мы не будем здесь разъяснять теорему Йохансона–Фёстела.

3.2. В противном случае мы будем использовать следующую лемму (см. [Wa 67, Lemma 1.1; St]):

Лемма 1. Пусть $g: E(k') \rightarrow E(k)$ — такое отображение, что $\pi_1(g)$ инъективно, и A — существенное кольцо, вложенное в $E(k)$. Отображение g гомотопно гладкому отображению f , такому, что:

(а) отображение f трансверсально к кольцу A , а прообраз $A' = f^{-1}(A)$ является компактной ориентируемой поверхностью без относительного края;

(б) любая компонента A'_i прообраза A' есть существенное кольцо в $E(k')$ и f индуцирует инъекцию $\pi_1(A'_i) \rightarrow \pi_1(A)$;

(с) если $\pi_1(g)$ — изоморфизм, то A' непуст.

В силу плотности можно продеформировать g в гладкое отображение f , трансверсальное к A , откуда следует (а). Пусть A'_1 — компонента поверхности A' . Если A'_1 есть сфера, то ее можно просто удалить, так как A'_1 ограничивает шар в $E(k')$ и $f|_{A'_1}$ гомотопно нулю в $E(k)$. Если $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(A)$ не является инъективным, то в A'_1 существует вложенная окружность C , негомотопная 0 и такая, что $f|_C$ гомотопна 0 в A . Эта окружность C гомотопна 0 в $E(k')$; согласно лемме Дена, она ограничивает диск D , вложенный в $E(k')$. Можно предполагать диск D трансверсальным к A' ; удаляя компоненты пересечения $A' \cap D$, которые гомотопны 0 в A' , можно найти компоненту C_0 пересечения $A' \cap D$, не гомотопную 0 в A' и ограничивающую некоторый диск D_0 , такую, что $A' \cap D_0 = C_0$. Теперь можно также деформировать f в окрестности диска D_0 таким образом, что компонента A'_0 прообраза A' , которая содержит C_0 , подвергается хирургии, удаляющей C_0 (прием Столлинга [St]).

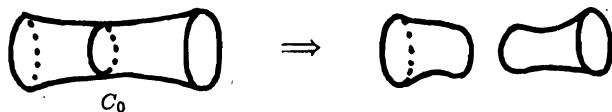


Рис. 4

Такая хирургия увеличивает характеристику $\chi(A')$ на два, увеличивает не более чем на единицу число компонент, т.е. мощность мно-

жества $\pi_0(A')$, и в результате не может получиться сфера. Так как A' не содержит сферы, имеем $\chi(A') \leq \#(\pi_0(A'))$, и в результате конечного числа операций мы получим инъективность гомоморфизма $\pi_1(f)$ для каждой компоненты прообраза A' . Тогда фундаментальные группы компонент прообраза A' изоморфны подгруппам группы Z ; это диски или кольца. Если одна из компонент есть диск D , то его край bD гомотопен 0 в $E(k')$, а значит, и в $bE(k')$ (так как узел k' нетривиален); bD ограничивает диск D_0 в $bE(k')$, и сфера $D \cup D_0$ ограничивает шар в $E(k')$; можно продеформировать f в окрестности этого шара так, чтобы устранить диск D . Если одна из компонент прообраза A' есть несущественное кольцо, то, так как оно не сжимаемо, оно параллельно краю, и его также можно удалить, откуда следует (b).

Наконец, если $f^{-1}(A)$ пусто, то образ отображения f содержится в одном из подмногообразий многообразия $E(k)$, вырезаемых кольцом A , например, в X_1 . Так как кольцо A существенное, то $\pi_1(X_1)$ есть собственная подгруппа группы $\pi_1(E(k))$ и $\pi_1(f)$ не может быть изоморфизмом.

3.3. *Предположим, что многообразие $E(k)$ содержит существенное кольцо. Узел k есть тогда обмотка или разложимый узел (предложение 2), и эти возможности являются взаимоисключающими по теореме Шуберта [Schu, 21, Satz. 2].*

В этом пункте мы будем предполагать, что узел k является (p, q) -обмоткой. Пусть A — существенное кольцо, как в предложении 2(b), и f — гомеотопия¹⁾ многообразия $E(k')$ в $E(k)$ из леммы 1. Если бы компонента A'_i прообраза A' разбивала $E(k')$ на два многообразия нетривиальных узлов, то компоненты bA'_i были бы меридианами узла k' (предложение 2) и порождали бы $H_1(E(k'))$. Однако класс компоненты края bA есть образующая группы $H_1(E(k))$, умноженная на pq . Следовательно, кольцо A'_i разбивает $E(k')$ на полноторие V'_i и многообразие W'_i , и гомоморфизм $\pi_1(A'_i) \rightarrow \pi_1(V'_i)$ не сюръективен — в противном случае кольцо A'_i было бы параллельно краю. Если W'_i есть полноторие, то k' есть торический узел. Этот случай целиком решается теоремой Бурде и Цишанга [BZ 66]: для того чтобы узел k был торическим, необходимо и достаточно, чтобы центр группы $G(k)$ не был тривиальным, и тип торического узла определяется его группой.

Отбросим случай торических узлов; тогда многообразие W'_i есть многообразие нетривиального узла h'_i — сердцевина полнотория V'_i , а узел k' есть (p', q') -обмотка соответствующего узла h'_i (предложение 2). Так как гомоморфизм $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(A)$ является инъективным,

¹⁾ Обычно термин «гомеотопия» используется в другом смысле. — *Прим. перев.*

pq делит $p'q'$. Согласно результату Шуберта [Schu, 21, Satz. 5], задание обмотки k определяет носитель h и пару (p, q) с точностью до знака. Применяя предыдущее к гомеотопии многообразия $E(k)$ в $E(k')$, получаем, что $p'q'$ делит pq . Следовательно, $pq = \pm p'q'$ и f индуцирует гомеотопию кольца A'_i в A . Итак, можно предполагать, что f индуцирует гомеоморфизм кольца A'_i на A для каждой компоненты A'_i прообраза A' .

Если A'_1 и A'_2 — две компоненты прообраза A' , то многообразия W'_1 и W'_2 вложены одно в другое и их разность есть полноторие. Действительно, непересекающиеся кольца A'_1 и A'_2 разбивают многообразие $E(k')$ на V'_1 и W'_1 , с одной стороны, и на V'_2 и W'_2 , с другой стороны; итак, имеются следующие возможности: (a) $W'_1 \cap W'_2 = \emptyset$, (b) $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$, (c) $W'_1 \subset W'_2$ или $W'_2 \subset W'_1$.

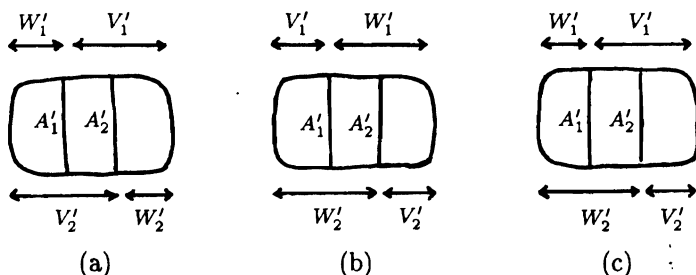


Рис. 5

В случае (a), поскольку кольцо A'_1 является несжимаемым в $E(k')$, гомоморфизмы $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(W'_1)$ и $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(V'_1 \cap V'_2)$ инъективны. Следовательно, гомоморфизм $\pi_1(W'_1) \rightarrow \pi_1(V'_2)$ инъективен (теорема ван Кампена), что невозможно.

В случае (b) кольцо A'_2 разбивает W'_1 на полноторие V'_2 и многообразие $Y = W'_1 \cap W'_2$, которое есть либо полноторие, либо многообразие узла. В обоих случаях кольцо A'_2 существенно в W'_1 и компоненты края bA'_2 имеют тот же класс в полнотории $S_3 - \text{int}(W'_1)$, что и сердцевина этого полнотория (предложение 2). Компоненты края bA'_1 параллельны компонентам края bA'_2 на торе bW'_1 , и, следовательно, гомоморфизм $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(V'_1)$ является сюръективным, что невозможно.

Значит, имеет место одна из конфигураций случая (c), например, $W'_1 \subset W'_2$. С помощью тех же рассуждений, что и в случае (a), покажем, что гомоморфизм $\pi_1(W'_2 \cap V'_1) \rightarrow \pi_1(V'_1)$ является инъективным и что $W'_2 \cap V'_1$ обязательно является полноторием.

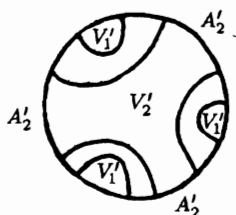


Рис. 6

Согласно сказанному, можно занумеровать компоненты $A'_1, \dots, A'_k$ прообраза A' так, чтобы $W'_1 \subset \dots \subset W'_k$. Покажем, что можно продеформировать гомеотопию f так, чтобы сделать A' связным. Для значений $i = 2, \dots, k$ положим $X'_i = W'_i \cap V'_{i-1}$ и $X'_{k+1} = V'_k$. Обозначим через X_1 и X_2 многообразия, вырезаемые кольцом A в $E(k)$. Отображение f переводит каждое многообразие X'_i в X_1 или X_2 . Предположим, например, что $f(W'_1) \subset X$; тогда $f(X'_i) \subset X_{[i]}$, где $[i] = 1$ или 2 и $i \equiv [i] \pmod{2}$. Пусть $*$ есть базисная точка в A , и для $i = 1, \dots, k$ пусть $*'_i$ есть прообраз базисной точки $*$ относительно f в A'_i . Так как f есть гомеотопия, то из общей теоремы ван Кампена следует, что существует индекс $i \in [2, k]$ и путь α , связывающий $*'_{i-1}$ с $*'_i$ в X'_i , такие, что $f \circ \alpha$ есть петля с базисной точкой $*$, гомотопная 0 в $X_{[i]}$. Это рассуждение, называемое «binding tie» и принадлежащее Столлингу [St], детально изложено в книге [BZ 85, p. 293].

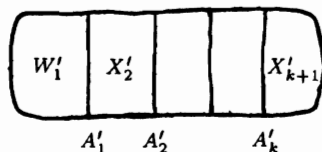


Рис. 7

Так как X'_i есть полноторие, то существуют две дуги β и γ , связывающие $*'_{i-1}$ с $*'_i$ в крае bX'_i , объединение которых ограничивает меридианный диск D в X'_i , такие, что петли $f \circ \beta$ и $f \circ \gamma$ гомотопны 0 в $X_{[i]}$. Так как $\pi_2(X_{[i]}) = 0$, то можно при помощи деформации, которая постоянна вне окрестности многообразия X'_i , продеформировать f так, что образ диска D будет сконцентрирован в окрестности точки $*$. Далее, так как $\pi_3(X_{[i]}) = 0$, можно продеформировать f так, чтобы $f(X'_i) \subset A$. Теперь остается слегка переместить f к

внутренности многообразия $X_{[i+1]}$, чтобы устранить компоненты A'_i и A'_{i+1} прообраза $f^{-1}(A)$. По индукции получаем, что A' связно.

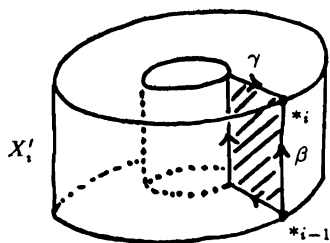


Рис. 8

Итак, мы находимся в следующей ситуации: узел k является (p, q) -обмоткой, $E(k)$ есть объединение многообразия $E(h)$ узла-носителя h и полнотория V , приклеенного вдоль кольца A . Кроме того, узел k' является (p', q') -обмоткой, $E(k')$ есть объединение многообразия узла $E(h')$ и полнотория V' , приклеенного вдоль A' . Отображение $f: E(k') \rightarrow E(k)$ есть гомеотопия, индуцирующая гомеоморфизм A' на A , и $A' = f^{-1}(A)$. Так как $\pi_1(f)$ есть изоморфизм амальгамированной суммы $\pi_1(E(h')) *_{\pi_1(A')} \pi_1(V')$ на $\pi_1(E(h)) *_{\pi_1(A)} \pi_1(V)$, а гомоморфизмы $\pi_1(A') \rightarrow \pi_1(V')$ и $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(V)$ инъективны, то отображение f обязательно индуцирует гомеотопию $E(h')$ на $E(h)$ и гомеотопию полнотория V' на V .

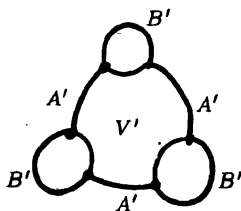


Рис. 9

Пусть B' — дополнительное кольцо к A' на крае $bE(h')$; ограничение $f|_{B'}$ есть несжимаемое кольцо в $E(h)$, однако оно не является существенным, потому что классом компонент края $f(bB') = bA$ является $p[m] + q[l]$, $|q| \geq 2$, где m и l — меридиан и параллель узла h (предложение 2). Следовательно, можно предполагать,

что $f(B') \subset bE(h)$, откуда $f(bE(h')) \subset bE(h)$. По теореме Вальдхаузена можно предполагать, что f индуцирует гомеоморфизм многообразия $E(h')$ на $E(h)$ и гомеотопию полнотория V' на V . Рассматривая классы компонент краев bA' и bA в V' и V , мы видим, что $q' = \pm q$, а следовательно, $p' = \pm p$. Гомеоморфизм f многообразия $E(h')$ на $E(h)$ сохраняет параллели и меридианы узлов h и h' (теорема Гордона–Люке). Итак, многообразия $E(k')$ и $E(k)$ гомеоморфны. Согласно теореме Гордона–Люке, узлы k и k' одного типа.

3.4. Предположим, наконец, что узел k разложим, и пусть A — существенное кольцо, которое разбивает $E(k)$ на два нетривиальных многообразия узла X_1 и X_2 . Пусть $f: E(k') \rightarrow E(k)$ — гомеотопия, удовлетворяющая условиям леммы 1. Тогда $f^{-1}(A)$ состоит из существенных колец, края которых суть меридианы узла k' .

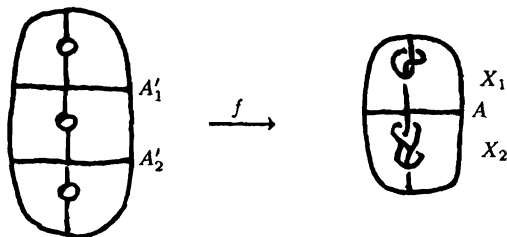


Рис. 10

Действительно, в противном случае узел k' был бы обмоткой (предположение 2), а значит, и k также был бы обмоткой, согласно 3.3, что противоречит предположению, что узел k разложим. Кольца $A'_1, \dots, A'_k$, которые составляют $f^{-1}(A)$, делят $E(k')$ на многообразия $X'_1, \dots, X'_{k+1}$, которые суть или полнотория или многообразия узла, и гомоморфизмы групп $\pi_1(X'_i)$ в $\pi_1(X_j)$, индуцированные отображением f , инъективны, так как гомоморфизмы групп $\pi_1(X'_i)$ в $\pi_1(E(k))$ инъективны (теорема ван Кампена).

Если узел $k = k_1 \# \dots \# k_{m+1}$ составлен из неразложимых узлов, то, используя индукцию по m , можно предполагать, что многообразие $E(k)$ делится на многообразия $E(k_1), \dots, E(k_{m+1})$ существенными попарно непересекающимися кольцами $A_1, \dots, A_m$, а также что гомеотопия f трансверсальна к объединению A колец A_i и что $f^{-1}(A)$ состоит из существенных колец $A'_1, \dots, A'_n$, края которых суть меридианы и которые делят $E(k')$ на многообразия E'_j , $1 \leq j \leq n+1$. Многообразие E'_j при $j \neq 1, n+1$ ограничено кольцами A'_{j-1} , A'_j и двумя кольцами B'_j , C'_j из $bE(k')$; многообразие E'_1 (соотв. E'_{n+1}) ограничено кольцом A'_1 (соотв. A'_n) и кольцом B_1 (соотв. B_{n+1}) из $bE(k')$.

Отображение f переводит E'_j в многообразие $E(k_i)$ и $\pi_1(f|E'_j)$ инъективно. Кольца $f|B'_j$ и $f|C'_j$ не могут быть существенными, так как в противном случае $E(k_i)$ содержало бы вложенное существенное кольцо, край которого состоял бы из меридианов (теорема о кольце), что противоречит неразложимости узла k_i (предложение 2). Итак, кольца $f|B'_j$ и $f|C'_j$ параллельны краю многообразия $E(k_i)$. Имеются два случая:

(а) Параллель многообразия E'_j гомотопна нулю, многообразие E'_j есть полноторие и $f|E'_j$ гомотопно в $E(k_i)$ отображению, образ которого есть меридиан. Тогда можно удалить по крайней мере одно из колец A'_j, A'_{j+1} .

(б) Отображение f деформируется в такое отображение, что $f|bE'_j$ есть накрытие края $bE(k_i)$, сохраняющее меридианы. По теореме Вальдхаузена $f|E'_j$ гомотопно относительно края накрытию многообразия $E(k_i)$.

Для многообразий E'_1 и E'_{n+1} рассуждения аналогичны.

Вместе эти накрытия образуют гомеотопию. После устранения лишних колец из п. (а) имеем $m = n$, все накрытия суть гомеоморфизмы, а многообразия $E(k)$ и $E(k')$ гомеоморфны.

4. МИНИМАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ПЛАНАРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Перейдем к доказательству теоремы Гордона–Люке. Пусть k — тривиальный узел, как в разд. 1, и пусть U — трубчатая окрестность узла k , T — ее край и $E = S_3 - \text{int}(U)$. Пусть π — гомотопический класс (неориентированной) окружности, вложенной в T . Обозначим через $K(\pi)$ многообразие, полученное приклеиванием к E вдоль T полнотория V_π так, что окружность π ограничивает диск на V_π (хирургия Дэна). Если γ есть класс меридиана узла k , то многообразие $K(\gamma)$ гомеоморфно сфере S^3 . Пусть π — другой класс и $n = |\pi, \gamma|$ — арифметическое число пересечения классов π и γ . Докажем, что многообразие $K(\pi)$ не гомеоморфно S^3 , если $n \neq 0$. Доказательство проводится методом от противного; в нем используются сферические поверхности, трансверсальные к узлу.

Предложение 4. Пусть $K(\pi)$ гомеоморфно S^3 . Тогда существуют планарные поверхности P и Q (сферы с дырками), собственно вложенные в E , такие, что:

(а) bP (соотв. bQ) есть объединение окружностей из класса π (соотв. γ);

(б) P и Q пересекаются трансверсально и каждая компонента края bP пересекается с каждой компонентой края bQ в n точек;

(с) пересечение $P \cap Q$ не содержит дуги, параллельной bP или bQ .

Это утверждение было независимо доказано Дэвидом Габаи и улучшало предшествующий результат работы [Ga, 4.A].

Отождествим сферу S^3 с двумя удаленными точками $\pm\infty$ с многообразием $S^2 \times \mathbb{R}$ и обозначим через $h: S^3 - \{\pm\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$ естественную проекцию на второй сомножитель. Предположим, что узел k не проходит через точки $\pm\infty$ и что ограничение $h|_k$ есть функция Морса (т.е. ее критические точки невырождены, их конечное число и они имеют различные критические значения). Это задает представление узла k . Пусть $S_1, \dots, S_m$ — сферы уровня, расположенные между каждой парой последовательных критических значений; сложность указанного представления есть сумма $\sum_{1 \leq i \leq m} \text{Card}(S_i \cap k)$. Минимальное представление — это представление минимальной сложности.

Поверхность Q из предложения 4 есть пересечение с E соответствующей поверхности уровня для минимального представления h узла k , который пересекает V_γ по меридианным дискам. Поверхность P получается аналогичным способом с помощью минимального представления h_π узла k_π , являющегося сердцевинной полнотория V_π в пространстве $K(\pi) \cong S^3$. Тогда условие (а) выполняется; условие (b) достигается в результате деформации представления h_π , которая неподвижна в окрестности узла k_π . Остается получить условие (с).

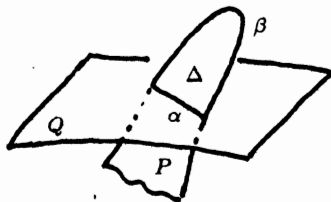


Рис. 11

Введем два термина. Предположим, что $P \cap Q$ содержит дугу α , которая вместе с дугой β из края bP ограничивает на P диск Δ , который не содержит никакой дуги из $P \cap Q$, отличной от α (но который может содержать круговые компоненты из $P \cap Q$). Говорят, что диск Δ является *высоким* или *низким* по отношению к Q в зависимости от того, как проходит дуга β — ниже или выше Q (относительно функции высоты h). Можно дать аналогичное определение для P .

Обозначим через I интервал $[0, 1]$. Если задано вложение произведения $Q \times I$ в E , то мы отождествим $Q \times I$ с его образом, обозначим через $Q(\lambda)$ образ $Q \times \{\lambda\}$ и будем говорить о вложенном семействе.

Вложенное семейство $Q \times I$ поверхностей уровня функции h есть *медианный срез*, если $h(Q \times I) \subset]a, b[$, где a и b — два последовательных критических значения функции $h|k$, таких, что a — локальный минимум и b — локальный максимум.

Лемма 2. *Существуют два семейства $P \times I$ и $Q \times I$ планарных поверхностей, собственно вложенные в E , такие, что:*

- (а) $Q \times I$ есть медианный срез в минимальном представлении узла k ;
- (б) $P \times I$ изотопно медианному срезу в минимальном представлении узла k_π ;
- (с) любая компонента края $bP(\lambda)$ трансверсально пересекается с любой компонентой края $bQ(\mu)$ в n точек;
- (д) существует $\lambda_0 \in]0, 1[$, такое, что $P(\lambda_0)$ содержит высокий диск по отношению к $Q(1)$ и низкий диск по отношению к $Q(0)$;
- (е) существует $\mu_0 \in]0, 1[$, такое, что $Q(\mu_0)$ содержит высокий диск по отношению к $P(1)$ и низкий диск по отношению к $P(0)$;
- (ф) функция $h|P \times I$ является функцией Серфа.

Мы уже видели, как получить условие (с). Выберем $\lambda_0 \in]0, 1[$ и сделаем $P(\lambda_0)$ трансверсальным к $Q(0)$ и $Q(1)$ при помощи малой изотопии вложения произведения $P \times I$, которое не изменится в окрестности произведения $bP \times I$. Тогда положение $Q \times I$ в медианном срезе позволяет получить условие (д). Те же рассуждения можно применить к $Q(\mu_0)$, но в этом случае продолжим на E изотопию произведения $Q \times I$ и, обращая ее, получим изотопию произведения $P \times I$, которая дает тот же результат, не трогая $Q \times I$.

Условие (ф) означает следующее:

- (i) функции $h|P(\lambda)$ не имеют критических точек в окрестности края $bP(\lambda)$;
- (ii) функция $h|P(\lambda)$ является функцией Морса для всех за исключением конечного числа значений λ ;
- (iii) разрешенные особенности — это столкновение двух критических значений и особенности рождения или смерти.

Это условие реализуется посредством малой изотопии произведения $P \times I$ в силу плотности функций Серфа. Конечно, я опустил здесь некоторые детали, в частности, не указал, что нужно убедиться в том, что P имеет подходящий вид в окрестности края bP .

Предположим, что функция h выбрана так, что поверхности $Q(\mu)$ есть поверхности уровня $h^{-1}(\mu)$. График Γ функции $h|P \times I$ есть множество точек (λ, μ) из $I \times I$, таких, что μ является значением функции h в особой точке функции $h|P(\lambda)$ (см. рис. 12). Для пары $(\lambda, \mu) \in I^2 - \Gamma$ поверхности $P(\lambda)$ и $Q(\mu)$ трансверсальны. Предложение 4 будет доказано, если установить существование точки (λ, μ) из

$I^2 - \Gamma$, такой, что $P(\lambda)$ не содержит ни высокого, ни низкого диска по отношению к $Q(\mu)$ и наоборот.

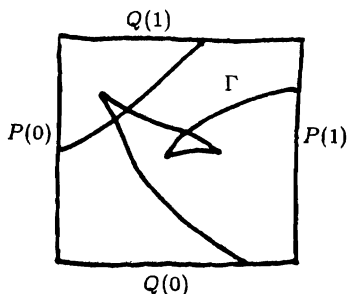


Рис. 12

Заметим, что если $P(\lambda)$ содержит высокий диск по отношению к $Q(\mu)$, то ни для какого λ' поверхность $P(\lambda')$ не содержит низкого диска по отношению к $Q(\mu)$. Доказательство этого замечания использует тот факт, что узел k нетривиален и что h — его минимальное представление. Итак, можно определить функцию $q(\lambda, \mu)$ на $I^2 - \Gamma$, принимающую в качестве значений одну из трех букв H, L, N в зависимости от того, содержит $P(\lambda)$ высокий диск по отношению к $Q(\mu)$, низкий диск или не содержит ни высокого, ни низкого. Определим симметричным образом функцию $p(\lambda, \mu)$. Эти функции локально постоянны. Свойства (d) и (e) из леммы 2 налагают условия на p и q на границе квадрата I^2 . Доказывается также, что пересечение дуги графика Γ может вызвать лишь некоторые изменения значений p и q . Снова рассуждая от противного, авторы доказывают, что если не существует точки (λ, μ) , такой, что $p(\lambda, \mu) = q(\lambda, \mu) = N$, то в графике Γ существует пересечение, как на рис. 13, а затем показывают, что этот случай невозможен.

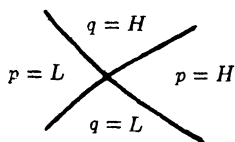


Рис. 13

5. ПОМЕЧЕННЫЕ ГРАФЫ

Теперь мы можем описать принцип доказательства Гордона–Люке. На паре поверхностей P и Q из предложения 4 введем два *помеченных графа* G_P и G_Q , удовлетворяющие *правилу четности* (см. ниже). Приведем некоторое комбинаторное рассуждение об этой паре графов. В случае $n \geq 2$, изученном в [CGLS], можно заключить, что один из графов содержит грань некоторого типа (цикл Шарлемана). В случае $n = 1$, исследованном в [GL], показывается, что граф G_Q содержит цикл Шарлемана или что граф G_P обладает свойством (Т), более слабым, чем предыдущее свойство. Тогда, вновь обращаясь к топологической ситуации, можно доказать, что если граф G_P (соотв. G_Q) содержит цикл Шарлемана, то многообразие $K(\gamma)$ (соотв. $K(\pi)$) содержит просверленное линзовое пространство. Более тонкое рассуждение показывает, что из одного лишь свойства (Т) для графа G_P следует то же заключение относительно $K(\gamma)$. Фундаментальная группа линзового пространства, просверленного или нет, есть ненулевая циклическая группа и, следовательно, не может быть вложена в группу $\pi_1(S^3)$, откуда получаем последнее противоречие.

В этом разделе мы определим графы G_P и G_Q , а в следующем дадим определение цикла Шарлемана и покажем, как ему соответствует линзовое пространство с дырами. За полным доказательством мы отсылаем к исходным работам [CGLS] и [GL].

Предположим для простоты, что $n = 1$, т.е. что каждая компонента края bP пересекается с каждой компонентой края bQ лишь по единственной точке. Введем произвольные ориентации на поверхностях P и Q и занумеруем от 1 до p , последовательно на торе T , компоненты края bP и от 1 до q компоненты края bQ . Множество вершин графа G_Q — это множество компонент края bQ . Вершины суть не точки, а диски. Для $j \in [1, q]$ вершина q_j из G_Q представлена диском, край которого есть компонента bQ_j . Ребра — это дуги из $P \cap Q$. *Инцидентными* точками дуг, исходящих из q_j , являются p точек $bQ_j \cap bP_i$; индекс i есть *метка* инцидентной точки. Инцидентные точки записываются последовательно в порядке возрастания или убывания меток; в зависимости от этого припишем вершине q_j знак $+$ или $-$. Граф G_P определяется аналогичным образом. Знаки вершин не являются независимыми. Обозначим через (j, i) инцидентную точку $bQ_j \cap bP_i$ с меткой i в вершине q_j графа G_Q ; назовем *характером* $\text{char}(j, i)$ этой точки $(\text{sign } q_j)(\text{sign } p_i)$. Проверяется, что в случае ориентированного многообразия E , если ребро соединяет две инцидентные точки (графа G_P или графа G_Q), то характеры этих двух точек противоположны (*правило четности*).

Граф G_Q располагается на поверхности Q за исключением дисков Q_j , которые можно рассматривать как меридианные диски полнотория V_γ . Грань графа G_Q — это компонента дополнения в Q к ребрам графа G_Q . Заметим, что мы полностью забываем о возможных круговых компонентах из $P \cap Q$. По предложению 4(с) графы G_P и G_Q не имеют граней, ограниченных единственной дугой.

Такие помеченные графы с «толстыми» вершинами использовались и изучались в работах Шарлемана [Scha], Габаи [Ga], а также в [CGLS].

6. ЦИКЛЫ ШАРЛЕМАНА

Цикл Шарлемана Σ в G_Q — это реберный цикл, такой, что

(1) если представить, что вершины графа G_Q точечные, то Σ гомотопен окружности, которая ограничивает диск Δ в Q , такой, что $G_Q \cap \text{int}(\Delta) = \emptyset$,

(2) если ориентировать цикл Σ , то концы всех его ребер имеют одинаковую метку,

(3) все вершины графа G_Q , принадлежащие циклу Σ , имеют одинаковый знак.

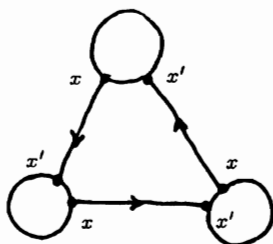


Рис. 14

Из этого определения следует, что начала всех ребер цикла Σ имеют одинаковую метку x , а концы — одинаковую близкую метку x' .

В конце предыдущего раздела было отмечено, что графы G_P и G_Q не могут содержать цикла, ограниченного единственным ребром.

Лемма 3. Пусть G_Q содержит цикл Шарлемана, ограниченный k ребрами. Тогда многообразие $K(\pi)$ содержит подпространство, гомотопное просверленному линзовому пространству с двумя отверстиями, фундаментальной группой которого является $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

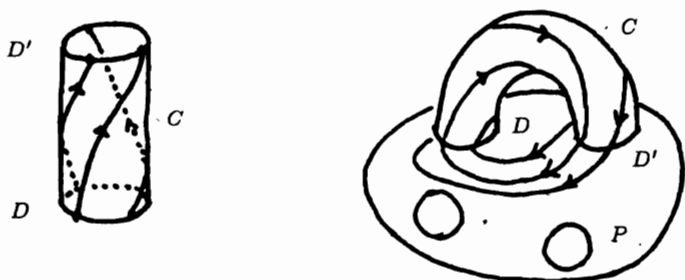


Рис. 15

Пусть Σ , как и выше, есть цикл Шарлемана в графе G_Q . Метки x и x' суть компоненты края bP , смежные в T и имеющие противоположные знаки, поскольку все вершины цикла Σ имеют одинаковый знак. Эти компоненты ограничивают непересекающиеся меридианные диски D и D' в V_π . Пусть C — цилиндр, вырезанный в V_π дисками D и D' , край которого не содержит никаких компонент из bP , кроме x и x' . Обозначим через $\hat{P}$ сферу, содержащуюся в $K(\pi)$ и полученную из P заклеиванием всех дырок меридианными дисками из V_π . Пусть, наконец, R есть объединение сферы $\hat{P}$, слегка утолщенной, и ручки C , приклеенной к $\hat{P}$ по дискам D и D' . Пространство R гомеоморфно полноторию с просверленной дыркой. Диск Δ поверхности Q , ограниченный циклом Σ , приклеен к R вдоль окружности, пробегающей k раз ручку C ; ее класс есть образующая группы $\pi_1(R)$, умноженная на k . Следовательно, пространство, являющееся объединением R и слегка утолщенного диска Δ , гомеоморфно линзовому пространству $L(k, h)$ с двумя дырками. Проще говоря, его фундаментальная группа изоморфна $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ (теорема ван Кампена), а его край есть объединение двух непересекающихся сфер, и этого достаточно для того, чтобы это пространство не могло быть подпространством сферы S^3 .

Приведем теперь свойство (Т), которое входит в доказательство случая $n = 1$ (ср. разд. 5). Элемент из $\{+, -\}^q$ называется q -типом. Пусть E — грань графа G_P , гомеоморфная диску. Этот диск касается вершины v графа, следуя вдоль интервала, соединяющего инцидентные точки с последовательными метками. Для $k \in [1, q]$ обозначим через $S_k(E)$ множество вершин грани E с метками k и $k+1$ (при соглашениях, что $q+1 = 1$). Граф G_P удовлетворяет условию (Т), если для любого q -типа τ существует грань E графа G_P , гомеоморфная диску и такая, что:

(1) для любого $k \in [1, q]$ вершины из множества $S_k(E)$ имеют одинаковый знак $\varepsilon(k)$;

(2) функция ε и ограничение функции τ на множестве $L(E)$ целых чисел k , таких, что $S_k(E) \neq \emptyset$, равны или противоположны.

Тут же заметим, что цикл Шарлемана представляет любой q -тип.

ДОПОЛНЕНИЕ

Следующие теоремы являются общеупотребительным инструментом в топологии трехмерных многообразий и были использованы в данном изложении.

Теорема (Дж. Александер). *Сфера, гладко вложенная в S^3 , разбивает S^3 на два многообразия, гомеоморфные замкнутому шару.*

Тор, гладко вложенный в S^3 , разбивает S^3 на два многообразия, одно из которых гомеоморфно полноторию. ([A, M, Schu]; впрочем, вместо «гомеоморфное» здесь можно читать «диффеоморфное».)

Теорема (К. Папакирьякопулос). *Пусть V — трехмерное многообразие с краем bV .*

(а) *Если гомоморфизм $\pi_1(bV) \rightarrow \pi_1(V)$ не инъективен, то существует окружность, вложенная в край bV , гомотопический класс которой равен 0 в V и отличен от 0 в bV (теорема о петле).*

(б) *Пусть C есть окружность, вложенная в bV и гомотопная 0 в V . Тогда существует диск D , вложенный в V , такой, что $C = D \cap bV$ (лемма Дена).*

(с) *Если $\pi_2(V) \neq 0$, то существует сфера, вложенная в V , которая не гомотопна нулю (теорема о сфере).*

Определение. Многообразие V размерности 3 с краем bV называется *многообразием Хакена*, если оно компактно, связно, ориентируемо, неприводимо (вложенная в V сфера ограничивает шар), достаточно большое (оно содержит ориентируемую собственно вложенную поверхность S , такую, что $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(V)$ является инъективным).

Край bV называется *несжимаемым*, если для каждой компоненты bV_i край bV гомоморфизм $\pi_1(bV_i) \rightarrow \pi_1(V)$ инъективен.

Теорема (Ф. Вальдхаузен). *Пусть V и V' — два многообразия Хакена с несжимаемыми краями. Пусть $f: (V, bV) \rightarrow (V', bV')$ — непрерывное отображение, такое, что гомоморфизм $\pi_1(f)$ инъективен. Тогда или отображение f гомотопно (в классе отображений пары (V, bV) на пару (V', bV')) накрытию, или V диффеоморфно произведению $S \times [0, 1]$ и f гомотопно отображению, образ которого содержится в крае bV' .*

Если $\pi_1(f)$ есть изоморфизм, то f гомотопна гомеоморфизму. ([Wa 68, th. 6.1], см. также [Ja, X; H, XIII; L].)

Аналогичные свойства для поверхностей известны, начиная с работ Нильсена. Они молчаливо использовались в этом изложении.

ЛИТЕРАТУРА

- [A] Alexander J. W., On the subdivision of a 3-space by a polyhedron, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10** (1924), 8–10.
- [BZ 66] Burde G., Zieschang H., Eine Kennzeichnung der Torusknoten, Math. Ann. **167** (1966), 169–176.
- [BZ 85] Burde G., Zieschang H., Knots, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1985.
- [CF] Cannon J. W., Feustel C. D., Essential embeddings of annuli and Mobius bands in 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 219–239.
- [CGLS] Culler M., Gordon C. McA., Luecke J., Shalen P. B., Dehn surgery of knots, Ann. of Math. **125** (1987), 237–300.
- [F] Feustel C. D., On the torus theorem and its applications, Trans. Amer. Math. Soc. **217** (1976), 1–43.
- [FW] Feustel C. D., Whitten W., Groups and complements of knots, Can. J. Math. **30** (1978), 1284–1295.
- [Ga] Gabai D., Foliations and the topology of 3-manifolds, III, J. Differential Geom. **18** (1987), 479–536.
- [GL] Gordon C. McA., Luecke J., Knots are determined by their complements, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 371–415.
- [Gr] Gramain A., Rapport sur la theorie classique des noeuds (1ere partie), Sem. Bourbaki, expose n°485, 1975–76, Lect. Notes in Math., vol. 567, Springer-Verlag, 1977, 222–237.
- [H] Hempel J., 3-manifolds, Ann. of Math. Studies **86** (1976), Princeton Univ. Press.
- [Ja] Jaco W., Lectures on Three-Manifolds Theory, Reg. Conf. in Math. **43**, Amer. Math. Soc. (1980).
- [Jo] Johannson K., Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries, Lect. Notes in Math., vol. 761, Springer-Verlag, 1979.
- [L] Laudenbach F., Topologie de la Dimension 3, Astérisque n°12, S.M.F., Paris (1974).
- [M] Moise E. E., Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Graduate Texts in Math. **47**, Springer-Verlag, 1977.
- [N] Noga D., Über den Aussenraum von Produktknoten und die Bedeutung der Fixgruppen, Math. Z. **101** (1967), 131–141.
- [P] Papakyriakopoulos C., On Dehn's lemma and the asphericity of knots, Ann. of Math. **66** (1957), 1–26.
- [Scha] Scharlemann M., Smooth spheres in $\mathbf{R}^4$ with four critical points are standard, Invent. Math. **70**, (1985), 125–141.
- [Schu] Schubert H., Knoten und Vollringe, Acta Mat. **90** (1953), 131–286.
- [Sc] Scott P., A new proof of the annulus and torus theorem, Amer. J. Math. **102** (1980), 241–277.

- [Si] Simon J., An algebraic classification of knots in S^3 , Ann. of Math. **97** (1973), 1–13.
- [ST] Stallings J., On fibering certain 3-manifolds, in: Topology of 3-manifolds and related topics (Proceedings of the 1961 Topology Conference, Univ. of Georgia), Prentice-Hall, 1962.
- [Wa 67] Waldhausen F., Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, Topology **6** (1967), 505–517.
- [Wa 68] Waldhausen F., On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. **87** (1968), 56–88.
- [Wh 74] Whitten W., Algebraic and geometric characterizations of knots, Invent. Math. **26** (1974), 259–270.
- [Wh 87] Whitten W., Knots complements and groups, Topology **26** (1987), 41–44.

ГОМОЛОГИИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ФУНКЦИОНАЛОМ (по А. Флёрю)¹⁾

Жан-Клод Сикорав

Введение

Сущность теории Морса на многообразиях конечной размерности сводится к следующему:

1) Любой функции $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ можно придать такое небольшое возмущение, чтобы все критические точки стали невырожденными.

Если многообразие M компактно, то число критических точек функции конечно. В этом случае можно построить комплекс, гомологии которого являются гомологиями многообразия M , причем

2) группа цепей C_i свободно порождается над $\mathbf{Z}$ критическими точками индекса i ;

3) граничный оператор $\partial: C_i \rightarrow C_{i-1}$ определяется равенством $\partial a = \sum \bar{m}(a, b)b$, где a — критическая точка индекса i , b пробегает все критические точки индекса $i-1$ и $\bar{m}(a, b)$ — подсчитанное с учетом знаков число идущих из a в b градиентных линий, заданных некоторой метрикой общего положения.

Существование этого комплекса установлено Р. Томом в 1949 г. [Th], а описание его граничного оператора дано С. Смейлом в 1960 г. [S]. В 1981 г. Э. Виттен [Wil], основываясь на физических соображениях, представил новое понимание этого комплекса. Он отвел главную роль пространству $M(a, b)$ градиентных линий, идущих из a в b . В ситуациях общего положения это многообразие размерности $\text{ind}(a) - \text{ind}(b)$, что легко показать классически, описывая его как пересечение устойчивого многообразия $W^s(a)$ точки a и неустойчивого многообразия $W^u(b)$ точки b . Но Виттен рассматривает это многообразие как подмножество пространства $B(a, b)$ путей $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow M$, соединяющих a и b , которое состоит из минимумов функционала энергии $E(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} [|\dot{\gamma}(t)|^2 + |\nabla f(\gamma(t))|^2] dt$. Такие пути также называют инстантонами.

С. П. Новиков [N] дал обобщение этой конструкции для функций со значениями в S^1 (или, более общим образом, для замкнутых, но не

¹⁾Sikorav Jean-Claude, Homologie associée à une fonctionnelle (d'après A. Flöer). — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 733, Astérisque, 201-202-203, 1991, p. 115–141.

точных дифференциальных 1-форм). В этом случае кольцом коэффициентов соответствующего комплекса является подходящее пополнение кольца лорановских многочленов $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ (учитывающее различные поднятия критических точек в накрытие, заданное интегрированием этих 1-форм).

Изложение Виттена открыло путь к обобщению этого комплекса «Тома–Смейла–Виттена» на бесконечномерный случай для функционалов, критические точки которых имеют бесконечные индекс и коиндекс. Это и сделал Флёр¹⁾ в 1986–87 гг. в двух интересных частных случаях: для функционала площадей (или действия) в симплектической геометрии [F2], который мы кратко обсудим в разд. 6 (хотя этот функционал заслуживает гораздо большего внимания), и для функционала Чженя–Саймонса, который дает начало *инстантонным гомологиям* [F3], изложению которых, в сущности, и посвящена статья.

В обоих случаях индексы критических точек определяются с помощью разностной конструкции (грубо говоря, как разность «индексов» двух точек) с использованием понятия *спектрального потока* из работы [APS III]. Отличие от конечномерного случая состоит в том, что разности зависят от гомотопического класса пути между двумя критическими точками (см. пп. 1.5 и 6.1). Отсюда следует, что для функционала Чженя–Саймонса, который по существу принимает значения в S^1 , рассматриваемый комплекс определен над $\mathbb{Z}$ (в отличие от гомологий Новикова), но имеет $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ -градуировку.

Наверное, наиболее интересным моментом теории является интерпретация градиентных линий. Для функционала Чженя–Саймонса градиентные линии интерпретируются как автодуальные связности (по модулю калибровок) на произведении $\mathbb{R} \times M$ (см. п. 1.4). Градиентная линия соединяет две критические точки, если ассоциированная с ней связность является асимптотически плоской. Функционал энергии — это функционал Янга–Миллса: $E(A) = \int_{\mathbb{R} \times M} |F(A)|^2$. Напомним, что соответствующее уравнение автодуальности, рассматриваемое на четырехмерных замкнутых многообразиях W^4 , составляет основу работ Дональдсона [D1–D3]. Его изучение на открытых многообразиях начато Таубсом [Ta1].

Именно такое обобщение уравнения градиентных линий наделяет инстантонные гомологии интересными свойствами, а именно свойствами «топологической квантовой теории поля» размерности $(3+1)$; см. [At1, At2, Wi2].

¹⁾ Иногда используется транскрипция «Флоер». — Прим. перев.

В симплектическом случае уравнения градиентных линий интерпретируются как уравнения псевдоголоморфных кривых в смысле М. Громова [Gr] (см. п. 6.1).

Мы ограничимся здесь изложением нескольких результатов указанной теории и дадим идеи доказательств. Основной опубликованной работой, на которую мы ссылаемся, остается статья [F3], но мы использовали также препринты Джонса–Роунсли–Саламона [JRS] и Фукайи [Fu]. Заметим, что перечисленные работы дают обобщение результатов Флэра на произвольные трехмерные многообразия.

1. ФУНКЦИОНАЛ ЧЖЕНЯ–САЙМОНСА

1.1. Связности и действие калибровочной группы [FU, DK]. Пусть M — многообразие и $P \rightarrow M$ — главное G -расслоение, где G — некоторая группа Ли. Пространство связностей $\mathcal{A}(P)$ на расслоении P является аффинным пространством, отвечающим пространству форм $\Omega^1(M, \text{ad}(P))$. Пространство $\Omega^i(M, \text{ad}(P))$ дифференциальных форм со значениями в присоединенном векторном расслоении $\text{ad}(P)$ обозначим через $\Omega_{\text{ad}}^i(M)$ или просто Ω_{ad}^i , если это не может привести к недоразумению. Связность a задает ковариантную производную $d_a: \Omega_{\text{ad}}^i \rightarrow \Omega_{\text{ad}}^{i+1}$. Композиция ковариантных производных $d_a \circ d_a$ является умножением (используется умножение-скобка в алгебре Ли) на *кривизну связности* $F(a) \in \Omega_{\text{ad}}^2$. Группа автоморфизмов главного расслоения P , т.е. *калибровочная группа*, обозначается через $\mathcal{G}(P)$. Она естественно действует на пространстве связностей $\mathcal{A}(P)$. Ее алгебра Ли отождествляется с Ω_{ad}^0 , и дифференциал действия $a \rightarrow g \cdot a$ совпадает с ковариантной производной d_a на Ω_{ad}^0 (рассматривается правое действие). Обозначим через $\mathcal{B}(P) = \mathcal{A}(P)/\mathcal{G}(P)$ фактор по действию калибровочной группы: он является отделимым пространством и многообразием вблизи неприводимых связностей. Касательным пространством $T_{[a]}\mathcal{B}^*(M)$ является $\Omega_{\text{ad}}^1/\text{im } d_a$.

Пусть σ — риманова метрика на M . Используя естественное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$, можно определить оператор Ходжа $*_\sigma: \Omega_{\text{ad}}^i \rightarrow \Omega_{\text{ad}}^{n-i}$ и L^2 -сопряженный оператор $d_a^* = *d_a*$, что позволяет произвести отождествление

$$T_{[a]}\mathcal{B}^*(M) = \ker d_a^* \subset \Omega_{\text{ad}}^1.$$

Расслоение P чаще всего является тривиальным. Выбор тривиализации позволяет отождествить $\mathcal{A}(P)$ с $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли группы Ли G , а дифференциал принимает вид $d_a \omega = d\omega + [a, \omega]$. Группа $\mathcal{G}(P) = \mathcal{G}(M)$ состоит из отображений многообразия M в G

и действует на $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(M)$ по формуле $g \cdot a = g^{-1}dg + g^{-1}ag$. Кроме того, мы предполагаем, что $G = SU(2)$ или $SO(3)$, а тогда справедливы следующие эквивалентные утверждения: связность a неприводима $\iff \mathcal{G}_a = Z(G)$ (где $\mathcal{G}_a = \{g \in G(M) \mid g \cdot a = a\}$ является группой изотропии и $Z(G)$ — центр группы G) $\iff \ker(d_a) = 0$.

Замечание. Чтобы многообразия были банаховыми и можно было применять теорему о неявных функциях, следует работать с пространствами Соболева. Например, можно считать, что $\mathcal{A}(P)$ состоит из форм класса L_1^p (первая производная принадлежит L^p) и $\mathcal{G}(P)$ состоит из отображений класса L_2^p , где $p > \frac{1}{2} \dim M$, чтобы отображения из $\mathcal{G}(P)$ были непрерывны. В разд. 2 нам придется взять $p > \dim M$, чтобы $\mathcal{A}(P)$ состояло из непрерывных отображений.

1.2. Функционал Чженя–Саймонса [CS, APS]. Предположим теперь, что M является ориентируемым трехмерным замкнутым многообразием и $G = SU(2)$. В этом случае кривизна определяет 1-форму на $\mathcal{A}(M)$: $\alpha(a) \cdot u = \int_M \text{tr}(F(a) \wedge u)$. Эта форма является замкнутой, так как $d\alpha(u, v) = \int_M \text{tr}(d_a(u \wedge v)) = \int_M d(\text{tr}(u \wedge v)) = 0$. Поскольку $\mathcal{A}(M)$ является векторным пространством, для нее существует предпочтительная первообразная, которая по определению является *функционалом Чженя–Саймонса*. Если расслоение тривиально, то, используя формулу для кривизны, получаем

$$CS(a) = \int_M \text{tr} \left(\frac{1}{2} a \wedge da + \frac{1}{3} a \wedge a \wedge a \right).$$

Используя формулу Стокса, можно получить первоначальное определение функционала Чженя–Саймонса, восходящее к теории вторичных характеристических классов:

$$CS(a) = \frac{1}{2} \int_{M \times I} \text{tr}(F(A) \wedge F(A)),$$

где $A \in \Omega_{\text{ad}}^1(M \times I)$, причем $A|_{M \times \{0\}} = 0$ и $A|_{M \times \{1\}} = a$.

Кривизна, будучи эквивариантной относительно действия калибровочной группы, опускается до замкнутой 1-формы на пространстве $B(M)$. Она не является, вообще говоря, точной формой. Более определенно, рассмотрим подходящее расслоение над $M \times S^1$; тогда интегрирование формы $\frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F(A) \wedge F(A))$ дает второй класс Чженя, что приводит к формуле для действия калибровочной группы

$$CS(g \cdot a) = CS(a) + 4\pi^2 \deg(g)$$

Следовательно, если обозначить через $\mathcal{G}_0(M)$ компоненту связности

единицы в $\mathcal{G}(M)$, образованную автоморфизмами степени 0, и положить $\widehat{B}(M) = \mathcal{A}(M)/\mathcal{G}_0(M)$, то получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}(M) & \xrightarrow{CS} & \mathbf{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(M) & \xrightarrow{CS} & \mathbf{R}/4\pi^2\mathbf{Z} \end{array}$$

Замечание. Пространства $B(M)$ и $B^*(M)$ имеют слабый гомотопический тип классифицирующего пространства $B(\mathcal{G}(M)/\{\pm \text{id}\})$; следовательно, $\pi_1 B(M) = \pi_0(\mathcal{G}(M)/\{\pm 1\}) = \mathbf{Z}$, где последний изоморфизм определяется степенью отображения, и $\widehat{B}(M)$ — универсальное накрытие пространства $B(M)$.

1.3. Критические точки. Как следует из определения, критическими точками функционала Чженя–Саймонса CS на пространстве связностей $\mathcal{A}(M)$ являются плоские связности. Взятие голономии связности дает каноническое отождествление пространства плоских связностей, рассматриваемых по модулю калибровочных преобразований, и пространства $R(M) = \text{Hom}(\pi_1 M, SU(2))/(\text{сопряжение})$. Последнее пространство изучалось многими авторами, в частности, оно фигурирует в определении инварианта Кассона [AM, Ma]. Заметим, что это пространство является компактным, так как группа $\pi_1 M$ имеет конечный тип. Отметим также, что точки из $R^*(M)$ — неприводимые плоские связности, а это эквивалентно неприводимости соответствующих представлений голономии.

1.4. Градиентные линии. Если многообразие M наделено римановой метрикой σ , то можно рассмотреть форму $*_{\sigma} F(a) \in \Omega_{\text{ad}}^1(M)$ как L^2 -градиент функционала Чженя–Саймонса на $\mathcal{A}(M)$. Переходя к фактору, получим сечение $\nabla_{\sigma} CS: B^*(M) \rightarrow \widehat{TB}^*(M)$, где $\widehat{TB}^*(M)$ — подходящее пополнение касательного расслоения.

Пусть $t \rightarrow a(t)$ — путь в $\mathcal{A}(M)$. Пусть A — связность $\{a(t)\} \in \Omega_{\text{ad}}^1(\mathbf{R} \times M)$ (A рассматривается во временной калибровке, т.е. не содержит члена dt); ее кривизна имеет вид

$$F(A) = \{F(a(t))\} + \partial a / \partial t \wedge dt.$$

Отсюда вытекает, что уравнение нисходящих градиентных линий $\partial a / \partial t + *_{\sigma} F(a(t)) = 0$ эквивалентно уравнению автодуальности

$$F^-(A) = \frac{1}{2}(F(A) - *F(A)) = 0,$$

где A есть связность $\{a(t)\} \in \Omega_{\text{ad}}^1(\mathbf{R} \times M)$, а метрика является произведением $dt^2 \times \sigma$. Заметим, что любая связность на $\mathbf{R} \times M$ эквивалентна по модулю действия группы $\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M)$ связности $A = \{a(t)\}$ без члена dt , т.е. во временной калибровке. Предположим, что связность A имеет вид $\{a(t)\} + \{b(t) \wedge dt\}$. Тогда чтобы найти требуемое калибровочное преобразование, достаточно решить обыкновенное дифференциальное уравнение $g^{-1}\partial g/\partial t + g^{-1}bg = 0$. Это доказывает в действительности, что имеют место следующие естественные отождествления:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R} \times M) = \mathcal{A}(\mathbf{R} \times M)/\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M) = C^\infty(\mathbf{R}, \mathcal{A}(M))/\mathcal{G}(M).$$

A fortiori элемент из $\mathcal{B}(\mathbf{R} \times M)$ определяет путь в $\mathcal{B}(M)$. Заметим, что из эллиптического характера уравнения автодуальности по модулю калибровки следует, что это уравнение не всегда имеет локальное решение при произвольных начальных условиях. Это, конечно, связано с тем фактом, что L^2 -градиент не является настоящим векторным полем.

1.5. Индекс критической точки [F3, APS III]. Если многообразие M наделено римановой метрикой, то гессиан H_a функционала Чженя–Саймонса в критической точке $[a] \in R^*(M)$ можно отождествить с оператором $H_a = *d_a|_{\ker d_a^*}$. Этот оператор является оператором Фредгольма индекса нуль, если его рассматривать как оператор из L_1^2 в L_0^2 . Рассмотрим его как неограниченный оператор на L_0^2 ; тогда он является самосопряженным оператором с дискретным спектром и неограниченным в обоих смыслах.

Это мешает определить индекс критической точки как число собственных значений гессиана, меньших нуля, но если $[a(t)]$ есть путь между двумя критическими точками, то можно определить *спектральный поток* $SF(H_{a(t)})$ как алгебраическое число собственных значений, меняющих значение с отрицательного на неотрицательное ($s < 0$ на ≥ 0). Спектральный поток зависит лишь от класса гомотопического пути и не зависит от выбора метрики.

На самом деле мы будем иметь дело с плоскими приводимыми связностями, в окрестности которых $\mathcal{B}(M)$ не является многообразием. В этом случае заменим H_a «эквивариантным гессианом»

$$D_a \in \text{End}(\Omega^0 \oplus \Omega^1), \quad (u, v) \mapsto (d_a^*v, d_a u + *d_a v).$$

Простые вычисления показывают, что если связность a плоская, то имеет место равенство $\ker D_a = \ker(d_a|_{\Omega^0}) \oplus \ker H_{[a]}$. Таким образом, определен спектральный поток $SF(a, b) \in \mathbf{Z}$ для произвольных плоских связностей a, b , причем он зависит только от классов связностей a и b в $\hat{R}(M)$.

Однако на пространстве представлений $R(M)$ спектральный поток $SF(a, b)$ определен только по модулю 8. Более точно,

Предложение [APS III]. Если a — плоская связность и $g \in \mathcal{G}(M)$ — элемент калибровочной группы, то $SF(ga, a) = 8 \deg(g)$.

Доказательство основано на отождествлении $SF(ga, a)$ с индексом оператора автодуальности на $SU(2)$ -расслоении $P_g \rightarrow S^1 \times M$, которое определено с помощью g . Напомним, что этот индекс на замкнутом многообразии вычисляется по формуле $8c_2(P) - 3(1 - b_1(W) + b_2^-(W))$ [FU, DK].

Теперь можно определить индекс плоской связности (точнее, калибровочного класса связности), используя тривиальную связность θ :

Определение. Если a — некоторая плоская связность, то положим $\text{ind}([a]) = SF(a, \theta)$. Если $\alpha \in \hat{R}(M)$, то $\text{ind}(\alpha) \in \mathbb{Z}$, а если $\alpha \in R(M)$, то $\text{ind}(\alpha) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Уточним действие изменения ориентации на многообразии M . Так как имеет место равенство $CS(-M, a) = -CS(M, a)$, то

$$SF(-M, a, b) = SF(M, b, a) - \dim \ker(D_a) + \dim \ker(D_a),$$

откуда

$$\text{ind}(-M, a) = -\text{ind}(M, a) - \dim \ker(D_a) + \dim \ker(D_\theta).$$

Обозначения. Если $a, b \in R(M)$, то обозначим через $B(a, b) \subset B(\mathbb{R} \times M)$ подпространство, соответствующее путям, идущим из a в b , в пространстве $B(M)$. Компоненты связности $B(a, b, i)$ этого подпространства параметризуются целыми числами i , которые являются вычетами по модулю 8 разности индексов $\text{ind}(a) - \text{ind}(b)$ (значений спектрального потока).

1.6. Определение. Критическая точка $[a] \in R(M)$ называется невырожденной, если $\ker H_{[a]} = 0$. (Это понятие является естественным для эквивариантных связностей.)

Это свойство записывается формулой $\ker(d_a) \cap \ker(d_a^*) = 0$ либо формулой $H^1(\Omega^*, d_a) = 0$ в соответствии с теорией Ходжа. Но $H^*(\Omega^*, d_a) = H_{[a]}^*(M, \mathfrak{su}(2)) = H_{[a]}^*(\pi_1(M), \mathfrak{su}(2))$, где последние когомологии являются когомологиями с локальными коэффициентами, отвечающими классу сопряженности гомоморфизма $[a]: \pi_1 M \rightarrow SU(2)$. Пространство $H^1(\pi_1 M, \mathfrak{su}(2))$ является касательным пространством по Зарисскому к $R(M)$ в точке $[a]$. Следовательно, если критическая точка $[a]$ невырожденна, то она является изолированной в пространстве $R(M)$. Так как $R(M)$ компактно, то оно конечно, если все

его точки невырожденные. Заметим, что если связность a является плоской, то $\ker(D_a) = 0$ тогда и только тогда, когда эта связность неприводима и невырождена.

Тривиальная связность является невырожденной в том и только том случае, когда $H^1(M; \mathfrak{su}(2)) = 0$, например, когда многообразие M является рациональной гомологической сферой. Тогда $\dim \ker(D_\theta) = \dim \ker(d_\theta) = 3$, а потому для невырожденной критической точки a получим

$$\text{ind}(-M, a) = 3 - \text{ind}(M, a) - \dim \mathcal{G}_a.$$

Если, кроме того, многообразие M является целочисленной гомологической сферой, то единственным приводимым гомоморфизмом $\pi_1 M \rightarrow SU(2)$ будет тривиальный гомоморфизм: на самом деле его значения лежат в $S^1 \subset SU(2)$ и $\text{Hom}(\pi_1 M, S^1) = H^1(M, S^1) = 0$.

2. ВОЗМУЩЕНИЯ [Та4]

2.1. Пространство возмущений. Зафиксируем на диске D^2 неотрицательную 2-форму ω_0 с компактным носителем и с интегралом по диску, равным единице. Для вложения $\gamma: S^1 \times D^2 \rightarrow M$ определим функционал $\tau_\gamma: \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\tau_\gamma(a) = \int_{D^2} \text{tr}(h_a(z)) \omega_0,$$

где $h_a(z)$ — голономия связности a вдоль петли $\gamma(S^1 \times \{z\})$. Его возмущение задается формулой $\pi = \sum_i v_i \tau_{\gamma_i}$, где $v_i \in \mathbb{R}$. Этим определено пространство Π , параметризованное множеством пар (Γ, v) , где Γ — набор $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ и $v \in \mathbb{R}^N$. Имеет место следующее утверждение:

Предложение. (1) Возмущенный функционал имеет те же свойства, что и функционал Чженя–Саймонса (возмущение «компактно»). В частности, множество критических точек остается компактным и каждая критическая точка имеет индекс в $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

(2) Если многообразие M является целочисленной гомологической сферой, то существует такой набор петель $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, что почти для всех $v \in \mathbb{R}^N$ критические точки функционала $CS_{\Gamma, v}$ невырождены.

Доказательство. (1) Это так, поскольку функционал τ_γ (а следовательно, и π) имеет L^2 -градиент, который является векторным полем на $\mathcal{B}(M)$. Оно задается выражением

$$\nabla_\sigma \tau_\gamma(a) = h_a \cdot (*_\sigma \omega_0(z))$$

на образе $\gamma(S^1 \times D^2)$ и равно нулю вне него.

(2) Из предположений относительно M следует невырожденность точки $[\theta] \in R(M)$ и равенство $R^*(M) = R(M) \setminus \{[\theta]\}$. Кроме того, эллиптическая регулярность дает компактность множества

$$K = \{(a, [u]) \in TB^*(M) \mid [a] \in R^*(M), H_a \cdot u = 0, \|u\|_{L_2} = 1\}$$

(которое может оказаться пустым). Так как элемент из $B(M)$ определяется следом голономии на всех петлях $S^1 \rightarrow M$ с заданным касательным вектором в начале, то компактность множества K влечет за собой существование таких $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, что если положить $\tau = (\tau_{(\gamma_i)}): B(M) \rightarrow \mathbb{R}^N$, то дифференциал $d\tau: TK \rightarrow \mathbb{R}^N$ инъективен на всех слоях расслоения K . Отсюда следует, что отображение $(v, [a]) \rightarrow \nabla(CS + \langle v, \tau \rangle)([a])$ из $\mathbb{R}^N \times B^*$ в TB^* трансверсально к нулевому сечению, причем его гессиан относительно второй переменной определяет оператор Фредгольма индекса N . «Классическая» теорема Сарда позволяет завершить доказательство (не обращаясь к теореме Сарда–Смейла).

2.2. Интерпретация инварианта Кассона в калибровочной теории. Напомним определение инварианта Кассона $\lambda(M)$ для целочисленных гомологических сфер размерности 3 (см. [AM, MA]): если $M = M_1 \cup_\Sigma M_2$ — разбиение Хегора многообразия M , то он равен половине индекса пересечения $R^*(M_1) \cdot R^*(M_2)$, где $R^*(M_i) \subset R^*(\Sigma)$ являются пространствами нетривиальных представлений фундаментальных групп $\pi_1(M_i)$ в $SU(2)$ (по модулю сопряжений). Заметим, что $R^*(M_1) \cap R^*(M_2) = R^*(M)$.

Для возмущения общего положения $\pi \in \Pi$ в смысле п. 2.1 множество $R_\pi^* = \text{crit}(CS + \pi|B^*(M))$ является конечным. При этом каждой точке сопоставляется такой индекс $\text{ind}_\pi([a]) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, что число $(-1)^{\text{ind}_\pi([a])}$ корректно определено.

Теорема [Ta4]. Характеристика Эйлера

$$n(\pi) = \sum_{[a] \in R_\pi^*} (-1)^{\text{ind}_\pi([a])}$$

не зависит от выбора π и равна $2\lambda(M)$. В случае когда $[a] \in R^*(M)$ — невырожденная критическая точка, $(R^*(M_1) \cdot R^*(M_2))_{[a]} = (-1)^{\text{ind}([a])}$.

2.3. Градиент функционала CS_π дает отображение $F_\pi: \mathcal{A}(\mathbb{R} \times M) \rightarrow \Omega_{\text{ad}}^{2,-}(\mathbb{R} \times M)$, которое является эквивариантным возмущением отображения F^- взятия антиавтотдуальной составляющей кривизны. Для

точек a, b из R_π обозначим через $\mathcal{M}_\pi(a, b) \subset \mathcal{B}(a, b)$ пространство модулей решений, которые задают пути, соединяющие a и b . Оно разлагается на подпространства $\mathcal{M}_\pi(a, b; i)$, отвечающие $i \equiv (\text{ind}(a) - \text{ind}(b)) \bmod 8$.

3. ИНСТАНТОННЫЕ ГОМОЛОГИИ

Пусть M — целочисленная трехмерная гомологическая сфера, наделенная римановой метрикой σ . Объекты, введенные в разд. 2, позволяют ввести гомологии, ассоциированные с функционалом Чжена–Саймонса. Для этого рассмотрим пространства $\mathcal{M}(a, b; i) = \mathcal{M}_{\sigma\pi}(a, b; i)$ и пространства $\overline{\mathcal{M}}(a, b; i) = \mathcal{M}(a, b; i)/\mathbb{R}$, где $a, b \in R_\pi^*$ и $i \equiv (\text{ind}(a) - \text{ind}(b)) \bmod 8$. Если $a = b$, то предположим, что $i \neq 0$.

Теорема 1. *Возмущение общего положения $\pi \in \Pi$ обладает следующими свойствами:*

(а) *Пространство $\mathcal{M}(a, b; i)$ является гладким ориентируемым многообразием размерности i ; следовательно, пространство $\overline{\mathcal{M}}(a, b; i)$ является ориентируемым многообразием размерности $i - 1$.*

(б) *Если $\text{ind}(a) - \text{ind}(b) \equiv 1 \bmod 8$, то ориентируемое многообразие размерности нуль $\overline{\mathcal{M}}(a, b; i)$ является компактным, а следовательно, можно определить его алгебраическое число точек $\overline{m}(a, b) \in \mathbb{Z}$.*

(с) *Если $\text{ind}(a) - \text{ind}(b) \equiv 2 \bmod 8$, то одномерное ориентируемое многообразие $\overline{\mathcal{M}}(a, b; i)$ имеет согласованно ориентированную компактификацию с краем*

$$\partial \overline{\mathcal{M}}(a, b; 2) = \bigsqcup_c \overline{\mathcal{M}}(a, c; 1) \times \overline{\mathcal{M}}(c, b; 1),$$

где c пробегает точки индекса $\text{ind}(a) - 1$. Если алгебраическая граница равна нулю, то $\sum_c \overline{m}(a, c) \overline{m}(c, b) = 0$. Следовательно, если определить группу «цепей» C_i , $i \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, как свободную абелеву группу, порожденную критическими точками $a \in R_\pi^*$ индекса i , а дифференциал $\partial: C_i \rightarrow C_{i-1}$ — формулой $\partial a = \sum_b \overline{m}(a, b) b$, то $\partial \circ \partial = 0$. Значит, (C_*, ∂) является комплексом, и его гомологии обозначаются через $H(\sigma, \pi)$.

(д) *Если (σ, π) и (σ', π') — два допустимых выбора римановой метрики и возмущения, то гомологии $H(\sigma, \pi)$ и $H(\sigma', \pi')$ канонически изоморфны.*

Эта теорема придает смысл следующему определению:

Определение. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ -градуированная абелева группа $H(\sigma, \pi)$ называется группой инстантных гомологий трехмерной целочисленной гомологической сферы M и обозначается через $I_*(M)$.

Из работы [Та4] (см. п. 2.2) непосредственно выводится следующий результат:

Свойство. Эйлерова характеристика $\sum_{i=0}^7 (-1)^i \operatorname{rg} I_i(M)$ равна удвоенному инварианту Кассона $\lambda(M)$

Поведение индекса при смене ориентации обеспечивает следующее свойство:

Свойство. Группа $I_*(-M)$ двойственна группе $I_{3-*}(M)$, т. е. они порождаются двойственными комплексами. Значит, имеет место спаривание $I_*(M) \otimes I_{3-*}(M) \rightarrow \mathbb{Z}$.

(Эта двойственность не совпадает с двойственностью Пуанкаре, но совпадает с двойственностью, отвечающей форме Киллинга на $SU(2)$.)

В оставшейся части данного раздела мы дадим ряд указаний по доказательству теоремы 1.

3.2. Свойство быть многообразием. Для доказательства п. (а) теоремы 1 определим надлежащим образом пространства $B(a, b)$. Выберем гладкие представители a, b и какую-нибудь гладкую связность A_0 , которая дает a для $t \leq -1$ и b для $t \geq 1$. Положим $A(a, b) = A_0 + L_1^4(\Omega_{\text{ad}}^1)$ (где $\Omega_{\text{ad}}^i = \Omega_{\text{ad}}^i(\mathbb{R} \times M)$). Это пространство допускает гладкое действие группы

$$\mathcal{G}(\mathbb{R} \times M) = \{g \in L_{2, \text{loc}}^4(\mathbb{R} \times M, \mathfrak{su}(2)) \mid \\ \exists \xi \in L_2^4(\Omega_{\text{ad}}^2), \text{ такое, что } g = \exp(\xi), \text{ если } |t| \geq 1\}.$$

Как в случае замкнутых пространств, фактор

$$B(a, b) = A(a, b)/\mathcal{G}(\mathbb{R} \times M)$$

является многообразием с касательным пространством $T_{[A]}B = \operatorname{Ker} d_A^*$ (заметим, что A всегда неприводима). Ясно, что так определенное пространство зависит лишь от выбора классов в $R(M)$ и является объединением подпространств $B(a, b; i)$.

Далее, отображение $F_{\sigma\pi}: A(a, b) \rightarrow \Omega_{\text{ad}}^{2,-}$ пропускается через фактор по группе $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times M)$, чтобы определить сечение $\bar{F}: B(a, b) \rightarrow \mathcal{L}(a, b)$ некоторого расслоения со слоем $\Omega_{\text{ad}}^{2,-}$. Ковариантная производная $D\bar{F}_{[A]}: T_{[A]}B \rightarrow \mathcal{L}_{[A]}$ отождествляется с ограничением на ядро $\operatorname{ker} d_A^*$ дифференциала $dF_{\sigma\pi}: \Omega_{\text{ad}}^1 \rightarrow \Omega_{\text{ad}}^{2,-}$.

Предложение [APS III]. Оператор $D\bar{F}_{[A]}$ является оператором Фредгольма, и его индекс на компоненте $B(a, b; i)$ равен i .

Предположим для простоты, что $\pi = 0$. Тогда оператор $D\bar{F}_{[A]}$ имеет те же ядро и коядро, что и оператор $\partial/\partial t + D_{a(t)}$, на пространстве путей из a в b . Ввиду того что D_a и D_b являются невырожденными операторами, соответствующий индекс равен $SF(D_{a(t)})$ (очевидный факт).

Для завершения доказательства п. (а) теоремы (не касаясь ориентации) надо показать, что для возмущений общего положения π оператор $D\bar{F}_{[A]}$ является сюръективным. Доказательство аналогично тому, которое проводилось в п. 2.2.

Наконец, следует рассмотреть случай, когда связности a и b приводимые. Для этого используется развитая в [LM] теория для эллиптических операторов на некомпактных многообразиях. Эта теория вводит в рассмотрение объекты, экспоненциально убывающие на концах. Тогда получаем

Предложение. В общем случае $\mathcal{M}(a, b; i)$ является ориентируемым многообразием размерности

$$\dim \mathcal{M}(a, b; i) = -\dim \mathcal{G}_b,$$

если a или b — неприводимая связность.

Следствие. Если $i - \dim \mathcal{G}_b \leq 0$, то $\mathcal{M}(a, b; i) = \emptyset$, за исключением случая $i = 0$ и $a = b$.

(Этот результат — следствие действия R_* .)

Теперь фиксируем возмущение общего положения. Для простоты предположим, что $\pi = 0$. Скажем несколько слов об ориентации. Ориентируемость доказывается точно так же, как в [D1]: достаточно заметить, что детерминантное расслоение $\det(\ker D\bar{F}_{[A]} \otimes \operatorname{coker} D\bar{F}_{[A]})$ тривиально на $B(a, b)$. Рассматривая стабилизатор группы $SU(2)$ в $SU(3)$, видим, что указанное расслоение является ограничением некоторого расслоения на $B(SU(3), a, b)$ (аналог $B(a, b)$, когда $SU(2)$ заменяется на $SU(3)$). Последнее пространство является односвязным, откуда следует доказываемое утверждение. Для «когерентного» выбора ориентаций на разных пространствах можно использовать конструкцию из определения склейки в п. 3.5.

3.3. Главной составной частью доказательства является компактификация пространства $\bar{\mathcal{M}}(a, b; i)$. Здесь существенны следующие два обстоятельства:

1) Если интерпретировать элементы как непараметризованные градиентные линии, соединяющие a и b , то они могут проходить через

промежуточные критические точки: последовательность таких линий может сходиться к конечному объединению линий $\ell_1, \dots, \ell_n$, где ℓ_i соединяет точки c_i и c_{i+1} , причем $c_0 = a$ и $c_n = b$. В случае конечной размерности пространства это единственная возможность. Конструкция склеивания траекторий позволяет описать дополнение к компакту в $\overline{M}(a, b)$ как несвязное объединение открытых множеств

$$\mathcal{O}(a, c_1, \dots, b) = \overline{M}(a, c_1) \times \mathbf{R}_+ \times \overline{M}(c_1, c_2) \times \dots \times \mathbf{R}_+ \times \overline{M}(c_{n-1}, b).$$

Частные случаи, когда разность индексов равна нулю или единице, позволяют определить комплекс, описанный во введении. Для эквивалентных функций аналогичный результат имеет место на факторе по группе изотропии точки c_i .

2) Если обратиться к $\mathcal{M}(a, b)$ и интерпретировать его элементы как автодуальные связности (точнее, их модули), то возникает феномен, состоящий в появлении «пузырей», или размазанных инстантов, открытых Уленбек [U2]. Для замкнутых многообразий Таубс и Дональдсон доказали, что этого достаточно, чтобы описать компактификацию. На открытых многообразиях речь идет о слабых компактификациях (сходимость на каждом компакте).

Сначала мы уточним утверждение 2), а затем покажем, что оно не имеет места, если $\dim \mathcal{M}(a, b) \leq 8$. Для этого рассмотрим пространство $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbf{R} \times M)$ автодуальных связностей, энергия $e(A) = \int_{(\mathbf{R} \times M)} |F(A)|^2$ которых ограничена. Равносильное условие: на соответствующей градиентной линии вариация функционала $CS(a(t))$ остается ограниченной (напомним, что $|F(A)|^2 = 2(d/dt)(CS(a(t)))$). Следовательно, $\mathcal{M}$ содержит $\mathcal{M}(a, b)$.

Предложение. 1) Пусть $[A_n]$ — такая последовательность в $\mathcal{M}$, что энергия $e(A_n)$ является ограниченной. Тогда, с точностью до перехода к некоторой подпоследовательности, существует конечное число точек $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{R} \times M$, положительные целые числа $n_1, \dots, n_k$ и элемент $[B]$ из $\mathcal{M}$, такие, что при подходящих представлениях справедливы следующие утверждения:

- (a) $A_n \rightarrow B$ в C^∞ на всех компактах из $\mathbf{R} \times M \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$;
- (b) точка x_j определяет на $\mathbf{R}^4$ инстантом энергии $8\pi^2 n_j$;
- (c) $e(B) + 4\pi^2 \sum_{i=1}^k n_i \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} e(A_n)$.

2) Имеет место разложение $\mathcal{M} = \bigcup_{a,b} \mathcal{M}(a, b)$. Кроме того, топология каждого пространства $\mathcal{M}(a, b; i)$ определяется сходимостью на всех компактах (слабая сходимость).

Доказательство. 1) Лемма о плотности Уленбек [U2] утверждает существование такого $\varepsilon > 0$, что если взять открытое множество

$U \subset \mathbf{R} \times M$, для которого выполняется неравенство $\int_U |F(A_n)|^2 < \varepsilon$, то (возможно, после перехода к подпоследовательности и взятия подходящей калибровки) последовательность A_n сходится в топологии пространства C^∞ на всех компактах из U . В частности, модуль кривизны $|F(A_n)|$ равномерно ограничен на всех компактах из U . Скажем, что $x \in \mathbf{R} \times M$ является *плотой точкой*, если для всех τ $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x, \tau)} |F(A_n)|^2 > \varepsilon$. Ясно, что таких точек имеется, самое большее, $[e/\varepsilon]$, где e — ограничение на энергию. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — плохие точки. Тогда на $\mathbf{R} \times M \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ модуль кривизны $|F(A_n)|$ равномерно ограничен на всех компактах; следовательно, из результатов работы [U1] вытекает существование такой связности $B \in \mathcal{A}(\mathbf{R} \times M \setminus \{x_1, \dots, x_k\})$, что (а) выполняется. К тому же выполняется неравенство $e(B) \leq e < \infty$; значит, из работы [U2] вытекает, что B продолжается на $\mathbf{R} \times M$, и, очевидно, является автодуальной.

Наконец, выберем непересекающиеся пузыри $B_1, \dots, B_k$ с центрами в $x_1, \dots, x_k$. Кривизна $|F(A_n)|$ ограничена на каждом крае ∂B_j и

$$M_{j,n} = \sup_{B_j} |F(A_n)| \rightarrow +\infty,$$

когда $n \rightarrow \infty$. Пусть $x_{j,n} \in B_j$ — точка, где $|F(A_n)|$ имеет максимум; тогда подходящая «ренормализация» преобразует связность $A_n|_{B(x_{j,n}, \varepsilon_{j,n})}$ в связность $C_{j,n}$ на $B(0, R_{j,n}) \subset \mathbf{R}^4$, причем $R_{j,n} \rightarrow \infty$ и $|F(C_{j,n})| \leq |F(C_{j,n})(0)| = 1$. Кроме того, $C_{j,n}$ автодуальна. Следовательно, из работ [U1] и [U2] вытекает п. (b). Пункт (c) очевиден.

2) Рассмотрим последовательность $A + t_n$, где $t_n \rightarrow \infty$. Согласно п. 1), из того, что энергия стремится к нулю на всех компактах, следует, что некоторая подпоследовательность слабо сходится к связности B , которая обязательно является плоской, а значит, дает путь в $R(M)$. Так как $R(M)$ — дискретное пространство, то, согласно предположениям о невырожденности, этот путь является постоянным. Из этого выводится, что $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = a \in R(M)$. Свойства топологии устанавливаются с помощью эллиптического «бутстрапа» (см. [FU]).

3.4. Предложение. *Предположим, что a или b неприводима и $i \leq 8$. Тогда если $[A_n]$ — последовательность из $\mathcal{M}(a, b; i)$, то она обладает следующими свойствами (после перехода при необходимости к подпоследовательности). Существуют критические точки $c_0 = a, c_1, \dots, c_n = b$ и такие градиентные линии $\gamma_\ell \in \mathcal{M}(c_i, c_{i+1})$, что последовательность $[a_n(t)]$ равномерно сходится к объединению градиентных линий $\text{im}(\gamma_\ell)$ в $B_*(M)$. Если $i \leq 4$, то точки c_ℓ неприводимы для $1 \leq \ell \leq n-1$.*

Доказательство. Энергия является ограниченной, поскольку $e(A_n) = CS(a) - CS(b)$ при подходящих поднятиях в $A(M)$, и поднятие можно считать фиксированным, так как i фиксировано. Значит, к последовательности можно применить п. 3.3, равно как и ко всем сдвинутым последовательностям $[A_n + t_n]$. Рассмотрим все нетривиальные пределы $[\bar{B}] \in M$. Используя конечность числа критических точек в промежутке $[CS(b), CS(a)]$, легко найти подпоследовательность, имеющую «максимальное» число таких пределов. Более точно, для такой последовательности пределы пробегает конечную последовательность $[\bar{B}_\ell] \in M(c_\ell, c_{\ell+1})$, $1 \leq \ell \leq n-1$, причем $b_0 = a$ и $b_n = b$. К тому же можно выбрать поднятия c_ℓ так, что $c_0 = a$ и $c_n = gb$ для некоторого элемента g калибровочной группы $\mathcal{G}(M)$.

Рассмотрим все инстантоны на $\mathbb{R}^4$, которые возникают при сдвинутых последовательностях: в силу ограниченности энергии имеется конечное число связностей $c_1, \dots, c_k$. Обозначим через $n_1, \dots, n_k$ их «заряды». Подставляя все возможные пределы в формулу для энергии, получим равенство

$$CS(a) - CS(b) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (CS(c_\ell) - CS(c_{\ell-1})) + 4\pi^2 \sum_{j=1}^k n_j.$$

Используя формулы $CS(ga) - CS(a) = 4\pi^2 \deg(g)$, $\text{ind}(ga) - \text{ind}(a) = 8 \deg(a)$ и $i = \text{ind}(a) - \text{ind}(b) - \dim \mathcal{G}_b$, приходим к формуле индекса

$$i = \sum_{\ell=0}^{n-1} i_\ell + \sum_{\ell=1}^{n-1} \dim \mathcal{G}_{c_\ell} + 8 \sum_{j=1}^k n_j,$$

где $i_\ell = \text{ind}(c_\ell) - \text{ind}(c_{\ell+1}) - \dim \mathcal{G}_{c_\ell}$. Согласно п. 3.2, выполняются неравенства $i_\ell \geq 1$; следовательно, если $i \leq 8$, то $k = 0$. Тогда последовательность $a_n(t)$ сходится в силу того, что взяты все возможные пределы (это устанавливается рассуждением от противного). Если $i \leq 4$, то неприводимость связностей c_ℓ есть следствие формулы индекса.

Замечание. Отметим важную роль пропорциональности разности индексов и вариации функции («монотонности», на языке работы [F4]). Отсюда следует, что каждый пузырь «расходует» индекс; следовательно, от него можно избавиться при некоторых предположениях.

3.5. Положим $i = 0$ в предложении 3.4; тогда обязательно $n = 0$. Следовательно, из предложения 3.3(2) вытекает компактность. Для доказательства п. (с) теоремы 1 и, более общим образом, для описания бесконечности пространства $\overline{M}(a, b)$, подобно тому как это делалось в конечномерном случае, следует определить конструкцию склеивания

траекторий с помощью локального диффеоморфизма (в случае двух траекторий)

$$\overline{\mathcal{M}}(a, c; i) \times \mathbf{R}_+ \times \overline{\mathcal{M}}(c, b; j) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(a, b; i + j). \quad (*)$$

Это можно осуществить конструкцией, аналогичной конструкции Таубса из работ [Ta1, Ta2], определяя «почти» автодуальную связность, а затем используя теорему о неявной функции для превращения этой связности в автодуальную.

3.6. Доказательство п. d). Для доказательства независимости гомологий от выбора метрики и возмущения построим морфизм $C(\sigma, \pi) \rightarrow C(\sigma', \pi')$, рассматривая на произведении $\mathbf{R} \times M$ метрику Σ , которая совпадает с метрикой σ при $t < 0$ и с метрикой σ' при $t > 1$. Положим для простоты $\pi = \pi' = 0$ и определим пространство модулей $\mathcal{M}_\Sigma(a, a')$ автодуальных связностей, соединяющих a и a' , где $a, a' \in E^*$. Оно разлагается на пространства $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; i)$, где i обозначает вычет числа $\text{ind}(a) - \text{ind}(a')$.

Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что в общем случае $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; i)$ является ориентируемым многообразием размерности i и что оно компактно, если $i = 0$. Заметим, что $\mathbf{R}$ не действует больше на этом многообразии, так что $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; 0)$ не должно быть пустым. Это позволяет определить $m_\Sigma(a, a') \in \mathbf{Z}$ и морфизм $\varphi_\Sigma: C(\sigma) \rightarrow C(\sigma')$ по формуле $\varphi(a) = \sum_{a'} m_\Sigma(a, a') a'$.

Остается показать, что:

1) Этот морфизм является морфизмом комплексов, т.е. $\partial \circ \varphi_\sigma - \varphi_\sigma \circ \partial' = 0$. Это получается с помощью компактификации многообразия $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; 1)$ с краем

$$\partial \mathcal{M}(a, a'; 1) = \coprod_{b \in E_*^*} \overline{\mathcal{M}}(a, b; 0) \times \mathcal{M}_\Sigma(b, a') - \coprod_{b' \in E_*^*} \mathcal{M}_\Sigma(a, b') \times \overline{\mathcal{M}}(b', a').$$

2) Индуцированный морфизм в гомологиях не зависит от выбора метрики Σ . Для доказательства этого рассмотрим однопараметрическое семейство метрик Σ_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, связывающее Σ и Σ' , и положим

$$\widetilde{\mathcal{M}}(a, a') = \{(A, \lambda) \mid A \in \mathcal{M}_{\Sigma_\lambda}(a, a')\} \subset B(\mathbf{R} \times M) \times [0, 1].$$

Это пространство разлагается на подпространства $\widetilde{\mathcal{M}}(a, a'; i)$. В общем случае $\widetilde{\mathcal{M}}(a, a'; i)$ является ориентированным многообразием размерности $i + 1$, компактным, если $i = -1$. Следовательно, нульмерное многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}(a, a'; -1)$ позволяет определить морфизм $H: C \rightarrow C'$ степени -1 ; кроме того, компактификация пространства

$\widetilde{\mathcal{M}}(a, a'; 0)$ дает цепную гомотопию между морфизмами, ассоциированными с метриками Σ и Σ' .

3) Этот морфизм является изоморфизмом, что следует из формулы композиции $\varphi_{\Sigma_R} = \varphi'_{\Sigma} \varphi_{\Sigma}$ для метрики Σ_R , которая совпадает с метрикой $\Sigma(t+R)$ при $t < 0$ и с метрикой $\Sigma'(t+R)$ при $t > 0$, где R достаточно велико.

Замечания. 1) В конечных размерностях этот метод является новым (так мне кажется): обычно доказывают, что гомологии совпадают с гомологиями многообразия без прямого сравнения двух выборов. Интересно описать указанный морфизм в терминах перестроек (рождения или смерти критических точек, приклеивания ручек). Этот метод, вероятно, применим в гомологиях Новикова.

2) Эта конструкция обобщается так, чтобы кобордизму между двумя целочисленными гомологическими сферами сопоставлялся морфизм из $I_*(M)$ в $I_*(N)$ (см. п. 4.2).

4. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ НА ОТКРЫТЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [At1]

4.1. Пространства модулей. Пусть W^4 — ориентируемое открытое связное многообразие размерности четыре. Будем всегда предполагать, что W^4 является внутренностью компактного многообразия, причем «конец» многообразия W имеет вид $\infty_W =]0, +\infty[\times \partial W$, где ∂W является объединением конечного числа трехмерных многообразий M_j^3 , $1 \leq j \leq N$. Наделим многообразие W метрикой σ_W , которая на конце является произведением метрик. Будем говорить, что это многообразие с *цилиндрическими компонентами конца*. Заметим, что Таубс использовал более общее понятие многообразия с периодическими компонентами конца.

Можно определить пространство $\Pi_W \mathcal{G}(W)$ -эквивариантных возмущений

$$F_\pi: \mathcal{A}(W) \rightarrow \Omega_{\text{ad}}^{2,-}(W)$$

оператора автодуальности, которые продолжают возмущения, уже определенные на компонентах конца. Конструкция аналогична конструкции п. 2.3.

Изучим пространство решений уравнения $F_\pi = 0$ по модулю действия группы $\mathcal{G}(M)$. Чтобы иметь интересную теорию, т. е. найти конечномерные пространства, ограничимся случаем решений конечной энергии. Согласно п. 3.3, для этого надо потребовать, чтобы при подходе к каждой компоненте конца соответствующий путь из связно-

стей стремился к критической точке функционала CS_{π_j} . Определим пространство модулей

$$\mathcal{M}(W, a) = \mathcal{M}(W, a_1, \dots, a_N),$$

где $a_j \in R_{\pi_j}$.

Вариант. Часто концептуально важно разделить конец ∞_W на положительную часть $\infty_W^+ =]0, +\infty[\times \partial^+ W$ и отрицательную часть $\infty_W^- =]-\infty, 0[\times \partial^- W$, как это делалось для $\mathbf{R} \times M$. В частности, если так определенные части края $\partial^- W$ и $\partial^+ W$ непусты и связны, то многообразие $W - \infty_W$ является кобордизмом между этими частями. Тогда очевидным образом мы можем определить пространства $\mathcal{M}(W, a^-, a^+)$. Заметим, что $\partial^- W$ наделено ориентацией, противоположной к привычной.

Впредь будем полагать, что критические множества R_{π_j} являются невырожденными. Напомним, что если многообразия M_j — целочисленные гомологические сферы, то это условие эквивалентно утверждению, что π_j — возмущения общего положения. С другой стороны, требуемое условие включает в себя требование, чтобы многообразия M_j были рациональными гомологическими сферами. Пусть $b_i(W) = \dim H^i(W, \mathbf{R})$ и $b_2^-(W)$ — индекс формы пересечения на когомологиях $H^2(W, \mathbf{R})$, который корректно определен, когда край ∂W является объединением рациональных гомологических сфер.

Предложение. *Предположим, что R_{π_j} — невырожденные критические множества и что одна из связностей a_k неприводима. Тогда для возмущения общего положения π_W , продолжающего набор (π_j) , пространство $\mathcal{M}(W, a)$ разлагается на гладкие ориентируемые многообразия $\mathcal{M}(W, a; i)$ размерностей*

$$\dim \mathcal{M}(W, a; i) = i + 3(N - 1 + b_1(W) - b_2^-(W)) - \sum_{j=1}^N \dim \mathcal{G}_{a_j},$$

где $i \equiv -\sum_{j=1}^N \text{ind}(a_j) \pmod{8}$.

Если различать положительную и отрицательную части конца, то для отыскания формулы для размерности соответствующих многообразий надо вспомнить, что каждое многообразие M_j — рациональная гомологическая сфера, так что $\text{ind}(-M_j, a_j) = 3 - \text{ind}(M_j, a_j)$. В частности, если части края $\partial^- W$ и $\partial^+ W$ непустые и связные, то

$$\dim \mathcal{M}(W, a^-, a^+; i) = 3(b_1(W) - b_2^-(W)) - \dim \mathcal{G}_{a^+}.$$

Обозначение. Обозначим через $\mathcal{M}(W, a)_i$ часть пространства $\mathcal{M}(W, a)$, имеющую размерность i , если она существует.

4.2. Определения инвариантов. Функтор на кобордизмах. Рассуждения, аналогичные рассуждениям разд. 3, приводят к следующей теореме:

Теорема 2. *Предположим, что многообразия M_j являются целочисленными гомологическими сферами. Тогда для пар общего положения (σ_W, π_W) имеют место следующие утверждения:*

(а) Нульмерная часть $\mathcal{M}(W, a)_0$ всегда компактна. Следовательно, мы можем определить целое число $m(W, a) \in \mathbb{Z}$.

(б) Одномерную часть $\mathcal{M}(W, a)_1$ всегда можно компактифицировать как ориентируемое многообразие, присоединяя к ней край

$$\partial \mathcal{M}(W, a)_1 = \coprod_b \mathcal{M}(W, b)_0 \times \overline{\mathcal{M}}(b, a)_0,$$

где $b = (b_j)$ пробегает $\prod_j R_{\pi_j}$ и $\overline{\mathcal{M}}(b, a)_0 = \prod_j \overline{\mathcal{M}}(b_j, a_j)$. Следовательно, элемент $z(W)$ из тензорного произведения групп цепей $\bigotimes_{j=1}^{j=N} C(\pi_j)$, определенный равенством

$$z(W) = \sum_a m(W, a) a_1 \otimes \dots \otimes a_N,$$

является циклом.

(с) Класс гомологий элемента $z(W)$ не зависит от выбора σ_W и π_W .

Таким образом, определен класс гомологий $z(W) \in I_*(\partial W) = \bigotimes_{j=1}^{j=N} I_*(M_j)$. Если гомологии $I_*(M_j)$ не имеют кручения (не известно ни одного примера, где бы это не выполнялось, см. разд. 5), то утверждения этой теоремы сохраняют силу. Если различать положительную и отрицательную части конца, то класс $z(W)$ позволяет определить морфизм $\varphi_W: I_*(\partial^- W) \rightarrow I_*(\partial^+ W)$. Если обе части связны, этот морфизм имеет степень $3(b_1(W) - b_2^-(W))$.

С помощью подходящей склейки получаем такой результат.

Теорема 3. *Отображение $W \rightarrow \varphi_W$ функториально по отношению к композиции кобордизмов: если $W = UV$, то $\varphi_W = \varphi_V \varphi_U$.*

4.3. Связь с замкнутыми многообразиями. Рассмотрим замкнутое односвязное многообразие W^4 , допускающее разложение $W = U \cup_M V$, где M — целочисленная гомологическая сфера. Теорема Фридмана и Тейлора дает такие дифференцируемые разложения для каждого алгебраического разложения формы пересечения. С другой

стороны, теорема Фридмана утверждает, что всегда (при алгебраических предположениях) рассматриваемые многообразия *топологически* разлагаются в связную сумму вдоль сферы. Дональдсон [D4] определил инварианты, которые являются препятствиями к существованию подобных дифференцируемых разложений. Работая в указанном направлении (см. [At1]), он уточнил упомянутые результаты, разложив эти инварианты в гомологиях Флёра многообразия M .

Все инварианты получаются с помощью подсчета числа точек в пространстве модулей размерности нуль. Опишем более простой инвариант, чем тот, который мы обозначали через $z(W)$ (это естественное обобщение на случай многообразия с краем). Для этого напомним, что если $P \rightarrow W$ является $SU(2)$ -расслоением, то пространство $\mathcal{M}(P)$ модулей автодуальных связностей является в общем случае ориентируемым многообразием размерности $n(k) = 8k - 3(1 + b_2^-(W))$ [FU, DK]. Если существует k , такое, что $n(k) = 0$, то это многообразие компактно, что дает $z(W) \in \mathbb{Z}$, и это число является инвариантом многообразия W . В противном случае полагаем $z(W) = 0$.

Ясно, что следующий результат (неявно содержащийся в [F4]), доказывается, как теорема 4: если замкнутое односвязное многообразие W^4 является объединением $U \cup_M V$ вдоль целочисленной гомологической сферы, то имеет место равенство

$$z(W) = \langle z(U), z(V) \rangle,$$

в котором используется двойственность между $I_*(M)$ и $I_*(-M)$.

Вообще, Дональдсон описал способ отыскания пространств модулей размерности нуль, налагая дополнительные условия на связности. В итоге он получил в предположении, что $b_2^-(W)$ нечетно и больше единицы, полиномы $p_{W,d}: H_2(W) \rightarrow \mathbb{Z}$ достаточно высоких степеней d . Для многообразий, краем которых является целочисленная гомологическая сфера, мы получим полином со значениями в $I_*(\partial W)$. Для разложения $W = U \cup_M V$, описанного выше (и при некоторых дополнительных уточняющих условиях), результат, анонсированный в [At1], приобретает вид

$$p_{W,d} = \sum_l p_{W,l} \cdot p_{W,d-l},$$

причем используется разложение $H_2(W) = H_2(U) \oplus H_2(V)$.

5. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ [FS, O1, F5]

5.1. В настоящий момент единственный тип многообразий, для которого были вычислены гомологии Флёра, — это целочисленные гомологические сферы, которые являются расслоениями Зейферта [FS, O1].

Для этих многообразий ограничение функционала Чженя–Саймонса $CS|_{B^*(M)}$ является невырожденным функционалом в смысле Ботта; следовательно, пространство неприводимых плоских связностей $R^*(M)$ есть объединение конечного числа связных компактных многообразий. Кроме того, любая функция Морса f на $R^*(M)$ позволяет построить такое возмущение π , что критические точки функционала $CS_\pi|_{B^*(M)}$ являются невырожденными и биективно соответствуют критическим точкам функции f и существует явная формула, связывающая индексы критических точек двух этих функций. Эта формула имеет вид $\text{ind}_\pi(\alpha) = \text{ind}_f(\alpha) + (\text{четное целое число})$ (доказательство основано на [APS III]). Наконец, можно различными методами показать, что $R^*(M)$ всегда допускает функцию Морса, все критические точки которой имеют четные индексы. Используя совокупность этих результатов, получаем, что группы гомологий $I_*(M)$ сосредоточены в четных размерностях и свободно порождаются критическими точками. Кроме того, все эти группы алгоритмически вычислимы.

5.2. Недавно Флёр [F5] указал метод, который, кажется, дает алгоритм вычисления групп гомологий $I^*(M)$ по аналогии с существующим для инварианта Кассона методом, т. е. задавая многообразие M как результат перестройки по зацеплению в S^3 . Во всяком случае эта конструкция дает новое объяснение, почему эйлерова характеристика четна, т. е. почему инвариант Кассона целочисленный. Исходная идея состоит в том, чтобы описать морфизм $\varphi: I_*(M) \rightarrow I_*(N)$, когда многообразие N получено из M перестройкой по узлу $K \subset M$. Флёр выписал точную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & I^*(M) & \rightarrow I^*(N) \\ & \nwarrow & \searrow \\ & I'_*(\overline{M-K}) & \end{array}$$

В этой диаграмме многообразие $\overline{M-K}$ является единственным многообразием, гомологии которого совпадают с гомологиями многообразия $S^1 \times S^2$ и которое можно получить, беря связную сумму полнотория с дополнением к узлу. Группа $I'_*(\overline{M-K})$ является группой инстантонных гомологий, полученной отправляясь от нетривиального $SO(3)$ -расслоения над $\overline{M-K}$. Конструкция этой группы использует отсутствие приводимых связностей. Она имеет $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -градуировку ($= 2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ в диаграмме); это-то и влечет за собой сохранение четности эйлеровой характеристики.

6. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ГОМОЛОГИИ

Пусть (V, ω) — симплектическое многообразие и $L, L' \subset V$ — лагранжевы подмногообразия. Изучение пересечений $L \cap L'$ мотивировано гипотезами, сформулированными В. И. Арнольдом в 60-е годы (см. [Ar]). В одной из них утверждалось, что если лагранжевы подмногообразия L и L' замкнуты и гамильтоново изотопны, а также выполняются некоторые дополнительные предположения, например, что ограничение класса формы, задающей симплектическую структуру, на относительные гомотопические классы равно нулю (т.е. $[\omega]|_{\pi_2(V, L)} = 0$), то пересечение этих лагранжевых подмногообразий содержит не меньше точек, чем имеется критических точек у любой функции на L : $\#(L \cap L') \geq c(L)$. В частности, Арнольд предположил, что если (P, ω) — компактное симплектическое многообразие и $\varphi \in \text{Diff}(P, \omega)$ — гамильтонов диффеоморфизм, то число неподвижных точек на P , которые находятся во взаимно однозначном соответствии с $\Delta_P \cap (\text{id} \times \varphi)(\Delta_P)$, где подмногообразие $\Delta_P \subset P \times P$ является лагранжевым относительно структуры $\omega \oplus (-\omega)$, больше или равно $c(P)$. В работах Флёра [F2] и [F4] даны наиболее общие результаты, известные на сегодняшний день (ноябрь 1990 г.) по этому вопросу. Его рассмотрения, как мы сейчас увидим, основаны на определении гомологий в соответствии со схемой, упомянутой во введении. Аналогом уравнения автодуальности являются в этом случае псевдоголоморфные кривые Громова [Gr].

6.1. Сначала определим функционал площади, критические точки которого будут принадлежать $L \cap L'$. На самом деле мы увидим, что обычно имеется замкнутая 1-форма, которая при некоторых предположениях допускает первообразную со значениями в $\mathbb{R}$ или в S^1 .

Функциональное пространство $B = B(V, L, L')$ состоит из путей $\gamma: (I, 0, 1) \rightarrow (V, L, L')$, и упомянутая выше 1-форма определяется по формуле $\alpha(\gamma) \cdot \xi = \int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma}) dt$. Касательный вектор $\xi \in T_\gamma B$ есть, конечно, векторное поле на V вдоль пути γ . Полученная 1-форма является замкнутой, потому что локально она имеет первообразную $(\gamma) = \int_R \omega$, где R — некоторый достаточно малый прямоугольник между путями γ_0 и γ . Первообразная корректно определена, так как форма ω замкнута и подмногообразия L, L' являются лагранжевыми. Чтобы выяснить, будет ли форма α точной, заметим, что фундаментальная группа пространства B изоморфна группе относительных гомотопических классов отображений цилиндра $[S^1 \times I, S^1 \times 0, S^1 \times 1; V, L, L']$, причем гомоморфизм $[\alpha]: \pi_1 B \rightarrow \mathbb{R}$ определяется интегрированием формы ω . Отсюда, например, можно вывести, что форма α является точной, когда подмногообразия L

и L' гамильтоново изотопны между собой и ограничение класса формы ω на относительные гомотопические классы равно нулю, т. е. $[\omega]|\pi_2(V, L) = 0$.

Нулями формы α являются постоянные пути в $L \cap L'$. Если пересечение $L \cap L'$ является дискретным, что имеет место, когда подмногообразия L, L' трансверсальны, то существует биекция $\text{crit}(\alpha) \leftrightarrow L \cap L'$. Кроме того, можно всегда наделить симплектическое многообразие (V, ω) почти кэлеровой структурой, т. е. такой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и почти комплексной структурой J , что выполняется равенство $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$. Тогда ясно, что L^2 -градиент имеет вид $\nabla(\gamma) = -J\dot{\gamma}$. Следовательно, градиентная линия $u \rightarrow \gamma_u$ задается уравнением $\partial\gamma_u/\partial u = -J\dot{\gamma}_u$. Его можно переписать в виде $\partial\Gamma/\partial t = J\partial\Gamma/\partial u$, полагая $\gamma_u(t) = \Gamma(u, t)$. Иначе говоря, функция $\Gamma(u + it)$ является псевдоголоморфной функцией на полосе $\mathbb{R} + i[0, 1] \subset \mathbb{C}$.

Индекс нуля формы α , задается, кроме того, спектральным потоком гессиана. В этом случае он выражается в гомотопических терминах: путь между двумя критическими точками приводит к отображению $D^2 \rightarrow V$, которое переводит нижнюю часть края в L , а верхнюю часть в L' . Следовательно, получаем симплектическое расслоение над D^2 , наделенное двумя лагранжевыми подрасслоениями над двумя компонентами края. В этой ситуации можно определить индекс Маслова $[\text{Vi}]$, который является в точности спектральным потоком (см. [F1]).

С помощью конструкции, аналогичной той, которая изложена во введении, Флёр построил при некоторых предположениях гомотопии $I_*(V, L, L')$ [F2, F4]. Например, имеет место

Теорема [F2]. Если лагранжево подмногообразие L гамильтоново изотопно лагранжеву подмногообразию L' и $\pi_2(V, L) = 0$, то гомотопии $I_*(V, L, L')$ корректно определены и изоморфны гомотопиям $H_*(L)$.

Замечание. Флёр анонсировал свой результат для случая, когда кольцо коэффициентов служит $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, но, без сомнения, нетрудно ориентировать пространства модулей и получить этот результат для кольца $\mathbb{Z}$.

6.2. Связь между инстантонными гомотопиями и симплектическими гомотопиями объяснена Атьей в работе [At1]. Если M^3 — трехмерная целочисленная гомотопическая сфера и $M = M_1 \cup_\Sigma M_2$ — разложение Хегора, то, согласно разд. 2.2, $R(M) = R(M_1) \cap R(M_2) \subset R(\Sigma)$. Действительно, из того, что Σ — поверхность, можно заключить, что $R(\Sigma)$ является неособым симплектическим многообразием вблизи неприводимых связностей. Кроме того, пространства $R(M_i)$ являются

лагранжевыми подмногообразиями. Следовательно, инстантонные гомологии порождаются точками пересечения этих двух лагранжевых подмногообразий (для простоты полагаем, что это пересечение трансверсально). Проблема состоит в том, что эти многообразия имеют особенности, а если удалить особенность, то они перестанут быть компактными. Атья исследовал вопрос, можно ли тем не менее так определить симплектические гомологии, чтобы дать новую интерпретацию инстантонных гомологий. Заметим, что функционал Чженя-Саймонса и симплектическое действие имеют одни и те же критические точки, но разные градиентные линии.

ЛИТЕРАТУРА

- [AM] Abkult S., McCarthy J., Casson's invariant for oriented homology three-spheres: an exposition, *Math. Notes* **36**, Princeton U. P., 1990.
- [Ar] Арнольд В. И. Первые шаги симплектической топологии. — УМН, 1986, т. 41, вып. 6, с. 3–18.
- [At1] Atiyah M. F., New invariants of three and four-dimensional manifolds, In mathematical heritage of Hermann Weyl, *Proc. Symp. Pure Math.* **48**, Amer. Math. Soc. (1988), 285–299. [Имеется перевод на русский язык: Атья М. Новые инварианты трех и четырехмерных многообразий. — УМН, 1990, т. 45 (274), вып. 4, с. 3–16.]
- [At2] Atiyah M. F., Topological quantum field theory, *Publ. Math. I.H.E.S.* **70** (1990), 175–186.
- [APS] Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M., Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), 43–69. II: id., **78** (1975), 405–432. III: id., **79** (1976), 71–99.
- [Br] Braam P. J., Floer homology groups for homology three-spheres, *Adv. in Math.* **88** (1991), No. 2, 131–144.
- [CS] Chern S. S., Simons J., Characteristic forms and geometric invariants, *Ann. of Math.* **99** (1974), 48–69.
- [D1] Donaldson S. K., An application of gauge theory to the topology of four-manifolds, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 279–315.
- [D2] Donaldson S. K., Connections, cohomology and the intersection form of four-manifolds, *J. Differential Geom.* **24** (1986), 275–341.
- [D3] Donaldson S. K., The orientation of Yang-Mills moduli spaces and four-manifolds topology, *J. Differential Geom.* **26** (1987), 397–428.
- [D4] Donaldson S. K., Polynomial invariants for smooth four-manifolds, *Topology* **29** (1990), 257–315.
- [DK] Donaldson S. K., Kronheimer P. B., *Geometry of four-manifolds*, Oxford U. P., 1990.
- [F1] Floer A., A relative Morse index for the symplectic action, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 393–407.
- [F2] Floer A., Morse theory for Lagrangian intersections, *J. Differential Geom.* **28** (1988), 513–547.

- [F3] Floer A., An instanton invariant for three-manifolds, *Comm. Math. Phys.* **118** (1988), 215–240.
- [F4] Floer A., Symplectic fixed points and holomorphic spheres, *Comm. Math. Phys.* **120** (1989), 335–356.
- [F5] Floer A., Instanton homology, Dehn surgery, and knots, in *Geometry of Low-Dimensional Manifolds 1* (S. K. Donaldson and C. B. Thomas editors), London Math. Soc. Lect. Notes **150**, Cambridge U. P., 1990.
- [FS] Fintushel R., Stern R., Instanton homology group of Seifert fibered homology three spheres, *Proc. London Math. Soc.* **62** (1991), 109–137.
- [FT] Freedman M., Taylor L., Λ -splitting four-manifolds, *Topology* **16** (1977), 181–184.
- [FU] Freed D. S., Uhlenbeck K., Instantons and four-manifolds, Springer-Verlag, 2^e ed., 1990. [Имеется русский перевод 1-го изд.: Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия. — М.: Мир, 1988.]
- [Fu] Fukaya K., Floer homology oriented three-manifolds, preprint, 1990.
- [Go] Goldman W., The symplectic nature of the fundamental group of surface, *Adv. in Math.* **54** (1984), 200–225.
- [Gr] Gromov M., Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), 307–347.
- [JRS] Jones J. D. S., Rawnsley J. H., Salamon D. A., Instanton homology and the η -invariant, preprint, 1990.
- [K] Kotschick D., Instanton homology (after A. Floer), in *Geometry of Low-Dimensional Manifolds I* (S. K. Donaldson and C. B. Thomas editors), London Math. Soc. Lect. Notes **150**, Cambridge U. P., 1990.
- [LM] Lockhardt R. B., McOwen R. C., Elliptic differential operators on compact manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* IV-12 (1985).
- [Ma] Marin A., Un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension trois (d'après A. Casson), *Sém. Bourbaki* n° 693 (février 1988), *Astérisque* 161–162 (1989), 151–164. [Имеется перевод: Марен А. Новый инвариант для трехмерных гомологических сфер (по Кассону). — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1988 г. — М.: Мир, 1990, с. 145–161.]
- [Mi] Milnor J., *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton U. P., 1965. [Имеется русский перевод Дж. Милнор, Теорема об h -кобордизме, М., Мир. 1968.]
- [N] Новиков С. П. Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса. — ДАН СССР, 1981, т. 260, с. 31–35.
- [O1] Okonek C., On the Floer homology if Seifert-fibered homology three-spheres, preprint, 1990.
- [O2] Okonek C., Instanton invariants and algebraic surfaces, preprint, 1990.
- [S] Smale S., On gradient dynamical systems, *Ann. of Math* **74** (1961), 199–206.
- [Ta1] Taubes C. H., Self-dual connections on non self-dual manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 139–170.
- [Ta2] Taubes C. H., Self-dual connections on four-manifolds with indefinite intersection matrix, *J. Differential Geom.* **19** (1984), 517–560.
- [Ta3] Taubes C. H., Gauge theory on asymptotically periodic four-manifolds, *J. Differential Geom.* **25** (1987), 363–430.

- [Ta4] Taubes C. H., Casson's invariant and gauge theory, J. Differential Geom. **31** (1990), 547–599.
- [Th] Thom R., Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 973–975.
- [U1] Uhlenbeck K., Removable singularities in Yang–Mills fields, Comm. Math. Phys. **83** (1982), 11–29.
- [U2] Uhlenbeck K., Connections with L^p -bounds on curvature, Comm. Math. Phys. **83** (1982), 31–42.
- [Vi] Viterbo C., Intersections de sous-variétés lagrangiens, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens, Bull. Soc. Math. France **115** (1987), No. 3, 361–390.
- [W1] Witten E., Supersymmetry and Morse theory, J. Differential Geom. **17** (1982), 661–692.
- [W2] Witten E., Topological quantum field theory, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 353–386.

КВАДРАТИЧНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И АТТРАКТОР ЭНО¹⁾

Жан-Кристоф Йоккоз

0. ВВЕДЕНИЕ

В статье излагаются (см. разд. 1) три важных результата из теории динамических систем, которые были получены в последние годы. Эти результаты состоят, грубо говоря, в следующем: в некоторых семействах отображений (семействах квадратичных многочленов и рациональных отображений, семействе Эно) при значениях параметров, пробегающих множество положительной меры, имеет место (неравномерное) экспоненциальное растяжение, несмотря на присутствие «критической» сильно сжимающей зоны.

Ниже в разд. 2–4 представлен контекст, в котором имеют место эти результаты.

Эти три результата доказываются одним и тем же методом (хотя доказательства значительно различаются по степени технической трудности). Вначале производится хорошая локализация параметров, чтобы гарантировать, что первые итерации будут сильно растягивающими. Затем доказывается, что с большой вероятностью по параметрам из рассматриваемой области возвращения в критическую зону (которые неизбежны) не настолько точно аппроксимируют критическую точку и не настолько часты, чтобы разрушить приобретенное растяжение. Номера итераций, при которых они происходят, образуют довольно сложную последовательность. Однако принцип доказательства представляется чрезвычайно плодотворным, и, будучи однажды усвоен, он открывает путь к многочисленным важным результатам.

В разд. 5 представлен набросок доказательства наиболее простого из отмеченных результатов. В разд. 6 описаны дополнительные трудности, встречающиеся при доказательстве двух других результатов.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Для $a \in \mathbb{R}$ рассмотрим итерации вещественного квадратичного многочлена

$$P_a(x) = x^2 + a.$$

¹⁾Yoccoz Jean-Christophe. Polynômes quadratiques et attracteur de Hénon. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 734, Astérisque, 201-202-203, 1991, p. 143–165.

При $a \leq \frac{1}{4}$ обозначим через β_a наибольшую неподвижную точку отображения P_a .

Теорема 1 (М. Якобсон) [1–4]. Пусть $1 < \lambda < 2$, $\delta > 0$. Существуют $a_0 \in]-2, \frac{1}{4}[$ и множество $A \subset [-2, a_0]$, обладающие следующими свойствами:

- (a) $|A| \geq (1 - \delta)(a_0 + 2)$;
- (b) пусть $a \in A$; тогда
 - (i) $|DP_a^n(a)| \geq \lambda^n$ для $n \geq 0$;
 - (ii) для почти каждого $x \in [-\beta_a, \beta_a]$ существует $c(x) > 0$, такое, что при всех $n \geq 0$

$$|DP_a^n(x)| \geq c(x) \lambda^n;$$

(iii) существует (единственная) инвариантная относительно многочлена P_a эргодическая мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега.

Свойство (b)(iii) влечет за собой существование положительной функции $h_a \in L^1([-\beta_a, \beta_a])$, такой, что при $-\beta_a \leq s < t \leq \beta_a$ для почти каждого $x \in [-\beta_a, \beta_a]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \# \{n \in [0, N[, P_a^n(x) \in [s, t]\} = \int_s^t h_a(u) du.$$

Свойство (b)(ii) означает, что показатель Ляпунова, а следовательно, и метрическая энтропия многочлена P_a относительно меры из (iii) равны, самое меньшее, $\ln \lambda$.

1.2. Для $d \geq 2$ рассмотрим пространство $\mathcal{R}_d$ несократимых рациональных функций степени d . Это открытое по Зарисскому подмножество пространства $\mathbb{CP}(2d+1)$. Каждая рациональная функция $R \in \mathcal{R}_d$ задает голоморфное отображение пространства $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на себя.

Будем называть рациональную функцию R *строго предпериодической*, если орбита каждой ее критической точки конечна, но не является периодической.

Теорема 2 (М. Рис) [5]. Существует подмножество A пространства $\mathcal{R}_d$ со следующими свойствами:

- (a) A имеет положительную меру (относительно меры Лебега на $\mathcal{R}_d$), и каждая строго предпериодическая рациональная функция является точкой плотности множества A ;
- (b) пусть $R \in A$; тогда

(i) существуют $\lambda = \lambda(R) > 1$ и $c(x) > 0$ для почти каждого $x \in \overline{C}$, такие, что для всех $n \geq 0$

$$\|T_x R^n\| \geq c(x) \lambda^n;$$

(ii) существует инвариантная относительно R эргодическая мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега.

В силу (b)(i) множество Жюлиа отображения $R \in A$ есть $\overline{C}$.

1.3. Семейство Эно [6, 7] определяется формулой

$$P_{a,b}(x, y) = (x^2 + a + y, bx), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

При $b=0$ $P_{a,b}$ вырождается в квадратичный многочлен P_a на $\mathbb{R} \times \{0\}$. При $b \neq 0$ это диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^2$ с постоянным якобианом, равным $-b$.

Для $a \leq \frac{1}{4}(1-b)^2$ обозначим через $\alpha_{a,b}$ наименьшее решение уравнения $x^2 + a + (b-1)x = 0$, а через $p_{a,b} = (\alpha_{a,b}, b\alpha_{a,b})$ — соответствующую неподвижную точку отображения $P_{a,b}$.

Теорема 3 (М. Бенедикс, Л. Карлесон) [8, 9]. Пусть $1 < \lambda < 2$, $\delta > 0$. Существуют $a_0 \in [-2, 0]$, $b_0 > 0$ и множество $A_b \subset [-2, a_0]$ для любого b , $0 < |b| < b_0$, со следующими свойствами:

(a) $|A_b| \geq (1-\delta)(a_0+2)$;

(b) пусть $0 < |b| < b_0$, $a \in A_b$; обозначим через $\Lambda = \Lambda_{a,b}$ замыкание неустойчивого многообразия гиперболической неподвижной точки $p_{a,b}$ отображения $P_{a,b}$; тогда

(i) $\Lambda \subset [-3, 3] \times [-3b, 3b]$;

(ii) существует точка $z_0 \in \Lambda$, орбита которой всюду плотна в Λ , такая, что для любого $n \geq 0$

$$\|DP_{a,b}^n(z_0)\| \geq \lambda^n;$$

(iii) существует непустое открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^2$, такое, что для всех $x \in U$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(P_{a,b}^n(x), \Lambda) = 0.$$

Эта теорема — основное достижение в понимании диссипативных диффеоморфизмов поверхностей (ср. разд. 4). Было бы интересно получить в ее п. (b) более полную информацию типа той, которая получена в пп. (b) теорем 1 и 2.

2. КВАДРАТИЧНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

2.1. При $a > \frac{1}{4}$ имеем $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_a^n(x) = +\infty$ для любого вещественного x .

При $a \leq \frac{1}{4}$ обозначим через K_a множество вещественных x , P_a -орбиты которых ограничены. Тогда

$$K_a = \left\{ \bigcap_{n \geq 0} P_a^{-n}([-\beta_a, \beta_a]) \right\}.$$

Если $a < -2$, то $P_a(0) = a < -\beta_a$. Легко видеть, что существует гомеоморфизм h_a пространства $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ на K_a , сопрягающий стандартный сдвиг Бернулли σ с $P_a|_{K_a}$. Канторово множество K_a *растягивается под действием* отображения P_a : существуют $c > 0$, $\lambda > 1$, такие, что для любых $x \in K_a$, $n \geq 0$

$$|DP_a^n(x)| \geq c\lambda^n.$$

Хаусдорфова размерность множества K_a аналитически зависит от $a \in]-\infty, -2[$ [10]. В этом случае все аспекты динамики отображения P_a очень хорошо контролируются.

2.2. При $a \in [-2, \frac{1}{4}] = J$ имеем $K_a = [-\beta_a, \beta_a]$. Обозначим через $\mathcal{D}$ счетное дискретное множество значений a , при которых критическая точка 0 периодична.

Пусть $a_0 \in \mathcal{D}$ и n — период точки 0 относительно P_{a_0} . Существуют открытый интервал $I(a_0) =]a_0^-, a_0^+[\subset J$, содержащий a_0 , и аналитическое отображение $\alpha^{a_0}: I(a_0) \rightarrow \mathbb{R}$, обладающие следующими свойствами:

- (i) для $a \in I(a_0)$ точка $\alpha^{a_0}(a)$ является периодической точкой отображения P_a с периодом n ;
- (ii) $\alpha^{a_0}(a_0) = 0$;
- (iii) отображение $a \rightarrow DP_a^n(\alpha^{a_0}(a))$ — возрастающий аналитический диффеоморфизм, отображающий $I(a_0)$ на $] -1, 1[$.

Для $a \in I(a_0)$ положим

$$W_a = \left\{ x \in \mathbb{R}, \lim_{k \rightarrow \infty} P_a^{kn}(x) = \alpha^{a_0}(a) \right\},$$

$$V_a = \bigcup_{i=0}^{n-1} P_a^{-i}(W_a), \quad J_a = K_a - V_a.$$

Множества W_a , V_a открыты. Точки 0 и $\alpha^{a_0}(a)$ принадлежат одной и той же связной компоненте множества W_a . Компакт K_a растягивается при отображении P_a .

В окрестности периодической орбиты точки $\alpha^{a_0}(a)$ в семействе P_a происходит бифуркация типа флип (удвоение периода) при прохождении через значение параметра a_0^- и типа флип или седлоузел при прохождении через a_0^+ .

2.3. Основная гипотеза о вещественных квадратичных многочленах состоит в следующем:

Гипотеза. Открытое множество $\bigcup_{a_0 \in \mathcal{D}} I(a_0) = \mathcal{H}$ всюду плотно в J .

При $a \in J$, $a \notin \bigcup_{a_0 \in \mathcal{D}} \overline{I(a_0)}$, все периодические орбиты отображения P_a являются отталкивающими. Однако очевидно, что множество K_a , содержащее критическую точку, не может растягиваться отображением P_a в смысле п. 2.1.

Теорема Якобсона показывает, что $\mathcal{H}$ не является подмножеством полной меры Лебега в $[-2, \frac{1}{4}]$.

Говорят, что P_a для $a \in J$, $a \notin \bigcup_{a_0 \in \mathcal{D}} \overline{I(a_0)}$, удовлетворяет условию Мисюревича, если положительная полуорбита $(P_a^n(0))_{n \geq 1}$ не накапливается к нулю. В этом случае многочлен P_a удовлетворяет утверждению (b) теоремы 1 [11] для некоторого $\lambda > 1$. Однако P_a , как правило, не удовлетворяет условию Мисюревича.

2.4. Пусть $a_0 \in \mathcal{D}$ и n — период точки 0 относительно P_{a_0} . Существуют вещественное число $\tilde{a}_0^- < a_0^-$, непрерывное отображение $\beta_{a_0}: J \rightarrow \mathbb{R}^+$ и гомеоморфизм $\phi_{a_0}: J \rightarrow J(a_0) = [\tilde{a}_0^-, a_0^+]$, такие, что для каждого $a \in J$ ограничения $P_a|_{K_a}$ и $P_{\phi_{a_0}(a)}|_{[-\beta_{a_0}(a), \beta_{a_0}(a)]}$ топологически сопряжены [35]. Число $\tilde{a}_0^-$ определяется этими свойствами однозначно.

Значение параметра $a \in J(a_0)$ называется n -ренормализуемым. Значение параметра a называется бесконечно ренормализуемым (это обозначается так: $a \in R^\infty$), если оно является n -ренормализуемым для сколь угодно больших целых n . Оно называется бесконечно ренормализуемым постоянного типа (обозначение: $a \in R_c^\infty$), если оно n_k -ренормализуемо для некоторой последовательности $(n_k)_{k \geq 0}$ целых чисел, таких, что $\sup_{k \geq 0} n_{k+1} n_k^{-1} < +\infty$.

По результатам работ Сулливана [12, 13] при $a \in R_c^\infty$ динамика отображения P_a хорошо контролируется. В частности, каждая точка из R_c^∞ примыкает к $\mathcal{H}$.

С другой стороны, известно [14], что $\overline{\mathcal{H}} \cup R^\infty = J$. Таким образом, чтобы доказать гипотезу п. 2.3, осталось показать, что все связные компоненты множества R^∞ суть точки.

Представляют интерес следующие вопросы. Пусть

$$\mathcal{A} = J - R^\infty \cup \bigcup_{a_0 \in \mathcal{D}} \overline{I(a_0)}.$$

В силу теоремы 1 мера множества $\mathcal{A}$ положительна. Верно ли, что для почти всякого $a \in \mathcal{A}$ существует инвариантная относительно отобра-

жения P_a мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, или что $\liminf_{n \rightarrow +\infty} |DP_a^n(x)|^{1/n} > 1$ для почти всех x ?

[Впрочем, имеется гипотеза, что R^∞ является множеством меры нуль. Ее справедливость, очевидно, влечет за собой справедливость гипотезы 2.3.]

2.5. Теорема 1 распространяется на более общие семейства эндоморфизмов, чем квадратичное семейство [15].

Проводя работу в другом направлении, М. Бенедикс и Л.-С. Янг доказали вариант теоремы 1 для итераций случайных возмущений квадратичного многочлена [16].

3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. Пусть $d \geq 2$ и $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ — (несократимая) рациональная функция степени d . Множество Жюлиа J_R — это дополнение в $\overline{\mathbb{C}}$ к наибольшему открытому множеству U_R , на котором семейство $(R^n)_{n \geq 0}$ нормально.

Это непустой вполне инвариантный ($R^{-1}(J_R) = J_R$) компакт, либо совпадающий с $\overline{\mathbb{C}}$, либо не имеющий внутренних точек. Множество отталкивающих периодических точек отображения R всюду плотно в нем.

Для итераций отображения R множество Жюлиа играет роль предельного множества клейновой группы. Напомним следующую гипотезу:

Гипотеза 1. Если $J_R \neq \overline{\mathbb{C}}$, то J_R — множество меры нуль.¹⁾

3.2. Рациональная функция $R \in \mathcal{R}_d$ называется *гиперболической*, если никакая ее критическая точка не принадлежит J_R . Тогда открытое множество U_R состоит из бассейнов притягивающих периодических орбит отображения R (число этих орбит конечно и отлично от нуля). Множество Жюлиа *растягивается* отображением R (ср. п. 2.1) и, следовательно, имеет в этом случае меру нуль.

Об описании связанных компонент множества U_R , когда R не обязательно гиперболическа, см. [17, 18].

Рациональная функция R_0 называется *структурно устойчивой*, если в $\mathcal{R}_d$ существует ее окрестность $\mathcal{U}$, такая, что всякая функция R из $\mathcal{U}$ топологически сопряжена с R_0 .

Рациональная функция R_0 называется *J-устойчивой* (или Ω -устойчивой), если в $\mathcal{R}_d$ существует ее окрестность $\mathcal{U}$, такая, что если

¹⁾В начале 90-х гг к этой гипотезе Т. Новияким и С. ван Стриеном были построены полиномиальные контрпримеры. — Прим. перев.

$R \in \mathcal{U}$, то R_0 и R топологически сопряжены в окрестностях своих множеств Жюлиа.

Гиперболическая рациональная функция является J -устойчивой. С этим связана следующая важная

Гипотеза 2. *Всякая J -устойчивая рациональная функция гиперболична.*

Известно, что для всякой J -устойчивой рациональной функции R , не являющейся гиперболической, $J_R = \overline{C}$.

3.3. Предыдущая гипотеза интересна в связи со следующим фундаментальным результатом Манье–Сада–Сулливана [19]: структурно (или J -)устойчивые рациональные функции образуют открытое всюду плотное подмножество в $\mathcal{R}_d$.

Из теоремы М. Рис следует, что рациональные функции, не являющиеся структурно устойчивыми, образуют в $\mathcal{R}_d$ подмножество положительной меры. Можно рискнуть задать следующий (оптимистический) вопрос: верно ли, что почти всякая рациональная функция $R \in \mathcal{R}_d$ либо структурно устойчива, либо удовлетворяет утверждению (b) теоремы 2?

3.4. На самом деле М. Рис получила следующее более точное утверждение (существует также его версия, аналогичная теореме Манье–Сада–Сулливана). Пусть $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — голоморфное семейство рациональных функций. Предположим, что существует $\lambda_0 \in \Lambda$, такое, что R_{λ_0} строго предпериодична и что семейство (R_λ) удовлетворяет следующему условию трансверсальности в λ_0 :

Пусть $c(\lambda)$ — семейство критических точек функции R_λ и $n, k > 0$ — целые числа, такие, что $R_{\lambda_0}^k(c(\lambda_0)) = R_{\lambda_0}^{k+n}(c(\lambda_0))$; тогда

$$D_\lambda(R_\lambda^k(c(\lambda)) - R_\lambda^{k+n}(c(\lambda)))|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0.$$

В этом случае λ_0 — точка плотности подмножества $A \subset \Lambda$ положительной меры, состоящего из параметров $\lambda \in \Lambda$, для которых R_λ удовлетворяет утверждению (b) теоремы 2.

3.5. Форнесс и Сибони [20] доказали вариант теоремы 2 для итерации случайных возмущений рациональной функции.

4. СЕМЕЙСТВО ЭНО. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ

Мы показываем роль семейства Эно (и его обобщений) в изучении полиномиальных диффеоморфизмов пространства $\mathbf{R}^2$ и объясняем, как результат Бенедикса–Карлесона (обобщенный Морой–Вианой) вписывается в понимание динамики (диссипативных) диффеоморфизмов поверхностей.

4.1. Полиномиальные диффеоморфизмы пространства $\mathbf{R}^2$ [21]. Обозначим через G группу полиномиальных диффеоморфизмов пространства $\mathbf{R}^2$, через A — подгруппу его аффинных автоморфизмов и через S — (разрешимую) подгруппу, состоящую из диффеоморфизмов вида

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + p(y), \beta y + \gamma),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, $\gamma \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}[x]$.

Группа G изоморфна амальгамированному произведению групп A и S вдоль $A \cap S$ [22].

Обобщенным отображением Эно называется полиномиальный диффеоморфизм вида

$$(x, y) \mapsto (p(x) + y, bx),$$

где $b \in \mathbf{R}^*$, $p \in \mathbf{R}[x]$, $\deg p \geq 2$.

Теорема (Фридленд–Милнор). *Всякий полиномиальный диффеоморфизм пространства $\mathbf{R}^2$ сопряжен в G*

- либо с элементом из $A \cup S$,
- либо с композицией $H_1 \circ \dots \circ H_m$ ($m \geq 1$) обобщенных отображений Эно $H_i(x, y) = (y + p_i(x), b_i x)$.

Динамика диффеоморфизмов из $A \cup S$ элементарна и не представляет большого интереса. Во втором случае композиция $H_1 \circ \dots \circ H_m$ по существу единственна: в частности, m и степени d_i многочленов p_i определены однозначно. Изучение динамики семейства Эно доставляет, таким образом, первый нетривиальный случай динамики полиномиальных диффеоморфизмов пространства $\mathbf{R}^2$; общий случай состоит в циклической итерации конечного числа обобщенных отображений Эно.

4.2. Гиперболичность [23, 24]. Пусть M^n — компактное риманово многообразие класса C^∞ и $f: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм класса C^∞ .

Компактное подмножество $K \subset M$, инвариантное относительно f , называется *гиперболическим*, если существуют $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ и разложение $TM|_K = E^s \oplus E^u$ в прямую сумму подрасслоений, инвариантных относительно Tf , такие, что

$$\|Tf^n|_{E^s}\| \leq c\lambda^n, \quad \|Tf^{-n}|_{E^u}\| \leq c\lambda^n$$

для любого $n \geq 0$. Тогда для всех $x \in K$ устойчивые многообразия $W^s(x) = \{y \in M, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n y, f^n x) = 0\}$ и неустойчивые многообразия $W^u(x) = \{y \in M, \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n y, f^n x) = 0\}$ являются образами пространств E_x^s , E_x^u соответственно при инъективных иммерсиях.

Гиперболическое компактное инвариантное подмножество $K \subset M$ называется *базисным множеством*, если $f|_K$ имеет всюду плотную орбиту и существует окрестность U множества K , такая, что $K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$. Тогда периодические точки диффеоморфизма $f|_K$ всюду плотны в K .

Для базисного множества K положим

$$W^s(K) = \left\{ y \in M, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n y, K) = 0 \right\},$$

$$W^u(K) = \left\{ y \in M, \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n y, K) = 0 \right\}.$$

Имеем $W^s(K) = \bigcup_{x \in K} W^s(x)$, $W^u(K) = \bigcup_{x \in K} W^u(x)$. Будем говорить, что K — *гиперболический аттрактор*, если множество $W^s(K)$ открыто.

Цепно-рекуррентное множество $C(f)$ диффеоморфизма f состоит из точек x , для каждой из которых при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная последовательность $x = x_0, x_1, \dots, x_n = x$ ($n \geq 1$) с $d(f(x_l), x_{l+1}) < \varepsilon$ для $0 \leq l < n$. Это наименьшее компактное инвариантное множество, в котором имеют место все явления рекуррентности диффеоморфизма f .

Говорят, что f *C-гиперболичесен*, если $C(f)$ гиперболично. В этом случае $C(f)$ допускает разбиение (называемое спектральным) на непересекающиеся базисные множества $C_1, \dots, C_r$, такие, что $W^s(C_i) \cap W^u(C_j) = \emptyset$ при $i < j$ и $W^u(C_i) \cap W^s(C_i) = C_i$.

C -гиперболический диффеоморфизм f обладает свойством *сильной трансверсальности*, если $W^s(x)$ и $W^u(y)$ трансверсальны при всех $x, y \in C(f)$.

Если f C -гиперболичесен, то он C -устойчив в C^1 : для любого диффеоморфизма g , C^1 -близкого к f , существует гомеоморфизм $h: C(f) \rightarrow C(g) \subset M$, близкий к естественному вложению, сопрягающий $f|_{C(f)}$ с $g|_{C(g)}$.

Если, кроме того, f обладает свойством сильной трансверсальности, то f C^1 -структурно устойчив: всякий диффеоморфизм, C^1 -близкий к f , топологически сопряжен с ним [25, 26].

Замечательный результат Манье [27] утверждает, что, обратно, C^1 -структурная устойчивость влечет за собой C -гиперболичность и сильную трансверсальность. Это было обобщено Палисом [28] (C^1 - C -устойчивость влечет за собой C -гиперболичность). Для C^2 -структурной устойчивости аналогичный вопрос открыт.

4.3. Гомоклинические бифуркации. Предположим, что M — компактная поверхность. Уже в этом случае практически неизвестны методы, позволяющие изучать динамику более общего диффеоморфизма многообразия M . Например, неизвестно, является ли всюду

плотным в $\text{Diff}^\infty(T^2)$ множество диффеоморфизмов, имеющих хотя бы одну периодическую орбиту: в своей простейшей форме это задача, решаемая «леммой о замыкании»; единственные известные общие результаты относятся к C^1 -топологии (Пью [29]).

Для решения этой задачи (и ряда других задач) имеется следующий подход, представляющий плодотворным. Рассмотрим гладкие семейства $(f_t)_{t \in [-1, 1]}$ диффеоморфизмов, таких, что f_t C -гиперболичесен при $t < 0$, а f_0 — нет. Изучение динамики диффеоморфизмов f_t при $0 \leq t \ll 1$ позволило установить новые очень интересные явления. По-видимому, наиболее интересный способ прохождения границы открытого множества, образованного C -гиперболическими диффеоморфизмами, состоит в прохождении *гомоклической бифуркации*. Диффеоморфизм f_0 представляет *гомоклическое касание*, т.е. квадратично-касательное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболической периодической точки. Это пересечение, не существовавшее при $t < 0$, в случае общего положения разворачивается с ростом t (см. рис. 1).

В связи с этим Палис сформулировал следующую гипотезу:

Гипотеза. *Всякий диффеоморфизм компактной поверхности M , не являющийся C -гиперболическим, может быть продеформирован сколь угодно малым возмущением (в C^∞ -топологии) так, чтобы возникло гомоклическое касание.*

С гомоклическими бифуркациями нет полной ясности, за исключением диссипативного случая: например, в простейшем случае, когда касание возникает для гиперболической *неподвижной* точки, требуется, чтобы $|\text{Det } T_p f_0| < 1$.

Приведем некоторые полученные результаты о динамике диффеоморфизмов f_t ($0 < t \ll 1$) для типичных семейств:

- для любого $\varepsilon > 0$ существует нетривиальный интервал $J \subset [0, \varepsilon]$ и G_δ -плотное подмножество $R \subset J$, такие, что для каждого $t \in R$ диффеоморфизм f_t имеет бесконечное множество притягивающих периодических орбит (Ньюхаус [30, 31]);
- если хаусдорфова размерность базисного множества, содержащего точку p , меньше 1, то с большой вероятностью по $t \in [0, \varepsilon]$ диффеоморфизм f_t обладает хорошими свойствами гиперболичности [32, 33].

В этом контексте семейство Эно (или, скорее, семейства «типа Эно») играет следующую роль (см. рис. 2). Пусть q — точка касания для f_0 и N — достаточно большое целое число. Нас интересуют точки из окрестности точки q , возвращающиеся в эту окрестность первый раз за N итераций диффеоморфизма f_t . Вычисления показывают, что в подходящей системе координат для значений параметра

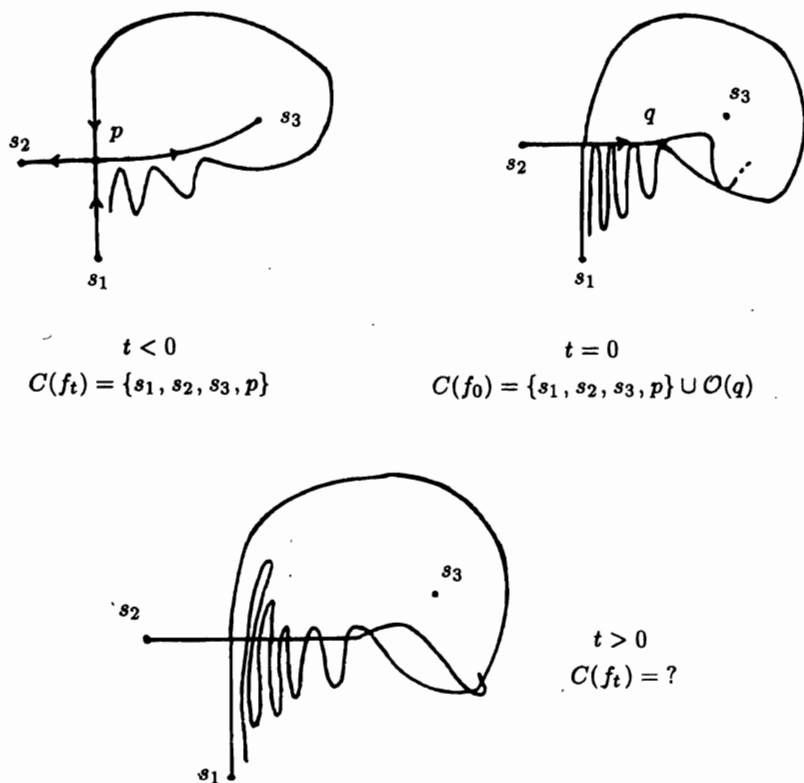


Рис. 1

$t \in [t_N^-, t_N^+]$ отображение возвращения $F_t = f_t^N$ обладает свойствами, похожими на свойства отображений Эно $P_{a,b}$ (параметр a выражается через t с помощью аффинного преобразования, а b — по существу константа порядка $[\text{Det}(T_p)]^N$). (Точное определение семейств «типа Эно» см. в [9].)

Мора и Виана [9] обобщили результат Бенедикса и Карлесона: они также доказали, что, с положительной вероятностью по параметру $t \in [0, \varepsilon]$, диффеоморфизм f_t обладает «странным аттрактором» — компактным инвариантным подмножеством Λ , обладающим всюду плотной орбитой $\mathcal{O}(z_0)$ с положительным показателем Ляпунова ($\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|T_{z_0} f^n\| > 0$), бассейн притяжения $W^s(\Lambda) = \{y \in M, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(y), \Lambda) = 0\}$ которого имеет непустую внутренность. Следует заметить, что Λ не может быть гипер-

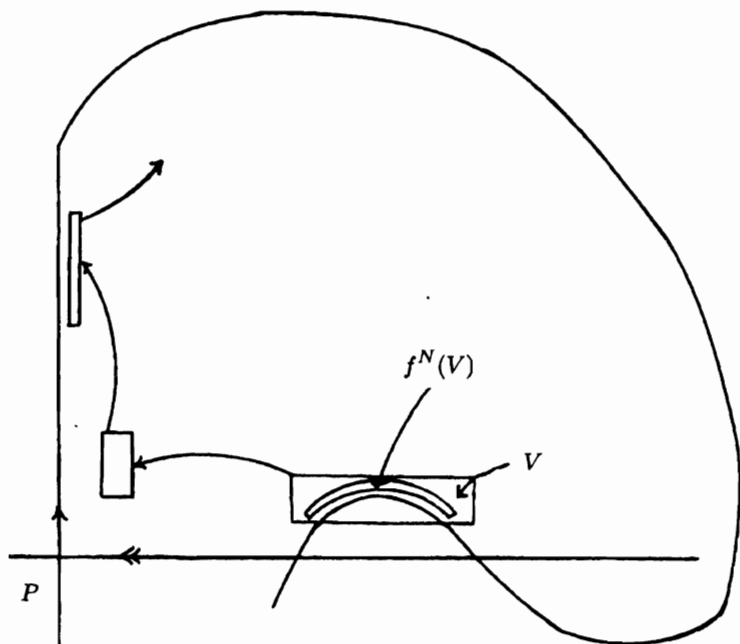


Рис. 2

болическим аттрактором в смысле п. 4.1 (ср. [34]). Доказательство Моры и Вианы, похожее на доказательство Бенедикса–Карлесона, в своем настоящем виде, к сожалению, не дает большой информации о геометрии множества Λ .

5. НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

5.1. Приведение к нормальной форме. Линейная замена переменной и замена параметра преобразуют семейство $(P_a)_{a \in [-2, 0]}$ в $(\tilde{P}_s)_{s \in [0, 1]}$:

$$\tilde{P}_s(x) = 2x^2 - 1 + s(1 - x^2).$$

Обозначим через h гомеоморфизм $x \mapsto \sin \frac{\pi}{2} x$ отрезка $[-1, 1]$ на себя. Положим

$$Q_s = h^{-1} \circ \tilde{P}_s \circ h, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Имеем

$$Q_0(x) = 2|x| - 1, \quad \sin \frac{\pi}{2} Q_s(x) = \sin \frac{\pi}{2} Q_0(x) + s \cos^2 \frac{\pi}{2} x.$$

Нас интересуют очень малые значения параметра $s > 0$. Вне некоторой окрестности нуля

$$Q_s(x) = Q_0(x) + O(s)$$

в C^∞ -топологии. В окрестности нуля

$$(1 + Q_s(x))^2 = 4x^2 + \frac{8s}{\pi^2} + O(sx^2) + O(x^4).$$

Кроме того, $Q_s(1) = 1$, $DQ_s(1) = 2 + O(s)$.

5.2. Обозначим через $\alpha(s)$ неподвижную точку отображения Q_s , отличную от 1. Имеем $\alpha(s) = -\frac{1}{3} + O(s)$. Для малого s критическое значение $c(s)$ отображения Q_s принадлежит интервалу $[-1, \alpha(s)]$.

Предположим, что $Q_s^n(0) \neq \alpha(s)$ при любом $n \geq 0$. Тем самым исключается счетное множество значений параметра s .

Положим $J^{(0)} = [\alpha(s), -\alpha(s)]$. Для $n \geq 1$ обозначим через $J^{(n)}$, $J^{(-n)}$ две компоненты прообраза множества $J^{(n-1)}$ при отображении Q_s , причем так, чтобы $J^{(n)} \subset [-\alpha(s), 1]$. Имеем

$$]-1, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J^{(n)},$$

и внутренности этих интервалов не пересекаются.

Пусть $n \geq 2$. Значения параметра s , для которых $c(s) \in J^{(-n)}$, образуют интервал, который будет обозначаться $K^{(n)}$. Фиксируем целое n_0 , которое предполагается достаточно большим, и будем рассматривать только значения параметра из $K^{(n_0)}$. Положим $J_0 = J_1 = J^{(0)}$. Для $2 \leq n \leq n_0$ обозначим через $J_n^{(-1)}$, $J_n^{(1)}$ две компоненты множества $Q_s^{-1}(J^{(1-n)})$ так, чтобы $J_n^{(1)} \subset [0, -\alpha(s)]$. Положим также

$$J_n = J_n^{(0)} = Q_s^{-1} \left(\bigcup_{m > n} J_0^{(1-m)} \right)$$

Таким образом, для $2 \geq n \geq n_0$

$$J_{n-1} = J_n^{(-1)} \cup J_n^{(0)} \cup J_n^{(1)},$$

причем внутренности трех последних интервалов не пересекаются. Положим $I_{n_0} = I_{n_0+1} = J^{(-n_0)}$, $g_{n_0} = g_{n_0+1} = (Q_s^{n_0}|_{I_{n_0}})^{-1}$. Для $2 \leq n \leq n_0$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ положим также

$$\bar{g}_n^{(\varepsilon)} = (Q_s^n|_{J_n^{(\varepsilon)}})^{-1}.$$

5.3. Критические и остаточные ветви обратных отображений. Мы определим убывающую последовательность интервалов J_k ,

содержащих 0, и рассмотрим некоторые ветви многозначных отображений $(Q_s^n)^{-1}$, определенные на интервале J_k , образ которых либо содержит критическое значение (критические ветви), либо содержится в J_0 (остаточные ветви); порядок такой ветви равен $n + k$.

Для $2 \leq n \leq n_0$ остаточные ветви порядка n суть $\bar{g}_n^{(-1)}$ и $\bar{g}_n^{(1)}$. Это диффеоморфизмы интервала J_0 на $J_n^{(-1)}$ и $J_n^{(1)}$ соответственно.

Критическая ветвь порядка n_0 (или $n_0 + 1$) есть $g_{n_0} = g_{n_0+1}$. Это диффеоморфизм интервала $J_0 = J_1$ на $I_{n_0} = I_{n_0+1}$.

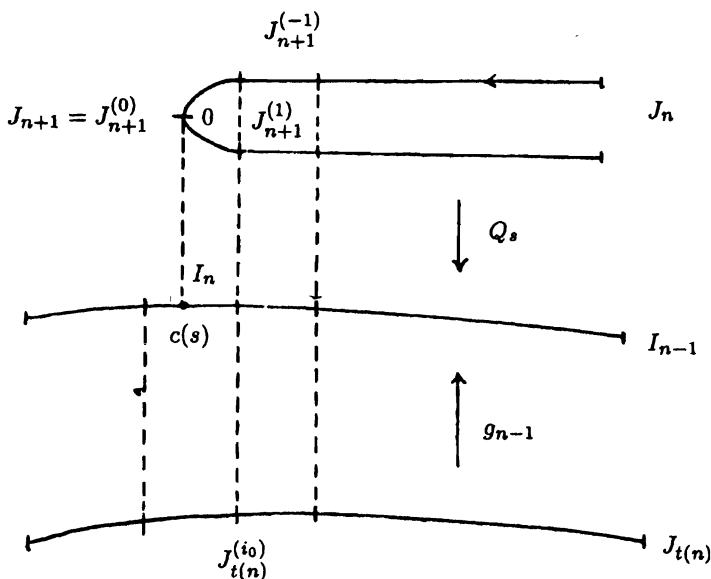


Рис. 3

Теперь определим по индукции критические и остаточные ветви порядка $n > n_0 + 1$. Они, а вместе с ними и функция $t: \{n \in \mathbb{N}, n > n_0\} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющая неравенству $t(n) < n$, определяются следующими свойствами (см. рис. 3):

1. Критическая ветвь порядка $n - 1$ ($\geq n_0$), обозначаемая через g_{n-1} , есть диффеоморфизм интервала $J_{t(n)}$ на I_{n-1} .

2. Имеется разбиение на интервалы с непересекающимися внутренностями:

$$J_n = \bigcup_{-k_{n+1} \leq i \leq k_{n+1}} J_{n+1}^{(i)}$$

с $k_{n+1} \geq 0$; положим $J_{n+1} = J_{n+1}^{(0)}$. Остаточные ветви порядка $n + 1$

суть диффеоморфизмы $\bar{g}_{n+1}^{(i)}$ ($0 < |i| \leq k_{n+1}$) интервала $J_{t(n+1,i)}$ (для некоторого целого $t(n+1, i) \in [0, n]$ на $J_{n+1}^{(i)}$).

3. Критическое значение $c(s)$ принадлежит I_{n-1} . Пусть $i_0 \in [-k_{t(n)+1}, k_{t(n)+1}]$ — целое число, такое, что $c(s) \in g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(i_0)})$. Положим $I_n = g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(i_0)})$, $J_{n+1}^{(0)} = Q_s^{-1}(I_n)$.

При $i_0 = 0$ имеем $g_n = g_{n-1}|_{J_{t(n)+1}}$ и $t(n+1) = t(n) + 1$.

При $i_0 \neq 0$ имеем $g_n = g_{n-1} \circ \bar{g}_{t(n)+1}^{(i_0)}$ и $t(n+1) = t(n) + 1, i_0$.

4. Положим $\theta = 1$ или -1 в зависимости от того, сохраняет g_{n-1} ориентацию или обращает. Имеем $k_{n+1} = k_{t(n)+1} - \theta i_0$. При $0 < i \leq k_{n+1}$ интервалы $J_{n+1}^{(-i)}$ и $J_{n+1}^{(i)}$ суть две компоненты множества $Q_s^{-1}(g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(j)}))$, $j = i_0 + \theta i$, причем $J_{n+1}^{(i)} \subset [0, 1]$. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{g}_{n+1}^{(\pm i)} &= (Q_s^{-1})^{\pm} \circ g_{n+1} \circ \bar{g}_{t(n)+1}^{(j)}, \quad t(n+1, \pm i) = t(n+1, j), \quad \text{если } j \neq 0, \\ \bar{g}_{n+1}^{(\pm i)} &= (Q_s^{-1})^{\pm} \circ g_{n-1}|_{J_{t(n)+1}}, \quad t(n+1, \pm i) = t(n) + 1, \quad \text{если } j = 0. \end{aligned}$$

5.4. Ограничения на параметр. Будем предполагать, что параметр s обладает следующим свойством: существует последовательность $n_0 < n_1 < \dots$ целых чисел, такая, что

- (i) $n_k + 2 \leq n_{k+1} \leq n_k + (\ln n_k)^3$;
- (ii) для любого $k \geq 1$

$$\sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ n_l - n_{l-1} > n_0/2}} (n_l - n_{l-1}) < 2^{-\sqrt{n_0}} n_k;$$

- (iii) $t(n_k + 1) = 0$ при всех $k \geq 0$;
- (iv) положим $L_k = g_{n_k}^{-1}(I_{n_{k+1}})$ и обозначим через g ветвь отображения $(Q_s^{n_{k+1}-n_k})^{-1}$, являющуюся диффеоморфизмом интервала J_0 на L_k (имеем $g_{n_{k+1}} = g_{n_k} \circ g$); тогда

$$|D \ln Dg(x)| < 1/100 \quad \text{при всех } x \in J_0.$$

[Заметим, что это условие автоматически выполнено при достаточно большом n_0 , когда $n_{k+1} - n_k \leq n_0/2$.]

5.5. Регулярные ветви. Допустимой ветвью назовем композицию вида

$$g = \bar{g}_{m_r}^{(i_r)} \circ \dots \circ \bar{g}_{m_1}^{(i_1)} \circ \bar{g}_{m_0}^{(i_0)},$$

такую, что $t(m_0, i_0) = 0$, $t(m_l, i_l) < m_{l-1}$ для $1 \leq l \leq r$: композиция этих отображений корректно определена и g диффеоморфно отображает интервал J_0 на его образ. Будем говорить, что g *регулярна*,

если для любого $x \in J_0$

$$|D \ln Dg(x)| < 1/100.$$

Порядок ветви g равен $\sum_{i=0}^r (m_i - t(m_i, i_i))$.

Лемма. Пусть параметр удовлетворяет предположениям из п. 5.4 до порядка n_k . Пусть m — целое число из отрезка $[4, n_k]$. Множество точек из J_0 , не принадлежащих образу никакой регулярной ветви порядка, не превосходящего m , имеет меру Лебега, не превосходящую $2^{-\sqrt{m}}$.

[Заметим, что при достаточно большом n_0 ветви $\bar{g}_n^{(\epsilon)}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, $2 \leq n \leq n_0/2$, регулярны.]

5.6. Конец доказательства. В силу предыдущей леммы для почти всякой точки $x \in J_0$ можно построить последовательность $m_0(x) = 0 < m_1(x) < \dots < m_k(x) < \dots$ целых чисел, обладающих следующими свойствами при достаточно большом k (в зависимости от x):

$$(i) \quad m_k(x) + 2 \leq m_{k+1}(x) \leq m_k(x) + (\ln m_k(x))^3;$$

$$(ii) \quad \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ m_i(x) - m_{i-1}(x) > n_0/2}} (m_i(x) - m_{i-1}(x)) < 2^{-\sqrt{n_0}/2} m_k(x);$$

(iii) для каждого $r \geq 0$ точка $Q_s^{m_r(x)}(x)$ принадлежит образу некоторой регулярной ветви порядка $m_{r+1}(x) - m_r(x)$.

Пусть теперь $1 < \lambda < 2$. При достаточно большом n_0 для любого $y \in J_0$ регулярные ветви $\bar{g}_n^{(\epsilon)}$, $2 \leq n \leq n_0/2$, удовлетворяют неравенству

$$|D\bar{g}_n^{(\epsilon)}(y)| \leq (\sqrt{2}\lambda)^{-n}.$$

Из сформулированных выше условий (i), (ii) следует, что при достаточно большом $n_0 = n_0(\lambda)$ для почти любого $x \in J_0$ и достаточно большого m (зависящего от x)

$$|DQ_s^m(x)| \geq \lambda^m.$$

Остальные утверждения теоремы 1 (в частности, тот факт, что множество значений параметра, удовлетворяющих условиям из п. 5.4, имеет положительную меру Лебега) получаются при небольшой дополнительной работе из оценки искажения, которую дает лемма из п. 5.5.

6. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМ 2 И 3

6.1. Доказательства теорем 1 и 2 не имеют принципиальных различий. Следует заменить рассуждения, касающиеся вещественной пе-

ременной (основанные на порядке в $\mathbb{R}$), на аналогичные рассуждения, касающиеся комплексной переменной (существенно использующие теорию однолистных функций). Но при этом следует одновременно контролировать орбиты многочисленных критических точек, что несколько осложняет комбинаторную часть доказательства.

6.2. Ситуация, рассматриваемая в теореме 3, представляет значительные дополнительные трудности по сравнению с теоремами 1 и 2.

6.2.1. «Критические точки». С помощью подходящего выбора параметров мы хотим избавиться от точек (принадлежащих неустойчивому многообразию неподвижной точки $p_{a,b}$), которые возвращаются в свою малую окрестность слишком быстро или слишком часто; присутствие таких точек повлекло бы за собой наличие притягивающей периодической орбиты, чего хотелось бы избежать.

В условиях теорем 1 и 2 эти точки суть просто критические точки рассматриваемого отображения и, таким образом, *a priori* определены локальными свойствами соответствующих отображений.

Поскольку семейство Эно состоит из диффеоморфизмов, в условиях теоремы 3 такого определения *a priori* нет: на самом деле Бенедикс и Карлесон не определили точно критических точек, за исключением случая, когда значения параметров удовлетворяют утверждению теоремы 3.

На шаге индукции (по рассматриваемому номеру итераций n) имеется лишь аппроксимация этих критических точек: по предположению индукции, например, $\|DP_{a,b}^n(z)\| \geq 1$ в рассматриваемых точках. Существует направление, сжимаемое отображением $DP_{a,b}^n(z)$ в $\leq |b|^n$ раз, так как якобиан отображения $P_{a,b}$ всюду равен $-b$. Точка $z = (x, y)$ называется *критической аппроксимацией* порядка n , если $|x| < \delta \ll 1$ и сжимаемое направление *касается* $W^u(p_{a,b})$ в точке z .

Число критических аппроксимаций данного порядка конечно, но растет экспоненциально с ростом порядка. Следует найти новые критические аппроксимации, чтобы контролировать возвращения в область $\{|x| < \delta\}$ старых критических аппроксимаций. Это делается с помощью довольно сложной конструкции.

6.2.2. Складки. Рисунок 4 показывает отправную точку конструкции.

Несмотря на то что индукция не дает большой информации о глобальной геометрии многообразия $W^u(p_{a,b})$, необходим минимальный контроль этой геометрии для того, чтобы индукция могла работать. Следует контролировать складки в складках ... (рис. 5). В сущности, предположение индукции гарантирует растяжение горизонтальных векторов, но возвращение в зону $\{|x| < \delta\}$ преобразует горизонтальный вектор в «косой» вектор. Решение Бенедикса и Карлесона

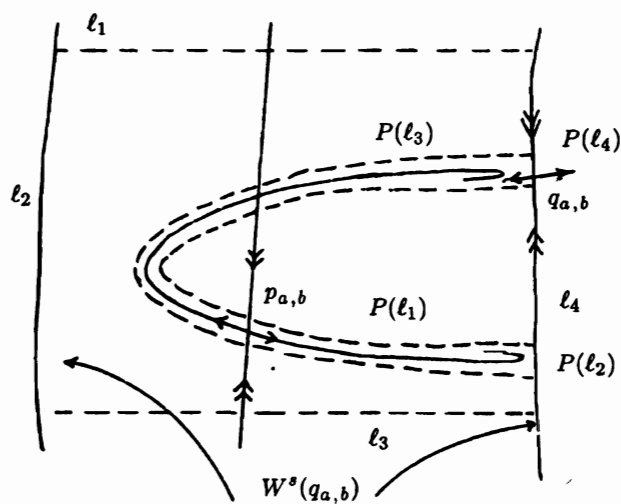


Рис. 4

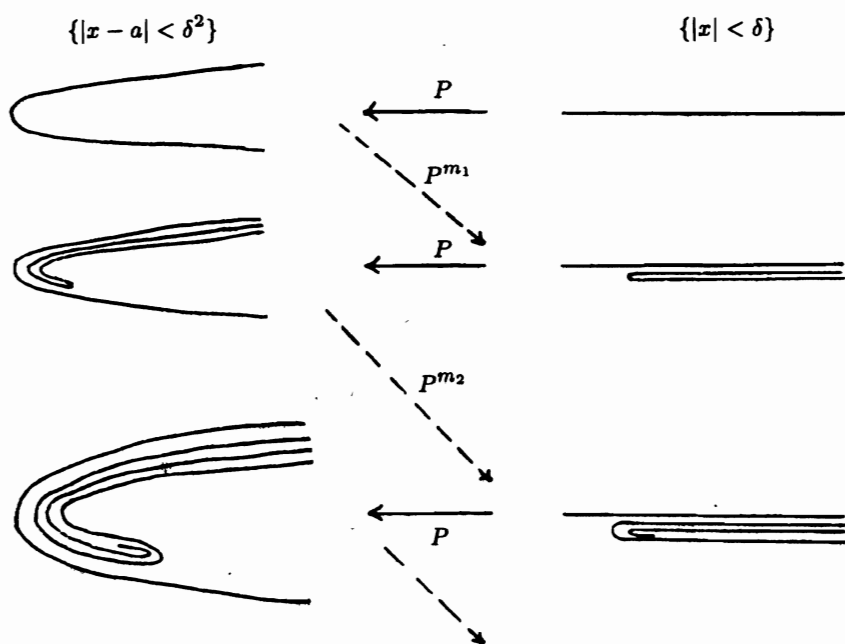


Рис. 5

состоит в разложении этого «косого» вектора на вертикальную и горизонтальную компоненты с тем, чтобы их итерировать отдельно некоторое конечное число раз (так, чтобы в конце горизонтальная компонента увеличилась, в то время как вертикальная компонента сильно сжалась) и затем снова сложить, но в ходе этого процесса может иметь место другое возвращение

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Якобсон М. В. Топологические и метрические свойства одномерных эндоморфизмов. — ДАН СССР, 1978, т. 243, №4 (1978), с. 866–869.
- [2] Jakobson M., Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps, *Comm. Math. Phys.* **81** (1981), 39–88.
- [3] Benedicks M., Carleson L., On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$, *Ann. of Math.* **122** (1985), 1–25.
- [4] Rychlik M., A proof of Jakobson's theorem, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8** (1988), 93–109.
- [5] Rees M., Positive measure sets of ergodic rational maps, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 4^e Série **19** (1986), 383–407.
- [6] Hénon M., Numerical study of quadratic area-preserving mappings, *Quart. Appl. Math.* **27** (1969), 291–312.
- [7] Hénon M., A 2-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69–77.
- [8] Benedicks M., Carleson L., The dynamics of the Hénon map, *Ann. of Math.* (2) **133**, No. 1 (1991), 73–169.
- [9] Mora L., Viana E., Abundance of strange attractors, Preprint IMPA (1989).
- [10] Ruelle D., Repellers for real analytic maps, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **2** (1982), 99–107.
- [11] Misiurewicz M., Absolutely continuous measures for certain maps of an interval, *Publ. Math. I.H.E.S.* **53** (1981), 17–51.
- [12] Sullivan D., Quasi-conformal homeomorphisms I: solution of the Fatou–Julia problem on wandering domains, *Ann. of Math.* **122** (1985), 401–418.
- [13] Sullivan D., Quasi-conformal homeomorphisms 2, 3: topological conjugacy classes of analytic endomorphisms, Preprint I.H.E.S. (1983).
- [14] Yoccoz J.-C., Sur la connexité locale des ensembles de Julia et du lieu de connexité des polynômes quadratiques, en préparation.
- [15] Theullen P., Tresser C., L. S. Young L. S., Positive exponent for generic one-parameter families of $1 - d$ unimodal maps, *C. R. Acad. Sci. Ser. I* **315**, No. 1 (1992), 69–72.
- [16] Benedicks M., Young L. S., Absolutely continuous invariant measures and random perturbations for certain one-dimensional maps, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **12**, No. 1, (1992) 13–37.
- [17] Sullivan D., On the structure of infinitely many dynamical systems nested inside or outside of a given one, *Notes I.H.E.S.* (1990).

- [18] Sullivan D., Bounded structure of infinitely renormalizable mappings, in P. Cvitanovic (ed.), *Universality in Chaos*, 2nd edition, Adam Hilger, Bristol (1989).
- [19] Mañé R., Sad P., Sullivan D., On the dynamics of rational maps, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **16** (1983), 193–217.
- [20] Fornaess E., Sibony N., Random iterations of rational functions, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **11**, No. 4 (1991), 687–708.
- [21] Friedland S., Milnor J., Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** (1989), 67–99.
- [22] Shafarevich I. R., On some infinite dimensional groups, *Rend. Mat. Appl. (Roma)* **25** (1966), 208–212.
- [23] Shub M., *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, *Astérisque* **56** (1978).
- [24] Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747–817. [Имеется перевод: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. — УМН, 1970, т. 25, вып. 1, с. 113–185.]
- [25] Robbin J., A structural stability theorem, *Ann. of Math.* **91** (1971), 447.
- [26] Robinson C., Structural stability of C^1 -diffeomorphisms, *J. Differential Equations* **22** (1976), 28.
- [27] Mañé R., A proof of C^1 -stability conjecture, *Publ. Math. I.H.E.S.* **66** (1988), 161–210.
- [28] Palis J., On the C^1 -stability conjecture, *Publ. Math. I.H.E.S.* **66** (1988), 211–215.
- [29] Pugh C., An improved closing lemma and general density theorem, *Amer. J. Math.* **89** (1967), 1010.
- [30] Newhouse S., The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.E.S.* **50** (1979), 101–151.
- [31] Palis J., Takens F., *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Fractional dimensions and infinitely many attractors*, Cambridge Univers. Press, Cambridge, 1993.
- [32] Newhouse S., Palis J., Takens F., Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.E.S.* **57** (1983), 5–71.
- [33] Palis J., Takens F., Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits, *Ann. of Math.* **125** (1987), 337–374.
- [34] Плыкин Р. В., О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов. — УМН, 1984, т. 39, вып. 7, с. 76–113.
- [35] Douady A., Hubbard J., On the dynamics of polynomial like mappings, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **18** (1985), 287–343.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ¹⁾

Фрэнсис Комец

Некоторые из уравнений механики жидкости можно получить, исходя из эволюции случайной системы частиц, задаваемой марковской динамикой с нетривиальными законами сохранения. После перенормировки пространства и времени (перехода к гидродинамическому пределу) мера, ассоциированная с законами сохранения, сходится к решению нелинейного уравнения в частных производных. Недавно Гуо, Папаниколау и Варадан предложили общий метод доказательства сходимости с использованием априорных оценок, основанных на (вероятностной) энтропии и производстве энтропии.

В настоящей работе представлены общие идеи и схема нового метода.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мысль, что уравнения, описывающие движение жидкости на макроскопическом уровне, могут быть получены из микроскопической динамики, не нова. Например, в случае детерминистской динамики Морри сделал попытку вывести уравнения Эйлера из статистической механики и Синай сформулировал условие²⁾, при выполнении которого возможен такой вывод. Мы будем рассматривать здесь случайную динамику.

Среди случайных динамических систем наиболее изученными являются системы частиц, расположенных на решетке, эволюционирующие в соответствии с правилами обмена между соседними ячейками, для которых существуют законы сохранения (решетчатые газы, модели Гинзбурга-Ландау, ...). Эти системы частиц были введены Спитцером в начале семидесятых годов. Добрушин несколькими годами позже заметил, что они позволяют воспроизвести гидродинамические явления и изучить процедуру перехода к пределу.

На микроскопическом уровне система находится в локальном равновесии в силу закона больших чисел; множество равновесных состояний параметризуется средними значениями сохраняющихся (экстенсивных) величин. Вообще говоря, эти параметры меняются от одной

¹⁾Comets Francis. Limites hydrodynamiques. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n°735, Astérisque, 201–202–203, 1991, p. 167–192.

²⁾Для одномерной жидкости. — *Прим. перев.*

макроскопической точки к другой, и в хорошо подобранной макроскопической временной шкале они эволюционируют в соответствии с некоторым нелинейным уравнением в частных производных; это уравнение будет уравнением первого порядка для системы в поле внешней силы (которая может соответствовать источнику или стоку) и уравнением второго порядка для системы, инвариантной относительно обращения времени. Даже если система допускает автономное описание на макроскопическом уровне, эти два уровня не являются независимыми: указанные уравнения иногда имеют много решений, и микроскопический подход указывает нам, какое из решений следует выбрать.

Трудность заключается в том, что взаимодействие (обмен между ячейками) локального характера приводит не непосредственно к замкнутым уравнениям, а к иерархии уравнений (иерархической цепочке уравнений ББГКИ по начальным буквам фамилий Боголюбова, Борна, Грина, Кирквуда, Ивона): типично, что уравнение для моментов порядка 1 содержит момент порядка 2, уравнение для моментов порядка 2 содержит момент порядка 3 и т. д.

В разд. 2 мы дадим формальный вывод уравнений гидродинамики, начав с понятия локального равновесия, используемого как анзац для замыкания иерархической цепочки уравнений. Этот раздел, который носит эвристический и общий характер, нам кажется необходимым для краткого обзора материала. Затем мы дадим примеры систем с притяжением; потом мы представим метод доказательства с использованием функционала производства энтропии для модели Гинзбурга-Ландау (разд. 4) и, наконец, другие примеры и результаты (разд. 5).

Мы не отвечаем здесь полностью на вопрос, что такое неравновесная динамика, оставляя в стороне другие важные аспекты, такие, как равновесные флуктуации и неравновесные флуктуации, теорема о флуктуационно-диссипативных соотношениях, ...

Достаточно полное и завершенное изложение этой темы имеется в обширной статье Де Мази, Яниро, Пелегринотти и Презутти [DIPP] и, кроме того, в совсем недавнем препринте Шпона [Sp]¹⁾, посвященном стохастическим решетчатым газам.

Автор благодарит К. Кипниса за помощь при подготовке этой статьи.

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ: ОБЩАЯ ЧАСТЬ

2.1. Случайные модели. Рассмотрим случайные величины $Y = (Y(i))_{i \in \mathbb{L}}$ с целыми или действительными значениями, заданные на

¹⁾ См. также книгу: Spohn H. Large scale dynamics of interacting particles. Springer-Verlag, Berlin, 1991. — *Прим. перев.*

решетке L . Сама L может быть решеткой Z^d размерности d или, как в разд. 4, торической решеткой $(Z/NZ)^d$ с большим N , а $Y(i)$ представляет собой алгебраический заряд, число молекул в точке i , наличие или отсутствие частицы в точке i (для решетчатого газа $Y(i) \in \{0, 1\}$), ...

Конфигурация Y эволюционирует с течением времени в соответствии с марковским однородным процессом с генератором $\mathcal{L} = \sum_{i,i'} \mathcal{L}_{i,i'}$, инвариантным относительно трансляций и таким, что $\mathcal{L}_{i,i'} f = 0$ для всех пробных функций f , не зависящих от $(y(i), y(i'))$. В этом изложении мы предполагаем для простоты, что обмены происходят лишь между самыми близкими соседями, так что в итоге речь идет лишь о парах точек i, i' , расстояние между которыми равно 1. Мы предполагаем также, что полная масса, формально $\sum_i y(i)$, есть единственная сохраняющаяся величина для полугруппы с генератором $\mathcal{L}$. Если E — топологическое пространство, обозначим через $\mathcal{M}(E)$ (соотв. $\mathcal{M}_1^+(E)$) множество мер Радона (соотв. вероятностных мер) на борелевской σ -алгебре пространства E .

Существенным ингредиентом гидродинамического поведения является существование, связанное с законом сохранения, однопараметрического семейства $\nu_\rho \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^L)$, где ρ принадлежит интервалу $I \subset \mathbb{R}$ инвариантных относительно указанной полугруппы эргодичных трансляционно инвариантных вероятностных мер (аналог мер Максвелла). При таком предположении выбираем параметризацию как среднее значение сохраняющейся величины

$$\rho = E^{\nu_\rho} Y(i). \quad (1)$$

Эти меры ν_ρ отличаются одна от другой значениями своих химических потенциалов (химический потенциал — это переменная, двойственная переменной ρ).

Пусть ε — параметр перенормировки пространства, который будет стремиться к нулю; в случае тора $\varepsilon = 1/N$. Поскольку взаимодействие локальное, необходимо ускорить время множителем $1/a(\varepsilon)$ с $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\varepsilon) = 0$; пространственные переменные и время i, u на микроскопическом уровне пересчитываются в $x = \varepsilon i$, $t = a(\varepsilon)u$ на макроскопическом уровне. Начальное распределение P_0^ε зависит от ε ; пусть P^ε — закон распределения процесса с генератором $\mathcal{L}$ на пространстве траекторий и $P_u^\varepsilon = \exp(u\mathcal{L}^*) P_0^\varepsilon$ — его маргинальное распределение в момент u .

Пусть теперь $\mathcal{T}^i$ — трансляция на вектор i на пространстве конфигураций ($\mathcal{T}^i y(i') = y(i + i')$ для всех $i' \in L$).

2.2. Локальное равновесие.

Определения. (1) Начальное распределение удовлетворяет условию локального равновесия, если

$$P_0^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[x/\varepsilon]} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_{\rho_0(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

для регулярных функций ρ_0 ; ρ_0 называется профилем локального равновесия.

(2) Говорят, что локальное равновесие сохраняется, если существует регулярная функция $\rho(t, x)$, такая, что

$$P_{t/a(\varepsilon)}^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[x/\varepsilon]} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_{\rho(t, x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \geq 0.$$

Здесь $\Rightarrow$ означает слабую сходимость вероятностных мер.

Определение (1) означает, что система в окрестности микроскопической ячейки $i = x/\varepsilon$ находится в состоянии равновесия, определяемом локальным средним сохраняющейся величины. Можно получить локально равновесное распределение, продиктованное «равновесием» с химическим потенциалом, медленно меняющимся на пространстве микроскопических ячеек; тогда ν_ρ являются произведениями мер, наиболее простой пример — это $\bigotimes_{i \in \mathbb{Z}^d} \nu_{\rho_0(\varepsilon i)}(dy(i))$. Определение (2) означает, что среднее значение конфигурации Y эволюционирует медленно (по причине локальности взаимодействия) и на больших временных интервалах в силу локальной эргодичности система приходит в локальное равновесие с этим средним. Системы, имеющие гидродинамический предел, сохраняют, как правило, локальное равновесие; мы встретим лишь два исключения — это ударный фронт (п. 3.5) и фазовый переход (п. 4.4).

Введем два вектора, связанные с законом сохранения; пусть $(e_1, \dots, e_d)$ — канонический базис в $\mathbb{Z}^d$. Для $k \leq d$ поток $J_{u,k}(i)$ есть алгебраическое число зарядов, прошедших из i в $i + e_k$ в интервале времени $]0, u]$; тогда уравнение баланса в данный момент имеет вид

$$dY_u(i) = - \sum_{k=1}^d [dJ_{u,k}(i) - dJ_{u,k}(i - e_k)]. \quad (2)$$

Заметим, что $J_{u,\cdot}$ — это функция на пространстве, большем, чем пространство траекторий исходного процесса Y , содержащем, например, процессы Винера или Пуассона, присоединенные к Y ; она является измеримой функцией от всего прошлого до момента u . Ток $j(i, y) = (j_k(i, y))_{k \leq d}$ в момент u определяется как производная потока в этот момент; это функция от конфигурации; из инвариантности генератора $\mathcal{L}$ относительно трансляций следует, что $j(i, y) = j(0, \mathcal{T}^i y)$.

Из (2) вытекает, что

$$Y_u(i) - \int_0^u \mathcal{L}Y_v(i) dv \text{ есть } P^\epsilon\text{-мартингал,} \quad (3)$$

где

$$\mathcal{L}Y_u(i) = - \sum_{k=1}^d [j_k(0, T^i Y_u) - j_k(0, T^{i-e_k} Y_u)].$$

Предыдущее соотношение связывает на микроскопическом уровне «производную плотности по времени» с дивергенцией тока. Вывод аналогичного соотношения на макроскопическом уровне получается в первом из рассматриваемых ниже режимов.

2.3. Общая форма уравнений. Интересна мера $\hat{Y}_t^\epsilon \in M(\mathbf{R}^d)$, ассоциированная с сохраняющейся величиной (мера зарядов, мера чисел заполнения, ...),

$$\hat{Y}_t^\epsilon = \epsilon^d \sum_{i \in \mathbf{Z}^d} Y_{t/a(\epsilon)}(i) \delta_{i/\epsilon}. \quad (4)$$

Пусть $\tilde{j}(\rho) = E^{\nu_\rho} j(0, y)$ — вектор тока в равновесии ν_ρ .

Определение 3. Система находится в эйлеровом режиме, если $\tilde{j} \neq 0$.

Хорошей нормализацией времени в этом режиме тогда будет $a(\epsilon) = \epsilon$.

Теорема 1 [DIPP, Theorem 4.1]. Если система удовлетворяет условию сохранения локального равновесия с $a(\epsilon) = \epsilon$, то профиль локального равновесия $\rho(t, x)$ есть слабое решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \tilde{j}(\rho) = 0, \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases} \quad (5a)$$

Доказательство элементарно и состоит из уточнения термина «производная мартингала, ассоциированного с $\hat{Y}_t^\epsilon$ », с помощью (3) и предположения о сохранении локального равновесия.

Кроме того, видно, что в предположении о ненакоплении массы в окрестности некоторой точки и мажорировании (линейном по времени) возрастающего процесса, ассоциированного с J , мера $\hat{Y}_t^\epsilon$ сходится по вероятности к детерминистскому пределу $\rho(t, x) dx$ для всех $t \geq 0$ (закон больших чисел). Как мы убедимся, доказательства гидродинамического предела часто устанавливают одновременно сходимость меры $\hat{Y}_t^\epsilon$ и сохранение локального равновесия.

Нелинейное гиперболическое уравнение (5a) допускает, вообще говоря, несколько слабых решений, которые вычисляются методом характеристик. Тем не менее оно обладает единственным естественным решением — энтропийным решением (см. [Sm]), получаемым как предел решения ρ_ϵ уравнения с вязкостью

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\epsilon + \operatorname{div} \tilde{j}(\rho_\epsilon) = \epsilon \Delta \rho_\epsilon \quad (5b)$$

при $\epsilon \rightarrow 0$. Во всех случаях, когда сходимость меры $\hat{Y}_t^\epsilon$ была установлена, предел есть энтропийное решение уравнения (5), см. разд. 3.

Определение 4. Система находится в диффузионном режиме, если $\tilde{j}(\rho) = 0$ для любого $\rho \in I$.

Тогда уравнение (5) тривиально, и требуемая нормировка есть $a(\epsilon) = \epsilon^2$. Наиболее простой случай — *градиентная система*, для которой ток записывается как дискретный градиент функции U ,

$$j_k(0, y) = (U \circ T^{\epsilon k} - U)(y). \quad (6)$$

Пусть $\tilde{U}(\rho) = E^{\nu} U$.

Теорема 2 [DIPP, Theorem 4.1]. Если система удовлетворяет условию локального равновесия с $a(\epsilon) = \epsilon^2$, то профиль $\rho(t, x)$ есть слабое решение уравнения диффузии

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \Delta[\tilde{U}(\rho)] = 0, \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases} \quad (7a)$$

При тех же дополнительных условиях, что и выше, $\hat{Y}_t^\epsilon$ сходится к $\rho(t, x)$ по вероятности.

Для нелинейного параболического уравнения (7a) не возникает проблем единственности: поскольку предел меры $\hat{Y}_t^\epsilon$ — непрерывная функция времени, можно получить из вероятностных оценок оценку нормы в H_{-1} [GPV] или сослаться на теорему единственности для нелинейных эволюционных уравнений, управляемых аккретивным или максимальным монотонным оператором [Rel].

Для неградиентных диффузионных систем предполагаемое уравнение, исходя из физического закона Фика, — это

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \operatorname{div} [D(\rho) \nabla \rho]; \quad (7b)$$

коэффициент диффузии (объемный коэффициент) D , появляющийся также в теории равновесных флуктуаций, дается формулой Грина-Кубо [Sp], которая выражает D в терминах равновесной динамики; для случая градиентных систем это уравнение совпадает с (7a).

Общий случай изучен хуже, и мы ограничимся градиентным случаем, за исключением п. 5.2.

Для того чтобы ввести предельные уравнения (5), (7), мы воспользуемся предположением о сохранении локального равновесия как удобным анзатцем. Доказательство дает одновременно сходимость поля к решению уравнения и сохранение локального равновесия. Однако чаще всего предполагают, что начальное распределение есть локальное равновесие, чтобы избежать изучения начального периода времени, необходимого системе для достижения локального равновесия (начальный погранслой). Этот период велик на микроскопической шкале, но мал на макроскопической шкале.

3. ПРОЦЕССЫ ЧИСТЫХ СКАЧКОВ

Они описывают системы частиц на $\mathbf{Z}^d$, которые могут прыгать из одной ячейки в другую; величины $Y(i)$ принимают целые значения. Мы ограничиваемся к тому же скачками на расстояние 1. О существовании и о свойствах приведенных ниже примеров таких систем см. [Li].

3.1. Примеры. (а) Простой процесс с запретами ($Y(i) \in \{0, 1\}$, не более одной частицы в ячейке). Через случайное время независимо одна от другой (это время имеет показательный закон распределения со средним 1) каждая частица выбирает соседнюю ячейку в направлении $\pm e_k$ с вероятностью $p_{\pm k}$ ($p_{\pm k} > 0$, $\sum_k (p_k + p_{-k}) = 1$). Если ячейка свободна, частица в нее прыгает, в противном случае частица остается на месте.

Тогда генератор $\mathcal{L}$ определяется на цилиндрических функциях f от конфигурации $y \in \{0, 1\}^{\mathbf{Z}^d}$ по формуле (где $e_{-k} = -e_k$)

$$\mathcal{L}f(y) = \sum_{i \in \mathbf{Z}^d} \sum_{1 \leq |k| \leq d} y(i)[1 - y(i + e_k)]p_k[f(y + \delta_{i+e_k} - \delta_i) - f(y)].$$

Говорят, что процесс симметричен, если $p_k = p_{-k}$, $k = 1, \dots, d$; в противном случае процесс асимметричен. Симметрический случай тривиален, так как уравнение для плотности замкнуто; в пределе получается линейное уравнение диффузии [DIPP].

Здесь ν_ρ — бернуллиевские меры (продакт-меры) со средним $\rho \in [0, 1]$.

(б) Процессы с запретами с переменной интенсивностью, в которых среднее для показательного закона зависит от числа занятых соседних ячеек. Здесь ν_ρ — гиббсовские меры, как и меры модели Изинга; их можно получить, определив интенсивность формулой Кавасаки или формулой Метрополиса [DIPP, Sp].

(с) Процесс с ультралокальным взаимодействием (с нулевой областью зависимости): несколько частиц могут находиться в одной ячейке. Среднее случайного времени пребывания есть убывающая функция от числа частиц в ячейке. Затем частица прыгает с вероятностями $p_{\pm k}$, как выше, но без запретов. Как и в примере процесса с запретами (а), инвариантные меры ν_ρ есть продакт-меры, несмотря на взаимодействие между частицами, что приводит к важному упрощению по сравнению с общим случаем (см. пример (b)).

3.2. Процессы с притяжением. Это свойство монотонности является существенным средством для доказательства предельных теорем для систем частиц (см. [Li, с. 70]). Примеры (а) и (с) из предыдущего пункта всегда обладают этим свойством.

Определим отношение частичного порядка: для $y, y' \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ напомним $y \leq y'$, если $y(i) \leq y'(i)$ для всех $i \in \mathbb{Z}^d$. Функция $f: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая функция, если она сохраняет порядок. Наконец, для $\nu, \nu' \in M_1^+(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ напомним $\nu \leq \nu'$, если $\int f d\nu \leq \int f d\nu'$ для каждой возрастающей функции. Процесс с генератором $\mathcal{L}$ называется *процессом с притяжением*, если из $\nu \leq \nu'$ следует, что $\exp(u\mathcal{L}^*)\nu \leq \exp(u\mathcal{L}^*)\nu'$ для любого $u \geq 0$.

Свойство притяжения позволяет сравнивать равновесные профили, реализованные в момент t , с помощью процессов, стартующих при заданных начальных профилях. Из этого стохастического сравнения траекторное сравнение получается с помощью техники динамического каплинга (couplage), заключающегося в построении одновременно на одном и том же пространстве нескольких версий одного процесса, стартующих из произвольных конфигураций. Для процесса с притяжением и двух упорядоченных начальных распределений существует каплинг, сохраняющий порядок конфигураций в каждый момент времени. Наконец, процедура *приоритета*, введенная Андьелом и Кипнисом [AK], позволяет использовать инвариантные меры.

3.3. Уравнения Эйлера для процессов скачков в размерности 1. Начнем с простого асимметричного процесса с запретами. В размерности $d = 1$ предельное уравнение (5а) для плотности чисел заполнения ρ есть уравнение *Бургерса*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (p_{+1} - p_{-1}) \frac{\partial}{\partial t} [\rho(1 - \rho)] = 0$$

(обычная форма которого получается заменой $u = \rho - 1/2$). Определим сначала энтропийное решение. Без потери общности мы предполагаем, что $p_{+1} > p_{-1}$ (свободно устанавливаем среднее смещение вправо). Большая часть результатов, упоминаемых в этом пункте,

была получена для начального закона

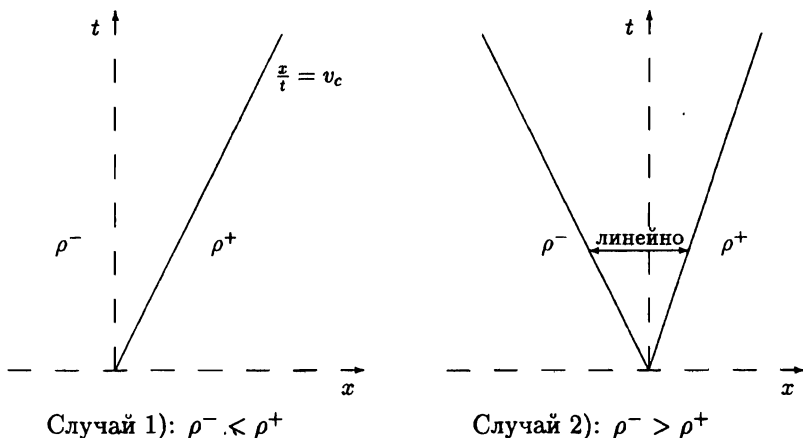
$$\bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} \nu_{\rho_0(\varepsilon i)}(dy(i))$$

(см. замечание после определения 1) с начальным профилем

$$\rho_0(x) = \rho^- 1_{x < 0} + \rho^+ 1_{x \geq 0}, \quad (8)$$

где $\rho^+, \rho^- \in [0, 1]$.

Рассмотрим два случая: если $\rho^- < \rho^+$, то ударная волна (разрыв) распространяется со скоростью $v_c = (p_{+1} - p_{-1})(1 - \rho^+ - \rho^-)$ согласно условию Рэнкина-Гюгонио; в противном случае, при $\rho^- > \rho^+$, характеристики, соответствующие ρ^- и ρ^+ , отделены «веером разрежения», где энтропийное решение линейно по пространственной переменной. Ниже дано представление для $\rho(t, x)$:



Сначала Рост [Ro] для частного случая, а затем Бенасси и Фуке [BF1] установили сходимость поля $\hat{Y}_t^\varepsilon$ к энтропийному решению ρ уравнения Бюргерса, указанного выше, и сохранение локального равновесия (исключая ударную волну, т.е. случай 1), когда $x = v_c t$).

Традиционное доказательство (в противоположность новому методу Гуо, Папаниколау и Варадана производства энтропии, см. разд. 4) использует свойство притяжения процесса, монотонность начального профиля и явный вид решений предельного уравнения. Это доказательство работает и для других процессов с притяжением, рассматриваемых в этом параграфе; оно состоит из трех этапов:

- Соображения каплинга и приоритета и субаддитивная эргодическая теорема позволяют сначала показать сходимость меры чисел

заполнения $\hat{Y}_t^\varepsilon$ к мере с детерминированной плотностью $u(t, x)$, монотонной по x , если начальный профиль монотонен.

• Кроме того, те же соображения каплинга и приоритета позволяют получить замкнутое уравнение для плотности предельной меры, приводя к доказательству следующего свойства декорреляционного предела:

$$\mathbb{E}^{P^\varepsilon} Y_{t/\varepsilon}([x/\varepsilon]) Y_{t/\varepsilon}([x/\varepsilon] + 1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, x)^2.$$

Это распространение хаоса. Этого свойства достаточно для вывода замкнутого уравнения. Кстати, об этой модели решетчатого газа: забавно, что слово «газ» было введено в XVIII в. как перевод латинского слова «хаос».

• Полученное замкнутое уравнение означает в точности, что u есть слабое решение уравнения Бюргерса. Тогда, явно используя свойство монотонности и сравнение различных начальных профилей, можно доказать, что u совпадает с энтропийным решением ρ .

Для процессов с нулевой областью зависимости сначала Андьел и Варес [AVa], а затем Андьел и Кипнис [AK] и Бенасси и Фуко [BF2] для процессов скачков на расстояние больше 1 доказали результат такого же типа с предельным уравнением для плотности ρ чисел заполнения (на этот раз со значениями в $\mathbf{R}_+$) вида $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \bar{j}(\rho) = 0$; функция $\bar{j}$ — регулярная функция из $\mathbf{R}_+$ в $\mathbf{R}_+$, либо строго выпуклая, либо строго вогнутая.

3.4. Случай размерности d . Даже если предельное уравнение (5) приводится изменением осей к уравнению в (пространственной) размерности 1, микроскопическое изучение является довольно деликатным делом. Ландим [Lal] адаптировал указанный метод для случая процессов с нулевой областью зависимости и с кусочно постоянным начальным профилем, равным ρ^- во внутренности некоторого полуконуса и ρ^+ в его внешности, когда граница конуса или полностью рассеивающая, или полностью пропускающая (т.е. если обозначить через $\bar{v}$ среднее смещение свободной частицы, то в точности один из двух векторов $\bar{v}$ и $-\bar{v}$ смотрит внутрь полуконуса).

Совсем недавно Резаханлу [Re2] доказал сходимость $\hat{Y}_t^\varepsilon$ для асимметричного процесса с запретами к решению уравнения (5), удовлетворяющему энтропийному условию Кружкова, без ограничений на начальный профиль. Это решение является по определению единственной функцией ρ , удовлетворяющей неравенству

$$\frac{\partial}{\partial t} |\rho - c| + \operatorname{div} \{ \operatorname{sign}(\rho - c) [\bar{j}(\rho) - \bar{j}(c)] \} \leq 0$$

в смысле обобщенных функций для всех вещественных констант c .

Доказательство, носящее очень общий характер, комбинирует использование свойства притяжения процесса и некоторые соображения, связанные с производством (вероятностной) энтропии, описанным в разд. 4. В каплинге между рассматриваемым процессом и процессом, стартующим при начальном распределении ν_c , конфигурации локально упорядочены согласно свойству притяжения, что позволяет справиться с нелинейностью, вызванной знаком.

3.5. Микроскопическое изучение ударной волны. В случае одной распространяющейся ударной волны естественно поставить два вопроса относительно тонкой структуры окрестности фронта ударной волны:

- (i) Как выглядит закон больших чисел в этих точках?
- (ii) Существует ли промежуточная шкала между микроскопической и макроскопической, в которой профиль становится регулярным, или, напротив, он остается жестким и разрывным?

Мы детально изложим результаты для одномерного простого симметричного процесса с запретами (случай (а) п. 3.1). Мы отправляемся от ρ_0 , задаваемого формулой (8).

(i) Андьел, Брамсон и Лигетт [ABL] заметили, что локальное равновесие справа от ударной волны $x = v_c t$ сохраняется не очень долго, но локальное равновесие является суперпозицией «максвеллианов»:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{t/\epsilon}^\epsilon \circ \mathcal{T}^{[v_c t/\epsilon]} = \frac{1}{2}(\nu_{\rho^-} + \nu_{\rho^+}).$$

(ii) Показано (сначала в частном случае [W1], а затем в более общем [DKPS, FKS]), что имеет место только второй случай:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{t/\epsilon}^\epsilon \circ \mathcal{T}^{[v_c t/\epsilon + r/\sqrt{\epsilon}]} = \lambda \nu_{\rho^-} + (1 - \lambda) \nu_{\rho^+} \quad (9)$$

с $\lambda = \lambda(t, r) = \text{Prob}(\sqrt{v} B_t \leq r)$, где B_t — вещественное броуновское движение. Интерпретация для $\rho^- = 0$ связана с положением X_u самой левой частицы, для которой $\sqrt{\epsilon}(X_{t/\epsilon} - v_c t/\epsilon) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \sqrt{v} B_t$: конечно, не существует частицы левее $X_{t/\epsilon}$, между тем на расстоянии порядка $\epsilon^{-1/2}$ справа от $X_{t/\epsilon}$ система находится в равновесии ν_{ρ^+} согласно (9). Ударная волна заметна также на микроскопических состояниях справа от самой левой частицы.

Следовательно, локальное (по x) эмпирическое среднее для частиц не является равномерно близким в окрестности ударной волны к слабому решению уравнения типа (5b). Для получения асимптотических поправок, напоминающих поправки Навье–Стокса, необходимо сгладить это среднее по времени [W1].

4. МОДЕЛИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ И МЕТОД ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ

Цель этого раздела — представить замечательный метод производства энтропии, введенный в 1988 г. Гуо, Папаниколау и Вараданом [GPV]. В настоящее время этот метод применим только к обратимой системе. Как удобные рамки для представления метода я использую дискретную модель Гинзбурга–Ландау, рассмотренную в [GPV].

4.1. Модель Гинзбурга–Ландау. На дискретном одномерном торе $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, рассматриваемом как интервал $\{0, 1, \dots, N\}$ с отождествленными концами, рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dY_u(i) = dJ_u(i-1) - dJ_u(i), & i \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}, \\ dJ_u(i) = -\frac{1}{2} \{ \phi'[Y_u(i+1)] - \phi'[Y_u(i)] \} du + dB_u(i), \end{cases}$$

где $B(i)$, $i \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, — независимые броуновские движения и где $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — функция класса C^1 , удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \int e^{-\phi(y)} dy &= 1, \\ \alpha(\lambda) &= \log \int e^{\lambda y - \phi(y)} dy \text{ существует для всех } \lambda \in \mathbf{R}, \\ \int e^{\lambda |\phi'(y)| - \phi(y)} dy &< +\infty \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (10)$$

Это диффузионная градиентная система с

$$U(y) = -\frac{1}{2} \phi'[y(0)]. \quad (11)$$

Напомним, что тогда нормировка в (4) — это $\varepsilon = 1/N$, $a(\varepsilon) = 1/N^2$. Пусть Y — марковский процесс с непрерывными траекториями в $\mathbf{R}^N$ с инфинитезимальным генератором

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} & \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial Y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{\partial}{\partial Y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \mathcal{H}_N \right] \left(\frac{\partial}{\partial Y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где гамильтониан $\mathcal{H}_N$ дается формулой

$$\mathcal{H}_N(y(0), \dots, y(N-1)) = - \sum_{i=0}^{N-1} \phi[y(i)]. \quad (13)$$

Полная масса $\sum_{i=0}^{N-1} y(i)$ сохраняется. Введем двойственную к α в смысле Лежандра-Фенхеля функцию h ,

$$h(\rho) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \{\lambda y - \alpha(\lambda)\}, \quad \rho \in \mathbf{R}. \quad (14)$$

Тогда h и α являются сопряженными друг к другу выпуклыми функциями, производные которых — регулярные строго возрастающие и взаимно обратные функции. Инвариантными относительно трансляций экстремальными инвариантными вероятностными мерами для рассматриваемого процесса будут меры $\nu_\rho^N \in M_1^+(\mathbf{R}^N)$, $\rho \in \mathbf{R}$, задаваемые формулой

$$\begin{aligned} & \nu_\rho^N(dy(0), \dots, dy(N-1)) \\ &= \exp \left\{ \lambda \sum_{i=0}^{N-1} y(i) - N\alpha(\lambda) + \mathcal{H}_N \right\} dy(0) \cdots dy(N-1), \end{aligned} \quad (15)$$

где параметризация $\lambda = h'(\rho)$ выбрана так, что $\mathbf{E}^{\nu_\rho^N} y(0) = \rho$, как в (1). Генератор $\mathcal{L}_N$ является формально самосопряженным в $L^2(\nu_\rho^N)$, и ограничение рассматриваемого процесса на любую гиперплоскость $\sum y(i) = \text{const}$ есть эргодический процесс с единственной инвариантной вероятностной мерой, а именно условным распределением меры ν_ρ^N на этой гиперплоскости (не зависящим от ρ). Нам понадобится еще тор $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, снабженный мерой Хаара, которую мы обозначим dx .

Теорема [GPV]. *Предположим, что начальное распределение P_0^N удовлетворяет условию локального равновесия с профилем $\rho_0 \in L^\infty(\mathbf{T})$ и абсолютно непрерывно относительно меры ν_0^N с плотностью f_0^N , удовлетворяющей условию*

$$H^N(f_0^N) = \int f_0^N \log f_0^N d\nu_0^N \leq CN. \quad (16)$$

Тогда справедлив закон сохранения локального равновесия с профилем $\rho(t, x)$, $x \in \mathbf{T}$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h'(\rho), \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad (17)$$

$$\int h(\rho) dx \leq C, \quad \frac{1}{2} \iint_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial t} h'(\rho) \right|^2 dt dx \leq C. \quad (18)$$

В силу (11) и (15) $\tilde{U} = -h'/2$, а значит, уравнение (17) согласуется с (7). Оно допускает единственное решение, удовлетворяющее усло-

вию (18), в пространстве $H_{-1}(T)$. Условие (16) контролирует энтропию меры P_0^N относительно инвариантной меры. Гуо, Папаниколау и Варадан дали вывод априорных оценок (см. (21a) и (21b) ниже), которые составят основу доказательства теоремы.

4.2. Энтропия. Если $f^N: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^+$ — плотность вероятности относительно меры ν_0^N , обозначим через

$$H^N(f^N) = \int f^N \log f^N d\nu_0^N$$

энтропию (или информацию Кульбака–Лейблера) распределения $f^N d\nu_0^N$ относительно ν_0^N . Напомним, что $H^N(f^N)$ положительна и равна нулю, только если $f^N = 1$. Здесь удобно рассматривать не сами вероятностные меры, а их плотности относительно некоторой инвариантной меры, в данном случае меры ν_0^N . При наших предположениях закон P_0^N для системы абсолютно непрерывен относительно меры ν_0^N ; его производная Радона–Никодима $f_t^N = dP_{N^2 t}^N / d\nu_0^N$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t^N = N^2 \mathcal{L}_N f_t^N,$$

и легко получить, что

$$\frac{d}{dt} H^N(f_t^N) = -N^2 I^N(f_t^N) \leq 0, \quad (19)$$

где

$$I^N(f) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \sqrt{f} \right]^2 d\nu_0^N \quad (20)$$

есть значение в точке $\sqrt{f}$ формы Дирихле, ассоциированной с симметрическим оператором $\mathcal{L}_N$. Убывание энтропии, выраженное формулой (19), известно как «Н-теорема Больцмана». Это утверждение не дает непосредственных сведений о локальной плотности. Напротив, *производство энтропии* I^N , которое становится нулевым для инвариантных плотностей f , позволяет представить локальную плотность как смесь гиббсовских мер с малыми флуктуациями в плотности, если производство энтропии мало, что очень информативно.

Пусть f^N — плотность (на $\mathbf{R}^N$), полученная усреднением по времени, $f^N = \frac{1}{t} \int_0^t f_s^N ds$. Из выпуклости функционалов H^N и I^N и из (16), (19), (20) немедленно вытекают априорные оценки

$$H^N(f^N) \leq CN, \quad (21a)$$

$$I^N(f^N) \leq C/N. \quad (21b)$$

4.3. Основные этапы доказательства Гуо, Папаниколау и Варадана. Для всех регулярных на T пробных функций g формула Ито, примененная к $\hat{Y}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Y_{N^2 t}(i) \delta_{i/N}$, записывается в виде

$$\langle g, \hat{Y}_t^N \rangle - \langle g, \hat{Y}_0^N \rangle = \int_0^t S_s^N ds + M_t^N, \quad (22)$$

и два элементарных вычисления показывают, что мартингал M_t^N равномерно сходится к 0 по вероятности на ограниченных интервалах времени и что

$$S_t^N = \mathcal{L}_N \langle g, \hat{Y}_t^N \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} g''(i/N) \phi'(Y_{N^2 t}(i)) (1 + o(1)). \quad (23)$$

Кроме гауссовского случая, где ϕ квадратична, уравнение (22) замкнуто, так как (23) не является больше функцией от $\hat{Y}_t^N$. Рассмотрим вместо ϕ' в (23) «локальную» непрерывную функцию $\psi(y) = \psi(y(-k), \dots, y(k))$. Гуо, Папаниколау и Варадан доказали с помощью (21a, b), что для всех пробных функций g

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{P^N} \left\{ \frac{1}{N} \int_0^t \left| \sum_{i=0}^{N-1} g(i/N) \left[\psi \circ \mathcal{T}^i(Y_{N^2 s}) - \int \psi d\nu_{\rho(Y_{N^2 s}, i, [N\epsilon])} \right] \right| ds \right\} = 0, \quad (24)$$

где

$$\rho(y, i, l) = \frac{1}{2l+1} [y(i-l) + \dots + y(i+l)]$$

и где $\nu_\rho \in M_1^+(\mathbb{R}^Z)$, есть естественное продолжение меры ν_ρ^N .

Пусть $P^N \circ (\hat{Y}^N)^{-1}$ — образ меры P^N относительно $(Y_t^N)_{t \geq 0}$. Можно показать (существенно используя (16)), что это семейство вероятностных мер предкомпактно на $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M(T))$ и его предельные точки Q в силу (22) сконцентрированы на детерминистских траекториях μ_t , имеющих форму $\mu_t = \rho(t, x) dx$. Из соотношений (23) и (24) следует, что

$$\langle g, \mu_t \rangle - \langle g, \mu_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^t \int_T g''(x) h'(\rho(s, x)) dx ds,$$

а это слабая формулировка уравнения (17). Из единственности решения уравнения (17) вытекает, что последовательность $P^N \circ (\hat{Y}^N)^{-1}$ сходится и, следовательно, мера зарядов $\hat{Y}_t^N$ сходится к мере $\rho(t, x) dx$.

Доказательство (24). Выражение под знаком предела (деленное на t) в (24) записывается как

$$\int \frac{1}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} g(i/N) \left[\psi \circ \mathcal{T}^i(y) - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, [N\epsilon])} \right] \right| f^N d\nu_0^N$$

с $f^N = \frac{1}{t} \int_0^t f_s^N ds$. Априорных оценок (21a) и (21b) достаточно для доказательства (24). Положим

$$A(N, C) = \{ \text{плотности } f \text{ на } \mathbf{R}^N : H^N(f) \leq CN, I^N(f) \leq CN^{-1} \}.$$

Тогда

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)} \int \frac{1}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} g(i/N) \left[\psi \circ \mathcal{T}^i(y) - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, [N\epsilon])} \right] \right| f d\nu_0^N = 0 \quad (25)$$

влечет за собой (24).

Трудность состоит в том, что число переменных $2[N\epsilon] + 1$ стремится к бесконечности и на первый взгляд не поддается контролю. Первый этап состоит в замене в (25) маленького макроскопического блока размера $N\epsilon$ на большой микроскопический блок размера l .

Одноблочная оценка:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)} \int \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{1}{2l+1} (\psi \circ \mathcal{T}^{i-l} + \dots + \psi \circ \mathcal{T}^{i+l}) - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, l)} \right| f d\nu_0^N = 0. \quad (26)$$

Интеграл, фигурирующий в (26), определяется скользящим средним функции $\bar{\psi}_l = \frac{1}{2l+1} (\psi \circ \mathcal{T}^{-l} + \dots + \psi \circ \mathcal{T}^l) - \int \psi d\nu_{\rho(y, 0, l)}$, которая зависит от $2(k+l) + 1$ переменных. Значит, этот интеграл равен $\int \bar{\psi}_l f_l d\nu_0^N$, где f_l есть скользящее среднее некоторых плотностей, зависящих от $2(k+l) + 1$ последовательных переменных. Польза от фиксации l выражается в том, что неравенство (21a) гарантирует компактность таких распределений на $\mathbf{R}^{2(l+k)+1}$ и позволяет заменить $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)}$ в (26) на супремум по множеству предельных точек при $N \rightarrow \infty$. Из соотношения (21b) вытекает, что эти предельные точки являются выпуклыми комбинациями инвариантных мер $\nu_{\rho}^{2(l+k)+1}$.

Итак, достаточно доказать, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \int \bar{\psi}_l d\nu_\rho^{2(l+k)+1} = 0$; иными словами, достаточно доказать, что условные меры для ν_ρ^{2l+1} при условии $\rho(y, 0, l) = \rho^*$ имеют то же самое асимптотическое эргодическое поведение, что и ν_ρ . Это содержательное утверждение получается с помощью техники больших отклонений (теорема 3.5 в [GPV]).

Двухблочная оценка: средние для двух больших микроскопических блоков, разделенных небольшим макроскопическим расстоянием, близки:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\substack{m \in [-N\epsilon, N\epsilon], \\ |m| \geq 2(k+l)+1}} \sup_{f \in A(C, N)} \frac{1}{N} \int \sum_{i=0}^{N-1} |\rho(y, i, l) - \rho(y, i+m, l)| f d\nu_0^N = 0. \quad (27)$$

На этот раз интеграл выражается с помощью скользящего среднего совместного распределения двух групп, состоящих из $2(k+l)+1$ последовательных переменных, разнесенных на расстояние m . При этом следует отметить две дополнительные особенности по сравнению с выводом соотношения (26): контроль взаимодействия двух групп с помощью (21b) и введение для них фиктивного генератора (см. теоремы 4.3 и 4.6 в [GPV]).

Из непрерывности функционала $\rho \mapsto \int \psi d\nu_\rho$ и из соотношений (26) и (27) следует соотношение (25).

4.4. Гиббсовские модели Гинзбурга–Ландау. Теперь рассмотрим на d -мерном торе $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^d$ генератор вида (12), где суммирование ведется лишь по ближайшим соседям и где

$$\mathcal{H}_N = - \sum_i (\psi + F) \circ \mathcal{T}^i \quad (28)$$

с ограниченной локальной регулярной функцией F . Экстремальные инвариантные меры являются выпуклыми комбинациями мер Гиббса с конечным радиусом взаимодействия:

$$\nu_\rho^N(dy) = Z_N^{-1} \left\{ \exp \left(- \lambda(\rho) \sum_i y(i) + \mathcal{H}_N(y) \right) \right\} dy(0) \cdots dy(N-1)$$

с λ , выбранным согласно (1); в противоположность модели (12) переменные будут зависимыми случайными величинами относительно равновесной меры. Система является градиентной с $U = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y(0)} \mathcal{H}_N$ (и не зависит от N при достаточно больших N). Положим в этом случае

$$\alpha(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nd} \log E^{\nu_0^N} \exp \left\{ \lambda \sum_i y(i) \right\}, \quad (29)$$

и пусть, кроме того, h — двойственная к функции a функция.

Резаханлу [Re1] доказал с помощью метода производства энтропии сходимость $\hat{Y}_t^N$ к решению уравнения (17) и, таким образом, его получил.

Модель интересна в силу существования фазового перехода или, иначе говоря, существования нескольких мер Гиббса $\nu_{\rho_0} \in M_1^+(\mathbf{R}^Z)$ в бесконечном объеме, соответствующих одному и тому же химическому потенциалу λ . В этом случае функция h не является строго выпуклой и эволюция описывается предельным уравнением диффузии, которое вырождено в критической области.

В случае фазового перехода справедливость соотношения (25) установлена не для всех пробных функций ψ , а только для $\psi = U$, где U вводится аналогично тому, как это делалось в п. 4.1.

Фритц [Fr1] изучил гиббсовские гауссовские модели Гинзбурга-Ландау. В [Fr2] он применил метод производства энтропии для случая бесконечного объема вместо тора. Трудность заключается в необходимости контроля производства энтропии на границе фиксированного объема. Наконец, отметим еще самый старый метод резольвенты, предложенный Папаниколау и Вараданом [PV]: Фритц использовал его в [Fr1] при отсутствии фазового перехода.

Только недавно Яу предложил в [Y] упрощенный метод производства энтропии, вычисляя относительную энтропию меры $f_t^N d\nu_0^N$ не относительно глобального равновесия ν_0^N , как в п. 4.2, а прямо относительно локального равновесия, профиль которого меняется во времени и пространстве: Яу заметил, что когда этот профиль есть решение гидродинамического уравнения, энтропия остается величиной $o(N)$ в каждый момент времени, и это позволяет установить сходимость $\hat{Y}_t^N$, как и выше, с тем преимуществом, что не надо прибегать к двухблоковым оценкам. Существенным ограничением этого упрощения является то обстоятельство, что оно работает только тогда, когда гидродинамическое уравнение имеет регулярное решение.

5. ДРУГИЕ НАПРАВЛЕНИЯ

5.1. Модели в непрерывном пространстве. Олла и Варадан [OV] изучали в фазовом пространстве (с координатным пространством $\mathbf{R}^Z$) системы большого числа частиц, у которых скорости являются процессами Орнштейна-Уленбека, связанными через отталкивающую силу; эта система необратима. В предельном переходе используется канонический формализм статистической механики. См. также статью Варадана [V] для броуновских частиц на торе с указанным выше

взаимодействием и статью Роста [Ro2] для стохастической модели одномерных сфер.

Фуаки непосредственно изучал модель Гинзбурга–Ландау на вещественной прямой — она задается стохастическим уравнением в частных производных [Fu].

5.2. Другие модели на решетке. Модель голосования не имеет сохраняющейся величины, но ее поведение очень похоже на изучаемое здесь; иерархическая цепочка замкнута, и это приводит к линейным уравнениям ($d \geq 3$) [PS].

Другие модели без законов сохранения приводят к уравнениям реакция–диффузия или к кинетическим уравнениям, и при этом к уравнениям (5) или (7) добавляется нелинейный член степени 0; генератор этих моделей имеет вид $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + a(\varepsilon) \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_1$ того же типа, что и выше, а $\mathcal{L}_2$ — генератор процесса скачков без сохраняющейся величины. Динамика $\mathcal{L}_2$ замедлена множителем $a(\varepsilon)$. Система еще находится в локальном равновесии согласно «гидродинамической» динамике, задаваемой $\mathcal{L}_1$, между скачками, разделенными во времени, задаваемыми $\mathcal{L}_2$. Здесь еще применимы гидродинамические методы. Де Мази, Феррари и Лебовиц [DFL] в случае, когда $\mathcal{L}_1$ есть генератор симметрического процесса с запретами, а $\mathcal{L}_2$ — генератор глауберовской динамики, доказали, что предельный профиль удовлетворяет уравнению $\partial \rho / \partial t = \partial^2 \rho / \partial x^2 + F(\rho)$, где $F(\rho)$ есть полином. Каприно, Де Мази, Пульвиренти и Презутти получили уравнение Карлемана (уравнение Больцмана с дискретными скоростями) как предельное уравнение [CDPP].

5.3. Негradientный диффузионный случай. Единственная неgradientная система, для которой был установлен предел (7b), — это процесс с запретами, симметричный в среднем. Он был изучен Вико [W2], причем динамический вклад в коэффициент диффузии был вычислен точно. Инк, Лебовиц и Шпон рассмотрели одномерный случай, когда ток есть сумма производной по пространству и производной по времени [ELS].

5.4. Большие отклонения. Поскольку гидродинамическое поведение сводится к закону больших чисел, изучение больших отклонений в гидродинамическом пределе может быть, в общих чертах, проведено аналогичным образом. Донскер и Варадан [DV] для модели Гинзбурга–Ландау, а Кипнис, Ола, Варадан [KOV] для симметричного процесса с запретами указали экспоненциальную перестройку меры $\hat{Y}_t^\varepsilon$ с помощью слабого медленно меняющегося в пространстве и времени возмущения генератора процесса. В первом случае интеграл действия есть интеграл по времени от нормы $\partial \rho / \partial t - (1/2) \partial^2 h'(\rho) / \partial x^2$

в пространстве $H_{-1}(\mathbb{T})$. Во втором случае возмущение интерпретируется как слабая асимметрия процесса с запретами. Заметим, что вероятность большого отклонения экспоненциально мала относительно меры $\hat{Y}_t^\epsilon$, ассоциированной с сохраняющейся величиной, но сверхэкспоненциально мала относительно других мер, когда эти отклонения не являются следствиями отклонений меры $\hat{Y}_t^\epsilon$. Это явление напоминает различие временных шкал флуктуаций [DIPP]. Заметим, наконец, что Ландим [La2] смог полностью решить задачу о больших отклонениях для чисел заполнения в случае симметричного процесса с запретами в размерности 1, построив «мостик» от этого вопроса к другому (более простому) вопросу относительно меры чисел заполнения $\hat{Y}_t^\epsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

- [AVA] Andjel E. D., Vares M. E., Hydrodynamic equations for attractive particle systems in $\mathbb{Z}$, J. Stat. Phys. **47** (1987), 265–288.
- [ABL] Andjel E. D., Bramson M. D., Liggett T. M., Shocks in the asymmetric exclusion process, Probab. Theory Related Fields **78** (1988), 231–247.
- [AK] Andjel E. D., Kipnis C., Derivation of the hydrodynamical equation for the zero-range interaction process, Ann. Prob. **15** (1987), 546–560.
- [BF1] Benassi A., Fouque J.-P., Hydrodynamic limit for the asymmetric simple exclusion process, Ann. Prob. **15** (1987), 546–560.
- [BF2] Benassi A., Fouque J.-P., Hydrodynamic limit for the asymmetric zero range process, Ann. Inst. Poincaré **24** (1988), 184–200.
- [BR] Brox T., Rost H., Equilibrium fluctuations of stochastic particle systems: The role of conserved quantities, Ann. Prob. **12** (1984), 742–759.
- [DKPS] De Masi A., Kipnis C., Presutti E., Saada E., Microscopic structure at the shock in the asymmetric simple exclusion, Stochastics **27**, (1989), No. 3, 151–165.
- [DEL] De Masi A., Ferrari P., Lebowitz J. L., Reaction–diffusion equations for interacting systems, J. Stat. Phys. **44**, (1986), 589–644.
- [DIPP] De Masi A., Ianiro N., Pellegrinotti A., A survey of the hydrodynamical behavior of many-particle systems. In non equilibrium phenomena II, from stochastics to hydrodynamics, J. L. Lebowitz and E. W. Montroll, eds., North-Holland, Amsterdam, 1984, 123–294.
- [DV] Donsker M., Varadhan S. R. S., Large deviations from a hydrodynamics scaling limit, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 243–270.
- [DS] Dobrushin R. L., Siegmund-Schutze R., Hydrodynamical limit for systems of particles with independent evolution, Math. Nachr. **105** (1982), 199–224.
- [ELS] Evink G., Lebowitz J. L., Spohn H., Hydrodynamics of stationary non-equilibrium states from stochastic lattice gas models, Comm. Math. Phys. **132** (1990) 153–183.

- [FR1] Fritz J., On the hydrodynamic limit of a Ginzburg-Landau model. The law of large numbers in arbitrary dimensions, *Probab. Theory Related Fields* **81** (1989), 291-318.
- [FR2] Fritz J., On the diffusive nature of entropy flow in infinite systems ..., *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 331-352.
- [Fu] Funaki T., The hydrodynamical limit for scalar Ginzburg-Landau model on $\mathbf{R}$, in: *Stochastic Analysis, Lect. Notes in Math.*, vol. 1322, 1988, 28-36.
- [FSK] Ferrari P., Kipnis C., Saada E., Microscopic structure of travelling wave in the asymmetric simple exclusion process, *Ann. Prob.* **19** (1991), 226-244.
- [GPV] Guo MZ., Papanicolaou G. C., Varadhan S. R. S., Non linear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions, *Comm. Math. Phys.* **118** (1988), 31-59.
- [KOV] Kipnis C., Olla S., Varadhan S. R. S., Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion process, *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989), 115-137.
- [La1] Landim C., Hydrodynamic equation for attractive particle systems on $\mathbf{Z}^d$, Preprint, Paris, 1989.
- [La2] Landim C., Thèse Université de Paris 7, 1990.
- [Li] Liggett T. M., *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1985. [Имеется перевод: Лиггетт Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. — М.: Мир, 1989.]
- [M] Morrey C. B., On the derivation of the equation of hydrodynamics from statistical mechanics, *Comm. Pure Appl. Math.* **8** (1955), 279-326.
- [OV] Olla S., Varadhan S. R. S., Scaling limit for interaction Ornstein-Uhlenbeck processes, Preprint, New York, 1990.
- [PV] G. Papanicolaou, Varadhan S. R. S., Boundary value problems with rapidly oscillating coefficients, in: *Random fields II*, ed. Fritz, Leibowitz, Szász, North Holland, Amsterdam, 1981.
- [Pr] Presutti E., Collective behavior of interacting particle systems, *Proceed. 1st World Congress Bernoulli Society*, 1986.
- [PS] Presutti E., Spohn H., Hydrodynamics of the voter model, *Ann. Prob.* **11** (1983), 867-875.
- [Re1] Rezakhanlou F., Hydrodynamic limit for a system with finite range interactions, *Comm. Math. Phys.* **129** (1990), 445-480.
- [Re2] Rezakhanlou F., Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbf{Z}^d$, Preprint, New York (1990).
- [Ro1] Rost H., Non-equilibrium behavior of a many particle systems: density profile and local equilibrium, *Z. Wahr. verw. Geb.* **58** (1981), 41-54.
- [Ro2] Rost H., Diffusion de sphères dures dans la droite réelle. Comportement macroscopique et équilibre local, *Lect. Notes in Math.*, vol. 1059, 1984, 127-143.
- [Si] Sinai Ya. G., Dynamics of local equilibrium Gibbs distributions and Euler equations. The one-dimensional case, *Selecta Math. Soviet.* **7** (1988), n°3, 279-289.
- [Sm] Smoller J., *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

- [Sp] Spohn H., Large scale dynamics of interacting particles. Part B: stochastic lattice gases, Preprint, Munich, 1989.
- [V] Varadhan S. R. S., Scaling limits for interacting diffusions, *Comm. Math. Phys.* **135** (1991), 313–353.
- [W1] Wick D., A dynamical phase transition in an infinite particle system, *J. Stat. Phys.* **38** (1985), 1015–1025.
- [W2] Wick D., Hydrodynamic limit of non-gradient interacting particle process, *J. Stat. Phys.* **54** (1989), 873–892.
- [Y] Yau H., Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg–Landau models, *Lett. Math. Phys.* **22** (1991), 63–80.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕДУКТИВНЫХ p -АДИЧЕСКИХ ГРУПП¹⁾

Ги Энньяра

1. ВВЕДЕНИЕ, ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ И ИСТОРИЯ

1.1. Пусть k — числовое поле, а G — связная редуктивная группа над k , например, GL_n . Обобщая классическое понятие модулярной формы, мы приходим к рассмотрению представлений группы точек группы G со значениями в кольце A_k аделей поля k , называемых автоморфными. Классическая ситуация отвечает случаю $G = GL_2$ и $k = \mathbb{Q}$. Группа $G(A_k)$ является ограниченным произведением групп $G(k_v)$, где v пробегает нормирования поля k , а k_v есть пополнение поля k относительно v . Это приводит к необходимости изучать представления групп $G(k_v)$. Когда v является архимедовой точкой, $G(k_v)$ оказывается группой Ли, и теория представлений здесь превосходно проработана (и имеет, кроме того, множество других мотиваций и интересных аспектов). В частности, эти представления классифицируются путем рассмотрения их ограничения на максимальную компактную подгруппу K — эта теория называется теорией K -типов (см. [Vo]). Если же v — неархимедова точка с характеристикой поля вычетов p , то k_v является конечным расширением поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и возникает проблема классификации или построения неприводимых представлений группы $G(k_v)$ (разумнее рассматривать гладкие представления, см. п. 1.2), например, в терминах ограничений на максимальные компактные подгруппы.

В настоящей статье представлены недавние результаты по этой проблеме, среди которых наиболее полные и показательные относятся к группе GL_n .

Изучение представлений группы $G(k_v)$ сводится не только к классификации или построению всех ее представлений. Например, хотелось бы знать, какие из этих представлений унитаризуемы, ибо унитарными являются представления, аналогичные автоморфным представлениям над числовыми полями в глобальном случае. Имеется также целая двойственная теория распределений, а именно инвари-

¹⁾Henniart Guy. Représentations des groupes réductifs p -adiques. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 736, Astérisque, 201–202–203, 1991, p. 193–219.

антных (относительно сопряжений) распределений на $G(k_v)$. Последние продвижения в этой теории особенно впечатляющи, но техника настолько сложна, что за неимением места и времени мы не сможем изложить здесь этих результатов.

1.2. Итак, пусть F — локально компактное неархимедово поле. Обозначим через p характеристику его поля вычетов. Если F имеет характеристику нуль, то оно является конечным расширением поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$; если же характеристика поля F есть p , то F изоморфно полю формальных лорановских рядов с коэффициентами в конечном поле — поле вычетов поля F .

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, определенная над F . Чаще всего мы будем считать, что $G = GL_n$. Группа $G = G(F)$ является локально компактной и вполне разрывной. Гладким представлением группы G называется такой гомоморфизм π из G в группу $GL(V)$, где V есть комплексное векторное пространство, что каждый вектор из V имеет открытый стабилизатор в G . Такое представление называется *неприводимым*, если инвариантными подпространствами в V относительно $\pi(G)$ являются лишь $\{0\}$ и V . Известно, что, когда π неприводимо, центр Z группы G действует на V как *характер*, т.е. непрерывный гомоморфизм в $C^\times$, называемый *центральным характером* представления π , и что π является *допустимым*, т.е. для любой открытой подгруппы H в G пространство V^H точек из V , неподвижных относительно $\pi(H)$, конечномерно. Если H , кроме того, компактна по модулю Z , то ограничение представления π на H является полупростым, а его изотипические компоненты конечномерны. Очень часто (в частности, для $G = GL_n$, $n > 1$) единственными гладкими неприводимыми конечномерными представлениями группы G являются представления размерности 1, т.е. характеры; поэтому в общем случае речь здесь идет о *бесконечномерных* представлениях. В то же время допустимость позволяет *алгебраически* изучать *допустимую двойственную* к G , т.е. множество классов изоморфизма неприводимых гладких представлений¹⁾ группы G . Общая теория гладких представлений изложена в [BZ1, Cas].

1.3. Общим приемом для получения гладких представлений группы G является *индуцирование*. Пусть H — замкнутая подгруппа в G и $\rho: H \rightarrow GL(W)$ — ее гладкое представление. Пусть $I(\rho)$ — про-

¹⁾Множество представлений данной группы G образует *категорию*, которая является (в духе теории Таннаки–Крейна) естественным *двойственным объектом* к G . Поэтому оригинальные термины “dual admissible” и (ниже) “dual cuspidale” получили при переводе женский род, индуцированный подразумевающимся словом «категория». — *Прим. перев.*

странство функций f на G со значениями в W , удовлетворяющих следующим условиям:

(i) существует такая открытая подгруппа K в G , что $f(gk) = f(g)$ для $g \in G$, $k \in K$;

(ii) существует такое компактное подмножество C в G , что f обращается в нуль вне HC ;

(iii) для $h \in H$ и $g \in G$ имеем $f(hg) = \rho(h)f(g)$.

Тогда G действует правыми сдвигами на пространстве $I(\rho)$, и получается гладкое представление группы G , называемое *компактно индуцированным* с ρ и обозначаемое $\text{ind}_H^G \rho$.

Эта конструкция используется, главным образом, в двух случаях. В первом из них H является *параболической* подгруппой P в G (в случае $G = GL_n$ это просто стабилизатор некоторого флага в F^n). Тогда множество $P \setminus G$ компактно и условие (ii) бессодержательно. В качестве ρ берется гладкое неприводимое представление подгруппы P , тривиальное на унитарном радикале подгруппы P , так что ρ задает представление подгруппы Леви в G , которая в случае GL_n есть произведение групп $GL_{n_i}(F)$ с $\sum n_i = n$. Тогда представление $\text{ind}_H^G \rho$ имеет конечную длину и его неприводимые подфакторы дают элементы допустимой двойственной к G . *Каспидальными* называются гладкие неприводимые представления группы G , которые не могут быть получены индуцированием, исходя из собственных параболических подгрупп в G . Видно, что по модулю знания допустимой двойственной для собственных подгрупп Леви в G (которые имеют над F размерность, строго меньшую размерности группы G) и изучения разложений представлений, индуцированных на G , определение допустимой двойственной для G сводится к определению ее *каспидальной* части, т.е. подмножества классов каспидальных представлений. Эта редукция для F является аналогом классификации Ленглендса представлений вещественных редуктивных групп. В ситуации, когда одновременно рассматриваются все группы $GL_n(F)$ с $n \geq 1$, тонкое исследование индуцирования с параболических подгрупп приводит к появлению чрезвычайно интересной алгебры Хопфа, введенной Бернштейном и Зелевинским [BZ2, Ze]; см. доклад Родье на семинаре Бурбаки [Ro].

1.4. Во втором случае, в котором используется индуцирование, H представляет собой открытую подгруппу, содержащую центр Z группы G и компактную по модулю Z . В этом случае всякое гладкое неприводимое представление ρ подгруппы H конечномерно и тривиально на некоторой открытой подгруппе; это весьма близко к представлениям конечных групп. Кроме того, гладкое представление $\pi = \text{ind}_H^G \rho$ группы G *допустимо* тогда и только тогда, когда оно явля-

ется прямой суммой конечного числа каспидальных представлений этой группы [Bu2], а если π неприводимо, то оно допустимо и каспидально. Можно указать критерий неприводимости для π , звучащий примерно так же, как и для конечных групп: чтобы π было неприводимым, достаточно, чтобы для $g \in G - H$ ограничения на $H \cap gHg^{-1}$ представлений ρ и $\rho^g: x \mapsto \rho(g^{-1}xg)$ не имели общих компонент.

Известно, что матричные коэффициенты каспидального представления имеют компактные по модулю Z носители; кроме того, носитель характера (следа) представления π лежит в объединении подгрупп, компактных по модулю Z [De]. Разумно предположить, что каждое каспидальное представление группы G получается как композиционный фактор некоторого допустимого представления, индуцированного с открытой и компактной по модулю Z подгруппы, или же само является индуцированным. Недавно Корвин, с одной стороны [Co4], а Башнелл и Куцко, с другой [BK], анонсировали доказательство следующего результата:

Теорема 1. Пусть π — (гладкое неприводимое) каспидальное представление группы $GL_n(F)$. Тогда π индуцировано с некоторого допустимого представления открытой и компактной по модулю центра подгруппы.

На самом деле этот результат не является простой констатацией существования. Некоторым точным и достаточно интересным способом можно составить список таких пар (H, ρ) , в которых H — открытая и компактная по модулю центра подгруппа в $GL_n(F)$, а ρ — ее гладкое неприводимое представление, что всякое каспидальное представление группы $GL_n(F)$ будет индуцировано с одной из пар (H, ρ) , и можно сказать, когда две такие пары (H, ρ) и (H', ρ') индуцируют на G изоморфные представления. Таким образом, можно говорить о настоящей параметризации каспидальной двойственной для G .

Можно, далее, истолковать этот результат так, чтобы он напоминал теорию K -типов для случая групп Ли: если π — каспидальное представление группы G , то в упомянутом списке существует пара (H, ρ) , единственная с точностью до сопряжения с помощью элемента из G , такая, что ограничение представления π на H содержит ρ (как компоненту), а само π индуцировано с ρ .

Эти два истолкования указанного результата отвечают фактически двум различным подходам, каждый из которых послужил отправной точкой для работ, кратко упоминаемых в п. 1.7.

1.5. При первом подходе, который развит Корвином, доказательство происходит в два этапа. Как и выше, оно начинается с построения таких пар (H, ρ) , что представление, индуцированное с ρ на $GL_n(F)$

является каспидальным, и определяются пары (H, ρ) , задающие одно и то же представление. Проблема на этой стадии состоит, главным образом, в том, чтобы угадать достаточное количество пар (H, ρ) . Затем следует доказать, что мы получили все каспидальные представления группы $GL_n(F)$. Для этого используется прямое вычисление (проделанное Туннеллом в его диссертации [Tu] для $n = 2$) и сравнение с представлениями внутренних форм группы $GL_n(F)$. Элемент π допустимой двойственной для $GL_n(F)$ обладает инвариантом $a(\pi) \in \mathbb{N}$, называемым *кондуктором* π , и известно, что при заданных значениях кондуктора и центрального характера имеется не более чем конечное число каспидальных элементов в двойственной. Вычисление состоит в проверке того, что пары (H, ρ) задают достаточное количество каспидальных элементов. Но знать бы это количество!

Для этого рассмотрим тело D с центром F , имеющее степень n^2 над F . Центр локально компактной группы $D^\times$ отождествляется с центром Z группы $GL_n(F)$; кроме того, группа $D^\times$ компактна по модулю Z , откуда следует, что допустимая двойственная $\widehat{D^\times}$ к $D^\times$ состоит из конечномерных представлений. Если обозначить через P_D идеал нормирования в D , то каждый элемент τ из $\widehat{D^\times}$ тривиален на некоторой группе вида $(1 + P_D^i) \cap D^\times$, где i — некоторое положительное целое число, а *кондуктор* представления τ есть число $j - n + 1$, где j — наименьшее число с указанным свойством. Путем глобальных рассуждений, используя версию формулы следа для GL_n и ее внутренних форм, можно установить $[Rg, DKV]$ существование биекции между допустимой двойственной $\widehat{D^\times}$ к $D^\times$ и несвязным объединением каспидальных частей допустимых двойственных к $GL_d(F)$, где d пробегает множество делителей числа n ; эта биекция совместима с центральными характерами и кондукторами в том смысле, что если π является каспидальным элементом в двойственной к $GL_n(F)$, а $\tau \in \widehat{D^\times}$ отвечает π при этой биекции, то π и τ имеют одинаковые центральные характеры и кондукторы.

Таким же способом, каким были угаданы каспидальные представления $GL_n(F)$, угадывают и строят элементы из $\widehat{D^\times}$, и для $D^\times$ ситуация с нахождением всей двойственной $\widehat{D^\times}$ достаточно проста. (По правде сказать, начинают с анализа и построения $\widehat{D^\times}$, что помогает в поисках каспидальных представлений группы $GL_n(F)$; см. замечание ниже.) Сравнивая количество уже полученных представлений групп $GL_d(F)$ и $D^\times$ (при данных центральном характере и кондукторе), мы видим, что получили всю каспидальную двойственную к $GL_n(F)$.

Замечание. В простых случаях, например, когда n взаимно просто с p , параметрами, описывающими пары (H, ρ) для $GL_n(F)$ являются:

- расширение E степени n над F , содержащееся в $M_n(F)$;
- аддитивный характер тела E ;
- мультипликативный характер группы $E^\times$.

(Эти данные должны удовлетворять некоторым условиям согласованности.)

Итак, тело D содержит расширение поля F , изоморфное E и единственное с точностью до сопряжения. Понятно, что можно перенести параметры для $GL_n(F)$ на $D^\times$ и наоборот. Остается явно описать в этих конкретных терминах биекцию из [DKV].

1.6. Видно, что изложенный путь достаточно извилист и не объясняет существа полученной параметризации. И несомненно, накладно использовать сложную глобальную теорию для получения локального результата.

С другой стороны, препринт [Co4] чрезвычайно насыщен техникой и труден для чтения, и я не стану утверждать, что успешно проследил все вычисления, разобрал все детали или прояснил темные места.

В разд. 3 мы обратимся к методу, использованному Башнеллом и Куцко, который обладает, на мой взгляд, следующими преимуществами:

- Он чисто локален и не использует ни сравнений с другими группами, ни вычислений.
- Он концептуально ясен и, следовательно, допускает обобщения (см. разд. 4). В частности, мы увидим, каким образом новое понятие *простого страта* оказывается ключом к классификации.
- Собственно говоря, речь идет не столько об описании каспидальной двойственной к $GL_n(F)$, сколько о классификации *всей* допустимой двойственной к $GL_n(F)$ путем ограничения на открытые подгруппы, компактные по модулю центра. Указанный метод, по большей своей части, не зависит от вышеупомянутой техники Бернштейна и Зелевинского.

По недостатку места в разд. 3 мы лишь опишем взаимосвязь идей и результатов, но не коснемся доказательств. Раздел 2 посвящен общим конструкциям и изучению простых случаев, дающих почувствовать, почему общий случай настолько сложен.

1.7. В заключение этого введения не будет лишним крошечный исторический обзор.

В случае $p \neq 2$ с давних пор хорошо известна (см. [GGPS, JL]) конструкция каспидальной двойственной для $GL_2(F)$, опирающаяся на представление Вейля.

В 70-е гг. Хоув предложил подойти к общему случаю, изучив ограничения на открытые и компактные по модулю центра подгруппы

[Ho1]. В умеренном случае, когда n взаимно просто с p , он описал [Ho2] некоторую конструкцию каспидальных представлений группы $GL_n(F)$, появляющихся из представлений открытых и компактных по модулю центра подгрупп; эти последние представления были параметризованы некоторыми мультипликативными характеристиками расширений степени n поля F . Тот факт, что получится вся каспидальная двойственная к $GL_n(F)$ при n , взаимно простом с p , доказан Моем [My1] в значительной мере с помощью вычислений (проделанных для $n = 2$ Туннеллом [Tu]). В это же время Куцко [Ku1] описал допустимую двойственную для $GL_2(F)$ при произвольном p , пользуясь локальным методом, и Карайоль [Ca] ввел понятие суперкаспидального представления максимальной компактной по модулю центра подгруппы в $GL_n(F)$ (эти представления легко описать явно), показав, что с помощью индуцирования они дают каспидальные представления группы G ; кроме того, он доказал (опять с помощью вычислений), что при простом n так получается вся каспидальная двойственная к $GL_n(F)$.

Но обратимся все же к общему случаю. В [Wa] Вальдспургер нашел обобщения конструкций Хоува и Карайоля и проанализировал также большую часть допустимой двойственной к $GL_n(F)$, но его построения не дали всей двойственной. В 1985 г. Мой [My2] предложил понятие минимального K -типа, существование которого было доказано немного позже Башнеллом [Bu2] (см. также [HM1]), который сумел дать локальное доказательство того, что для простого n конструкции Карайоля дают всю каспидальную двойственную. Куцко получил затем также локальный, но более прямой вариант доказательства того же результата [Ku2].

В рамках другого подхода Хоув [Ho3] ввел изоморфизмы алгебр Гекке, примеры которых мы увидим далее (об этих изоморфизмах говорится также в [Wā]), а в [HM2] Хоув и Мой извлекли из рассмотрения этих изоморфизмов локальную конструкцию всей каспидальной двойственной к $GL_n(F)$, когда n просто или взаимно просто с p .

Наконец, результат Корвина [Co4] послужил отправной точкой для цикла статей [Co1–Co3], в которых рассматриваются все более и более общие случаи, как для $GL_n(F)$, так и для $D^\times$, тогда как работа Башнелла и Куцко [BK] венчает серию [Bu2, Ku2, Wa, KM1, KM2].

2. ОБЩИЕ КОНСТРУКЦИИ И НЕСКОЛЬКО ПРОСТЫХ СЛУЧАЕВ

2.1. В этом разделе мы покажем, как анализируются ограничения гладких представлений группы $GL_n(F)$ на компактные по модулю центра подгруппы — все более и более тонко во все более усложня-

ющихся ситуациях. Ради удобства мы используем терминологию из [ВК], которая еще послужит в разд. 3.

Пусть R — кольцо целых поля F , P — его максимальный идеал, $\tilde{F}$ — поле вычетов R/P и q — его мощность; зафиксируем также униформизирующую $\tilde{\omega}$ в F и аддитивный характер ψ , тривиальный на P , но не на R .

Зафиксируем целое число $n \geq 2$ и векторное пространство V размерности n над F . Обозначим через $A = \text{End}_F(V)$ кольцо эндоморфизмов пространства V , через G группу обратимых элементов в A и через Z ее центр. Каждая подгруппа в G , компактная по модулю Z , содержится в некоторой подгруппе, компактной по модулю Z и максимальной среди подгрупп с этим свойством. Однако в противоположность архимедову случаю две такие максимальные подгруппы не являются сопряженными. Их можно описать с помощью *цепочек решеток* в V .

Решеткой L в V называется свободный R -подмодуль в V ранга n . *Цепочкой решеток* называется убывающая последовательность решеток $\mathcal{L} = (L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, для которой существует такое число $e \in \mathbb{Z}$, называемое периодом цепочки $\mathcal{L}$, что $L_{i+e} = \tilde{\omega} L_i$ для $i \in \mathbb{Z}$. Две цепочки решеток называются *эквивалентными*, если они отличаются сдвигом индексов; класс эквивалентности цепочки $\mathcal{L}$ обозначается $[\mathcal{L}]$.

Пусть $\mathcal{L}$ — цепочка решеток в V . Кольцо

$$A_{\mathcal{L}} = \{g \in A \mid gL_i \subset L_i \text{ для } i \in \mathbb{Z}\}$$

является наследственным порядком в A [Re] с радикалом Джекобсона

$$P_{\mathcal{L}} = \{g \in A \mid gL_i \subset L_{i+1} \text{ для } i \in \mathbb{Z}\},$$

а стабилизатор

$$H_{\mathcal{L}} = \{g \in A \mid \exists j \in \mathbb{Z} : gL_i \subset L_{i+j} \text{ для } i \in \mathbb{Z}\}$$

цепочки $\mathcal{L}$ в G является открытой подгруппой, компактной по модулю Z . При этом $A_{\mathcal{L}}$, $P_{\mathcal{L}}$ и $H_{\mathcal{L}}$ зависят только от $[\mathcal{L}]$. Пусть e — период цепочки $\mathcal{L}$; для каждого $i \in \mathbb{Z}$ пространство L_i/L_{i+e} есть векторное пространство над $\tilde{F}$, а последовательность

$$0 = L_{i+e}/L_{i+e} \subset L_{i+e-1}/L_{i+e} \subset \dots \subset L_{i+1}/L_{i+e} \subset L_i/L_{i+e}$$

образует флаг в этом векторном пространстве. Говорят, что цепочка $\mathcal{L}$ *равномерна*, если размерность пространства L_i/L_{i+1} над $\tilde{F}$ не зависит от i ; это равносильно тому, что $A_{\mathcal{L}}$ — главный порядок, т.е. что $P_{\mathcal{L}}$ есть свободный левый модуль над $A_{\mathcal{L}}$. Если положить $f = \dim_{\tilde{F}}(L_i/L_{i+1})$, то получим $ef = n$. Если цепочка $\mathcal{L}$ *равномерна*, то $H_{\mathcal{L}}$ является максимальной компактной по модулю Z подгруппой

в G . Обратно, всякая максимальная компактная по модулю Z подгруппа H в G имеет вид $H_{\mathcal{L}}$ для некоторой равномерной цепочки $\mathcal{L}$, класс эквивалентности которой определяется подгруппой H . Подгруппы $H_{\mathcal{L}}$ и $H_{\mathcal{L}'}$ с равномерными $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ сопряжены тогда и только тогда, когда цепочки $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ имеют одинаковый период.

Если дано гладкое неприводимое представление π группы G , то для начала надо рассмотреть ограничения представления π на подгруппы вида $H_{\mathcal{L}}$ и доказать, что для удачно выбранной $H_{\mathcal{L}}$ это ограничение содержит представление ρ подгруппы группы $H_{\mathcal{L}}$ весьма частного вида. Понятие представления «весьма частного вида» будет подвергнуто последовательному уточнению с тем, чтобы на высших стадиях этого процесса мы как раз смогли заключить, что если π каспидально, то оно индуцировано с ρ .

2.2. Пусть $\mathcal{L} = (L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ — некоторая цепочка решеток в V периода e . Введем фильтрацию $H_{\mathcal{L}}$ подгруппами

$$H_{\mathcal{L}}^0 = \{g \in G \mid gL_i = L_i \text{ для } i \in \mathbb{Z}\} \text{ и } H_{\mathcal{L}}^i = 1 + P_{\mathcal{L}}^i, \quad i \geq 1.$$

Каждое гладкое неприводимое представление ρ группы $H_{\mathcal{L}}$ тривиально на $H_{\mathcal{L}}^i$ при достаточно большом i ; если i — наименьшее целое, большее единицы, при котором это так, то число $(i-1)/e$ называется *уровнем* представления ρ .

Группа $H_{\mathcal{L}}^0/H_{\mathcal{L}}^1$ изоморфна конечной группе $\prod_{i=1}^e GL_{\mathbb{F}}(L_{i-1}/L_i)$, представления которой давно хорошо известны [Gr]. Для целых чисел m и r , удовлетворяющих неравенствам $2m \geq r > m \geq 1$, группа $H_{\mathcal{L}}^m/H_{\mathcal{L}}^r$ абелева и изоморфна аддитивной группе $P_{\mathcal{L}}^m/P_{\mathcal{L}}^r$, причем изоморфизм осуществляется отображением $1+x \mapsto x$. Если ρ — гладкое неприводимое представление группы $H_{\mathcal{L}}$, тривиальное на $H_{\mathcal{L}}^r$, то его ограничение на $H_{\mathcal{L}}^m$ разлагается в сумму характеров группы $H_{\mathcal{L}}^m/H_{\mathcal{L}}^r$, сопряженных друг с другом с помощью $H_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}^r$. Эти характеры, конечно же, отвечают характерам группы $P_{\mathcal{L}}^m/P_{\mathcal{L}}^r$. Но группа характеров последней отождествляется с $P_{\mathcal{L}}^{1-r}/P_{\mathcal{L}}^{1-m}$: каждому элементу $b \in P_{\mathcal{L}}^{1-r}$ ставится в соответствие характер $\psi_b: x \mapsto \psi \circ \text{Tr}(bx)$ на $P_{\mathcal{L}}^m$, который тривиален на $P_{\mathcal{L}}^r$ и зависит лишь от класса элемента b по модулю $P_{\mathcal{L}}^{1-m}$. Кроме того, действие группы $H_{\mathcal{L}}$ сопряжениями на характерах группы $P_{\mathcal{L}}^m/P_{\mathcal{L}}^r$ переходит в действие $H_{\mathcal{L}}$ сопряжениями на $P_{\mathcal{L}}^{1-r}/P_{\mathcal{L}}^{1-m}$.

Определение [BK]. *Стратом* в A называется четверка $([\mathcal{L}], r, m, b)$, в которой $\mathcal{L}$ есть цепочка решеток, r и m — два целых числа, $r > m$, а b — элемент из $P_{\mathcal{L}}^r$. Два страта $([\mathcal{L}], r, m, b)$ и $([\mathcal{L}], r, m, b')$ являются *эквивалентными*, если $b \equiv b' \pmod{P_{\mathcal{L}}^m}$. Страт вида $([\mathcal{L}], r,$

$r - 1, b)$ называется *фундаментальным*, если $r \geq 1$ и множество $b + P_{\mathcal{L}}^{1-r}$ не содержит нильпотентных элементов кольца A .

2.3. Пусть π — гладкое неприводимое представление группы G и $s = ([\mathcal{L}], r, m, b)$ — некоторый страт в A с $2m \geq r > 1$. Говорят, что π *содержит* s , если его ограничение на $H_{\mathcal{L}}^{m+1}$ содержит как компоненту характер ψ_b , отвечающий элементу b . Фундаментальные страты были введены Моем [Mo2], который высказал следующее предположение, доказанное впоследствии Башнеллом [Bu1].

Теорема 2. Пусть π — гладкое неприводимое представление группы G . Тогда либо (случай а)) π содержит фундаментальный страт $([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$, либо (случай б)) существует такая цепочка решеток $\mathcal{L}$, что ограничение $\pi|_{H_{\mathcal{L}}^0}$ содержит тривиальное на $H_{\mathcal{L}}^0$ представление, отвечающее каспидальному представлению конечной группы $H_{\mathcal{L}}^0/H_{\mathcal{L}}^1$.

Замечание. Разумеется, каспидальными называются те представления линейных групп над конечными полями, которые не могут быть получены индуцированием с собственных параболических подгрупп. Все они известны (см. [Md]).

Если $([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$ — фундаментальный страт, а $\mathcal{L}$ имеет период e , то элемент $b^e/\tilde{\omega}^m$ принадлежит $A_{\mathcal{L}}$; через ϕ_b мы обозначим редукцию его характеристического многочлена по модулю P .

Теорема 3. Пусть мы находимся в условиях случая а) теоремы 2.

а) [Bu1, HM1] Уровень r/e и многочлен ϕ_b не зависят от фундаментального страта $([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$, содержащегося в π . Этот уровень является наименьшим из уровней стратов, содержащихся в π .

б) [Ku2] Если многочлен ϕ_b является в $\tilde{F}[X]$ произведением двух взаимно простых сомножителей, степени которых больше 1 (тогда говорят, что страт расщепился), то представление π не является каспидальным.

Теорема 2 доказывается (в значительной степени) путем обращения к нефундаментальному страту $([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$, содержащемуся в π , и модификации цепочки решеток в направлении, указываемом флагом ядер итераций некоторого нильпотентного элемента из $b + P_{\mathcal{L}}^{1-r}$; отсюда также следует утверждение относительно уровня в теореме 3а). Для доказательства утверждения теоремы 3б) разложение многочлена ϕ_b поднимается до разложения fg в $R[X]$ характеристического многочлена элемента $y = b^e/\tilde{\omega}^m$, после чего с помощью разложения пространства V в сумму $\text{Ker } f(y) \oplus \text{Ker } g(y)$ доказывается, что один из матричных коэффициентов представления π имеет некомпактный по модулю Z носитель. Фактически можно доказать, что π инду-

цировано с гладкого неприводимого представления подгруппы Леви в G , отвечающей указанному разложению V .

Замечание. Таким же образом, и даже легче, разбирается случай б) теоремы 2.

2.4. Теперь необходимо улучшить понятие фундаментального страта.

Определение. Говорят, что страт $([L], r, r-1, \alpha)$ имеет тип альфа¹⁾ [KM1], если $r \geq 1$ и

- (i) $\alpha \notin P_L^{1-r}$,
- (ii) расширение $E = F[\alpha]$ является полем и H_L содержит $E^\times$,
- (iii) элемент α минимален, т.е. значение $v(\alpha)$ нормализованного нормирования элемента α в E взаимно просто с индексом ветвления $e(E/F)$ и поле вычетов поля E порождается над $\tilde{F}$ классом $\alpha^{e(E/F)} \tilde{\omega}^{-v(\alpha)}$.

Страт называется *суперкаспидальным* (см. [Ca]), если он имеет тип альфа, а поле E имеет степень n над F .

Отметим, что страт типа альфа обязательно фундаментальный и нерасщепляющийся.

Теорема 4. а) Пусть страт $s = ([L], r, r-1, \alpha)$ является суперкаспидальным, а ρ — представление группы H_L , содержащее s . Тогда представление, индуцированное на G с ρ , неприводимо и каспидально.

б) Пусть L — цепочка решеток периода 1, а ρ — представление группы H_L , тривиальное на H_L^1 и отвечающее некоторому каспидальному представлению группы H_L^0/H_L^1 (изоморфной $GL_n(\tilde{F})$). Тогда представление, индуцированное на G с ρ , неприводимо и каспидально.

с) Пусть π — каспидальное представление группы G , полученное с помощью процедур а) или б). Тогда пара (H_L, ρ) определена однозначно с точностью до сопряжения.

Этот результат вытекает из критерия неприводимости из п. 1.4. Например, в случае а), если ρ не является неприводимым, то существует элемент $g \in G - H_L$, для которого характеры ψ_α и $\psi_{g\alpha g^{-1}}$ имеют одно и то же ограничение на $H_L^1 \cap g^{-1}H_L^1g$. Но для суперкаспидального страта отсюда легко следует, что g принадлежит H_L . Утверждения б) и с) доказываются аналогичным способом. Представления ρ , упоминаемые в а) и б), легко описать явно. Их можно занумеровать парами, состоящими из кондуктора и центрального характера, а прямое вычисление приводит к такому следствию:

¹⁾В оригинале "est dite alfalfa". — Прим. перев.

Следствие. Предположим, что число n просто. Пусть π — каспидальное представление группы G . Тогда существует такой характер χ группы $F^\times$, что представление $\pi \otimes (\chi \circ \det)$ получается с помощью конструкций а) или б) теоремы 4.

2.5. Для числа n , не являющегося простым, это, увы, не конец.

Предложение 1 [Ku2]. Пусть $s = ([\mathcal{L}], r, r-1, b)$ — фундаментальный нерасщепляющийся страт. Тогда существует страт типа альфа $([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$, принадлежащий каждому гладкому неприводимому представлению группы G , содержащему s .

Поскольку страт s является нерасщепляющимся, многочлен ϕ_b есть степень неприводимого многочлена из $\tilde{F}[X]$; идея состоит в том, чтобы подыскать такой полупростой элемент α , что $\phi_b = \phi_\alpha$. Итак, мы приходим, по крайней мере если интересуемся каспидальной двойственной к G , к необходимости изучить гладкие неприводимые представления группы G , содержащие страт типа альфа.

Предположим временно, что n является простым, а гладкое неприводимое представление π группы G содержит страт типа альфа $s = ([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$. В таком случае либо $\alpha \in F$ и тогда существует такой характер χ группы $F^\times$, что $a(\pi \otimes (\chi \circ \det)) < a(\pi)$, либо расширение $F[\alpha]$ имеет степень n и тогда страт является суперкаспидальным, а π каспидально и индуцировано с $H_{\mathcal{L}}$. Воспользовавшись возрастанием значений кондукторов, получаем локальное доказательство предыдущего следствия. (Доказательство из [Bul] использует понятие фундаментального страта и функциональное уравнение для дзета-функции, ассоциированной с π .)

2.6. Ситуация резко усложняется, когда n является произведением p и некоторого простого числа [KM2, Co2]. В то же время ситуация становится более благоприятной в умеренном случае, когда n взаимно просто с p . Опишем кратко на нашем языке результаты Хоува и Моя [HM2].

Пусть $s = ([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$ — страт типа альфа в V . Положим $E = F[\alpha]$ и обозначим через G' централизатор элемента α в G , так что группа G' изоморфна группе $GL_m(E)$ с $m[E:F] = n$. Тогда можно найти компактную открытую подгруппу H в G , содержащую $H_{\mathcal{L}}$, и характер ψ'_α подгруппы H , продолжающий ψ_α , такой, что, с одной стороны, каждое гладкое представление группы G , содержащее s , содержит (при ограничении на H) также и характер ψ'_α , а с другой стороны, алгебра Гекке $\mathcal{H}(G, \psi'_\alpha)$ (см. 3.1), представления которой описывают гладкие представления группы G , содержащие ψ'_α , изоморфна алгебре Гекке $\mathcal{H}(G', 1)$, представления которой описывают гладкие представления группы G' , содержащие тривиальное

представление группы $H_{\mathcal{L}}^r \cap H$. Поскольку в этом умеренном случае группа $H_{\mathcal{L}}^r \cap H$ имеет вид $H_{\mathcal{L}'}^m$, где $\mathcal{L}'$ — некоторая цепочка R_E -решеток в векторном пространстве V над полем E , можно действовать по индукции, которая позволит описать каспидальную двойственную к G . (Таким же образом разбирается случай b) теоремы 2.)

2.7. Рассмотрим случай, когда n является произведением двух простых чисел [KM2], следуя изложению [BK, р. 15–16]. Мы начнем с гладкого неприводимого представления группы G , содержащего страт типа альфа $([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$. Мы выберем этот страт так, чтобы π содержало страт $([\mathcal{L}], r, m, \alpha)$ с минимальным отношением $m/e(\mathcal{L})$. Предположим для ясности, что $m > [r/2]$ (для $m = [r/2]$ рассуждения надо подправить). Тогда ограничение представления π на $H_{\mathcal{L}}^m$ содержит характер $\psi_{\alpha'}$, переходящий при ограничении на $H_{\mathcal{L}}^{m+1}$ в ψ_{α} , т.е. $\alpha' = \alpha + b$ с $b \in P_{\mathcal{L}}^{-m}$. Отметим, что страт $([\mathcal{L}], r, m-1, \alpha+b)$ не является стратом типа альфа. Положим $E = F[\alpha]$ и $B = \text{End}_E(V) \subset A$; тогда $\mathcal{L}$ есть некоторая цепочка R_E -решеток в векторном пространстве V над E . Обозначим через $H'_{\mathcal{L}}$ стабилизатор цепочки решеток $\mathcal{L}$ в $B^{\times}$; имеем $H_{\mathcal{L}}^i = H'_{\mathcal{L}} \cap B^{\times}$ для $i \geq 0$. Ограничение ψ_b на $H'_{\mathcal{L}}^m$ определяет страт $([\mathcal{L}], m, m-1, b')$ в B . Утверждение (трудное), доказанное в [KM2], гласит, что можно добиться, чтобы этот страт был фундаментальным в B . Если он окажется расщепляющимся, то π не будет каспидальным (ср. с теоремой 3b)); в противном случае можно предположить, что этот страт имеет тип альфа и тогда элемент $\alpha + b$ порождает поле. Если это поле имеет степень n над F , то ситуация становится похожей на суперкаспидальный случай: π непременно каспидально и индуцировано с $H_{\mathcal{L}}$. Поскольку n является произведением двух простых чисел, получаем $[F[\alpha + b] : F] > [F[\alpha] : F] > 1$. Можно было бы надеяться, что эта процедура останется в силе и для произвольного n , т.е. что можно работать со стратом $([\mathcal{L}], m, m-1, b')$ в B . Но это, к сожалению, не так: нужно вернуться к F как к основному полю и работать со стратом $([\mathcal{L}], r, m-1, \alpha+b)$ в A . Похожий феномен представлен также в [Co4], что объясняет, почему прямой подход из [Co4] оказывается сложнее, чем из [Co2].

3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ: ПРОСТЫЕ СТРАТЫ И АЛГЕБРЫ ГЕККЕ

3.1. Обратимся теперь к случаю GL_n с произвольным n , следуя [BK]. Изучаются алгебры Гекке, связанные с представлениями компактных открытых подгрупп в $G = GL_n(F)$, и, в частности, сплетающие операторы для таких представлений; это приводит к сплетающим операторам между стратами, а простые страты (это фундаментальное понятие введено в [BK]) суть те, сплетающие операторы между кото-

рыми, весьма легко описываемые, позволяют провести анализ, сложность которого подчеркивалась в п. 2.7.

Начнем с определения подходящих алгебр Гекке. Зафиксируем меру Хаара dg на G (G является унимодулярной). Обозначим через $\mathcal{H}(G)$ алгебру локально постоянных функций на G с компактным носителем относительно операции свертки:

$$\phi\psi(g) = \int_G \phi(h)\psi(h^{-1}g) dh.$$

Если π — гладкое представление группы G в пространстве V , то алгебра $\mathcal{H}(G)$ действует на V по формуле

$$\pi(\phi)(v) = \int_G \phi(h)\pi(h)(v) dh,$$

где $\phi \in \mathcal{H}(G)$ и $v \in V$.

Зафиксируем открытую компактную подгруппу H в G и некоторое гладкое неприводимое представление (разумеется, конечномерное) $\rho: H \rightarrow GL(W)$. (Имеется вариант последующих рассуждений для случая подгрупп, компактных по модулю Z .) Рассмотрим идемпотент e_ρ в $\mathcal{H}(G)$, определенный равенством

$$e_\rho(x) = \begin{cases} \text{vol}(K)^{-1} \dim(\rho) \text{Tr } \rho(x^{-1}) & \text{для } x \in H, \\ 0 & \text{для } x \notin H. \end{cases}$$

Тогда $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$ есть подалгебра в $\mathcal{H}(G)$ с элементом e_ρ в качестве единицы. Если представление π такое, как указано выше, его ограничение на H полупросто и $\pi(e_\rho)$ есть проектор на изотипическую компоненту $V(\rho)$, которая, конечно, является модулем над $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$. Имеется естественная биекция, отвечающая компоненте $V(\rho)$ в V , между классами изоморфизма гладких неприводимых представлений $\pi: G \rightarrow GL(V)$, удовлетворяющих условию $V(\rho) \neq 0$, и классами изоморфизма простых модулей над $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$.

3.2. На самом деле удобно использовать другую алгебру $\mathcal{H}(G, \rho)$, связанную с ρ и эквивалентную $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$ в смысле Мориты. Она называется алгеброй сплетений представления ρ . Обозначим через $\rho^\vee$ контраградиентное к ρ представление; имеем $\rho^\vee(g) = {}^t \rho(g^{-1})$ для $g \in G$. Пространство $\mathcal{H}(G, \rho)$ порождается локально постоянными функциями на G с компактным носителем со значениями в $\text{End}_{\mathbb{C}}(W^*)$, удовлетворяющими соотношению

$$\Phi(hgh') = \rho^\vee(h) \circ \Phi(g) \circ \rho^\vee(h')$$

для h, h' из H и g из G . Умножение в этом пространстве — свертка:

$$\Phi\Phi'(g) = \int_G \Phi(a) \circ \Phi'(a^{-1}g) da.$$

Имеется изоморфизм алгебры $\mathcal{H}(G, \rho) \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ на $e_{\rho} \mathcal{H}(G) e_{\rho}$, сопоставляющий элементу $\Phi \otimes (w \circ w^*)$ с $w \in W$ и $w^* \in W^*$ функцию $g \mapsto \dim \rho \text{Tr}(w \otimes \Phi(g)w^*)$.

Для $g \in G$ обозначим через H^g группу gHg^{-1} и через $\rho^g: H^g \rightarrow GL(W)$ представление¹⁾ $x \mapsto \rho(g^{-1}xg)$. Обозначим через $\text{Hom}(\rho^g, \rho)$ пространство таких эндоморфизмов ϕ пространства W , что $\phi \circ \rho^g(x) = \rho(x) \circ \phi$ для $x \in H \cap H^g$. Скажем, что g *сплетает* ρ (само с собой), если указанное пространство является ненулевым. Носители функций из $\mathcal{H}(G, \rho)$ определяются сплетениями представления ρ .

Предложение. Пусть $g \in G$. Существует канонический изоморфизм между пространством $\text{Hom}(\rho^g, \rho)$ и пространством функций из $\mathcal{H}(G, \rho^{\vee})$, обращающихся в нуль везде, кроме HgH .

Замечание. Случай, когда H компактна по модулю Z и $\text{Hom}(\rho^g, \rho) = 0$ для $g \notin H$, т.е. когда алгебра $\mathcal{H}(G, \rho^{\vee})$ одномерна, в точности совпадает с ситуацией, когда представление $\text{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо и каспидально (ср. п. 1.4).

3.3. Грубо говоря, анализ элемента π допустимой двойственной к G производится путем обращения к паре (H, ρ) , относительно просто связанной с π , например к паре, отвечающей в силу п. 2.2 страту типа альфа $([L], r, r-1, \alpha)$ (см. п. 2.4), и последовательного улучшения рассмотрений, т.е. увеличения группы H , например, переходом к страту $([L], r, m, b)$ с $r/2 \leq m < r-1$.

Понятие сплетения переносится на страты способом, совместимым с отображением $b \mapsto \psi_b$ из п. 2.2. Элемент $g \in G$ *сплетает* страт $\Omega = ([L], r, m, b)$ со стратом $\Omega' = ([L'], r', m', b')$, если множество $g^{-1}(b + P_L^{-m})g \cap (b' + P_{L'}^{-m'})$ непусто. Через $I_G(\Omega)$ обозначим множество элементов группы G , сплетающих страт Ω сам с собой.

Особенный интерес (см. п. 2.4) представляют *чистые* страты $\Omega = ([L], r, m, \beta)$, т.е. такие, что страт $([L], r, r-1, \beta)$ удовлетворяет двум первым условиям из определения п. 2.4 (если он удовлетворяет еще и третьему условию, то говорят, что Ω *минимален*). Итак, зафиксируем *чистый* страт Ω и обозначим через E поле $F[\beta]$, а через B подкольцо $\text{End}_E(V)$ в A . Решетки из цепочки $\mathcal{L}$ неподвижны под действием кольца целых R_E в E , и мы получаем цепочку решеток $\mathcal{L}(E)$ в E -модуле V ; мы будем использовать для этой цепочки обозначения $B_{\mathcal{L}(E)}$, $P_{\mathcal{L}(E)}$ и т.д. из п. 2.2.

Рассмотрение сплетений страта Ω приводит к необходимости изучения отображения $a_{\beta}: x \mapsto \beta x - x\beta$ из A в A . Для $k \in \mathbb{Z}$ обозначим

¹⁾В оригинале используются обозначения ${}^gH$ и ${}^g\rho$, однако мы решили сохранить обозначения, введенные в п. 1.4. — Прим. перев.

через $N_k(\Omega)$ множество таких элементов x из $A_{\mathcal{L}}$, что $a_{\beta}(x)$ принадлежит $P_{\mathcal{L}(E)}^k$; это открытое подкольцо в $A_{\mathcal{L}}$, являющееся также бимодулем над $B_{\mathcal{L}(E)}$, и мы имеем $N_k(\Omega) \subset B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}$ для достаточно больших k . Обозначим через $k_0(\Omega)$ наименьшее целое k , при котором $N_{k+1}(\Omega) \subset B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}$.

Интерес к $k_0(\Omega)$ вызван следующим свойством точности. Зафиксируем некоторое коограничение s , связанное с E/F , т.е. морфизм (B, B) -бимодулей из A в B , такой, что $s(B_{\mathcal{L}(E)}) = A_{\mathcal{L}'} \cap B$ для любой цепочки решеток $\mathcal{L}'$ в A , неподвижной относительно R_E (коограничение «зеркально» отвечает ограничению на B характеров $\psi_{\beta'}$, определенных стратами $([\mathcal{L}'], r', m, \beta')$ в A).

Лемма. Пусть $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ — некоторый чистый страт и $E = F[\beta]$. Пусть k — целое число, $k \geq k_0(\Omega)$. Тогда точна такая последовательность:

$$0 \rightarrow N_k(\Omega)/B_{\mathcal{L}(E)} \xrightarrow{a_{\beta}} P_{\mathcal{L}}^k \xrightarrow{s} P_{\mathcal{L}(E)}^k \rightarrow 0.$$

3.4. Определение. Чистый страт $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ в A называется простым, если $m < -k_0(\Omega)$. Минимальными называются такие простые страты $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$, что $k_0(\Omega) \leq -r$. Если $m = r - 1$, то простой страт есть не что иное, как страт типа альфа.

Важность простых стратов подтверждается следующим фундаментальным техническим результатом:

Теорема [ВК, §2]. Пусть $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ — некоторый чистый страт в A .

а) Среди чистых стратов $([\mathcal{L}], r, m, \omega)$, эквивалентных Ω , простыми будут те, у которых степень $[F[\omega] : F]$ минимальна.

б) Предположим, что страт Ω прост. Если страт

$$\Omega' = ([\mathcal{L}], r', m', \beta')$$

прост и сплетен с Ω , то он сопряжен с Ω с помощью некоторого элемента из $H_{\mathcal{L}}$.

с) Предположим, что страт Ω прост и положим $k = k_0(\Omega)$, $N = N_k(\Omega)$. Тогда

$$I_G(\Omega) = (1 + P_{\mathcal{L}(E)}^{-(m+k)} N) B^{\times} (1 + P_{\mathcal{L}(E)}^{-(m+k)} N).$$

Видно, что п. а) дает простую характеризацию простых стратов, а п. с) определяет сплетения простого страта способом, позволяющим надеяться на редукцию к B .

Простой страт $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ хорошо ведет себя по отношению к процессу улучшения. Положим $E = F[\beta]$, $B = \text{End}_E(V)$ и зафиксируем, как и выше, коограничение s , связанное с E/F . Возьмем

$b \in P_{\mathcal{L}}^{-m}$ и рассмотрим улучшенный страт $\Omega' = ([\mathcal{L}], r, m-1, \beta+b)$. Получается производный страт $([\mathcal{L}(E)], m, m-1, s(b))$ в B . Если производный страт *расщепляется*, то некоторое гладкое неприводимое представление группы G , которое содержит страт Ω' , индуцировано с некоторой собственной параболической подгруппы и, в частности, не может быть каспидальным. Если, напротив, производный страт прост в B (т.е. является стратом типа альфа), то страт Ω' эквивалентен некоторому простому страту в A .

Можно доказать, что простые страты получаются процедурой улучшения описанного вида из стратов типа альфа.

3.5. Тем не менее анализ допустимой двойственной к G сложнее, чем схема улучшения стратов. В самом деле, страт $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ может определять представления некоторой подгруппы в G , только если $m \geq r/2$, и это приводит к необходимости модифицировать конструкцию. Классификация из [ВК] завершается все же простыми стратами $([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$ в A , но этот путь весьма извилист. Ниже мы кратко опишем его. Для простого страта $\Omega = ([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$ в п. 3.6 определены фильтрованные подкольца $j(\Omega)$ и $h(\Omega)$ в A , фильтрованные подгруппы $J(\Omega)$ и $H(\Omega)$ в $H_{\mathcal{L}}$ и множества характеров $\mathcal{C}(\Omega, k)$ (для $0 \leq k \leq r-1$) групп $H(\Omega)^{k+1}$. Эти объекты определены непосредственно, если страт Ω минимален (т.е. $k_0(\Omega) \leq -r$) или с помощью простого страта $([\mathcal{L}], r, -k_0(\Omega), \gamma)$, эквивалентного $([\mathcal{L}], r, -k_0(\Omega), \beta)$, в противном случае (страт $\Omega' = ([\mathcal{L}], r, 0, \gamma)$ также прост). Проверяется, хотя это и не очевидно, что все эти объекты существуют и не зависят от произвола в выборе вспомогательных объектов. В п. 3.6 мы рассмотрим простой страт $\Omega = ([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$ и зафиксируем выбор Ω' .

3.6. Мы сохраняем обозначения E и B из п. 3.4 и полагаем $m = -k_0(\Omega)$. Если Ω минимален, то положим $h(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}^{[r/2]+1}$ и $j(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}^{[(r+1)/2]}$. В противном случае полагаем $h(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + h(\Omega') \cap P_{\mathcal{L}}^{[r/2]+1}$ и $j(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + j(\Omega') \cap P_{\mathcal{L}}^{[(r+1)/2]}$.

Это два подкольца в A , фильтрованные степенями $h^m = h \cap P_{\mathcal{L}}^m$ и $j^m = j \cap P_{\mathcal{L}}^m$. Положим $H(\Omega) = h(\Omega)^{\times}$, $J(\Omega) = j(\Omega)^{\times}$ и $H^m = 1 + h^m$, $J^m = 1 + j^m$ для $m \geq 1$.

Пусть $0 \leq k \leq r-1$. Если страт Ω минимален, то обозначим через $\mathcal{C}(\Omega, k)$ множество характеров θ на $H(\Omega)^{k+1}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$(i) \quad \theta|(H(\Omega)^{k+1} \cap H_{\mathcal{L}}^{[n/2]+1}) = \psi_{\beta};$$

$$(ii) \quad \theta|(H(\Omega)^{k+1} \cap B^{\times}) \text{ факторизуется через детерминант } B^{\times} \rightarrow E^{\times}.$$

Предположим, что страт Ω не минимален. Если $k \geq m$, то положим $\mathcal{C}(\Omega, k) = \mathcal{C}(\Omega', k)$. В противном случае множество $\mathcal{C}(\Omega, k)$ состоит из

характеров θ на $H(\Omega)^{k+1}$, удовлетворяющих условиям (ii) и, кроме того, следующим условиям:

(iii) θ нормализуется подгруппой $H_{\mathcal{L}(E)}$;

(iv) для $k' = \max(k, [m/2])$ ограничение θ на $H(\Omega)^{k'+1}$ имеет вид $\theta_0 \cdot \psi_{\beta-\gamma}$ с $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Omega', k')$.

Можно легко вычислить сплетения характера $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Omega, k)$ [BK, Theorem 4.7].

3.7. Пусть θ — характер из $\mathcal{C}(\Omega, 0)$. Тогда существует единственное неприводимое представление $\eta(\theta)$ группы $J^1(\Omega)$, ограничение которого на $H^1(\Omega)$ содержит θ . К тому же, представление $\eta(\theta)$ канонически продолжается (с помощью скручивания на $\chi \circ \det_V$, где χ — некоторый характер $R_E^\times / 1 + P_E$) до представления $\varkappa(\theta)$ группы $J(\Omega)$.

Замечание. В простых случаях, упомянутых в разд. 2 и в [Co4], такие продолжения получаются с помощью представления Вейля. Тем не менее это приводит к техническим трудностям, например в случае $p = 2$. В [BK] используется подход, навеянный [Wa].

Теперь можно определить, наконец, понятие *простого типа*. Начнем, как и выше, с простого страта $\Omega = ([\mathcal{L}], \tau, m, \beta)$ и предположим, что цепочка решеток $\mathcal{L}$ равномерна. Тогда группа $J(\Omega)/J^1(\Omega)$ изоморфна $H_{\mathcal{L}(E)}/H_{\mathcal{L}(E)}^1$, т.е. произведению e экземпляров группы $GL_f(R_E/P_E)$ (с $ef = \dim_E(V)$). Если дано каспидальное представление σ_0 группы $GL_f(R_E/P_E)$, можно рассмотреть $\sigma = \sigma_0 \otimes \dots \otimes \sigma_0$ как представление группы $J(\Omega)$, тривиальное на $J^1(\Omega)$.

Определение. *Простым типом* называется представление группы $J(\Omega)$ вида $\varkappa(\theta) \otimes \sigma$, где $\theta \in \mathcal{C}(\Omega, 0)$, а σ , как и выше, — некоторое представление группы $H_{\mathcal{L}(E)}^0$ с равномерной цепочкой $\mathcal{L}$, тривиальное на $H_{\mathcal{L}(E)}^1$ и имеющее указанный выше вид.

Замечание. В частном случае этого определения может случиться, что $f = 1$; тогда подгруппа $H_{\mathcal{L}(E)}^0$ называется *подгруппой Иватори* группы G .

3.8. Итак, мы можем сформулировать следующие фундаментальные результаты.

Рассмотрим некоторое представление λ группы $J(\Omega)$, являющееся простым типом. Зафиксируем неразветвленное подполе L в A , содержащее E , имеющее степень f над E , и положим $C = \text{End}_L(V)$.

Теорема. *Алгебра $\mathcal{H}(J(\Omega), \lambda)$ канонически изоморфна алгебре сплетений тривиального представления подгруппы Иватори группы $C^\times$.*

Отметим, что представления этих алгебр хорошо известны [Bo, KL] и что этот изоморфизм может быть описан условиями на носитель.

Следствие. Пусть π — гладкое неприводимое представление группы G , ограничение которого на $J(\Omega)$ содержит λ .

Если $[L : F] = n$, то π каспидально и индуцировано с некоторого продолжения представления λ на нормализатор подгруппы $J(\Omega)$ в G (который компактен по модулю Z).

В противном случае π не является каспидальным.

Можно, наконец, описать представления группы G , содержащие простой тип. Известно [BZ1, Cas], что если π есть гладкое неприводимое представление группы G , то существуют подгруппа Леви L в G , $L = \prod_{i=1}^s GL_{n_i}(F)$, и каспидальные представления π_i групп $GL_{n_i}(F)$, $i = 1, \dots, s$, такие, что π является подпредставлением представления, индуцированного с $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_s$, соответствующей параболической подгруппы. Множество $\{\pi_1, \dots, \pi_s\}$ определяется по π и называется носителем этого представления π . Оно называется простым, если все n_i одинаковы, а для $i > 1$ представление π_i эквивалентно $\pi_1 \otimes (\chi_i \circ \det)$, где χ_i есть некоторый неразветвленный характер группы $F^\times$.

Теорема. Гладкое неприводимое представление группы G содержит простой тип тогда и только тогда, когда его носитель является простым.

Следствие. Всякое каспидальное представление π группы G индуцировано с некоторой подгруппы, компактной по модулю Z . Более точно, π содержит простой тип λ — представление подгруппы J , а пара (λ, J) единственна с точностью до сопряжения; кроме того, π индуцировано с единственного продолжения представления λ на нормализатор подгруппы J в G .

4. ГРУППЫ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ GL_n

4.1. Поговорим сначала о группах, близких к GL_n , и прежде всего — о ее внутренних анизотропных формах. Для тела D с центром F Корвин [Co3] дал классификацию представлений группы $D^\times$, поскольку она естественно вытекает из вычислительного подхода. С другой стороны, ясно (но нигде не написано), что методы [BK] приложимы к случаю $D^\times$, который намного легче случая $GL_n(F)$, и дают аналогичную классификацию. Фактически некоторые идеи из [BK] были использованы Цинком для завершения его собственного подхода [Zi], который привел к иной классификации допустимой двойственной для $D^\times$, основанной на лучшем знании классов сопряженности группы U_D^1/U_D^i для $i > 1$ и, несомненно, более близкой к гипотетическому соответствию [La, He] с представлениями абсолютной группы Галуа поля F .

Стоило бы исследовать также случай $GL_m(D)$, но это еще впереди.

Случай PGL_n немедленно сводится к случаю GL_n : гладкие представления группы $PGL_n(F)$ — это представления группы $GL_n(F)$, которые тривиальны на центре. Можно изучить и случай SL_n , ограничивая на $SL_n(F)$ представления группы $GL_n(F)$. Башнелл и Куцко анонсировали, в частности, доказательство того, что всякое каспидальное представление группы $SL_n(F)$ индуцировано с некоторой открытой компактной подгруппы; см. [KS] в случае простого n .

4.2. Для групп, похожих на GL_2 , и некоторых других групп малого ранга явная конструкция представлений давно является открытой проблемой. Среди последних работ о малых рангах, не претендующих на полноту, отметим классификацию Моя [My3].

Рассмотрим теперь связную редуктивную группу G над F . В этом случае структура компактных максимальных подгрупп в $G(F)$ объяснена в [BT], а в [PR] введены так называемые стандартные фильтрации на этих группах и на других компактных подгруппах из $G(F)$ — паракорических подгруппах (для $G = GL_n$ им отвечают стабилизаторы цепочек решеток). Аналогом суперкаспидальных представлений Карайоля являются P -каспидальные представления группы $G(F)$, введенные Моррисом [Mo1]; см. также [Hi].

Тем не менее желание получить для классических групп обобщения результатов Хоува [Ho1] для GL_n в умеренном случае приводит [Mo2] к определению фильтраций, связанных с умеренными торами, которые являются не чем иным, как стандартными фильтрациями. Наконец, для самого общего случая умеренных торов уже недостаточно, и Моррис предложил для классической группы G (в случае нечетной характеристики поля вычетов) усовершенствованные понятия цепочки решеток, фильтраций наследственных колец и соответствующих компактных подгрупп: цепочка решеток должна быть в общем случае объединением двух цепочек, находящихся друг к другу в двойственности относительно формы, определяющей G , а фильтрации должны детально отразить это разложение. Моррис определил также понятие *фундаментального страта* и доказал, что каждое гладкое неприводимое представление группы $G(F)$ содержит фундаментальный страт. Исследование проводилось в духе работы [BK].

Если изоморфизмы алгебр Гекке из п. 3.7 окажутся общими, то это будет представлять особенный интерес, поскольку, по крайней мере для группы G со связным центром, представления алгебры Гекке, связанной с тривиальным представлением подгруппы Ивахори, классифицированы Кажданом и Люстигом [KL] с помощью техники K -гомологий.

4.3. Подчеркнем в заключение, что даже для $G = GL_n$ история не закончена, поскольку знаменитые гипотезы Ленглендса [La, He] позволяют высказать более точные утверждения о связи между представлениями степени n абсолютной группы Галуа поля F и допустимой двойственной к $GL_n(F)$, а также представлениями Галуа, отвечающими каспидальной двойственной. К настоящему времени полностью разобран лишь случай $n \leq 3$, и мы вправе ожидать более явного соответствия при произвольном n .

ЛИТЕРАТУРА

- [BZ1] Бернштейн И. Н., Зелевинский А. В. Представления группы $GL(n, F)$, где F — локально неархимедово поле. — УМН, 1976, т. 31, вып. 3, с. 5–70.
- [BZ2] Bernstein J., Zelevinsky A., Induced representations of reductive p -adic groups, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), 441–472.
- [Bo] Borel A., Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under Iwahori subgroup, Invent. Math. **35** (1976), 233–259.
- [BT] Bruhat F., Tits J., Groupes réductifs sur un corps local I, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5–251.
- [Bu1] Bushnell C., Hereditary orders, Gauss sums, and supercuspidal representations of GL_N , J. Reine Angew. Math. **375/376** (1987), 184–210.
- [Bu2] Bushnell C., Induced representations of locally profinite groups, preprint, 1990.
- [BK] Bushnell C., Kutzko Ph., The admissible dual of GL_N via compact open subgroups, preprint, 1990. §§1–8 под названием «The admissible dual of GL_N via restriction to compact open subgroups» анонсированы в трудах конференции “Harmonic analysis on reductive groups”, Bowdoin, 1989.
- [Ca] Carayol H., Représentations cuspidales du groupe linéaire, Ann. Sci. École Norm. Sup. **17** (1984), 191–225.
- [Cas] Casselman W., Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups, preprint.
- [Col] Corwin L., Representations of division algebras over local fields I, Adv. in Math. **13** (1974), 259–267; II, Pacific J. Math. **101** (1982), 49–70.
- [Co2] Corwin L., Supercuspidal representations of $GL_{pp'}(F)$, F p -adic, preprint.
- [Co3] Corwin L., The unitary dual for the multiplicative group of arbitrary division algebras over local fields, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 565–598.
- [Co4] Corwin L., A construction of the supercuspidal representations of $GL_n(F)$, F p -adic, препринт, ноябрь 1989.
- [De] Deligne P., Le support du caractère d'une représentation supercuspidale, C. R. Acad. Sci. Paris **283**, 1976, 155–157.

- [DKV] Deligne P., Kazhdan D., Vigneras M.-F., Représentations des algèbres centrales semi-simples p -adiques, in: Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, Paris, 1984.
- [GGPS] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятенкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции. — М.: Наука, 1966.
- [Gr] Green J. A., The characters of finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 1955, 402–447.
- [He] Henniart G., Les conjectures de Langlands locales pour $GL(n)$, in: Journées Arithmétiques de Metz, Astérisque **94** (1982), 67–85.
- [Hi] Hijioka H., Some supercuspidal representations induced from parahoric subgroups, in: Automorphic forms in several variables, Progress in Math. **46** (1984), 160–178.
- [Ho1] Howe R., Some qualitative results on the representation theory of GL_n over a p -adic field, Pacific J. Math. **73** (1977), 497–538.
- [Ho2] Howe R., Tamely ramified supercuspidal representations of GL_n , Pacific J. Math. **73** (1977), 365–381.
- [Ho3] Howe R. (with the collaboration of A. Moy) Harish-Chandra homomorphism for p -adic groups, CBMS Regional Conference Series in Math. **59**, Amer. Math. Soc., 1985.
- [HM1] Howe R., Moy A., Minimal K -types for $GL(n)$, Astérisque **171–172** (1989), 257–273.
- [HM2] Howe R., Moy A., Hecke algebra isomorphism for GL_N , J. Algebra **131** (1990), 388–424.
- [JL] Jacquet H., Langlands R. P., Automorphic forms on $GL(2)$, Lect. Notes in Math., vol. 114, Springer-Verlag, 1971.
- [KL] Kazhdan D., Lusztig G., Proof of the Deligne–Langlands conjecture for Hecke algebras, Invent. Math. **87** (1987), 153–215.
- [Ku1] Kutzko Ph., On the supercuspidal representations of GL_2 I, II, Amer. J. Math. **100** (1978), 43–60, 705–716.
- [Ku2] Kutzko Ph., Towards a classification of the supercuspidal representations of GL_N , J. London Math. Soc. **37** (1988), 265–274.
- [KM1] Kutzko Ph., Manderscheid D., On intertwining operators for $GL_N(F)$, F a non-Archimedean local field, Duke Math. J. **57** (1988), 275–293.
- [KM2] Kutzko Ph., Manderscheid D., On the supercuspidal representations of GL_N , N product of two primes, Ann. Sci. École Norm. Sup. **23** (1990), 39–88.
- [KS] Kutzko Ph., Sally A. (jr.), All supercuspidal for SL_p over a p -adic field are induced, Progress in Math. **40** (1983), 185–196.
- [La] Langlands R. P., Problems in the theory of automorphic forms, in “Lectures in Modern Analysis III”, Lect. Notes in Math., vol. 170, 1970, 18–86.
- [Md] Macdonald I., Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford, 1979. [Имеется перевод: Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. — М.: Мир, 1985.]
- [Mo1] Morris L., P -cuspidal representations, Proc. London Math. Soc. **57** (1988), 329–356; P -cuspidal representations of level one, Proc. London Math. Soc. **58** (1989), 550–558.

- [Mo2] Morris L., Tamely ramified supercuspidal representations of some classical groups, preprint. Tamely ramified supercuspidal representations of the classical groups I, II, preprints.
- [Mo3] Morris L., Fundamental G -strata for classical groups, preprint IAS, 1990.
- [My1] Moy A., Local constatnts and the tame Langlands correspondence, Amer. J. Math. **108** (1986), 862–930.
- [My2] Moy A., A conjecture on minimal K -types for GL_n over a p -adic field, Contemp. Math. **86** (1989), 249–254.
- [My3] Moy A., Representations of $U(2, 1)$ over a P -adic field, J. Reine Angew. Math. **373** (1987), 178–208. Representations of GSp_4 over a P -adic field I, II, Comp. Math. **66** (1988), 237–328. Minimal K -types for G_2 over a P -adic field, Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988), 517–529.
- [PR] Prasad G., Raghunathan M. S., Topological central extensions of semi-simple groups over local fields I, Ann. of Math. **119** (1988), 143–201.
- [Re] Reiner I., Maximal orders, Academic Press, London, 1976.
- [Ro] Rodier F., Représentations de $GL_n(F)$ où F est un corps p -adique, Sémin. Bourbaki, exposé n° 587, février 1982, Astérisque **92–93** (1982), 201–219.
- [Rg] Rogawski J., Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field, Duke Math. J. **50** (1983), 161–196.
- [Tu] Tunnell J. B., On the local Langlands conjecture for $GL(2)$, Invent. Math. **46** (1978), 179–200.
- [Vo] Vogan D., Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, 1981.
- [Wa] Waldspurger J.-L., Algèbres de Hecke et induites de représentations cuspidales pour $GL(N)$, J. Reine Angew. Math. **370** (1986), 127–191.
- [Ze] Zelevinsky A., Induced representations of reductive p -adic groups II: On irreducible representations of $GL(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. **13** (1980), 165–210.
- [Zi] Zink E. W., Representation theory of local division algebras I, II, preprint Karl-Weierstraß Institut für Math., Berlin, 1990.

РАССЛОЕНИЯ ХИГГСА И ЛОКАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ¹⁾

Жозеф Ле Потье

В 1965 г. Нарасимхан и Сешадри установили [28] взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентности унитарных неприводимых представлений фундаментальной группы π компактной римановой поверхности X и множеством классов изоморфизма стабильных векторных расслоений степени 0 на X : представлению $\rho: \pi \rightarrow \mathbf{U}(r)$ они ставят в соответствие голоморфное векторное расслоение $E_\rho = \tilde{X} \times_\pi \mathbf{C}^r$, где $\tilde{X} \rightarrow X$ есть универсальное накрытие поверхности X ; произведение над π означает факторпространство пространства $\tilde{X} \times \mathbf{C}^r$ по следующему действию группы π : $\gamma \cdot (x, v) = (x\gamma^{-1}, \gamma v)$, где $\gamma \in \pi$, $(x, v) \in \tilde{X} \times \mathbf{C}^r$. Недавно Дональдсон [6, 7, 9] распространил это соответствие на случай любого гладкого проективного многообразия, а Уленбек и Ю [36, 22] — на случай любого компактного кэлерова многообразия; существенное место доказательства составляет тот факт, что на любом стабильном векторном расслоении существует хорошая эрмитова метрика, которую некоторые авторы называют метрикой Янга–Миллса, а некоторые — метрикой Эрмита–Эйнштейна.

Предмет работ К. Симпсона, которым посвящен этот доклад, — аналогичное соответствие для любых линейных представлений фундаментальной группы. При этом, чтобы получить соответствие того же типа, что и у Нарасимхана и Сешадри, необходимо рассматривать голоморфные векторные расслоения с некоторыми дополнительными данными — так называемые расслоения Хиггса. Это понятие, введенное впервые Хитчином для алгебраических кривых [19], будет разъяснено в разд. 2. Построить алгебраическое векторное расслоение, снабженное структурой Хиггса, по представлению $\pi \rightarrow GL(r, \mathbf{C})$ не так просто, как это было сделано выше для унитарных представлений, — для этого нужно вводить хорошие метрики. В основе нашего изложения — понятие гармонического расслоения (см. разд. 1), введенное в близкой форме Симпсоном [32].

Основной результат Симпсона [29–31], базирующийся частично на результатах Корлетта [4] и особенно Дональдсона [6–8], — эквива-

¹⁾Le Potier Joseph. Fibrés de Higgs et systèmes locaux. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 737, Astérisque, 201–202–203, 1991, p. 221–268.

лентность трех категорий: категории линейных представлений фундаментальной группы гладкого проективного многообразия, категории плоских расслоений и категории полустабильных расслоений Хиггса с нулевыми классами Черна. Это выражается при фиксированном ранге r в существовании трех грубых пространств модулей $M_B(r)$, $M_{DR}(r)$ и $M_{Dol}(r)$, соответствующих таким объектам; эти алгебраические многообразия имеют одинаковые множества замкнутых точек, но разные алгебраические структуры. В то же время первые два пространства имеют одну и ту же подлежащую аналитическую структуру: уже для $r = 1$ мы приходим к классическим примерам Серра неизоморфных алгебраических многообразий, которые аналитически изоморфны. Конструкция этих многообразий модулей, намеченная в разд. 5, использует, как это теперь принято, теорию Мамфорда, которую мы вкратце напомним. На многообразии $M_{Dol}(r)$ естественным образом действует группа C^* ; неподвижные точки этого действия соответствуют представлениям определенного типа — так называемым вариациям структур Ходжа. Неподвижные точки очень полезны для получения информации о топологии пространства модулей: мы увидим это на примере кривых в разд. 7.

Мы совсем не касаемся части работ Симпсона, относящейся к некомпактным кэлеровым многообразиям [29, 34]. В этом случае нужно преодолевать дополнительные трудности, в то время как для проективных многообразий работает метод Дональдсона, существенно использующий индукцию по размерности при наличии соответствующего обобщения теоремы Мехты-Раманатхана (см. разд. 4).

В дальнейшем алгебраическое многообразие означает схему конечного типа над C ; точки — это замкнутые точки. Пусть X — проективное гладкое многообразие размерности n , снабженное очень обильным линейным расслоением $\mathcal{O}(1)$.

1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ РАССЛОЕНИЯ

Рассмотрим комплексное векторное расслоение E ранга r класса C^∞ на X , снабженное эрмитовой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$; обозначим через $A^i(E)$ пространство дифференциальных i -форм класса C^∞ со значениями в E . По определению C^∞ -связность на E есть C -линейный оператор $D: A^0(E) \rightarrow A^1(E)$, удовлетворяющий правилу Лейбница $D(fs) = (df)s + fDs$ для $s \in A^0(E)$, $f \in C^\infty(X)$. Каждой такой связности D можно сопоставить другую связность $\tilde{D}$ по формуле

$$d\langle s, t \rangle = \langle Ds, t \rangle + \langle s, \tilde{D}t \rangle,$$

где s, t — сечения класса C^∞ расслоения E , а $\langle \ , \ \rangle$ в правой части означает продолжение эрмитовой метрики на дифференциальные формы. Связности образуют аффинное пространство $\mathcal{A}$ над векторным пространством $A^1(\text{End}(E))$ дифференциальных 1-форм со значениями в расслоении эндоморфизмов расслоения E , и отображение $D \mapsto \bar{D}$ есть аффинная инволюция пространства $\mathcal{A}$, причем соответствующее линейное касательное отображение — это $\omega \mapsto -\omega^*$, где ω^* — сопряженная к $\omega \in A^1(\text{End}(E))$ дифференциальная форма. Связность D называется *эрмитовой*, если она инвариантна относительно этой инволюции. Любая связность однозначно представляется в виде $D = \nabla + \alpha$, где ∇ — эрмитова связность, $\alpha \in A^1(\text{End}(E))$, $\alpha = \alpha^*$.

Гармоническое расслоение — это тройка $(E, D, \langle \ , \ \rangle)$, образованная векторным расслоением E , связностью D и метрикой, удовлетворяющими двум следующим условиям интегрируемости:

(1) *связность D интегрируема.*

Это означает, что форма кривизны $F_D \in A^2(\text{End}(E))$, определенная формулой $F_D(s) = D^2(s)$ для $s \in A^0(E)$, равна нулю. В этом случае с парой (E, D) связана локальная система комплексных векторных пространств размерности r , определенная пучком локальных сечений (в обычной топологии), аннулируемых D ; мы называем такую пару плоским векторным расслоением ранга r . Выбор точки $x \in X$ определяет тогда представление фундаментальной группы $\pi_1(X, x)$ многообразия X в $GL(r, \mathbb{C})$, определенное с точностью до сопряжения.

Чтобы сформулировать второе условие интегрируемости, разложим D в сумму: $D = \nabla + \alpha$, где ∇ — эрмитова связность, а α — дифференциальная 1-форма со значениями в $\text{End}(E)$, самосопряженная относительно эрмитовой метрики. Разложим ∇ и α по типам: $\nabla = \partial + \bar{\partial}$, $\alpha = \theta + \theta^*$, где ∂ и $\bar{\partial}$ имеют типы $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно, а θ — дифференциальная $(1, 0)$ -форма со значениями в расслоении эндоморфизмов расслоения E . Сопоставим паре (E, D) дифференциальный оператор $D'': A^0(E) \rightarrow A^1(E)$, определенный формулой $D'' = \bar{\partial} + \theta$. Второе условие формулируется так:

(2) *дифференциальная форма $G = D''^2 \in A^2(\text{End}(E))$ равна нулю.*

Разлагая форму G по типам, мы видим, что это условие эквивалентно равенствам $\bar{\partial}^2 = 0$, $\bar{\partial}\theta = 0$ и $\theta \wedge \theta = 0$. Таким образом, оператор $\bar{\partial}$ определяет на E структуру голоморфного векторного расслоения, причем θ есть голоморфная дифференциальная форма на X со значениями в $\text{End}(E)$, удовлетворяющая условию $\theta \wedge \theta = 0$.

2. РАССЛОЕНИЯ ХИГГСА

Расслоением Хиггса на X называется пара (E, θ) , где E — алгебраическое векторное расслоение на X , а θ — регулярная дифференциальная 1-форма со значениями в расслоении эндоморфизмов $End(E)$, удовлетворяющая тождеству $\theta \wedge \theta = 0$. При желании эту дифференциальную форму можно рассматривать как морфизм $\theta: E \rightarrow \Omega^1(E)$ из E в расслоение $\Omega^1(E)$ дифференциальных 1-форм со значениями в E .

Так как многообразие X проективно, то по теоремам сравнения Серра все равно, с какими расслоениями на X работать — алгебраическими или голоморфными. Таким образом, согласно предыдущему разделу, любое гармоническое расслоение на X определяет расслоение Хиггса с нулевыми классами Черна. Сразу возникает обратный вопрос: при каких условиях расслоение Хиггса с нулевыми классами Черна происходит из некоторого гармонического расслоения? Ответ на этот вопрос в действительности является частным случаем некоторого более общего утверждения относительно существования метрики Янга–Миллса на расслоении Хиггса.

Для расслоения Хиггса (E, θ) ранга r и эрмитовой метрики $H = (\ , \)$ на E определим связность на E по формуле $D = \nabla + \alpha$, где ∇ — единственная эрмитова связность на E , такая, что ее $(0, 1)$ -часть совпадает с оператором Дольбо $\bar{\partial}$, и пусть $\alpha = \theta + \theta^*$. Соответствующая форма кривизны $F = D^2$ называется формой кривизны эрмитовой метрики H . Разумеется, если классы Черна произвольны, то нет надежды подходящим выбором H получить нулевую кривизну F . Однако можно попытаться ее минимизировать. Для измерения кривизны снабдим расслоение эндоморфизмов $End(E)$ эрмитовой метрикой $(f, g) \mapsto \text{tr} f g^*$ для f и g , принадлежащих одному слою расслоения $End(E)$. Соответствующая квадратичная форма обозначается через $f \mapsto |f|^2$; тогда L^2 -норма кривизны определяется по формуле

$$\|F\|^2 = \int_X |F|^2 \frac{\omega^n}{n!}.$$

По предположению на X имеется очень обильное расслоение $\mathcal{O}(1)$; мы обозначаем через h его класс Черна, а через ω — форму Черна некоторой эрмитовой метрики на этом расслоении. Как и на любом кэлеровом многообразии, на алгебре дифференциальных форм на X действуют операторы $*$, C , L , Λ ; напомним (см. [37]) определение оператора C :

$$C\varphi = (-1)^{a-b}\varphi$$

для любой дифференциальной формы φ типа (a, b) .

Разложим форму кривизны F связности D в сумму:

$$F = \frac{1}{r} \operatorname{tr}(F) \operatorname{id}_E + F^\perp,$$

где $\operatorname{tr}(F)$ обозначает след формы F , а $F^\perp$ — дифференциальная 2-форма со значениями в $\operatorname{End}(E)$ с нулевым следом. Обозначим через F_0 (соотв. $F_0^\perp$) примитивную часть формы F (соотв. $F^\perp$) и запишем ортогональное разложение $F = F_0 + \frac{\omega}{n} \Lambda(F)$ (соотв. $F^\perp = F_0^\perp + \frac{\omega}{n} \Lambda(F^\perp)$). Наконец, пусть c_i — классы Черна расслоения E . Как показывает следующее предложение, эти классы доставляют топологическую границу для возможных значений $\|F\|$.

Предложение 1. *Имеют место следующие формулы:*

$$\begin{aligned} \left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right) \cdot h^{n-2} &= \frac{1}{8\pi^2} \left(\|F_0\|^2 - \frac{1}{n} \|\Lambda(F)\|^2 \right), \\ \left(c_2 - \frac{r-1}{2r} c_1^2\right) \cdot h^{n-2} &= \frac{1}{8\pi^2} \left(\|F_0^\perp\|^2 - \frac{1}{n} \|\Lambda(F^\perp)\|^2 \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Мы рассмотрим только случай $n = 2$; для больших n рассуждение требует незначительной модификации. Представим связность в виде $D = \nabla + \alpha$, где связность ∇ эрмитова. Тогда форма кривизны связности D запишется в виде $F = A + B$, где $A = F_\nabla + \alpha \wedge \alpha$, $B = \nabla(\alpha)$; дифференциальная форма A антиэрмитова и имеет тип $(1, 1)$, а B эрмитова (т. е. самосопряженная) и является суммой дифференциальных форм типа $(2, 0)$ и $(0, 2)$. По определению классов Черна в $H^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

$$c_2 - \frac{c_1^2}{2} = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(F^2) = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(BB^* - AA^*).$$

Запишем $A = A_0 + A_1$, где A_0 — примитивная часть (антиинвариантная относительно $*$), а A_1 — ортогональная часть (инвариантная относительно $*$). Тогда $F_0 = A_0 + B$, $A_1 = \frac{\omega}{n} \Lambda(F)$. Из определения нормы для самосопряженных дифференциальных форм $\|\varphi\|^2 = \int_X \varphi \wedge * \varphi$ вытекает, что

$$c_2 - \frac{c_1^2}{2} = \frac{1}{8\pi^2} (\|B\|^2 + \|A_0\|^2 - \|A_1\|^2) = \frac{1}{8\pi^2} \left(\|F_0\|^2 - \frac{1}{n} \|\Lambda(F)\|^2 \right).$$

Доказательство второй формулы аналогично — надо заменить F на $F^\perp$ и воспользоваться формулой

$$c_2 - \frac{r-1}{2r} c_1^2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(F^\perp)^2.$$

Метрики Янга–Миллса. Эрмитова метрика на E называется метрикой Янга–Миллса, если

(1) след формы F — гармоническая форма,

(2) $\Lambda(F^\perp) = 0$.

Первое условие эквивалентно тому, что $\Lambda(\operatorname{tr}(F)) = \operatorname{const}$; таким образом, метрика является метрикой Янга–Миллса тогда и только тогда, когда форма кривизны F записывается в виде

$$F = i\lambda \operatorname{id}_E + F_0,$$

где F_0 — примитивная часть формы F , а λ — вещественное число. Функционал $\|F\|^2$ на пространстве эрмитовых метрик достигает минимума в точках, соответствующих метрикам Янга–Миллса. Приведенное выше предложение налагает топологические условия на существование таких метрик:

Следствие. Пусть (E, θ) — расслоение Хиггса на X , снабженное метрикой Янга–Миллса. Тогда

(1) выполняется неравенство

$$\left(c_2 - \frac{r-1}{2r} c_1^2\right) \cdot h^{n-2} \geq 0;$$

(2) если классы Черна c_1 и c_2 удовлетворяют условиям

$$c_1 \cdot h^{n-1} = 0, \quad \left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right) \cdot h^{n-2} = 0,$$

то соответствующая связность D является плоской. В частности, все классы Черна расслоения E равны нулю.

Утверждение (1) обобщает классическое неравенство Богомолова [2] и Любке [21] для стабильных расслоений. В условиях, при которых выполнено (2), метрика Янга–Миллса на (E, θ) определяет гармоническое расслоение, отвечая, таким образом, на вопрос из начала раздела. Следующий результат объясняет связь между μ -стабильными расслоениями Хиггса и метриками Янга–Миллса.

Пучки Хиггса. Для любого когерентного алгебраического пучка F без кручения ранга r с классами Черна c_i определим его степень и наклон формулами

$$\deg(F) = c_1 \cdot h^{n-1}, \quad \mu(F) = \frac{\deg(F)}{r}.$$

Пучок Хиггса ранга r на X — это пара (E, θ) , состоящая из когерентного алгебраического пучка E и морфизма $\theta: E \rightarrow \Omega^1 \otimes E$, такого, что $\theta \wedge \theta = 0$; разумеется, любому расслоению Хиггса отвечает пучок Хиггса его регулярных сечений. Когерентный подпучок $E' \subset E$ называется подпучком Хиггса, если $\theta(E') \subseteq \Omega^1 \otimes E'$. Пучок Хиггса (E, θ) называется μ -полустабильным (соотв. μ -стабильным), если для любого подпучка Хиггса E' ранга r' с $0 < r' < r$ выполнено неравенство

$$\mu(E') \leq \mu(E) \quad (\text{соотв. } \mu(E') < \mu(E)).$$

Фундаментальный результат К. Симпсона характеризует расслоения Хиггса, на которых существует метрика Янга–Миллса.

Теорема 1 (Симпсон). Пусть (E, θ) — расслоение Хиггса. Метрика Янга–Миллса на (E, θ) существует тогда и только тогда, когда E есть прямая сумма μ -стабильных подрасслоений Хиггса одного и того же наклона μ . Эта метрика единственна с точностью до изоморфизма.

Эскиз доказательства. Пусть (E, θ) — расслоение Хиггса с метрикой Янга–Миллса $H = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и E' — подпучок Хиггса, у которого предлагается мажорировать наклон. Можно предполагать, что фактор $E'' = E/E'$ не имеет кручения, так что над открытым по Зарисскому подмножеством U , дополнение к которому имеет коразмерность ≥ 2 , имеется точная последовательность алгебраических векторных расслоений

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0. \quad (1)$$

Метрика на E позволяет расщепить эту точную последовательность в классе C^∞ : $E = E' \oplus E''$; с учетом этого разложения в ортогональную прямую сумму операторы $\bar{\partial}$ и θ записываются матрицами

$$\bar{\partial} = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_{E'} & \beta^* \\ 0 & \bar{\partial}_{E''} \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta' & \gamma \\ 0 & \theta'' \end{pmatrix},$$

где $\beta \in A^{1,0}(U, \text{Hom}(E'', E'))$ и $\gamma \in A^{1,0}(U, \text{Hom}(E', E''))$ — дифференциальные $(1, 0)$ -формы со значениями в расслоениях гомоморфизмов $\text{Hom}(E', E'')$ и $\text{Hom}(E'', E')$ соответственно, а β^* — сопряженная форма к β . Обозначим через $D_{E'}$ и $D_{E''}$ связности на U , отвечающие расслоениям Хиггса (E', θ') и (E'', θ'') с индуцированными эрмитовыми метриками. Тогда связность на E имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} D_{E'} & \beta^* + \gamma \\ -\beta + \gamma^* & D_{E''} \end{pmatrix}.$$

Пусть F' и F'' — кривизны расслоений Хиггса E' и E'' ; форма кривизны F связности D на расслоении E задается над U следующей матрицей:

$$F = \begin{pmatrix} F' + (\beta^* + \gamma) \wedge (\gamma^* - \beta) & D(\beta^* + \gamma) \\ D(\gamma^* - \beta) & F'' + (\gamma^* - \beta) \wedge (\beta^* + \gamma) \end{pmatrix}.$$

В этой формуле D обозначает связности, индуцированные на расслоениях гомоморфизмов $\text{Hom}(E', E'')$ и $\text{Hom}(E'', E')$, а также их продолжения на дифференциальные формы. Так как метрика H есть метрика Янга-Миллса, имеем

$$\frac{i}{2\pi} F \cdot \omega^{n-1} = \frac{1}{\deg(X)} \mu \omega^n \text{id}_E.$$

Из матричного представления для F , приведенного выше, получаем

$$\frac{i}{2\pi} (F' + \gamma \wedge \gamma^* - \beta^* \wedge \beta) \cdot \omega^{n-1} = \frac{1}{\deg(X)} \mu \omega^n \text{id}_{E'}.$$

Взяв след и проинтегрировав по U , получим

$$\mu' + \frac{1}{2\pi r'} \int_U i \text{tr}(\gamma \wedge \gamma^* - \beta^* \wedge \beta) \cdot \omega^{n-1} = \mu,$$

где r' — ранг расслоения E' . Заметим, что подынтегральная функция неотрицательна; в частности, эта формула показывает, что интеграл сходится. Следовательно, $\mu' \leq \mu$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\beta = \gamma = 0$. В этом случае точная последовательность (1) имеет голоморфное расщепление, которое продолжается на X , так как дополнение к U имеет коразмерность ≥ 2 . Таким образом, расслоение Хиггса (E, θ) есть прямая сумма подрасслоений Хиггса одинакового наклона μ , причем каждое слагаемое снабжено

метрикой Янга–Миллса, что позволяет применять конструкцию до тех пор, пока все слагаемые не станут μ -стабильными.

Сводка формул. Понятно, что оставшаяся часть теоремы более трудная. Мы начнем со сводки необходимых формул. Для расслоения Хиггса (E, θ) и эрмитовой метрики K на E обозначим через $D = D_K$ соответствующую связность, которую запишем в виде $D = D' + D''$. Положим $D^c = C^{-1}DC = i(D'' - D')$. Классические тождества кэлеровой геометрии работают и в этой ситуации, например, можно вычислить формальные сопряженные к операторам D , D' , D'' :

$$D^* = - * D * = [\Lambda, D^c], \quad D'^* = i[\Lambda, D''], \quad D''^* = -i[\Lambda, D']. \quad (2)$$

Пусть H — другая эрмитова метрика на расслоении E ; запишем ее в виде $H = Kh$, где h — автоморфизм расслоения E , являющийся эрмитовым относительно K . Дифференциальные операторы D'_H и D'_K , отвечающие метрикам H и K , и их кривизны связаны формулами

$$D'_H = D'_K + h^{-1}D'_K h, \quad (3)$$

$$F_H = F_K + h^{-1}(D''D'_K h - (D''h)h^{-1}D'_K h). \quad (4)$$

По формуле (2) лапласиан Δ'_K , отвечающий оператору D'_K на расслоении эндоморфизмов расслоения E , равен $\Delta'_K(h) = D'^*_K D'_K h = i\Lambda D''D'_K h$. Теперь из формулы (3) выводим

$$\Delta'_K(h) = ih\Lambda(F_H - F_K) + i\Lambda((D''h)h^{-1}D'_K h). \quad (5)$$

Поля Янга–Миллса. Мы находимся на «многообразии» $Met(E)$ эрмитовых метрик на E и рассматриваем функционал Янга–Миллса $H \mapsto \|F_H\|^2$. Метрика Янга–Миллса минимизирует этот функционал; поэтому мы приходим к задаче о нахождении его критических точек. Если отождествить касательное пространство к H с векторным пространством $Hermit_H(E)$ эрмитовых эндоморфизмов расслоения E для метрики H , то производная функционала Янга–Миллса задается благодаря формуле (4) линейным отображением $Hermit_H(E) \rightarrow \mathbf{R}$: $\eta \mapsto 2 \operatorname{Re} \langle D''D'_H \eta, F_H \rangle_H$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ обозначает скалярное произведение, ассоциированное с L^2 -метрикой на $A^2(Hom(E, E))$, индуцированной H . С учетом формулы (2) и тождества Бьянки $D'_H(F_H) = 0$ производная записывается так: $\eta \mapsto \operatorname{Re} \langle \eta, 2i\Delta'_H \Lambda F_H \rangle_H$. Таким образом, «векторное поле» $H \mapsto 2i\Delta'_H \Lambda F_H$ играет роль градиентного поля для функционала Янга–Миллса.

Мы приходим к проблеме изучения траекторий $t \mapsto H_t$ векторного поля $H \mapsto -i\Delta'_H \Lambda F_H$, т.е. к уравнению в частных производных

$$H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} + i\Delta'_H \Lambda F_H = 0.$$

Наш функционал убывает вдоль этих траекторий. Это уравнение четвертого порядка, и так же, как это делал Дональдсон для стабильных расслоений, Симпсон заменяет его на уравнение теплопроводности

$$H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} = -i\Lambda F_H, \quad (6)$$

исследование которого проще.

Уравнение теплопроводности. Уравнение (6) разбивается на два в соответствии с разложением в прямую сумму $\text{End}(E) = \text{Cid}_E \oplus \text{End}_0(E)$, где $\text{End}_0(E)$ — расслоение эндоморфизмов расслоения E со следом нуль. При умножении H на вещественную строго положительную функцию к центральной части формы F_H , которая является $(1, 1)$ -формой, добавляется слагаемое $\partial\bar{\partial}\varphi$, где φ — функция класса C^∞ ; подходящим выбором этой функции можно добиться того, чтобы центральная часть формы F_H была гармоничной. Таким образом, достаточно изучить траектории $t \mapsto H_t$, проходящие через точку $H_0 = K$ и такие, что $\det(H_t K^{-1}) = 1$. Для таких траекторий уравнение (6) имеет вид

$$H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} = -i\Lambda F_H^\perp. \quad (7)$$

Если положить $H_t = K h_t$, то с учетом (5) это уравнение эквивалентно следующему:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta'_K \right) h = -ih(\Lambda F_K^\perp) + i(D''h)h^{-1}D'_K h. \quad (8)$$

Это нелинейное параболическое уравнение. Ни существование, ни единственность решений уравнения (7) с заданными начальными условиями не очевидны, и важная часть работы состоит в доказательстве следующего результата:

Предложение 2. Уравнение теплопроводности (7) имеет на $[0, \infty[$ единственное решение $t \mapsto H_t$, такое, что $\det H_t K^{-1} = 1$, $H_0 = K$.

Положим $e_t = \Lambda F_{H_t}^\perp$ и обозначим через $|e|^2 = -\text{tr} \text{se}^2$ функцию на X , задаваемую квадратом нормы e_t относительно H_t . Легкое вычисление [29, Lemma (6.1)] показывает, что вдоль траектории уравнения (7) выполняется тождество

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta'\right)|e|^2 = -|D''e|^2.$$

Поэтому $(\partial/\partial t + \Delta')|e|^2 \leq 0$. Из принципа максимума следует [16, р. 101], что функция $t \mapsto \sup_X |e_t|$ убывает вдоль траекторий. Существенное место работы Симпсона состоит в построении вспомогательного функционала $M: \text{Met}(E) \times \text{Met}(t) \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве пар метрик, удовлетворяющего следующим условиям:

$$\frac{d}{dt} M(H_t, K) = -2\|e_t\|_{H_t}^2. \quad (9)$$

Если (E, θ) стабильно, то существуют положительные константы A и B , такие, что для любого эрмитова эндоморфизма s (относительно метрики K) со следом нуль имеется оценка

$$\sup_X |s|_K \leq A + BM(Ke^s, K). \quad (10)$$

Из (9) следует, что функция $t \mapsto M(H_t, K)$ убывает вдоль траекторий, а из (10) — что она ограничена снизу. Запишем какую-нибудь траекторию в виде $H_t = Ke^{s_t}$, где s_t — эрмитов эндоморфизм со следом нуль; тогда s_t равномерно ограничены, согласно (10), а значит, и e_t ограничены. Как и у Дональдсона [7, Lemma 19], s_t остаются ограниченными в пространстве Соболева L_2^p . Так как значения $M(H_t, K)$ ограничены снизу, то найдется последовательность $t_i \rightarrow \infty$, такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|e_{t_i}\|_{L^2} = 0$. Можно предполагать, что последовательность s_{t_i} слабо сходится к s_∞ в L_2^p ; тогда для $h_\infty = e^{s_\infty}$, согласно формуле (5),

$$\Delta'_K h_\infty = -h_\infty e_0 + i\Lambda((D''h_\infty)h_\infty^{-1}D'_K h_\infty).$$

В силу эллиптической регулярности получаем, что h_∞ принадлежит в действительности классу C^∞ и определяет эрмитову метрику $H_\infty = Ke^{s_\infty}$, такую, что $\Lambda F_{H_\infty}^\perp = 0$. Таким образом, H_∞ — метрика Янга-Миллса.

Конструкция $M(H, K)$. Конструкция функционала $M(H, K)$ аналогична соответствующей конструкции Дональдсона [7]; она связана с

представителями Ботта и Черна [3] для классов Черна, ассоциированных с эрмитовыми метриками. Дональдсон строит характеристические классы $R(H, K) \in A^{1,1}(X)/\text{Im } \partial + \text{Im } \bar{\partial}$, называемые вторичными и удовлетворяющие следующим условиям:

(а) $R(H, H) = 0$ и $R(H, K) = R(H, J) + R(J, K)$ для любых эрмитовых метрик H, J, K ;

(б) для любого пути $t \mapsto H_t$ класса C^1 в пространстве метрик выполняется тождество

$$\frac{d}{dt} R(H_t, K) = 2i \operatorname{tr} \left(H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} \cdot F_H \right);$$

(с) $i \partial \bar{\partial} R(H, K) = \operatorname{tr}(F_K^2) - \operatorname{tr}(F_H^2)$.

Дифференциальная форма $R(H, K)$ получается интегрированием соотношения (б) по пути класса C^1 , соединяющему H и K ; свойство (а) позволяет проверить, что результат не зависит от выбора пути по модулю $\text{Im } \partial + \text{Im } \bar{\partial}$. Рассматриваемый функционал определяется так:

$$M(H, K) = \int_X R(H, K) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Заметим, что, так как $R(H, K)$ определена по модулю $\text{Im } \partial + \text{Im } \bar{\partial}$, эта формула имеет смысл. Из свойства (б) следует, что вдоль траектории H_t , такой, что $\det H_t^{-1} K = 1$ и $H_0 = K$, выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} M(H_t, K) = 2 \int_X \operatorname{tr}(\Lambda F_{H_t}^\perp \cdot F_{H_t}) \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = -2 \|e_t\|^2.$$

Это дает формулу (9). Основная проблема — доказать оценку (10). В то время как метод Дональдсона [6, 7] состоит в ограничении на общее гиперплоское сечение достаточно большой степени, которое сохраняет стабильность (см. разд. 4), Симпсон вдохновляется работой Уленбек и Ю [36]: предполагая, что эта оценка неверна, он явно строит дестабилизирующий подпучок для (E, θ) [29, Sec. 5]. Это позволяет ему получить вариант теоремы 1 для некоторых некомпактных кэлеровых многообразий.

Единственность. Пусть (E, θ) — расслоение Хиггса, а H и K — две метрики Янга-Миллса. Из формулы (5) следует, что эндоморфизм $h = HK^{-1}$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{1}{2} \Delta(\operatorname{tr} h) = -|(D'' h) h^{-1/2}|_K^2 \leq 0.$$

Следовательно, $\text{tr } h$ — плюрисубгармоническая функция; принцип максимума показывает, что она постоянна, так что $D''h = 0 = D'h$. Таким образом, h — голоморфный эндоморфизм расслоения E , коммутирующий с оператором θ ; эквивалентно, $h^{1/2}$ определяет изоморфизм гармонических расслоений (E, θ, H) и (E, θ, K) . Конечно, если расслоение Хиггса (E, θ) μ -стабильно, то h — гомотетия с постоянным коэффициентом. Это рассуждение для стабильных расслоений на римановой поверхности фигурирует уже в [9].

3. ПЛОСКИЕ РАССЛОЕНИЯ

Любому гармоническому расслоению $(E, D, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ отвечает плоское расслоение (E, D) . Обратно, пусть дано плоское расслоение (E, D) на многообразии X ; спрашивается, при каком условии существует эрмитова метрика $H = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на E , такая, что тройка $(E, D, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ гармонична, другими словами, выполняется условие интегрируемости (2) (разд. 1)? Дифференциальная форма $G = D''^2$ называется *псевдокривизной* эрмитовой метрики. Если $G = 0$, то метрика называется гармонической. В действительности это условие выполнено, как только $\Lambda G = 0$, — условие, совершенно аналогичное уравнению из предыдущего раздела, определяющему метрики Янга–Миллса, как показывает следующая лемма, принадлежащая Делиню:

Лемма 2 (Делинь). Пусть E — комплексное векторное расслоение на X , снабженное плоской связностью D . Эрмитова метрика на E гармонична, если псевдокривизна G удовлетворяет уравнению

$$\Lambda(G) = 0.$$

Доказательство. Мы используем обозначения из сводки формул разд. 2. Заметим, что формулы (2) не используют условия интегрируемости. По предположению имеем $D^2 = (D^c)^2 = 0$. По определению $D'' = \frac{1}{2}(D - iD^c)$, откуда $G = -\frac{i}{4}(DD^c + D^cD)$. Имеются тождества Бьянки: $D(G) = D^c(G) = 0$. Рассмотрим разложение D по типам $(1, 0)$ и $(0, 1)$: $D = d' + d''$, где $d' = \partial + \theta$, $d'' = \bar{\partial} + \theta^*$. Из условия, что связность плоская, вытекает, что $d'^2 = d''^2 = d'd'' + d''d' = 0$. С другой стороны, если положить $\theta - \theta^* = 2i\beta$, то

$$D^c = i(d'' - d' + 4i\beta)$$

и, следовательно, $G = iD(\beta)$. Для индуцированной метрики на дифференциальных формах имеем

$$\|G\|^2 = i \int_X (D(\beta), G) \frac{\omega^n}{n!} = i \int_X (\beta, D^*(G)) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Но тождество Бьянки и предположение $\Lambda(G) = 0$ влекут за собой равенство $D^*(G) = [\Lambda, D^c](G) = 0$. Следовательно, $\|G\| = 0$, как и утверждалось.

Следующая теорема, принадлежащая Дональдсону [8] и Корлетту [4], обобщает результат Илза и Сэмпсона [10] о гармонических отображениях; связь этих результатов обнаруживается следующим замечанием: задать гармоническое расслоение ранга r на X — это то же самое, что задать представление фундаментальной группы для X в $GL(r, \mathbb{C})$ и гармоническое отображение из универсальной накрывающей многообразия X в $GL(n, \mathbb{C})/U(n)$, эквивариантное относительно действия фундаментальной группы. Плоское расслоение называется *неприводимым*, если оно не содержит ненулевых плоских подрасслоений меньшего ранга; это означает, что соответствующее представление фундаментальной группы неприводимо. Прямая сумма неприводимых плоских расслоений называется *полупростой*.

Теорема 2. *На плоском расслоении существует гармоническая метрика тогда и только тогда, когда оно полупросто.*

Это утверждение доказывается методами, близкими к использованному в доказательстве теоремы 1. Естественно, имеет также место единственность метрики с точностью до изоморфизма.

Комплексы де Рама и Дольбо. Для плоского расслоения (E, D) определим комплекс де Рама

$$(A^*(E), D): 0 \rightarrow A^0(E) \xrightarrow{D} A^1(E) \xrightarrow{D} \dots,$$

продолжая связность D на дифференциальные формы; его когомологии, обозначаемые через $H_{DR}^q(E)$, отождествляются с когомологиями многообразия X со значениями в пучке (для обычной топологии) плоских сечений расслоения E . Точно так же, если (E, θ) — расслоение Хиггса, то векторные пространства когомологий комплекса

$$(A^*(E), D''): 0 \rightarrow A^0(E) \xrightarrow{D''} A^1(E) \xrightarrow{D''} \dots,$$

называемого комплексом Дольбо, будут обозначаться через $H_{Dol}^q(E)$; комплекс $(A^*(E), D'')$ пучков дифференциальных форм класса C^∞ со значениями в E есть являя резольвента комплекса $(\Omega^*(E), 0)$ голоморфных дифференциальных форм со значениями в E ; следовательно, группы когомологий Дольбо $H_{Dol}^q(E)$ отождествляются с группами гиперкогомологий $H^q(X, (\Omega^*(E), \theta))$. Если E — гармоническое расслоение, то можно одновременно рассматривать когомологии де Рама и Дольбо. Следующее утверждение обобщает хорошо известный факт из кэлеровой геометрии.

Лемма 3. Пусть E — гармоническое расслоение. Тогда имеется канонический изоморфизм

$$H_{DR}^q(E) \simeq H_{Dol}^q(E).$$

Доказательство. Рассмотрим лапласианы Δ , Δ' и Δ'' , отвечающие операторам D , D' и D'' соответственно, действующие на пространстве дифференциальных форм со значениями в E . Как и в случае скалярных дифференциальных форм на кэлеровом многообразии, формулы (2) и условия интегрируемости, определяющие гармонические расслоения, дают тождества $\Delta = 2\Delta' = 2\Delta''$. Теперь лемма следует из того факта, что любой класс когомологий в $H_{DR}^q(E)$ (соотв. $H_{Dol}^q(E)$) представляется Δ -гармонической (соотв. Δ'' -гармонической) формой.

Пусть E' и E'' — два гармонических расслоения. Тогда расслоение гомоморфизмов $\text{Hom}(E'', E')$ есть также гармоническое расслоение, и, согласно приведенной выше лемме, $H_{DR}^q(\text{Hom}(E'', E')) \simeq H_{Dol}^q(\text{Hom}(E'', E'))$. Для $q = 0$ это равенство означает, что плоские морфизмы отождествляются с морфизмами расслоений Хиггса. Если $q = 1$, то векторное пространство $H_{DR}^1(\text{Hom}(E'', E'))$ классифицирует расширения плоских расслоений $0 \rightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \rightarrow 0$ с плоскими f и g ; точно так же, пространство $H_{Dol}^1(\text{Hom}(E'', E'))$ классифицирует расширения $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} F \xrightarrow{j} E'' \rightarrow 0$, где F — расслоение Хиггса, а i и j — морфизмы Хиггса. Более общим образом, для любого плоского расслоения E имеется фильтрация $0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_l = E$, такая, что $gr_i = E_i/E_{i-1}$ для любого i есть неприводимое плоское расслоение. Каждому расслоению gr_i по теореме 2 сопоставляется гармоническое расслоение; легкое обобщение предыдущих рассуждений показывает, что фильтрации, приведенной выше, можно сопоставить фильтрацию расслоений Хиггса. Окончательно приходим к следующему результату:

Теорема 3. Категория плоских расслоений эквивалентна категории расслоений Хиггса, обладающих фильтрацией, такой, что присоединенные факторы суть μ -стабильные расслоения Хиггса, классы Черна которых удовлетворяют следующим условиям:

$$c_1 \cdot h^{n-1} = 0, \quad \left(\frac{c_1^2}{2} - c_2 \right) \cdot h^{n-2} = 0.$$

В следующем разделе мы покажем, что в действительности так получаются все μ -полустабильные расслоения Хиггса, удовлетворяющие таким условиям на классы Черна (см. следствие 1 теоремы 4).

4. ОГРАНИЧЕНИЕ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ

Речь идет о том, как распространить на расслоения Хиггса теорему ограничения Мехты–Раманатхана [25, 26]. Напомним сначала, что на любом когерентном алгебраическом пучке без кручения F на X существует фильтрация

$$0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = F,$$

такая, что (i) F/F_i — пучок без кручения; (ii) $gr_i = F_i/F_{i-1}$ μ -полустабильны, причем наклоны μ_i строго убывают. Эта фильтрация единственна и называется фильтрацией Хардера–Нарасимхана пучка F . В дальнейшем мы будем использовать обозначения $\mu_1 = \mu_{\max}(F)$, $\mu_k = \mu_{\min}(F)$. Из теоремы ограничения Мехты–Раманатхана [25] следует, что можно выбрать (сколь угодно большое) d и гладкую гиперповерхность $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$, такую, что $F|_Y$ — пучок без кручения и фильтрация Хардера–Нарасимхана пучка $F|_Y$ совпадает с $F_i|_Y$.

Для пучка Хиггса (F, θ) , такого, что F — пучок без кручения, также можно определить фильтрацию $0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = F$, удовлетворяющую условиям (i) и (ii), приведенным выше, где считается, что F_i — подпучки Хиггса и полустабильность понимается в смысле пучков Хиггса. Эта фильтрация также единственна и будет называться фильтрацией Хардера–Нарасимхана пучка Хиггса (F, θ) .

Если (F, θ) — пучок Хиггса, а Y — гладкое подмногообразие в X , определим индуцированный пучок Хиггса $(F|_Y, \theta_Y)$ на Y , рассматривая композицию

$$F|_Y \xrightarrow{\theta|_Y} \Omega_X^1|_Y \otimes F|_Y \rightarrow \Omega_Y^1 \otimes F|_Y.$$

Следующее предложение обобщает классическую теорему Мехты–Раманатхана на пучки Хиггса:

Предложение 3. Пусть (F, θ) есть μ -полустабильный пучок Хиггса на X , а d_0 — целое число. Существуют $d \geq d_0$ и гиперповерхность $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$, такие, что $(F|_Y, \theta_Y)$ μ -полустабильен.

Конечно, справедливо также аналогичное утверждение для μ -стабильных пучков Хиггса. Доказательство основано на следующей лемме:

Лемма 4. Пусть $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ — общая гиперповерхность, а $0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_k$ — фильтрация Хардера–Нарасимхана пучка Хиггса $G = F|_Y$. Тогда G_i инвариантны относительно оператора $\theta|_Y: G \rightarrow \Omega_X^1|_Y \otimes G$, если d достаточно большое.

Доказательство. Благодаря точной последовательности $0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \rightarrow \Omega_X^1|_Y \rightarrow \Omega_Y^1 \rightarrow 0$ достаточно проверить, что $\text{Hom}(G_i, G/G_i(-d)) = 0$, если d достаточно велико. Пусть F_i — (обычная) фильтрация Хардера–Нарасимхана пучка F , и предположим, что d и Y выбраны так, что $F_i|_Y$ — (обычная) фильтрация Хардера–Нарасимхана пучка $G = F|_Y$. Тогда $\mu_{\max}(G) = d\mu_{\max}(F)$, $\mu_{\min}(G) = d\mu_{\min}(F)$; с другой стороны, элементарное вычисление с центрами тяжести показывает, что

$$\mu_{\min}(G_i) - \mu_{\max}(G/G_i) \geq r(\mu_{\min}(G) - \mu_{\max}(G)),$$

где r обозначает ранг пучка F . Но $\mu(\mathcal{O}_Y(1)) = d \deg(X)$. Таким образом, если $d > r(\mu_{\max}(F) - \mu_{\min}(F))$, то $\text{Hom}(G_i, G/G_i(-d)) = 0$, что доказывает лемму.

Теперь доказательство предложения 3 завершается так же, как в классическом случае у Мехты–Раманатхана [25, 11, 18]: если число d достаточно большое, а гиперповерхность Y достаточно общая, то фильтрация Хардера–Нарасимхана пучка Хиггса $G = F|_Y$ продолжается до фильтрации пучка F когерентными подмодулями $(F_i)_{i=1, \dots, k}$, такими, что F/F_i — пучок без кручения: остается проверить, что F_i — подпучки Хиггса, если d достаточно велико. Точная последовательность $0 \rightarrow \Omega_X^1(-d) \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1|_Y \rightarrow 0$ и лемма 4 показывают, что достаточно проверить равенство $\text{Hom}(F_i, \Omega_X^1(-d) \otimes F/F_i) = 0$. Это будет так, если $d > \mu_{\max}(F/F_i) - \mu_{\min}(F_i) + \mu_{\max}(\Omega_X^1)$. Как и выше, $\mu_{\max}(F/F_i) - \mu_{\min}(F_i) \leq r(\mu_{\max}(F) - \mu_{\min}(F))$, так что условие будет выполнено, если взять $d > r(\mu_{\max}(F) - \mu_{\min}(F)) + \mu_{\max}(\Omega_X^1)$. Имеем $\mu(G_i) = d\mu(F_i)$; таким образом, расслоение Хиггса F может быть μ -полустабильным, только если $k = 1$; следовательно, $F|_Y$ μ -полустабильно.

Для двух пучков Хиггса F и G векторное пространство морфизмов Хиггса из F в G будет обозначаться через $\text{Hom}_{\text{Higgs}}(F, G)$. Похожими рассуждениями доказывается следующее утверждение:

Лемма 5. Пусть $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ — гладкая гиперповерхность, F и G — два пучка Хиггса без кручения на X . Если целое число d достаточно велико, то морфизм ограничения

$$\text{Hom}_{\text{Higgs}}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Higgs}}(F|_Y, G|_Y)$$

инъективен; если, кроме того, G рефлексивен, то это изоморфизм.

Если F и G пробегают ограниченные семейства, можно выбрать достаточно большое d , не зависящее от F и G . Инъективность на самом деле имеет место уже для морфизмов пучков $\mathcal{O}$ -модулей. Чтобы

проверить сюръективность, поднимем морфизм Хиггса $u: F|_Y \rightarrow G|_Y$ до какого-нибудь морфизма $v: F \rightarrow G$ (здесь используется тот факт, что $\text{Ext}^1(F, G(-d)) = 0$ для достаточно большого d (лемма Севери)) и проверим, что поднятый морфизм v есть в действительности морфизм Хиггса, тем же методом, что и выше. Мы собираемся использовать этот результат, чтобы показать, что при эквивалентности категорий из теоремы 3 получаются все μ -полустабильные расслоения с нулевыми классами Черна. Более точно:

Теорема 4. Пусть (F, θ) есть μ -полустабильный пучок Хиггса, классы Черна c_i которого удовлетворяют следующим условиям:

$$c_1 \cdot h^{n-1} = 0, \quad \left(\frac{c_1^2}{2} - c_2 \right) \cdot h^{n-2} = 0.$$

Тогда

(1) второй двойственный пучок F^{**} локально свободен и обладает фильтрацией подрасслоениями Хиггса, такой, что присоединенные градуированные факторы являются прямыми суммами μ -стабильных расслоений Хиггса с нулевыми классами Черна;

(2) канонический морфизм $F \rightarrow F^{**}$ является изоморфизмом вне замкнутого подмножества коразмерности ≥ 3 .

Доказательство. 1. Если X — кривая, то утверждение тривиально.

2. Если X — поверхность, рассмотрим сначала случай μ -стабильного пучка Хиггса F . Тогда второй двойственный пучок F^{**} локально свободен и μ -стабильен, так что для него выполнено неравенство Богомолова и Любке (следствие предложения 1) $c_2 - c_1^2(r-1)/2r \geq 0$, а также равенство $c_1 \cdot h = 0$. Так как форма пересечения отрицательна на ортогональном дополнении к h , получаем $c_2 - c_1^2/2 \geq -c_1^2/2r \geq 0$, что вместе с предположением теоремы влечет за собой равенство $c_2 - c_1^2/2 = 0$ для расслоения F^{**} . Согласно теореме 1, ему отвечает гармоническое расслоение; в частности, его классы Черна равны нулю. Следовательно, $F \simeq F^{**}$ и F локально свободен.

Для когерентного пучка F с классами Черна c_i положим, как обычно, $ch_2(F) = c_1^2/2 - c_2$; если F есть μ -стабильный пучок Хиггса с наклоном $\mu = 0$, то, как мы видели, $ch_2(F) \leq 0$. Если F лишь μ -полустабильен, у него имеется фильтрация подпучками Хиггса F_i , такая, что $gr_i = F_i/F_{i-1}$ является μ -стабильным пучком наклона $\mu_i = 0$, и тогда

$$0 = ch_2(F) = \sum_i ch_2(gr_i).$$

Следовательно, $ch_2(gr_i) = 0$ и из первой части вытекает, что gr_i — расслоение Хиггса с классами Черна $c_i = 0$.

3. В общем случае применяем индукцию по размерности. Согласно предложению 3, можно предполагать, что для подходящей гладкой гиперповерхности $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ ограничение $(F|_Y, \theta_Y)$ есть μ -полустабильный пучок Хиггса и что $F^{**}|_Y \simeq (F|_Y)^{**}$. По предположению индукции $G = (F|_Y)^{**}$ обладает фильтрацией, присоединенные градуированные факторы которой являются прямыми суммами μ -стабильных расслоений Хиггса с классами Черна $c_i = 0$, и канонический морфизм $F|_Y \rightarrow (F|_Y)^{**}$ является изоморфизмом вне замкнутого подмножества коразмерности ≥ 3 . Пусть y — точка гиперповерхности Y ; по теореме 3 G отвечает некоторому представлению фундаментальной группы $\pi_1(Y, y)$; так как $\dim X \geq 3$, то по теореме Лефшеца включение $Y \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм $\pi_1(Y, y) \simeq \pi_1(X, y)$, что позволяет продолжить расслоение Хиггса G до расслоения Хиггса H на X . Семейство μ -полустабильных пучков Хиггса с фиксированными рангом и классами Черна ограничено (см. следующий раздел); из леммы 5 тогда следует, что при подходящем выборе d изоморфизм $F^{**}|_Y \simeq H|_Y$ продолжается до изоморфизма $F^{**} \simeq H$. Лемма Накаямы показывает, что носитель коядра канонического морфизма $F \rightarrow F^{**}$ пересекает Y по замкнутому подмножеству коразмерности ≥ 3 ; поэтому он также имеет коразмерность ≥ 3 . Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть F есть μ -полустабильное расслоение Хиггса с классами Черна c_i , такими, что

$$c_1 \cdot h^{n-1} = 0, \quad \left(\frac{c_1^2}{2} - c_2 \right) \cdot h^{n-2} = 0.$$

Тогда F происходит из плоского расслоения.

Следствие 2. Пусть F есть μ -полустабильный пучок Хиггса с классами Черна $c_i = 0$. Тогда F локально свободен и происходит из плоского расслоения.

Действительно, из предположения следует, что F и F^{**} имеют один и тот же полином Гильберта; поэтому канонический морфизм $F \rightarrow F^{**}$, инъективный в силу отсутствия кручения у F , является изоморфизмом.

5. ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ M_B , M_{Dol} , M_{DR}

Пространство модулей Бетти. Пусть $x \in X$; фундаментальная группа $\pi = \pi_1(X, x)$ есть группа конечного типа; поэтому на про-

пространстве представлений $R = \text{Hom}(\pi, GL(r, C))$ имеется естественная структура аффинного алгебраического многообразия. Действительно, пусть $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ — система образующих группы π ; тогда π представляется в виде $\mathcal{L}/\mathcal{N}$, где $\mathcal{L}$ — свободная группа с k образующими, а $\mathcal{N}$ — подгруппа соотношений между ними, которая сама порождена l образующими. Отображение $R \rightarrow GL(r, C)^k: \rho \mapsto (A_i = \rho(\gamma_i))_{i=1, \dots, k}$ отождествляет R с замкнутым подмногообразием в $GL(r, C)^k$ — прообразом единичного элемента при морфизме $GL(r, C)^k \rightarrow GL(r, C)^l$, отвечающем этим соотношениям. Можно проверить, что так определенная структура не зависит от выбора представления группы π образующими и соотношениями. На многообразии R действует сопряжениями группа $GL(r, C)$, и поскольку она редуктивна, по теореме Гильберта алгебра инвариантов $\mathcal{O}(R)^{GL(r, C)}$ имеет конечный тип, так что определено аффинное многообразие

$$M_B(r) = R/GL(r, C).$$

Множество замкнутых точек из $M_B(r)$ соответствует множеству замкнутых орбит группы $GL(r, C)$: проверяется, что замкнутые орбиты — это в точности орбиты полупростых представлений. Включение $\mathcal{O}(R)^{GL(r, C)} \hookrightarrow \mathcal{O}(R)$ определяет морфизм $R \rightarrow M_B(r)$, который описывается следующим образом: любое представление ρ обладает возрастающей фильтрацией $\rho_1 \subset \dots \subset \rho_k = \rho$, такой, что $gr_i(\rho) = \rho_i/\rho_{i-1}$ неприводимы; ρ переходит в точку, отвечающую полупростому представлению $gr(\rho) = \bigoplus_{i=1}^k gr_i(\rho)$.

Заметим, что это пространство модулей, называемое пространством модулей Бетти, можно определить для любого топологического пространства с фундаментальной группой конечного типа.

Геометрическая теория инвариантов [27]. Пусть G — редуктивная группа, действующая линейно на векторном пространстве W , $P(W)$ — проективное пространство прямых в W , а $A \subset P(W)$ — его G -инвариантная замкнутая подсхема. Точка $x \in A$ называется *полустабильной* относительно действия группы G , если существует однородный G -инвариантный полином на W , не обращающийся в нуль в точке x . Точки $x \in A$, полустабильные относительно действия группы G , образуют открытое подмножество A^{ss} . Точка $x \in A^{ss}$ называется *стабильной*, если она полустабильна и, кроме того, морфизм $g \mapsto gx: G \rightarrow A^{ss}$ является собственным. Можно построить проективное многообразие B и G -эквивариантный морфизм $\pi: A^{ss} \rightarrow B$ (действие G на B тривиально), удовлетворяющие следующему свойству универсальности: для любого G -эквивариантного морфизма $f: A^{ss} \rightarrow$

C в многообразии C с тривиальными G -действием существует единственный морфизм $g: B \rightarrow C$, такой, что $g \circ \pi = f$; более того, это свойство сохраняется при замене базы. Морфизм π сюръективен, аффинен и переводит два непересекающихся G -инвариантных замкнутых подмножества в два непересекающихся замкнутых множества. Множество стабильных точек A^s есть прообраз некоторого открытого подмножества $B^s \subset B$.

Имеется следующий удобный критерий полустабильности и стабильности точек относительно действия G . Пусть $\lambda: C^* \rightarrow G$ — некоторая однопараметрическая подгруппа в G ; тогда имеется разложение $W = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n$, где $W_n = \{v \in W \mid \lambda(t) \cdot v = t^n v\}$. Любая точка $x \in P(W)$ представляется некоторым вектором $v = \sum_n v_n$, и пусть $\mu(\lambda, x) = \inf \{n, v_n \neq 0\}$. Тогда имеет место эквивалентность

$$\begin{aligned} & x \text{ полустабильна (соотв. стабильна)} \\ \iff & \mu(\lambda, x) \leq 0 \text{ (соотв. } < 0) \text{ для любой } \lambda. \end{aligned}$$

Используя этот результат, можно, например, найти полустабильные точки грассманиана $\text{Gr} = \text{Grass}(H \otimes C^r, s)$ факторпространств K пространства $H \otimes C^r$ размерности s относительно действия $SL(H)$ — это такие факторпространства K , что для любого подпространства $H' \subset H$

$$\frac{\dim K'}{\dim H'} \geq \frac{\dim K}{\dim H},$$

где K' обозначает образ пространства $H' \otimes C^r$ в K .

Пространство модулей когерентных пучков. Мы говорим, что алгебраический когерентный пучок F на X имеет размерность d , если такова размерность его носителя. Пучок размерности d называется *равноразмерным*, если у него нет когерентных подмодулей размерности $< d$. Для $d = n$ мы получаем пучки без кручения, для $d = 1$ — пучки Козна-Маколея размерности 1. Полином Гильберта когерентного алгебраического пучка F размерности d записывается в виде

$$P_F(m) = \chi(F(m)) = \sum_{i=0}^d C_{m+i-1}^i \chi_i,$$

где $\chi_i = \chi(F|_{Y_i})$ — эйлерова характеристика ограничения пучка F на пересечение i гиперплоскостей общего положения Y_i . Коэффициент $r = \chi_d$ называется *кратностью*. Если F — пучок без кручения, то $r = \text{rang}(F) \cdot \deg(X)$; число $\chi_{d-1} \cdot \deg(X)/r$ есть не что иное, как

наклон, определенный в разд. 2, с точностью до константы, не зависящей от F .

Говорят, что когерентный алгебраический пучок F размерности d и кратности r *полустабилен* (соотв. *стабилен*), если выполнены следующие два условия:

- (а) пучок F равноразмерный;
- (б) для любого ненулевого когерентного подмодуля $F' \subset F$ кратности $r' < r$ справедливо неравенство

$$\frac{P_{F'}}{r'} \leq \frac{P_F}{r} \quad \left(\text{соотв.} \quad \frac{R_{F'}}{r'} < \frac{P_F}{r} \right).$$

В этом неравенстве считается, что полиномы упорядочены лексикографически по коэффициентам, начиная с членов более высокой степени. Аналогично определяется понятие μ -полустабильного (соотв. μ -стабильного) пучка — надо заменить полином Гильберта на коэффициент χ_{d-1} . Очевидны следующие импликации:

$$\begin{array}{ccc} \mu\text{-стабильность} & \Rightarrow & \text{стабильность} \\ & \Downarrow & \\ \mu\text{-полустабильность} & \Leftarrow & \text{полустабильность} \end{array}$$

Для когерентных пучков без кручения получаются классические определения Гизекера [12] и Маруямы [24].

Лемма 6. Семейство μ -полустабильных пучков с данным полиномом Гильберта P ограничено.

Для пучков без кручения это классическое утверждение [23]. В общем случае можно рассматривать F как пучок модулей на подсхеме $S \subset X$, определенной аннулятором пучка F ; S — равноразмерная подсхема размерности d и ограниченной степени. Можно доказать, что семейство таким образом полученных подсхем ограничено, даже если нельзя прямо сослаться на Чжоу: эти подсхемы не являются, вообще говоря, приведенными.

Зафиксируем S и рассмотрим конечную проекцию $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^d$, такую, что $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)) = \mathcal{O}_S(1)$. Тогда пучок $\pi_*(F)$ есть пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}$ -модулей без кручения с тем же полиномом Гильберта, что и у F . Этот пучок не обязательно μ -полустабилен, но наклоны его подпучков ограничены. Этого достаточно, чтобы получить ограниченность семейства пучков на S , а значит, и исходного семейства.

Зафиксируем полином Q степени d и рассмотрим категорию $\mathcal{C}(Q)$ полустабильных пучков F , таких, что $P_F/r = Q$, где r — кратность

пучка F . Легко проверить, что таким образом получается абелева категория, притом нётерова и артинова, что позволяет определить в ней понятие фильтрации Жордана–Гельдера, т.е. такой фильтрации

$$0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = F,$$

что присоединенные факторы $gr_i(F) = F_i/F_{i-1}$ стабильны; тогда $gr(F) = \bigoplus gr_i(F)$ не зависит от фильтрации с точностью до изоморфизма. Два полустабильных пучка F и G из $\mathcal{C}(G)$ называются S -эквивалентными, если $gr(F) \simeq gr(G)$.

Пусть P — полином степени d . Рассмотрим функтор $\underline{M}_X(P)$, сопоставляющий алгебраическому многообразию S множество $\underline{M}_X(P)(S)$ классов изоморфизма семейств полустабильных пучков на X с полиномом Гильберта P , параметризованных S .

Теорема 5. 1. Для функтора $\underline{M}_X(P)$ существует грубое пространство модулей $M_X(P)$, точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с классами S -эквивалентности полустабильных пучков с полиномом Гильберта P .

2. $M_X(P)$ — проективное многообразие.

3. Существует открытое подмножество $M_X^s(P) \subset M_X(P)$, точки которого отвечают классам изоморфизма стабильных пучков.

Тот факт, что $M_X(P)$ — грубое пространство модулей, означает, что имеется функториальный по S морфизм $f: \underline{M}_X(P)(S) \rightarrow \text{Мог}(S, M_X(P))$, обладающий следующим свойством универсальности: для любого алгебраического многообразия N и любого морфизма функторов $g: \underline{M}_X(P)(S) \rightarrow \text{Мог}(S, N)$ существует единственный морфизм $\varphi: M_X(P) \rightarrow N$, такой, что $g_F = \varphi \circ f_F$ для любого семейства $F \in \underline{M}_X(P)(S)$.

Набросок доказательства. Выберем сначала достаточно большое N так, чтобы для $n \geq N$ выполнялись следующие условия:

(i) для любого полустабильного пучка F с полиномом Гильберта P пучок $F(n)$ порождается глобальными сечениями, $H^q(F(n)) = 0$ для $q > 0$;

(ii) для любого полустабильного пучка F кратности r с полиномом Гильберта $P_F = P$ и любого ненулевого подмодуля $F' \subset F$ кратности r' имеет место неравенство

$$\frac{h^0(F'(n))}{r'} \leq \frac{h^0(F(n))}{r}, \quad \text{а в случае равенства } \frac{P_{F'}}{r'} = \frac{P_F}{r}.$$

Утверждение (i) следует из теорем А и В Серра, примененных к ограниченному семейству из леммы 6.

Утверждение (ii), которое выражает полустабильность, менее очевидно, так как семейство подпучков F' , участвующих в нем, не является ограниченным.

Пусть H — комплексное векторное пространство размерности $P(N)$; для каждого $k \geq 0$ положим $A_k = H^0(\mathcal{O}_X(k))$. Рассмотрим проективную схему Гильберта–Гротендика [15]

$$\text{Hilb} = \text{Hilb}(H \otimes \mathcal{O}_X(-N), P)$$

когерентных $\mathcal{O}_X$ -модулей с полиномом Гильберта P , являющихся фактормодулями локально свободного пучка $H \otimes \mathcal{O}_X(-N)$: Сопоставление пучку F векторного пространства $H^0(F(N+k))$ определяет для достаточно большого k вложение Hilb в грассманиан $\text{Gr} = \text{Grass}(H \otimes A_k, P(N+k))$ факторов пространства $H \otimes A_k$ размерности $P(N+k)$; это определяет поляризацию схемы Hilb . Группа $SL(H)$ действует на Hilb и на Gr ; это действие связано с линейным действием группы $SL(H)$ на $\Lambda^{P(N+k)}(H \otimes A_k)$ через вложение Плюккера. Используя критерий предыдущего раздела, нетрудно найти полустабильные точки относительно действия этой группы, если k достаточно велико:

Лемма 7. Для подходящей поляризации схемы Hilb и точки $F \in \text{Hilb}$ следующие условия эквивалентны:

(а) точка F полустабильна относительно действия группы $SL(H)$;

(б) для любого ненулевого подпространства $H' \subset H$, если $F' — подпучок в F , порожденный $H' \otimes \mathcal{O}_X(-N)$, то$

$$\frac{P_{F'}}{\dim H'} \geq \frac{P}{\dim H}.$$

Рассмотрим фактормногообразие Мамфорда $M' = \text{Hilb}^{ss}/SL(H)$ открытого подмножества полустабильных точек $\text{Hilb}^{ss} \subset \text{Hilb}$ по действию группы $SL(H)$. Любой паре (F, α) , состоящей из полустабильного пучка F с полиномом Гильберта P и изоморфизма $\alpha: H \simeq H^0(F(N))$, отвечает точка из Hilb . Если обозначить через F' подпучок в F , порожденный ненулевым подпространством $H' \subset H$, то $\dim H' \leq \dim H^0(F'(N))$, откуда с использованием свойства (ii) выше вытекает, что

$$\frac{\dim H'}{r'} \leq \frac{\dim H}{r}, \quad \text{а в случае равенства } \frac{P_{F'}}{r'} = \frac{P_F}{r}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{P_{F'}}{\dim H'} \geq \frac{P_F}{\dim H}.$$

Согласно лемме 7, это означает, что точка из Hilb , отвечающая (F, α) , полустабильна. При замене изоморфизма α получается точка на той же орбите группы $SL(H)$ и, следовательно, та же точка фактора M' . Нетрудно увидеть, что эта конструкция на самом деле дает функториальный морфизм

$$\underline{M}_X(P)(S) \rightarrow \text{Mor}(s, M').$$

Обратно, можно было бы надеяться, что если хорошо выбрать число N и поляризацию, то точки $F \in \text{Hilb}^{ss}$ определяют полустабильные пучки и канонический морфизм $H \rightarrow H^0(F(N))$ является изоморфизмом. Если второе утверждение очевидно, то с первым дело обстоит не так: уже для пучков без кручения в работах Гизекера и Маруямы встречаются трудности такого рода. Тем не менее можно доказать, что точки $F \in \text{Hilb}$, отвечающие полустабильным пучкам, для которых морфизм $H \rightarrow H^0(F(N))$ является изоморфизмом, определяют подсхему $\text{H}^{ss} \subset \text{Hilb}^{ss}$, являющуюся открытой и замкнутой, а также $SL(H)$ -инвариантной. Тогда можно рассмотреть факторногообразие Мамфорда $M = M_X(P) = \text{H}^{ss}/SL(H)$; это проективное многообразие, которое, как легко проверить, является искомым грубым пространством модулей.

Пространство модулей Дольбо. Так же как для когерентных пучков, мы определяем понятия полустабильности и стабильности для пучков Хиггса при помощи полиномов Гильберта: пучок Хиггса (F, θ) кратности r полустабильен, если он равноразмерный и для любого ненулевого подмодуля Хиггса $F' \subset F$ кратности r' справедливо неравенство

$$\frac{P_{F'}}{r'} \leq \frac{P_F}{r}.$$

Аналогично определяется фильтрация Жордана-Гельдера и S-эквивалентность.

Ограничимся для простоты случаем пучков без кручения; тогда полином Гильберта P имеет степень n . Под семейством пучков Хиггса с полиномом Гильберта P , параметризованным алгебраическим многообразием S , понимается пара, состоящая из алгебраического когерентного пучка F на $S \times X$ и морфизма $\theta: F \rightarrow \Omega_{S \times X/S}^1 \otimes F$, индуцирующего над каждой точкой $s \in S$ пучок Хиггса (F_s, θ_s) с полиномом Гильберта P . (Пучок $\Omega_{S \times X/S}^1$ обозначает, как обычно, пучок относительных дифференциальных 1-форм.) Рассмотрим функтор $\underline{M}_{\text{Higgs}}(P)$, сопоставляющий многообразию S множество классов

изоморфизма семейств полустабильных пучков Хиггса на X с полиномом Гильберта P , параметризованных S . Следующий результат обобщает теорему 5.

Теорема 6. Пусть P — полином степени n .

1. Для функтора $\underline{M}_{\text{Higgs}}(P)$ существует грубое пространство модулей $M_{\text{Higgs}}(P)$, точки которого отвечают классам S -эквивалентности полустабильных пучков Хиггса.

2. Многообразие $M_{\text{Higgs}}(P)$ квазипроективно.

3. Существует открытое подмножество в $M_{\text{Higgs}}(P)$, точки которого отвечают классам изоморфизма стабильных пучков Хиггса.

Это утверждение на самом деле следует из теоремы 5. Рассмотрим расслоение на проективные пространства (в смысле Гротендика) $Z = \mathbf{P}(T(X) \oplus \mathcal{O}_X)$, где $T(X)$ — касательное расслоение; это гладкое пополнение многообразия $T^*(X)$ кокасательных векторов. Обозначим через $\pi: Z \rightarrow X$ каноническую проекцию, а через D — дивизор на бесконечности. На многообразии Z обратимый пучок $\pi^*(\mathcal{O}_X(a)) \otimes \mathcal{O}(D)$ очень обилен для достаточно большого a . Для простоты предположим, что $a = 1$, — к этому случаю всегда можно прийти, изменив при необходимости поляризацию на X ; это изменяет полином Гильберта, но не изменяет понятия стабильности и полустабильности.

Лемма 8. Категория полустабильных пучков Хиггса без кручения на X эквивалентна категории полустабильных пучков размерности n на Z , носитель которых не пересекает дивизор на бесконечности D .

Доказательство. Пусть $A = \text{Sym } T(X)$ — симметрическая алгебра касательного пучка $T(X)$; тогда $T^*(X) = \text{Spec } A$. Задать пучок Хиггса на X — это то же самое, что задать когерентный A -модуль; сопоставим такому модулю F когерентный пучок G на $T^*(X)$, положив

$$G = \pi^{-1}(F) \otimes_{\pi^{-1}A} \mathcal{O}_{T^*}.$$

Носитель пучка G является собственным над X ; если F — пучок без кручения, то G — равноразмерный пучок размерности n . Обратно, когерентному модулю на T^* отвечает пучок Хиггса $F = \pi_*(G)$ без кручения на X . Эти две операции взаимно обратны [17, упр. 5.17]; полиномы Гильберта пучков F и G одинаковы, и подмодули Хиггса в F отвечают когерентным подмодулям в G . Следовательно, понятия полустабильности и стабильности согласованы. Лемма доказана.

Когерентные модули на T^* с носителем, собственным над X , можно рассматривать как когерентные модули на Z , носитель которых не пересекается с дивизором на бесконечности D . Поэтому

если рассмотреть открытое подмножество $\mathcal{U} \subset M_Z(P)$ классов эквивалентности полустабильных пучков с полиномом Гильберта P , носитель которых не пересекает D , то мы получим квазипроективное алгебраическое многообразие, которое удовлетворяет свойству универсальности грубого многообразия модулей. Положим тогда $M_{\text{Higgs}}(P) = \mathcal{U}$.

Обозначим через P_0 полином Гильберта для $\mathcal{O}_X$. Пусть r — целое число; пространство модулей $M_{\text{Higgs}}(rP_0)$ содержит открыто-замкнутую подсхему классов S -эквивалентности полустабильных пучков ранга r с нулевыми классами Черна. Следуя Симпсону, обозначим эту компоненту через $M_{\text{Dol}}(r)$. Как мы знаем из следствия 2 теоремы 4, точки этой компоненты представляются прямыми суммами μ -стабильных расслоений Хиггса с классами Черна $c_i = 0$.

Пространство модулей де Рама. Мы хотим построить алгебраическое многообразие, параметризующее плоские расслоения на X . Задать такое расслоение — это значит задать пару (E, D) , состоящую из алгебраического векторного расслоения E и регулярной связности $D: E \rightarrow \Omega^1 \otimes E$, удовлетворяющей условию интегрируемости $D^2 = 0$. Регулярная связность — это то же самое, что расщепление точной последовательности

$$0 \rightarrow \Omega^1 \otimes E \rightarrow J^1 E \rightarrow E \rightarrow 0,$$

где $J^1 E$ — расслоение струй первого порядка. Для фиксированного E пространство интегрируемых связностей можно рассматривать как замкнутую подсхему векторного пространства $\text{Hom}(J^1 E, \Omega^1 \otimes E)$: уравнения, которыми она определяется, выражают условия расщепления и интегрируемости.

Лемма 9. Семейство алгебраических векторных расслоений, подлежащих плоским расслоениям ранга r , ограничено.

Доказательство. Достаточно показать, что семейство неприводимых плоских расслоений ограничено. Пусть (E, D) — такое расслоение; рассмотрим фильтрацию Хардера-Нарасимхана $(F_i)_{i=1, \dots, k}$ для E и обозначим через μ_i наклон присоединенного фактора $gr_i = F_i/F_{i-1}$. Связность индуцирует $\mathcal{O}_X$ -линейный оператор

$$F_i \rightarrow \Omega^1 \otimes E/F_i,$$

который является ненулевым для $1 \leq i < k$, так как в противном случае F_i был бы D -инвариантным подмодулем, локально свободным, согласно результатам Делиня [5, théorème 2.23], т.е. определял

бы плоское подрасслоение, что противоречит нашему предположению о неприводимости. Поэтому $\mu_{\min}(F_i) \leq \mu_{\max}(\Omega^1) + \mu_{\max}(E/F_i)$, т.е. $\mu_i - \mu_{i+1} \leq \mu_{\max}(\Omega^1)$. Следовательно, $\mu_{\max}(E) - \mu_{\max}(E) \leq r \mu_{\max}(\Omega^1)$. Поскольку полином Гильберта фиксирован, вариант уже использовавшейся леммы 6 позволяет заключить, что семейство расслоений E ограничено.

Любое плоское расслоение E на X имеет возрастающую фильтрацию F_i плоскими подрасслоениями, такую, что $gr_i = F_i/F_{i-1}$ неприводимы; градуированное расслоение $gr(E) = \bigoplus_i gr_i$ не зависит от фильтрации с точностью до изоморфизма. Два плоских расслоения E и F называются S -эквивалентными, если $gr(E) \simeq gr(F)$. Пусть r — целое число. Для любого алгебраического многообразия S рассмотрим множество $\underline{M}_{DR}(r)(S)$ алгебраических когерентных пучков F на $S \times X$, снабженных относительной связностью $D: F \rightarrow \Omega^1_{S \times X/S} \otimes F$, удовлетворяющей условию интегрируемости $D^2 = 0$, таких, что F_s имеет ранг r для любой точки $s \in S$.

Теорема 7. 1. *Для функтора $\underline{M}_{DR}(r)$ существует грубое пространство модулей $M_{DR}(r)$, точки которого суть классы S -эквивалентности плоских расслоений.*

2. *Многообразие $M_{DR}(r)$ квазипроективно.*

3. *Классы изоморфизма неприводимых плоских расслоений отвечают открытому подмножеству в $M_{DR}(r)$.*

Набросок доказательства. Пусть, как и выше, $P = rP_0$, N — достаточно большое целое число и H — комплексное векторное пространство размерности $P(N)$. Рассмотрим множество троек (E, α, D) , где E — алгебраическое векторное расслоение, $\alpha: H \rightarrow H^0(E(N))$ — изоморфизм и D — интегрируемая связность на E . Можно определить алгебраическое квазипроективное многообразие

$$\mathcal{A} \rightarrow \text{Hilb}(H \otimes \mathcal{O}(-N), P),$$

параметризующее такие тройки. Мы объясним, как снабдить это многообразие $\mathcal{A}$ поляризацией.

Обозначим через $\mathcal{D}$ алгебру скалярных дифференциальных операторов на X ; на ней есть две очевидные структуры $\mathcal{O}_X$ -модуля. Интегрируемая связность на локально свободном пучке E — это то же самое, что структура $\mathcal{D}$ -модуля на нем: если задана такая структура, то связность D задается формулой $(Ds, \xi) = \xi \cdot s$, где ξ — локальное векторное поле, а s — локальное сечение расслоения E ; согласованность со скобкой обеспечивает правило Лейбница и интегрируемость.

Рассмотрим $\mathcal{O}$ -подмодуль $\mathcal{D}_i$ дифференциальных операторов порядка $\leq i$. Если E есть $\mathcal{D}$ -модуль, то имеется морфизм $\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} E \rightarrow E$,

где в тензорном произведении рассматривается правая $\mathcal{O}_X$ -структура на $\mathcal{D}_i$; его композиция с морфизмом вычисления сопоставляет любой точке (E, α, D) из $\mathbf{A}$ некоторый фактормодуль модуля $\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} (H \otimes \mathcal{O}_X(-N))$. Таким образом получается погружение

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{H}_i = \text{Hilb}(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} (H \otimes \mathcal{O}_X(-N)), P).$$

Группа $SL(H)$ действует на $\mathbf{H}_i$, и $\mathbf{A}$ есть локально замкнутая $SL(H)$ -инвариантная подсхема в $\mathbf{H}_i$. Лемма 7 позволяет определить (для подходящей поляризации) открытое подмножество $\mathbf{H}_i^{ss}$ полустабильных точек относительно действия $SL(H)$: Симпсон показывает что $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{H}_i^{ss}$ для достаточно большого N и $i \geq r$ [31, Lemma 4.5]. Таким образом, получаем морфизм

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{H}_i^{ss}/SL(H).$$

В тех же предположениях доказывается, что $\mathbf{A}$ есть прообраз локально замкнутой подсхемы в $\mathbf{H}_i^{ss}/SL(H)$: эта подсхема и есть грубое пространство модулей $M_{DR}(r)$.

Сравнение трех пространств модулей. Три алгебраических многообразия $M_B(r)$, $M_{Dol}(r)$ и $M_{DR}(r)$ имеют одинаковые множества замкнутых точек; однако они различаются как алгебраические многообразия. Тем не менее К. Симпсон доказал следующий результат:

Теорема 8. (1) Пусть $M_B^{an}(r)$ и $M_{DR}^{an}(r)$ — подлежащие комплексные аналитические пространства для $M_B(r)$ и $M_{DR}(r)$ соответственно. Имеет место изоморфизм

$$M_B^{an}(r) \simeq M_{DR}^{an}(r).$$

(2) Подлежащие топологические пространства (с обычной топологией) для $M_B(r)$ и $M_{Dol}(r)$ гомеоморфны.

Пример: случай $r = 1$. Изучим случай расслоений ранга $r = 1$ на римановой поверхности X . Тогда $M_B = H^1(X, \mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^{*2g}$ — аффинное многообразие размерности $2g$. Естественная проекция $M_{DR} \rightarrow \text{Jac}(X)$ многообразия модулей M_{DR} на якобиан $\text{Jac}(X)$ линейных расслоений степени 0 является аффинным расслоением со слоем $\Omega^1(X)$, которое можно описать следующим образом: рассмотрим точную последовательность абелевых групп

$$0 \rightarrow \Omega^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

Образ последней стрелки — якобиан; таким образом, $H^1(X, C^*)$ является тотальным пространством комплексно-аналитического расслоения на аффинные пространства над $Jac(X)$ со структурной группой $\Omega^1(X)$. Многообразие $Jac(X)$ проективно, так что по теореме сравнения Серра это расслоение в действительности алгебраическое; таким образом тотальное пространство $H^1(X, C^*)$ наследует структуру алгебраического многообразия — это и есть M_{DR} . Как заметил Серр, это алгебраическое многообразие не является аффинным, хотя оно аналитически изоморфно C^{*2g} ; итак, $M_B \neq M_{DR}$.

Наконец, запишем $C^* = U \times R_+^*$, где U — группа комплексных чисел модуля 1; включение $H^1(X, U) \hookrightarrow H^1(X, C^*)$ индуцирует изоморфизм $H^1(X, U) \simeq Jac(X)$ и, следовательно, расщепление

$$H^1(X, C^*) \simeq Jac(X) \times \Omega^1(X).$$

Многообразие M_{Dol} есть произведение $Jac(X) \times \Omega^1(X)$; таким образом, $M_{Dol}^{an} \neq M_B^{an} = M_{DR}^{an}$: действительно, M_{Dol}^{an} содержит компактные аналитические подмногообразия положительной размерности, а следовательно, не является многообразием Штейна.

Замечание. Можно построить плоский морфизм алгебраического многообразия W в аффинную прямую A^1 , такой, что его слой над любой точкой $\lambda \neq 0$ изоморфен $M_{DR}(r)$, а его слой над 0 изоморфен $M_{Dol}(r)$. Для этого нужно, следуя Делиню, ввести понятие λ -связности на алгебраическом векторном расслоении E : это такой C -линейный оператор $D: E \rightarrow \Omega^1 \otimes E$, что $D(fs) = \lambda df \otimes s + fDs$ и $D^2 = 0$, где f — локальная регулярная функция, а s — локальное сечение расслоения E ; другими словами, это дифференциальный оператор D первого порядка с символом $\lambda id_{\Omega^1 \otimes E}$, такой, что $D^2 = 0$. Таким образом, многообразие модулей $M_{Dol}(r)$ можно рассматривать как специализацию многообразия модулей $M_{DR}(r)$.

6. ДЕЙСТВИЕ C^*

Каждому семейству $(F_s, \theta_s)_{s \in S}$ полустабильных пучков Хиггса с полиномом Гильберта P на алгебраическом многообразии S отвечает семейство $(F_s, t\theta_s)_{(t,s) \in C^* \times S}$ полустабильных пучков Хиггса на $C^* \times S$ — эта конструкция определяет морфизм $C^* \times S \rightarrow M_{Higgs}(P)$. Многообразие $M_{Higgs}(P)$ получается факторизацией по действию группы $SL(H)$ открытого подмножества U схемы Гильберта, на котором имеется универсальный пучок Хиггса (F, θ) ; таким образом, можно взять $S = U$ и получить эквивариантный морфизм $C^* \times U \rightarrow M_{Higgs}(P)$, который пропускается через некоторый морфизм

$$C^* \times M_{Higgs}(P) \rightarrow M_{Higgs}(P).$$

Можно проверить, что так получается действие группы C^* на $M_{Higgs}(P)$.

Неподвижные точки. Для простоты мы ограничимся изучением неподвижных относительно действия C^* точек на многообразии $M_{Dol}(r)$.

Предложение 4. Точка $p \in M_{Dol}(r)$ является неподвижной относительно действия C^* тогда и только тогда, когда она соответствует расслоению Хиггса вида $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$, где F_i — алгебраические подрасслоения расслоения E и

$$\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}.$$

Доказательство. Напомним, что каждая точка $p \in M_{Dol}(r)$ представляет некоторую прямую сумму $(E, \theta) = \bigoplus_j (E_j, \theta_j)$ стабильных расслоений Хиггса с нулевыми классами Черна. Если точка p неподвижна относительно C^* , то $(E, \theta) \simeq (E, t\theta)$ для любого $t \in C^*$; выберем t , не являющееся корнем из единицы, и обозначим через g такой изоморфизм. Для любого векторного поля ξ над открытым подмножеством U рассмотрим морфизм $\theta_\xi = \langle \xi, \theta \rangle$. Тогда имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta_\xi} & E \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ E & \xrightarrow{t\theta_\xi} & E \end{array}$$

Характеристический полином изоморфизма g , очевидно, имеет постоянные коэффициенты; пусть λ — собственное значение изоморфизма g кратности ρ . Тогда $V_\lambda = \text{Ker}(g - \lambda \text{id}_E)^\rho$ — подрасслоение ранга ρ в E и $\theta_\xi(V_\lambda) \subset V_{t\lambda}$. Следовательно, если $t\lambda$ не является собственным значением для g , то $\theta_\xi(V_\lambda) = 0$ для любого ξ . Пусть Λ — множество собственных значений изоморфизма g , а $\Lambda_i \subset \Lambda$ — подмножество таких собственных значений λ , что $t\lambda, \dots, t^{i-1}\lambda \in \Lambda$, $t^i\lambda \notin \Lambda$. Таким образом, получается разбиение множества Λ ; положим $F_0 = 0$ и для $i > 0$

$$F_i = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_i} V_\lambda.$$

Тогда $\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}$. Обратно, если задано разложение $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$, такое, что $\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}$, положим $g_t|_{F_i} = t^{k-i} \text{id}_{F_i}$. Ясно, что g_t определяет изоморфизм $(E, \theta) \simeq (E, t\theta)$.

Вариации структур Ходжа. Назовем (комплексной) *вариацией структур Ходжа* (веса m) на X набор данных, состоящий из прямой суммы $V = \bigoplus_{p+q=m} V^{p,q}$ векторных C^∞ -расслоений, плоской связности D на V :

$$A^0(V^{p,q}) \rightarrow A^1(V^{p,q}) \oplus A^{1,0}(V^{p-1,q+1}) \oplus A^{0,1}(V^{p+1,q-1}),$$

$$s \mapsto Ds = (\nabla s, \theta s, \theta^* s),$$

и эрмитовой формы h на V , удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) разложение расслоения V в прямую сумму является ортогональным относительно h ;
- (2) эрмитова форма $(-1)^p h$ положительна и невырождена на $V^{p,q}$;
- (3) связность D согласована с h .

Понятие вариации структур Ходжа было впервые введено Ф. А. Гриффитсом [14], который рассматривал такие наборы данных с дополнительным ограничением: на V должно существовать сопряжение. Основной пример связан с изучением структур Ходжа семейств гладких проективных многообразий, вложенных в $\mathbf{P}^N$. Более точно, пусть $f: Y \rightarrow X$ — гладкий морфизм проективных многообразий, вложенный в относительное проективное пространство $X \times \mathbf{P}^N$; рассмотрим C^∞ -расслоение V , отвечающее локальной системе $R^m f_*(C)_0$ — примитивной части высшего прямого образа; разложение Ходжа дает изоморфизм

$$V = R^m f_*(C)_0 \otimes_C C_X^\infty \simeq \bigoplus_{p+q=m} R^q f_*(\Omega_{Y/X}^p)_0 \otimes_{O_X} C_X^\infty$$

(индекс 0 означает примитивную часть, а C_X^∞ — это пучок C^∞ -функций на X). Обозначим через ω относительную кэлерову форму, индуцированную вложением в относительное проективное пространство над X . Эрмитова форма h на V определяется на слое Y_x формулой

$$h(\alpha, \beta) = i^{m^2} \int_{Y_x} \alpha \wedge \bar{\beta} \wedge \omega^{n-m}$$

для α, β из $\text{Harm}^m(Y_x)_0$, пространства гармонических примитивных форм степени m на Y_x , которое отождествляется со слоем локальной системы $R^m f_*(C)_0$ над x . Связность D , называемая связностью Гаусса-Манина, задается локальной системой, а дифференциальная форма θ возникает в силу теоремы трансверсальности Гриффитса.

Теорема 9. *Неподвижные точки действия C^* на $M_{\text{Dol}}(r)$ отвечают расслоениям Хиггса, которые происходят из вариаций структур Ходжа.*

Доказательство (набросок). Рассмотрим вариацию структур Ходжа $(V = \bigoplus_{p+q=m} V^{p,q}, D, h)$ и эрмитову метрику K , равную $(-1)^p h$ на $V^{p,q}$. Связность ∇ эрмитова относительно K , а дифференциальная форма θ^* сопряжена к θ относительно этой метрики. Условие интегрируемости $D^2 = 0$ с учетом разложения

$$A^2(V) = \bigoplus_{\substack{r+s=2 \\ p+q=m}} A^{r,s}(V^{p,q})$$

приводит к тому, что оператор $D'' = \nabla^{0,1} + \theta$ определяет структуру Хиггса на V , и, поскольку $\theta(V^{p,q}) \subseteq \Omega^1(V^{p-1,q+1})$, точка (V, θ) неподвижна относительно действия C^* .

Чтобы доказать обратное, заметим, что все сводится к случаю стабильной точки (E, θ) , неподвижной относительно C^* ; тогда надо доказать существование метрики Янга–Миллса, для которой разложение $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$ из предложения 4 ортогонально. Для этого достаточно заметить, что если это разложение ортогонально для начальной метрики K в уравнении теплопроводности (7)

$$H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} = -i\Lambda F_H^\perp,$$

то это же верно и для решения $t \mapsto H_t$, и для предела H_∞ . Таким образом, получаем гармоническое расслоение. Остается поменять знак метрики на факторах F_i , чтобы получить вариацию структур Ходжа веса $k-1$.

Морфизм Хитчина. Пусть P — полином степени n . Следуя Хитчину [19, 20], рассмотрим морфизм

$$\gamma: M_{\text{Higgs}}(P) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r H^0(\text{Sym}^i(\Omega_X^1)),$$

сопоставляющий пучку Хиггса (E, θ) коэффициенты $s_i(\theta)$ характеристического полинома $t^r + \sum_{i=1}^r s_i(\theta) t^{r-i}$ оператора θ . В самом деле, E без кручения и вне замкнутого подмножества коразмерности ≥ 2 θ локально представляется матрицей регулярных дифференциальных 1-форм, так что можно вычислить коэффициенты $s_i(\theta)$ характеристического полинома и продолжить их до регулярных сечений на X .

Предложение 5. Морфизм γ является собственным.

Доказательство. Рассмотрим гладкую кривую C с отмеченной точкой O и положим $U = C \setminus \{O\}$. Надо показать, что если $s \mapsto \alpha(s) =$

$(E_s, \theta_s): U \rightarrow M_{\text{Higgs}, X}(P)$ — такой морфизм, что $\gamma \circ \alpha$ продолжается на C , то и α продолжается на C . Положим $\alpha_i = s_i(\alpha)$; это сечение продолжается на C ; рассмотрим функцию $a: C \times T^* \rightarrow \text{Sym}^r(\Omega_X^1)$, определенную формулой $a(s, t) = t^r + \sum_{i=1}^r t^{r-i} \alpha_i$. По теореме Гамильтона–Кэли $a(s, \theta_s) = 0$ для $s \neq 0$.

Рассмотрим в обозначениях разд. 5 полустабильный пучок F_s на Z , отвечающий $\alpha(s) = (E_s, \alpha_s)$; эти пучки образуют плоское семейство на $U \times Z$, причем их носитель содержится в замкнутом множестве $V(a) \subset C \times T^*$ нулей функции a (так как соответствующий морфизм $F_s \rightarrow \text{Sym}^r(\Omega_X^1) \otimes F_s$ равен нулю). Но мы знаем, что пространство модулей $M_Z(P)$ собственно; поэтому существует предел $F_0 = \lim_{s \rightarrow 0} F_s$. Из плоскости следует, что носитель пучка F_0 также содержится в $V(a)$, в частности, он не пересекается с дивизором на бесконечности D . Таким образом, морфизм α продолжается на C .

Следствие 1. Пусть (F, θ) — полустабильный пучок Хиггса с полиномом Гильберта P ; тогда $\lim_{t \rightarrow 0} (F, t\theta)$ существует в $M_{\text{Higgs}}(P)$ и является неподвижной точкой относительно действия S^* .

Следствие 2. Любое линейное представление фундаментальной группы многообразия X можно непрерывно продеформировать в представление, происходящее из вариации структур Ходжа.

Доказательство. Имеется гомеоморфизм (для обычной топологии) $M_B(r) \simeq M_{\text{Dol}}(r)$; таким образом, любая связная компонента пространства $M_B(r)$ содержит точку, происходящую из вариации структур Ходжа. В пространстве представлений R связные компоненты замкнуты по Зарисскому и не пересекаются; поэтому их образы в $M_B(r)$ — непересекающиеся замкнутые подмножества, которые, следовательно, являются компонентами связности. Таким образом, в любой компоненте связности пространства R найдутся точки, отвечающие вариациям структур Ходжа.

7. РАССЛОЕНИЯ ХИГГСА НА КРИВЫХ

Для расслоений Хиггса ранга 2 нечетной степени на кривой Хитчин вычислил в [19] числа Бетти соответствующего пространства модулей $M_{\text{Higgs}}(P)$. В этом случае все точки стабильны, а пространство модулей гладко. Это вычисление следует классической идее использования S^* -действия; Симпсон использует это действие для доказательства неприводимости пространства модулей $M_{\text{Dol}}(r)$ (в случае, когда это многообразие может быть и особым).

Теорема 10. Пусть X — кривая рода $g \geq 2$. Тогда пространство модулей $M_{Dol}(r)$ является неприводимым многообразием и имеет размерность $2(r^2(g-1)+1)$.

Аналогичный факт имеет место и для $M_B(r)$ и $M_{DR}(r)$. Нам требуется следующий результат, который справедлив для многообразия X размерности n . Пусть (E, θ) — расслоение Хиггса ранга r , а $(E^*, -\check{\theta})$ — двойственное расслоение Хиггса, где $\check{\theta}$ — регулярная дифференциальная 1-форма со значениями в $End(E^*)$, полученная из θ транспонированием. Тогда

(а) $H_{Dol}^{2n}(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$; спаривание $E \times E^* \rightarrow \mathcal{O}_X$ согласовано со структурами Хиггса и индуцирует двойственность Пуанкаре–Серра

$$H_{Dol}^q(E) \cong H_{Dol}^{2n-q}(E^*)^*;$$

(б) эйлерова характеристика расслоения E , заданная формулой $\chi_{Dol}(E) = \sum (-1)^i \dim H_{Dol}^i(E)$, связана с классической эйлеровой характеристикой $\chi_{top}(X)$ формулой

$$\chi_{Dol}(E) = r \chi_{top}(X).$$

Доказательство теоремы 10 разбивается на две части: локальная неприводимость и связность, которым посвящены приведенные ниже предложения 6 и 7.

Предложение 6. Если X — кривая, то аналитическое пространство $M_{Dol}^{an}(r)$ локально неприводимо.

Это утверждение следует из локального описания пространства $M_{Dol}^{an}(r)$. Пусть (E, θ) — расслоение Хиггса на кривой X , являющееся прямой суммой стабильных расслоений Хиггса степени 0, $End(E)$ — расслоение Хиггса эндоморфизмов расслоения E и $End_0(E)$ — расслоение эндоморфизмов с нулевым следом. Имеется квадратичная форма $q: \alpha \mapsto \alpha \wedge \alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$,

$$H_{Dol}^1(End(E)) \rightarrow H_{Dol}^2(End_0(E)).$$

Рассмотрим конус $\Gamma \subset H_{Dol}^1(End(E))$, заданный уравнением $q(\alpha) = 0$. Группа $Aut(E)$ автоморфизмов Хиггса действует на Γ сопряжениями; с аналитической точки зрения в окрестности точки $P \in M_{Dol}^{an}(r)$, отвечающей расслоению (E, θ) , имеется изоморфизм ростков аналитических пространств

$$\varphi: (\Gamma/Aut(E), 0) \cong (M_{Dol}^{an}(r), p).$$

Это — результат общей теории деформаций, развитой Шлессингером и Сташефом, Делинем, Гольдманом и Миллсоном [13]. По двойственности Пуанкаре–Серра пространство $H_{Dol}^2(End_0(E))$ дуально пространству эндоморфизмов Хиггса с нулевым следом расслоения E ; в частности, если (E, θ) стабильно, то это пространство равно нулю, а группа автоморфизмов есть C^* и действует тривиально. Это дает гладкость $M_{Dol}(r)$ в окрестности стабильной точки, причем размерность в окрестности такой точки равна

$$\dim H_{Dol}^1(End(E)) = -\chi_{Dol}(End(E)) + 2 = 2r^2(g-1) + 2.$$

Если E — прямая сумма стабильных расслоений Хиггса степени 0,

$$E = \bigoplus_i E_i^{r_i},$$

то морфизм q можно явно вычислить, выбрав базисы в пространстве $H_{Dol}^1(Hom(E_i, E_j))$ и представляя элемент из $H_{Dol}^1(End(E))$ набором матриц. Тогда утверждение сведется к доказательству результата такого типа: если $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ — квадратные матрицы, то многообразие, определенное уравнением

$$\sum_{i=1}^k [a_i, b_i] = 0,$$

неприводимо [31].

Предложение 7. Если X — кривая, то многообразие $M_{Dol}(r)$ связно.

Здесь подключается действие C^* . Напомним (см. разд. 5), что $M = M_{Dol}(r)$ вкладывается в проективное пространство $P(W)$ (проективное пространство прямых в некотором векторном пространстве W) и действие C^* продолжается до линейного действия $C^* \rightarrow GL(W)$. Запишем разложение $W = \bigoplus_{\alpha} W_{\alpha}$, где W_{α} — собственное подпространство характера $t \mapsto t^{\alpha}$. Множество неподвижных точек этого действия есть несвязное объединение линейных многообразий $P(W_{\alpha})$. Для $z \in P(W)$ обозначим через z_0 (соотв. z_{∞}) предел tz при $t \rightarrow 0$ (соотв. $t \rightarrow \infty$), а через $\alpha_0(z)$ (соотв. $\alpha_{\infty}(z)$) единственное целое число α , такое, что $z_0 \in P(W_{\alpha})$ (соотв. $z_{\infty} \in P(W_{\alpha})$). Тогда $\alpha_0(z) \leq \alpha_{\infty}(z)$, причем равенство имеет место, только если z — неподвижная точка. Согласно теореме собственности (предложение 5), если $z \in M$, то и $z_0 \in M$. С другой стороны, рассмотрим замкнутую подсхему

$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, отвечающую классам расслоений Хиггса $(E, 0)$, где E — полустабильное расслоение степени 0; она отождествляется с многообразием Нарасимхана и Сешадри [28] и является, таким образом, собственной и неприводимой. Очевидно, что все ее точки неподвижны относительно C^* .

Лемма 10. Пусть $y \in \mathcal{M}$ — неподвижная точка. Если $y \notin \mathcal{N}$, то найдется точка $z \in \mathcal{M}$, $z \neq y$, такая, что $z_\infty = y$.

Из этого утверждения сразу следует связность: допустим, что существует компонента связности $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, которая не пересекает $\mathcal{N}$. Пусть α' — наименьшее из чисел $\alpha_0(z')$ для $z' \in \mathcal{M}'$. Эта нижняя грань достигается в некоторой неподвижной точке $y \in \mathcal{M}'$, $y \notin \mathcal{N}$. Согласно лемме, найдется точка $z \in \mathcal{M}$, такая, что $z \neq y$ и $z_\infty = y$. Тогда $z \in \mathcal{M}'$ и $\alpha_0(z) < \alpha_\infty(z) = \alpha'$ — противоречие. Следовательно, $\mathcal{M}$ связно.

Доказательство леммы 10. Пусть (E, θ) — представитель точки y ; можно предполагать, что это стабильное расслоение Хиггса. Согласно предложению 4, имеется разложение $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$, где F_i — подрасслоения в E , такие, что $\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}$. По предположению $y \notin \mathcal{N}$, так что $\theta \neq 0$; тогда $k \geq 2$. Так как (E, θ) стабильно, то $\deg(F_1) < 0$, $\deg(F_k) > 0$. Следовательно, расслоение $\text{Hom}(F_k, F_1)$ имеет степень < 0 , поэтому существует ненулевой элемент $\eta \in \text{Ext}^1(F_k, F_1)$. Рассмотрим расширение G_t , определяемое элементом $t^k \eta$; таким образом, имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow G_t \rightarrow F_k \rightarrow 0.$$

Расслоение $E_t = G_t \oplus (\bigoplus_{1 < i < k} F_i)$ снабжается структурой Хиггса $\theta_t: E_t \rightarrow \Omega^1 \otimes E_t$, определяемой следующими условиями: $\theta_t|_{G_t}$ есть композиция $G_t \rightarrow F_k \rightarrow \Omega^1 \otimes F_{k-1} \hookrightarrow \Omega^1 \otimes E_t$ и $\theta_t|_{F_i} = \theta|_{F_i}$ для $1 < i < k$.

Заметим, что для $t = 0$ получается исходное расслоение Хиггса (E, θ) . Так как свойство стабильности — открытое свойство, то расслоение Хиггса (E_t, θ_t) стабильно. С другой стороны, если $t \neq 0$, то имеется изоморфизм $\varphi_t: (E_t, \theta_t) \rightarrow (E_1, \frac{1}{t} \theta_1)$, определенный условием $\varphi_t|_{F_i} = t^i \text{id}_{F_i}$ для $1 < i < k$ и коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & G_t & \longrightarrow & F_k \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & \downarrow \varphi_t & & \downarrow t^k \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & F_k \longrightarrow 0 \end{array}$$

Следовательно, $\lim_{t \rightarrow 0} (E_1, \frac{1}{t} \theta_1) = (E, \theta)$. Остается проверить, что (E, θ) и (E_1, θ_1) не являются S -эквивалентными. Так как оба расслоения Хиггса стабильны, достаточно проверить, что они не изоморфны. Последнее следует из того факта, что в силу стабильности расслоения (E, θ) у него нет автоморфизмов, отличных от гомотетий; поэтому подрасслоения F_i , построенные в предложении 4, однозначно определяются по (E, θ) . Если бы существовал изоморфизм $(E, \theta) \simeq (E_1, \theta_1)$, то E_1 содержало бы подрасслоение F'_k , играющее ту же роль, что и F_k . Тогда по определению θ_1 это подрасслоение, имеющее тот же ранг, что и F_k , содержалось бы в G_1 и $F_1 \cap F'_k = 0$, так что оно определяло бы расщепление точной последовательности, определяющей G_1 — противоречие.

Одна из задач теории Симпсона — вычислить числа Бетти многообразия $M_{\text{Higgs}}(P)$ аналогично тому, как это было сделано Хитчином для расслоений ранга 2 и степени 1 на кривых, по крайней мере в случае, когда $M_{\text{Higgs}}(P)$ гладко: как и для многообразия Нарасимхана-Сешадри на кривой [1], можно надеяться на получение рекуррентных формул, теоретически позволяющих вычислить числа Бетти. Такая попытка была сделана в [33], однако для применения этого метода необходимо лучше понимать структуру многообразия неподвижных точек и действия C^* вблизи него.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Atiyah M. F., Bott R., The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Phil. Trans. R. Soc. London A308 (1982), 523–615.
- [2] Богомолов Ф. А. Голоморфные тензоры и векторные расслоения на проактивных многообразиях. — Изв. АН СССР, 1978, т. 42, №6, с. 1227–1287.
- [3] Bott R., Chern S. S., Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic cross-sections, Acta Mathematica 114 (1968), 71–112.
- [4] Corlette K., Flat G -bundles with canonical metrics, J. Differential Geom. 28 (1988), 361–382.
- [5] Deligne P., Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lect. Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970.
- [6] Donaldson S. K., Infinite determinants, stable bundles and curvature, Duke Math. J. 54.1 (1987), 231–247.
- [7] Donaldson S. K., Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, Proc. London Math. Soc. (3) 50 (1985), 1–26.
- [8] Donaldson S. K., Twisted harmonic maps and self-duality equations, Proc. London Math. Soc. 55 (1987), 127–131.

- [9] Donaldson S. K., A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 269–277.
- [10] Eells J., Sampson J. H., Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 109–160.
- [11] Flenner H., Restrictions of semistable bundles on projective varieties, *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), 635–650.
- [12] Gieseker D., On the moduli of vector bundles on an algebraic surface, *Ann. of Math.* **106** (1970), 45–60.
- [13] Goldman W., Millson J., The deformation theory of representation of fundamental groups of compact Kähler manifolds, Preprint, University of Maryland.
- [14] Griffiths P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds III, *Publ. Math. I.H.E.S.* **38** (1970), 125–180.
- [15] Grothendieck A., Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV: les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki*, Exposé **221**, 1960–61.
- [16] Hamilton R. S., Harmonic mappings of riemannian manifolds, *Lect. Notes in Math.*, vol. 471, Springer-Verlag, 1975.
- [17] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977. [Имеется перевод: Харпсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — М.: Мир, 1981.]
- [18] Hirschowitz A., Sur la restriction des faisceaux semi-stables, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **14** (1980), 199–207.
- [19] Hitchin N. J., The self-duality equations on a Riemann surface, *Proc. London Math. Soc.* (3) **55** (1987), 59–126.
- [20] Hitchin N. J., Stable bundles and integrable systems, *Duke Math. J.* **54** (1987), 91–114.
- [21] Lübke M., Chern classen von Hermite-Einstein-Vektorbündeln, *Math. Ann.* **260** (1982), 133–141.
- [22] Margerin C., Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein, d'après, S. K. Donaldson, K. K. Uhlenbeck et S. T. Yau, *Séminaire Bourbaki*, Exposé **683**, 1987.
- [23] Maruyama M., On boundedness of families of torsion free sheaves, *J. Math. Kyoto University* **21-4** (1981), 673–701.
- [24] Maruyama M., Moduli of stable sheaves. I, II, *J. Math. Kyoto University* **17-1** (1977), 91–126, **18-3** (1978), 557–614.
- [25] Mehta V. B., Ramanathan A., Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves, *Math. Ann.* **258** (1982), 213–224.
- [26] Mehta V. B., Ramanathan A., Restriction of stable sheaves and representation of the fundamental group, *Invent. Math.* **77** (1984), 163–172.
- [27] Mumford D., Fogarty J., *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1982.
- [28] Narasimhan M. S., Seshadri C. S., Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces, *Ann. of Math.* **82** (1965), 540–567.
- [29] Simpson C. T., Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 867–918.
- [30] Simpson C. T., Higgs bundles and local systems, Preprint, Princeton University.

- [31] Simpson C. T., Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety, Preprint, Princeton University.
- [32] Simpson C. T., Non abelian Hodge theory, Preprint, Princeton University.
- [33] Simpson C. T., The ubiquity of variations of Hodge structures, Preprint, Princeton University.
- [34] Simpson C. T., Harmonic bundles on non compact curves, Preprint, Princeton University.
- [35] Simpson C. T., Report on twistor space and the mixed Hodge structure on the fundamental group, Preprint, Princeton University.
- [36] Uhlenbeck K. K., Yau S. T., On the existence of hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm. Pure Appl. Math. **39-S** (1986), 257-293.
- [37] Weil A., Variétés kählériennes, Paris, Hermann, 1958. [Имеется перевод: Вейль А. Введение в теорию кэлеровых многообразий. — М.: ИЛ, 1961.]

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ¹⁾

Пьер Пансю

1. ВВЕДЕНИЕ

На римановом многообразии V расстоянием между двумя точками по определению является нижняя грань длин кривых, которые их соединяют. *Геодезической* называется параметризованная кривая, которая реализует этот минимум между любыми двумя своими (достаточно близкими) точками и проходится с постоянной скоростью. Геодезические являются решениями дифференциального уравнения второго порядка. Иначе говоря, это проекции орбит векторного поля X , определенного на касательном расслоении TV . Говорят, что V *полно*, если полно это векторное поле, т.е. если оно интегрируется до однопараметрической группы (ϕ_t) диффеоморфизмов расслоения TV , определенных при всех t .

Геодезические также можно рассматривать с двух точек зрения. Вариационная точка зрения — геодезическая есть решение задачи Дирихле — сыграла существенную роль во внутреннем развитии римановой геометрии. Динамическая точка зрения — геодезическая есть решение задачи Коши — дала начало направлению, особенно богатому связями с соседними дисциплинами.

В этой статье мы напомним некоторые глобальные свойства потока в случае отрицательной кривизны. Решающим здесь является тот факт, что геодезические, ведя себя на первый взгляд нерегулярно, вместе подчиняются закону, закодированному в фундаментальной группе (структурная устойчивость). Эргодическая теория, особенно понятие энтропии, способствовала возникновению многочисленных задач жесткости типа: такое-то свойство является характеристическим для такого-то примера. Представляются замечательными три недавних результата в этом направлении:

- характеристика геодезического потока на локально симметрических пространствах дифференцируемостью устойчивых слоений;

¹⁾Pansu Pierre. Le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 738, Astérisque 201-202-203, 1991, p. 269–298.

- характеристика локально симметрических пространств как минимумов энтропии, отнесенной к кривизне;
- задание поверхности ее отмеченным спектром длин.

Я хочу поблагодарить Патрика Фулона и участников семинара «Эргодическая геометрия» Политехнической школы, которые приобщили меня к тайнам геодезического потока.

2. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

2.1. Гамильтонов поток. Пробегая с постоянной скоростью геодезическая является критической точкой энергии

$$\frac{1}{2} \int \|\dot{c}(t)\|^2 dt.$$

Со времен Гамильтона известно, что векторное поле X , орбиты которого проектируются в геодезические, естественней рассматривать на кокасательном расслоении, чем на касательном.

Метрика определяет функцию H — половину квадрата нормы ковекторов — на кокасательном расслоении. Оно несет каноническую 1-форму α , внешний дифференциал $d\alpha$ которой является симплектической формой. Соотношение

$$dH = -i_Y d\alpha$$

определяет гамильтоново векторное поле Y , поток которого сохраняет α .

Метрика также определяет (послойно линейный) диффеоморфизм расслоения TV на T^*V . Этот диффеоморфизм переводит гамильтоново векторное поле Y в геодезический поток X , форму α в некоторую 1-форму A и функцию H некоторую в функцию — норму векторов, — инвариантную относительно X . Геодезический поток касателен к поверхностям уровня — сферическим расслоениям, — и далее будет рассматриваться его сужение на T_1V — расслоение единичных векторов. Сужение формы A на это расслоение является контактной формой, которая полностью определяет поле X с помощью соотношений

$$A(X) = 1, \quad i_X dA = 0.$$

Говорят, что X — поле Руба контактной формы A . Очевидно, что X сохраняет элемент объема

$$A \wedge (dA)^{n-1}$$

(где n — размерность многообразия V), который называется *мерой Лиувилля*.

2.2. Роль кривизны. Для того чтобы получить дифференциал диффеоморфизма ϕ_t , нужно разрешить уравнение в вариациях для геодезических. Это — уравнение Якоби. Оно определено на касательных векторных полях J вдоль геодезической $c(t)$ и записывается при помощи ковариантной производной D римановой метрики

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0,$$

где R — тензор римановой кривизны. Кривизна, таким образом, проявляется как симметрический эндоморфизм

$$u \mapsto R(\dot{c}, u)\dot{c},$$

нулевой на $\dot{c}$, другие собственные значения которого являются секционными кривизнами.

Из этого векторного уравнения выведем уравнение для модуля векторного поля J :

$$\frac{d^2}{dt^2} |J| = - \left\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, \frac{J}{|J|} \right\rangle + \left| \frac{DJ}{dt} \right|^2 - \left\langle \frac{J}{|J|}, \frac{DJ}{dt} \right\rangle^2 \geq - \left\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, \frac{J}{|J|} \right\rangle.$$

Понятно, что с уравнением Якоби работать легче, когда задана верхняя граница секционных кривизн, которая здесь важнее нижней. В дальнейшем мы будем предполагать, что J ортогонально вектору скорости $\dot{c}$.

Если секционная кривизна отрицательная или нулевая, то функция $t \rightarrow |J(t)|$ выпукла. Это выражает тот факт, что локально функция расстояния между двумя геодезическими является выпуклой.

Если, кроме того, секционная кривизна K мажорируется отрицательной константой, например, $K \leq -1$, то, вообще говоря, функция $|J(t)|$ стремится к бесконечности по меньшей мере как e^t , когда t стремится к $+\infty$ или к $-\infty$. Это показывает, что в общем случае две бесконечно близкие геодезические расходятся экспоненциально.

Всегда есть исключения: некоторые решения стремятся к 0 и на $+\infty$, и на $-\infty$. Пространство E полей Якоби вдоль c , ортогональных $\dot{c}$, имеет размерность $2n-2$. Решения, которые стремятся к 0 на $+\infty$ (соотв. на $-\infty$), образуют векторное подпространство E^s (соотв. E^u) половинной размерности $n-1$. Действительно, для каждого t условие $J(t) = 0$ определяет подпространство $E(t)$ размерности $n-1$ в E и E^s является пределом пространств $E(t)$ при t , стремящемся к $+\infty$. Ясно, что $E^s \cap E^u = 0$. Рассматривая поднятие в расслоение единичных касательных векторов в каждой точке $p \in T_1 V$, получаем

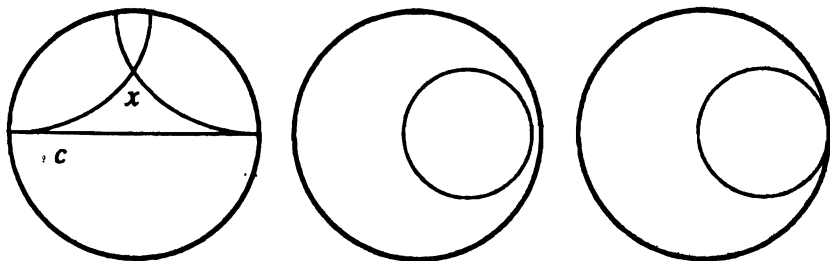
пространства E_p^s и E_p^u как подпространства в $T_p T_1 V$. С динамической точки зрения E_p^s — кандидат на роль касательного пространства в точке p к устойчивому многообразию точки p .

Заключение. Отрицательная кривизна проявляет себя тремя различными способами:

- (1) выпуклостью функции расстояния;
- (2) неустойчивостью геодезических;
- (3) существованием трансверсальных устойчивых и неустойчивых многообразий размерности $n - 1$.

3. ПРОСТРАНСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

3.1. Гиперболическая плоскость. Гиперболическая плоскость, обозначаемая через H^2 , открытая Лобачевским и Бойли в 1828 г. — это геометрия, в которой аксиома параллельных неверна. Обычно ее представляют как внутренность круга на плоскости. Геодезические являются дугами окружностей, перпендикулярных к границе (называемой бесконечно удаленной окружностью¹⁾, поскольку она находится на бесконечном расстоянии, и обозначаемой через $H^2(\infty)$). Очевидно, что для данной геодезической c и точки x существует бесконечно много геодезических, проходящих через точку x и не пересекающих c (см. рисунок)



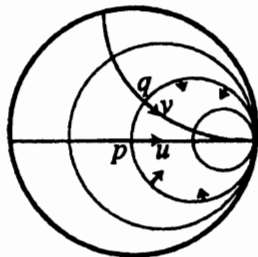
Гиперболическая плоскость

В любом случае через две различные точки бесконечно удаленной окружности проходит ровно одна геодезическая. Пространство геодезических $G(H^2)$ гиперболической плоскости, следовательно, имеет вид

$$G(H^2) = H^2(\infty) \times H^2(\infty) - \text{Diag}.$$

¹⁾ В литературе на русском языке часто встречается термин «абсолют». — Прим. перев.

Устойчивые многообразия геодезического потока тоже легко описываются. Геодезические окружности (геометрические места точек, равноудаленных от данной) представлены евклидовыми окружностями, но без общего центра (гиперболический центр ближе к границе, чем евклидов). Предельные евклидовы окружности, касательные к границе, называются *орициклами*. Ортогональными к ним траекториями будут экспоненциально сходящиеся к одному направлению геодезические. Значит, для каждой точки $p = (x, u)$ в единичном расщеплении имеется устойчивое многообразие. Их получают так. Орбита точки p — это ориентированная геодезическая с концом в точке ξ на бесконечно удаленной окружности. У точки $q = (y, v)$ устойчивого многообразия точки p имеется проекция y на орицикл, проходящий через x и y , а вектор v — нормаль к орициклу (см. рисунок).



Устойчивые многообразия отождествляются с орициклами

3.2. Факторпространства гиперболической плоскости. В 20-х годах Э. Артин, Г. Д. Биркгоф и П. Кёбе интересовались динамикой геодезического потока на факторах гиперболической плоскости. Причина, по которой нужно исследовать эти многообразия, кроется в теореме униформизации Римана–Пуанкаре–Кёбе: каждая риманова поверхность, т. е. одномерное комплексное многообразие, с отрицательной эйлеровой характеристикой однозначно записывается как фактор гиперболической плоскости по действию дискретной группы сохраняющих ориентацию изометрий, не имеющих неподвижных точек.

С другой стороны, сложность этой динамики была продемонстрирована Ж. Адамаром в 1898 г. Вслед за А. Пуанкаре изучались замкнутые траектории. Далее, под влиянием Г. Д. Биркгофа, исследовались вопросы транзитивности. Постепенно эти результаты переносились на случаи переменной кривизны и в старшие размерности. См. об этом обзорную статью Хедлунда [He2].

Если V — фактор пространства H^2 по дискретной группе Γ изометрий этого пространства, не имеющих неподвижных точек, то пространство геодезических на V является фактором пространства геодезических универсальной накрывающей $\tilde{V} = H^2$ по действию группы Γ . Так как это действие продолжается на границу, то

$$G(V) = \Gamma \backslash (H^2(\infty) \times H^2(\infty) - \text{Diag}).$$

Свойства геодезического потока на V соответствуют свойствам действия группы Γ на H^2 и на $G(H^2)$.

Замкнутая геодезическая в V соответствует *оси* группы Γ , т.е. паре точек в $\tilde{V}(\infty)$, которые являются неподвижными точками (источником и стоком) некоторого элемента из Γ .

Мы имеем соответствие:

плотность замкнутых геодезических в T_1V	$\iff$	плотность множества осей в $G(H^2)$,
большинство геодезических плотны в T_1V	$\iff$	большинство орбит группы Γ плотны в $G(H^2)$,
эргодичность геодезического потока в T_1V относительно меры Лиувилля	$\iff$	эргодичность действия группы Γ в $G(H^2)$ относительно симплектической меры.

3.3. Обобщение. Предыдущее обсуждение распространяется на односвязные многообразия отрицательной кривизны (и даже, в некоторых аспектах, неположительной кривизны). Выпуклость расстояния между геодезическими играет большую роль: она гарантирует единственность геодезической, соединяющей две точки, и выпуклость шаров. Для данной геодезической s семейство шаров, проходящих через x , с центрами в $c(t)$ является расширяющимся¹⁾; его объединение определяет *орисфар*, граница которого есть *орисфера*. Две геодезические s и s' определяют одно и то же семейство орисфер тогда и только тогда, когда расстояние $d(c(t), c'(t))$ остается ограниченным при t , стремящемся к ∞ . Две такие геодезические называются *асимптотичными друг другу*, и классы эквивалентности асимптотичных геодезических образуют бесконечно удаленную сферу пространства V , обозначаемую $V(\infty)$ (если идея этого отношения эквивалентности восходит к М. Морсу [M2], то Ж. Адамар [H1] уже показал инвариантность «циклического порядка» геодезических).

Когда кривизна строго отрицательна, две асимптотичные геодезические экспоненциально приближаются одна к другой, и орисферы, поднятые в единичное расслоение при помощи их внешних

¹⁾То есть предыдущий шар вложен в последующий. — Прим. перев.

нормальных векторов, являются устойчивыми многообразиями. Более того, каждая орисфера является вложенным подмногообразием той же гладкости, что и данная метрика. Наконец, через две точки на бесконечно удаленной сфере проходит единственная геодезическая. Следовательно, когда V — односвязное многообразие отрицательной кривизны, пространство геодезических $G(V)$ отождествляется с парами различных точек бесконечно удаленной сферы.

В общем случае для неодносвязного многообразия V отрицательной кривизны с универсальной накрывающей $\tilde{V}$ пространство геодезических $G(V)$ является фактором по действию фундаментальной группы $\pi_1(V)$ множества пар различных точек в $\tilde{V}(\infty)$, и наш список соответствий тем самым еще расширился (см. [ЕО, Е]).

4. ЗАМКНУТЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

В этом разделе мы объясним, почему при отрицательной кривизне имеется столько замкнутых геодезических. Основная идея, проясненная к 1924 г. Э. Артином, Я. Нильсеном и М. Морсом (см. [He2]), состоит в том, что рядом с каждой почти замкнутой геодезической есть замкнутая геодезическая. Это следует из такого факта: если перемещаться в евклидовом пространстве, глядя вверх, то вид звездного неба не изменяется (углы между звездами не меняются). На гиперболической плоскости, наоборот, когда мы перемещаемся, то видим, как звезды смещаются одна относительно другой. Более точное утверждение:

Лемма. Пусть $\tilde{V}$ — односвязное многообразие, кривизна которого ограничена сверху отрицательной константой $-\kappa$. Пусть S — сектор с вершиной x и углом раствора α , определяющий открытое множество O на бесконечно удаленной сфере. Если $y \in S$ и $d(x, y) > 1$, то O видно из y под углом, самое малое, $\alpha'(\kappa, \alpha) > \alpha$.

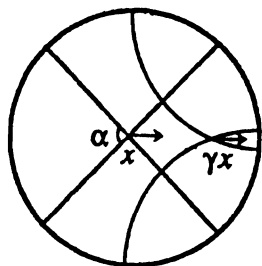
Теорема (лемма о замыкании). Пусть V — многообразие отрицательной кривизны. Для любого достаточно малого ε и большого T существует $\eta(\varepsilon, T)$ со следующим свойством: для всякого $p \in T_1V$, такого, что $d(p, \phi_t(p)) < \eta$, существуют $q \in T_1V$ и $T' \in [T - \varepsilon, T + \varepsilon]$, такие, что $\phi_{T'}(q) = q$ и $d(\phi_t p, \psi_t q) < \varepsilon$ для всех $t \in [0, T]$.

Действительно, перейдем к универсальной накрывающей. Существует изометрия $\gamma \in \pi_1(M)$, такая, что

$$d(\gamma(p), \phi_T(p)) < \varepsilon.$$

Нужно показать, что γ оставляет инвариантной близкую к p геодезическую.

Для малого ε и большого T точка $\gamma(p)$ содержится в секторе $S(p, \alpha)$ с малым углом. По лемме γ переводит этот сектор в себя. По симметрии противоположный сектор $S(\phi_{-T}(p), \alpha)$ переводится в себя отображением γ^{-1} .



Убывающее семейство выпуклых множеств

$$\gamma^n(S(p, \alpha))$$

имеет пустое пересечение; следовательно, их замыкания в $V \cup V(\infty)$ имеют единственную общую точку, неподвижную относительно γ . Аналогично находим неподвижную точку отображения γ^{-1} . Геодезическая, которая их соединяет, инвариантна относительно γ и близка к p .

Следствие. Пусть V — односвязное многообразие отрицательной кривизны, ограниченной сверху отрицательной константой. Каждая возвращающаяся геодезическая (т. е. та, которая имеет точки накопления на ней самой в T_1V) является пределом замкнутых геодезических. В частности, если объем многообразия V конечен, то периодические точки геодезического потока плотны в T_1V .

Есть и другие способы измерить, насколько поток богат замкнутыми геодезическими: считать количество замкнутых геодезических длины, меньшей заданного T , изучать их распределение «по мере» (см. разд. 11) и, наконец, распределение длин при помощи дзета-функции (см. [PP]). Метод состоит в установлении соответствия между потоком и *символическим потоком*, описываемым в конечных терминах. Отправная идея — кодировать каждую траекторию бесконечной последовательностью символов, — имевшаяся в зачатке в [H1], развилась теперь в богатую теорию, окрещенную М. Морсом в [M1] *символической динамикой*.

5. ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Неустойчивость геодезических, обнаруженная в п. 2.2, заставляет думать, что на компактном многообразии типичная геодезическая обойдет все многообразие. Это то, что подразумевают под транзитивностью. Например, Ж. Адамар [Н1] показал, что на данной вложенной в евклидово пространство поверхности отрицательной кривизны, имеющей, следовательно, бесконечные ветви, после небольшого шевеления можно заставить любую геодезическую уходить в любую из бесконечных ветвей.

Топологическая транзитивность означает существование всюду плотных геодезических. Это довольно прямое следствие плотности периодических орбит [He2].

В метрических терминах транзитивность называется *эргодичностью*. Она означает, что *единственные инвариантные измеримые функции — это функции, которые почти всюду являются константами*. Активно исследуемая — ее история восходит к Максвеллу и Больцману, но до начала 30-х годов существовало мало примеров эргодических динамических систем, — эргодичность доказана Хедлундом в 1934 [He2] для поверхностей постоянной кривизны, имеющих конечную площадь.

В 1938 году Э. Хопф предложил следующие аргументы, которые обобщаются на случай переменной кривизны [Hop]. Они относятся к доказательству эргодичности действия группы $\pi_1(V)$ на парах точек бесконечно удаленной окружности. Лемма Г. Биркгофа позволяет свести доказательство к изучению функций, полученных как временные пределы непрерывных функций с компактным носителем в V (временные пределы

$$f_{\pm}(x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f \circ \phi_s(x) ds$$

существуют для почти всех x и почти всюду равны). Ясно, что предел f_+ постоянен на устойчивых многообразиях, т. е. на срезях $\xi \times \tilde{V}(\infty)$, а f_- постоянен на неустойчивых многообразиях.

В это доказательство входит одна техническая деталь: нужно показать, что естественная мера на $G(\tilde{V})$ является абсолютно непрерывной по отношению к мере-произведению. Это вытекает из дифференцируемости гомеоморфизма между пространством геодезических $G(V)$ и $\tilde{V}(\infty) \times \tilde{V}(\infty) - \text{Diag}$, связанной с регулярностью устойчивого слоя W^s . Хопф умел доказывать, что устойчивое слое принадлежит классу C^1 , только в размерности 2. В старших размерностях

проблема эргодичности геодезического потока на многообразиях непостоянной отрицательной кривизны оставалась открытой вплоть до 1962 г., когда Д. В. Аносов решил ее, показав, что устойчивое слоение абсолютно непрерывно [A1]. Мы вернемся к вопросу регулярности в разд. 8.

6. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

На компактном многообразии отрицательной кривизны каждый класс эквивалентности замкнутых кривых относительно свободных гомотопий содержит единственную геодезическую (с точностью до сдвига параметра). Это следует из вариационного принципа (существование) и выпуклости (единственность). Следовательно, если возмущать метрику, то можно следовать за каждой замкнутой геодезической. Верно ли то же самое для незамкнутой геодезической? Ответ восходит к М. Морсу [M1]: пространство геодезических по существу не зависит от конкретной метрики отрицательной кривизны. Это следует из принадлежащей Г. А. Маргулису характеристики бесконечно удаленной сферы универсальной накрывающей посредством *квазигеодезических*.

6.1. Инвариантность пространства геодезических. Кривая σ в $\tilde{V}$ является *квазигеодезической*, если

- (1) ее скорость ограничена;
- (2) отношение $\|t - s\|/d(\sigma(t), \sigma(s))$ ограничено.

Можно показать, что в односвязном многообразии, кривизна которого ограничена сверху отрицательной константой, каждая квазигеодезическая содержится в трубчатой окрестности ограниченного размера единственной геодезической. Следовательно, бесконечно удаленная сфера отождествляется с классами эквивалентности асимптотичных квазигеодезических.

На самом деле понятие квазигеодезической сохраняет смысл для дискретной группы конечного типа. Если V компактно, то $\tilde{V}(\infty)$ связано внутренним образом с дискретной группой $\Gamma = \pi_1(V)$ и

$$G(V) = \Gamma \setminus (\Gamma(\infty) \times \Gamma(\infty) - \text{Diag}).$$

Бесконечно удаленная сфера становится средством для изучения группы Γ : из свойств действия группы Γ на $\Gamma(\infty)$ получаем структуру абелевых подгрупп, существование свободных нормальных подгрупп, конечность числа подгрупп, изоморфных данной группе, конечность $\text{Out}(\Gamma)$ и т. д.

Эта точка зрения, начало которой положил А. Прейсман [Р], была развита М. Громовым в [Gr2]. Она обобщает свойства фундаментальных групп, связанные с отрицательной кривизной, на класс *гиперболических групп*, который содержит «большую часть» дискретных групп конечного типа, см. [Gh3].

6.2. Структурная устойчивость потоков Аносова. Пусть V — компактное многообразие, а X — геодезический поток римановой метрики отрицательной кривизны, рассматриваемый как векторное поле на T_1V . Мы вскоре увидим, что если возмутить X в классе геодезических векторных полей, связанных с римановыми метриками, пространство траекторий останется неизменным. Что будет при более общих возмущениях? Это и есть проблема структурной устойчивости. Д. В. Аносов [A2] сформулировал свои результаты при следующем предположении относительно дифференцируемого векторного поля X , определяющего поток ϕ_t на многообразии M :

существует разложение

$$TM = E^s \oplus E^u \oplus E^0, \quad (Y)$$

где $E^0 = \mathbb{R}X$, и на E^s (соотв. на E^u) дифференциал $d\phi_t$ (соотв. $d\phi_{-t}$) — равномерно сжимающее отображение.

С тех пор векторное поле, удовлетворяющее этому условию, называется *поток Аносова*.¹⁾ Аналогичное определение для диффеоморфизмов очевидно (удалите слагаемое E^0).

Теорема (Аносов [A2]). *На компактном многообразии аносовское векторное поле X C^1 -структурно устойчиво, т. е. если векторное поле X' достаточно C^1 -близко к X , то существует гомеоморфизм (дифференцируемо зависящий от возмущения), переводящий траектории потока X в траектории потока X' .*

Для доказательства этого результата Аносов приспособил метод, уже употреблявшийся Ж. Адамаром [H2].

Можно ли достичь большего? Определенно, невозможно заменить эту орбитальную эквивалентность на сопряжение (даже измеримое), поскольку тогда, например, длины замкнутых траекторий должны были бы сохраняться. Что касается регулярности, можно утверждать, что в общем случае орбитальная эквивалентность не может быть сделана абсолютно непрерывной. Действительно, из доказательства теоремы жесткости Г. Д. Мостова [Mos] следует, что для гомеоморфных, но не изометричных поверхностей кривизны -1 соответствие между

¹⁾В литературе на русском языке также используется термин «У-поток».

бесконечно удаленными окружностями не будет абсолютно непрерывным.

Наконец, можно задаться вопросом, верно ли, что для двух многообразий отрицательной кривизны, имеющих один и тот же гомотопический тип, гомеоморфизм между единичными касательными расслоениями влечет за собой гомеоморфизм между многообразиями. Это верно в больших размерностях, но достичь диффеоморфизма не удастся [FJ].

6.3. Универсальность гиперболичности. *Неустойчивость индивидуального поведения траекторий влечет за собой устойчивость их коллективного поведения.* Этот парадоксальный принцип, установленный Д. В. Аносовым в контексте геодезических потоков, был одновременно замечен С. Смейлом на его знаменитой «подкове». Смейл [S] установил, что гипотезы (У) Аносова, выполненной только вдоль инвариантного компактного множества Λ , достаточно для устойчивости этого множества и его символического описания. Такой инвариантный компакт называется *гиперболическим*.

Из этих работ можно извлечь метод исследования динамических систем: считая установленным, что инвариантные гиперболические множества достаточно исследованы, нужно описать, насколько поведение системы близко к гиперболическому или отличается от него. Эта точка зрения все еще актуальна, см. например, [Y].

7. ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ИЛИ НУЛЕВАЯ КРИВИЗНА И ЭРГОДИЧНОСТЬ

Некоторые аспекты отрицательной кривизны обобщаются на случай, когда кривизне разрешается обращаться в нуль, оставаясь неположительной. В некотором смысле достаточно, чтобы геодезическая «встречала» немного отрицательной кривизны для того, чтобы ее поведение было совместимо с гиперболической моделью. Это обобщение составляет предмет обзорной работы Я. Б. Песина [Pes].

Вопрос эргодичности геодезического потока привел В. Балмана к следующему предположению.

Определение. Пусть V — многообразие неположительной кривизны. *Рангом геодезической* s называется размерность векторного пространства полей Якоби, параллельных вдоль s . *Ранг многообразия* V — это верхняя грань рангов геодезических на V .

Предположение о том, что ранг многообразия равен 1, влечет за собой, вероятно, эргодичность геодезического потока. К сожалению,

этот момент еще до конца не прояснен. Тем не менее мы имеем такой результат:

Теорема (Баллман, Брин [BB]). Пусть V — многообразие неположительной кривизны ранга один. Если объем многообразия V конечен, то в T_1V есть открытое инвариантное множество, на котором поток эргодичен.

Вот два класса многообразий ранга, большего или равного 2:

- римановы произведения: ранг произведения равен сумме рангов сомножителей;
- симметрические пространства ранга, большего или равного 2; симметрическое пространство — это фактор полупростой группы Ли по наибольшей компактной подгруппе; ранг есть размерность максимальных плоских вполне геодезических подпространств и не равен единице только для короткого списка примеров, описанных в следующем разделе.

Геодезический поток на произведении (соотв. на локально симметрическом пространстве ранга более 2) имеет первые интегралы, инвариантные относительно изометрий. А именно, это — углы, которые касательный вектор составляет с сомножителями (соотв. со стенками камеры Вейля).

Благодаря совместным усилиям В. Баллмана, М. Бриана, К. Бернса, П. Эберлейна и Р. Спатцера мы знаем теперь, что компактные многообразия неположительной кривизны, имеющие ранг, больший или равный двум, являются по существу локально симметрическими пространствами ранга, большего или равного двум.

Теорема [Bal, BBE, BBS, BS]. Пусть V — компактное многообразие отрицательной кривизны ранга, большего или равного 2. Тогда универсальная накрывающая многообразия V является либо произведением, либо симметрическим пространством ранга, большего или равного 2.

Доказательство состоит в построении одного за другим элементов геометрии симметрического пространства: максимальных плоских вполне геодезических подпространств, камер Вейля, первых интегралов. В. Баллман показал, что первые интегралы инвариантны относительно голономии, и с помощью знаменитой теоремы М. Берже закончил доказательство. К. Бернс и Р. Спатцер предпочли использовать жесткость сферических основ Титса.

Теорема сейчас доказана при следующем предположении: каждая точка в T_1V является возвращающейся [EH].

8. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА РАНГА 1

Это симметрические пространства, кривизна которых строго отрицательна. Такова гиперболическая плоскость, описанная в разд. 3, и некоторые ее обобщения. Существует пример, обозначаемый через KH^m , над каждым из полей $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ для каждой размерности m (для октав $\mathbb{O}$ только для $m = 2$). Например, гиперболическая плоскость — это случай $\mathbb{R}H^2$ и $\mathbb{C}H^1$.

В симметрическом пространстве тензор кривизны параллелен и уравнение Якоби имеет постоянные коэффициенты. В ранге один группа изометрий транзитивна на единичном расслоении и ненулевые собственные числа оператора

$$u \mapsto R(\dot{c}, u)\dot{c},$$

не зависят от $\dot{c}$. Они равняются -1 в действительном случае, -1 и -4 в остальных случаях с кратностями $(m-1)k$ и $k-1$ соответственно ($k = \dim K$). Вот почему это так: KH^m — это открытое подмножество проективного пространства KP^m . Каждая геодезическая содержится в единственной K -прямой, которая является вполне геодезической с кривизной -4 и отвечает за $k-1$ собственных значений -4 . Каждый собственный вектор, отвечающий собственному значению -1 , касателен к $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^m$, вполне геодезическому многообразию с кривизной -1 , которое содержит геодезическую.

Ясно, что в этих симметрических примерах устойчивые распределения E^s , которые определяются тензором кривизны, дифференцируемы.

Как мы видели в разд. 5, регулярность устойчивых слоений является деликатным вопросом. Д. В. Аносов показал, что в размерностях, больших трех, слоения не всегда принадлежат классу C^1 . Мы приходим к C^1 , только сделав дополнительное предположение о равномерной ограниченности показателя сжатия потока (М. Хирш и Ч. Пью [HP], Б. Хассельблат [Has]), соответствующее $\frac{1}{4}$ -ущемлению секционной кривизны.

В размерности 2 С. Хердер и А. Каток [HK] пошли дальше: они получили достаточно регулярности (производная в классе Зигмунда) для определения и вычисления инварианта Годбийона–Вея (что удачно, так как эти слоения являются основным примером, когда инвариант Годбийона–Вея нетривиален, см. [Gh2]). Фактически их результат распространяется на *контактные* потоки Аносова в размерности 3. Поток Аносова является контактным, если поле плоскостей $E^s \oplus E^u$ образует контактную структуру класса C^∞ ; это автоматически выполнено для геодезического потока.

Вполне вероятно, что устойчивые слоения будут принадлежать классу C^∞ только для локально симметрических пространств ранга 1. В этом направлении И. Бенуа, П. Фулон и Ф. Лабури получили следующий результат, представляющий другую сторону характеристики симметрических пространств ранга больше 1, упомянутых в предыдущем разделе.

Теорема (Бенуа, Фулон, Лабури [BFL]). *Всякий контактный поток Аносова на компактном многообразии, устойчивые и неустойчивые распределения которого принадлежат классу C^∞ , получается из геодезического потока на локально симметрическом пространстве ранга 1 следующими операциями: переход к конечному накрытию или к фактору, изменение параметра класса C^∞ .*

На самом деле единственные возможные изменения параметра имеют следующий вид: X заменяется на $X/(1 + \alpha(X))$, где α — замкнутая 1-форма, причем имеет значение только ее класс когомологий.

Замечания. Этот результат в размерности 3 принадлежит Гису [Gh1].

Вероятно, эта теорема остается в силе, если слоения предполагаются только принадлежащими классу C^2 . В размерности 3 это установлено С. Хердером и А. Катком [HK].

Доказательство. Первоначальная идея принадлежит М. Канаи [Kan]. Пусть A — контактная форма. На ядре A симплектическая форма dA и лагранжевы подпространства E^s и E^u определяют квадратичную форму сигнатуры нуль, инвариантную относительно потока. Следовательно, $q + A^2$ является псевдоримановой метрикой, инвариантной относительно потока. Это образует жесткую геометрическую структуру.

Бенуа, Фулон и Лабури использовали результат М. Громова [Gr3] о псевдогруппах локальных псевдоримановых изометрий: плотная орбита такой псевдогруппы автоматически будет открыта. Они получили алгебру Ли $\mathfrak{G}$ локальных изометрий. Условие Аносова влечет за собой полупростоту $\mathfrak{G}$; тогда открытая и плотная орбита несет на себе структуру, моделированную на однородном пространстве G/H . Динамические соображения показывают, что эта структура полна; следовательно, V является фактором, $V = \Gamma \backslash G/H$.

Осталось отобрать возможные пары G/H . Мы изучим «обобщенную бесконечно удаленную сферу» $(G/H)(\infty) = G/P$, где P — максимальная параболическая подгруппа. Условие Аносова утверждает, что хотя бы один элемент из Γ действует на G/P как при отрицательной кривизне, т. е. с одним источником и стоком.

Это приводит к следующему ограничению на группу Ли G : если P^- — противоположная к P параболическая подгруппа (относительно геодезического потока $X \in \mathfrak{G}$), то P^- имеет в точности две орбиты в G/P , из которых одна сводится к одной точке. Теория алгебраических групп показывает в этом случае, что G имеет ранг 1.

Замечания. Остается открытой более общая проблема, когда поток не предполагается контактным.

Исходя из геодезического потока на V , мы найдем диффеоморфизм T_1V на расслоение единичных векторов T_1V' некоторого локально симметрического пространства V' , который переставляет потоки (изменение параметра сейчас исключается). Задаёт ли этот диффеоморфизм изометрию V на V' ? Ответ положителен, когда $\dim V = 2$ [Kat] (см. также разд. 10), но вопрос остается открытым в старших размерностях.

9. ЭНТРОПИИ

Это числа, которые измеряют экспоненциальную неустойчивость траекторий преобразования. Они были введены А. Н. Колмогоровым [K].

9.1. Топологическая энтропия. По данному разрешению ε надо посчитать количество траекторий длины n , которые можно различить. Иначе говоря, пусть ϕ — преобразование компактного пространства M . Обозначим через $O_n \subset M^n$ множество орбит длины n , снабженное метрикой $\sup$. Наибольшее число попарно непересекающихся шаров радиуса $\varepsilon/2$ в метрическом пространстве O_n обозначим через $N(n, \varepsilon)$.

Топологическая энтропия $h(\phi)$ — это предел

$$h(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon).$$

Число $h(\phi)$ не зависит от выбора метрики на компактном пространстве M .

Энтропию потока (ϕ_t) определим как энтропию преобразования ϕ_1 .

Для геодезического потока топологическая энтропия связана с экспонентой роста объема шаров.

Теорема (Мэннинг [Man]). Пусть ϕ_t — геодезический поток на компактном многообразии V . Для $r > 0$ и точки $\tilde{x}$ универсальной накрывающей $\tilde{V}$ обозначим через $B(\tilde{x}, r)$ шар радиуса r с центром $\tilde{x}$

в $\tilde{V}$. Тогда при всех $\tilde{x}$

$$h(\phi_1) \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(\text{vol } B(\tilde{x}, r))$$

и равенство имеет место только при отрицательной кривизне.

В частности, энтропия геодезического потока на многообразии V зависит только от универсальной накрывающей $\tilde{V}$ этого многообразия, и можно говорить об энтропии $\tilde{V}$. Например, энтропия симметрического пространства KH^m будет равна $km + k - 2$.

Фактически при отрицательной кривизне имеется следующее асимптотическое разложение:

Теорема (Маргулис [Mar]). Если V — компактное многообразие отрицательной кривизны, то для любой точки $\tilde{x} \in \tilde{V}$

$$\text{vol } B(\tilde{x}, r) \sim c(\tilde{x})e^{hr}.$$

Можно думать об энтропии как о размерности Хаусдорфа бесконечно удаленной сферы. Следуя [Hal], определим расстояние d_∞ на каждом неустойчивом многообразии следующим образом. Пусть p и q — две точки на одном и том же неустойчивом многообразии. Положим

$$d_\infty(p, q) = e^{-t},$$

где t — действительное число, такое, что $d(\phi_t(p), \phi_t(q)) = \varepsilon$.

На универсальной накрывающей каждое неустойчивое многообразие (дополненное точкой) отождествляется с бесконечно удаленной сферой. Полученные выше расстояния на бесконечно удаленной сфере попарно локально эквивалентны.

Сравним расстояние на пространстве $\mathcal{O}_n$ траекторий длины n с d_∞ . Пространство $\mathcal{O}_n$ можно рассматривать как T_1V , снабженное метрикой d_n . Шар радиуса ε с центром в p для метрики d_n — это произведение шаров радиуса ε в направлениях потока и устойчивого слоя точки p на шар радиуса e^{-n} для d_∞ в направлении неустойчивого слоя. Как следствие *топологическая энтропия геодезического потока — это хаусдорфова размерность для d_∞* .

В случае симметрических пространств ранга 1 метрика d_∞ задается явно. Группа изометрий действует транзитивно на каждой сфере и, следовательно, на каждой орисфере. Орисфера может рассматриваться как орбита некоторой нильпотентной подгруппы Ли изометрий, т.е. $\mathbf{R}^{m-1}$ в действительном случае и группы Гейзенберга в комплексном случае. Расстояние d_∞ — это евклидово расстояние в первом случае. Во втором случае это инвариантная метрика

Карно, т. е. кривые конечной длины касаются неинтегрируемого поля плоскостей (этот случай соответствует пространству «чистой» кривизны -1).

9.2. Вероятностная энтропия. Можно ожидать, что h -мерная хаусдорфова мера для d_∞ будет играть важную роль. Это действительно так: эта мера была фактически придумана Г. А. Маргулисом, который охарактеризовал ее следующим образом.

Теорема (Маргулис [Mar]). *Существует единственная мера, которая локально разлагается в произведение*

$$dt d\mu^s dv^u,$$

где μ^s — семейство мер на устойчивых многообразиях и действие потока умножает их точно на e^{ht} . Семейство $dt d\mu^u$ — трансверсальная мера, инвариантная относительно неустойчивого слоения.

Эта мера была переоткрыта Р. Боуэном (у него она обозначена через μ_{BM}).

Теорема (Боуэн [B]). *Мера μ_{BM} — предел средних мер Дирака вдоль замкнутых геодезических длины, меньшей t , при t , стремящемся к бесконечности.*

Другими словами, замкнутые геодезические равномерно распределены в T_1V , но относительно меры, которая не совпадает, вообще говоря, с мерой Лиувилля.

Наконец, эта мера μ_{BM} появляется и как решение вариационной задачи. Если дано преобразование ϕ , то инвариантная мера μ позволяет по-другому учитывать различные орбиты, откуда появляется другое число, *вероятностная энтропия ϕ по отношению к мере μ , обозначаемая $h_\mu(\phi)$* .

Е. И. Динабург [D] показал, что в общем случае $h(\phi)$ — верхняя грань энтропий инвариантных мер. Он установил, что имеется аналогия с тем, как обстоит дело в термодинамике: если дано преобразование ϕ и мы воспринимаем инвариантную меру как описание термодинамического состояния системы, то равновесное состояние — это состояние, которому отвечает наибольшая энтропия. В случае геодезических потоков с отрицательной кривизной эта верхняя грань достигается для единственной инвариантной меры, которая называется *мерой максимальной энтропии* и является не чем иным, как μ_{BM} .

Сравнение энтропий геодезического потока между собой и с традиционными инвариантами римановой геометрии позволяет высказать целую серию гипотез, из которых мы представим три.

9.3. Случай равенства энтропий. В силу единственности меры максимальной энтропии из равенства $h = h_{\text{Liouville}}$ следует, что мера максимальной энтропии и мера Лиувилля совпадают и что условные меры вдоль устойчивых слоений абсолютно непрерывны друг относительно друга. Это целый пучок соотношений. Могут ли они быть выполнены для несимметричной¹⁾ метрики?

Ответ известен только в размерности два, где он принадлежит А. Катку. В этом случае каждая метрика g конформно эквивалентна метрике g_0 постоянной кривизны, $g = f^2 g_0$, с той же самой площадью поверхности. Можно измерять расстояние между g и g_0 числом

$$\rho = \int f \leq 1.$$

Теорема (Каток [Kat]). *Имеют место следующие неравенства:*

$$h_{\text{Liouville}}(g) \leq \rho h(g_0) \leq \rho^{-1} h(g_0) \leq h(g).$$

См. также [CF].

9.4. Энтропия и объем. М. Громов [Gr1] предложил следующую проблему: пусть V_0 — компактный фактор действительного гиперболического пространства. Верно ли, что метрика постоянной кривизны с данным объемом минимизирует топологическую энтропию?

Ответ положителен в размерности два. Это следует из приведенной выше теоремы А. Катка.

В размерности, большей трех, имеется следующий частичный результат.

Теорема (Громов [Gr1]). *Пусть V_0 — компактное многообразие кривизны -1 с энтропией $h_0 = n-1$. Если V — риманово многообразие, гомеоморфное V_0 , с тем же объемом, то энтропия многообразия V удовлетворяет неравенству $h \geq c(n) h_0$, где $c(n)$ — константа, зависящая только от размерности n .*

Доказательство основано на понятии симплициального объема, топологическом инварианте многообразий, который при постоянной кривизне -1 пропорционален объему. Множитель $c(n)$ в неравенстве связан с соотношением между объемом шара и объемом симплекса.

Недавно Г. Бессон, Ж. Куртуа и С. Галло [BCG] попытались освободиться от этого множителя, введя свой вариант симплициального объема. Это число само ограничено энтропией, остается вычислить его для многообразий постоянной кривизны. Этот последний этап выполнен сейчас только в размерности два.

¹⁾Подразумевается метрика не на симметрическом пространстве. — Прим. перев.

Заметим, что благодаря формулам из [ККК] для первой и второй производных от энтропии вариационный подход к этой проблеме вполне возможен.

9.5. Энтропия и кривизна. Если принять интерпретацию энтропии как хаусдорфовой размерности бесконечно удаленной сферы для универсальной накрывающей и если вспомнить, что нормализационное условие $K \leq -1$ необходимо для того, чтобы расстояние U . Хамменштадт удовлетворяло неравенству треугольника, вопрос о том, какая метрика дает наименьшую хаусдорфову размерность, решается весьма естественно следующим образом.

Теорема (Хамменштадт [Ha2]). Пусть V_0 — локально симметрическое компактное пространство непостоянной кривизны, заключенной между -4 и -1 , имеющее энтропию h_0 . Пусть V — компактное риманово многообразие с секционной кривизной $K \leq -1$ и энтропией h , имеющее тот же гомотопический тип, что и V_0 . Тогда $h \geq h_0$, и если имеет место равенство, то всякая гомотопическая эквивалентность между V и V_0 гомотопна изометрии.

Замечание. Неравенство $h \geq h_0$ впервые появилось в [Pan].

Доказательство. Эта теорема обобщает теорему жесткости Г. Д. Мостова для случая ранга 1 [Mos], которая покрывает случай, когда уже известно, что V — симметрическое пространство, и доказательство на этом первом этапе идет по пути, проделанному Мостовым. Используется гомеоморфизм f между бесконечно удаленными сферами, уже появлявшийся в разд. 6. Равенство энтропий влечет за собой абсолютную непрерывность гомеоморфизма f на почти каждой кривой в $\tilde{V}(\infty)$. Предположение $K \leq -1$ обеспечивает, что d_∞ мажорирует риманово расстояние и, следовательно, d_∞ -спрямляемые кривые почти всюду имеют производную, которая порождает вдоль геодезических параллельное поле Якоби направлений, удовлетворяющее условию $J'' + J = 0$.

Мы теперь имеем условие, которое напоминает определение ранга в случае неположительной кривизны, и вторая часть доказательства состоит из реконструирования, шаг за шагом, симплектической геометрии для ранга один: метрики Карно, нильпотентных подгрупп изометрий.

10. ИЗСПЕКТРАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА

Зададимся следующим вопросом (ср. конец разд. 8): будут ли изометричны два римановых многообразия, которые имеют сопряженные геодезические потоки? В этой общности ответ отрицателен: су-

ществуют деформации сферы, все геодезические которых замкнуты и имеют длину 2π , см. [Bes], но вопрос остается открытым в размерностях более трех в контексте отрицательной кривизны.

Эта проблема связана с другой — излюбленной проблемой римановой геометрии — проблемой изоспектральных многообразий: изометричны ли два многообразия, имеющих один и тот же спектр лапласиана? Связь проходит через *спектр длин*, т. е. множество длин замкнутых геодезических. В случае отрицательной кривизны это множество определяется спектром лапласиана, см. об этом [Ber].

В противоположность спектру лапласиана спектр длин может быть обогащен дополнительной информацией: каждая геодезическая имеет свой гомотопический класс. Это будет *отмеченный спектр длин*, т. е. функция, которая классу свободной гомотопии ставит в соответствие наименьшую длину замкнутой геодезической в этом классе, который инвариантен относительно сопряжения.

Зная, что существуют неизометрические поверхности, имеющие один и тот же спектр лапласиана, мы хотели бы узнать, определяют ли более богатые данные отмеченного спектра метрику. Эта проблема решена в размерности два независимо Ч. Кроуком и Ж. П. Оталем (обобщение их результата можно найти в [CFF]).

Теорема (Кроук [C], Оталь [O]). Пусть V, V' — двумерные римановы многообразия отрицательной кривизны. Если гомотопическая эквивалентность многообразия V на V' сохраняет отмеченный спектр длин, то она гомотопна изометрии.

Доказательство очень элегантно. Гомотопическая эквивалентность задает соответствие между геодезическими¹⁾ (разд. 6). Нужно показать, что отношение пересечения²⁾ сохраняется. Если это не так, то отклонение измеряется угловым дефектом в треугольнике — всегда положительным числом по теореме Гаусса–Бонне, среднее которого дает два образа меры Лиувилля многообразий V и V' в $G(V) = G(V')$. Доказывается, что эти меры равны, для чего используется понятие *пересечения*, принадлежащее Ф. Бонаону [Bon]. Это спаривание мер на $G(V)$, обладающее следующими свойствами:

- на плотном подпространстве мер Дирака вдоль замкнутых геодезических оно совпадает с обычным пересечением замкнутых кривых;
- оно «невырожденно», т. е. положительная мера определяется своими пересечениями с замкнутыми геодезическими;

¹⁾Замкнутыми. — Прим. перев.

²⁾В оригинале “le concourance”. — Прим. перев.

• пересечение меры Лиувилля с замкнутой геодезической дает ее длину.

В высших размерностях имеется инфинитезимальный результат. Метод, предложенный В. Гийемином и Д. Кажданом в размерности два, был обобщен Мин О.

Теорема (Гийемин, Каждан [GK], Мин ОО [Min]). *Если V имеет отрицательный оператор кривизны, то все изоспектральные инфинитезимальные деформации тривиальны.*

Инфинитезимальная деформация — это квадратичная форма, т. е. функция h на T_1V , квадратичная на слоях. Условие изоспектральности означает, что интеграл от h по каждой периодической траектории потока X будет равен нулю. Согласно результату А. Н. Лившица [L], уравнение $h = L_X q$ имеет решение. Соображения, подсказанные гармоническим анализом на $SL(2, R)$, показывают, что q линейно на слоях, т. е. h является производной Ли метрики по векторному полю.

ЛИТЕРАТУРА

- [A1] Аносов Д. В. Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны. — ДАН СССР, 1962, т. 145, №4, с. 707–709.
- [A2] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. — Труды МИАН, 1967, т. 90.
- [Bal] Ballmann W., Non positively curved manifolds of higher rank, Ann. of Math. **112** (1985), 597–609.
- [BB] Ballmann W., Brin M., On the ergodicity of geodesic flows, Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (1982), 311–315.
- [BBE] Ballmann W., Brin M., Eberlein P., Structure of manifolds of non positive curvature, I, Ann. of Math. **112** (1985), 171–203.
- [BBS] Ballmann W., Brin M., Spatzier R., Structure of manifolds of non positive curvature, II, Ann. of Math. **112** (1985), 204–235.
- [BFL] Benoist Y., Foulon P., Labourie F., Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables, C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 351–354.
- [Ber] Berard P., Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques, Séminaire Bourbaki, mars 1989, exposé 705, Astérisque **177-178** (1989). [Имеется перевод: Берап П. Римановы изоспектральные неизометрические многообразия. — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1989 г. — М.: Мир, 1991, с. 129–156.]
- [Bes] Besse A. L., Manifolds all of whose geodesics are closed, Ergebnisse Band **98**, Springer-Verlag, Berlin, 1973. [Имеется перевод изд. 1978 г.: Besse A. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.]

- [BCG] Besson G., Courtois G., Gallot S., Volume minimal des espaces localement symétriques, *Invent. Math.* **103** (1991), 415–445.
- [Bon] Bonahon F., Bouts des variétés hyperboliques de dimension trois, *Ann. of Math.* **124** (1986), 71–158.
- [B] Bowen R., Periodic orbits for hyperbolic flows, *Amer. J. Math.* **94** (1972), 1–30.
- [BS] Burns K., Spatzier R., Manifolds of nonpositive curvature and their buildings, *Publ. Math. I.H.E.S.* **65** (1987), 35–59.
- [C] Croke C., Rigidity for surfaces of non-positive curvature, *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), 150–169.
- [CF] Croke C., Fathi A., An inequality between energy and intersection, *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 489–494.
- [CFF] Croke C., Fathi A., Feldman J., The marked length spectrum of a surface of nonpositive curvature, *Topology* **31** (1992), No. 4, 847–855.
- [D] Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем. — *Изв. АН СССР*, 1971, т. 35, №2, с. 324–366.
- [E] Eberlein P., Geodesic flows on negatively curved manifolds, I, *Ann. of Math.* **95** (1972), 492–510; II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **178** (1973), 57–82.
- [EH] Eberlein P., Heber J., A geometric characterization of symmetric spaces of higher rank, *Publ. Math. I.H.E.S.* **71** (1990), 33–44.
- [EO] Eberlein P., O'Neill G., Visibility manifolds, *Pacific. J. Math.* **46** (1973), 45–109.
- [FJ] Farrell F. T., Jones L. E., Negatively curved manifolds with exotic smooth structures, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 899–908.
- [GH1] Ghys E., Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **20** (1987), 251–270.
- [GH2] Ghys E., L'invariant de Godbillon-Vey, *Séminaire Bourbaki*, mars 1989, exposé 706, *Astérisque* **177–178** (1989). [Имеется перевод: Гиз Э. Инвариант Годбийона-Вей. — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1989 г. — М.: Мир, 1991, с. 157–185.]
- [GH3] Ghys E., Les groupes hyperboliques, *Séminaire Bourbaki*, mars 1990, exposé 722, *Astérisque* **189–190** (1990). [Имеется перевод: Гис Э. Гиперболические группы. — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1990 г. — М.: Мир, 1996, с. 151–170.]
- [Gr1] Gromov M., Volume and bounded cohomology, *Publ. Math. I.H.E.S.* **56** (1982), 5–100.
- [Gr2] Gromov M., Hyperbolic groups, in “Essays in group theory”, éd. S. M. Gersten, M.S.R.I. Publ. n°8, Springer-Verlag, 1987.
- [Gr3] Gromov M., Rigid transformation groups, in “Géométrie différentielle”, éd. D. Bernard et Y. Choquet-Bruhat, *Travaux en cours* vol. 33, Hermann, Paris, 1988, 65–130.
- [GK] Guillemin V., Kazhdan D., Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds, *Topology* **19** (1980), 301–312.
- [H1] Hadamard J., Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *J. Math. Pures Appl.* **4** (1898), 27–74.

- [H2] Hadamard J., Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles, *Bull. Soc. Math. France* **24** (1901), 224–228.
- [Ha1] Hamenstädt U., A new description of the Bowen–Margulis measure, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** (1989), 455–464.
- [Ha2] Hamenstädt U., Entropy rigidity of locally symmetric spaces of rank one, *Ann. of Math.* **131** (1990), 35–52.
- [Has] Hasselblatt B., Regularity of the Anosov splitting and of horospheric foliations, *Prépublication, I.H.E.S. Bures-sur-Yvette* (1991).
- [He1] Hedlund G. A., On the metrical transitivity of the geodesics on closed surfaces of constant negative curvature, *Ann. of Math.* **35** (1934), 787–808.
- [He2] Hedlund G. A., The dynamics of geodesic flows, *Bull. Amer. Math. Soc.* **45** (1939), 241–260.
- [HP] Hirsch M., Pugh C., Stable manifolds and hyperbolic sets, *Proc. Symp. Pure Math.* **14** (1970), 133–163.
- [Hop] Hopf E., Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus, II, *Math. Ann.* **117** (1940), 590–608.
- [HK] Hurder S., Katok A., Differentiability, rigidity and Godbillon–Vey classes, *Publ. Math. I.H.E.S.* **72** (1990), 5–61.
- [Kan] Kanai M., Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8** (1988), 215–240.
- [Kat] Katok A., Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8** (1988), 139–152.
- [KKK] Katok A., Knieper G., Pollicott M., Weiss H., Differentiability and entropy for Anosov flows and geodesic flows, *Bull. Amer. Math. Soc.* **22** (1990), 285–293.
- [K] Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега. — *ДАН СССР*, 1958, т. 119, №5, с. 861–864.
- [L] Лившиц А. Н. Когомологии динамических систем. — *Изв. АН СССР*, 1972, т. 36, №6, с. 1296–1301.
- [Man] Manning A., Topological entropy for geodesic flows, *Ann. of Math.* **110** (1979), 567–576.
- [Mar] Маргулис Г. А. О некоторых применениях эргодической теории к изучению многообразий отрицательной кривизны. — *Функц. анализ и его прил.*, 1969, т. 3, вып. 4, с. 89–90.
- [Min] Min OO, Spectral rigidity for manifolds with negative curvature operator, in “Nonlinear Problems in Geometry”, *Contemp. Math.* **51** (1986), 99–103.
- [M1] Morse M., A one-to-one representation of geodesics, *Amer. J. Math.* **43** (1921), 33–51.
- [M2] Morse M., Instability and transitivity, *J. Math. Pures Appl.* **14** (1935), 49–71.
- [Mos] Mostow G. D., Strong rigidity of locally symmetric spaces, *Ann. of Math. Studies*, Vol. 78, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
- [O] Otal J. P., Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative, *Ann. of Math.* **131** (1990), 151–162.

- [Pan] Pansu P., Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative, *Ann. Acad. Sci. Fennicae* **14** (1989), 177–212.
- [PP] Parry W., Pollicott M., Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics, *Astérisque* **187–188** (1990).
- [Pes] Песин Я. Б. Геодезические потоки с гиперболическим поведением траекторий и связанные с ними объекты. — УМН, 1981, т. 36, вып. 4, с. 3–51.
- [P] Preissmann A., Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, *Comment. Math. Helv.* **15** (1943), 175–216.
- [S] Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747–817. [Имеется перевод: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. — УМН, 1970, т. 25, вып. 1, с. 113–185.]
- [Y] Yoccoz J. C., Polynômes quadratiques et attracteur de Hénon, *Séminaire Bourbaki*, exposé 734, *Astérisque* **201–202–203** (1991). [Имеется перевод: Йоккоз Ж.-К. Квадратичные многочлены и аттрактор Эно. — Наст. сб., с. 121–140.]

ПОДХОД К ГИПОТЕЗЕ НОВИКОВА С ПОМОЩЬЮ ЦИКЛИЧЕСКИХ КОГОМОЛОГИЙ (по А. Конну, М. Грому и Х. Московичи)¹⁾

Жорж Скандалис

0. ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в настоящей статье многообразия предполагаются ориентированными компактными многообразиями (без края) класса C^∞ .

Формула Хирцебруха [24] вычисляет сигнатуру ориентированного многообразия V размерности $n = 4k$, т.е. сигнатуру (разность между числом знаков $+$ и $-$) квадратичной формы, ассоциированной с формой пересечения на $H^{2k}(V; \mathbb{R})$. При этом

$$\text{sign}(V) = \langle L(V), [V] \rangle,$$

где через $[V] \in H_n(V; \mathbb{Z})$ обозначен фундаментальный цикл ориентированного многообразия V , а $L(V) \in H^*(V; \mathbb{Q})$ — это многочлен от классов Понтрягина многообразия V , называемый также характеристическим классом Понтрягина–Хирцебруха. В частности, величина $\langle L(V), [V] \rangle$ гомотопически инвариантна. Если многообразие односвязно, то сигнатура — единственный гомотопически инвариантный характеристический класс.

Предположим теперь, что V неодносвязно. Обозначим через Γ фундаментальную группу многообразия V и через $f: V \rightarrow B\Gamma$ классифицирующее отображение универсального накрытия. Пусть $x \in H^*(B\Gamma; \mathbb{Q})$ — класс рациональных гомологий; высшей сигатурой многообразия V назовем число $\langle L(V) \cup f^*(x), [V] \rangle$. Гипотеза Новикова [39] утверждает гомотопическую инвариантность всех высших сигнатур, т.е. равенство

$$\langle L(W) \cup (f \circ g)^*(x), [W] \rangle = \langle L(V) \cup f^*(x), [V] \rangle$$

для всех гомотопических эквивалентностей $g: W \rightarrow V$ компактных ориентированных многообразий.

С помощью двойственности Пуанкаре эту гипотезу можно переформулировать как утверждения о гомотопической инвариантности гомотопического класса $f_*(L(V) \cap [V]) \in H_*(B\Gamma; \mathbb{Q})$.

¹⁾Skandalis Georges. Approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique (d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici). — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 739, Astérisque, 201–202–203, 1991, p. 299–320.

И наконец, эта гипотеза наиболее естественно формулируется в рамках K -гомологий многообразия $B\Gamma$ с компактными носителями (т. е. теории гомологий, двойственной к K -теории, ср. [30]): для оператора сигнатуры многообразия V в группе K -гомологий $K_0(V)$ существует класс, обозначаемый через σ_V , образ которого при изоморфизме Черна $\text{Ch}: K_0(V) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*(V; \mathbb{Q})$ равен $L(V) \cap [V]$. Гипотеза Новикова утверждает, что образ класса σ_V в $K_0(B\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ гомотопически инвариантен, т. е. что для всех гомотопических эквивалентностей компактных ориентированных многообразий $g: W \rightarrow V$ классы $(f \circ g)_*(\sigma_W)$ и $f_*(\sigma_V)$ равны по модулю кручения.

Эта гипотеза остается недоказанной уже в течение двадцати с лишним лет. Благодаря совместным усилиям ряда математиков (ср. [7, 15, 25, 29, 30, 32–37, 40, 41, 43, 44, ...]) к настоящему времени она доказана для многих классов групп Γ . Справедливость гипотезы Новикова была недавно установлена для различных смежных случаев (липпицевы многообразия, эквивариантный случай относительно действия компактной группы, многообразия с краем, ...). Выделим также аналог гипотезы Новикова в алгебраической K -теории, доказанный недавно Бёкштедтом, Хсиангом и Мадсеном [4]. С основными достижениями недавнего времени можно ознакомиться по обзору Вайнбергера [45].

В настоящей статье мы исследуем новый подход к этой гипотезе, основанный на циклических когомологиях Конна. Мы обсуждаем следующие результаты:

Теорема А [13]. *Гипотеза Новикова справедлива для гиперболических групп Громова.*

Теорема В [12]. *Каждое «почти плоское расслоение» определяет гомотопический инвариант.*

Теорема В, как и теорема А, позволяет передоказать гипотезу Новикова во всех случаях, в которых она была ранее доказана.

Кроме того, этот подход интересен, поскольку:

- (а) он основан на очень мощных и красивых теоремах об индексе;
- (б) развитые при этом методы позволяют доказать гипотезу Новикова для большого числа новых ситуаций и во всяком случае приводят к новым интересным вопросам;
- (с) наконец, тот же подход применим к гипотезе Громова–Лоусона; он переносится на случай, когда дискретные группы заменяются слониями.

Обозначения. Пусть Γ — группа и A — кольцо. Напомним, что множество конечных сумм $\sum_{g \in \Gamma} a_g g$ ($a_g \in A$) обладает структурой

кольца, относительно которой $(ag)(bh) = (ab)(gh)$ (для $a, b \in A$, $g, h \in \Gamma$). Это кольцо обозначается через $A[\Gamma]$.

Через $\ell^2(\Gamma)$ обозначим гильбертово пространство отображений $g \rightarrow a_g$ из Γ в $\mathbb{C}$, для которых $\sum_{g \in \Gamma} |a_g|^2 < +\infty$. Действию группы Γ на гильбертовом пространстве $\ell^2(\Gamma)$ (левыми) сдвигами соответствует действие кольца $\mathbb{C}[\Gamma]$ на том же пространстве; $\mathbb{C}^*$ -алгебра $\mathbb{C}^*(\Gamma)$ группы Γ — это (нормированное) представление кольца $\mathbb{C}[\Gamma]$ в $\mathbb{C}^*$ -алгебре непрерывных операторов в $\ell^2(\Gamma)$.

Отметим, что алгебра, которую мы обозначаем в этой статье через $\mathbb{C}^*(\Gamma)$, — это приведенная $\mathbb{C}^*$ -алгебра группы Γ , обычно обозначаемая $\mathbb{C}_r^*[\Gamma]$.

1. ИНВАРИАНТЫ МИЩЕНКО И КАСПАРОВА

(а) **Инвариант Мищенко.** Основным инструментом во всех конструкциях, связанных с гипотезой Новикова, является симметрическая сигнатура Мищенко:

Пусть V — компактное ориентированное $4n$ -мерное многообразие (без края) класса C^∞ с фундаментальной группой Γ . Тогда V естественным образом снабжено плоским расслоением E со слоем $\mathbb{C}[\Gamma]$, получаемым линеаризацией универсального накрытия. Рассмотрим триангуляцию многообразия V . Мищенко показал, что форма пересечения на симплексах размерности $2n$ с коэффициентами в плоском расслоении E определяет элемент группы Уолла $L(\mathbb{C}[\Gamma])$ кольца $\mathbb{C}[\Gamma]$, называемый симметрической сигнатурой многообразия V . Он доказал также, что этот элемент гомотопически инвариантен [34].

(б) **Индекс в $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$** , ср. [13]. Обозначим через

$$\mathcal{R} = \left\{ (a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}, a_{m,n} \in \mathbb{C} : \sum_{m,n} (1+m+n)^k |a_{m,n}| < +\infty \text{ для любого } k \in \mathbb{N} \right\}$$

алгебру быстро убывающих бесконечных матриц.

Пусть V — компактное многообразие (без края) класса C^∞ . Алгебра регуляризованных ядер на V — это пространство $C^\infty(V \times V)$ функций класса C^∞ на $V \times V$, снабженное сверткой¹⁾ $(h * k)(x, y) = \int h(x, z) k(z, y) dz$ для $h, k \in C^\infty(V \times V)$, $x, y \in V$. Эта алгебра изоморфна $\mathcal{R}$. В частности, она не зависит от многообразия V . Если E

¹⁾ Интеграл берется по многообразию V , а через dz обозначена регулярная мера на V .

— комплексное векторное расслоение над V класса C^∞ , то можно построить такую же алгебру регуляризованных ядер с коэффициентами в эндоморфизмах расслоения E , которая вновь изоморфна $\mathcal{R}$.

Пусть Γ — фундаментальная группа многообразия V и $\tilde{V}$ — универсальное накрывающее пространство этого многообразия. Диагональное действие группы Γ на $\tilde{V} \times \tilde{V}$ собственнo и свободно; обозначим через W фактормногообразие $(\tilde{V} \times \tilde{V})/\Gamma$ и через $p: \tilde{V} \times \tilde{V} \rightarrow W$ отображение факторизации. Пространство $C_c^\infty(W)$ функций класса C^∞ с компактными носителями на W естественным образом снабжено структурой алгебры: для $h, k \in C_c^\infty(W)$ и $x, y \in \tilde{V}$ полагаем¹⁾ $(h * k)(p(x, y)) = \int h(p(x, z)) k(p(z, y)) dz$.

Нетрудно показать, что алгебра Γ -инвариантных регуляризованных ядер $C_c^\infty(W)$ изоморфна алгебре $\mathcal{R}[\Gamma] = \mathcal{R} \otimes C[\Gamma]$. Этот изоморфизм не является каноническим. Тем не менее между алгебрами $C_c^\infty(W)$ и $\mathcal{R}[\Gamma]$ существует каноническая эквивалентность Мориты. Вследствие этого группы $K_0(C_c^\infty(W))$ и $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ канонически изоморфны.

Для комплексного векторного расслоения E класса C^∞ над V можно также построить алгебру Γ -инвариантных регуляризованных ядер с коэффициентами в эндоморфизмах расслоения E , которая вновь будет изоморфна $\mathcal{R}[\Gamma]$.

Пусть E_+ и E_- — два комплексных векторных расслоения класса C^∞ над многообразием V , и пусть $D: C^\infty(V; E_+) \rightarrow C^\infty(V; E_-)$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор. Через $C^\infty(V; E_\pm)$ здесь обозначено пространство C^∞ -сечений расслоения $E_\pm$. Тогда оператор D и его параметрикс Q можно поднять до Γ -инвариантных операторов $\tilde{D}$ и $\tilde{Q}$ на универсальном накрывающем пространстве $\tilde{V}$ многообразия V (ср. [1, 13]). Операторы $\tilde{D}$ и $\tilde{Q}$ взаимно обратны по модулю алгебры Γ -инвариантных регуляризованных ядер с коэффициентами в эндоморфизмах расслоений $E_\pm$. Мы ставим в соответствие оператору D элемент группы $K_0(C_c^\infty(W)) = K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$, представляемый идемпотентом

$$P_D = \begin{bmatrix} (1 - \tilde{Q}\tilde{D})^2 & (1 - \tilde{Q}\tilde{D})(2 - \tilde{Q}\tilde{D})\tilde{Q} \\ \tilde{D}(1 - \tilde{Q}\tilde{D}) & 1 - (1 - \tilde{D}\tilde{Q})^2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L^{-1} \in M_2(A),$$

где

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{Q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{D} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{Q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¹⁾ Интеграл берется по многообразию $\tilde{V}$, а dz обозначает регулярную Γ -инвариантную меру на $\tilde{V}$.

и через A обозначена алгебра $\mathcal{R}[\Gamma]$ с присоединенной единицей. Напомним, что если алгебра A получена присоединением единицы к алгебре без единицы J , то группа $K_0(J)$ является факторгруппой группы $K_0(A)$ по образу группы $K_0(\mathbb{C})$.

Замечание. Поднятия $\tilde{D}$ и $\tilde{Q}$ определены однозначно только в случае, когда D и Q «достаточно локальны». В общем случае они определены с точностью до Γ -инвариантного регуляризованного ядра. Прибавление такого ядра не меняет класс идемпотента P_D в $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$.

(с) **Теорема Каспарова и Мищенко об индексе.** Напомним, что спектр самосопряженного элемента в C^* -алгебре A является вещественным. Отсюда следует, что группы L - и K -теорий совпадают, т.е. $L(A) = K_0(A)$.

Алгебра $\mathcal{R}$ является подалгеброй C^* -алгебры $\mathcal{K}$ компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. Для всякой C^* -алгебры A K -теория для тензорного произведения $\mathcal{K} \otimes A$ над C^* совпадает с K -теорией для A .

Образ идемпотента P_D , соответствующего оператору сигнатуры, при вложении $i: C[\Gamma] \rightarrow C^*(\Gamma)$ определяет элемент $a_V \in K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma)) = K_0(C^*(\Gamma))$.

Теорема 1.1. Пусть V — компактное ориентированное многообразие с фундаментальной группой Γ . Обозначим через $t_V \in K_0(C^*(\Gamma)) = L(C^*(\Gamma))$ образ инварианта Мищенко при вложении $i: C[\Gamma] \rightarrow C^*(\Gamma)$ и через $a_V \in K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma)) = K_0(C^*(\Gamma))$ образ идемпотента P_D , ассоциированного с оператором сигнатуры, при вложении $i: C[\Gamma] \rightarrow C^*(\Gamma)$. Тогда $a_V = t_V$.

Эта теорема анонсирована в [29] и доказана в [30]. Равенство $a_V = t_V$ по модулю кручения анонсировано также в [36] и доказано в [37]. Непосредственное доказательство этого факта см. в [27].

Напомним, что оператор сигнатуры многообразия V определяет элемент группы K -гомологий с компактными носителями $K_0(B\Gamma)$, обозначаемый через $f_*(\sigma_V)$. Существует естественный гомоморфизм $\beta: K_0(B\Gamma) \rightarrow K_0(C^*(\Gamma))$ («assembly map» в топологической K -теории), такой, что $\beta(f_*(\sigma_V)) = a_V$. Так как по теореме 1.1 элемент a_V является гомотопическим инвариантом, откуда вытекает

Следствие 1.2. Если гомоморфизм $\beta: K_0(B\Gamma) \rightarrow K_0(C^*(\Gamma))$ рационально инъективен, то для группы Γ справедлива гипотеза Новикова.

Говорят, что группа удовлетворяет сильной гипотезе Новикова (см. [42]), если гомоморфизм β рационально инъективен. Отметим,

что все группы, для которых справедливость гипотезы Новикова установлена, удовлетворяют и сильной гипотезе Новикова.

Ясно также, что всякий гомоморфизм $\phi: K_0(C^*(\Gamma)) \rightarrow C$ определяет некоторый гомотопический инвариант. В значительной степени именно это замечание привело Каспарова к построению биинвариантной K -теории для C^* -алгебр.

2. ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ ГРУПП

Циклические когомологии. За обзором циклических когомологий мы отсылаем к [9, 16, 8]. Здесь мы будем довольствоваться лишь необходимыми определениями.

Пусть A — алгебра над C . Напомним, что n -коцепь на A — это полилинейное отображение $\phi: A^{n+1} \rightarrow C$. Кограница Хохшильда коцепи ϕ есть $n+1$ -коцепь $b\phi$, задаваемая формулой

$$b\phi(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \phi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \phi(a_{n+1} a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Определение 2.1. Пусть A — алгебра над C . *Циклическая n -коцепь* на A — это полилинейное отображение $\phi: A^{n+1} \rightarrow C$, такое, что

$$\phi(a_1, \dots, a_n, a_0) = (-1)^n \phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

для любого $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in A^{n+1}$.

Пространство циклических n -коцепей на A обозначается через $C_\lambda^n(A)$. *Циклический n -коцикл* — это такая циклическая n -коцепь ϕ , что $b\phi = 0$. Пространство циклических n -коциклов на A обозначается через $Z_\lambda^n(A)$.

Нетрудно проверить, что кограница Хохшильда циклической коцепи является циклическим коциклом. Циклические когомологии $H_\lambda^n(A)$ алгебры A — это когомологии комплекса циклических коцепей с кограничным оператором Хохшильда. Другими словами, $H_\lambda^n(A) = Z_\lambda^n(A)/bC_\lambda^{n-1}(A)$.

Спаривание с K -теорией. Пусть n — четное число и ϕ — циклический n -коцикл на алгебре A . Пусть B — алгебра, полученная из A присоединением единицы. Напомним, что B изоморфна $A \otimes C$ как векторное пространство над C и что произведение в B определяется формулой $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ ($a, b \in A$, $\lambda, \mu \in C$). Тогда ϕ определяет циклический коцикл (который мы также обозначаем через ϕ) на B по формуле $\phi((a_0, \lambda_0), (a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)) = \phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Обозначим через $M_k(B)$ алгебру $k \times k$ -матриц с коэффициентами в B . Воспользовавшись следом в $M_k(C)$, продолжим циклический коцикл ϕ на $M_k(B)$. Пусть e — идемпотент в $M_k(B)$. Число $\phi(e, e, \dots, e)$ зависит только от класса элемента e в $K_0(A)$ и от класса коцикла ϕ в H_λ^n . Определим спаривание между $K_0(A)$ и $H_\lambda^n(A)$, положив

$$\langle [\phi], [e] \rangle = c_n \phi(e, e, \dots, e),$$

где $c_n \in \mathbb{C}$ — нормализующая константа ($c_{2m} = 1/(2\pi i)^m m!$).

Нормализация групповых коциклов. Пусть Γ — группа. Групповой n -коцикл s на Γ называется нормализованным, если $s(g_1, \dots, g_n) = 0$ при $g_1 \dots g_n = 0$.

С помощью проективного разрешения можно без труда доказать следующий результат (ср. [6, 13]):

Предложение 2.2. В каждом когомологическом классе группы $H^n(\Gamma, \mathbb{C})$ имеется по крайней мере один нормализованный цикл.

Пусть s — нормализованный коцикл на группе Γ . Сопоставим коциклу s циклический коцикл ϕ_s на $\mathbb{C}[\Gamma]$, который на элементах группы Γ , порождающих $\mathbb{C}[\Gamma]$, действует по правилу

$$\phi_s(g_0, g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} s(g_1, \dots, g_n), & \text{если } g_0 g_1 \dots g_n = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание. На самом деле группа $H^n(\Gamma, \mathbb{C})$ вкладывается в $H_\lambda^n(\mathbb{C}[\Gamma])$. Циклические когомологии алгебры $\mathbb{C}[\Gamma]$ вычислены Бургелеа (ср. [6]).

Продолжение на $\mathcal{R}[\Gamma]$. Первая теорема об индексе.

Определение 2.3. Пусть s — нормализованный n -коцикл на группе Γ . Определим циклический коцикл ψ_s на $\mathcal{R}[\Gamma]$, положив

$$\psi_s(k_0 g_0, k_1 g_1, \dots, k_n g_n) = \text{Tr}(k_0 k_1 \dots k_n) \phi_s(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

для $(k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{R}^{n+1}$ и $(g_0, g_1, \dots, g_n) \in \Gamma^{n+1}$, где через Tr обозначен след над алгеброй $\mathcal{R}$.

Элементы вида kg ($k \in \mathcal{R}$, $g \in \Gamma$) порождают $\mathcal{R}[\Gamma]$; ψ_s продолжается на $\mathcal{R}[\Gamma]^{n+1}$ по линейности. Без труда проверяется, что ψ_s является циклическим коциклом. След Tr задается формулой

$$\text{Tr}((a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n,n}.$$

Конн и Московичи доказали следующую теорему об индексе:

Теорема 2.4 (ср. [13]). Пусть V — компактное многообразие, Γ — его фундаментальная группа, $f: V \rightarrow B\Gamma$ — классифицирующее отображение и D — псевдодифференциальный эллиптический оператор на V . Обозначим через $[D]$ класс оператора D в группе K -гомологий $K_0(V)$, через $\text{Ch}[D]$ его образ в $H_*(V)$ при изоморфизме Черна и через $[P_D]$ индекс оператора D в $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$. Пусть c — нормализованный n -коцикл на группе Γ ; обозначим через x класс этого коцикла в $H^n(B\Gamma; \mathbb{C}) = H^n(\Gamma; \mathbb{C})$. Тогда $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle = d_n \langle f^*(x), \text{Ch}[D] \rangle$.

Здесь d_n — ненулевая постоянная ($d_{2m} = 1/(2\pi i)^m (2m)!$).

В качестве частного случая для нульмерного коцикла $c = 1$ получаем теорему об индексе со значениями в алгебре фон Неймана группы Γ [1].

Доказательство этой теоремы разбивается на следующие этапы:

(а) Групповому коциклу c сопоставляем коцикл Александра–Спеньера η на V , класс когомологий которого равен $f^*(x)$. Используя локальный изоморфизм группоидов W и $V \times V$, каждому коциклу Александра–Спеньера ζ можно сопоставить гомоморфизм $f_\zeta: K_0(V) \rightarrow \mathbb{C}$, такой, что $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle = f_\eta([D])$.

(б) Вычисляем указанный гомоморфизм f_η , ассоциированный с коциклом Александра–Спеньера η , используя символическое исчисление Гетцлера [17].

Класс $[P_D]$ априори не является гомотопическим инвариантом. Чтобы доказать гомотопическую инвариантность высшей сигнатуры, ассоциированной с x , достаточно доказать, что число $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle$ зависит лишь от образа оператора P_D в $K_0(\mathbb{C}^*[\Gamma])$. Действительно, по теореме 1.1 этот образ является гомотопическим инвариантом.

Нет оснований ожидать, что циклический коцикл ϕ_c продолжается до циклического коцикла в $\mathbb{C}^*(\Gamma)$. Можно, однако, надеяться, что в некоторых случаях этот циклический коцикл продолжается до циклического коцикла в некоторой банаховой подалгебре алгебры $\mathbb{C}^*(\Gamma)$, имеющей ту же K -теорию, что и сама $\mathbb{C}^*(\Gamma)$. Приведем в связи с этим следующий «классический» (и простой) результат:

Лемма 2.5 (см., например, [28, упр. 6.15]). Пусть $\rho: A \rightarrow B$ — гомоморфизм банаховых алгебр с единицей. Если образ гомоморфизма ρ плотен в B и $A^{-1} = \rho^{-1}(B^{-1})$, то ρ индуцирует изоморфизм K -теорий.

Если гомоморфизм ρ удовлетворяет условиям леммы и помимо этого инъективен, то иногда говорят, что A — полная подалгебра алгебры B .

Этот метод применяется при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.6 [13]. *Гипотеза Новикова справедлива для гиперболических групп Громова.*

Гиперболические группы Громова описаны в [20] и [19]. При доказательстве теоремы 2.6 используются следующие два свойства этих групп:

(а) Громов доказал (ср. [20]), что для гиперболической группы Γ каждый класс когомологий $x \in H^n(\Gamma, \mathbb{C})$ представим (нормализованным) ограниченным коциклом.

(б) П. де л'Арп [22] обобщил на гиперболические группы оценку на норму в $C^*(\Gamma)^1$, полученную Хагерупом для свободных групп и Жолиссентом для дискретных подгрупп групп Ли ранга 1. Отсюда вытекает (ср. [26])

Предложение 2.7. Пусть Γ — гиперболическая группа. Пополнение алгебры $C[\Gamma]$ по норме N , задаваемой формулой $N(\sum_{g \in \Gamma} a_g g) = \|\sum_{g \in \Gamma} |a_g| g\|$, является полной подалгеброй A в $C^*(\Gamma)$.

Здесь $\|a\|$ обозначает норму элемента a в $C^*(\Gamma)$.

Пусть n — четное число и c — нормализованный ограниченный n -коцикл в Γ . Положим $\phi = \phi_c$.

Для $a^i = \sum_{g \in \Gamma} a_g^i g$ ($i = 0, 1, \dots, n$) имеем

$$\phi(a^0, a^1, \dots, a^n) = \sum_{g_0 g_1 \dots g_n = 1} a_{g_0}^0 a_{g_1}^1 \dots a_{g_n}^n c(g_1, \dots, g_n).$$

Поэтому

$$|\phi(a^0, a^1, \dots, a^n)| \leq k \sum_{g_0 g_1 \dots g_n = 1} |a_{g_0}^0| |a_{g_1}^1| \dots |a_{g_n}^n| = k \tau(b^0 b^1 \dots b^n),$$

где $b^i = \sum_{g \in \Gamma} |a_g^i| g$ и $\tau(\sum_{g \in \Gamma} a_g g) = a_1$.

Отсюда следует, что

$$|\phi(a^0, a^1, \dots, a^n)| \leq k \|b^0 b^1 \dots b^n\| \leq k N(a^0) N(a^1) \dots N(a^n).$$

Значит, коцикл ϕ продолжается до циклического коцикла в алгебре A ; он определяет, таким образом, гомоморфизм из $K_0(A) = K_0(C^*(\Gamma))$ в $\mathbb{C}$, откуда следует теорема 2.6.

Значение этой теоремы определяется многочисленностью гиперболических групп (ср. [20]).

Использованный метод доказательства ставит и множество вопросов:

¹⁾ Напомним, что здесь через $C^*(\Gamma)$ обозначена приведенная C^* -алгебра группы Γ .

Вопрос 1. Индуцирует ли вложение $A \rightarrow C^*(\Gamma)$ изоморфизм K -теорий для любой группы Γ ?

Из положительного ответа на этот вопрос вытекала бы гипотеза Новикова для всех ограниченных групповых коциклов. Равенство $A^{-1} = \rho^{-1}(C^*(\Gamma)^{-1})$ кажется, однако, привязанным к «рангу 1». Как показал Бост [1], ответ на вопрос 1 положителен по крайней мере для разрешимых групп. Заметим, что для группы, по которой идет усреднение, норма N совпадает с нормой $\| \cdot \|_1$, и, таким образом, A является банаховой алгеброй $\ell^1(\Gamma)$.

На самом деле оценка из [22] позволяет доказать, что если группа Γ гиперболична, то пополнение A_n подалгебры $C[\Gamma]$ по норме N_n , задаваемой формулой $N_n(\sum_{g \in \Gamma} a_g g) = \|\sum_{g \in \Gamma} |a_g|(1 + |g|)^n g\|$, является полной подалгеброй в $C^*(\Gamma)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Через $|g|$ здесь обозначена длина элемента g относительно некоторой системы образующих в Γ .

Вопрос 2. Индуцирует ли вложение $A_n \rightarrow C^*(\Gamma)$ изоморфизм K -теорий для всякой группы Γ ?

Так как коциклы с полиномиальным пересечением всегда можно продолжить на алгебру A_n , из положительного ответа на вопрос 2 вытекала бы гипотеза Новикова для всех коциклов группы с полиномиальными пересечениями.

Можно действовать следующим, более общим, образом (ср. [10]): по данному нормализованному групповому коциклу s построим подалгебру A (возможно, зависящую от s) алгебры $C^*(\Gamma)$, K -теория которой совпадает с K -теорией для $C^*(\Gamma)$ и на которую продолжается коцикл ϕ_s . Например, инварианту Годбийона–Вей соответствует 2-коцикл (коцикл Ботта–Тёрстона) для каждой группы Γ , действующей на окружности диффеоморфизмами, сохраняющими ориентацию (ср. [18]). Конн [10] доказал, что этот коцикл определяет гомоморфизм K -теории алгебры $C^*(\Gamma)$ в $\mathbb{C}$, а значит, и гомотопический инвариант. Таким же образом исследуются все «вторичные классы» когомологий групп.

3. «ПОЧТИ ПЛОСКИЕ РАССЛОЕНИЯ»

Строго говоря, речь идет не о почти плоских расслоениях, а о почти плоских элементах K -теории:

Определение 3.1 [12]. Пусть $\alpha > 0$ — вещественное число, V — риманово компактное многообразие и E — риманово расслоение над V . Пусть ∇ — унитарная связность на E и $\theta = \nabla^2$ — ее кривизна. Связность ∇ называется α -плоской, если $\|\theta\| < \alpha$. Если на E существует унитарная α -плоская связность ∇ , мы говорим, что расслоение E

является α -плоским. Элемент K -теории $x \in K^0(V)$ называется *почти плоским*, если для всякого $\alpha > 0$ существуют α -плоские векторные расслоения $E_{\pm}$, такие, что x равен разности классов расслоений E_+ и E_- в $K^0(V)$.

Кривизна θ — это 2-форма со значениями в эндоморфизмах расслоения E . Так как размерность расслоения E растет при α , стремящемся к нулю, необходимо уточнить, какую норму кривизны θ мы рассматриваем. Для пары X, Y касательных векторов в одной точке x многообразия V кривизна определяет эндоморфизм $\theta_{X,Y}$ гильбертова пространства E_x ; обозначим через $\|\theta_{X,Y}\|$ норму этого эндоморфизма. Положим $\|\theta\| = \sup \{\|\theta_{X,Y}\| : \|X\| \leq 1, \|Y\| \leq 1\}$.

Аналогичное определение можно ввести и для K^1 : элемент группы $K^1(V)$ называется почти плоским, если для любого $\alpha > 0$ его можно представить сечением u расслоения унитарных автоморфизмов унитарного расслоения E с заданной α -плоской унитарной связностью u , для которой $\|\nabla u\| < \alpha$.

Ясно, что произведение двух почти плоских элементов K -теории является почти плоским: для почти плоских $x_i \in K^*(V_i)$ ($i = 1, 2$) тензорное произведение $x_1 \otimes x_2 \in K^*(V_1 \times V_2)$ является почти плоским.

Пример 3.2. Легко описать почти плоские элементы группы K^1 :

Снабдим тривиальное расслоение размерности N над окружностью $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ унитарной связностью, параллельный перенос $v_{[s,t]}$ вдоль которой на ориентированном отрезке $[s, t] \subset \mathbb{R}$ задается в базисе $(b_0, \dots, b_{N-1})$ формулой $v_{[s,t]}(b_k) = e^{2i(k/N)\pi(t-s)} b_k$. Обозначим для всех $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ через u_t унитарный оператор в $\mathbb{C}^N$, действующий на базисе $(b_0, \dots, b_{N-1})$ по формулам $u_t b_k = b_{k-1}$, если $k \neq 0$, $u_t b_0 = e^{2i\pi t} b_{N-1}$. Тогда сечение $t \rightarrow u_t$ представляет образующую группы $K^1(T)$; для всех t имеем $v_{[0,t]} u_0 v_{[t,0]} = e^{-2i\pi t/N} u_t$, т.е. сечение $t \rightarrow u_t$ почти инвариантно относительно связности.

Отсюда следует, что элемент Ботта на T^2 является почти плоским элементом K -теории.

Почти плоские элементы K -теории происходят из фундаментальной группы. Действительно, нетрудно доказать

Предложение 3.3. Пусть V — риманово односвязное многообразие. Тогда все почти плоские классы K -теории многообразия V тривиальны. Точнее говоря, существует такое $\alpha > 0$, что все α -плоские расслоения над V тривиальны.

Теорема 3.4 [12]. Пусть V — компактное ориентированное многообразие и $x \in K^*(V)$ — почти плоский элемент K -теории. Тогда для каждой гомотопической эквивалентности $f: W \rightarrow V$ имеем

$(\sigma_V, x) = (\sigma_W, f^*(x))$, где через σ_V (соотв. σ_W) обозначен класс оператора сигнатуры на V (соотв. на W) в группе K -гомологий $K_*(V)$ (соотв. $K_*(W)$).

Эту теорему можно доказать непосредственно: для сохраняющей ориентацию гомотопической эквивалентности $f: W \rightarrow V$ и достаточно плоского расслоения E над V можно непосредственно сравнить сигнатуры многообразий V и W с коэффициентами в расслоениях E и f^*E и показать, что их индексы совпадают (ср. [23]).

Приведенное в [12] исходное доказательство этой теоремы не столь непосредственно, однако в нем развиваются интересные идеи:

- почти плоскому расслоению сопоставляется «почти представление» фундаментальной группы Γ ;
- определяется образ симметрической сигнатуры Мищенко при почти представлении; это самосопряженная обратимая матрица;
- доказывается теорема об индексе, которая устанавливает равенство сигнатуры с коэффициентами в почти плоском расслоении в образе и сигнатуры этого самосопряженного оператора.

Поясним кратко каждый из этих моментов.

Почти представление, ассоциированное с почти плоским расслоением. Пусть V — риманово многообразие. Выберем базовую точку x в многообразии V и для каждого элемента фундаментальной группы Γ многообразия V зафиксируем представляющую его петлю. Рассмотрим унитарное расслоение E над V , снабженное унитарной связностью ∇ . Параллельный перенос вдоль выбранных представителей определяет отображение u группы Γ в группу унитарных преобразований слоя E_x . Если связность ∇ плоская, то отображение u является представлением. Если связность ∇ α -плоская и α достаточно мало, отображение u является почти представлением: для заданного $\epsilon > 0$ и конечного подмножества F группы Γ существует такое $\alpha > 0$, что для отображения u , ассоциированного с некоторой α -плоской связностью, имеем $\|u(xy) - u(x)u(y)\| < \epsilon$ для всех $x, y \in F$. В этом случае отображение u называется (F, ϵ) -представлением.

По причинам, приведенным выше, рассматриваются почти представления, для которых $u(g^{-1}) = u(g)^*$ для всех $g \in \Gamma$. Для этого отображение u заменяется на отображение $g \mapsto \frac{1}{2}(u(g) + u(g^{-1})^*)$. При этом u перестает быть унитарным, но остается почти представлением (и поэтому почти унитарным).

Замечание. Наоборот, легко построить конечное подмножество F группы Γ , обладающее следующим свойством: для всякого $\alpha > 0$ существует $\epsilon > 0$, такое, что всякому (F, ϵ) -представлению можно сопоставить α -плоское расслоение. Таким образом, мы получаем другой

способ доказательства того, что элемент Ботта на T^2 является почти плоским. Пусть, наконец, u является (F, ϵ) -представлением, ассоциированным с некоторым α -плоским расслоением E . Тогда ассоциированное с этим представлением расслоение изоморфно E . (Этот факт обобщает предложение 3.3.)

Образ инварианта Мищенко при «почти представлении». Инвариант Мищенко является элементом группы Уолла $L(C[\Gamma])$ и представляется поэтому самосопряженным обратимым элементом $x \in M_n(C[\Gamma])$.

Пусть u — отображение группы Γ в $M_N(C)$, для которого $u(g^{-1}) = u(g)^*$ для всех элементов $g \in \Gamma$. По отображению u можно построить линейное отображение, также обозначаемое через u , алгебры $C[\Gamma]$ в $M_N(C)$, положив $u(\sum_{g \in \Gamma} a_g g) = \sum_{g \in \Gamma} a_g u(g)$. Заметим, что отображение u самосопряженное, т.е. $u(x^*) = u(x)^*$ для всех $x \in C[\Gamma]$. Наконец, u можно продолжить на матрицы; при этом получается линейное отображение, вновь обозначаемое через u , из $M_n(C[\Gamma])$ в $M_{nN}(C)$.

Нетрудно доказать следующий результат:

Лемма 3.5. (а) Пусть x — самосопряженный обратимый элемент в $M_n(C[\Gamma])$. Тогда существуют конечное подмножество F группы Γ и вещественное число $\epsilon > 0$, такие, что образ $u(x)$ при любом (F, ϵ) -представлении u обратим в $M_{nN}(C)$.

(б) Пусть x и y — два самосопряженных обратимых элемента в $M_n(C[\Gamma])$. Если x и y определяют один и тот же элемент в $L(C[\Gamma])$, то существуют конечное подмножество F группы Γ и вещественное число $\epsilon > 0$, для которых $u(x)$ и $u(y)$ имеют одинаковую сигнатуру при любом (F, ϵ) -представлении u .

Утверждение (а) вытекает из того, что элемент $u(x^{-1})u(x)$ близок к 1. Утверждение (б) без труда выводится из определения группы $L(C[\Gamma])$. (Для этого нужна только сигнатура самосопряженного обратимого элемента $u(x) \in M_{nN}(C)$, т.е. разность числа его положительных и числа его отрицательных собственных значений.)

Теперь теорема 3.4 выводится из следующей теоремы.

Теорема 3.6 [12]. Пусть V — ориентированное компактное риманово многообразие с фундаментальной группой Γ . Обозначим через σ_V класс оператора сигнатуры многообразия V в группе K -гомологий $K_0(V)$. Пусть $x \in C[\Gamma]$ — представитель инварианта Мищенко. Тогда существует $\alpha > 0$, такое, что для любого α -плоского расслоения E имеем $\langle \sigma_V, [E] \rangle = \text{сигнатура}(u(x))$, где через u обозначено почти представление, ассоциированное с E .

Символ $[E]$ обозначает здесь класс расслоения E в $K^0(V)$.

Эта теорема является частным случаем более общей теоремы об индексе, в которой оператор сигнатуры заменяется произвольным эллиптическим оператором D . При этом рассматривается индекс оператора D в группе $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$, а не в группе $L(\mathcal{C}[\Gamma])$. Образ элемента $x \in K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ при почти представлении можно определить тогда, как в лемме 3.5. Доказательство этой теоремы аналогично приведенному выше доказательству теоремы 2.4. В нем используются целые циклические когомологии, представляющие собой естественное обобщение циклических когомологий.

Важность теоремы 3.4. Согласно [12], для получения нового доказательства гипотезы Новикова в случаях

(а) когда группа Γ является дискретной подгруппой связной группы Ли или фундаментальной группой полного многообразия отрицательной или нулевой двумерной кривизны [30],

(б) когда группа Γ является дискретной подгруппой алгебраической группы над локальным полем [32]

достаточно построить почти плоские расслоения.

Кроме того, эта теорема дает новое доказательство гипотезы Новикова для гиперболических групп.

Замечание. Конструкция всех почти плоских расслоений, используемых в доказательстве следствий из теоремы 3.4, основывается на построении собственного липшицева отображения из Γ в $\mathbb{R}^n$. Каждому такому отображению можно поставить в соответствие элемент K -гомологий алгебры¹⁾ $C^*(\Gamma)$, с которым ассоциирован некоторый гомотопический инвариант. Преимущество такого подхода, помимо его простоты, состоит в том, что он доказывает сильную гипотезу Новикова.

4. ДОПОЛНЕНИЯ

Гипотеза Громова–Лоусона. Приведем формулировку этой гипотезы:

Гипотеза 4.1 [21]. Пусть V — компактное спинорное многообразие строго положительной скалярной кривизны. Обозначим через Γ его фундаментальную группу и через $f: V \rightarrow B\Gamma$ классифицирующее отображение. Тогда для всех $x \in H^*(B\Gamma; \mathbb{C})$ имеем $\langle \alpha_V, f^*(x) \rangle = 0$, где через $\alpha_V \in H_*(V; \mathbb{Q})$ обозначен род $\hat{A}$ многообразия V , т. е. образ при изоморфизме Черна класса K -гомологий оператора Дирака многообразия V .

¹⁾На эту конструкцию мне указал А. Конн. Она не опубликована, однако должна появиться в расширенном варианте работы [12].

Известно, что

(а) гипотеза Громова–Лоусона справедлива для гиперболических групп;

(б) пусть V — компактное спинорное многообразие строго положительной скалярной кривизны; тогда индекс оператора Дирака с коэффициентами в почти плоском классе K -теории равен нулю.

На самом деле гипотеза Громова–Лоусона является следствием сильной гипотезы Новикова (ср. [42]), откуда вытекает (а). Пункт (б) почти очевиден.

Слоения: гипотеза Баума–Конна. Описанные выше методы можно перенести на другие ситуации (ср. [2]). Например, представляет интерес следующее обобщение гипотезы Новикова для слоений (ср. [3]):

Пусть (V, F) — компактное слоеное многообразие класса C^∞ . Группоид гомотопий слоения (V, F) — это дифференцируемый группоид гомотопических классов путей, касающихся слоев этого слоения. Напомним, что послойная гомотопия — это такая гомотопия $(h_t)_{t \in [0,1]}: W \rightarrow V$, что для каждой точки $x \in W$ путь $h_t(x)$ лежит на одном слое слоения.

Пусть (V, F) и (W, H) — два компактных слоеных многообразия класса C^∞ .

Отображение $f: W \rightarrow V$ класса C^∞ называется послойной гомотопической эквивалентностью, если существует отображение $g: V \rightarrow W$, такое, что

(а) образ при f (соотв. при g) каждого слоя слоения W (соотв. слоения V) содержится в некотором слое слоения V (соотв. слоения W);

(б) существует послойная гомотопия, соединяющая $g \circ f$ и $f \circ g$ с тождественными отображениями многообразий V и W .

Гипотеза Баума–Конна утверждает:

Гипотеза 4.2 (ср. [3]). Пусть V — компактное ориентированное многообразие четной размерности и F — слоение на V . Обозначим через BG классифицирующее пространство гомотопического группоида G слоения (V, F) и через $h: V \rightarrow BG$ классифицирующее отображение. Тогда образ при h класса σ_V в $K_0(BG) \otimes \mathbb{Q}$ является послойным гомотопическим инвариантом.

Напомним, что σ_V обозначает класс оператора сигнатуры многообразия V в группе K -гомологий $K_0(V)$. Эта гипотеза означает, что если $f: (W, H) \rightarrow (V, F)$ — послойная гомотопическая эквивалентность, сохраняющая ориентацию, то $(h \circ f)_*(\sigma_W)$ равен $h_*(\sigma_V)$ по модулю кручения.

В этой ситуации применимы два описанных выше метода:

(а) Элемент кольца $H^*(BG; \mathbb{C})$ определяет циклический коцикл над некоторой алгеброй (обозначаемой через $C_c^\infty(G)$), которая играет здесь роль алгебры $\mathcal{R}[\Gamma]$. Таким образом, получаем доказательство гипотезы для коциклов, которые можно продолжить на полную под-алгебру в C^* -алгебре слоения. Этот метод развит в [10], где изучены многочисленные классы когомологий (в частности, классы когомологий Гельфанда–Фукса).

(б) Пусть (V, F) и (W, H) — два слоеных ориентированных римановых многообразия. Пусть $f: W \rightarrow V$ — послойная гомотопическая эквивалентность, сохраняющая ориентацию. Тогда существует число $\alpha > 0$, такое, что для любого эрмитова расслоения E над V , α -плоского вдоль F , сигнатуры многообразия V с коэффициентами в E и многообразия W с коэффициентами в f^*E равны (ср. [23]).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Atiyah M. F., Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, *Astérisque* **32–33** (1976), 43–72.
- [2] Baum P., Connes A., Geometric K -theory for Lie groups and foliations, Preprint I.H.E.S. (1982).
- [3] Baum P., Connes A., Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes, in *Foliations*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 5, 1985, 1–14.
- [4] Bökstedt M., Hsiang W. C., Madsen I., Algebraic K -Theory of Spaces and the Novikov Conjecture. Результаты доложены Бёкстедом на Математическом конгрессе в Киото, 1990.
- [5] Bost J.-B., K -théorie des produits croisés et principe d'Oka, *C. R. Acad. Sci. Paris* **301**, Ser. I (1985), 5, 189–192.
- [6] Burghelea D., The cyclic homology of groups, *Comment. Math. Helv.* **60** (1985), 354–365.
- [7] Cappell S. E., On homotopy invariance of higher singularities, *Invent. Math.* **33** (1976), 171–179.
- [8] Cartier P., Homologie cyclique: Rapport sur les travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen, ..., Février, Sémin. Bourbaki, 1984, exposé n°621, *Astérisque* **121–122** (1985), 123–146.
- [9] Connes A., Non commutative differential geometry. Chapter I: The Chern character in K -homologie. Chapter II: De Rham homology and non commutative algebra, *Publ. Math. I.H.E.S.* **62** (1986), 257–360.
- [10] Connes A., Cyclic homology and the transverse fundamental class of a foliation, in *Geometric methods in operator algebras*, H. Araki and E. G. Effros éd., Pitman Research Notes in Math. Series **123**, Longman Wiley (1986), 52–144.
- [11] Connes A., Entire cyclic homology of Banach algebras and the character of θ -summable Fredholm modules, K -theory **1** (1988), 519–548.
- [12] Connes A., Gromov M., Moscovici H., Conjecture de Novikov et fibrés presque plats, *C. R. Acad. Sci. Paris* **310** (1990), 273–277.

- [13] Connes A., Moscovici H., Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and fundamental groups, *Topology* **29** (1990), 345–388.
- [14] Fack T., K -théorie biinvariante de Kasparov, *Sém. Bourbaki*, Février 1983, exposé n°605, *Astérisque* **105–106** (1983), 149–166.
- [15] Farrell F. T., Hsiang W. C., On Novikov's conjecture for nonpositively curved manifolds I, *Ann. of Math.* **113** (1981), 199–209.
- [16] Feigin B. L., Tsygan B. L., Additive K -theory, in: *Lect. Notes in Math.*, vol. 1289, Springer-Verlag, Berlin–New York (1987), 67–209.
- [17] Getzler E., Pseudo differential operators on supermanifolds and the Atiyah–Singer index theorem, *Comm. Math. Phys.* **92** (1983), 163–176.
- [18] Ghys É., L'invariant de Godbillon–Vey, *Sém. Bourbaki*, Mars 1989, exposé n°706, *Astérisque* **177–178** (1989), 155–182. [Имеется перевод: Гиз Э. Инвариант Годбийона–Вея. — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1989 г. — М.: Мир, 1991, с. 157–185.]
- [19] Ghys É., Les groupes hyperbolique, *Sém. Bourbaki*, Mars 1990, exposé n°722, *Astérisque* **189–190**. [Имеется перевод: Гиз Э. Гиперболические группы. — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1990 г. — М.: Мир, 1996, с. 151–178.]
- [20] Gromov M., Hyperbolic groups, in *Essays in group theory*, M.S.R.I. Publ. **8** (1987), 75–263.
- [21] Gromov M., Lawson H. B., Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, *Publ. Math. I.H.E.S.* **58** (1983), 83–196.
- [22] De la Harpe P., Groupes hyperbolique, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint, *C. R. Acad. Sci. Paris* **307** Ser. I (1988), 771–774.
- [23] Hilsum M., Skandalis G., Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat (d'après Connes–Gromov–Moscovici), *J. Reine Angew. Math.* **423** (1992), 73–99.
- [24] Hirzebruch F., *Topological methods in algebraic geometry*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag (1965).
- [25] Hsiang W. S., Rees H. D., Mischenko's work on Novikov's conjecture, *Contemp. Math.* **72** (1982), 77–98.
- [26] Jolissaint P., K -groups of reduced C^* -algebras and rapidly decreasing functions on groups, *K -theory* **2** (1989), 723–735.
- [27] Kaminker J., Miller J. G., Homotopy invariance of the analytic signature operators over C^* -algebras, *J. Operator Theory* **14** (1985), 113–127.
- [28] Karoubi M., K -theory, an introduction, *Grund. des Mat. Wis.*, Springer-Verlag, 1978. [Имеется перевод: Каруби М. Введение в K -теорию. — М.: Мир, 1983.]
- [29] Каспаров Г. Г. Топологические инварианты эллиптических операторов I: K -гомологии. — *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1975, т. 39, №4, с. 796–838.
- [30] Kasparov G. G., Equivariant KK -theory and the Novikov conjecture, *Invent. Math.* **91** (1988), 147–201 [см. также: K -теория, групповые C^* -алгебры и высшие сигнатуры. Конспекты, ч. 1 и 2. — Препринт, Черногловка, 1981].

- [31] Kasparov G. G., Operator K -theory and its applications: elliptic operators, group representations, higher signatures, C^* -extensions, in Proc. I.C.M. Conf. Warsaw 1983, PWN Elsevier (1984), 987–1000.
- [32] Kasparov G. G., Skandalis G., Groups acting on buildings, Operator K -theory and Novikov's conjecture, K -theory 4 (1991), 303–337.
- [33] Lustig G., Novikov's higher signature and families of elliptic operators, J. Differential Geom. 7 (1971), 229–256.
- [34] Мищенко А. С. Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий, I: Рациональные инварианты. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1970, т. 34, с. 501–514.
- [35] Мищенко А. С. Бесконечномерные представления дискретных групп и высшие сигнатуры. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1974, т. 38, №1, с. 81–106.
- [36] Mishchenko A. S., C^* -algebras and K -theory, Lect. Notes in Math., vol. 763, Springer-Verlag (1979), 262–274.
- [37] Мищенко А. С., Соловьев Ю. П. Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха. — Матем. сб., 1980, т. 111, №1, с. 209–226.
- [38] Moscovici H., Cyclic homology and invariants of non-simply connected manifolds, Proc. I.C.M. Kyoto (1990), Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991, 675–688.
- [39] Novikov S. P., Analogues hermitiens de la K -théorie, Actes Congrès Intern. Math. 2 (1970), 39–45.
- [40] Pimsner M., KK -groups of crossed products by groups acting on trees, Invent. Math. 86 (1986), 603–634.
- [41] Rees H. D., Special manifolds and Novikov's conjecture, Topology 22 (1983), 365–378.
- [42] Rosenberg J., C^* -algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture, Publ. Math. I.H.E.S. 58 (1983), 409–424.
- [43] Соловьев Ю. П. Дискретные подгруппы, комплексы Брюа–Титса и гомотопическая инвариантность высших сигнатур. — УМН, 1976, т. 31, вып. 1, с. 261–262.
- [44] Соловьев Ю. П. Бесконечномерные представления дискретных групп и высшие сигнатуры. — Дисс., МГУ, 1976 (см. также Соловьев В. П., Троицкий Е. В. C^* -алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии. — М.: Факториал, 1996. — Ред.).
- [45] Weinberger S., Aspects of the Novikov conjecture, Contemp. Math. 105 (1990), 281–297.

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТРИКИ МИНКОВСКОГО ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ (по С. Клайнерману и Д. Кристодулу)¹⁾

Жан-Пьер Бургиньон

Интерпретация специальной теории относительности как геометрии четырехмерного векторного пространства, снабженного билинейной формой сигнатуры $(-+++)$, принадлежит Анри Пуанкаре, см. [38], и Герману Минковскому, см. [32]. Поэтому такое пространство называется *пространством Минковского*, а его группа аффинных автоморфизмов — *группой Пуанкаре*²⁾.

Общая теория относительности (ОТО) была введена Альбертом Эйнштейном в серии статей, публикация которых началась в 1913 г., см. [18], и достигла кульминации в 1916 г., см. [17]. ОТО рассматривает гравитацию как модификацию локальной геометрии пространства-времени. Она отождествляет гравитационное поле с лоренцевой метрикой. Согласно основным уравнениям теории — уравнениям Эйнштейна — часть тензора кривизны этой метрики (тензор Эйнштейна, см. п. 1.3) равна тензору энергии-импульса. Последний зависит от других взаимодействий в пространстве-времени. Эти уравнения образуют *систему нелинейных уравнений второго порядка в частных производных*, причем любой ковектор является для нее характеристическим. Точное решение этой системы — сложнейшая математическая задача.

В R^4 всякая инвариантная относительно сдвигов метрика является (тривиальным) решением этих уравнений. Сергиу Клайнерман и Димитрий Кристодулу нашли в 1989 г. точное решение задачи о возмущениях этого тривиального решения, см. [15].

Теорема. *Для любых начальных данных Коши в R^3 , достаточно близких к тривиальным (т. е. соответствующим пространству*

¹⁾Bourguignon Jean-Pierre. Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski (d'après D. Christodoulou et S. Klainerman). — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 740, Astérisque, 201–202–203, 1991, p. 321–358.

²⁾Ранее Гендрик А. Лоренц ввел в [31] преобразования пространства-времени, носящие теперь его имя. Его целью было объяснить эффекты сжатия электрона при больших скоростях. Пуанкаре показал в [38], что эти преобразования составляют группу автоморфизмов указанной геометрии.

Минковского) и сильно асимптотически плоских, существует и единственно решение уравнений Эйнштейна в вакууме — лоренцева метрика на $\mathbb{R}^4$. Это решение регулярное, полное и глобально гиперболическое.

Цель настоящей статьи — рассказать об этом результате (начав с различных понятий, встречающихся в этой теореме). Этот результат часто интерпретируется как доказательство *нелинейной устойчивости метрики Минковского*: «устойчивости», потому что топология пространства-времени не меняется и в нем не возникает никаких особенностей; прилагательное «нелинейной» добавляют, чтобы подчеркнуть тот факт, что решается именно система уравнений Эйнштейна, а не ее линеаризованная версия.

На пути к этому результату возникают чудовищные трудности, нужно хитроумно сочетать аналитические оценки с геометрическими идеями. Поскольку доказательство, аккуратно записанное в [15], составляет почти 600 страниц, в этой статье можно рассказать лишь о некоторых из новых идей (как аналитических, так и геометрических), необходимых, чтобы начать этот труд. На самом деле сформулированная теорема дает повод представить некоторые тенденции современной дифференциальной геометрии: помимо перехода от локального к глобальному (упомянутого здесь лишь для полноты изложения) изучение асимптотических условий на бесконечности на некомпактных пространствах, особые свойства пространств малой размерности, новое появление конформной геометрии, изучение особенностей и, конечно же, стимулирующее влияние математической физики.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ¹⁾

1.1. Термин *пространство-время* будет означать для нас лоренцево многообразие (Σ, γ) размерности 4, где γ — поле билинейных симметрических форм сигнатуры $(-+++)$. Мы будем предполагать его достаточно гладким. Векторы $v \in T\Sigma$, удовлетворяющие условию $g(v, v) > 0$, называются *пространственноподобными*, удовлетворяющие условию $g(v, v) = 0$, — *светоподобными* (или *изотропными*), а удовлетворяющие условию $g(v, v) < 0$ — *временноподобными*. В том же духе, кривая называется *причинной*, если ее вектор скорости временноподобен или светоподобен; гиперповерхность $M \subset \Sigma$ *пространственноподобна*, если все ненулевые векторы из TM пространственноподобны.

¹⁾ Имеются многочисленные введения в ОТО, доступные математике, например, [22, 34, 39], а также [44], сильно устаревшее.

Для того чтобы Σ могло моделировать пространство-время, мы предположим, что Σ ориентировано и ориентировано во времени. Мы говорим, что причинная кривая (отождествляемая с траекторией наблюдателя) на таком многообразии направлена в будущее (соотв. направлена в прошлое), если ее вектор скорости имеет положительную (соотв. отрицательную) проекцию на ось времени. Чтобы избавиться от патологий, связанных с причинностью, мы будем рассматривать здесь лишь случай глобально гиперболического многообразия (Σ, γ) , т.е. мы предполагаем, что в Σ существует гиперповерхность, пересекаемая в точности по одному разу каждой причинной кривой. В частности, это означает, что Σ диффеоморфна $M \times \mathbb{R}$.

1.2. С тензорной точки зрения лоренцева геометрия развивается совершенно аналогично римановой геометрии. Все понятия, которые мы сейчас введем, годятся и для лоренцевых, и для римановых многообразий. (Последние появятся по ходу дела.) В пространстве-времени (Σ, γ) существует и единственно согласованное с метрикой ковариантное дифференцирование с нулевым кручением, обозначаемое через ∇^γ . Оно аналогично связности Леви-Чивиты на римановом многообразии. Мы будем обозначать через R^γ тензор кривизны Римана-Кристоффеля связности ∇^γ . Напомним, что для $p \in \Sigma$, $u, v, w \in T_p \Sigma$

$$R^\gamma(u, v)w = \nabla_U^\gamma(\nabla_V^\gamma W) - \nabla_V^\gamma(\nabla_U^\gamma W) - \nabla_{[U, V]}^\gamma W,$$

где U, V, W обозначают продолжения на окрестность точки p векторов u, v и w соответственно. Обозначим через Ric^γ кривизну Риччи метрики γ . Она получается из кривизны R^γ взятием следа:

$$\text{Ric}^\gamma(u, v) = \text{Trace}(w \mapsto R^\gamma(w, u)v).$$

Наконец, обозначим через $\text{Scal}^\gamma = \text{Tr}_\gamma \text{Ric}^\gamma$ скалярную кривизну метрики γ , равную следу кривизны Ric^γ относительно γ .

Все интегрирования на Σ будут проводиться по мере v_γ , канонически ассоциированной с метрикой γ .

1.3. Уравнения Эйнштейна суть внутренние уравнения, которые в наших обозначениях записываются в виде

$$\text{Ric}^\gamma - \frac{1}{2} \text{Scal}^\gamma \gamma = 8\pi T, \quad (1.4)$$

где левая часть равенства — тензор Эйнштейна метрики γ (зависающий лишь от геометрии), а T обозначает тензор энергии-импульса, определяемый физическим содержанием пространства-времени. Например, в случае электромагнитного поля, представленного внешней

дифференциальной 2-формой ω , тензор энергии-импульса T^ω принимает вид $T^\omega = \omega \cdot \gamma \omega - \frac{1}{4} |\omega|_\gamma^2$, где $\cdot \gamma$ обозначает произведение, свернутое один раз при помощи лоренцевой метрики γ , а $|\cdot|_\gamma$ — норму, индуцированную метрикой γ . В случае вакуума ясно, что $T \equiv 0$, и уравнения Эйнштейна упрощаются, поскольку, взяв след в уравнении (1.4), мы получаем, что $\text{Ric}^\gamma = 0$. Таким образом, *вакуумные пространства-времени суть в точности те, кривизна Риччи которых равна нулю*. Один из возможных подходов к уравнениям Эйнштейна в вакууме (придуманный Давидом Гильбертом, см. [24]) — рассматривать их как уравнение в вариациях с компактным носителем на функционал $\gamma \mapsto S(\gamma) = \int_\Sigma \text{Scal}^\gamma v_\gamma$. (Этот функционал часто называют *гравитационным потенциалом* пространства-времени.)

1.5. На многообразии $\Sigma = \mathbb{R}^4$ с глобальной системой линейных координат (t, x, y, z) метрика Минковского записывается в виде $\epsilon = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. (Заметим, что $(\mathbb{R}^4, \epsilon)$ — модель пространства-времени, в которой единицы выбраны так, что скорость света равна 1.) Без труда можно заключить, что ковариантное дифференцирование, ассоциированное с ϵ , есть обычное дифференцирование в $\mathbb{R}^4$ и что кривизна этого лоренцева многообразия тождественно нулевая. Таким образом, *пространство-время Минковского есть в точности решение уравнений Эйнштейна в вакууме, глобально определенное на $\mathbb{R}^4$* .

Причинные кривые, выходящие из точки p пространства-времени Минковского, заполняют полы прошлого и будущего светового конуса с вершиной в точке p , полученного параллельным переносом квадратичного конуса, определенного метрикой ϵ , с вершиной в начале координат O : $C^O = \{v \mid v \in \mathbb{R}^4, \epsilon(v, v) = 0\}$. Это распределение конусов характеризует конформный класс метрики Минковского, т. е. определяет ее с точностью до умножения на функцию.

Группой симметрии пространства Минковского является *группа Пуанкаре*. Это полупрямое произведение шестимерной *группы Лоренца* на *группу сдвигов* пространства $\mathbb{R}^4$. Таким образом, размерность группы Пуанкаре равна 10 — это максимальная возможная размерность группы изометрий четырехмерного лоренцева многообразия. Группа конформных преобразований пятнадцатимерна и содержит еще *гомотетии* и *инверсии*. Ее иногда называют *конформной группой Пуанкаре*. Базис ее алгебры Ли состоит из следующих векторных полей на $\mathbb{R}^4$: четырех постоянных векторных полей $\partial/\partial t$ (временноподобного, направленного в будущее), $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ (все три пространственноподобные), шести векторных полей, порождающих преобразования Лоренца: $\Omega_{xt} (= t \partial/\partial x + x \partial/\partial t)$, Ω_{yt} , Ω_{zt} (их тип

зависит от точки) и $\Omega_{xy} (= x \partial/\partial y - y \partial/\partial x)$, Ω_{xz} , Ω_{yz} (все пространственноподобные), поля Лиувилля $L = t \partial/\partial t + x \partial/\partial x + y \partial/\partial y + z \partial/\partial z$ (переменного типа) и обратных трансляций $I_t (= 2tL + (x^2 + y^2 + z^2 - t^2) \partial/\partial t)$ (времениподобное, ориентированное в будущее поле), $I_x (= -2xL + (x^2 + y^2 + z^2 - t^2) \partial/\partial x)$, I_y и I_z (все три поля пространственноподобные).

1.6. Функция $t: (\mathbf{R}^4, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}$, как подсказывает ее обозначение, является *функцией времени*. Это значит, что ее поверхности уровня пространственноподобны, или, что эквивалентно, ее дифференциал dt удовлетворяет условию $\epsilon^{-1}(dt, dt) < 0$. (Для метрики γ через γ^{-1} обозначается метрика, естественно индуцированная на ковекторах. Обозначение напоминает о том, что ее матрица $(\gamma^{\mu\nu})$, записанная в координатах (x^μ) , обратна матрице $(\gamma_{\mu\nu})$ метрики γ .)

Полезно выразить метрику Минковского ϵ в обычных сферических координатах (r, θ, φ) в пространстве $M_0 = \{0\} \times \mathbf{R}^3$, введя функции $u = t - r$ и $v = t + r$. Имеем $\epsilon = -dudv + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Заметим на будущее, что функции u и v удовлетворяют *уравнению эйконала* $\epsilon^{-1}(du, du) = \epsilon^{-1}(dv, dv) = 0$ (поэтому их часто называют *оптическими функциями*), а также условию нормализации $\epsilon^{-1}(du, dv) = -2$. Поверхностями уровня функций u и v являются соответственно полы будущего и прошлого световых конусов.

Следует заметить, что сферы с центрами в $O_t \in M_t$ для $t > 0$, соответствующие евклидовой метрике e_t , могут быть получены как пересечение световых конусов $C^{O_t'}$ с центрами в $O_{t'} \in M_{t'}$, иначе говоря, как слои слоения коразмерности 2, определенного оптической функцией u и функцией t .

1.7. Перейдем к описанию общего пространства-времени. Для того чтобы лучше понять природу уравнений Эйнштейна, полезно явно их выписать, выбрав локальную систему координат (x^μ) в окрестности точки p :

$$\begin{aligned}
 (\text{Ric}^\gamma)_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \gamma^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\beta}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \right) \\
 & + \sum_{\alpha, \beta=0}^3 (\Gamma_\mu^{\beta\gamma} \Gamma_\nu^{\alpha\gamma} - \Gamma_\beta^{\alpha\gamma} \Gamma_\mu^{\gamma\nu}), \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

где символы Кристоффеля $(\Gamma_\mu^{\alpha\gamma})$ вычисляются по коэффициентам

$(\gamma_{\alpha\beta})$ метрики по (классической) формуле

$$\Gamma_{\mu}^{\alpha}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=0}^3 g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \gamma_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right).$$

Из формулы (1.8) следует, что *всякое кокасательное направление ξ является характеристическим*, поскольку главный символ оператора, ставящего лоренцевой метрике γ в соответствие ее кривизну Риччи $\text{Ric}^{\gamma} = \rho$, аннулируется всеми билинейными симметрическими формами $\xi \circ \eta$. (Здесь η — произвольная 1-форма и $\circ$ — симметрическое умножение.) Эти направления вырождения суть аналитический след действия группы диффеоморфизмов пространства-времени на пространстве лоренцевых метрик. Инфинитезимальная версия соотношения естественности $\text{Ric}^{\psi^*\gamma} = \psi^*(\text{Ric}^{\gamma})$, верная для любого диффеоморфизма ψ , утверждает, что для любого векторного поля X при действии оператора линеаризованной кривизны Риччи на $\mathcal{L}_X \gamma$ мы получаем $\mathcal{L}_X \rho$, т.е. дифференциальный оператор *первого порядка* на множестве векторных полей X .

Пусть координаты связаны с метрикой условием *гармоничности*

$$\sum_{\alpha, \beta=0}^3 g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha}^{\mu}{}_{\beta} = 0$$

(это значит, что система координат, рассматриваемая как отображение открытого подмножества U многообразия (Σ, γ) в $(\mathbf{R}^4, \epsilon)$, является гармонической.) Тогда легко видеть¹⁾, что единственным членом в (1.8), содержащим производные второго порядка, остается первое слагаемое, главный символ которого равен $-\gamma^{-1}(\xi, \xi)$. В такой системе координат уравнения Эйнштейна образуют гиперболическую систему в диагональной форме. Ивонн Шоке-Брюа установила в 1952 г. существование локального решения задачи Коши (с начальными данными на пространственноподобной гиперповерхности) для уравнений Эйнштейна, см. [11]. Она строго доказала при этом существование гармонических координат и опиралась в своих рассуждениях на теорию гиперболических уравнений, развитую Жаном Лерэ; см. [29].

Необходимость налагать на координаты условия, в которые входит еще не известная нам метрика, составляет одну из принципиальных трудностей этой задачи. Другая возникает в силу того, что для оценки векторных или тензорных величин нужно использовать

¹⁾Эта мысль была сформулирована еще Эйнштейном.

скалярное произведение, а оно само становится известно лишь после решения задачи. Это принуждает наложить на решения чрезвычайно строгие ограничения. Такие же трудности возникают в задачах, связанных с кривизной Риччи (см. обзор последних результатов в римановом случае в [8]). Специфика лоренцева случая заключается в том, что задача имеет смысл лишь для некомпактных пространств и искомое поле обладает заданным асимптотическим поведением (см. [4]).

2. МЕТРИКИ ШВАРЦШИЛЬДА

2.1. Известно лишь небольшое количество семейств точных решений уравнений Эйнштейна. Все они обладают специальными симметриями или получаются из специальных метрик простыми геометрическими конструкциями. Исторически первым найденным семейством решений были метрики Шварцшильда ϵ_m^S , введенные Карлом Шварцшильдом в 1916 г. для того, чтобы описать гравитационное поле вне сферической звезды, см. [42]. В описанных выше координатах в $\mathbf{R}^4$ они имеют вид

$$\epsilon_m^S = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.2)$$

где m — положительная или нулевая константа. Очевидно, что $\epsilon_0^S = \epsilon$.

Метрика ϵ_m^S а priori определена на $\Sigma_m^e = \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^3 - \bar{B}_{2m})$, где через B_r обозначается открытый шар радиуса r с центром в начале координат пространства $\mathbf{R}^3$.

На самом деле ϵ_m^S является решением уравнений Эйнштейна и во внутренней области $\Sigma_m^i = \mathbf{R} \times (B_{2m} - \{0\})$. (Лоренцева) геометрия этой области иная, чем у Σ_m^e , поскольку там времениподобные кривые достигают особенности $r = 0$ за конечное время. Это значит, что пространство-время неполно (см. обсуждение этого вопроса в п. 2.4).

2.3. Метрики Шварцшильда обладают следующими свойствами симметрии:

— они статичны, т.е. для них существует пространственноподобное поле векторов Киллинга (традиционное название инфинитезимальных симметрий), причем распределение, ортогональное этому полю, интегрируемо. Это поле является градиентом относительно ϵ_m^S функции t (оно даже параллельно относительно ковариантного дифференцирования Леви-Чивиты, связанного с метрикой ϵ^S);

— они обладают сферической симметрией, т.е. инвариантны относительно действия группы SO_3 на пространственных переменных

(x, y, z) пространства $\mathbf{R}^4$. Орбиты этого действия — подмногообразия с постоянными r и t .

Эти свойства, как установил Джордж Биркгофф, полностью характеризуют метрики Шварцшильда.

Теорема (см. [5]). *Всякое статичное пустое пространство-время, обладающее сферической симметрией, такое, что функция, измеряющая площадь орбит группы SO_3 , является гладкой, будет пространством-временем Шварцшильда.*

2.4. Однако наиболее интересное для изучения явление — особенности этой метрики (см. историческое обсуждение в [25, р. 231–239]). Выражение (2.2) для ϵ_m^S имеет а priori две особенности: одну при $r = 0$, другую при $r = 2m$. Когда $r \rightarrow 0$ в Σ_m^i , ϵ_m^S действительно имеет особенность при $r = 0$, так как норма тензора кривизны в этом пределе стремится к бесконечности.

Особенность при $r = 2m$ лишь кажущаяся, это просто особенность системы координат. Можно пополнить пространство-время до максимального расширения Σ_m^S , на которое продолжается ϵ_m^S . Это показал Мартин Крускал в [28] (см. детальное обсуждение в [22]). Поскольку Σ_m^S содержит как Σ_m^i , так и Σ_m^e , пространства-времени Шварцшильда (Σ_m^S, ϵ_m^S) не являются геодезически полными.

Часть этого расширения можно осуществить следующим образом: положим $r^* = r + 2m \log(r - 2m)$, а затем определим оптические координаты $u = t - r^*$ и $v = t + r^*$. Теперь можно определить две области, в которых выражение ϵ_m^S в переменных (u, r, θ, φ) , с одной стороны, и в переменных (v, r, θ, φ) , с другой стороны, определено для любого значения r . В этих двух областях подмногообразие $r = 2m$ играет особую роль: оно позволяет светоподобным или времениподобным кривым проникать из области $r > 2m$ в область $r < 2m$, если они направлены в первом случае в прошлое, а во втором случае в будущее. Это точное описание феномена *черной дыры* и симметричной ей во времени *белой дыры*. Поверхность, разделяющая эти две различные области (она действует как полупроницаемая мембрана), называется *горизонтом событий*.

2.5. Последнее свойство метрик Шварцшильда, заслуживающее упоминания здесь, — поведение их на (пространственной) бесконечности. Фактически ϵ_m^S является *асимптотически плоской* для любого $m \geq 0$. Это значит, что риманова метрика g_m , индуцированная на пространственноподобных гиперповерхностях $M_t = \{t\} \times \mathbf{R}^3$, удовлетворяет при $r \rightarrow \infty$ следующему условию: на M_t существует такая евклидова метрика e , что $g_m - e = O(r^{-1})$. Разность $D^{g_m} - D^e$ ковариантных дифференцирований Леви-Чивиты метрик g_m и e ведет

себя как $O(r^{-2})$; наконец, кривизна метрики g_m удовлетворяет условию $|R^g_m|_e = O(r^{-3})$.

Исследуя поведение на бесконечности, можно также интерпретировать константу m , появляющуюся в определении ϵ_m^S . Поведение радиальной геодезической $s \mapsto (r(s))$ этой метрики при достаточно больших r описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{m}{r^2} + O(r^{-3}).$$

Аналогичное уравнение описывает поведение пробной частицы в *ньютоновом* гравитационном поле, созданном телом массы m . Таким образом, константа m отождествляется с массой звезды, гравитационное поле которой мы моделируем¹⁾. Мы вернемся к тому обстоятельству, что константа m должна быть выбрана *положительной*, в разд. 4.

3. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА КАК ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Для того чтобы исследовать нелинейную гиперболическую систему уравнений Эйнштейна в пространстве-времени (Σ, γ) , предполагаемом глобально гиперболическим, естественно рассматривать задачу Коши для нехарактеристических начальных данных, т. е. заданных на пространственноподобной гиперповерхности. Эту точку зрения предложил Андрэ Лихнерович (см. [30]), но ее систематизация часто приписывается Роберту Арновитту, Стэнли Дезеру и Чарльзу В. Мизнеру.

Рассмотрим на (Σ, γ) времениподобную функцию t . Обозначим ее градиент относительно γ через F . Введем обозначение $i_t: M_t \rightarrow \Sigma$ для слоения на Σ сд слоями-подмногообразиями точек времени t . Будем называть его *временным слоением*. Кроме того, обозначим через $g_t = i_t^*(\gamma)$ первую фундаментальную форму многообразия M_t , а через $k_t = -\frac{1}{2}i_t^*(\mathcal{L}_\gamma F)$ его вторую фундаментальную форму. Ковариантное дифференцирование Леви-Чивиты метрики g_t будет обозначаться через D^t , тензор кривизны Римана-Кристоффеля — через R^t , кривизна Риччи — через Ric^t и скалярная кривизна — через Scal^t . Когда речь будет идти о времени $t = 0$, мы будем опускать индекс 0.

Временное слоение (M_t) позволяет построить диффеоморфизм многообразия Σ на $\mathbf{R} \times M$, такой, что $\gamma = -\phi_t^2 dt^2 + g_t$. Принято называть функцию ϕ_t , определенную на M_t формулой $\phi_t = (-\gamma(F, F))^{-1/2}$,

¹⁾ Тот факт, что m выражена в единицах длины, объясняется нашим выбором единиц измерения.

функцией промежутка, ассоциированной с функцией t (lapse function). Легко видеть, что $k_t = -\frac{1}{2}\phi_t^{-1} \partial g / \partial t$.

3.2. Важная особенность излагаемого подхода — перевод геометрии пространства (Σ, γ) на язык геометрии кривой $t \mapsto (g_t, k_t, \phi_t)$ в произведении касательного расслоения над пространством римановых метрик на M на тривиальное расслоение.

Часть этого перевода — выражение общих структурных уравнений гиперповерхности, которые дают составляющие кривизны многообразия (Σ, γ) при разложении $T\Sigma = \mathbf{R} \cdot F \oplus TM$. С помощью уравнений Гаусса находятся составляющие кривизны R^γ , не содержащие F , а с помощью уравнений Кодацци — те, которые содержат F по одному разу. Эти два семейства уравнений помимо тензора кривизны многообразия (Σ, γ) включают лишь величины, заданные на M в терминах g и k . Из последнего семейства уравнений находятся компоненты кривизны R^γ , содержащие F дважды. В уравнения этого семейства входит 1-струя отображения $t \mapsto k_t$.

3.3. Поскольку из уравнений Эйнштейна нам известен лишь след тензора R^γ , нужно взять след всех упомянутых выше общих уравнений, кроме последнего, так как в него входит только Ric^γ . Получающиеся при этом уравнения можно разделить на две группы. Первую из этих групп составляют так называемые *эволюционные уравнения*. Они имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2\phi k_t, \\ \frac{\partial k}{\partial t} = -Dd\phi + \phi(\text{Ric}^t + (\text{Tr}_{g_t} k_t)k - 2k_{t \cdot g_t} k_t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Уравнения второй группы, *уравнения ограничения*, имеют вид

$$\begin{cases} \delta^{g_t} k_t - d(\text{Tr}_{g_t} k_t) = 0, \\ \text{Scal}^t - |k_t|_{g_t}^2 + (\text{Tr}_{g_t} k_t)^2 = 0, \end{cases}$$

где δ^g обозначает кодифференциал поля билинейных симметрических форм, т. е. след ковариантного дифференцирования метрики g .

Эта терминология требует объяснения:

— эволюционные уравнения определяют эволюцию кривой $t \mapsto (g_t, k_t)$, так как задают ее вектор скорости в каждый момент времени t ;

— уравнения ограничения получили это наименование, потому что если они выполняются на $M = M_0$, то будут выполняться и на поверхности M_t для любого t из области определения кривой $t \mapsto (g_t, k_t)$.

3.5. Артур М. Фишер и Джеррольд Е. Марсден показали, что этот подход можно рассматривать до некоторой степени как нахождение геодезических в пространстве римановых метрик на M при соответствующих ограничениях; см. [19]. Из-за этого такая точка зрения иногда называется *гамильтоновым формализмом*.

Они получили таким способом новое доказательство локальной теоремы существования; см. [20]. Этот подход Кристодулу и Клайнерман использовали в [15].

3.6. Следует заметить, что в эволюционных уравнениях 13 неизвестных (6 для g_t , 6 для k_t и 1 для ϕ), тогда как уравнений у нас только 12. У нас осталась свобода в выборе времениподобной функции t .

Задание временного слоения (M_t) определяет функцию t с точностью до замены переменных. А priori кажется, что наиболее естественно выбрать $\phi \equiv 1$. Такой выбор (обычный в римановой геометрии) означает, что нормальное экспоненциальное отображение многообразия M рассматривается как координата в его трубчатой окрестности. Здесь нужно быть осторожным, потому что из уравнений (3.4) вытекает, что если $\phi \equiv 1$, то

$$\frac{\partial(\text{Tr}_{g_t} k_t)}{\partial t} = |k_t|_{g_t}^2 \geq \frac{1}{3} (\text{Tr}_{g_t} k_t)^2,$$

что приводит к взрыву за конечное время, так как по лемме Гронуолла $\text{Tr}_{g_t} k_t$ положительно по крайней мере в одной точке многообразия M .

Из-за этого особую роль играют такие подмногообразия, вторая фундаментальная форма k которых имеет нулевой след. (В лоренцевой геометрии говорят о *максимальных* подмногообразиях в противоположность минимальным многообразиям римановой геометрии.) Заметим, что из второго уравнения ограничения следует, что максимальное подмногообразие вакуумного пространства-времени обязательно имеет положительную скалярную кривизну.

Кристодулу и Клайнерман работают с максимальными подмногообразиями, т.е. им нужно выбрать специальную времениподобную функцию. Возможность расслоить пространство-время на максимальные пространственноподобные гиперповерхности, установленная в [2], позволяет устранить неопределенность, остававшуюся в формулировке уравнений Эйнштейна для вакуума. В их ситуации, т.е. в возмущенном пространстве Минковского, удобно поставить такое условие на бесконечности, что задача, решением которой является функция ϕ , станет эллиптической. Обычно требуют, чтобы $\phi \rightarrow 1$ на бесконечности на гиперповерхности M , которую предполагают диффеоморфной внешности открытого шара в $\mathbb{R}^3$. Эквивалентное тре-

бование — чтобы функция t стремилась к криволинейной абсциссе интегральных кривых поля F , исходящих из сколь угодно далеких точек многообразия M . Мы разовьем эту тему в разд. 4.

Предложение (вакуумное пространство-время при заданной максимальной гиперповерхности). Пусть дано трехмерное риманово многообразие (M, g) и поле симметричных билинейных форм k , определенное на M и удовлетворяющее уравнениям ограничения

$$\begin{cases} \text{Tr}_g k = 0, \\ \delta^g k = 0, \\ \text{Scal}^g = |k|_g^2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Тогда для того чтобы решить уравнения Эйнштейна с начальными данными (M, g, k) , нужно найти продолжение этих начальных данных, т. е. кривую $t \mapsto (g_t, k_t)$ и кривую со значениями в функции $t \mapsto \phi_t$. Эти кривые — решения эволюционных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2\phi k_t, \\ \frac{\partial k}{\partial t} = -Dd\phi + \phi(\text{Ric}^t - 2k_{t \cdot g_t} k_t) \end{cases} \quad (3.8)$$

и уравнения

$$\Delta_{g_t} \phi = -|k|_{g_t}^2 \phi,$$

где Δ_g обозначает оператор Лапласа-Бельтрами метрики g .

Искомое пространство-время, решение уравнений Эйнштейна для вакуума, расслоенное на максимальные гиперповерхности, имеет вид $(I \times M, -\phi_t^2 dt^2 + g_t)$, где I обозначает интервал существования эволюционного уравнения.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКИЕ МЕТРИКИ

4.1. Решение, которое ищут Клайнерман и Кристодулу, является (конечным) возмущением пространства Минковского, но дополнительно требуется, чтобы оно было *асимптотически плоским*. Мы ввели это понятие в разд. 2 в связи с метриками Шварцшильда. Фактически в их работе используется несколько более слабая версия этого требования (см. п. 4.5). Это ограничение обосновывается следующими рассуждениями.

Для асимптотически плоского пространства-времени (моделирующего изолированную систему), можно, следуя Арновитту-Дезеру-

Мизнеру [1], определить понятие массы¹⁾. По определению асимптотически плоское пространство-время содержит пространственноподобную гиперповерхность (M, g) , обладающую следующими свойствами: у нее имеется некомпактное подмножество, диффеоморфное внешности открытого шара в $(\mathbb{R}^3, e)$ (обозначим соответствующий диффеоморфизм через ψ), причем для любого постоянного векторного поля X на $\mathbb{R}^3$ выполняются следующие оценки:

$$|\psi^*g - e|_e = O(r^{-1}), \quad |\mathcal{L}_X(\psi^*g)|_e = O(r^{-2}), \quad |\mathcal{L}_X\mathcal{L}_X(\psi^*g)|_e = O(r^{-3})$$

(это условия на первую фундаментальную форму g) и

$$|\psi^*k|_e = O(r^{-2}), \quad |\mathcal{L}_X(\psi^*k)|_e = O(r^{-3})$$

(это условия на вторую фундаментальную форму k). Эти условия убывания гарантируют, что тензоры кривизны метрик g и γ ведут себя, как $O(r^{-3})$ на M .

4.2. Пусть пространство-время (Σ, γ) асимптотически плоско. Его масса m_g определяется формулой

$$m_g = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \int_{S_r} (\delta^e(\psi^*g) - d(\text{Tr}_e \psi^*g))(N) a_e,$$

где через N обозначено поле нормалей к евклидовой сфере S_r , а a_e — элемент площади этой сферы. Легко видеть, что масса метрики Шварцшильда ϵ_m^S равна в точности m .

В общей теории относительности существуют и другие понятия массы, как, например, *масса Бонди*. Она тоже определяется при помощи перехода к пределу, но на этот раз по 2-сферам, проведенным в изотропных поверхностях.

Одним из важнейших вопросов в теории асимптотически плоских вакуумных пространств или пространств, удовлетворяющих *условию положительности энергии* (т.е. для которых $T(v, v) \leq 0$ для любого времениподобного вектора v), был такой: является ли масса обязательно положительной величиной? Эту проблему решили Ричард Шён и Шин Тун Яу в 1978 г. (см. обзор в [26]).

Теорема (о положительности массы [40, 41]). *Если асимптотически плоское трехмерное риманово многообразие M имеет положительную скалярную кривизну, то $m_g \geq 0$ и $m_g = 0$ в том и только том случае, когда (M, g) изометрично $(\mathbb{R}^3, e)$.*

¹⁾ Может показаться парадоксальным, что в теории гравитации, каковой является общая теория относительности, трудно определить понятие массы. На самом деле единственное известное понятие массы глобально, неаддитивно и применимо лишь для изолированных систем. Поиск квазилокального определения массы постоянно является темой активных исследований в общей теории относительности.

Содержащееся в [40] и [41] доказательство проводится от противного с использованием недавних результатов о существовании минимальных устойчивых поверхностей в трехмерном многообразии с неотрицательной скалярной кривизной. Конструктивное доказательство содержится в [45] (строгое изложение см. в [36]). Там показано, что массу можно отождествить с энергией (т.е. с интегралом Дирихле) поля спиноров, удовлетворяющего подходящим асимптотическим условиям.

Весьма важное следствие этой теоремы — *если на вакуумное пространство-время наложить слишком сильные условия плоскости на бесконечности, оно непременно вырождается в пространство-время Минковского*.

4.3. Следуя обычному в теории относительности отождествлению энергии и массы, m_g часто называют *энергией*. Это оправдывается следующими рассуждениями.

Тем же способом, что и m_g , можно определить *момент на бесконечности* P_γ для любого асимптотически плоского вакуумного пространства-времени, лежащий в двойственном пространстве к алгебре Ли группы движений пространства $(\mathbf{R}^3, e)$, положив для любого киллингова поля векторов X

$$P_\gamma(X) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (\psi^* k - (\text{Tr}_e(\psi^* k))e)(N, X) a_e.$$

Существование пределов непосредственно следует из предположений об убывании, заложенных в определении асимптотически плоского пространства-времени, и из преобразования разности интегралов по сферам двух различных радиусов в интеграл по объему, подынтегральное выражение в котором подчиняется уравнению ограничения (3.8).

По традиции в так определенном моменте на бесконечности выделяют его *линейную* часть P_γ^l , вычисляемую по постоянным полям на $\mathbf{R}^3$, порождающим сдвиги, и *угловую* часть P_γ^a , вычисляемую по инфинитезимальным вращениям пространства $(\mathbf{R}^3, e)$. Можно проверить, что сформулированные определения, зависящие на первый взгляд от выбора евклидовых координат на бесконечности, на самом деле, благодаря предположениям об убывании на бесконечности¹⁾, от него не зависят. Поэтому из m_g и P_γ^l можно составить 4-вектор. Нужно заметить, что требования убывания не исключают возможно-

¹⁾ Внутреннее математическое определение требует введения понятия асимптотически киллингова векторного поля на M .

сти осцилляций на бесконечности величин g и k при условии, что эти осцилляции не слишком сильные.

Используя переформулировку (3.8) уравнений Эйнштейна, можно показать, что в асимптотически плоском вакуумном пространстве-времени условия убывания на бесконечности выполняются на всех поверхностях M_t и что величины m_g и P_γ сохраняются.

4.4. Клайнман и Кристодулу ввели в [15] такое определение.

Определение. Начальные данные пространства-времени (M, g, k) называются *сильно асимптотически плоскими*, если существуют положительное число m и диффеоморфизм дополнения к компактному множеству в M на внешность евклидова шара в $(\mathbb{R}^3, t)$, такие, что для любого постоянного векторного поля X на $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X)^i \psi^* g &= (\mathcal{L}_X)^i ((1 + 2m/r)e) + o(r^{-3/2-i}), & 1 \leq i \leq 4, \\(\mathcal{L}_X)^i \psi^* k &= o(r^{-5/2-j}), & 1 \leq j \leq 3.\end{aligned}$$

Из определения тривиально следует, что для сильно асимптотически плоских данных (M, g, k) величины m_g и P_γ корректно определены, а также что $m_g = v$ и $P_\gamma = 0$ (γ обозначает продолжение (M, g, k)). Условие $P_\gamma = 0$ означает, что временное слоеение, о котором идет речь, максимально, и его физический смысл состоит в том, что система имеет «фиксированный гравитирующий центр».

5. КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5.1. В этом разделе мы напомним некоторые свойства геометрии пространства-времени, зависящие только от конформного класса метрики. Эти свойства важны с физической точки зрения, поскольку свойство какой-либо величины быть конформно инвариантной интерпретируется как ее независимость от размерности.

Мы уже заметили, что часть геометрии, связанная со световыми конусами, зависит только от конформного класса лоренцевой метрики.

После работ Пенроуза стало традицией добавлять к асимптотически плоским пространствам-временам *конформную компактификацию* на бесконечности. Однако это создает неудобство, так как для гладкости компактификации нужно наложить на кривизну более строгие условия убывания, чем это было бы разумно.

5.2. Некоторая часть тензора кривизны Римана-Кристоффеля R^γ метрики γ фактически зависит только от ее конформного класса.

Начнем определение этой части с некоторых линейно-алгебраических рассуждений. На фиксированном n -мерном лоренцевом (или римановом) векторном пространстве V , под которым мы, безусловно, подразумеваем касательное пространство к лоренцеву или риманову многообразию в некоторой точке, рассмотрим пространство $\mathcal{R}V$ тензоров, обладающих всеми алгебраическими симметриями тензора кривизны. В силу антисимметричности кривизны и первого тождества Бьянки сейчас принято рассматривать $\mathcal{R}V$ как ортогональное дополнение к $\Lambda^4 V^*$ в $S^2 \Lambda^2 V^*$. Таким образом, кривизну Римана–Кристоффеля можно интерпретировать как эндоморфизм пространства 2-форм. Под действием ортогональной группы (или группы Лоренца) $\mathcal{R}V$ расщепляется на три неприводимых подпространства (если $n \geq 4$), откуда возникает разложение тензора кривизны Римана–Кристоффеля $R^\gamma = S^\gamma + Z^\gamma + W^\gamma$, где

(i) S^γ обозначает компоненту, соответствующую тривиальному представлению; это кривизна пространства постоянной кривизны с той же скалярной кривизной, что и у R^γ , т.е. S^γ кратно $\text{Id}_{\Lambda^2 V}$;

(ii) Z^γ обозначает компоненту, соответствующую представлению, изоморфному пространству $S_0^2 V$ симметрических тензоров с нулевым следом на V ; этот оператор вполне определяется частью кривизны Риччи, имеющей нулевой след (эта часть равна нулю, если размерность равна 2);

(iii) W^γ обозначает «оставшуюся» часть кривизны, т.е. ядро отображения свертки, переводящего кривизну Римана–Кристоффеля в кривизну Риччи; эта часть называется *конформной кривизной Вейля*, а элементы этого пространства называются *тензорами Вейля* (такой компоненты нет в размерностях два и три).

Следовательно, можно сказать, что в вакуумных пространствах-времени кривизна Римана–Кристоффеля совпадает с кривизной Вейля.

Сказанное не объясняет, почему W^γ называется *конформной кривизной*¹⁾. Чтобы это понять, нужно сделать конформную замену метрики, т.е. заменить метрику γ на $a^2 \gamma$, где a — положительная функция. Можно проверить, что при этом $W^{a^2 \gamma} = W^\gamma$. Это вычисление не полностью алгебраическое²⁾, нужно считать производные. Следует

¹⁾ Следует отметить, что Герман Вейль ввел тензор, который носит его имя, когда предпринял попытку свести воедино теорию гравитации и теорию электромагнетизма, обобщив лоренцеву геометрию, использующуюся в общей теории относительности, до некоторой конформной лоренцевой геометрии. Эта попытка не удалась.

²⁾ Тем не менее чисто алгебраическое рассуждение позволяет предвидеть его результат. Функция a должна присутствовать в $W^{a^2 \gamma}$ в виде своей 2-струи,

заметить, что эта формула верна лишь для естественно определенной кривизны Вейля, для тензора типа $(3, 1)$, а не для его вариантов, получающихся сверткой с метрикой или с обратной ей, — в этих случаях появляются степени α . Из этого свойства, очевидно, следует тот факт, что в размерности, большей или равной 4, метрика γ локально конформно эквивалентна плоской метрике тогда и только тогда, когда ее конформная кривизна W^γ тождественно равна нулю.

5.3. В ориентированном n -мерном векторном пространстве V , снабженном лоренцевой метрикой γ , существует и другая геометрическая величина, обладающая интересными конформными свойствами. Это оператор Ходжа $*_\gamma: \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{n-k} V^*$, определенный следующим образом: для $\alpha, \beta \in \Lambda^k V^*$

$$\alpha \wedge (*_\gamma \beta) = \gamma^{-k}(\alpha, \beta) v_\gamma.$$

Когда размерность равна 4, $*_\gamma$ — ортогональный автоморфизм пространства $\Lambda^2 V^*$, квадрат которого равен $-\text{Id}$. Следовательно, он задает комплексную структуру. (Напротив, для евклидовой метрики $*$ является инволюцией, позволяющей определить понятия положительной и отрицательной фундаментальной 2-формы в калибровочных теориях на четырехмерных многообразиях.) В действительности $*_\gamma|_{\Lambda^2 V^*}$ зависит только от конформного класса метрики γ .

В размерности 4 тензоры Вейля можно определить как элементы из $S^2 \Lambda^2 V^*$ с нулевым следом, коммутирующие с $*_\gamma$ — все эти условия конформно инвариантны.

5.4. Существует и другой способ рассматривать тензоры кривизны, опирающийся на их свойства симметрии: можно вложить RV в $S^2 S^2 V^*$. Элементу $R \in RV$ ставится в соответствие эндоморфизм $\bar{R}: h \mapsto \bar{R}(h)$. Этот эндоморфизм принимает на двух векторах v и w значение $\bar{R}(h) = \sum_{i,j=1}^n R_{ikj}^i h_{lm} g^{km} v^i w^j$; см. [10].

С помощью этого подхода получают две конструкции, полезные для доказательства теоремы Клайнермана–Кристодулу. (С этого момента мы будем отождествлять пространство V с касательным пространством к пространству–времени.)

Пусть f — касательный вектор (предполагаемый времениподобным и направленным в будущее, чтобы было возможно отождествить его с мировым вектором наблюдателя.) Любая 2-форма ω (моделирующая электромагнитное поле) разлагается на электрическую составляющую

принадлежащей $S^2 V$. Таким образом, эквивариантного относительно действия ортогональной группы отображения из $S^2 V$ в пространство тензоров Вейля не существует.

вляющую E и магнитную составляющую B . Они определяются соответственно как $E^W = i_f \omega$ и $H^W = i_f (*\omega)$. Далее определяется электромагнитное разложение тензора Вейля относительно f как пара симметрических тензоров с нулевым следом (E^W, H^W) , где $E^W = \overline{W}(f \otimes f)$, а $H^W = (*\overline{W})(f \otimes f)$. Легко проверить, что f лежит в ядрах операторов E^W и H^W , т.е. можно считать, что носителем этих отображений является нормальное пространство к f . Эти формы определяют W .

Всякому тензору Вейля W можно поставить в соответствие его тензор Беля-Робинсона Q^W , определяемый формулой

$$Q^W = \frac{1}{2} (\overline{W} \circ \overline{W} + * \overline{W} \circ * \overline{W});$$

см. [4]. Легко видеть, что Q^W принадлежит $S^4 V$ и имеет нулевой след, как показано в [14]. Более того, для любых двух времениподобных векторов f_1 и f_2 , направленных в будущее, выполняется неравенство $Q^W(f_1 f_2, f_1, f_2) > 0$. Следует заметить, что конструкция, ставящая в соответствие тензору Вейля W его тензор Беля-Робинсона, аналогична той, которая ставит в соответствие внешней 2-форме ω ее тензор энергии-импульса T^ω , см. п. 1.3. Эта аналогия будет в дальнейшем использоваться. Поскольку W имеет тип $(3, 1)$, эта конструкция зависит только от конформного класса метрики.

5.5. Кривизна Римана-Кристоффеля R^γ произвольной метрики удовлетворяет также второму тождеству Бьянки:

$$d^{D^\gamma} R^\gamma = 0,$$

где d^{D^γ} — внешний дифференциал 2-форм со значениями в 2-формах. Напомним, что для того, чтобы это понятие имело смысл, нужно выбрать ковариантное дифференцирование (из-за этого и пишут показатель D^γ). Заметим, что d^{D^γ} не является в точности оператором границы, так как в его квадрат входит кривизна метрики γ .

Из уравнений Эйнштейна для вакуума следует, что

$$d^{D^\gamma} (*_\gamma R^\gamma) = 0.$$

Поскольку кодифференциал δ^γ на пространстве внешних дифференциальных 2-форм имеет вид $\delta^\gamma = - *_\gamma \circ d \circ *_\gamma$, это условие, скомбинированное с тождеством Бьянки, утверждает, что кривизна вакуумного пространства-времени гармоническая. Из него, вообще говоря, не следуют уравнения Эйнштейна¹⁾. Однако у него есть двойное

¹⁾ Но в римановом случае при определенных глобальных топологических предположениях они ему эквивалентны.

преимущество: во-первых, оно является нелинейным аналогом уравнений Максвелла для вакуума. (Они утверждают, что электромагнитное поле ω удовлетворяет уравнениям $d\omega = 0$ и $d(*\omega) = 0$.) Во-вторых, оно следует из того, что $d^{D^*}W^\gamma = 0$, поскольку поле Вейля W , замкнутое в этом смысле, автоматически козамкнуто, см. [7], или, что то же самое, $*_\gamma W$ тоже замкнуто.

Эта формулировка подчеркивает важность в нашем контексте оператора d^{D^*} , входящего во второе тождество Бьянки. Клайнман и Кристофидулу широко его использовали. А именно, они опирались на два свойства замкнутых относительно d^{D^*} полей Вейля, связанные с конформными заменами метрики:

— если W — замкнутое поле Вейля, то дивергенция тензора Q^W равна нулю (т.е. $\delta^\gamma Q^W = 0$);

— если W — замкнутое поле Вейля и если ϕ — конформное преобразование пространства (Σ, γ) , такое что $\phi^*\gamma = a^2\gamma$, то $a^{-1}\phi^*W$ тоже замкнутое поле Вейля. (Заметим, что здесь задействована нелинейная зависимость оператора d^{D^*} от γ .)

5.6. Кроме того, условия ограничения (3.7) для начальных данных (M, g, k) *конформно инвариантны* в следующем смысле: для всякой положительной функции b на M решениями первых двух уравнений ограничения, переписанных с использованием D^g , являются $\tilde{g} = b^4g$ и $\tilde{k} = b^{-2}k$. Это позволяет получать решения, удовлетворяющие третьему уравнению, даже если начальные данные ему не удовлетворяли. Нужно взять в качестве b решение скалярного уравнения

$$\Delta^g b + \frac{1}{8} \text{Scal}^g b - |k|_g^2 b^{-5} = 0,$$

с асимптотическими условиями на b , гарантирующими, что метрика остается асимптотически плоской.

5.7. Также полезно рассматривать поля симметрических 2-тензоров как 1-формы со значениями в касательном расслоении. Таким образом, на пространственноподобной гиперповерхности M рассматривают 2-форму со значениями в TM , которая называется *тензором Баха*, $B^g = d^{D^*}(\text{Ric}^g - \frac{1}{4} \text{Scal}^g g)$. Этот тензор удобно рассматривать как билинейную симметричную 2-форму (поскольку M трехмерна). След этой формы равен нулю в силу свойств тензора Риччи, следующих из второго тождества Бьянки. Обращением B^g в нуль характеризуются конформно плоские метрики на трехмерном пространстве. Это поле — другой пример конформно инвариантного поля. Из этого, например, вытекает, что поле Баха B^{g_i} метрик, индуцированных на подмногообразиях M_t метрикой Шварцшильда ϵ_m^S , имеет на беско-

нечности нуль гораздо более высокого порядка, чем у производных метрик g_t .

6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

6.1. Теорема Эмми Нётер утверждает, что *всякой симметрии системы, уравнения поля которой выражают экстремальность некоторого функционала, соответствует закон сохранения*. Первый пример использования этой теоремы в общей теории относительности (данный Эйнштейном; см. [17]), выглядит так: инвариантность гравитационного потенциала $\gamma \mapsto \int_{\Sigma} \text{Scal}^{\gamma} v_{\gamma}$ при диффеоморфизме означает, что

$$\delta^{\gamma}(\text{Ric}^{\gamma} - \frac{1}{2} \text{Scal}^{\gamma} \gamma) = 0. \quad (6.2)$$

Это свойство следует также из второго тождества Бьянки. Оно отражает тот факт, что касательное пространство к орбите метрики под действием диффеоморфизмов лежит в ядре дифференциала гравитационного потенциала на пространстве метрик, поскольку $2\delta^{\gamma}$ — присоединенное действие оператора $X \mapsto \mathcal{L}_X \gamma$, который описывает инфинитезимальное действие диффеоморфизмов.

Согласно уравнениям Эйнштейна, (6.2) означает, что тензор энергии-импульса T тоже имеет нулевую дивергенцию. Этим фактом можно воспользоваться так: если X — поле векторов Киллинга метрики γ (т.е. удовлетворяет условию $\mathcal{L}_X \gamma = 0$ или, что эквивалентно, симметричная часть его ковариантной производной нулевая), то дифференциальная 1-форма $i_X T$ имеет нулевую дивергенцию, т.е. если M_t означает образ гиперповерхности Коши M , то $\int_{M_t} *_{g_t}(i_X T) = \int_{M_t} T(X, F) v_{g_t}$, не зависит от t . Этот закон сохранения позволяет оценить функцию по начальным условиям. Именно этим способом, взяв за X конформное поле Киллинга I_t , Катлин Моравец (см. [35]) установила, что электромагнитные волны — решения уравнений Максвелла в пространстве Минковского — принадлежат классу L^2 . Этот подход систематически применяется в [14] к линейным уравнениям. Здесь предполагается обобщить его на нелинейный случай.

6.3. Поскольку мы занимаемся вакуумными пространствами-временами, т.е. $T \equiv 0$, эти рассуждения нельзя применить буквально. Одна из важных идей Клайнермана и Кристодулу — *заменить T на тензор Беля-Робинсона Q^W замкнутого поля Вейля W* . Они используют обращение в нуль его кодифференциала для того, чтобы получить оценки изучаемого поля. Чтобы получить дифференциальную 1-форму, двойственная которой относительно действия оператора Ходжа интегрируема по гиперповерхности, нужно свернуть это поле с

тремя векторными полями. Тот факт, что след тензора Q^W равен нулю, позволяет использовать инфинитезимальные конформные преобразования X , также называемые *конформными полями Киллинга*. Это такие поля X , что $\mathcal{L}_X \gamma$ кратна γ или, что то же самое, часть тензора $D^\gamma X$ с нулевым следом равна нулю. Следовательно, для всякого замкнутого поля Вейля W и для всяких конформных полей Киллинга X_1 , X_2 и X_3 значение $\int_{M_t} *_{g_t}(i_{X_1} i_{X_2} i_{X_3} W)$ не зависит от t . Более того, если X_i — времениподобные направленные в будущее поля, то из свойств тензора Q^W следует, что этот интеграл положителен.

Чтобы использовать эти результаты в нашей задаче, необходимы еще два дополнительных понятия, которые мы сейчас введем.

6.4. Чтобы получить нужные оценки, сначала следует породить достаточно много замкнутых полей Вейля. Клайнман и Кристодулу воспользовались такой модификацией производной Ли $\mathcal{L}$, чтобы она была совместима с метрикой γ . Они определили эту *метрическую производную Ли* $\mathcal{L}^\gamma$ способом ее вычисления¹⁾. Ее основное свойство — то, что она сохраняет все величины, определенные только по метрике γ : так, для любого векторного поля X выполняются равенства $\mathcal{L}^\gamma \gamma = 0$ и $\mathcal{L}^\gamma * \gamma = 0$, $\mathcal{L}^\gamma$ коммутирует со свертками, использующими γ , и т. д. Следовательно, $\mathcal{L}_X^\gamma$ сохраняет пространство полей Вейля (это пространство определено условиями симметрии и обращения свертки в нуль) для любого поля X . Для обычной производной Ли $\mathcal{L}_X$ это неверно.

6.5. Можно также воспользоваться *конформной ковариантностью пространства замкнутых полей Вейля*, упомянутой в п. 5.6, заметив, что если W — замкнутое поле Вейля, то $\mathcal{L}_X^\gamma W$ — тоже замкнутое поле Вейля, при условии, что X — конформное поле Киллинга. Поскольку существует большая группа конформных преобразований, это позволяет породить из одного замкнутого поля Вейля много новых. Таким образом, на вакуумном пространстве-времени (Σ, γ) для любых конформных полей Киллинга $X_1, \dots, X_\ell$ поле $\mathcal{L}_{X_1}^\gamma \cdots \mathcal{L}_{X_\ell}^\gamma W$ — снова замкнутое поле Вейля. Таким способом можно построить много сохраняющихся при продолжении начальных данных величин, например

$$\int_{M_t} *_{g_t} i_{X_1} i_{X_2} i_{X_3} Q^{\mathcal{L}_{X_4}^\gamma \mathcal{L}_{X_5}^\gamma W},$$

где X_i , $i = 1, \dots, 5$, суть конформные поля Киллинга.

¹⁾Однако в [9] приведено концептуальное геометрическое определение, опирающееся на универсальную процедуру сравнения ортонормированных базисов относительно двух метрик.

6.6. Нет ни малейших причин, чтобы вакуумное пространство-время (Σ, γ) обладало нетривиальной группой конформных преобразований. Однако мы предполагаем, что наше пространство есть возмущение пространства Минковского $(\mathbb{R}^4, \epsilon)$, у которого, как мы видели, группа конформных преобразований пятнадцатимерна. Из этого следует, что, если мы определим на (Σ, γ) поля, близкие к конформным полям Киллинга X на пространстве Минковского, их тензор деформации $\mathcal{L}_X \gamma$ будет достаточно мал.

Теперь остается заметить, что все рассмотрения, которые мы провели, считая, что поля суть конформные поля Киллинга, т.е. решения однородного уравнения, могут быть распространены на новый случай в форме оценок на поля, тензор деформации которых ограничен. *Законы сохранения, выведенные выше, становятся в этой ситуации приближенными законами сохранения.* Возможно, их следует именовать *законами поведения*. Они контролируют интегралы по пространственноподобным гиперповерхностям некоторых 1-форм¹⁾, полученных из поля Вейля сверткой его тензора Беля-Робинсона с приближенно киллинговыми конформными полями. В соответствующие формулы входят величины, квадратичные по W и линейные по $\mathcal{L}_X \gamma$. Требуется найти поля, тензор деформации которых убывает достаточно быстро на бесконечности. Тогда убывание величин, поведение во времени которых мы изучаем, будет контролироваться их значением.

7. ИЗОТРОПНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

7.1. По очевидным физическим соображениям причинная структура пространства (Σ, γ) имеет основополагающее значение. Подмножество $S \subset \Sigma$ задает *подмножество влияния на будущее* $I^+(S)$, состоящее из всех причинных кривых, направленных в будущее, исходящих из точек множества S . Таким же образом определяется *подмножество влияния прошлого* $I^-(S)$. Границы подмножеств влияния подмногообразия суть изотропные гиперповерхности, являющиеся поверхностями уровня *оптической* функции. Подмножества влияния точки $p \in \Sigma$ представляют собой световые конусы C^p , исходящие из этой точки. Если Σ расслоено на пространственноподобные гиперповерхности M_t , то для $p \in M_{t_0}$ и t , лежащего в окрестности t_0 , множество $C^p \cup M_t$ есть дифференцируемая сфера. Обратно, исходя из сферы S в M_t , можно построить изотропные гиперповерхности, пересекающие M_t по S .

¹⁾Точнее, образов этих форм под действием оператора Ходжа. — *Прим. перев.*

Мы видели, что в пространстве Минковского введенные нами понятия определяются алгебраическими уравнениями.

7.2. Более удобный для работы подход заключается в рассмотрении гиперповерхностей уровня оптической функции u и изучении слоения на Σ со слоями — поверхностями $S_{t,u}$, определенными двумя функциями t и u . Это слоение заменяет евклидовы сферы, которые были орбитами действия группы SO_3 в пространстве Минковского.

Основное средство для построения изотропной геометрии — выбор базиса в нормальном расслоении к многообразию $S_{t,u}$ после того, как выяснено, что метрика на нормальном расслоении имеет сигнатуру $(-+)$. В качестве базиса берут изотропные векторы (J, K) этого расслоения, проекции которых вдоль F (градиента функции t относительно γ) равны 1.

После этого можно определить основные ингредиенты того, что нужно для контроля за решениями волнового уравнения, по аналогии с тем, что происходит в пространстве Минковского, а именно, функцию расстояния r , определяемую формулой $r = \text{площадь поверхности } S_{t,u}/4\pi$, вторую оптическую функцию $v := u + 2r$, определяющую конусы прошлого, и два весьма важных векторных поля: аналог поля Лиувилля в пространстве Минковского, порождающий расширения $L = \frac{1}{2}(vJ + uK)$, и поле, обратное сдвигам по времени, имеющее вид $I_t = \frac{1}{2}(v^2J + u^2K)$. Отметим, что векторное поле F , порождающее сдвиги по времени, связано с J и K формулой $F = \frac{1}{2}(J + K)$.

7.3. Можно также измельчить разложение кривизны R^γ , связанное со слоением на Σ со слоями M_t так, чтобы приспособить его к слоению со слоями — подмногообразиями $S_{t,u}$. Свернув R^γ с векторами J и K , можно определить два поля билинейных симметрических форм на касательных пространствах к многообразию $S_{t,u}$, причем из-за равенства нулю тензора Риччи след этих форм будет равен нулю, две касательные к $S_{t,u}$ дифференциальные формы и две функции.

Все эти величины можно связать с выражением для кривизны, приспособленным к слоению M_t . Это измельченное разложение важно тем, что различные компоненты убывают на бесконечности по-разному.

8. ТЕОРЕМА КЛАЙНЕРМАНА И КРИСТОДУЛУ

8.1. Чтобы доказать свою теорему, Клайнерман и Кристодулу воспользовались такой стратегией. Им требовалось получить инструменты сравнения с пространством Минковского, т.е. построить

- слоение максимальными пространственноподобными гиперповерхностями,
- световые конусы в направлении будущего как поверхности уровня оптической функции,
- приближенно киллинговы конформные поля, чтобы получить оценки на кривизну.

Как только все эти инструменты построены, они проводят доказательство, опираясь на метод непрерывности. Сначала доказывалась теорема существования, локальная по времени, но глобальная по пространству. После этого предполагается, что решение определено вплоть до времени t_∞ и не может быть продолжено на большие времена без нарушения оценок на некоторые геометрические величины. Клайнман и Кристодулу показывают, что такого момента времени не существует. Для этого они устанавливают, что интегралы по времени от величин, в которые входит тензор Беля-Робинсона специально подобранных производных кривизны R^γ , могут быть оценены функцией от значений этих величин при $t = 0$ и приходят к противоречию.

При реализации этой программы возникают многочисленные сложности. В следующих пунктах мы сделаем их обзор¹⁾.

8.2. Во-первых, упомянем о трудности, связанной с *необходимостью работать в специальной системе координат*, чтобы аналитическая задача была корректно поставлена. Самый наивный подход — пытаться продолжить локальные решения гиперболической задачи Коши в гармонических координатах, построенные в [11], до решений, локальных во времени, но глобальных в пространстве вдоль гиперповерхности. К сожалению, Шоке-Брюа показала в [12], что такой подход приводит к неустойчивости в классе асимптотически плоских пространств-времен, близких к пространству Минковского.

Клайнман и Кристодулу не работают со специальной системой координат, а *только фиксируют времениподобную функцию t , поверхности уровня M_t которой максимальны*. Они также используют точку зрения на эволюционные уравнения, развитую в разд. 4.

8.3. Кривизна Римана-Кристоффеля вакуумного пространства-времени (Σ, γ) совпадает с кривизной Вейля W^γ , которая, таким образом, замкнута. Если мы располагаем оценками на W^γ , начальные данные (g, k, ϕ) на гиперповерхности (M, g) можно получить, пользуясь

¹⁾Очевидно, что для их преодоления нужно проводить длинные (и иногда даже нудные) явные вычисления. В этой статье не удастся рассказать даже об идее этих выкладок. Для того чтобы ознакомиться с ними, читателю следует обратиться к [15].

эллиптической системой

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ric}^g - k_{,g} k = E^{W^\gamma}, \\ d^{D^g} k = H^{W^\gamma}, \\ \delta^g = 0, \\ \text{Tr}_g k = 0 \end{array} \right. \quad (8.4)$$

вместе с уравнением, которому удовлетворяет функция промежутка ϕ . Клайнерман и Кристодулу получили эллиптические оценки на трехмерных многообразиях, необходимые для того, чтобы из ограничений на W^γ получить ограничения на начальные данные на (M, g) . Таким способом обходят проблему выбора координат.

8.5. Как уже упоминалось, уравнения Бьянки суть линейаризованная форма изучаемой системы. Асимптотическое поведение их решений было детально изучено в [14]. Клайнерман и Кристодулу использовали эти результаты для получения оценок на W^γ .

Для этого нужно иметь в распоряжении действие группы, аналогичной конформной группе Пуанкаре. Изотропно-геометрические конструкции, упомянутые в разд. 7, проводятся исходя из поверхности M_{t_∞} , предполагаемой терминальной. Благодаря тому что оптическая функция должна удовлетворять очень жестким оценкам (проверка этих оценок занимает почти 70 страниц), по сфере на бесконечности строится действие группы SO_3 . Орбиты этого действия суть пересечения гиперповерхностей M_t и направленных в прошлое световых конусов, вершины которых лежат на упомянутой сфере. Эти конусы являются поверхностями уровня оптической функции. Наконец, полученное действие продолжается до действия конформной группы Пуанкаре. Нет ни малейших причин, чтобы это действие было изометрическим или конформным.

Контроль за тензорами деформаций полей векторов скорости, ассоциированных с этим действием, сводится к контролю за геометрией гиперповерхностей M_t и C_u . Здесь появляется одна из главнейших технических трудностей (имеющая, однако, немаловажное физическое значение). Она заключается в том, что *световые конусы логарифмически расходятся*. Реально в сильно асимптотически плоских возмущениях пространства Минковского массы m выполняется равенство

$$r - t = -2m \log t + O(1),$$

где переменная r связана с площадью сфер-орбит группы вращений. В невозмущенном же пространстве Минковского эта функция на конусе C_u остается ограниченной величиной t . Это явление характерно

именно для размерности 4. Оно прямо связано с тем, что поток энергии, испускаемый бесконечностью, отличен от нуля. Этот поток может быть измерен степенью неомбиличности поверхностей $S_{t,u}$.

8.6. Величины, возрастание которых следует оценить, фундаментальным образом связаны с идеями о приближенных законах сохранения, развитыми в разд. 6. Кривизна R^γ вакуумного пространства-времени является замкнутым полем Вейля. Следовательно, норма поля Вейля $\mathcal{L}_X^\gamma W^\gamma$ контролируется тензором деформации поля X , а его мы будем считать приближенно киллинговым конформным полем. Решающий шаг — оценка 1-формы P , определенной формулой

$$\begin{aligned} P = & -i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_F Q^{\mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma} - i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_F Q^{\mathcal{L}_\Omega^\gamma \mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma} \\ & - i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_F Q^{\mathcal{L}_\Omega^\gamma \mathcal{L}_F^\gamma W^\gamma} - i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_{I_t+F} Q^{\mathcal{L}_L^\gamma \mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma} \\ & - i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_{I_t+F} Q^{\mathcal{L}_F^\gamma \mathcal{L}_F^\gamma W^\gamma}, \end{aligned}$$

где через Ω обозначено векторное поле, заданное действием группы SO_3 .

В изучаемой полосе пространства-времени нужно оценить значение двух величин $E_1 = \sup_t \int_{M_t} *_{g_t} P$ и $E_2 = \sup_u \int_{C_u} *_{g_t} P$. Можно показать, что эти величины ограничены аффинной функцией от них самих. Постоянный член этой функции определяется начальными данными. Если этот член выбран достаточно малым, то получается противоречие.

8.7. Однако следует пойти еще дальше и учесть, что изучаемая система нелинейна. В частности, в оценки убывания волн в пространстве Минковского теперь входят ошибочные члены, зависящие линейно от тензоров деформации приближенно киллинговых полей и квадратично от кривизны и ее производных.

Происходящее критическое обращение в нуль связано со специфической нелинейностью уравнений Эйнштейна. Из-за нее а priori доминирующие члены исчезают. (В других уравнениях, как, например, в нелинейной теории упругости или в теории сжимаемых жидкостей, эти члены остаются.) Соответствующее вычисление приведено в [27].

8.8. Закончим этот обзор доказательства некоторыми подробностями относительно условия малости начальных данных (M, g, k) , использованных Клайнерманом и Кристодулу. Это условие включает равномерную норму кривизны Риччи (с весом), норму H^3 части второй фундаментальной формы из начальных данных на M (тоже с весом), а также норму H^1 тензора Баха B^g части первой фундаментальной формы g (тоже с весом). Для того чтобы вычислить эти

различные нормы, выделяют точку $p \in M$ и единицу длины. Окончательное измерение начальных данных получается взятием нижней грани этих норм по названным параметрам. В результате возникает безразмерная величина.

9. ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

9.1. Клайнерман и Кристодулу скромно замечают в [15], что сложность полученного ими результата весьма относительна по сравнению с гипотезами о распределении особенностей в пространстве-времени.

Понятие особенности в общей теории относительности не самоочевидно, см. [21] и гл. 8 в [22]. Пространство-время может обладать различными свойствами неполноты, и совершенно не ясно, что особенности типа «черной дыры» суть единственно возможные. В настоящее время вполне установилась «внутренняя» точка зрения: особенности некоторой выделенной системы координат не принимаются в расчет, (см. п. 2.4). Критерием того, что мы имеем дело с истинной особенностью, может быть тот факт, что некоторые скалярные величины, образованные из кривизны, стремятся к бесконечности.

Даже если ограничиться «геометрическими» особенностями, необходимо разобраться с тем, как они возникают в пространстве-времени. Стивен В. Хокинг и Роджер Пенроуз нашли критерии существования особенности. Мы сейчас их приведем.

Теорема (см. [23]). *Пусть вакуумное пространство-время глобально гиперболическое. Тогда любая пространственноподобная поверхность, изотропные нормальные векторы к которой определяют эволюцию в будущее, не увеличивающую площадь, содержит неполную причинную геодезическую.*

Из этой теоремы следует как раз сохранение особенностей при возмущениях, тогда как в некоторый момент считали, что они связаны со слишком большой группой симметрий системы.

9.2. Описание того, как в (классической) общей теории относительности возникают особенности, считается одной из сложнейших проблем в этой области. Существуют многочисленные версии гипотезы о так называемой «космической цензуре»; см. [3, 37, 46]. Это общее название для различных формулировок утверждения о том, что поведение метрик Шварцшильда на самом деле универсально в вакуумных (или невакуумных, но удовлетворяющих физически разумным условиям положительности «физических» взаимодействий) пространствах-времени. Мы сформулируем версию этой гипотезы с легко понятным геометрическим содержанием.

Гипотеза (о «космической цензуре»). У всякого вакуумного пространства-времени с особенностью имеется такое возмущение, что эта особенность окружена в нем горизонтом событий.

Нельзя сформулировать эту гипотезу, не оговорив возможности возмущения, так как метрика Тауба-NUT (описанная в [22, р. 170–178]) имеет «голую» особенность, исключаемую гипотезой. Упомянутая метрика пространственно однородна, и считается, что именно эта высокая степень симметрии ответственна за такую особенность.

9.3. В остальной части работы [15] идет речь об излучении гравитационной энергии в построенных возмущениях пространства Минковского. Этот вопрос представляется крайне важным с точки зрения физики, поскольку на сегодняшний день существует очень немного экспериментов, подтверждающих эти явления, которые могут рассматриваться как хорошие тесты для этой теории. Данные, которыми мы располагаем, суть:

- смещение перигелия Меркурия (опыт, сыгравший большую роль в признании теории более широкой публикой, чем просто специалисты);
- отклонение лучей света в гравитационном поле массивной звезды;
- красное смещение в излучении некоторых звезд, удаляющихся от нашей галактики.

Обнаружение гравитационных волн, предсказанных общей теорией относительности (см. [6]), послужило бы дополнительным подтверждением. Эта теория предсказывает, что такие волны распространяются со скоростью света, поперечны и переносятся полем билинейных симметричных форм с нулевым следом. Корпускулярно-волновая двойственность ставит этим волнам в соответствие их частицу — *гравитон*, обладающий спином 2. (В самом деле, в размерности 4 комплексификация пространства $S_0^2\mathbf{R}^4$ билинейных симметричных форм с нулевым следом на $\mathbf{R}^4$ изоморфна комплексификации пространства $\Lambda^+\mathbf{R}^4 \otimes \Lambda^-\mathbf{R}^4$, т.е. $\Lambda^\pm\mathbf{R}^4 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong S^2S^\pm$, где $S^\pm$ означает пространство полуспиноров.) Делались многочисленные попытки найти эти волны. До настоящего времени они оказывались бесплодными; см. [16, 43]. Возможность собирать экспериментальный материал со спутников открывает новые перспективы. Таким образом, очень важно располагать хорошими предсказаниями свойств этих волн. Х. Бонди создал теорию их распространения, подтвержденную Клайнманом и Кристодулу в случае рассматриваемых ими вакуумных пространств. В [13] Кристодулу приводит опирающиеся на [15] соображения в пользу того, что нелинейные эффекты достаточно

существенны даже на больших расстояниях, так что ими нельзя пренебречь по сравнению с эффектами линеаризованной теории. Это еще раз подчеркивает нелинейную природу уравнений Эйнштейна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Arnowitt R., Deser S., Misner C., Coordinate invariance and energy expressions in General Relativity, *Phys. Rev.* **122** (1961), 997–1006.
- [2] Bartnik R., Existence of maximal surfaces in asymptotically flat space-times, *Comm. Math. Phys.* **94** (1984), 155–175.
- [3] Bartnik R., Results and conjectures in Mathematical Relativity, *Proc. Geometry and Physics*, Australian Nat. Univ. **22**, 1989.
- [4] Bel L., Introduction d'un tenseur du quatrième ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris* **248** (1959), 1094–1096.
- [5] Birkhoff G. D., *Relativity and modern Physics*, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1923.
- [6] Bondi H., Van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K., Gravitational waves in General Relativity, VII, *Proc. Roy. Soc. London* **269** (1962), 21–52.
- [7] Bourguignon J. P., Les variétés de dimension quatre à courbure harmonique et à signature non nulle sont d'Einstein, *Invent. Math.* **63** (1981), 263–286.
- [8] Bourguignon J. P., L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci, *Séminaire Bourbaki*, Exposé n° 653, Astérisque **145–146** (1987), 45–61.
- [9] Bourguignon J. P., Gauduchon P., Spineurs, operateurs de Dirac, et variations de métriques, *Comm. Math. Phys.* **144**, No. 3, 589–590.
- [10] Bourguignon J. P., Karcher H., Curvature operators: pinching estimates and geometric examples, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris* **11** (1978), 71–92.
- [11] Choquet-Bruhat Y., Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, *Acta Math.* **88** (1952), 141–225.
- [12] Choquet-Bruhat Y., Un théorème d'instabilité pour certaines équations hyperboliques non-linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276**, 281–284.
- [13] Christodoulou D., The nonlinear nature of Gravitation and gravitational wave experiments, Preprint, Courant Institute, 1990.
- [14] Christodoulou D., Klainerman S., Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space, *Comm. Pure Appl. Math.* **43** (1990), 137–199.
- [15] Christodoulou D., Klainerman S., The global nonlinear stability of the Minkowski space, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [16] Cook A. H., Experiments on gravitation, in 300 years of gravitation, S. W. Hawking and W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 51–79.
- [17] Einstein A., Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. Phys.* **49** (1916), 769–822.
- [18] Einstein A., Grossmann M., Entwurf einer allgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, *Z. Math. Phys.* **62** (1913), I. Physikalischer Teil 225–244; II. Mathematischer Teil, 244–261.
- [19] Fischer A., Marsden J. E., The Einstein equations of evolution: a geometric approach, *J. Math. Phys.* **13** (1972), 546–568.

- [20] Fischer A., Marsden J. E., The Einstein evolution equations as a first-order symmetric hyperbolic quasilinear system, *Comm. Math. Phys.* **28** (1972), 1-38.
- [21] Geroch R. P., What is a singularity in General Relativity?, *Ann. Phys.* **48** (1968), 526-540.
- [22] Hawking S. W., Ellis G. F. R., The large scale structure of space-time, Cambridge Monographs on Math. Phys., Cambridge, 1973.
- [23] Hawking S. W., Penrose R., The singularities of gravitational collapse and cosmology, *Proc. Roy. Soc. London* **314** (1970), 529-548.
- [24] Hilbert D., Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung), *Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen* **3** (1915), 395-407.
- [25] Israel W., Dark stars: the evolution of an idea, in 300 years of gravitation, S. W. Hawking and W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 199-276.
- [26] Kazdan J. L., Positive energy in General Relativity, Séminaire Bourbaki, Exposé n° 593, *Astérisque* **92-93** (1982), 315-330.
- [27] Klainerman S., The null condition and global existence to nonlinear wave equations, *Lect. Appl. Math.*, vol. 23, 1986, 293-326.
- [28] Kruskal M. D., Maximal extensions of the Schwarzschild metric, *Phys. Rev.* **119** (1960), 1743-1745.
- [29] Leray J., Hyperbolic differential equations, *Notes Inst. Adv. Stud.*, Princeton, 1952.
- [30] Lichnerowicz A., Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein, *Act. Sci. Ind.* **833**, Hermann, Paris, 1939.
- [31] Lorentz H. A., Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of the light, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam* **6** (1904).
- [32] Minkowski H., Space and time, Address at the 80th Assembly of German Natural Scientist and Physicians, Cologne (1908), in: *The principle of Relativity*, Dover Pub., 1952, 73-91.
- [33] Minkowski H., Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, *Nachr. Gesellsch. Wiss.*, Göttingen, 1908, S. 53.
- [34] Misner C., Thorne K., Wheeler J. A., *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [35] Morawetz C., The limiting amplitude principle, *Comm. Pure. Appl. Math.* **15** (1962), 349-362.
- [36] Parker T., Taubes R., On the proof by E. Witten of the positive mass conjecture, *Comm. Math. Phys.* **84** (1982), 223-238.
- [37] Penrose R., Unsolved problems in General Relativity, in: *Seminar in Differential Geometry*, *Ann. Math. Studies*, vol. 102, 1981, 631-668.
- [38] Poincaré H., Sur la dynamique de l'électron, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **21** (1906), 129-176.
- [39] Sachs R. K., Wu H., *General relativity for the mathematician*, *Grad. Texts in Math.*, vol. 48, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [40] Schoen R., Yau S. T., On the proof of the positive mass conjecture I, *Comm. Math. Phys.* **65** (1978), 45-76.
- [41] Schoen R., Yau S. T., On the proof of the positive mass conjecture II, *Comm. Math. Phys.* **79** (1981), 231-260.

- [42] Schwarzschild K., Über das Gravitationsfeld eines Massen nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss. (1916), 189–196.
- [43] Thorne K. S., Gravitational radiation, in 300 years of gravitation, S. W. Hawking and W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 330–458.
- [44] Weyl H., Raum, Zeit, Materie (1920); Space, Time, Matter, Engl. version, Dover, New York, 1952. [Имеется перевод: Вейль Г. Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности. — М.: Янус, 1996.]
- [45] Witten, E. A new proof of the positive energy theorem, Comm. Math. Phys. 80 (1981), 381–402.
- [46] Yau S. T., Problems section, in: Seminar in Differential Geometry, Ann. Math. Studies, vol. 102, 1981, 695–697.

О ЛОКАЛЬНОЙ ДЗЕТА ФУНКЦИИ ИГУЗЫ¹⁾

Жан Денеф

Локальные дзета-функции Игузы связаны с числом решений сравнений $\bmod p^m$ и с экспоненциальными суммами $\bmod p^m$. Мы приводим обзор сведений об этих дзета-функциях. Среди них — несколько гипотез и интригующие связи с топологией и теорией особенностей. Эти связи будут подчеркиваться на протяжении всей статьи, особенно в разд. 2 и 4. Случай кривых полностью исследован. Он описан в разд. 5 без каких бы то ни было вычислений. В старших размерностях известно гораздо меньше. Большое количество экспериментальных данных (разд. 6) говорит, однако, в пользу справедливости гипотезы о монодромии, которая связывает полюсы дзета-функций Игузы с локальной монодromией. Относительные инварианты предоднородных векторных пространств обсуждаются в разд. 7. Они приводят к очень интересным мотивировкам высказываемых гипотез. Адели лишь упоминаются в разд. 7.7. Связь с формулами Зигеля–Вейля не обсуждается, и мы отошлем читателя к книге Игузы [30, Ch. 4] и его обзору [34]. В конце статьи мы касаемся теории p -адических субаналитических множеств, которая приводит к весьма общим результатам о рациональности.

1. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЛОКАЛЬНЫХ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯХ

1.1. Локальные дзета-функции.

(1.1.1) Пусть K есть p -адическое поле, т.е. $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$. Пусть R — кольцо нормирования поля K , P — максимальный идеал в R и $\bar{K} = R/P$ — поле вычетов поля K . Число элементов в $\bar{K}$ обозначается через q , т.е. $\bar{K} = F_q$. Для $z \in K$ через $\text{ord } z \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ обозначается порядок элемента z , $|z| = q^{-\text{ord } z}$ и $\text{ac}(z) = z\pi^{-\text{ord } z}$, где π — фиксированный униформизирующий параметр для R .

(1.1.2) Пусть $f(x) \in K[x]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f \notin K$. Пусть $\Phi: K^n \rightarrow \mathbb{C}$ — функция Шварца–Брюа, т.е. локально постоянная функция с компактным носителем. Пусть, наконец, χ — характер группы $R^\times$, т.е.

¹⁾Denef Jan. Report on igusa's local zeta function. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n°741, Astérisque, 201-202-203, 1991, p. 359–386.

гомоморфизм $\chi: R^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ с конечным образом, где через $R^\times$ обозначена группа единиц кольца R . Положим формально $\chi(0) = 0$.

(1.1.3) Описанные выше данные определяют локальную дзета-функцию Игузы

$$Z_\Phi(s, \chi) = Z_\Phi(s, \chi, K, f) := \int_{K^n} \Phi(x) \chi(\text{ac } f(x)) |f(x)|^s |dx|$$

для $s \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(s) > 0$, где через $|dx|$ обозначена мера Хаара на K^n , нормализованная таким образом, что мера всего пространства K^n равна 1. Эти дзета-функции были введены Вейлем [83], а их основные свойства для произвольной функции f впервые исследовал Игуза в [28, 30]. Ниже мы увидим, что функция $Z_\Phi(s, \chi)$ рациональна относительно q^{-s} и продолжается, таким образом, до мероморфной функции на всей комплексной прямой $\mathbb{C}$.

В случае если функция Φ является характеристической функцией всего R^n (соотв. PR^n), мы будем писать Z (соотв. Z_0) вместо Z_Φ . На протяжении всей статьи используется обозначение $t = q^{-s}$. Заметим, что $Z_\Phi(s, \chi)$ является степенным рядом по t . Коэффициент при t^m в степенном ряде $P(t)$ обозначается через $\text{Coeff}_{t^m} P(t)$. Тривиальный характер обозначается через χ_{triv} , а носитель функции Φ — через $\text{Supp } \Phi$.

(1.1.4) **Замечание.** Заметим, что значение $\text{ac}(f(x))$, а следовательно, и функция $Z_\Phi(s, \chi, K, f)$, зависят от выбора униформирующего параметра π . Чтобы сделать определение более каноническим, можно ввести

$$Z_\Phi(w, K, f) = \int_{K^n} \Phi(x) w(f(x)) |dx|$$

как функцию квазихарактера w группы $K^\times$ (т.е. непрерывного гомоморфизма $w: K^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$). Всякий квазихарактер w группы $K^\times$ имеет вид $w(y) = \chi(\text{ac}(y))|y|^s$. Таким образом, изучение функции $Z_\Phi(w, K, f)$ эквивалентно изучению функции $Z_\Phi(s, \chi, K, f)$.

Иногда полезна и точка зрения на Z_Φ как на распределение $\Phi \rightarrow Z_\Phi$.

1.2. Число решений сравнения.

(1.2.1) Предположим, что коэффициенты функции $f(x)$ лежат в R . Обозначим через N_m число решений сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{P^m}$ в R/P^m и положим $P(t) := \sum_{m=0}^{\infty} q^{-nm} N_m t^m$. Ряд Пуанкаре $P(t)$ непосредственно выражается через $Z(s, \chi_{\text{triv}})$ по формуле

$$P(t) = \frac{1 - tZ(s, \chi_{\text{triv}})}{1 - t}.$$

Действительно, так как мера множества $\{x \in R^n \mid \text{ord } f(x) \geq m\}$ равна $q^{-nm} N_m$, эта формула следует из равенства

$$(1.2.2) \quad \int_{\text{ord } f(x) \geq m} \Phi(x) |dx| = Z_\Phi(0, \chi_{\text{triv}}) - \text{Coeff}_t \frac{t Z_\Phi(s, \chi_{\text{triv}})}{1-t}.$$

Чтобы проверить последнее равенство, заметим, что выражение в левой части равно

$$\begin{aligned} \int \Phi(x) |dx| - \sum_{k \leq m-1} \int_{\text{ord } f(x)=k} \Phi(x) |dx| \\ = Z_\Phi(0, \chi_{\text{triv}}) - \sum_{k \leq m-1} \text{Coeff}_t Z_\Phi(s, \chi_{\text{triv}}). \end{aligned}$$

1.3. Рациональность локальных дзета-функций.

(1.3.1) *Разрешения.* Положим $X = \text{Spec } K[x]$ и $D = \text{Spec } K[x]/(f(x))$. Выберем (вложенное) разрешение (Y, h) для особенности поверхности уровня $f^{-1}(0)$ над K . Это означает, что Y является целой гладкой замкнутой подсхемой проективного пространства над X , $h: Y \rightarrow X$ — естественное отображение, ограничение $h: Y \setminus h^{-1}(D) \rightarrow X \setminus D$ является изоморфизмом и приведенная схема $(h^{-1}(D))_{\text{red}}$, ассоциированная с $h^{-1}(D)$, имеет только нормальные пересечения (т. е. она распадается на гладкие неприводимые компоненты, которые пересекаются трансверсально, ср. [25]). Обозначим неприводимые компоненты схемы $(h^{-1}(D))_{\text{red}}$ через E_i , $i \in T$. Среди них имеются компоненты двух типов: компоненты E_i , $i \in T_s$, собственного прообраза схемы D , а также исключительные дивизоры E_i , $i \in T \setminus T_s$. Для каждого индекса $i \in T$ обозначим через N_i кратность компоненты E_i в дивизоре функции $f \circ h$ на Y и через $\nu_i - 1$ кратность компоненты E_i в дивизоре формы $h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$. Набор пар (N_i, ν_i) называется *числовой характеристикой* разрешения. Для $i \in T$ и $I \subset T$ рассмотрим схемы

$$\mathring{E}_i := E_i \setminus \bigcup_{j \neq i} E_j, \quad E_I := \bigcap_{i \in I} E_i, \quad \mathring{E}_I := E_I \setminus \bigcup_{j \in T \setminus I} E_j.$$

При пустом множестве I положим $E_\emptyset = Y$. И пусть, наконец, $C_f \subset X$ есть множество особых точек функции $f: X \rightarrow A_K^1$.

(1.3.2) **Теорема** (Игуза [28, 30]). В обозначениях пп. 1.1 и (1.3.1)

(i) функция $Z_\Phi(s, \chi)$ является рациональной функцией от q^{-s} ; все ее полюсы содержатся в множестве $s = -\nu_i/N_i + 2\pi\sqrt{-1}k/N_i \ln q$, где $k \in \mathbb{Z}$, $i \in T$, а порядок характера χ делит число N_i ;

(ii) если $C_f \cap \text{Supp } \Phi \subset f^{-1}(0)$, то $Z_\Phi(s, \chi) = 0$ для почти всех χ .

Доказательство. (i) Рассмотрим множество $Y(K)$ K -рациональных точек схемы Y как K -аналитическое многообразие. Тогда

$$Z_{\Phi}(s, \chi) = \int_{Y(K)} (\Phi \circ h) \chi(\text{ac}(f \circ h)) |f \circ h|^s |h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)|.$$

Пусть $b \in Y(K)$ и $\{i \in T \mid b \in E_i\} = \{i_1, \dots, i_r\}$. Существует локальная система координат $y_1, \dots, y_n$ на $Y(K)$ с началом в точке b , для которой

$$f \circ h = \epsilon y_1^{N_{i_1}} \dots y_r^{N_{i_r}},$$

$$h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \eta y_1^{\nu_{i_1}-1} \dots y_r^{\nu_{i_r}-1} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

где функции ϵ и η аналитичны в некоторой окрестности U точки b , причем $\epsilon(b) \neq 0$, $\eta(b) \neq 0$. Заметим, что для достаточно маленькой окрестности U функции $|\epsilon|$ и $|\eta|$ и $\chi(\text{ac } z)$ постоянны на U . Ввиду того что прообраз $h^{-1}(\text{Supp } \Phi)$ компактен, функция $Z_{\Phi}(s, \chi)$ является конечной $\mathbb{C}$ -линейной комбинацией произведений сомножителей вида q^{ks} , $k \in \mathbb{Z}$, или вида $\int_{\text{ord } z \geq e} \chi^{N_i}(\text{ac } z) |z|^{N_i s + \nu_i - 1} |dz|$. Но этот интеграл отличен от нуля, если только порядок характера χ не делит N_i . В последнем случае он является рациональной функцией от q^{-s} со знаменателем $1 - q^{-N_i s - \nu_i}$. Пункт (i) доказан. Доказательство п. (ii) см. в [30, р. 91–96].

Замечание. Рациональность функции $Z_{\Phi}(s, \chi)$ можно доказать и не используя разрешение особенностей, см. [10] и разд. 8.

1.4. Экспоненциальные суммы и интегрирование по слоям.

(1.4.1) Пусть Ψ — стандартный аддитивный характер на K , т.е. $\Psi(z) = \exp(2\pi i \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p}(z))$ для $z \in K$, где через Tr обозначен след. Вейль [83] ввел следующие две функции:

$$E_{\Phi}(z) = E_{\Phi}(z, K, f) = \int_{K^n} \Phi(x) \Psi(z f(x)) |dx|,$$

$$F_{\Phi}(y) = F_{\Phi}(y, K, f) = \int_{f^{-1}(y)} \Phi(x) \left| \frac{dx}{df} \right|,$$

для $z \in K$ и $y \in K \setminus V_f$, где $V_f = f(C_f)$. Функция $E_{\Phi}(z)$ локально постоянна и ограничена на K . Интересно исследовать ее поведение при $|z| \rightarrow \infty$. В простейшем случае, когда $C_f \cap \text{Supp } \Phi = \emptyset$, $E_{\Phi}(z) = 0$ для достаточно большого $|z|$. Функция $F_{\Phi}(z)$ локально постоянна на $K \setminus V_f$ и имеет компактный носитель. Ее поведение интересно исследовать при y , стремящемся к точке подсхемы V_f . Прекрасное введение в эти вопросы можно найти у Серра [73].

В случае когда Φ является характеристической функцией пространства R^n (соотв. PR^n), мы будем писать E, F (соотв. E_0, F_0) вместо E_Φ, F_Φ .

(1.4.2) Пусть $f(x) \in R[x]$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Для $u \in R^\times$ очевидно, что $E(u\pi^{-m}) = q^{-nm} \sum_{x \in (R/P^m)^n} \Psi(uf(x)/\pi^m)$ — классическая экспоненциальная сумма mod P^m .

Для $a \in R \setminus V_f$ обозначим через $N_m(a)$ число решений в R/P^m сравнения $f(x) \equiv a \pmod{P^m}$. Можно проверить, что $F(a) = N_m(a)/q^{(n-1)m}$ для достаточно большого (зависящего от a) m . Эту стабильную дробь $F(a)$ принято называть локальным сингулярным рядом, определяемым по f и a . Она играет важную роль в круговом методе.

(1.4.3) Заметим, что функция $E_\Phi(z) = \int_K F_\Phi(y) \Psi(zy) |dy|$ является преобразованием Фурье функции $F_\Phi(y)$ на K и что функция

$$Z_\Phi(\omega, K, f) = \int_K F_\Phi(y) \omega(y) |dy|$$

является преобразованием Меллина функции $(1-q^{-1})(y) F_\Phi(y)$ на $K^\times$. Это наблюдение устанавливает связь между экспоненциальными суммами и локальными дзета-функциями. Разлагая Φ и выполняя сдвиг, можно свести задачу к случаю $C_f \cap \text{Supp } \Phi \subset f^{-1}(0)$. Тогда в силу теоремы (1.3.2)(i), (ii) следующие величины выражаются друг через друга явными формулами (см. [28, 30]):

(i) главные части лорановских разложений функции $Z_\Phi(s, \chi)$ в окрестности ее полюсов;

(ii) члены асимптотического разложения функции $E_\Phi(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$;

(iii) члены асимптотического разложения функции $F_\Phi(y)$ при $y \rightarrow 0$.

Дополнительная информация содержится в следующем предложении.

(1.4.4) **Предложение.** Пусть $u \in R^\times$ и $m \in \mathbb{Z}$. Тогда $E_\Phi(u\pi^{-m})$ представляется в виде

$$Z_\Phi(0, \chi_{\text{triv}}) + \text{Coeff}_{t^{m-1}} \frac{(t-q)Z_\Phi(s, \chi_{\text{triv}})}{(q-1)(1-t)} + \sum_{\chi \neq \chi_{\text{triv}}} g_\chi^{-1} \chi(u) \text{Coeff}_{t^{m-c(\chi)}} Z_\Phi(s, \chi),$$

где через $c(\chi)$ обозначен кондуктор характера χ , т. е. наименьшее число $s \geq 1$, такое, что χ тривиален на $1 + P^s$, а через g_χ обозна-

чена гауссова сумма

$$g_{\chi} = (q-1)^{-1} q^{1-c(\chi)} \sum_{v \in (R/P^{c(\chi)})^{\times}} \chi(v) \Psi(v/\pi^{c(\chi)}).$$

Доказательство. Заменяя f на uf , мы заключаем, что достаточно доказать предложение для случая $u = 1$. Введем для любого положительного целого числа e интеграл

$$I_{\Phi, e}(s) = \int_{K^n} \Phi(x) \Psi(\pi^{-e} \text{ac } f(x)) |f(x)|^s |dx|.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$E_{\Phi}(\pi^{-m}) = \int_{\text{ord } f(x) \geq m} \Phi(x) |dx| + \sum_{k \leq m-1} \text{Coeff}_{t^k} I_{\Phi, m-k}(s).$$

Предложение следует теперь из (1.2.2), так как преобразование Фурье на $(R/P^e)^{\times}$ дает $I_{\Phi, e}(s) = \sum_{c(\chi)=e} g_{\chi^{-1}} Z_{\Phi}(s, \chi)$.

(1.4.5) **Следствие** (Игуза [28, 30]). *Предположим, что $C_f \cap \text{Supp } \Phi \subset f^{-1}(0)$. Тогда для достаточно большого $|z|$ функция $E_{\Phi}(z)$ является конечной $\mathbb{C}$ -линейной комбинацией функций вида*

$$\chi(\text{ac}(z)) |z|^{\lambda} (\log_q |z|)^{\beta};$$

коэффициенты этой линейной комбинации не зависят от z , $\lambda \in \mathbb{C}$ является полюсом функции $(s+1)Z_{\Phi}(s, \chi_{\text{triv}})$ или функции $Z_{\Phi}(s, \chi)$, $\chi \neq \chi_{\text{triv}}$, $\beta \in \mathbb{N}$ и $\beta \leq (\text{кратность полюса } \lambda) - 1$. Более того, все полюсы λ действительно появляются в этой линейной комбинации.

Доказательство выводится из теоремы (1.3.2)(i), (ii) и предложения (1.4.4) путем разложения $Z_{\Phi}(s, \chi)$ в сумму элементарных дробей.

1.5. Гипотеза Игузы об экспоненциальных суммах. Пусть F — числовое поле, $f(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ — однородный многочлен и $\sigma \in \mathbb{R}$. Предположим, что $1 < \sigma < \min \nu_i/N_i$, где минимум берется по всем i , кроме тех, для которых $N_i = \nu_i = 1$, причем набор пар (N_i, ν_i) образует числовую характеристику некоторого фиксированного разрешения особенности поверхности уровня $f^{-1}(0)$ над F . В силу следствия (1.4.5) для каждого p -адического пополнения K поля F существует число $c(K) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенству $|E(z, K, f)| \leq c(K) |z|^{-\sigma}$ для всех $z \in K$.

Гипотеза (Игуза [30]). *В предыдущем неравенстве величину $c(K)$ можно выбрать не зависящей от K .*

Эта гипотеза связана со справедливостью одной формулы Пуассона, см. [30, р. 122, 170]. Игуза [27] доказал эту гипотезу для случая $C_f = \{0\}$ с помощью оценки Делиня [8] для экспоненциальных сумм над F_q , которая, в свою очередь, опирается на гипотезу Римана для многообразий над F_q . Он проверил ее справедливость также для некоторых относительных инвариантов предоднородных векторных пространств [26, 29], [30, р. 123–127]. Спербер и Денеф доказали недавно эту гипотезу для многочленов $f(x)$, невырожденных относительно своего многогранника Ньютона $\Delta(f)$ (см. п. 5.3), в предположении, что вершины многогранника $\Delta(f)$ не лежат в кубе $\{0, 1\}^n$ (и с учетом только торических разрежений).

1.6. Архимедов случай. Заменяя поле K полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а функцию Φ C^∞ -функцией с компактным носителем, положим

$$Z_\Phi(s, K, f) = \int_{K^n} \Phi(x) |f(x)|^{\delta s} dx$$

для $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$, где $\delta = 1$ для $K = \mathbb{R}$ и $\delta = 2$ для $K = \mathbb{C}$. Можно доказать, что функция $Z_\Phi(s, K, f)$ продолжается до мероморфной функции на $\mathbb{C}$ с рациональными полюсами. Доказательство проводится путем разрешения особенностей [2, 5] или с помощью теории многочленов Бернштейна [4].

2. МОНОДРОМИЯ И МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНШТЕЙНА

2.1. Монодромия.

(2.1.1) Рассмотрим непостоянное полиномиальное отображение $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и зафиксируем точку $b \in \mathbb{C}^n$, для которой $f(b) = a$. Рассмотрим достаточно малый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с центром в точке b . Милнор [63] доказал, что ограничение $f|_B$ является локально тривиальным C^∞ -расслоением над достаточно малым проколотым диском $A \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ с центром a . Таким образом, гладкий тип так называемого слоя Милнора $F_b := f^{-1}(t) \cap B$ отображения f в окрестности точки b не зависит от точки $t \in A$; образующая фундаментальной группы проколотого диска A , заданная обходом вокруг точки a против часовой стрелки, индуцирует автоморфизм T пространства $H^1(F_b, \mathbb{C})$, называемый *локальной монодромией* многочлена f в точке b . Хорошо известно, что собственные числа отображения T являются корнями из единицы (см. [22, Экз. I]). В случае когда b — изолированная критическая точка многочлена f , Милнор доказал [63], что $H^i(F_b, \mathbb{C}) = 0$ для $i \neq 0, n-1$ и $H^0(F_b, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, причем монодромия действует на H^0 тривиально.

(2.1.2) **Теорема** (формула А'Кампо [1]). Пусть b — изолированная критическая точка многочлена f , $f(b) = 0$, $n \geq 2$. Тогда в обозначениях п. (1.3.1) при $K = \mathbb{C}$ характеристический многочлен действия монодромии на $H^{n-1}(F_b, \mathbb{C})$ равен

$$\left((z-1)^{-1} \prod_{i \in T} (z^{N_i} - 1) \chi(\mathring{E}_i \cap h^{-1}(b)) \right)^{(-1)^{n-1}},$$

где χ обозначает эйлерову характеристику по отношению к сингулярным когомологиям. В частности, величина $\exp(2\pi\sqrt{-1}/k)$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, является собственным числом оператора локальной монодромии в точке b тогда и только тогда, когда $\sum_{k|N_i} \chi(\mathring{E}_i \cap h^{-1}(b)) \neq 0$.

2.2. Многочлен Бернштейна. И. Н. Бернштейн доказал [4], что для любого многочлена $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, над полем K характеристики нуль существуют многочлены $P \in K[x, \partial/\partial x, s]$ и $b(s) \in K[s] \setminus \{0\}$, удовлетворяющие функциональному уравнению $Pf^{s+1} = b(s)f^s$. Многочлен $b(s)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом единица, удовлетворяющий этому уравнению, называется *многочленом Бернштейна* многочлена f и обозначается через $b_f(s)$. Если многочлен f непостоянный, то $b_f(s)$ делится на $s+1$. Если у поверхности уровня $f=0$ нет особых точек над алгебраическим замыканием поля K , то $b_f(s) = s+1$. Фундаментальная теорема Касивары утверждает, что все корни многочлена $b_f(s)$ являются отрицательными рациональными числами. В случае $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ с помощью функционального уравнения легко проверить, интегрируя по частям, что полюсы функции $Z_\Phi(s, K, f)$ расположены в точках вида $s = \alpha - j$, где α — корень многочлена $b_f(s)$ и $j \in \mathbb{N}$. Заметим, однако, что подобное интегрирование по частям не имеет смысла в p -адической ситуации.

Корни многочлена $b_f(s)$ связаны с геометрией многочлена f . Действительно, согласно Мальгранжу [58], если α является корнем многочлена $b_f(s)$, то $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha)$ является собственным числом оператора локальной монодромии многочлена f в некоторой точке из $f^{-1}(0)$ и все собственные числа имеют такой вид. (Заметим, что $b_f(s)$ является наименьшим общим кратным всех локальных многочленов Бернштейна; см., например, [23, Lemma 2.5.2].)

Таким образом, в *артимедовом* случае, если s — полюс функции $Z_\Phi(s, K, f)$, то $\exp(2\pi\sqrt{-1}s)$ является собственным числом монодромии. (Непосредственное доказательство этого факта для случая изолированной особенности см. у Мальгранжа [57].) Более того, Барлет [3] показал, что при $K = \mathbb{C}$ всякое собственное значение полу-

чается таким образом. Информацию о точном расположении полюсов можно найти в [50], а оценку на максимальный полюс — в [51].

2.3. Гипотеза о монодромии. На основании архимедова случая п. 2.2 и изучения частных примеров естественно высказать следующие гипотезы о произвольном многочлене $f(x)$ над числовым полем $F \subset \mathbb{C}$.

(2.3.1) **Гипотеза (Игуза [36]).** Для почти всех p -адических пополнений K поля F , если s является полюсом функции $Z(s, \chi, K, f)$, то $\operatorname{Re}(s)$ является корнем многочлена $b_f(s)$.

Эта гипотеза проверена в ряде частных случаев, см. пп. (5.2.5), 5.3, 7.3, 7.4 ниже.

(2.3.2) **Гипотеза о монодромии (Игуза).** Для почти всех p -адических пополнений K поля F , если s — полюс функции $Z(s, \chi, K, f)$, то $\exp(2\pi\sqrt{-1}\operatorname{Re}(s))$ является собственным числом локальной монодромии многочлена f в некоторой комплексной точке поверхности уровня $f^{-1}(0)$.

Заметим, что вторая гипотеза следует из первой согласно сказанному выше. Но вторая гипотеза имеет к настоящему моменту значительное количество экспериментальных подтверждений, см. разд. 6. Возможно, что обе гипотезы верны для любых p -адических пополнений и для функции Z_Φ вместо функции Z . В большинстве числовых примеров теорема (1.3.2) дает очень большой список возможных положений полюсов. Однако обычно в результате таинственных сокращений многие из этих возможностей не реализуются. Гипотеза о монодромии позволила бы объяснить это странное явление.

Лёзер [53] изучил дзета-функции вида

$$\int_{K^n} \Phi(x) |f_1(x)|^{s_1} \dots |f_k(x)|^{s_k} |dx|$$

от нескольких переменных и сформулировал гипотезу о существовании некоторых асимптотических разложений (обобщающих разложение (1.4.3)(iii)). Из его гипотезы удивительным образом вытекает связь между множеством полюсов этих дзета-функций и геометрией дискриминанта многочленов $f_1, \dots, f_k$. Более того, гипотеза Лёзера связана и с гипотезой о монодромии.

3. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Мы по-прежнему используем обозначения пп. 1.1 и (1.3.1). Приведение по модулю P обозначается чертой сверху.

3.1. Мы называем функцию Шварца–Брюа Φ *вычетной*, если $\text{Supp } \Phi \subset R$ и $\Phi(x)$ зависит только от значения x по модулю P . Такая функция индуцирует отображение $\bar{\Phi}: \bar{K}^n \rightarrow C$.

3.2. Мы говорим, что разрешение (Y, h) особенности поверхности уровня $f^{-1}(0)$ имеет *хорошую редукцию* по модулю P , если схема $\bar{Y}$ и все схемы $\bar{E}_i$ гладкие, $\bigcup_{i \in T} \bar{E}_i$ имеет только нормальные пересечения и никакая пара схем $\bar{E}_i$ и $\bar{E}_j$ не имеет общих компонент при $i \neq j$ (ср. [12]). Через $\bar{Z}$ здесь обозначено приведение по модулю P произвольной замкнутой подсхемы Z схемы Y ; оно определяется как приведение по модулю P замыкания подсхемы Z в проективном пространстве над $\text{Spec } R[x]$. Если, кроме того, $N_i \notin P$ для любого $i \in T$, то мы говорим, что у разрешения есть *ручная хорошая редукция*. Если f и (Y, h) определены над числовым полем F , то хорошая редукция существует для почти всех пополнений K поля F . Если у разрешения (Y, h) есть хорошая редукция, то $\bar{E}_I = \bigcap_{i \in I} \bar{E}_i$ и мы полагаем $\overset{\circ}{\bar{E}}_I = \bar{E}_I \setminus \bigcup_{j \in T \setminus I} \bar{E}_j$ и $\overset{\circ}{\bar{E}}_i = \bar{E}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \bar{E}_j$. Пусть, наконец, C_f — множество особых точек отображения $\bar{f}: \bar{K}^n \rightarrow \bar{K}$.

3.3. Теорема [14]. Пусть $f \in R[x]$, $\bar{f} \neq 0$. Предположим, что у особенности поверхности уровня $f^{-1}(0)$ есть разрешение с ручной хорошей редукцией по модулю P и что функция Φ вычетная. Если характер χ нетривиален на $1 + P$, то функция $Z_\Phi(s, \chi)$ не зависит от s . Если, кроме того, $C_f \cap \text{Supp } \bar{\Phi} \subset \bar{f}^{-1}(0)$, то $Z_\Phi(s, \chi) = 0$.

3.4. Теорема [12, 14]. Пусть $f \in R[x]$, $\bar{f} \neq 0$. Предположим, что (Y, h) — разрешение особенности поверхности уровня $f^{-1}(0)$ с хорошей редукцией по модулю P и что функция Φ вычетная. Пусть χ — характер группы $R^\times$ порядка d , тривиальный на $1 + P$. Тогда

$$Z_\Phi(s, \chi) = q^{-n} \sum_{\substack{i \in T \\ \forall i \in I: d | N_i}} c_{I, \chi, \Phi} \prod_{i \in I} \frac{q-1}{q^{N_i s + \nu_i} - 1},$$

где $c_{I, \chi, \Phi} = \sum_{a \in \overset{\circ}{\bar{E}}_I(\bar{K})} \bar{\Phi}(a) \Omega_\chi(a)$.

Величина $\Omega_\chi(a)$ определяется здесь следующим образом: если $a \in \overset{\circ}{\bar{E}}_I(\bar{K})$ и $d | N_i$ для всех $i \in I$, то можно записать $\bar{f} \circ \bar{h} = uw^d$, где $u, u^{-1}, w \in \mathcal{O}_{\bar{Y}, a}$, и мы полагаем $\Omega_\chi(a) := \chi(u(a))$. В случае если Φ — характеристическая функция пространства R^n (соотв. PR^n), мы будем писать $c_{I, \chi}$ (соотв. $c_{I, \chi, 0}$) вместо $c_{I, \chi, \Phi}$. Чтобы подчеркнуть зависимость от K , мы будем иногда писать $c_{I, \chi, \Phi}(K)$.

3.5. Когомологическая интерпретация. В предположениях теоремы 3.4 выберем простое l , $l \nmid q$. Заметим, что χ индуцирует характер группы $F_q^\times$, который мы также обозначаем через χ . Обозначим через $\mathcal{L}_\chi$ куммеровский $\bar{Q}_l$ -пучок на $A_{F_q}^1 \setminus \{0\}$, ассоциированный с этим последним характером (см. [9, Sommes Trig.]). Положим $U = \bar{Y} \setminus (\bar{f} \circ \bar{h})^{-1}(0)$. Пусть $\nu: U \hookrightarrow \bar{Y}$ — открытая иммерсия и $\alpha: U \rightarrow A_{F_q}^1 \setminus \{0\}$ — отображение, индуцированное композицией $\bar{f} \circ \bar{h}$. Положим $\mathcal{F}_\chi := \nu_* \alpha^* \mathcal{L}_\chi$. Легко проверить, что $\mathcal{F}_\chi$ — гладкий пучок ранга один на $U_d := \bar{Y} \setminus \bigcup_d \chi_{N_i} \bar{E}_i$. Кроме того, если $a \in U_d(F_q)$, то геометрический оператор Фробениуса действует на слое пучка $\mathcal{F}_\chi$ в точке a умножением на $\Omega_\chi(a)$. Таким образом, формула следа Гротендика дает

$$(3.5.1) \quad c_{l,\chi} = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F, H_c^i(\bar{E}_I \otimes F_q^a, \mathcal{F}_\chi)),$$

$$(3.5.2) \quad c_{l,\chi,0} = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F, H_c^i((\bar{E}_I \cap \bar{h}^{-1}(0)) \otimes F_q^a, \mathcal{F}_\chi)),$$

где через F обозначен оператор Фробениуса, а через F_q^a — алгебраическое замыкание поля F_q . Для дальнейшего нам понадобится

3.6. Лемма. *Высшие прямые образы $R^j \nu_*(\mathcal{F}_\chi|_U)$ обращаются в нуль вне U_d для всех $j \geq 0$. То же верно для открытой иммерсии $\nu_I: \bar{E}_I \hookrightarrow \bar{E}_I$.*

3.7. Упомянем также, что Ленглендс [47] предложил формулу, выражающую главные части лорановских разложений функции $Z_\Phi(s, \chi)$ в окрестности ее полюсов через главные значения интегралов.

4. СЛЕДСТВИЯ ЯВНЫХ ФОРМУЛ

Мы используем обозначения пп. 1.1 и (1.3.1), если обратное не оговорено явно. Характер группы $R^\times$, индуцированный характером χ группы $\bar{K}^\times$, мы обозначаем тем же символом χ . Мы говорим, что некоторое свойство выполняется для почти всех P , если оно выполняется для почти всех пополнений числового поля F (при условии, что все данные определены над F). Для произвольной схемы V конечного типа над полем $L \subset \mathbb{C}$ через $\chi(V)$ обозначается эйлерова характеристика многообразия $V(\mathbb{C})$ относительно сингулярных когомологий.

4.1. Степень локальных дзета-функций.

(4.1.1) Так как $Z_\Phi(s, \chi)$ — рациональная функция от q^{-s} , то можно определить ее степень $\deg Z_\Phi(s, \chi)$ как разность между степенью числителя и степенью знаменателя, рассматриваемых как многочлены от q^{-s} . В предположениях теоремы 3.4 из явных формул вытекает, что $\deg Z_\Phi(s, \chi) \leq 0$. Ясно, что эта степень отрицательна тогда и только тогда, когда $\lim_{s \rightarrow -\infty} Z_\Phi(s, \chi) = 0$.

(4.1.2) Предложение [12]. Для почти всех P выполняется равенство $\deg Z_0(s, \chi_{\text{triv}}) = 0$. Если многочлен f однороден, то

$$\deg Z(s, \chi_{\text{triv}}) = -\deg f.$$

Доказательство. Из теоремы 3.4 следует, что

$$q^n \lim_{s \rightarrow -\infty} Z_0(s, \chi_{\text{triv}}) \equiv \sum_{ICT} c_{I, \chi_{\text{triv}}, 0} \equiv q^n Z_0(0, \chi_{\text{triv}}) = 1 \pmod{q}.$$

Таким образом, $\lim_{s \rightarrow -\infty} Z_0(s, \chi_{\text{triv}}) \neq 0$. Первое утверждение доказано. Второе утверждение следует из первого в силу формулы $Z(s, \chi) = q^{n+s \deg f} Z_0(s, \chi)$.

(4.1.3) При $f(0) = 0$ мы доказали в [15] с помощью метода исчезающих циклов [22], что для почти всех P и произвольного характера χ группы $\bar{K}^\times$ порядка d

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} Z_0(s, \chi) = (1 - q) q^{-n} \sum_i (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}, H^i(F_0, Q_l)^\chi),$$

где F_0 — слой Милнора функции $\bar{f}$ в точке 0, через $H^i(F_0, Q_l)^\chi$ обозначена компонента группы когомологий, на которой полусимплификация локальной монодромии действует как χ , а Frob — это подходящее поднятие оператора Фробениуса. В частности, отсюда следует, что $\deg Z_0(s, \chi) < 0$, если у локальной монодромии функции f в точке 0 нет собственного значения порядка d .

4.2. Функциональное уравнение.

(4.2.1) Через $K^{(e)}$ мы обозначаем неразветвленное расширение поля K степени e и полагаем

$$Z(s, e, \chi) := Z(s, \chi \circ N_{K^{(e)}/K}, K^{(e)}, f),$$

где N обозначает норму. Д. Мёзер показал [61], что функция $Z(s, e, \chi_{\text{triv}})$, рассматриваемая как функция от s и e , является рациональной функцией от q^{-es} , $\alpha_1^e, \dots, \alpha_r^e$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$.

В случае хорошей редукции из теоремы 3.4 и формулы (3.5.1) непосредственно следует, что это утверждение верно и для функции $Z(s, e, \chi)$, где χ — произвольный характер группы $\bar{K}^\times$. В силу этой рациональности функцию $Z(s, e, \chi)$ можно канонически продолжить до некоторой функции на $\mathbb{C} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Эти обозначения позволяют нам сформулировать результат Мёзера и Денефа [17] (см. также [62]):

(4.2.2) **Теорема [17].** Если многочлен f однороден, то для почти всех P выполняется функциональное уравнение

$$Z(s, -e, \chi) = q^{-es \deg f} Z(s, e, \chi^{-1})$$

для всех $e \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Идея доказательства. Для однородного многочлена функцию $Z(s, \chi)$ можно выразить явно с помощью вложенного разрешения особенностей (с хорошей редукцией) кольца $\text{Proj } K[x]/(f(x))$. Это выражение имеет то преимущество, что многообразия $\bar{E}_I$ становятся собственными. Затем можно применить функциональное уравнение для дзета-функции Вейля многообразий $\bar{E}_I$ и вывести теорему для случая тривиального характера χ . В общем случае необходимо использовать двойственность Пуанкаре для пучка $\mathcal{F}_\chi$ на $\bar{E}_I \cap U_d$ (обозначения такие же, как в п. 3.5). Это возможно, так как когомологии этого пучка равны когомологиям с компактными носителями в силу леммы 3.6.

(4.2.3) Приведенное выше функциональное уравнение принимает интересный вид, если функция $Z(s, \chi_{\text{triv}})$ универсальна, т.е. если существует функция $Z(u, v) \in Q(u, v)$, такая, что $Z(s, \chi_{\text{triv}}, K^{(e)}, f) = Z(q^{-es}, q^{-e})$ для всех $e \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Такое часто случается, если f является относительным инвариантом некоторой редуктивной группы (см. п. 7.6). Отметим, что если функция $Z(s, \chi_{\text{triv}})$ универсальна, функциональное уравнение из (4.2.2) принимает вид $Z(u^{-1}, v^{-1}) = u^{\deg f} Z(u, v)$. Именно такой гипотетический вид функционального уравнения был первоначально предложен Игузой [38]. Его гипотеза основывалась на обширных вычислениях относительных инвариантов в предоднородных векторных пространствах.

4.3. Топологические дзета-функции.

(4.3.1) Лёзер и Денеф [16] связали с каждым многочленом $f \in \mathbb{C}[x]$ и натуральным числом d «топологическую дзета-функцию»

$$(4.3.1.1) \quad Z_{\text{top}}^{(d)}(s) := \sum_{\substack{ICT \\ \forall i \in I: d | N_i}} \chi(\bar{E}_I) \prod_{i \in I} \frac{1}{N_i s + \nu_i};$$

здесь использованы обозначения п. (1.3.1) для разрешения особенности поверхности уровня $f^{-1}(0)$ над $\mathbb{C}$. Замечательно, что это выражение не зависит от выбранного разрешения. Единственное известное на сегодняшний день доказательство этой формулы использует локальные дзета-функции. Предположим для простоты, что коэффициенты функции f принадлежат числовому полю F . Тогда для почти всех P теорема 3.4 и формула (3.5.1) дают

$$(4.3.1.2) \quad Z_{\text{top}}^{(d)}(s) = \lim_{e \rightarrow 0} Z(s, e, \chi),$$

где χ является характером группы $\bar{K}^\times$ порядка d . Отсюда следует, что определение функции $Z_{\text{top}}^{(d)}(s)$ действительно корректно. Переход к пределу при $e \rightarrow 0$ имеет смысл, так как функцию $Z(s, e, \chi)$ можно l -адически интерполировать как функцию от e (при e , кратном подходящему числу, см. [16]). В частности,

$$(4.3.1.3) \quad \lim_{e \rightarrow 0} c_{I, \chi}(K^{(e)}) = \chi_c(\bar{E}_I \otimes F_q^a, \mathcal{F}_\chi) = \chi(\bar{E}_I)$$

для почти всех P ; через χ_c здесь обозначена эйлерова характеристика относительно l -адических когомологий с компактными носителями (ср. [41]). Из (4.3.1.2) также вытекает следующее утверждение.

(4.3.2) **Теорема** [16]. Пусть ρ — полюс функции $Z_{\text{top}}^{(d)}(s)$. Тогда для почти всех P и всех характеров χ группы $\bar{K}^\times$ порядка d существует бесконечно много неразветвленных расширений L поля K , для которых ρ является полюсом функции $Z(s, \chi \circ N_{L/K}, L, f)$.

Таким образом, из справедливости гипотезы (2.3.1) следовало бы, что полюсы функции $Z_{\text{top}}^{(d)}(s)$ являются корнями многочлена Бернштейна $b_f(s)$. Однако даже связь с локальной монодромией (которая вытекала бы из гипотезы (2.3.2)) до сих пор не доказана.

(4.3.3) Ввиду того что $Z(0, \chi_{\text{triv}}) = 1$, из формулы (4.3.1.2) следует, что $Z_{\text{top}}^{(1)}(0) = 1$. Локальный вариант этого утверждения вместе с техникой приближений М. Артина дает следующее приложение к аналитической геометрии.

(4.3.4) **Теорема** [16]. Пусть $h: Y \rightarrow X$ — аналитическая перестройка компактных аналитических многообразий. Предположим, что исключительное множество E отображения h имеет нормальные пересечения в Y . Пусть E_i , $i \in T$, — неприводимые компоненты

множества E , а $\overset{\circ}{E}_i$, ν_i определены, как в п. (1.3.1). Тогда

$$\chi(h(E)) = \sum_{\emptyset \neq I \subset T} \chi(\overset{\circ}{E}_I)/n_I,$$

где $n_I = \prod_{i \in I} \nu_i$.

Интересно было бы найти доказательство этой теоремы, не использующее локальных дзета-функций.

4.4. Голоморфность функции $Z_\Phi(s, \chi)$ и монодромия.

(4.4.1) В силу теоремы (1.3.2) функция $Z_\Phi(s, \chi)$ голоморфна на $\mathbb{C}$ в случае, когда порядок характера χ не делит ни одно из чисел N_i . Числа N_i определены неинвариантно, но порядок любого собственного значения оператора локальной монодромии на $f^{-1}(0)$ (как корня из единицы) делит некоторые из N_i . Следующая гипотеза весьма оптимистична.

(4.4.2) Гипотеза [15]. Если Φ — вычетная функция и порядок характера χ не делит порядок никакого собственного значения оператора локальной монодромии множества f ни в одной из комплексных точек поверхности уровня $f^{-1}(0)$, то для почти всех P функция $Z_\Phi(s, \chi)$ является голоморфной.

На самом деле эта гипотеза может оказаться справедливой для любого P и любой функции Φ . Следующее утверждение показывает, что это наилучшая из возможных гипотез.

(4.4.3) Предложение [15]. Предположим, что 0 является изолированной особенностью гиперповерхности $f(x) = 0$. Для почти всех P , если порядок $d \neq 1$ характера χ группы $\bar{K}^\times$ делит порядок какого-нибудь собственного значения локальной монодромии функции f в 0, то функция $Z_0(s, \chi \circ N_{L/K}, L, f)$ не голоморфна в $\mathbb{C}$ для бесконечно большого числа неразветвленных расширений L поля K .

Доказательство. Из теоремы 3.4, формулы (3.5.2) и варианта формулы (4.3.1.3) получаем

$$(4.4.3.1) \quad \lim_{e \rightarrow 0} \text{Coeff}_{t^{\circ m}}(q^e - 1)^{-1} Z_0(s, \chi \circ N_{K^{(e)}/K}, K^{(e)}, f) \\ = \sum_{d|N_i|m} \chi(\overset{\circ}{E}_i \cap h^{-1}(0))$$

для всех $m \in N \setminus \{0\}$. Из предположения о числе d и формулы А'Кампо (2.1.2) следует существование минимального m , такого, что $d|m$ и

$\sum_{N_i=m} \chi(\overset{\circ}{E}_i \cap h^{-1}(0)) \neq 0$. Эта последняя сумма равна, таким образом, правой части формулы (4.4.3.1). Значит, дзета-функция над $K^{(e)}$ непостоянна для бесконечного множества значений e , и поэтому она не голоморфна, так как ее степень неположительна.

4.5. L -функции экспоненциальных сумм по модулю P^m .

(4.5.1) L -функция экспоненциальной суммы по модулю P^m для многочлена $f \in R[x]$ определяется формулой

$$L_m(t, K, f) := \exp \sum_{e=1}^{\infty} E(\pi^{-m}, K^{(e)}, f) \frac{t^e}{e}$$

для $m \in N \setminus \{0\}$. Применяя метод Дворка [21], можно показать, что $L_m(t, K, f)$ является рациональной функцией по t . В случае ручной хорошей редукции это можно вывести непосредственно из предложения (1.4.4) и результатов разд. 3 (для $m \geq 2$). Следующая теорема выражает степень этих L -функций в терминах монодромии.

(4.5.2) **Теорема.** *Предположим, что у f есть только изолированные критические точки в C^n , $n \geq 2$. Тогда для почти всех P и всех $m \geq 2$*

$$\deg L_m(t, K, f) = (-1)^{n-1} \sum_{\alpha} \alpha^{m-1},$$

где α пробегает все критические значения (с учетом кратностей) действия монодромии на $H^{n-1}(F_b, C)$ во всех критических точках b многочлена f (в обозначениях п. (2.1.1)).

Доказательство. Ясно, что

$$\deg L_m(t, K, f) = - \lim_{e \rightarrow 0} E(\pi^{-m}, K^{(e)}, f).$$

При $f(0) = 0$ предложение (1.4.4), теорема 3.3, формула (4.4.3.1) и соотношение Хассе-Давенпорта дают

$$\lim_{e \rightarrow 0} E_0(\pi^{-m}, K^{(e)}, f) = 1 - \sum_{N_i | m-1} N_i \chi(\overset{\circ}{E}_i \cap h^{-1}(0)).$$

По формуле А'Кампо (2.1.2) правая часть этого равенства равна $(-1)^n \sum_{\alpha} \alpha^{m-1}$, где α пробегает все собственные значения действия монодромии на $H^{n-1}(F_0, C)$. Теорема вытекает теперь из замечания (4.5.3) ниже.

Для $m = 1$ теорема остается справедливой в случае, когда у f есть компактификация $g: Y \rightarrow A^1$, такая, что $Y \setminus A^n$ является дивизором

с нормальными пересечениями над Λ^1 , однако в общем случае она неверна.

(4.5.3) **Замечание.** Отметим следующий совершенно элементарный факт. Если Φ — вычетная функция, $f \in R[x]$ и $C_f \cap \text{Supp } \bar{\Phi} = \emptyset$, то $E_{\Phi}(z) = 0$ при $|z| > q$.

4.6. Не-вклад от некоторых E_i .

Теорема [14]. Пусть редукция хорошая. Пусть χ — характер группы $\bar{K}^\times$ порядка d и $i_0 \in T$. Предположим, что компонента E_{i_0} собственная, $d|N_{i_0}$ и E_{i_0} не пересекает ни одну компоненту E_j , такую, что $d|N_j$, $j \neq i_0$. Если $\chi(\bar{E}_{i_0}) = 0$, то вклад компоненты E_{i_0} в $Z(S, \chi)$ равен нулю, т.е. суммирование в формуле из теоремы 3.4 можно вести по множеству $I \subset T \setminus \{i_0\}$.

Это утверждение является непосредственным следствием формулы (3.5.1) и леммы, утверждающей, что в описанной ситуации $H_c^i(\bar{E}_{i_0} \otimes F_q^a, \mathcal{F}_\chi) = 0$ для всех $i \neq n-1$. В частном случае, когда $\bar{E}_{i_0}$ аффинно, эта лемма вытекает из двойственности Пуанкаре, так как когомологии пучка $\mathcal{F}_\chi$ на $\bar{E}_{i_0} \otimes F_q^a$ равны когомологиям с компактными носителями по лемме 3.6. Общий случай требует дополнительной работы, см. [14].

5. МНОГОЧЛЕНЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

5.1. Многочлены вида $f(x) + g(y)$. Пусть $f(x) \in K[x]$, $g(y) \in K[y]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ и Φ_1, Φ_2 — функции Шварца-Брюа на K^n, K^m . Положим $A(s, \chi) = s + 1$, если характер $\chi = \chi_{\text{triv}}$ тривиален, и $A(s, \chi) = 1$ в противном случае. Предположим, что $C_f \cap \text{Supp } \Phi_1 \subset f^{-1}(0)$ и $C_g \cap \text{Supp } \Phi_2 \subset g^{-1}(0)$. Тогда полюсы функции $A(s, \chi) Z_{\Phi_1, \Phi_2}(s, \chi, K, f(x) + g(y))$ имеют вид $s_1 + s_2$, где s_1 (соотв. s_2) — это полюс функции $A(s, \chi') Z_{\Phi_1}(s, \chi', K, f)$ (соотв. функции $A(s, \chi'') Z_{\Phi_2}(s, \chi'', K, g)$) для некоторой пары характеров $\chi' \chi'' = \chi$. Действительно, этот факт непосредственно вытекает из следствия (1.4.5) и того очевидного факта, что $E_{\Phi_1, \Phi_2}(z, K, f(x) + g(y)) = E_{\Phi_1}(z, K, f) E_{\Phi_2}(z, K, g)$. Заметим, что гипотеза о монодромии для этого случая полностью согласуется с результатом Тома и Себастьяни [76] о монодромии многочлена $f(x) + g(y)$.

5.2. Многочлены ст двух переменных. Покажем теперь, что гипотеза (2.3.1) о связи между функцией $Z(s, \chi)$ и многочленом $b_f(s)$

справедлива для любого многочлена $f \in K[x_1, x_2]$. Воспользуемся для этого каноническим вложенным разрешением (Y, h) особенности поверхности уровня $f^{-1}(0)$ над алгебраическим замыканием K^a поля K ; в дальнейшем сохраняются обозначения п. (1.3.1). В частности, E_j являются проективными прямыми над K^a при $j \in T \setminus T_s$. Следующая теорема первоначально была доказана Страуссом [74] для аналитически неприводимых особенностей и почти всех колец P , а затем распространена Мёзером [60], Игузой [32] и Лёзером [52] на общий случай.

(5.2.1) **Теорема.** Пусть $f \in K[x_1, x_2]$. Если s является полюсом функции $Z(s, \chi)$, то $\text{Re}(s) = -\nu_j/N_j$ для некоторого $j \in T$, причем $|E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j| \geq 3$ или $j \in T_s$.

Относительно обратного утверждения см. [79]. Обычно большинство множеств $E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j$ состоит не более чем из двух точек. Это объясняет, почему многие из возможных полюсов фактически не реализуются. Все известные доказательства теоремы (5.2.1) основаны на следующей лемме.

(5.2.2) **Лемма.** Зафиксируем $j \in T \setminus T_s$. Пусть $a_i, i \in J$, — геометрические точки множества $E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j$. Для $i \in J$ обозначим через N_i, ν_i числовую характеристику единственной компоненты $E_i \neq E_j$, которая содержит точку a_i , и положим $\alpha_i = \nu_i - N_i \nu_j / N_j$. Тогда

$$\sum_{i \in J} (\alpha_i - 1) = -2, \quad \sum_{i \in J} N_i \equiv 0 \pmod{N_j}.$$

Первые доказательства этой леммы носили вычислительный характер. Лёзер [52] обнаружил содержательное доказательство первой формулы, заметив, что степень дифференциальной формы ω в теореме (5.2.4) ниже равна -2 . В п. (6.1.3) мы дадим набросок простого содержательного доказательства обеих формул, принадлежащего Вейсу [82].

(5.2.3) **Доказательство теоремы (5.2.1)** (случай ручной хорошей редукции). Предположим для простоты, что все объекты определены над K . Рассмотрим множество S всех E_j , для которых $\text{Re}(s) = -\nu_j/N_j$. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда $|E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j| \leq 2$ и $j \notin T_s$ для всех $E_j \in S$. Различные компоненты $E_{j_1}, E_{j_2} \in S$ не пересекаются; в противном случае двойное применение последней леммы показывает, что существовала бы третья компонента $E_{j_3} \in S$, пересекающая E_{j_2} . Повторяя это рассуждение, мы пришли бы к вы-

воду о том, что S бесконечно. Пусть $E_j \in S$ и N_j делится на порядок d характера χ . Достаточно показать, что компонента E_j не дает вклад в полюс s . Предположим, что множество $E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j$ состоит из двух точек a_1, a_2 (для одной точки рассуждение аналогично). Если $d \nmid N_1$, то $d \nmid N_2$, согласно последней лемме, и компонента E_j не дает вклада в полюс в силу теоремы 4.6. Предположим теперь, что $d | N_1, d | N_2$. Тогда пучок $\mathcal{F}_\chi$ из п. 3.5 локально постоянен, а значит, и геометрически постоянен на $\overset{\circ}{E}_j$. Таким образом, из явной формулы разд. 3 следует, что вклад компоненты E_j в вычет функции $Z(s, \chi)$ в точке s равен (с точностью до множителя)

$$1 + (q^{\alpha_1} - 1)^{-1} + (q^{\alpha_2} - 1)^{-1} = (q^{\alpha_1 + \alpha_2} - 1) / (q^{\alpha_1} - 1)(q^{\alpha_2} - 1).$$

Так как в силу последней леммы $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, вклад компоненты E_j равен нулю.

(5.2.4) **Теорема** (Лёзер [52]). Пусть $f \in C[x_1, x_2]$ и $j \in T \setminus T_s$. Если $|E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j| \geq 3$, то число $-\nu_j/N_j$ является корнем многочлена Бернштейна $b_f(s)$ многочлена f .

Идея доказательства. В обозначениях леммы (5.2.2) положим $S = \{a_i \mid i \in J\}$. Предположим, что $\alpha_i \neq 0$ для всех $i \in J$. (В противном случае требуется другое, но более простое рассуждение.) Вычет формы $(f \circ h)^{1-\nu_j/N_j} h^*(dx_1 \wedge dx_2)$ на $E_j = \mathbf{P}^1$ определяет мероморфную дифференциальную форму ω с коэффициентами в подходящей локальной системе L ранга 1 на $\mathbf{P}^1 \setminus S$. Тогда (i) $|S| \geq 3$, (ii) у формы ω нет нулей и полюсов вне множества S и (iii) кратность формы ω в каждой точке множества S нецелая. Действительно, локальные вычисления показывают, что кратность формы ω в точке a_i равна $\alpha_i - 1$, а Лёзер с помощью трудного комбинаторного рассуждения показал, что $|\alpha_i| < 1$. Делинь и Мостов доказали, что тогда ω определяет ненулевой класс когомологий в $H^1(\mathbf{P}^1 \setminus S, L)$. Таким образом, существует цикл $\gamma \in H_1(\mathbf{P}^1 \setminus S, L)$, для которого $\int_\gamma \omega \neq 0$. Рассматривая подходящее этальное накрытие дополнения $\mathbf{P}^1 \setminus S$ и поднятие цикла $m\gamma$ для подходящего $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, можно построить семейство циклов $\mu(t) \in H_1(f^{-1}(t), \mathbf{C})$, $t \neq 0$, для которого

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mu(t)} f^{1-\nu_j/N_j} \frac{dx \wedge dy}{df} = \int_{m\gamma} \omega \neq 0.$$

Таким образом, старший член асимптотического разложения интеграла $\int_{\mu(t)} (dx \wedge dy)/df$ имеет вид $t^{-1+\nu_j/N_j}$. Так как $\nu_j/N_j \leq 1$ (см. [32]), то отсюда следует, что число $-\nu_j/N_j$ является корнем многочлена $b_f(s)$.

(5.2.5) Теоремы (5.2.1) и (5.2.4) в совокупности доказывают результат Лёзера о том, что для любого многочлена $f \in K[x_1, x_2]$, если s является полюсом функции $Z(s, \chi)$, то $\operatorname{Re}(s)$ является корнем многочлена Бернштейна $b_f(s)$.

5.3. Невырожденные многочлены. Эту тему мы затронем лишь вкратце. О понятии многочлена, невырожденного относительно своего многогранника Ньютона в начале координат, см. Варченко [78]. Для таких многочленов существует явное вложенное разрешение, называемое «торическим». Такое разрешение приводит, однако, к чрезвычайно обширному множеству кандидатов в полюсы функции $Z(s, \chi)$. Лихтин и Мёзер [48] определили реальный набор полюсов для случая многочленов от двух переменных. В общем случае разумный набор кандидатов в полюсы (по одному значению $\operatorname{Re}(s)$ для каждой грани многогранника) был получен Денефом (неопубликовано, см. [54, Theorem 5.3.1]) (применяется тот же метод, что и в вещественном случае [18, I]). Лёзер [54] доказал, что при некоторых слабых дополнительных условиях эти кандидаты в полюсы действительно являются корнями многочлена Бернштейна $b_f(s)$. Некоторые результаты и увлекательные открытые вопросы о наибольшем отличном от -1 полюсе можно найти в [18, II].

6. РАБОТЫ ВЕЙСА

6.1. Связи между числовыми характеристиками. Пусть $f \in C[x]$ и $h: Y \rightarrow C^n$ — вложенное разрешение особенности поверхности уровня $f^{-1}(0)$ над C , построенное, как в [25]. В частности, h является композицией раздутий. Вейс [80, 81] построил общую теорию отношений между числовыми характеристиками разрешений, обобщающую лемму (5.2.2).

В обозначениях п. (1.3.1) зафиксируем исключительный дивизор $E = E_j$, $j \in T \setminus T_s$. Пусть E'_i , $i \in J$, — неприводимые компоненты множества $E \setminus \overset{\circ}{E}$. Для $i \in J$ обозначим через N_i , ν_i числовую характеристику единственной компоненты $E_i \neq E$, которая содержит E'_i , и положим $\alpha_i = \nu_i - N_i \nu_j / N_j$. Отправной точкой рассуждений Вейса послужила следующая лемма.

(6.1.1) **Лемма** [80, 81]. Пусть K_E — канонический дивизор на E и E^2 — дивизор самопересечения дивизора E в Y . Тогда

$$K_E = \sum_{i \in J} (\alpha_i - 1) E'_i \text{ в } \operatorname{Pic} E \otimes \mathbb{Q} \text{ и } N_j E^2 = - \sum_{i \in J} N_i E'_i \text{ в } \operatorname{Pic} E,$$

где Pic обозначает группу Пикара.

Доказательство. По определению числовых характеристик имеем $\sum_{i \in T} N_i E_i = 0$ и $K_Y = \sum_{i \in T} (\nu_i - 1) E_i$ в $\text{Pic } Y$. Таким образом, $N_j E = -\sum_{i \neq j} N_i E_j$, и формула для $N_j E^2$ получается взятием пересечений с E . Более того, $K_Y + E = \nu_j E + \sum_{i \neq j} (\nu_i - 1) E_i$. Заменяя $\nu_j E$ на $-\sum_{i \neq j} N_i \nu_j N_j^{-1} E_i$, получаем $K_Y + E = \sum_{i \neq j} (\alpha_i - 1) E_i$. Выражение для K_E следует теперь из формулы присоединения $K_E = (K_Y + E) \cdot E$.

(6.1.2) *Доказательство леммы (5.2.2).* Эта лемма непосредственно получается из приведенной выше леммы путем взятия степеней обеих частей равенства, так как $\deg K_E = -2$.

(6.1.3) Опишем теперь некоторые результаты Вейса. С созданием множества E в процессе разрешения можно связать *основные соотношения* (B1) и (B2), обобщающие лемму (5.2.2). Помимо этого с каждым раздутием, «изменяющим» E в процессе разрешения, связаны *дополнительные соотношения* (A). Точнее говоря, многообразие E в окончательном разрешающем пространстве Y может быть получено конечной последовательностью раздутий

$$E^0 \xleftarrow{\pi_0} E^1 \xleftarrow{\pi_1} \dots E^i \xleftarrow{\pi_i} E^{i+1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-2}} E^{m-1} \xleftarrow{\pi_{m-1}} E^m = E$$

с неприводимым неособым центром $D_i \subset E^i$ и исключительным подмногообразием $C_{i+1} \subset E^{i+1}$ для $i = 0, 1, \dots, m-1$. Многообразие E^0 создается на каком-то шаге глобального процесса разрешения как исключительное многообразие некоторого раздутия с центром D ; оно изоморфно расслоению проективного пространства $\Pi: E^0 \rightarrow D$ над D . Пусть C_i , $i \in J_0$, — неприводимые компоненты пересечений многообразия E^0 с ранее созданными исключительными дивизорами в глобальном процессе разрешения или с собственным прообразом поверхности $f^{-1}(0)$. Тогда E'_i , $i \in J$, являются в точности собственными прообразами множеств C_i , $i \in J_0 \cup \{1, \dots, m\}$. Мы полагаем, таким образом, $J = J_0 \cup \{1, \dots, m\}$, $E'_i =$ (собственный прообраз множества C_i). Соотношения (A) выражают числа α_i (соотв. $N_i \bmod N_j$) для $i = 1, \dots, m$ через числа α_l (соотв. $N_l \bmod N_j$) для $l \in J_0 \cup \{1, \dots, i-1\}$, см. [80, 81]. Соотношения (B1) имеют вид

$$(B1) \quad \sum_{i \in J_0} d_i (\alpha_i - 1) = -k \quad \text{и} \quad \sum_{i \in J_0} d_i N_i \equiv 0 \bmod N_j,$$

где $k = n - \dim D$ и d_i — это степень цикла пересечения $C_i \cdot F$ на F для общего слоя $F \cong \mathbf{P}^{k-1}$ расслоения $\Pi: E^0 \rightarrow D$. Соотношения (B2) выполняются в $\text{Pic } D$, и их описать труднее. Для случая когда D — точка, они пусты. Если $n = 3$ и D — проективная кривая рода g , соотношения (B2) для α_i становятся числовым соотношением, если

взять степени в $\text{Pic } \mathcal{D}$, а именно,

$$\sum_{\substack{i \in J_0 \\ d_i \neq 0}} \frac{\kappa_i}{2d_i} (\alpha_i - 1) + \sum_{\substack{i \in J_0 \\ d_i = 0}} (\alpha_i - 1) = 2g - 2,$$

где κ_i — индекс самопересечения компоненты C_i в E^0 . Доказательство соотношения (B1) основано на лемме (6.1.1); при этом берутся степени пересечения с F собственных прообразов в $\text{Pic } E^0$ дивизоров в $\text{Pic } E$. Доказательства соотношений (B2) и (A) также основаны на лемме (6.1.1), но они требуют дополнительной работы.

6.2. Приложения к гипотезе о монодромии. В п. 5.2 мы видели две конфигурации $\mathring{E} = \mathring{E}_j$, которые не дают вклада в полюсы, а именно прямую $\mathbf{P}^1$ без одной или двух точек. С помощью соотношений из п. 6.1 Вейс распространил это утверждение на высшие размерности (в большей степени на поверхности, $n = 3$), предложив длинный (хотя и не исчерпывающий) список конфигураций $\mathring{E}$, не дающих вклада в полюсы функции $Z(s, \chi_{\text{triv}})$ (это означает, что при вычислении вычета в точке $s = -\nu_j/N_j$ с помощью явных формул в предположении хорошей редукции и достаточно большого поля K можно опустить все $\mathring{E}_I$, для которых $E_I \subset E$). При $\chi(\mathring{E}) = 0$ и $\mathring{E} \subset h^{-1}(0)$ $\mathring{E}$ не дает вклада в формулу А'Кампо (2.1.2). Таким образом, с точки зрения гипотезы о монодромии можно ожидать, что такое E обычно не дает вклада в полюсы. Вейс искал конфигурации $\mathring{E}$, для которых $\chi(\mathring{E}) = 0$, и доказал, что все найденные им конфигурации, кроме двух, не дают вклада в полюсы. Я считаю этот факт веским подтверждением гипотезы о монодромии. Вот два примера не дающих вклад в полюсы конфигураций с $E^0 = \mathbf{P}^2$. Пример 1: $\mathring{E} = \mathbf{P}^2 \setminus$ (по крайней мере две прямые, проходящие через одну и ту же точку P , и третья прямая, не проходящая через эту точку). Пример 2: $\mathring{E} = \mathbf{P}^2 \setminus$ (кривые $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $y^k z = x^{k+1}$) при $k \geq 2$.

7. ПРЕДОДНОРОДНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

7.1. Рассмотрим регулярное предоднородное векторное пространство (G, X) над полем K , состоящее из связной редуктивной алгебраической подгруппы G группы GL_n , определенной над K , которая действует транзитивно на дополнении U к абсолютно неприводимой K -гиперповерхности V в $X = A^n$. Пусть V задается уравнением

$f = 0$ для $f \in K[x]$. Тогда многочлен f однороден и $f(gx) = \nu(g)f(x)$ для всех $g \in G$, где ν — рациональный характер группы G . Таким образом, f является относительным инвариантом группы G . Имеем $(\det g)^2 = \nu(g)^{2\kappa}$, где $\kappa = n/\deg(f)$, $2\kappa \in \mathbb{N}$. Кроме того, степень многочлена Бернштейна $b_f(s)$ равна $\deg(f)$. Все эти сведения можно найти в [70]. (На самом деле $b_f(s)$ равен многочлену Сато, см. [23, Cor. 2.5.10].)

Мы увидим ниже, что локальные дзета-функции таких относительных инвариантов f имеют весьма замечательные свойства. В архимедовом случае это было впервые обнаружено М. Сато и Синтани [70], p -адический случай был впервые исследован Игузой [31]. В дальнейшем K является p -адическим полем, а в пп. 7.4 и 7.5 мы дополнительно предполагаем, что V имеет лишь конечное число орбит относительно действия подгруппы $\ker \nu$. Приведем сначала простой пример.

7.2. Пример. Возьмем в качестве X пространство (m, m) -матриц, положим $G = SL_m \times GL_m$, и будем считать, что под действием элемента $(g_1, g_2) \in G$ точка $x \in X$ переходит в $g_1 x g_2^t$. Тогда $f(x) = \det x$, $b(s) = (s+1)(s+2) \dots (s+m)$ и $Z(s, \chi_{\text{triv}}) = \prod_{i=1}^m (1 - q^{-i}) / (1 - q^{-s-i})$. Имеются также примеры, в которых f является определителем (соотв. пфаффианом) на пространстве симметрических (соотв. антисимметрических) (m, m) -матриц или дискриминантом на пространстве бинарных кубических форм.

7.3. М. Сато и Кимура [69] построили полную классификацию по 29 типам всех K -расщепленных неприводимых (как представления) регулярных предоднородных векторных пространств, а Кимура [42] вычислил их многочлены Бернштейна. Для двадцати из этих двадцати девяти типов¹⁾ Игуза [26, 29, 31, 37] явно вычислил $Z(s, \chi_{\text{triv}})$. Таблицы приведены в [36]. Его вычисления не используют разрешения особенностей, но опираются на симметрию групповой структуры. Во всех этих случаях формулы показывают, что вещественные части полюсов действительно являются корнями многочленов $b_f(s)$. Это было первое подтверждение гипотезы (2.3.1). На основании этих формул Игуза и высказал в качестве гипотезы предложение (4.1.2) о степени функции $Z(s, \chi_{\text{triv}})$.

7.4. Игуза [31] составил конечный список возможных полюсов функции $Z_F(s, \chi)$, основанный только на теоретико-групповых данных пары (G, X) . Вот ослабленный вариант этого результата.

¹⁾Совсем недавно Игуза [40] вычислил $Z(s, \chi_{\text{triv}})$ еще для четырех типов.

Теорема (Игуза [31]). Если s является полюсом функции $Z_{\Phi}(s, \chi)$, то существует точка $a \in V(K)$, такая, что $|\nu(h)|^{k+\operatorname{Re}(s)} = \Delta_H(h)$ для всех $h \in H$, где H — стационарная подгруппа точки a в $G(K)$, а Δ_H — модуль подгруппы H (т. е. $d(h^{-1}uh) = \Delta_H(h) du$ для любой меры Хаара du на H).

Кимура, Ф. Сато и Цу [46] доказали недавно (с помощью микролокального анализа), что вещественные части всех возможных полюсов, описанных выше, являются корнями многочлена $b_f(s)$ в случае, когда пространство (G, X) неприводимое и приведенное (в смысле [69]).

7.5. Согласно теореме Бореля и Серра, $U(K)$ расщепляется на конечное число орбит группы $G(K)$, скажем на $U_1, \dots, U_l$. Для $i = 1, \dots, l$ определим функцию $Z_{i,\Phi}(s, \chi)$ так же, как функцию $Z_{\Phi}(s, \chi)$, заменив на U_i область интегрирования K^n . Эти функции рациональны по q^{-s} (см. разд. 8) и удовлетворяют следующим функциональным уравнениям.

Теорема (Игуза [31]). Для $i = 1, \dots, l$ и всех Φ

$$Z_{i,\Phi^*}(s, \chi) = \sum_{j=1}^l \gamma_{ij}(s, \chi) Z_{j,\Phi}(-s - \kappa, \chi^{-1}),$$

где Φ^* — преобразование Фурье функции Φ и γ_{ij} — рациональные функции от q^{-s} , не зависящие от Φ . Более того, теорема из п. 7.4 также выполняется для Z_i и γ_{ij} .

В формулировке теоремы молчаливо предполагается, что существует определенная над K инволюция группы $\operatorname{End}(X)$, относительно которой подгруппа G неподвижна (часто можно взять транспозицию). Обобщение этого результата см. в [44]. При $l = 1$ функциональное уравнение становится особенно красивым. Игуза классифицировал пространства (G, X) с $l = 1$ для случая, когда группа G неприводима и K -расщеплена, и вычислил функции γ_{11} для этих случаев явно [33]. В архимедовом случае о функциях γ_{ij} известно гораздо больше, см. [70].

7.6. Для двадцати типов предоднородных векторных пространств, упомянутых в п. 7.3, Игуза [38] доказал, что функция $Z(s, \chi_{\operatorname{triv}})$ универсальна в смысле п. (4.2.3). Этот факт привел его к следующей гипотезе.

Гипотеза. Если пространство (G, X) определено над числовым полем F , то функция $Z(s, \chi_{\operatorname{triv}}, f, K)$ универсальна для почти всех пополнений K поля F при условии, что G расщепляется над K .

Напомним, что, согласно п. (4.2.3), из универсальности следует функциональное уравнение $Z(u^{-1}, v^{-1}) = u^{\deg f} Z(u, v)$, впервые выведенное Игузой [38] для упомянутых выше двадцати типов посредством прямых вычислений. Другие гипотезы см. в [24].

7.7. Оно [65] показал, что для любого непостоянного абсолютно неприводимого многочлена f над числовым полем F произведение $(1 - q^{-1})^{-1} Z(s, \chi_{\text{triv}})$ по всем p -адическим пополнениям K поля F сходится и голоморфно при $\text{Re}(s) > 0$. Для случая неприводимых регулярных предоднородных векторных пространств с конечным числом *адельных* открытых орбит Игуза [35] доказал, что у этого произведения имеется мероморфное продолжение на всю s -плоскость. Кроме того, оно удовлетворяет некоторому функциональному уравнению (при слабых дополнительных предположениях, от которых удалось избавиться в [44, 45]). Сомнительно, однако, чтобы подобное утверждение было справедливым при бесконечном числе *адельных* открытых орбит. Другие *адельные* результаты можно найти у Дацковского и Райта [7].

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО СУБАНАЛИТИЧЕСКИМ МНОЖЕСТВАМ

Теорему Игузы о рациональности функции $Z_{\Phi}(s, \chi)$ можно значительно усилить. Вот краткий обзор соответствующих результатов. Символы K , R и P обозначают то же, что и в п. 1.1.

Подмножество S пространства K^n называется *полуалгебраическим*, если его можно описать с помощью конечной булевой комбинации условий вида $g(x) = 0$, $\text{ord } g(x) \leq \text{ord } h(x)$, или $\exists y \in K: g(x) = y^m$, где $g, h \in K[x]$, $m \in \mathbb{N}$. Подмножество S называется *полуаналитическим*, если локально в окрестности каждой точки пространства K^n его можно описать с помощью таких же условий, но функции g, h могут быть аналитическими.

Замечательная теорема Макинтайра [55] утверждает, что образ полуаналитического множества при проекции (из K^{n+k} на K^n) вновь является полуаналитическим множеством. Его доказательство основано на результатах из математической логики и на работах Акса-Козна-Ершова. Ссылки на другие доказательства можно найти в [19, (0.14)]. Многие встречающиеся на практике множества являются полуалгебраическими: их можно получить, итерировав операции проекции и дополнения. Например, полуалгебраическими являются p -адические орбиты действия p -адической алгебраической группы.

С помощью метода Игузы п. 1.3 можно показать, что для полуалгебраического ограниченного множества S интеграл $\int_S |f(x)|^s |dx|$ является рациональной функцией от q^{-s} при $f \in K[x]$ (см. в [10]

обобщение результата из [59]). Этот же результат можно получить, используя вместо разрешения особенностей p -адическое клеточное разбиение [10]. Этот метод основан на разбиении множества S на полуалгебраические «клетки», на каждой из которых функция $|f(x)|$ описывается просто, позволяя вычислить интеграл разделением переменных и индукцией по n . Другие применения того же метода можно найти в [11] и [68].

Вернемся к аналитическому случаю. Образ ограниченного полуаналитического множества при проекции не является, вообще говоря, полуаналитическим. Этот факт объясняет следующее определение. Подмножество S пространства K^n называется субаналитическим, если в окрестности каждой точки пространства K^n оно является проекцией некоторого ограниченного полуаналитического множества. Для случая вещественного поля $K = \mathbb{R}$ это определение совпадает с классическим понятием субаналитического множества, введенным Лоясевичем, Габриэловым и Хиронакой [75]. Ван ден Дрис и Денеф [19] построили теорию p -адических субаналитических множеств. Некоторые из их идей при этом были подсказаны математической логикой. Первая основная теорема утверждает, что дополнение к субаналитическому множеству вновь является субаналитическим. Другой основной результат состоит в следующем.

8.1. Теорема (униформизация p -адических субаналитических множеств [19]). Пусть $S \subset K^n$ — ограниченное субаналитическое множество. Тогда существуют K -аналитическое многообразие M и аналитическое отображение $h: M \rightarrow K^n$, являющееся композицией конечного числа раздутий относительно замкнутых подмногообразий коразмерности ≥ 2 , такие, что прообраз $h^{-1}(S)$ является полуаналитическим подмножеством в M .

В силу того что интегралы по полуаналитическим множествам можно вычислять с помощью метода Игузы, из предыдущей теоремы вытекает

8.2. Теорема. Рассмотрим ограниченное субаналитическое множество $S \subset K^n$ и аналитическую функцию $f: K^n \rightarrow K$. Тогда $\int_S |f(x)|^s |dx|$ является рациональной функцией от q^{-s} .

Утверждение теоремы остается верным и для любой функции f , график которой — субаналитическое множество [13]. Из теоремы 8.2 вытекает

8.3. Следствие [19]. Пусть f — степенной ряд над K , стоящий на K^n . Для $t \in \mathbb{N}$ обозначим через A_t мощность приведенного по

модулю P^m множества $V = \{x \in R^n \mid f(x) = 0\}$. Тогда функция $R(t) := \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m$ является рациональной функцией от t .

Это следствие, высказанное в качестве гипотезы Серром и Остерле [72, 64], послужило для нас главным поводом к изучению p -адических субаналитических множеств. Для вывода следствия 8.3 из теоремы 8.2 нужно представить ряд $R(t)$ через $\int_D |w|^s |dx| |dw|$, где $D = \{(x, w) \in R^{n+1} \mid \text{расстояние от } x \text{ до } V \text{ не превосходит } |w|\}$. Отметим, что D действительно является проекцией полуаналитического множества. Фундаментальные результаты об асимптотике последовательности A_m можно найти в [64]. Боллаертс [6] вычислил ряд $R(t)$ явно для случая, когда f зависит от двух переменных.

Из теоремы 8.2 вытекает и следующий замечательный результат, принадлежащий дю Сотуа [20].

8.4. Теорема. Пусть G — компактная p -адическая аналитическая группа. Обозначим через C_m для $m \in \mathbb{N}$ число открытых подгрупп индекса p^m в G . Тогда функция $\sum_{m=0}^{\infty} C_m t^m$ рациональна по t .

Упомянем некоторые дальнейшие продвижения. Основные результаты о p -адических полуалгебраических и субаналитических множествах неоднородны по p . Однородные варианты получены Пасом [66, 67] и Ван ден Дрисом [77]. Субаналитические множества в аналитической геометрии твердого тела изучались Липшицем [49] и Схотенсом [71].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A'Campo N., La fonction zêta d'une monodromie, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 233–248.
- [2] Atiyah M. F., Resolution of singularities and division of distributions, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 145–150.
- [3] Barlet D., Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques, Ann. Sci. École Norm. Sup. **17** (1984), 293–315.
- [4] Бернштейн И. Н. Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру. — Функц. анализ и его прил., 1972, т. 6, вып. 4, с. 26–40.
- [5] Бернштейн И. Н., Гельфанд С. И. Мероморфность функции P^λ . — Функц. анализ и его прил., 1969, т. 3, вып. 1, с. 84–85.
- [6] Bollaerts D., On the Poincaré series associated to the p -adic points on a curve, Acta Arithmetica **LI** (1988), 9–30.
- [7] Datskovsky B., Wright D. J., Density of discriminants of cubic extensions, J. Reine Angew. Math. **386** (1988), 116–138.
- [8] Deligne P., La conjecture de Weil I, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

- [9] Deligne P., Cohomologie Etale (SGA 4 1/2), Lect. Notes in Math., vol. 569, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [10] Denef J., The rationality of the Poincaré series associated to the p -adic points on a variety, Invent. Math. **77** (1984), 1-23
- [11] Denef J., On the evaluation of certain p -adic integrals, Séminaire de Théorie de Nombres Paris 1983-84, Progress in Math. vol. 59, Birkhäuser, 1985, 25-47.
- [12] Denef J., On the degree of Igusa's local zeta function, Amer. J. Math. **109** (1987), 991-1008.
- [13] Denef J., Multiplicity of the poles of the Poincaré series of a p -adic sub-analytic set, Séminaire de Théorie de Nombres de Bordeaux, 1987-1988, Exposé $n^{\circ} 43$.
- [14] Denef J., Local zeta functions and Euler characteristics, Duke Math. J. **63** (1991), 713-721.
- [15] Denef J., Degree of local zeta functions and monodromy, Compositio Math. **89** (1993), No. 2, 207-216.
- [16] Denef J., Loeser F., Caractéristique d'Euler-Poincaré, Fonctions zêta locales et Modifications analytiques, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), No. 4, 705-720.
- [17] Denef J., Meuser D., A functional equation of Igusa's local zeta function, Amer. J. Math. **113** (1991), No. 6, 1135-1152.
- [18] Denef J., Sargos P., Polyèdre de Newton et distribution f_{+}^s . I, J. Analyse Math. **53** (1989), 201-218; Polyèdre de Newton et distribution f_{+}^s . II, J. Anal. Math. **53** (1989), 201-218.
- [19] Denef J., van den Dries, p -adic and real subanalytic sets, Ann. of Math. **128** (1988), 79-138.
- [20] Du Sautoy M., Finitely generated groups, p -adic analytic groups, and Poincaré series, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), 121-126.
- [21] Dwork B., On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. Math. **82** (1960), 631-648.
- [22] Grothendieck A., Deligne P., Katz N., Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique (SGA7), Lect. Notes in Math., vols. 288, 340, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972-73.
- [23] Gyoja A., Theory of Prehomogeneous Spaces, Preprint.
- [24] Gyoja A., Lefschetz principle in the theory of prehomogeneous vector spaces, Preprint.
- [25] Hironaka H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math. **79** (1964), 109-326.
- [26] Igusa J., On the arithmetic of Pfaffians, Nagoya Math. J., **47**, (1972), 169-198.
- [27] Igusa J., On a certain Poisson formula, Nagoya Math. J. **53** (1974), 211-233.
- [28] Igusa J., Complex powers and asymptotic expansions I, J. Reine Angew. Math. **268/269** (1974), 110-130; II, Ibid **278/279** (1975), 307-321.
- [29] Igusa J., Exponential sums associated with a Freudenthal quartic, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24** (1977), 231-246.
- [30] Igusa J., Lectures on forms of higher degree, Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1978.
- [31] Igusa J., Some results on p -adic complex powers, Amer. J. Math. **106** (1984), 1013-1032.

- [32] Igusa J., Complex powers of irreducible algebroid curves, *Geometry today*, Roma, 1984, *Progress in Math.*, vol. 60, Birkhäuser, 1987, 20–47.
- [33] Igusa J., On functional equations of complex powers, *Invent. Math.* **85** (1986), 1–29.
- [34] Igusa J., Some aspects of the arithmetic theory of polynomials, *Discrete Groups in Geometry and Analysis*, *Progress in Math.*, vol. 67, Birkhäuser, 1987, 20–47.
- [35] Igusa J., Zeta distributions associated with some invariants, *Amer. J. Math.* **109** (1987), 1–34.
- [36] Igusa J., B -functions and p -adic integrals, *Algebraic Analysis*, Academic Press, 1988, 231–244.
- [37] Igusa J., On the arithmetic of a singular invariant, *Amer. J. Math.* **410** (1988), 197–233.
- [38] Igusa J., Universal p -adic zeta function and their functional equations, *Amer. J. Math.* **111** (1989), 671–716.
- [39] Igusa J., A problem on certain p -adic zeta functions, *Israel Math. Conf. Proc.* **3** (1990), 67–79.
- [40] Igusa J., Local zeta functions of certain prehomogeneous vector spaces, preprint, 1991.
- [41] Illusie L., Théorie de Brauer et caractéristique de Euler–Poincaré (d'après P. Deligne), *Astérisque* **82–83**, 161–172.
- [42] Kimura T., The b -functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **85** (1982), 1–80.
- [43] Kimura T., Complex powers on p -adic fields and a resolution of singularities, *Algebraic Analysis*, Academic Press, 1988, 345–355.
- [44] Kimura T., Iwasawa–Tate Theory of prehomogeneous vector spaces with $Z_a = \tau Z_m$, preprint.
- [45] Kimura T., Kogiso T., On adelic zeta functions of prehomogeneous vector spaces with finitely many adelic open orbits, *Adv. Study Pure Math.*, vol. 21, 1991, 1–11.
- [46] Kimura T., Sato F., Zhu X., On the poles of p -adic complex powers and the b -functions of prehomogeneous vector spaces, *Amer. J. Math.* **122** (1990), 423–437.
- [47] Langlands R. P., Orbital invariants on forms of $SL(3)$ I, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 465–506.
- [48] Lichtin B., Meuser D., Poles of a local zeta function and Newton polygons, *Compositio Math.* **55** (1985), 313–332.
- [49] Lipshitz L., Rigid subanalytic sets, *Amer. J. Math.* **115** (1993), No. 1, 77–108.
- [50] Loeser F., Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge, *Ann. Institut Fourier* **35** (1985), 75–92.
- [51] Loeser F., Une estimation asymptotique de nombre des solutions approchées d'une équation p -adique, *Invent. Math.* **85** (1986), 31–38.
- [52] Loeser F., Fonctions d'Igusa p -adiques et polynômes de Bernstein, *Amer. J. Math.* **110** (1988), 1–22.
- [53] Loeser F., Fonctions zêta locales d'Igusa à plusieurs variables, intégration dans les fibres, et discriminants, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22** (1989), 435–471.

- [54] Loeser F., Fonctions d'Igusa p -adiques, polynômes de Bernstein, et polyèdres de Newton, *J. Reine Angew. Math.* **412** (1990), 75–96.
- [55] Macintyre A., On definable subsets of p -adic fields, *J. Symb. Logic* **41** (1976), 605–610.
- [56] Macintyre A., Rationalité of p -adic Poincaré series: Uniformity in p , *Ann. Pure Appl. Logic.* **49** (1990), No. 1, 31–74.
- [57] Malgrange B., Intégrales asymptotiques et monodromie, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **7** (1974), 405–430.
- [58] Malgrange B., Polynômes de Bernstein–Sato et cohomologie évanescence, *Astérisque* **101/102** (1983), 243–267.
- [59] Meuser D., On the rationality of certain generating functions, *Math. Ann.* **256** (1981), 303–310.
- [60] Meuser D., On the poles of a local zeta function for curves, *Invent. Math.* **73** (1983), 445–465.
- [61] Meuser D., The meromorphic continuation of a zeta function of Weil and Igusa type, *Invent. Math.* **85** (1986), 493–514.
- [62] Meuser D., On a functional equation of Igusa's local zeta function, p -adic Analysis, Proceedings Trento 1989, *Lect. Notes in Math.*, vol. 1454, Springer-Verlag, 1990, 309–313.
- [63] Milnor J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968. [Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. — М.: Мир, 1972.]
- [64] Oesterlé J., Réduction modulo p^n des sous-ensemble analytique fermés de $\mathbb{Z}_p^N$, *Invent. Math.* **66** (1982), 325–341.
- [65] Ono T., An integral attached to a hypersurface, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 1224–1236.
- [66] Pas J., Uniform p -adic cell decomposition and local zeta functions, *J. Reine Angew. Math.* **399** (1989), 137–172.
- [67] Pas J., Cell decomposition and local zeta functions in a tower of unramified extensions of a p -adic field, *Proc. London Math. Soc.* **60** (1990), 37–67.
- [68] Pas J., Local zeta functions and Meuser's invariant functions, *J. Number Theory* **38** (1991), 278–299.
- [69] Sato M., Kimura T., A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), 1–155.
- [70] Sato M., Shintani T., On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math* **100** (1974), 131–170.
- [71] Schoutens H., Approximation and subanalytic sets over a complete valuation ring, Ph. D. Thesis (Leuven 1991).
- [72] Serre J.-P., Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev, *Publ. Math. I.H.E.S.* **54** (1981), 123–201.
- [73] Serre J.-P., Méthodes adéliques, Résumé des cours et travaux, Collège de France (1981–1982), 81–89; Collected papers, vol. III, Springer-Verlag, 1986, 649–657.
- [74] Strauss L., Poles of a two-variable p -adic complex power, *Trans. Amer. Math. Soc.* **278** (1983), 481–493.

- [75] Teissier B., Théorèmes de finitude en géométrie analytique (d'après H. Hironaka), Seminaire Bourbaki 451 (1973–74), Lect. Notes in Math., vol. 431, Springer-Verlag, Heidelberg, 1975.
- [76] Thom R., Sebastiani M., Un résultat sur la monodromie, Invent. Math. **13** (1971), 90–96.
- [77] Van den Dries L., Analytic Ax-Kochen-Ersov Theorems, preprint.
- [78] Варченко А. Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. — Функц. анализ и его прил., 1976, т. 10, вып. 3, с. 13–38.
- [79] Veys W., On the poles of Igusa's local zeta function for curves, J. London Math. Soc. **41** (1990), 27–32.
- [80] Veys W., Relations between numerical data of an embedded resolution, Amer. J. Math. **113** (1991), No. 4, 573–592.
- [81] Veys W., Congruences for numerical data of an embedded resolution, Compositio Math. **80** (1991), No. 2, 151–169.
- [82] Veys W., Poles of Igusa's local zeta function and monodromy, см. также Numerical data of resolutions of singularities and Igusa's local zeta function, Ph. D. Thesis (Leuven 1991).
- [83] Weil A., Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, Acta Math. **113** (1965), 1–87.

ВТОРИЧНЫЕ МНОГОГРАННИКИ И ДИСКРИМИНАНТЫ¹⁾

Франсуа Лёзер

ВВЕДЕНИЕ

Цель этой статьи — объяснить, почему в формуле $4p^3 + 27q^2$ мы имеем $4 = 2^2$ и $27 = 3^3$. В своей работе о гипергеометрических функциях, связанных с торическими многообразиями [G-K-Z 1], Гельфанд, Зелевинский и Капранов ввели новый комбинаторный объект, ассоциированный с конечным множеством A из n точек в $\mathbf{R}^k$: вторичный многогранник $QQ(A)$, лежащий в $\mathbf{R}^n$, который задается при помощи регулярных триангуляций²⁾ множества A . Один из их основных результатов (см. [G-K-Z 2]), о котором пойдет речь в этой статье, заключается в том, что $QQ(A)$ является многогранником Ньютона дискриминанта, соответствующего множеству A . Кроме того, они дают явную формулу для коэффициентов при крайних мономах дискриминанта. В частности, эти коэффициенты всегда с точностью до знака являются произведениями целых чисел вида N^N . Недавно Капранов, Штурмфельс и Зелевинский [K-S-Z] дали более концептуальное представление этих результатов в терминах торических вырождений и форм Чжоу.

Приведем план статьи. В разд. 1 приводится описание вторичного многогранника, его вершин и ребер. В разд. 2 формулируется основной результат о многогранниках Ньютона дискриминантов. В разд. 3 даются некоторые классические примеры (для которых результаты тем не менее новы). Следующий раздел, более технический, посвящен геометрической интерпретации дискриминанта, которая позволяет в разд. 5 привести доказательство Гельфанда–Капранова–Зелевинского. Кратко излагается (разд. 6) связь с гипергеометрическими функциями. Последующие разделы посвящены недавнему подходу Капранова, Штурмфельса и Зелевинского. В разд. 7 излагаются общие понятия, связанные с торическими вырождениями и многогранниками Чжоу, а в следующем — результаты Штурмфельса о торических идеалах и веерах Грёбнера. Это нам позволяет в разд. 9 привести результаты

¹⁾Loeser François. Polytopes secondaires et discriminants. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n°742, Astérisque, 201–202–203, 1991, 387–420.

²⁾Такие триангуляции рассматривал ранее О. Виро в вещественной алгебраической геометрии (см. [V]).

Капранова, Штурмфельса и Зелевинского о многограннике Чжоу торического многообразия. из которых в разд. 10 выводится другое доказательство основных результатов.

NB. Теория исключения, результатов и форм Чжоу имеет долгую историю. Попытка проследить ее здесь выходит за пределы нашей компетенции. По этой причине мы приняли решение давать ссылки только на современную литературу. Отметим, однако, что интерпретация результата как детерминанта комплекса Кошуля (см. п. 7.5), по-видимому, восходит, по крайней мере частично, к работам Кэли и что она была развита с более общей точки зрения Э. Фишером (Fischer E., Über die Cayley'sche Eliminations-methode, Math. Z. 26 (1927), 497–550).

А. СОГЛАШЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для $k \geq 1$ положим $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$. Если $X \subset \mathbf{R}^k$, то обозначим через $Q(X)$ выпуклую оболочку множества X .

Если M — решетка ранга r в $\mathbf{R}^n$, то формой объема в $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, соответствующей решетке M , назовем меру Лебега, нормализованную таким образом, чтобы объем одной ячейки решетки был равен $r!$, т. е. чтобы объем стандартного симплекса был равен единице.

1. ВТОРИЧНЫЙ МНОГОГРАННИК

1.1. Напомним, что веером в $\mathbf{R}^n$ называется конечное семейство $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ полиэдральных конусов, таких, что

- (i) если C — грань конуса C_α , то $C = C_\beta$ для некоторого $\beta \in I$;
- (ii) $C_\alpha \cap C_\beta$ является гранью и конуса C_α , и конуса C_β для любых α и β из I .

Веер $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ называется полным, если $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha = \mathbf{R}^n$. По многограннику K в $\mathbf{R}^n$ можно определить полный веер $F(K)$ следующим образом. Для каждой точки p из K положим

$$C(K, p) = \{v \in \mathbf{R}^n; \forall y \in K \langle v, p \rangle \leq \langle v, y \rangle\}$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает обычное евклидово скалярное произведение). Если τ является гранью многогранника K , определим $C(K, \tau)$ как $C(K, p)$ для некоторой точки p , внутренней по отношению к грани τ . Определим веер $F(K)$ как семейство всех $C(K, \tau)$, где τ пробегает множество граней многогранника K .

1.2. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — множество из n различных точек в $\mathbf{R}^k$ и $Q(A)$ — выпуклая оболочка множества A , размерность которой будет предполагаться равной $k - 1$. Триангуляцией множества A по

определению является симплициальная триангуляция T многогранника $Q(A)$, такая, что вершины симплексов из T содержатся в A . Обозначим через $\mathcal{T}(A)$ множество всех триангуляций множества A . Более точно, мы рассматриваем элемент T множества $\mathcal{T}(A)$ как семейство $(\sigma)_{\sigma \in T}$ строго возрастающих отображений $\sigma: [k] \rightarrow [n]$. При этом отображению σ ставится в соответствие симплекс $\bar{\sigma}$, являющийся выпуклой оболочкой точек $a_{\sigma(i)}$. Тот факт, что T есть триангуляция многогранника $Q(A)$, эквивалентен следующим двум условиям:

- (i) $\bigcup_{\sigma \in T} \bar{\sigma} = Q(A)$;
- (ii) если σ и σ' содержатся в T , то пересечение $\bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}'$ либо пусто, либо является гранью как симплекса $\bar{\sigma}$, так и симплекса $\bar{\sigma}'$.

В дальнейшем, допуская некоторую вольность речи, мы будем иногда такие симплексы $\bar{\sigma}$ (и σ) называть симплексами максимальной размерности, а их грани — симплексами.

1.3. Следуя [G-K-Z 2], мы сейчас любой триангуляции $T \in \mathcal{T}(A)$ поставим в соответствие полиэдральный конус в $\mathbb{R}^n$. Прежде всего, отождествим $\mathbb{R}^A$ с $\mathbb{R}^n$. (Если $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$, мы будем писать $\psi(a_i) = \psi_i$.) Каждый вектор $\psi \in \mathbb{R}^n$ определяет непрерывную функцию $g_{T,\psi}: Q(A) \rightarrow \mathbb{R}$, аффинную на каждом симплексе $\bar{\sigma}, \sigma \in T$, такую, что если a_i — вершина симплекса $\bar{\sigma}$, то $g_{T,\psi}(a_i) = \psi(a_i)$. Определим конус $C(A, T)$ как множество таких ψ , что

- (i) функция $g_{T,\psi}$ выпукла;
 - (ii) $g_{T,\psi}(a_i) \leq \psi(a_i)$ для всех $a_i \in A$.
- (Мы не требуем, чтобы все точки из A являлись вершинами триангуляции T .) Можно проверить, что $\mathcal{F}(A) = (C(A, T))_{T \in \mathcal{T}(A)}$ является полным веером.

1.4. Определим полиэдральные разбиения многогранника $Q(A)$ с вершинами в множестве A аналогично триангуляциям; они будут не симплициальными, а полиэдральными комплексами. Каждому вектору $\psi \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие полиэдральное разбиение Q_ψ многогранника $Q(A)$ с вершинами в A следующим образом. Обозначим через P_ψ выпуклую оболочку точек (a_i, ψ_i) в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$; тогда Q_ψ получается проектированием множества компактных граней выпуклого тела $P_\psi + \{0\} \times \mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}^k$. Такие полиэдральные разбиения мы будем называть регулярными. Для общего ψ разбиение Q_ψ является триангуляцией. Если T — регулярная триангуляция, то ясно, что множество таких ψ , что $Q_\psi = T$, совпадает с внутренностью конуса $C(A, T)$. Обратно, можно проверить, что если $C(A, T)$ имеет непустую внутренность, то T регулярна. В общем случае полиэдральное разбиение регулярно тогда и только тогда, когда на $Q(A)$ существует

непрерывная функция, аффинная на каждом многограннике из этого разбиения и строго выпуклая (в очевидном смысле).

Обозначим через $\mathcal{T}^3(A)$ множество регулярных триангуляций множества A .

1.5. Полные вееры не обязательно все должны иметь вид $F(K)$ для некоторого многогранника K . Однако мы сейчас увидим, что это именно так в случае веера $\mathcal{F}(A)$. Обозначим через $(e_1, \dots, e_n)$ канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Следуя [G-K-Z 2], сопоставим множеству A некоторый новый объект — вторичный многогранник $QQ(A)$.

Определение 1.5.1 [G-K-Z 2]. (i) Если $T \in \mathcal{T}(A)$, то обозначим через $\phi(T)$ вектор

$$\sum_{\sigma \in T} \text{vol}(\bar{\sigma})(e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(k)}).$$

(ii) Определим $QQ(A)$ как выпуклую оболочку всех векторов $\phi(T)$, $T \in \mathcal{T}(A)$.

Теорема 1.5.2 [G-K-Z 2]. Вееры $\mathcal{F}(QQ(A))$ и $\mathcal{F}(A)$ совпадают. Точнее, если $T \in \mathcal{T}(A)$, то

$$C(QQ(A), \phi_T) = C(A, T).$$

Доказательство. Поскольку оба веера полны, достаточно доказать, что для всех $T \in \mathcal{T}(A)$

$$C(A, T) \subset C(QQ(A), \phi_T).$$

(Заметим, кстати, что из этого включения сразу следует, что $\mathcal{F}(A)$ — веер.) Надо доказать, что если $\psi \in C(A, T)$, то $\langle \psi, \phi_T \rangle \leq \langle \psi, \phi_{T'} \rangle$ для всех $T' \in \mathcal{T}(A)$. Для этого заметим, что по определению конуса $C(A, T)$ мы имеем $g_{T, \psi}(x) \leq g_{T', \psi}(x)$, если $T' \in \mathcal{T}(A)$ и $x \in Q(A)$. Тогда

$$\int_{Q(A)} g_{T, \psi}(x) dx \leq \int_{Q(A)} g_{T', \psi}(x) dx.$$

С другой стороны,

$$\int_{Q(A)} g_{T, \psi}(x) dx = \sum_{\sigma \in T} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g_{T, \psi}(a_{\sigma(i)}) \right) \text{vol } \bar{\sigma} = \frac{1}{k} \langle \psi, \phi_T \rangle,$$

причем такое же равенство имеет место для T' . Это показывает, что $\langle \psi, \phi_T \rangle \leq \langle \psi, \phi_{T'} \rangle$. $\square$

Из теоремы 1.5.2 вытекает такое следствие:

Следствие 1.5.3. *Вершинами многогранника $QQ(A)$ являются фт при $T \in \mathcal{T}^0(A)$.*

Замечание 1.5.4. Можно получить описание, аналогичное следствию 1.5.3, для граней многогранника $QQ(A)$ любых размерностей: грани многогранника $QQ(A)$ находятся во взаимно однозначном соответствии (на самом деле имеет место изоморфизм частично упорядоченных множеств) с регулярными полиэдральными разбиениями множества A . Если P — некоторое полиэдральное разбиение множества A , то ему ставится в соответствие конус $\mathcal{C}(A, P)$, определяемый так же, как и для триангуляций, и, когда P регулярно, $\mathcal{C}(A, P)$ совпадает с нормальным конусом грани многогранника $QQ(A)$, соответствующей разбиению P ([G-K-Z 2], [B-F-S]).

1.6. Здесь мы дадим построение вторичного многогранника $QQ(A)$ по работе Биллера, Филимана и Штурмфельса ([B-F-S]).

Множеству A поставим в соответствие матрицу размера $n \times k$, у которой i -я строка состоит из координат точки a_i . Обозначим через $\eta \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$ внешнее произведение ее столбцов. Если отображение $\sigma: [k] \rightarrow [n]$ является строго возрастающим, положим $e_\sigma = e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)} \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$. Распространим на $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и положим $\varepsilon(\sigma) = \text{sign} \langle \eta, e_\sigma \rangle$. Если $T \in \mathcal{T}(A)$, положим

$$\varphi_T = \sum_{\sigma \in T} \varepsilon(\sigma) e_\sigma.$$

Обозначим через $U(A)$ выпуклую оболочку всех φ_T , $T \in \mathcal{T}(A)$. Если T и T' суть две различные триангуляции, то

$$\langle \varphi_T, \varphi_{T'} \rangle = |T \cap T'| < |T| = \langle \varphi_T, \varphi_T \rangle,$$

и это доказывает, что вершинами многогранника $U(A)$ являются в точности φ_T при $T \in \mathcal{T}(A)$.

Рассмотрим отображение $\pi: \Lambda^k \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\varphi \mapsto \sum_{i=1}^n \langle (e_i \lrcorner \varphi) \wedge e_i, \eta \rangle e_i,$$

где скалярное произведение $\lrcorner$ задается формулой $\langle a \wedge b, c \rangle = \langle a, b \lrcorner c \rangle$. Следующее предложение устанавливает связь между $U(A)$ и $QQ(A)$.

Предложение 1.6.1 [B-F-S]. *Имеет место равенство $QQ(A) = \pi(U(A))$.*

1.7. Описание ребер многогранника $QQ(A)$. Минимальные линейно зависимые подмножества множества A называются циклами.

Если Z — цикл, то $\mathcal{T}(Z)$ состоит в точности из двух элементов, которые мы неканоническим образом обозначим через $T_+(Z)$ и $T_-(Z)$. Действительно, пусть $\sum_{p \in Z} \alpha_p p = 0$ — одно из нетривиальных линейных соотношений между точками из Z ; тогда положим $Z_+ = \{p \in Z; \alpha_p > 0\}$ и $Z_- = \{p \in Z; \alpha_p < 0\}$. Определим $T_+(Z)$ (соотв. $T_-(Z)$) как триангуляцию, состоящую из симплексов $Q(Z \setminus \{p\})$, $p \in Z_+$ (соотв. Z_-).

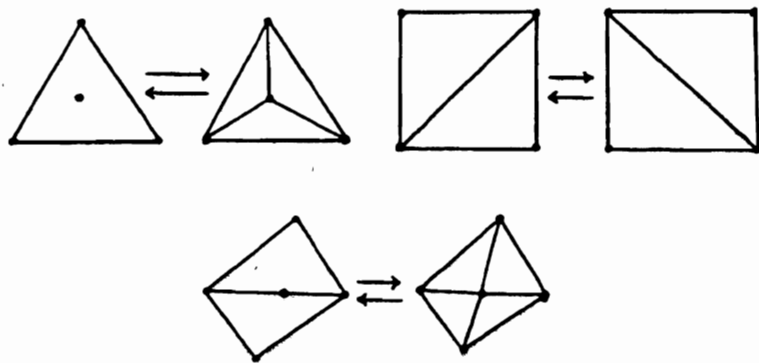
Определение 1.7.1. Пусть $T \in \mathcal{T}(A)$ и Z — некоторый цикл. Будем говорить, что триангуляция T *опирается на Z* , если

(i) все вершины триангуляции T , содержащиеся в $Q(Z)$, содержатся в Z ;

(ii) многогранник $Q(Z)$ является объединением граней симплексов из T ;

(iii) пусть $Q(I)$ — некоторый симплекс максимальной размерности одной из двух построенных триангуляций $Q(Z)$; если существует $J \subset A \setminus Z$, такое, что $Q(I \cup J)$ является симплексом максимальной размерности из T , то для любого другого симплекса максимальной размерности I' из той же триангуляции многогранника $Q(Z)$ множество $Q(I' \cup J)$ является симплексом триангуляции T .

Если T опирается на Z , то T индуцирует некоторую триангуляцию на Z , скажем, $T_+(Z)$. Можно построить новую триангуляцию $s_Z(T)$ множества A следующим образом: заменим симплексы вида $Q(I \cup J)$, где $I \in T_+(Z)$, $J \subset A \setminus Z$, на симплексы $Q(I' \cup J)$, где $I' \in T_-(Z)$. Тогда $s_Z(s_Z(T)) = T$. На следующих рисунках приведены примеры.



Следующий результат описывает ребра многогранника $QQ(A)$.

Теорема 1.7.2 [G-K-Z 2]. Пусть T и T' — две регулярные триангуляции множества A . Вершины φ_T и $\varphi_{T'}$ многогранника $QQ(A)$

соединены ребром тогда и только тогда, когда существует цикл $Z \subset A$, на который опираются T и T' , такой, что $T' = s_Z(T)$.

В п. 2.5 нам понадобится следующее определение.

Определение 1.7.3. Если $T' = s_Z(T)$, то обозначим через $S(T, T')$ семейство подмножеств J множества $A \setminus Z$, таких, что существует $I \subset Z$, для которого $Q(I)$ есть симплекс максимальной размерности некоторой триангуляции множества Z , а $Q(I \cup J)$ — симплекс максимальной размерности триангуляции T .

2. МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА И ДИСКРИМИНАНТЫ

2.1. Начиная с этого раздела, мы считаем, что $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^k$. Кроме того, если не оговорено противное, будут считаться выполненными следующие условия:

(*1) существует линейная форма $h: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}$ с целыми коэффициентами, такая, что $A \subset h^{-1}(1)$;

(*2) аддитивная группа $M(A)$, порожденная множеством A , совпадает с $\mathbb{Z}^k$.

Обозначим через $S(A)$ полугруппу, порожденную множеством A , и через M — целочисленную решетку $\mathbb{Z}^k$.

2.2. Дискриминант Δ_A . Обозначим через V векторное пространство $\mathbb{C}^n$ с координатами $(c_1, \dots, c_n)$. Мы будем отождествлять V с векторным пространством всех полиномов вида $f = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x^{a_i} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$. Обозначим через ∇_A замыкание в топологии Зарисского множества таких $f \in V$, для которых существует точка $x_0 \in (\mathbb{C}^*)^k$, удовлетворяющая условию

$$f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0.$$

Определим дискриминант $\Delta_A \in \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$ как неприводимый полином, определенный с точностью до знака, множество нулей которого совпадает с объединением неприводимых компонент коразмерности 1 многообразия ∇_A .¹⁾ Данное определение остается без изменений также в том случае, когда условия (*) не выполнены.

2.3. Проективная интерпретация дискриминанта Δ_A . Интерпретация дискриминанта как уравнения двойственного многообразия в целом является классической. Мы ее детализируем в нашем случае.

¹⁾ В действительности это многообразие всегда неприводимо. Единственная неприятность, которая может случиться, — это то, что его коразмерность может оказаться больше единицы. В этом случае положим $\Delta_A = 1$. — Прим. М. М. Капрanova. (По просьбе переводчика М. М. Капрanova ознакомился с рядом ценных замечаний. — Ред.).

Обозначим через $V^\vee$ пространство, двойственное к V , и пусть $(y_1, \dots, y_n)$ — двойственные координаты.

Имеется морфизм

$$\begin{aligned} i_A: (C^*)^k &\rightarrow V^\vee, \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (x^{a_1}, \dots, x^{a_n}). \end{aligned}$$

Условия (*) гарантируют, что i_A является иммерсией. Обозначим через X_A^0 тор $i_A((C^*)^k)$, и пусть X_A — замыкание в топологии Зарисского множества X_A^0 в пространстве $V^\vee$. Это — некоторое торическое многообразие (вообще говоря, не являющееся нормальным). В самом деле, действие тора $(C^*)^k$ на X_A , заданное формулой $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (x^{a_1}y_1, \dots, x^{a_n}y_n)$, где $x \in (C^*)^k$, продолжает естественное действие тора $(C^*)^k$ на X_A^0 умножением. Алгебраически можно определить X_A как $\text{Spec } \mathbb{C}[S(A)]$, задавая его вложение в $V^\vee$ формулой

$$\begin{aligned} \iota_A: \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] &\rightarrow \mathbb{C}[S(A)], \\ y_i &\mapsto x^{a_i}. \end{aligned}$$

Нормализация X'_A многообразия X_A задается так:

$$X'_A = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbb{R}_+ S(A) \cap M].$$

Обозначим через I_A ядро отображения ι_A . Оно является идеалом, определяющим X_A в $V^\vee$.

Согласно (*1), X_A есть конус и имеет двойственное многообразие $X_A^\vee \subset V$. Следующее утверждение по существу тавтологично.

Предложение 2.3.1. *Имеет место равенство $X_A^\vee = \nabla_A$.*

2.4. Дискриминант E_A . Вообще говоря, результаты работы [G-K-Z 2] относятся не к дискриминантам Δ_A , а к дискриминантам E_A , которые мы сейчас определим. Мы здесь приведем комбинаторное определение дискриминанта E_A . Геометрическое описание будет дано в разд. 4. В п. 2.6 будет объяснено, как перейти от E_A к Δ_A .

2.4.1. Пусть τ — некоторая грань многогранника $Q(A)$. В векторном пространстве $\mathbb{R}\tau$ имеются две естественные целочисленные решетки, вложенные одна в другую: решетка $M(S(\tau))$, порожденная полугруппой $S(A) \cap \mathbb{R}\tau$, и $M \cap \mathbb{R}\tau$. Обозначим через $i(\tau, S(A))$ индекс первой относительно второй.

Если $S \subset M$ — полугруппа конечного типа, содержащая начало координат, порождающая решетку $M(S)$ и такая, что множество $\mathbb{R}_+ S$ строго выпукло, а отображение $S \rightarrow M(S)$ инъективно, то положим

$K_-(S) = \mathbf{R}_+ S \setminus Q(S \setminus \{0\})$. Определим целое число $u(S)$ как объем множества $K_-(S)$ относительно решетки $M(S)$.

Если τ — грань многогранника $Q(A)$, обозначим через $S(A)/\tau$ образ полугруппы $S(A)$ в $\mathbf{R}^k/\mathbf{R}\tau$ и через $M(S(A)/\tau)$ порожденную им решетку. Положим по определению $u(\tau, S(A))$ равным $u(S(A)/\tau)$.

Определение 2.4.2. (i) Если τ — грань многогранника $Q(A)$, то положим

$$m(\tau, S(A)) = i(\tau, S(A)) \cdot u(\tau, S(A)).$$

(ii) *Дискриминантом* E_A называется следующее произведение, заданное с точностью до знака:

$$E_A = \prod \Delta_{A \cap \tau}^{m(\tau, S(A))},$$

где τ пробегает множество всех непустых граней многогранника $Q(A)$ (в качестве одной из которых рассматривается и сам $Q(A)$).

2.5. Основной результат. Напомним, что если $F \in \mathbf{C}[c_1, \dots, c_n]$ — полином, $F = \sum_{p \in \mathbf{N}^n} \alpha_p c^p$, то его многогранник Ньютона $Nw(F)$ по определению есть выпуклая оболочка в $\mathbf{R}^n$ таких p , что $\alpha_p \neq 0$. Основным результатом в [G-K-Z 2] является следующая

Теорема 2.5.1 [G-K-Z 2]. (1) *Многогранник Ньютона дискриминанта E_A совпадает с вторичным многогранником: $Nw(E_A) = QQ(A)$.*

(2) *Если $T \in \mathcal{T}^0(A)$, то коэффициент при мономе c^{ϕ_T} в полиноме E_A равен*

$$\pm \prod_{\sigma \in T} (\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}}.$$

Этот результат имеет следствие, а priori достаточно удивительное: коэффициенты при крайних мономах являются произведениями чисел, каждое из которых имеет вид N^N , где N целое. Это обобщает тот факт, что в формуле $4p^3 + 27q^2$ мы имеем $4 = 2^2$ и $27 = 3^3$ (ср. разд. 3).

На самом деле Гельфанд, Зелевинский и Капранов нашли, как связаны между собой знаки коэффициентов при крайних мономах, если эти мономы соединены ребром. В обозначениях п. 1.7 имеет место

Теорема 2.5.2 [G-K-Z 2]. *Если выбран знак перед полиномом E_A , то формулу для коэффициентов из п. (2) предыдущей теоремы можно переписать в виде*

$$(-1)^{p(T)} \prod_{\sigma \in T} (\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}},$$

где $p(T) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ удовлетворяет следующему условию: если $T, T' \in T^0(A)$ и если ϕ_T и $\phi_{T'}$ соединены ребром в многограннике $QQ(A)$, то

$$p(T') - p(T) = \sum_{J \in S(T, T')} k(J \cup Z)(\text{vol } Q(J \cup Z) + 1) \bmod 2,$$

где Z — цикл, на который опираются T и T' , а $k(J \cup Z)$ — индекс относительно $\mathbb{Z}^n$ решетки, порожденной $J \cup Z$.

Замечание. Формула для $p(T') - p(T)$ в том виде, в котором она приведена в [G-K-Z 2], неверна; однако, если следовать доказательству из [G-K-Z 2], то получится формула, которую мы здесь привели.

2.6. Переход от E_A к Δ_A . Если S — некоторая полугруппа, как в п. 2.4.1, то мы, следуя [K], определим целое число

$$\nu(S) = \sum (-1)^{\text{codim } \tau} u(S \cap \tau),$$

где τ пробегает множество граней конуса $\mathbf{R}_+S$. Согласно [K], всегда¹⁾ $\nu(S) \geq 0$ и $\nu(S) = 0$ тогда и только тогда, когда полугруппа S изоморфна $\mathbf{N}^r$, $r \geq 1$. Напомним (см. [D]), что если C — полиэдральный конус размерности r , имеющий единственную вершину в начале координат, то аффинное торическое многообразие вида $X = \text{Spec } \mathbb{C}[C \cap \mathbb{Z}^r]$ является гладким тогда и только тогда, когда C имеет вид $\mathbf{R}_+v_1 + \dots + \mathbf{R}_+v_r$, где $(v_1, \dots, v_r)$ — базис в $\mathbb{Z}^r$. Отсюда немедленно выводится следующее утверждение:

Предложение 2.6.1 [G-K-Z 2]. Если торическое многообразие $X_A \subset V^\vee$ является конусом над гладким многообразием (т. е. $\mathbf{P}(X_A) \subset \mathbf{P}(V^\vee)$ гладко), то числа $m(\tau, S(A))$, введенные в п. 2.4, все равны 1. Другими словами,

$$E_A = \pm \prod \Delta_{A \cap \tau},$$

где τ пробегает множество всех непустых граней многогранника $Q(A)$.

Если $\mathbf{P}(X_A)$ гладкое, то этот результат позволяет явно описать $\text{Nw}(\Delta_A)$, используя результаты из п. 2.5.

Если τ — грань многогранника $Q(A)$, обозначим через vol_τ форму объема на аффинном пространстве, порожденном гранью τ , нормализованную пересечением с $\mathbb{Z}^n$.

¹⁾ Это не совсем так. Например, если $\mathbf{R}_+S$ — конус над единичным трехмерным кубом в $\mathbf{R}^4$, то $\nu(S) = -1$. Однако если конус $\mathbf{R}_+S$ симплициялен, то всегда $\nu(S) \geq 0$. — Прим. М. М. Капранова.

Если $T \in \mathcal{T}(A)$, обозначим через $F_j(T)$ множество j -мерных симплексов $\sigma \in T$, таких, что $\bar{\sigma}$ содержится в j -мерной грани многогранника $Q(A)$, которую мы, в свою очередь, обозначим через $\tau(\sigma)$.

Положим

$$\phi_{T,j} = \sum_{\sigma \in F_j(T)} \text{vol}_{\tau(\sigma)} \bar{\sigma} (e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(j)}).$$

В частности, $\phi_{T,k}$ совпадает с ϕ_T , определенным выше. Положим

$$\Phi_T = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \phi_{T,j}.$$

Определение 2.6.2. Обозначим через $\tilde{\mathcal{T}}(A)$ множество $\mathcal{T}(A)$, про-факторизованное по следующему отношению эквивалентности: $T \sim T'$ тогда и только тогда, когда $\Phi_T = \Phi_{T'}$, и пусть $\tilde{\mathcal{T}}^0(A) \subset \tilde{\mathcal{T}}(A)$ — множество классов эквивалентности регулярных триангуляций.

Из последней теоремы и из теоремы 2.5.2 выводится такой результат:

Предложение 2.6.3 [G-K-Z 2]. Если $P(X_A)$ гладко, то

1) $\text{Nw}(\Delta_A)$ является выпуклой оболочкой всех Φ_T , $T \in \mathcal{T}(A)$, и вершинами в $\text{Nw}(\Delta_A)$ служат Φ_T , $T \in \mathcal{T}^0(A)$;

2) если $T \in \mathcal{T}^0(A)$, то коэффициент в полиноме Δ_A при мономе c^{Φ_T} равен

$$\pm \prod_{j=0}^k \prod_{\sigma \in F_j(T)} [(\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}}] (-1)^{k-i}.$$

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Дискриминант полинома от одной переменной. Пусть $P = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots + c_0$ есть полином от одной переменной. Классически дискриминант определяется как

$$D(P) = c_r^{2r-2} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — корни полинома P в алгебраическом замыкании. Это полином от c_i с целыми коэффициентами.

Пусть $A = \{a_0, \dots, a_r\}$, где $a_i = (i, 1) \in \mathbb{R}^2$. Ясно (упражнение), что $D(P) = \pm \Delta_A$. Легко видеть, что все триангуляции множества A регулярны и задаются подмножествами множества $\{1, \dots, r-1\}$.

Если T задано подмножеством $\Omega = \{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, r-1\}$, где $i_1 < \dots < i_s$, то ϕ_T — точка в $\mathbb{R}^{r+1}$ с координатами

$x_0 = i_1$, $x_r = r - i_s$, $x_{i_k} = i_{k+1} - i_{k-1}$, $x_i = 0$ для остальных i , причем считается, что $i_0 = 0$ и $i_{s+1} = r$.

По предложению 2.6.1 имеем $E_A = \pm c_0 c_r \Delta_A$. Теоремы 2.5.1 и 2.5.2 непосредственно дают следующий результат:

Теорема 3.1.1 [G-K-Z 3]. *Вершинами многогранника Ньютона дискриминанта $D(P)$ служат точки с координатами $x_0 = i_1 - 1$, $x_r = r - i_s - 1$, $x_{i_k} = i_{k+1} - i_{k-1}$, $x_i = 0$ для остальных i , где набор индексов $i_1 < \dots < i_s$ пробегает все подмножества множества $\{1, \dots, r-1\}$. Коэффициент при мономе, отвечающем $i_1 < \dots < i_s$, равен*

$$\prod_{0 \leq k \leq s} (-1)^{\ell_k(\ell_k-1)/2} \ell_k^{\ell_k},$$

где $\ell_k = i_{k+1} - i_k$, если считать, что $\ell_0 = i_1$ и $\ell_s = r - i_s$.

Читатель найдет в статье [G-K-Z 3] более подробное описание многогранника $Nw(D(P))$. Случай «малочлена» аналогичен: мы предоставляем читателю возможность в качестве развлечения убедиться, что дискриминант полинома $x^3 + px + q$ равен $-(4p^3 + 27q^2)$. Заметим, что простой общей формулы для коэффициентов при неэкстремальных мономах дискриминанта $D(P)$ неизвестно.

3.2. Результат двух полиномов от одной переменной. Пусть $m, n \geq 1$ и $P(x) = a_0 x^m + \dots + a_m$, $Q(x) = b_0 x^n + \dots + b_n$ — два полинома от одной переменной. Результат $R(P, Q)$ по определению равен $a_0^n b_0^m \prod (\alpha_i - \beta_j)$, где α_i (соотв. β_j) — корни P (соотв. Q) в алгебраическом замыкании. Это полином от a_i и b_i с целыми коэффициентами.

Пусть $A = \{(i, 0), (j, 1); i \in \{0, \dots, m\}, j \in \{0, \dots, n\}\}$. Несложно проверить, что $R(P, Q) = \pm \Delta_A$. Отношение эквивалентности $\sim$, введенное в п. 2.6.2 на триангуляциях, в этом случае можно описать следующим образом: это отношение эквивалентности, порожденное отношением $T \approx T'$, если T' получается из T путем разбиения одного из треугольников на два треугольника. Далее, можно проверить, что все триангуляции регулярны. Назовем триангуляцию базисной, если объединение двух треугольников никогда не является треугольником. Каждый класс эквивалентности из $\tilde{T}^0(A)$ содержит единственный базисный представитель. Обозначим через $B(A)$ множество всех базисных триангуляций. Если $T \in B(A)$, можно проверить, что вектор Φ_T равен $(p(T), q(T))$, где $p(T) \in \mathbb{Z}^{m+1}$, $q(T) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ заданы следующим образом: $p_i(T) = |b - c|$, если в T существует треугольник с вершинами $(i, 0)$, $(b, 1)$ и $(c, 1)$; в противном случае $p_i(T) = 0$. Точно так

же $q_j(T) = |b - c|$, если в T существует треугольник с вершинами $(j, 1)$, $(b, 0)$ и $(c, 0)$; в противном случае $q_j(T) = 0$. Из теоремы 2.6.3 вытекает следующий результат:

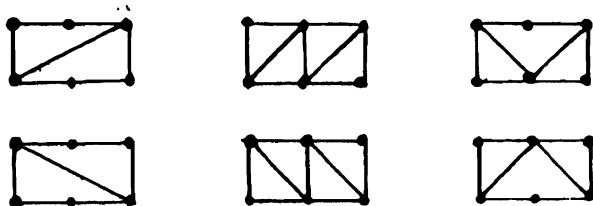
Теорема 3.2.1 [G-K-Z 3]. *Отображение $T \mapsto (p(T), q(T))$ является биекцией между $B(A)$ и множеством вершин многогранника $Nw(R(P, Q))$. Коэффициенты соответствующих мономов равны ± 1 .*

Множество пар $(p(T), q(T))$, $T \in B(A)$, можно рассматривать как множество «монотонных путей» на решетке $\mathbb{Z}^2$, соединяющих точки $(0, 0)$ и (m, n) (см. [G-K-Z 3]). Можно вычислить знаки коэффициентов крайних мономов результата $R(P, Q)$: согласно ([G-K-Z 3, Prop. 15]), коэффициент при мономе, отвечающем триангуляции T , равен $(-1)^{p_1+2p_2+\dots+mp_m}$, где $p(T) = (p_0, \dots, p_m)$. Этот результат вытекает из теоремы 2.5.2, но в [G-K-Z 3] приведено его прямое доказательство. Фактически в [G-K-Z 3] дана формула для коэффициентов при всех мономах результата $R(p, q)$ в терминах комбинаторных функций, связанных с симметрической группой.

В качестве иллюстрации разберем явно случай $m = n = 2$. Мы имеем

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_0^2 b_2^2 + a_0 a_2 b_1^2 - a_0 a_1 b_1 b_2 + a_1^2 b_0 b_2 + a_2^2 b_0^2 - a_1 a_2 b_0 b_1 - 2 a_0 a_2 b_0 b_2.$$

Все мономы, кроме последнего, соответствуют вершинам многогранника $Nw(R(P, Q))$. Есть ровно шесть базисных триангуляций множества A , которые отвечают соответственно мономам $a_0^2 b_2^2$, $a_0 a_1 b_1 b_2$, $a_1^2 b_0 b_2$, $a_2^2 b_0^2$, $a_1 a_2 b_0 b_1$ и $a_0 a_2 b_1^2$ (см. рисунок).



3.3. Детерминанты. Обозначим через $(e_1, \dots, e_m)$ канонический базис в $\mathbb{R}^m$, а через $(f_1, \dots, f_n)$ — в $\mathbb{R}^n$. Пусть $A = \{(e_i, f_i); i \in [m], j \in [n]\}$. Легко проверить, что полином $E_A(f)$ с точностью до знака равен произведению миноров всех порядков матрицы (c_{ij}) , если $f = \sum c_{ij} x_i y_j \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$. Если $m = n$, то $\Delta_A(f)$ равен (с точностью до знака) определителю квадратной матрицы (c_{ij}) .

Это наблюдение позволяет определить, следуя Кэли, «гипердетерминант d -мерной матрицы» [G-K-Z 5]: если A — семейство наборов $(e_{1,i_1}, \dots, e_{d,i_d}) \in \mathbb{R}^{n_1+\dots+n_d}$, $i_k \in [n_k]$, где $(e_{k,i_k})_{i_k \in [n]}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^{n_k}$, и $C = (c_{i_1, \dots, i_d})_{i_k \in [n]}$, то положим $\text{Det } C = \pm \Delta_A(f_C)$, где f_C — полилинейная форма, соответствующая C . В работе [G-K-Z 5] доказано, что $\Delta_A(f_C) \neq \pm 1$ тогда и только тогда, когда $n_k \leq \sum_{j \neq k} n_j - d$ для всех k .

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ E_A

4.1. Напоминание о $\det$ и Div [Kn-M]. В этом пункте мы вкратце приведем конструкцию из [Kn-M] в общности, меньшей, чем в этой статье, но более чем достаточной для настоящей работы.

Определение 4.1.1. *Совершенным комплексом над схемой X называется комплекс $\mathcal{O}_X$ -модулей, который локально по X квазиизоморфен ограниченному комплексу свободных $\mathcal{O}_X$ -модулей конечного типа. Обозначим через Parf_X полную подкатегорию производной категории категории $\mathcal{O}_X$ -модулей, объектами которой являются совершенные комплексы.*

Согласно Гротендику, Феррану и Кнудсену–Мамфорду [Kn-M], существует естественный функтор «детерминант», который объекту $\mathcal{F}^\bullet$ категории Parf_X ставит в соответствие некоторый свободный $\mathcal{O}_X$ -модуль ранга 1, обозначаемый через $\det(\mathcal{F}^\bullet)$.

В дальнейшем мы считаем, что X неприводима и регулярна.

Пусть $\lambda: \mathcal{E}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{E}_2^\bullet$ — некоторый морфизм ограниченных комплексов свободных $\mathcal{O}_X$ -модулей конечного типа. Предположим, что λ — квазиизоморфизм в общей точке схемы X , и обозначим через $U(\lambda)$ открытое множество, над которым λ является квазиизоморфизмом. Выбирая базисы в $\mathcal{E}_i^\bullet$, получаем изоморфизмы

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{E}_1^\bullet) \quad \text{и} \quad \det(\mathcal{E}_2^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X.$$

В композиции с $\det(\lambda): \det(\mathcal{E}_1^\bullet) \rightarrow \det(\mathcal{E}_2^\bullet)$ получаем морфизм $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, являющийся изоморфизмом над $U(\lambda)$. Он определяет сечение s в $\Gamma(U(\lambda), \mathcal{O}_X^*)$, и уравнение $s = 0$ задает дивизор Картье на X , обозначаемый через $\text{Div}(\lambda)$. Этот дивизор не зависит от выбора базисов.

Эта конструкция распространяется на те морфизмы $\lambda: \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$ категории Parf_X , которые являются квазиизоморфизмами в общей точке схемы X . В частности, если $\mathcal{F}^\bullet \in \text{Parf}_X$ точен в общей точке схемы X , то, применяя ее к нулевому отображению $0 \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$, мы получим дивизор $\text{Div } \mathcal{F}^\bullet = \text{Div}(0 \rightarrow \mathcal{F}^\bullet)$. Свойства функтора Div подробно изучены в [Kn-M]. Одно из наиболее важных — следующее:

Предложение 4.1.2 [Kn-M]. Пусть $\mathcal{F}^\bullet$ — совершенный комплекс $\mathcal{O}_X$ -модулей, точный в общей точке схемы X . Для любого неприводимого дивизора D на X обозначим через $\mathcal{O}_{X,D}$ локализацию кольца $\mathcal{O}_X$ в D , и пусть $i_D: \text{Спец } \mathcal{O}_{X,D} \rightarrow X$. Кольцо $\mathcal{O}_{X,D}$ есть кольцо дискретного нормирования ранга 1, и $i_D^*(H^i(\mathcal{F}^\bullet))$ суть $\mathcal{O}_{X,D}$ -модули кручения; обозначим через $m_D^i(\mathcal{F}^\bullet)$ их длины, и пусть $m_D(\mathcal{F}^\bullet) = \sum (-1)^i m_D^i(\mathcal{F}^\bullet)$. Тогда $\text{Div}(\mathcal{F}^\bullet) = \sum m_D(\mathcal{F}^\bullet) D$.

4.2. Мы опять предполагаем выполненным условие (*) из п. 2.1. Пусть A — некоторое конечное подмножество в $\mathbb{Z}^k$, $A = (a_1, \dots, a_n)$. Предположим, что существует $\mathbb{Q}$ -линейная форма $h: \mathbb{Q}^k \rightarrow \mathbb{Q}$, такая, что $A \subset h^{-1}(1)$. Предположим, что дана полугруппа конечного типа $S \subset \mathbb{Z}^k$, содержащая начало координат, такая, что

- (i) если $s \in S$ — ненулевой элемент, то $h(s) \geq 1$;
- (ii) A содержится в $S \cap h^{-1}(1)$ и $\mathbb{R}_+ A = \mathbb{R}_+ S$;
- (iii) решетка $M(S)$, порожденная полугруппой S , такова, что $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{Z}^k/M(S)$ свободен.

Пусть $S_i = S \cap h^{-1}(i)$ и $M = \mathbb{Z}^k$ — целочисленная решетка. Для целого положительного i и $p \in \mathbb{Z}$ положим

$$\Lambda^i(p) = (\Lambda^{i+k}(\mathbb{C}^k))^{S_{i+k+p}}.$$

Для $a \in A$ определим дифференциал $d_a: \Lambda^i(p) \rightarrow \Lambda^{i+1}(p)$ по формуле

$$(d_a \gamma)(u) = a \wedge \gamma(u - a),$$

считая, что $\gamma(u - a) = 0$ при $u - a \notin S_{i+k+p}$. Если $f = \sum_{j \in [n]} c_j x^{a_j}$ лежит в V , положим $d_f = \sum_{j \in [n]} c_j d_{a_j}$. Для каждого p мы таким образом получаем ограниченный комплекс свободных $\mathcal{O}_V$ -модулей конечного типа $\Lambda^\bullet(p)_V$ на V . На самом деле, так как на $\Lambda^i(p)$ имеется целочисленная структура, то, полагая $\Lambda^i(p)_{\mathbb{Z}} = (\Lambda^{i+k}(M))^{S_{i+k+p}}$, можно точно так же задать ограниченный комплекс свободных $\mathcal{O}_{V_{\mathbb{Z}}}$ -модулей конечного типа $\Lambda^\bullet(p)_{V_{\mathbb{Z}}}$ над $V_{\mathbb{Z}} = \text{Спец } \mathbb{Z}[c_j]$. Эти комплексы, зависящие от A, S, M , мы будем, если понадобится, обозначать через $\Lambda^\bullet(p)(A, S, M)_{V_{\mathbb{Z}}}, \dots$.

4.3. В этом пункте мы интерпретируем полином E_A геометрически как уравнение, задающее дивизор Div , соответствующий комплексу $\Lambda^\bullet(p)$:

Теорема 4.3.1 [G-K-Z 2]. Предположим, что A удовлетворяет условиям (*). Тогда для больших p комплекс $\Lambda^\bullet(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbb{Z}}}$ точен в общей точке схемы $V_{\mathbb{Z}}$ и $\text{Div}(\Lambda^\bullet(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbb{Z}}})$ есть дивизор, задаваемый уравнением $E_A = 0$.

Доказательство. (1) Покажем, что для больших p комплекс $\Lambda^\bullet(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbb{Z}}}$ точен в общей точке пространства V , и его Div

задается уравнением $E_A = 0$. (Эта часть доказательства остается верной, даже если $(*)$ не выполнено; надо лишь заменить целочисленную решетку M на $M(A)$). Легко видеть, что $\Lambda^i = \bigoplus \Lambda^i(p)$ как модуль над кольцом $\mathbb{C}[S(A)]$. Поэтому ему отвечает пучок $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ на $X_A = \text{Spec } \mathbb{C}[S(A)]$. Пусть $\pi: X'_A \rightarrow X_A$ — нормализация X_A ($X'_A = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbf{R}_+ S(A) \cap M]$). Обозначим через Z замкнутое множество $X_A \setminus X_A^0$ (это объединение $(\mathbb{C}^*)^k$ -орбит коразмерности ≥ 1), и пусть $Z' = \pi^{-1}(Z)$. На нормальном торическом многообразии X'_A рассмотрим пучок дифференциальных (алгебраических) i -форм с логарифмическими полюсами вдоль Z' (определение см., например, в [D]); обозначим его через $\Omega_{X'_A}^i(\log Z')$. Положим $\Omega_{X_A}^i(\log Z) = \pi_* \Omega_{X'_A}^i(\log Z')$. Из описания пучка $\Omega_{X'_A}^i(\log Z')$, приведенного в [D], следует, что $\Omega_{X_A}^i(\log Z)$ канонически изоморфен $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ над $X_A \setminus \{0\}$; градуировки на сечениях пучков $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ и $\Omega_{X_A}^i(\log Z)$ соответствуют друг другу благодаря наличию конической структуры на X_A . Далее, дифференциал d_f соответствует внешнему умножению на df . Непосредственно видно, что если $E_A(f) \neq 0$, то $(\Omega_{X_A}^i(\log Z), df \wedge)$ ацикличесен над $X \subset \{0\}$. Поэтому для больших p получаем, что $\Lambda^*(p)(A, S(A), M)_V$ точен в общей точке пространства V и что соответствующий дивизор Div не зависит от p . Отсюда также следует, что неприводимые компоненты дивизора Div имеют вид $\Delta_{A \cap \tau}$, где τ — грань многогранника $Q(A)$. Поэтому для больших p можно написать

$$\text{Div}(\Lambda^*(p)(A, S(A), M)_V) = \prod \Delta_{A \cap \tau}^{\mu(\tau)}.$$

Осталось показать, что $\mu(\tau) = m(\tau, S(A))$. Для этого рассмотрим $(\Omega_X^i(\log Z), df \wedge)$ как комплекс пучков на $V^\vee \times V$, который обозначим через Ω^* . Каждой грани τ многогранника $Q(A)$ поставим в соответствие торическое подмногообразие $X(\tau)$ в $X_A \subset V^\vee$, заданное уравнениями $y_i = 0$ при $a_i \notin \tau$. Обозначим через T_τ^* его конормальное пространство, содержащееся в кокасательном пространстве $T^*V^\vee$ (по определению T_τ^* есть замыкание конормального расслоения к множеству гладких точек многообразия $X(\tau)$). Будем рассматривать T_τ^* как подмножество в $V^\vee \times V$, отождествляя $V^\vee \times V$ с $T^*V^\vee$. Стандартные рассуждения кратностей, как в предложении 4.1.2, показывают, что $\mu(\tau)$ равняется альтернированной сумме кратностей пучков $H^i(\Omega^*)$ в общей точке пространства T_τ^* . На последнем этапе доказательства используются D -модули. Обозначим через $D_{V^\vee}$ кольцо алгебраических дифференциальных операторов на $V^\vee$, и пусть F — фильтрация по порядку оператора. Комплекс $\Omega_{X_A}^i(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}$ можно снабдить естественным дифференциалом d , который продолжает внешний дифференциал $d: \Omega_{X_A}^i(\log Z) \rightarrow \Omega_{X_A}^{i+1}(\log Z)$. Снабдим

комплекс $\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^V}} D_{V^V}$ фильтрацией

$$F_m(\Omega_{X_A}^i(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^V}} D_{V^V}) = \Omega_{X_A}^i(\log Z) \otimes F_{i+m} D_{V^V}.$$

Центральным местом в доказательстве является наблюдение, что комплекс $\mathrm{gr}^F(\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^V}} D_{V^V})$ естественно отождествляется с комплексом Ω^* . Из этого следует, что $\mu(\tau)$ равно кратности, с которой T_τ^* входит в характеристический цикл комплекса правых D_{V^V} -модулей $\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^V}} D_{V^V}$, который мы обозначим через M^* . С другой стороны, аналитический комплекс де Рама $\mathcal{DR} M^*$ естественно отождествляется с комплексом $\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{X_A}} \Omega_{X_A}^{\mathrm{an}}$, который квази-изоморфен извращенному пучку $R_{i_A} \cdot \underline{C}_{X_A^0}$. Можно проверить, что комплекс M^* имеет голономно регулярные когомологии. Из этого следует, что характеристические циклы комплексов M^* и $R_{i_A} \cdot \underline{C}_{X_A^0}$ равны. Для вычисления характеристического цикла комплекса $R_{i_A} \cdot \underline{C}_{X_A^0}$ воспользуемся методом исчезающих циклов (см. Brylinski J.-L., Séminaire Bourbaki, exposé n°585, théorème 4.2.8, или Ginzburg V., Invent. Math. 84 (1986), 327–402). Кратность $\mu(\tau)$ получается следующим образом: рассмотрим линейное отображение $g: V^V \rightarrow \mathbb{C}$, равное нулю на $X(\tau)$ (ограничение отображения g на X_A имеет вид $\sum c_i x^{a_i}$, где $c_i = 0$ при $a \notin \tau$); тогда $\mu(\tau)$ равно эйлеровой характеристике слоя пучка исчезающих циклов $\Phi_g(R_{i_A} \cdot \underline{C}_{X_A^0})$ в общей точке многообразия $X(\tau)$. Тот факт, что $\mu(\tau) = m(\tau, S(A))$, таким образом, является следствием теоремы Д. Бернштейна, Кушнirenко и Хованского (см. [K]), выражающей эйлерову характеристику гиперповерхности общего положения в торическом многообразии в терминах объемов многогранников.

(2) Чтобы перейти от результатов над $\mathbb{C}$ к результатам над $\mathbb{Z}$, осталось показать, что $\mathrm{Div}(\Lambda^*(p)(A, S(A), M)_{V_Z})$ не имеет компонент¹⁾ над конечной частью схемы $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ при $p \gg 0$. Для этого достаточно показать, что (в очевидных обозначениях) для любого конечного поля F комплекс $\Lambda^*(p)(A, S(A), M)_{V_F}$ является ациклическим при $p \gg 0$ в общей точке пространства V_F . Доказательство аналогично доказательству для случая $\mathbb{C}$, приведенному в начале п. (1) (здесь существенно используется, что A удовлетворяет условиям (*)). $\square$

4.4. В разд. 5 нам потребуются следующие свойства, описывающие поведение $\mathrm{Div}(\Lambda^*(p)(A, S, M)_{V_Z})$ при замене S или M .

¹⁾ Имеется в виду подсхема, целиком лежащая над некоторой простой точкой $l \in \mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ (где l — простое число). — Прим. М. М. Капанова.

Предложение 4.4.1. Пусть $p \gg 0$. Тогда

- (1) если $M(S)$ имеет ранг $r < k$, то $\text{Div}(\Lambda^*(p)(A, S, M)_{V_Z}) = \emptyset$;
 (2) если $M(S)$ имеет ранг k , то

$$\begin{aligned} & \text{Div}(\Lambda^*(p)(A, S(A), M)_{V_Z}) \\ &= [M : M(A)]^{\text{vol } Q(A)} + \text{Div}(\Lambda^*(p)(A, S(A), M(A))_{V_Z}); \end{aligned}$$

- (3) если $M(S)$ имеет ранг k , то

$$\text{Div}(\Lambda^*(p)(A, S, M)_{V_Z}) = [M : M(A)] \text{Div}(\Lambda^*(p)(A, S(A), M)_{V_Z}).$$

Доказательство. (1) Вводя на $\Lambda^i M$ фильтрацию

$$F_m(\Lambda^i M) = \Lambda^{i-m}(M(S)) \wedge \Lambda^m M,$$

получаем, что

$$\text{gr}_m^F \Lambda^*(p)(A, S, M) \simeq \Lambda^*(p)(A, S, M(S))^{(k-r)}[m],$$

где $[m]$ обозначает сдвиг комплекса на m единиц вправо, и доказываемый результат следует из того, что $(1-1)^{k-r} = 0$.

- (2) Достаточно прямо вычислить влияние замены решетки.

- (3) Здесь требуются более тонкие соображения (см. [G-K-Z 2, предложение 2B11]). $\square$

Следствие 4.4.2. Если $A = (a_1, \dots, a_k)$ — множество вершин симплекса объема v и если S порождает M , то при $p \gg 0$ дивизор $\text{Div}(\Lambda^*(p)(A, S, M)_{V_Z})$ задается уравнением $\pm v^v c_1^v \cdots c_k^v$.

5. ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5.1

В этом разделе мы приводим доказательство теоремы 2.5.1, данное в [G-K-Z 2]. Существенным местом является следующее

Предложение 5.1. Пусть $T \in \mathcal{T}^0(A)$, и пусть $\psi: A \rightarrow \mathbb{Z}$ принадлежит внутренности конуса $\mathcal{C}(A, T)$. Пусть $f = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x^{a_i} \in V$ и $f_t = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i t^{-\psi(a_i)} x^{a_i}$. Обозначим через $E_{A, \sigma}$ уравнение, определенное с точностью до знака и задающее дивизор $\text{Div}(\Lambda^*(p)(A \cap \sigma, S(A) \cap R_+ \bar{\sigma}, M)_{V_Z})$ при $p \gg 0$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_A(f_t)}{\prod_{\sigma \in T} E_A(f_t|_{A \cap \sigma})} = \pm 1.$$

Покажем, как вывести теорему 2.5.1 из этого предложения. По следствию 4.4.2 мы имеем

$$\begin{aligned}\prod_{\sigma \in T} E_A(f_t|_{A \cap \sigma}) &= \pm \prod_{\sigma \in T} \left[(\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}} \left(\prod_{1 \leq i \leq k} c_{\sigma(i)} t^{-\psi(a_i)} \right)^{\text{vol } \bar{\sigma}} \right] \\ &= \pm \prod_{\sigma \in T} (\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}} (c(t))^{\phi_T},\end{aligned}$$

где $c(t) = (c_i t^{-\psi(a_i)})$.

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_A(f_t)}{\prod_{\sigma \in T} (\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}} (c(t))^{\phi_T}} = \pm 1$$

для любых c_i и любой ψ , принадлежащей внутренности конуса $\mathcal{C}(A, T)$. Из этого мы получаем, что если

$$U(T) = \{(c_1, \dots, c_n); (\log |c_1|, \dots, \log |c_n|) \in \mathcal{C}(T, A)\},$$

то при $(c_1, \dots, c_n)$, стремящемся к бесконечности по области $U(T)$, отношение $E_A(f_t)/\prod_{\sigma \in T} (\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}} (c(t))^{\phi_T}$ имеет предел ± 1 . Отсюда непосредственно вытекает, что ϕ_T есть вершина многогранника $\text{Nw}(E_A)$ с коэффициентом $\pm \prod_{\sigma \in T} (\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}}$ и что $\mathcal{C}(A, T)$ содержится в $\mathcal{C}(\text{Nw}(E_A), \phi_T)$. Но поскольку объединение конусов $\mathcal{C}(A, T)$, $T \in \mathcal{T}^0$, дает все $\mathbf{R}^n$, мы получаем, что $\text{Nw}(E_A) = QQ(A)$.

Доказательство предложения 5.1. Рассмотрим кольцо формальных рядов Лорана $\mathbf{Z}((t)) = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} F^m \mathbf{Z}((t))$, где $F^m \mathbf{Z}((t))$ — множество рядов $\sum_{i=m}^{+\infty} \alpha_i t^i$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}$. Мы имеем $\text{gr}_F^* \mathbf{Z}((t)) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$. Пусть $\Lambda^*(p)(A, S(A), M)((t))$ — комплекс $\Lambda^*(p)(A, S(A), M) \otimes \mathbf{Z}((t))$ со скрученным дифференциалом $\sum_{1 \leq j \leq n} c_j d_{a_j} \otimes t^{-\psi(a_j)}$. Оператор Div от соответствующего комплекса пучков над $V_{\mathbf{Z}((t))}$ равен $\pm E_A(f_t)$. Обозначим через $G_{T, \psi}: \mathbf{R}_+ A \rightarrow \mathbf{R}$ однородную функцию степени 1, совпадающую с $g_{T, \psi}$ на $Q(A)$. Введем на $\Lambda^*(p)(A, S(A), M)((t))$ фильтрацию

$$F^m = \bigoplus_{u \in S_{i+p}} F^{m-G_{T, \psi}(u)} \mathbf{Z}((t)) \otimes \Lambda^i(\mathbf{Z}^k).$$

Эта фильтрация согласована с дифференциалом.

По теореме Кушниренко [К] (одному из ее вариантов) комплекс $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -модулей $\text{gr}_F^*(\Lambda^*(p)(A, S(A), M)((t)))$ имеет резольвенту, d -й член которой есть сумма модулей $\Lambda^*(p)(A \cap \bar{\sigma}, \mathbf{R}_+ \bar{\sigma} \cap S, M)[t, t^{-1}]$, снабженных дифференциалом $d_{f_t|_{A \cap \bar{\sigma}}}$, причем суммирование производится по всем симплексам σ коразмерности d из T , не содержащимся в грани многогранника $Q(A)$ той же размерности. Отсюда,

используя 4.4.1(1) и аддитивность функтора Div , выводим, что Div , соответствующий $\text{gr}_F^*(\Lambda^*(p)(A, S(A), M)((t)))$, при больших p равен $\sum_{\sigma \in T} \text{Div}(\Lambda^*(p)(A \cap \bar{\sigma}, R_+ \bar{\sigma} \cap S, M))$, причем Λ^* снабжены дифференциалами $d_{f_i|A \cap \bar{\sigma}}$. После некоторых размышлений отсюда можно вывести требуемый результат.

6. СВЯЗЬ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

6.1. По-видимому, открытие многогранника $QQ(A)$ и его связи с дискриминантами восходит к статье [G-K-Z 1], в которой по каждой регулярной триангуляции многогранника $QQ(A)$ построен базис гипергеометрических функций, точнее, базис пространства решений $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(H_{\gamma, A}^{\text{an}}, \mathcal{O}_V)$ для общего γ , где $H_{\gamma, A}$ — гипергеометрический D -модуль, определяемый в п. 6.2.

6.2. Пусть A удовлетворяет условиям (*). Обозначим через $L(A) \subset \mathbb{Z}^n$ решетку целочисленных линейных соотношений на элементы множества A . Если $\alpha \in L(A)$ — нетривиальное соотношение, $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i a_i = 0$, то поставим ему в соответствие дифференциальный оператор на V

$$\Gamma_{\alpha} = \prod_{\alpha_i > 0} \left(\frac{\partial}{\partial c_i} \right)^{\alpha_i} - \prod_{\alpha_i < 0} \left(\frac{\partial}{\partial c_i} \right)^{-\alpha_i}.$$

Для $i \in [k]$ положим

$$Z_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j^i c_j \frac{\partial}{\partial c_i},$$

где a_j^i есть i -я координата точки a_j .

Определение 6.2.1. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{C}^k$. Гипергеометрической системой, соответствующей множеству A и вектору γ , называется D -модуль $H_{\gamma, A} = D_V/I$, где I — идеал¹⁾, порожденный элементами Γ_{α} , $\alpha \in L(A)$, и $Z_i - \gamma_i$, $i \in [k]$.

6.3. Вектору γ поставим в соответствие локальную систему $\mathcal{L}_{-\gamma}$ на торе $(\mathbb{C}^*)^k$ с монодромией $-\gamma_i$ при обходе вокруг $x_i = 0$ для $i \in [k]$. Один из основных результатов статьи [G-K-Z 4] состоит в том, что для общего γ комплекс $R\text{Hom}_{\mathcal{D}}(H_{\gamma, A}^{\text{an}}, \mathcal{O}_V)$ голоморфных решений D -модуля $H_{\gamma, A}$ совпадает с обычными решениями $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(H_{\gamma, A}^{\text{an}}, \mathcal{O}_V)$ и равен преобразованию Фурье–Сато от $i_{A!} \mathcal{L}_{-\gamma}$. Из этого следует (см. [G-K-Z 4]), что характеристический цикл D -модуля $H_{\gamma, A}$ для общего γ вычисляется так же, как в п. 4.3.

¹⁾ Имеются в виду левый D -модуль и левый идеал. — Прим. М. М. Капранова.

7. ТОРИЧЕСКИЕ ВЫРОЖДЕНИЯ И МНОГОГРАННИКИ ЧЖОУ (по работе [K-S-Z])

7.1. Обозначим тор $(C^*)^n$ через H . Рассмотрим линейное рациональное представление $\rho: H \rightarrow GL(V)$, где V — конечномерное векторное пространство. Предположим, что $\rho(H)$ содержит гомотетии. Если $v \in V$ — ненулевой вектор, обозначим через $\underline{v}$ его образ в проективизации $P(V)$, через $\overline{Hv}$ — замыкание орбиты вектора v и через $\overline{H\underline{v}}$ — образ $\overline{Hv}$ в $P(V)$. Отождествим Z^n с группой характеров тора H таким образом, что $a = (a_1, \dots, a_n)$ соответствует характеру $(t_1, \dots, t_n) \rightarrow \prod t_i^{a_i}$. Пространство V разлагается в прямую сумму подпространств $V_a = \{v \in V; \rho(t)v = t^a v \quad \forall t \in H\}$. Для $v \in V$ обозначим через $A(v)$ множество тех весов a , для которых v имеет ненулевую проекцию на V_a . Поскольку $A(v)$ зависит только от $\underline{v}$, можно писать $A(\underline{v})$.

7.2. Точка $\underline{v}$ из $P(V)$ является торическим вырождением точки $\underline{v}$, если существует однопараметрическая подгруппа $\lambda: C^* \rightarrow H$, такая, что $\underline{v} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t))\underline{v}$. Отождествим λ с вектором $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Z^n$, где $\lambda(t) = (t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n})$, и обозначим через $\tilde{\lambda}: Q(A(\underline{v})) \rightarrow \mathbb{R}$ линейную форму $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i$. Тогда торические вырождения вектора $\underline{v}$ можно описать следующим образом. Если σ — некоторая грань многогранника $Q(A(\underline{v}))$, то выберем у $\underline{v}$ произвольный прообраз $v = \sum_{a \in A(\underline{v})} v_a$ и определим $\underline{v}_\sigma$ как образ вектора $\sum_{a \in A(\underline{v}) \cap \sigma} v_a$ в $P(V)$. В этом случае $\underline{v}_\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t))\underline{v}$ тогда и только тогда, когда линейная форма $\tilde{\lambda}$ достигает своего максимума на грани σ . Кроме того, множество всех $\underline{v}_\sigma$, где σ пробегает множество граней многогранника $Q(A(\underline{v}))$, является в точности множеством всех торических вырождений вектора $\underline{v}$. Торическое вырождение называется максимальным, если оно соответствует вершине многогранника $Q(A(\underline{v}))$.

Пример 7.2.1. Группа $GL_n(C)$ естественно действует на пространстве $V = S^d(C^n)$ однородных полиномов степени d от n переменных. Это дает действие тора $(C^*)^n$ на V , для которого $Q(A(\underline{f}))$ есть не что иное, как многогранник Ньютона полинома f .

7.3. Пусть $G(k, d, n)$ — множество эффективных (чистых) циклов размерности $k-1$ и степени d в $\mathbb{P}_C^{n-1}$. Снабдим $G(k, d, n)$ структурой проективного алгебраического многообразия (многообразия Чжоу). Обозначим через $G(n-k, d)$ грассманиан линейных подпространств размерности $n-k-1$ в $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}_C^{n-1}$. Если $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — неприводимое подмногообразие размерности $k-1$, то обозначим че-

рез $Z(X) \subset G(n-k, n)$ подмногообразие линейных подпространств, пересекающих X . Это неприводимая гиперповерхность в $G(n-k, n)$. Рассмотрим п्लюккерovo вложение $G(n-k, n) \hookrightarrow P(V)$, где $V = \Lambda^k((C^n)^\vee)$, которое каждой плоскости коразмерности k сопоставляет внешнее произведение k линейных форм, задающих эту плоскость. Пусть B — координатное кольцо многообразия $G(n-k, n)$, вложенного в $P(V)$. Отображение $C[V] \rightarrow B$ сюръективно, другими словами, B порождено как градуированная алгебра символами Плюккера $[i_1 i_2 \dots i_k]$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Формой Кэли многообразия X назовем уравнение $R_X \in B$, задающее $Z(X)$. Она определена с точностью до ненулевой константы. Если $X = \sum n_i X_i$ — некоторый цикл, причем X_i неприводимы, то определим R_X формулой $R_X = \prod R_{X_i}^{n_i}$.

Теперь мы определим многогранник Чжоу многообразия $X \in G(k, d, n)$. Естественное действие группы $GL_n(C)$ на P^{n-1} задает действие тора $H = (C^*)^n$ на $G(k, d, n)$. С другой стороны, $GL_n(C)$, а значит, и H действуют на B . Поскольку морфизм $X \rightarrow R_X$ H -эквивариантен, можно определить $A(R_X)$, как в п. 7.2. Многогранником Чжоу многообразия X по определению назовем многогранник $Ch(X) = Q(A(R_X))$.

Пример 7.3.1. (1) Если X — гиперповерхность, заданная уравнением $f = 0$ минимальной степени, то $Ch(X)$ с точностью до параллельного переноса совпадает с $Nw(f)$.

(2) Если X — точка с однородными координатами $[x_1, \dots, x_n]$, то $Ch(X)$ есть выпуклая оболочка тех базисных векторов e_i , для которых $x_i \neq 0$.

Из п. 7.2 непосредственно следует такое

Предложение 7.3.2. Частично упорядоченное множество граней многогранника $Ch(X)$ изоморфно частично упорядоченному множеству торических вырождений подмногообразия X в $G(k, d, n)$.

7.4. Для $\sigma = (i_1, \dots, i_\ell)$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$, обозначим через L_σ плоскость в C^n , натянутую на базисные векторы e_{i_j} , и пусть $\underline{L}_\sigma = P(L_\sigma)$. Легко убедиться в истинности следующего утверждения:

Лемма 7.4.1. Неприводимое подмногообразие $X \subset P^{n-1}$ удовлетворяет условию $\dim Ch(X) = 0$ тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\underline{L}_\sigma$.

Из этой леммы и из 7.3.2 непосредственно вытекает следующее

Предложение 7.4.2. Пусть $X \in G(k, d, n)$. Вершины многогранника Чжоу $Ch(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с торическими вырождениями цикла X вида $\sum_{|\sigma|=k} t_\sigma \underline{L}_\sigma$. Вершиной

многогранника $\text{Ch}(X)$, соответствующей такому циклу, является

$$a = \sum_{|\sigma|=k} m_{\sigma} \left(\sum_{i \in \sigma} e_i \right).$$

При этом компонента формы Кэли R_X , соответствующая a , имеет вид

$$R_{X,a} = C_{X,a} \prod_{|\sigma|=k} [\sigma]^{m_{\sigma}},$$

где $C_{X,a}$ — ненулевая константа, а $[\sigma]$ — символ Плюккера $[i_1 \dots i_k]$, если $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$.

Замечание 7.4.3. Можно показать (см. [K-S-Z, Théorème 2.8]), что неприводимые $(k-1)$ -мерные многообразия X , для которых $\dim \text{Ch}(X) = 1$, имеют следующий вид: существуют $\sigma = (i_1, \dots, i_{k+1})$ и целые числа $a_1, \dots, a_{k+1}$, такие, что X совпадает с гиперповерхностью в $\underline{L}_{\sigma}$, заданной уравнением

$$\prod_{a_i > 0} X_i^{a_i} - C \prod_{a_i < 0} X_i^{-a_i} = 0$$

с некоторой ненулевой константой C .

7.5. Формы Чжоу и результаты.

7.5.1. Обозначим через $M_{n,k}$ комплексные $(n \times k)$ -матрицы и через $M_{n,k}^0$ — те из них, которые имеют ранг k . Имеется естественное отображение $p: \mathbf{P}(M_{n,k}^0) \rightarrow G(n-k, k)$, которое каждой матрице сопоставляет линейное подпространство, заданное уравнениями, получающимися из ее столбцов. Обозначим через (c_{ij}) координаты на $M_{n,k}^0$. Тогда $p^*[i_1 \dots i_k] = \det(c_{i_j j})$. Положим $\tilde{R}_X = p^*R_X$. Авторы работы [K-S-Z] называют $\tilde{R}_X$ X -результантом; мы его назовем формой Чжоу. Легко видеть, что $\tilde{R}_X = 0$ есть уравнение многообразия, двойственного к $X \times \mathbf{P}^{k-1}$ (при вложении Сегре). В работе [K-S-Z] $\tilde{R}_X$ охарактеризовано как уравнение, задающее Div от некоторого комплекса Кошуля. Мы сейчас покажем связь этой конструкции с конструкцией Кнудсена-Мамфорда [Кн-М].

7.5.2. Пусть Y — регулярная нетерова схема, E — локально свободный $\mathcal{O}_Y$ -модуль ранга n , $\mathbf{P}$ — соответствующее проективное расслоение, $\pi: \mathbf{P} \rightarrow Y$ — проекция, $\mathbf{P}^{\vee}$ — двойственное расслоение, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ (соотв. $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\vee}}(1)$) — тавтологическое расслоение над $\mathbf{P}$ (соотв. над $\mathbf{P}^{\vee}$) и $H \subset \mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^{\vee}$ — универсальная гиперплоскость, задаваемая обращением в нуль δ , где $\delta \in \Gamma(Y, E \otimes E^{\vee}) = \Gamma(\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^{\vee}, p_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\vee}}(1))$

соответствует $1 \in \Gamma(\mathcal{O}_Y)$ при морфизме $\mathcal{O}_Y \rightarrow E \otimes E^\vee$. Над $\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee$ комплекс

$$K_{(1)}: 0 \rightarrow p_1^* \mathcal{O}_P(-1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{P^\vee}(-1) \xrightarrow{\otimes \delta} \mathcal{O}_{\mathbf{P} \times \mathbf{P}^\vee} \rightarrow 0,$$

нормализованный равенством $K_{(1)}^0 = \mathcal{O}_{\mathbf{P} \times \mathbf{P}^\vee}$, является разрешением для $\mathcal{O}_H$.

Над $\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee$ рассмотрим комплекс

$$K_{(k)} = \bigotimes_{i=1}^k p_{1,i}^*(K_{(1)}),$$

где через $p_{1,i}$ обозначена i -я проекция на $\mathbf{P} \otimes_Y \mathbf{P}^\vee$. Пусть X — неприводимая $(k-1)$ -мерная подсхема в $\mathbf{P}$, плоская над Y . Она определяется пучком идеалов I_X , который является точным комплексом. Положим $\mathcal{F}^\bullet(r) = Lp_1^* I_X(r) \otimes^L K_{(k)}^\bullet$. Легко видеть, что для всех r дивизоры $\text{Div}(Rp_{2*} \mathcal{F}^\bullet(r))$ определены и совпадают друг с другом. Они определяют некоторый дивизор над $(\mathbf{P}^\vee)^k$, который мы обозначим $\text{Chow}(X)$. Если $Y = \text{Spec } \mathbb{C}$, то прообраз уравнения, задающего $\text{Chow}(X)$, при морфизме $\mathbf{P}(M_{n,k}^0) \rightarrow (\mathbf{P}^\vee)^k$ совпадает (с точностью до константы) с $\tilde{R}_X$. Таким образом, мы возвращаемся к описанию, данному в [K-S-Z]: пусть $\mathbb{C}[X]_r = H^0(X, \mathcal{O}_X(r))$, и положим $K^i(r) = \mathbb{C}[X]_{i+k+r} \otimes \Lambda^{i+k} \mathbb{C}^k$. При данных $\ell_1, \dots, \ell_k \in (\mathbb{C}^n)^\vee = \mathbb{C}[X]_1$ снабдим $K^\bullet(r)$ дифференциалом

$$\partial(f \otimes v) = \sum_{j=1}^k \ell_j f \otimes (e_j \wedge v).$$

Этому комплексу сопоставим комплекс пучков на $\mathbf{P}(M_{n,k}^0)$ (соотв. $(\mathbf{P}^\vee)^k$), для которого Div задается уравнением $\tilde{R}_X$ (соотв. совпадает с $\text{Chow}(X)$).

8. ТОРИЧЕСКИЕ ИДЕАЛЫ И ВЕЕРЫ ГРЁБНЕРА (по работе Штурмфельса [S])

8.1. Пусть A удовлетворяет условиям $(*)$ из п. 2.1. Напомним, что мы обозначили через I_A идеал, задающий торическое многообразие X_A в $V^\vee$. Это ядро отображения

$$\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] \rightarrow \mathbb{C}[S(A)], \quad y_i \mapsto x^{a_i}.$$

Напомним также, что через $L(A)$ обозначена решетка линейных соотношений между a_i . Важно заметить, что если α и β принадлежат $\mathbb{N}^n$, то $y^\alpha - y^\beta \in I_A$ тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta \in L(A)$.

Если $\alpha \in \mathbb{R}^n$, положим $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$, где α_+ и α_- — векторы с отрицательными коэффициентами и непересекающимися носителями. Следующая лемма является классической (см. [S, Lemma 2.5]).

Лемма 8.1.1. Идеал I_A порожден элементами $y^{\alpha_+} - y^{\alpha_-}$, $\alpha \in L(A)$.

8.2. Каждому ненулевому вектору $\psi \in \mathbb{R}^n$ соответствует предпорядок $\leq_\psi$ на $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ следующим образом. Если $P \in \mathbb{C}[y]$, обозначим через $\tilde{\psi}(P)$ верхнюю грань скалярных произведений $\langle \psi, m \rangle$, где m пробегает множество показателей мономов из P . Будем считать, что $P \leq_\psi Q$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\psi}(P) \leq \tilde{\psi}(Q)$. Далее, если $P \in \mathbb{C}[y]$, обозначим через $\text{init}_\psi P$ сумму тех мономов из P , показатели m которых удовлетворяют равенству $\langle \psi, m \rangle = \tilde{\psi}(P)$. Обозначим через $I_{A, \psi}$ идеал, порожденный всеми $\text{init}_\psi P$, $P \in I_A$. Наконец, положим $\mathcal{C}(I_{A, \psi}) = \{\psi' \in \mathbb{R}^n; I_{A, \psi} = I_{A, \psi'}\}$.

Все эти открытые конусы образуют полный веер, который мы назовем веером Грёбнера и обозначим через $\mathcal{F}(I_A)$. Следующий результат Штурмфельса показывает, что веер $\mathcal{F}(I_A)$ более тонкий, чем $\mathcal{F}(A)$.

Теорема 8.2.1 [S]. Пусть $T \in \mathcal{T}^0(A)$ — регулярная триангуляция и I_T — мономиальный идеал, соответствующий (по Стэнли-Рейснеру) T : по определению I_T порожден мономами $y_{\tau_1} \dots y_{\tau_\ell}$, такими, что $(\tau_1, \dots, \tau_\ell)$ не является гранью никакого симплекса из T , $\tau_1 < \dots < \tau_\ell$. Тогда для любого вектора ψ из внутренней конуса $\mathcal{C}(A, T)$ идеал I_T равен радикалу идеала $I_{A, \psi}$.

Доказательство. Покажем, что I_T содержится в радикале идеала $I_{A, \psi}$. Рассмотрим симплекс $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\ell)$, не являющийся гранью никакого симплекса из T . Тогда существует грань $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ некоторого симплекса из T , такая, что пересечение относительных внутренностей симплексов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ непусто. Следовательно, существуют целые строго положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\mu_1, \dots, \mu_\ell$, такие, что $\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i a_{\sigma_i} = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \mu_i a_{\tau_i}$. Значит, бином $y_\tau^\mu - y_\sigma^\lambda$ принадлежит идеалу I_A . Поскольку σ является гранью некоторого симплекса из T , а τ не является, мы имеем

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \psi_{\sigma_i} \lambda_i \leq \sum_{1 \leq i \leq \ell} \psi_{\tau_i} \mu_i,$$

так как ψ принадлежит внутренней конуса $\mathcal{C}(A, T)$, а значит, $y_\tau^\mu = \text{init}_\psi f$. Следовательно, y_τ^μ принадлежит радикалу идеала $I_{A, \psi}$.

Далее, для любого бинoma $y_\tau^\mu - y_\sigma^\lambda \in I_A$ из $y_\sigma^\lambda <_\psi y_\tau^\mu$ следует, что τ не может быть гранью никакого симплекса из T . Таким образом, применяя лемму 8.1.1, мы получаем обратное включение. $\square$

Замечание 8.2.2. В общем случае $\mathcal{F}(I_A)$ строго более тонкий, чем $\mathcal{F}(A)$. Это связано с тем, что в общем случае мономы, порождающие $I_{A,\psi}$, имеют вид $y_{\tau_1}^{m_1} \cdots y_{\tau_t}^{m_t}$, где $m_i > 1$.

9. ФОРМЫ ЧЖОУ И ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть $A \subset \mathbb{Z}^k$ удовлетворяет условиям $(*)$ из п. 2.1. Обозначим через X_A торическое многообразие в $V_{\mathbb{C}}^{\vee} = \text{Spec } \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$, ассоциированное с A . Заменяя $\mathbb{C}$ на $\mathbb{Z}$, определим X_A над $\mathbb{Z}$ аналогичным образом в $V_{\mathbb{Z}}^{\vee} = \text{Spec } \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$. Напомним, что X_A есть конус над $P(X_A) \subset P_{\mathbb{Z}}^{n-1}$. Пусть $Y_A = P(X_A)$. Форма Кэли R_{Y_A} и форма Чжоу $\tilde{R}_{Y_A}$ теперь определены с точностью до знака.

Следующий результат описывает многогранник Чжоу от Y_A :

Теорема 9.1 [K-S-Z]. (1) $\text{Ch}(Y_A) = QQ(A)$;

(2) *максимальные торические вырождения (над $\mathbb{C}$) многообразия Y_A имеют вид $\sum_{\sigma \in T} \text{vol } \bar{\sigma} \underline{L}_{\sigma}$, $T \in \mathcal{T}^0(A)$;*

(3) *компонентой формы R_{Y_A} , соответствующей $T \in \mathcal{T}^0(A)$, является моном $\pm \prod_{\sigma \in T} [\sigma]^{\text{vol } \bar{\sigma}}$.*

Доказательство. (1) есть непосредственное следствие из (2). В свою очередь, (2) непосредственно вытекает из предложения 7.4.2, теоремы 8.2.1 и следующей (легкой) леммы.

Лемма 9.2. Пусть I — мономиальный (порожденный мономами) идеал в $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$. Неприводимые $(p-1)$ -мерные компоненты схемы $\text{Spec } \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]/I$ суть $\underline{L}_{\sigma}$ при $|\sigma| = p$. Пусть $\tau = \{1, \dots, n\} - \sigma$ и $\gamma: \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] \rightarrow \mathbb{C}[y_i]_{i \in \tau}$ — гомоморфизм, отображающий y_i при $i \in \sigma$ в 1. Кратность компоненты $\underline{L}_{\sigma}$ в $\text{Spec } \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]/I$ равна числу мономов от y_i , $i \in \tau$, не содержащихся в $\gamma(I)$.

Согласно (2), компонента формы R_{Y_A} , соответствующая $T \in \mathcal{T}^0(A)$, имеет вид $C \prod_{\sigma \in T} [\sigma]^{\text{vol } \bar{\sigma}}$. Мы получаем, что $C = \pm 1$, замечая, что (2) остается в силе над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для простого p . $\square$

10. ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5.1

В этом разделе мы покажем, следуя [K-S-Z], как по-другому получить результаты разд. 2, используя результаты предыдущего раздела о формах Чжоу.

Сравнивая комплексы Кошуля из разд. 4 и 7, мы получаем, что

$$E_A = \pm \tilde{R}_{Y_A} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

(Это соотношение можно проверить прямыми вычислениями.) Теперь заметим, что $(n \times k)$ -матрица коэффициентов $(x_1 \partial f / \partial x_1, \dots, x_k \partial f / \partial x_k)$ имеет в качестве строк векторы $c_i a_i$. Символу Плюккера $[i_1 \dots i_k]$ в R_{Y_A} при отображении p^* соответствует минор $\det(c_{i_l j})$ в $\tilde{R}_{Y_A}$ и, значит, выражение $\det(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) c_{i_1} \dots c_{i_k}$ в E_A . Поскольку $\det(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ равен объему симплекса $\bar{\sigma}$, где $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$, мы получаем $(\text{vol } \bar{\sigma}) c_\sigma$. Таким образом объясняется происхождение коэффициента $(\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}}$ в формуле для E_A : показатель появляется как кратность, а другой объем появляется из символа Плюккера! Итак, мы получаем теорему 2.5.1 в качестве следствия из теоремы 9.1. Несколько большими усилиями можно аналогичным образом получить теорему 2.5.2, пользуясь замечанием 7.4.3.

ЛИТЕРАТУРА

- [B-F-S] Billera L., Filliman P., Sturmfels B., Constructions and complexity of secondary polytopes, *Adv. in Math.* **83** (1990), 155–179.
- [D] Данилов В. И. Геометрия торических многообразий. — УМН, 1978, т. 33, вып. 2, с. 85–134.
- [G-K-Z 1] Гельфанд И. М., Зелевинский А. В., Капранов М. М. Гипергеометрические функции и торические многообразия. — Функци. анализ и его прилож., 1989, т. 23, вып. 2, 12–26.
- [G-K-Z 2] Гельфанд И. М., Зелевинский А. В., Капранов М. М., Дискриминанты многочленов от многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона. — Алгебра и анализ, 1990, т. 2, вып. 3, с. 1–62.
- [G-K-Z 3] Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V., Newton polytopes and the classical resultant and discriminant, *Adv. in Math.* **84** (1990), 237–254.
- [G-K-Z 4] Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V., Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions, *Adv. in Math.* **84** (1990), 255–271.
- [G-K-Z 5] Гельфанд И. М., Зелевинский А. В., Капранов М. М. Проективно-двойственные многообразия и гипердетерминанты. — ДАН СССР, 1989, т. 305, №6, с. 1294–1298.
- [G-K-Z]¹⁾ Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V., Discriminants, resultants, and multidimensional determinants, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [K-S-Z] Kapranov M. M., Sturmfels B., Zelevinsky A. V., Chow polytopes and general resultants, *Duke Math. J.* **67** (1992), 189–218.
- [Kn-M] Knusden F., Mumford D., The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on “det” and “Div”, *Math. Scand.* **39**, 19–55 (1976).

¹⁾ Добавлено при переводе. — Прим. ред.

- [K] Koushnirenko A. G., Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, *Invent. Math.* **32**, 1–31 (1976).
- [S] Sturmfels B., Gröbner bases of toric varieties, *Tohoku Math. J., Ser. 2* **43** (1991), 249–261.
- [V] Виро О. Я. Склеивание алгебраических гиперповерхностей, устранения особенностей и построения кривых. — В кн.: Труды Ленинградской междун. топологической конференции. — Л.: Наука, 1983, с. 149–197.

БАЗИСЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРОСТЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ГРУПП (по Касиваре, Люстигу, Рингелю и др.)¹⁾

Оливье Матье

0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{C}$, и пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль. Естественно поставить вопрос о нахождении в явном виде канонического базиса $\mathfrak{g}$ -модуля V . Попытаемся корректно поставить эту задачу. Пусть G — группа автоморфизмов структуры $(\mathfrak{g}, V)$. Связная компонента G^0 группы G — это произведение присоединенной группы Ad алгебры $\mathfrak{g}$ на группу $\mathbb{C}^*$ гомотетий $\mathfrak{g}$ -модуля V . Такая непрерывная группа не может оставлять инвариантным базис $\mathfrak{g}$ -модуля V . В силу этого, чтобы получить в явном виде базис B $\mathfrak{g}$ -модуля V , к структуре $(\mathfrak{g}, V)$ необходимо добавить дополнительные данные θ . Такой базис заслуживает названия канонического, если, с одной стороны, дополнительные данные θ определены единственным образом (с точностью до автоморфизма) и если, с другой стороны, подгруппа Γ группы G , состоящая из автоморфизмов, стабилизирующих θ , переставляет элементы базиса B . Эти условия можно записать в виде $G = \Gamma \ltimes G^0$ и $\Gamma \cdot B = B$.

В этой статье будут представлены главным образом работы М. Касивары и Г. Люстига. Дополнительные данные θ , которые составляют существенную часть представления алгебры $\mathfrak{g}$, и задание вектора старшего веса x $\mathfrak{g}$ -модуля V будут описаны в первом разделе. Затем будут представлены три конструкции базиса B :

- 1) элементарная конструкция Люстига (см. разд. 3),
- 2) топологическая конструкция (по Люстигу, разд. 5),
- 3) элементарная конструкция Касивары (или кристаллический базис, разд. 6).

Элементарная конструкция Люстига существенным образом использует теорию квантовых групп (или, более точно, теорию квантовых обертывающих алгебр Дринфельда и Джимбо). Она основана на теореме существования и единственности, формулировка (но не доказательство) которой элементарна. Располагая лишь этой теоремой, трудно представить себе сам базис. Топологическая конструк-

¹⁾Mathieu Olivier. Bases des représentations des groupes simples complexes (d'après Kashiwara, Lusztig, Ringel et al.). — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n°743, Astérisque, 201-202-203, 1991, 421–442.

ция, основанная на теории представлений колчанов (см. разд. 2), приводится в совершенно явном виде. Эта конструкция дает также базисы представлений квантовых групп, однако квантовая теория в ней существенным образом не используется. Элементарная конструкция Касивары имеет общие черты с конструкцией Люстига, однако доказательства Касивары совершенно элементарны.

Наконец, будет показано, что эти базисы удобны при работе с тензорными произведениями и связаны с новыми формулами кратностей (см. разд. 5 и 6). Кстати, эти базисы интересны для теории представлений алгебраических групп в конечной характеристике.

Проблема явного нахождения базисов представлений простых групп — это классическая проблема, имеющая многие замечательные приложения. Для того чтобы эта статья не превысила разумный объем, упомянем их лишь мимоходом. Не претендуя на полноту списка, я хотел бы отметить работы Ходжа (базисы для $SL(n)$), теорию стандартных мономов Лакшмибаи, Мусили и Сешадри [LSM] (базисы для классических групп), базисы Гельфанда–Цетлина (случай $SL(n)$), комбинаторные базисы Кончини и Каждана [DK] (для $SL(n)$), построение хороших базисов (Гельфанд и Зелевинский для $SL(n)$, см. [BZ], Ретах и Зелевинский для $Sp(4)$, [M] в общем случае), конструкции базисов для обертывающих алгебр (Бейлинсон, Гинзбург [Gi], Люстиг, Макферсон [BLM], Рингель) и базисов для $SL(n)$ Каждана и Люстига, связанных с комбинаторикой (Гройновски и Люстиг).

Отметим также, что канонические базисы определяются и для симметризуемых алгебр Каца–Мули. Напомним, что отыскание базисов в явном виде для представлений аффинных алгебр являлось предметом многочисленных исследований, связанных с теорией вершинных операторов (работы Френкеля, Каца, Каждана, Леповского, Мисры, Примка, Вилсона).

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Пусть I — неориентированный граф, т. е. даны конечное множество I элементов и множество A пар элементов множества I . Элементы множества I называются вершинами графа, а пары из множества A — ребрами графа. Для простоты впредь будем предполагать, что граф I связан. Введем алгебру Ли $\mathfrak{g}(I)$, порожденную элементами e_i , f_i и h_i (где i пробегает множество I) и следующими соотношениями:

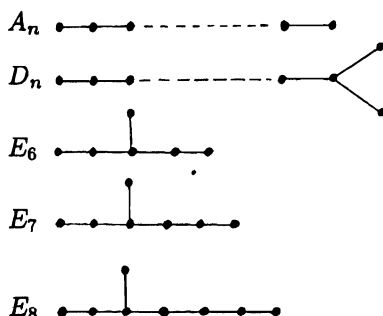
$$1) [h_i, h_j] = 0;$$

$$2) [h_i, e_i] = 2e_i \text{ и } [h_i, f_i] = -2f_i;$$

3) когда i и j различны и $\{i, j\}$ не является ребром, то $[x, y] = 0$, если $x = e_i$, h_i или f_i и $y = e_j$, f_j или h_j ;

4) если i, j — две вершины ребра, то $[h_i, e_j] = -e_j$, $[h_i, f_j] = f_j$, $\text{ad}^2(e_i)(e_j) = 0$ и $\text{ad}^2(f_i)(f_j) = 0$ для любых i, j в I .

Вообще говоря, алгебра Ли $\mathfrak{g}(I)$ бесконечномерна. Она конечномерна тогда и только тогда, когда I — граф одного из следующих типов:



Эти графы частного вида называются графами Дынкина. Если I — граф типа A_n , то алгебра Ли $\mathfrak{g}(I)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}(n+1)$. Если I — граф типа D_n , то алгебра Ли $\mathfrak{g}(I)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{so}(2n)$. Наконец, если I — граф типа E_n для $n = 6, 7$ или 8 , то $\mathfrak{g}(I)$ в этом случае является одной из исключительных алгебр Ли типа E . Указанное выше представление алгебр называется представлением Серра. Не имеет значения, какой автоморфизм τ графа I индуцирует автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}(I)$, обозначаемый также через τ . При этом автоморфизме элементы e_i, f_i, h_i переходят в элементы e_j, f_j, h_j , если $j = \tau(i)$. Известно, что простые алгебры Ли над $\mathbb{C}$ классифицируются парами (I, τ) , где I — граф Дынкина и τ — автоморфизм графа I , имеющий хотя бы одну неподвижную точку. Эта классификация связывает с парой (I, τ) алгебру Ли неподвижных точек автоморфизма τ алгебры Ли $\mathfrak{g}(I)$.

Для простоты здесь будет рассмотрен лишь случай, когда автоморфизм τ является тождественным. Это ограничение не является существенным, так как канонические базисы инвариантны относительно τ при условии, что последний переводит в себя данное представление.

По теории Картана и Вейля простые конечномерные представления алгебры $\mathfrak{g}(I)$ классифицируются с помощью функций на графе I со значениями в $\mathbb{N}$. Для любой такой функции v существует единственное простое конечномерное представление $V = L(v)$, имеющее ненулевой вектор x , такой, что $e_i \cdot x = 0$ и $h_i \cdot x = v(i) \cdot x$ для всякого элемента i множества I . Более того, вектор x единствен с точностью до скалярного множителя. Вектор x называется старшим вектором или вектором старшего веса.

Пусть $\mathfrak{g}^+$ (соотв. $\mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{g}^-$) — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}(I)$, порожденная элементами e_i (соотв. элементами h_i , f_i), и пусть U^+ (соотв. U^0 , U^-) — ее обертывающая алгебра. Обозначим через U обертывающую алгебру алгебры $\mathfrak{g}(I)$. Тогда

$$\mathfrak{g}(I) = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^-$$

(треугольное разложение Картана) и

$$U = U^+ \otimes U^0 \otimes U^-.$$

Пусть d — отображение I в $\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{g}_d^-$ подпространство в $\mathfrak{g}^-$, образованное линейными комбинациями скобок Ли элементов f_i , в которые каждый элемент f_i входит с кратностью $d(i)$, так что мы имеем разложение $\mathfrak{g}^- = \bigoplus \mathfrak{g}_d^-$. В том случае, когда векторное пространство $\mathfrak{g}_d^-$ ненулевое, оно имеет в точности размерность 1, и d тогда называется отрицательным корнем алгебры $\mathfrak{g}(I)$. Обозначим через Φ^- множество отрицательных корней. Аналогично, через U_d^- обозначим подпространство пространства U^- , образованное линейными комбинациями произведений элементов f_i , в которых каждый элемент f_i встречается с кратностью $d(i)$, так что имеет место разложение $U^- = \bigoplus U_d^-$. Обозначим через Φ^+ множество функций $d: I \rightarrow \mathbb{Z}$, таких, что $-d$ принадлежит Φ^- . Аналогичным образом, $\mathfrak{g}^+ = \bigoplus_{d \in \Phi^+} \mathfrak{g}_d^+$. Множество Φ^+ называется множеством положительных корней. Через Φ будем обозначать множество всех корней.

Определим теперь отображение $\pi_v: U^- \rightarrow L(v)$ по формуле $\pi_v(u) = u \cdot x$. Из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта следует, что отображение π_v сюръективно. Канонический базис в $L(v)$, построенный Люстигом, дает базис пространства U^- . Более точно, Люстиг построил канонический базис B пространства U^- , удовлетворяющий следующему условию:

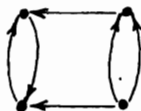
(*) Пусть $B_v = \{u \in B \mid \pi_v(u) \neq 0\}$. Тогда для всякого v множество $\pi_v(B_v)$ есть базис в $L(v)$.

Работа Люстига заключается в описании канонического базиса B пространства U^- , удовлетворяющего условию (*). Важно дать его явное описание.

2. КОЛЧАНЫ

Колчан C — это четверка (I, F, s, b) , где I и F — множества, а s и b — отображения из F в I . Элементы множества I называются вершинами колчана, а элементы множества F называются его стрелками, и для всякого $f \in F$ вершины $s(f)$ и $b(f)$ называются началом и концом стрелки f . Пусть k — поле. Тогда k -представление E колчана — это задание набора векторных k -пространств E_i , $i \in I$, и

для каждой стрелки f линейного отображения $\theta(f) = E_{s(f)} \rightarrow E_{b(f)}$. Ниже мы будем предполагать, что колчан C конечен и что рассматриваемые представления конечномерны. По определению размерность представления E — это функция $d: I \rightarrow \mathbb{N}$, определяемая равенствами $d(i) = \dim E_i$.



Пример колчана с 4 вершинами и 6 стрелками

Пусть (I, A) — граф. Ориентация графа определяется заданием двух отображений $s, b: A \rightarrow I$, таких, что для всякого ребра a имеем $a = \{s(a), b(a)\}$. Кроме того, всякий ориентированный граф является частным случаем колчана.



Пример ориентации графа A_4

Пусть C — колчан. Естественным образом определяется понятие морфизма представления. Категория $\text{Rep}_k(C)$ (конечномерных) представлений колчана C есть абелева категория. Представление E колчана называется неразложимым, если оно не может быть представлено в виде прямой суммы двух ненулевых представлений. Известно, что всякое представление E есть прямая сумма неразложимых представлений и такое разложение единственно с точностью до изоморфизма. Говорят, что колчан C — колчан конечного типа, если он имеет лишь конечное число неразложимых представлений. Напомним теорему Габриэля.

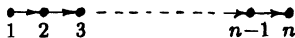
Теорема 2.1 (Габриэль). *Колчан C имеет конечный тип тогда и только тогда, когда он является ориентированным графом Дынкина.*

Более того, в этом случае можно описать все неразложимые представления колчана C .

Теорема 2.2 (Габриэль). *Пусть $C = (A, I)$ — ориентированный граф Дынкина, и пусть d — функция, отображающая I в $\mathbb{N}$. Если d — размерность некоторого неразложимого представления графа C , то она является отрицательным корнем алгебры $\mathfrak{g}(I)$. Обратно, если d является отрицательным корнем алгебры $\mathfrak{g}(I)$, то C допускает единственное неразложимое представление размерности d .*

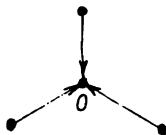
Кроме того, если C — колчан ориентированного графа Дынкина I , то отображение $E \mapsto \dim E$ определяет биекцию множества классов изоморфных неразложимых представлений этого колчана на множество отрицательных корней алгебры $\mathfrak{g}(I)$.

Пример 2.3. Рассмотрим следующую ориентацию графа Дынкина A_n :



Отрицательные корни алгебры Ли $\mathfrak{g}(I)$ — это в точности все ненулевые функции $d: I \rightarrow \mathbb{N}$, которые принимают значения 0 и 1 и такие, что носитель $J = \{i \mid d(i) \neq 0\}$ связан. Пусть d — такая функция, и пусть $\{r, r+1, \dots, s\}$ — ее носитель. Единственное неразложимое представление размерности d — это векторное пространство $E = \bigoplus E_i$, где векторные пространства E_i имеют размерность 1, если $i \in [r, s]$, и 0 в противном случае, причем заданы вложения $E_r \rightarrow E_{r+1}, \dots, E_{s-1} \rightarrow E_s$.

Пример 2.4. Рассмотрим следующую ориентацию графа Дынкина D_4 :



Наибольший отрицательный корень — это функция d , такая, что $d(0) = 2$, а остальные ее значения равны 1. Соответствующее неразложимое представление — это задание векторного пространства E_0 размерности 2 (соответствующего вершине 0) и трех различных прямых пространства E_0 . Это единственное неразложимое представление размерности d , так как известно, что $GL(2, k)$ действует трижды транзитивно на проективной прямой.

3. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КОНСТРУКЦИЯ ЛЮСТИГА

В этом разделе мы коротко опишем элементарную конструкцию Люстига. Настоящий раздел не зависит от остальной части изложения. Мы не напоминаем определения, касающиеся квантовых групп, и отсылаем за ними читателя к статье М. Россо из этого сборника.

Пусть I — граф Дынкина. Ему сопоставляется матрица Картана $A = (a_{i,j})$ по следующим правилам. Ее диагональные элементы $a_{i,i}$ равны 2, а внедиагональный элемент $a_{i,j}$ равен -1 , если i и j —

концы одного и того же ребра, и равен 0 в противном случае. Квантовая обертывающая алгебра Дринфельда и Джимбо — это ассоциативная алгебра U над полем $Q(v)$, порожденная образующими E_i , F_i , K_i и K_i^{-1} и полностью определяемая следующими соотношениями:

$$K_i K_j = K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = 1, \quad (1)$$

$$K_i E_j = v^{a_{i,j}} E_j K_i, \quad K_i F_j = v^{-a_{i,j}} F_j K_i, \quad (2)$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{i,j} \frac{K_i - K_i^{-1}}{v - v^{-1}}, \quad (3)$$

$$E_i^2 E_j - (v + v^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0, \quad \text{если } a_{i,j} = -1, \\ \text{и } E_j E_i = E_j E_i \text{ в противном случае,} \quad (4)$$

$$F_i^2 F_j - (v + v^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0, \quad \text{если } a_{i,j} = -1, \\ \text{и } F_j F_i = F_j F_i \text{ в противном случае.} \quad (5)$$

Пусть σ — инволюция Q -алгебры U , переводящая E_i в E_i , F_i в F_i , K_i в K_i^{-1} и v в v^{-1} . Пусть U^- есть $Q[v, v^{-1}]$ -подалгебра алгебры U , порожденная элементами F_i^N , где

$$F_i^{(N)} = F_i^N / [N!] \quad \text{и} \quad [N!] = \prod_{N \geq h \geq 1} \frac{v^h - v^{-h}}{v - v^{-1}}.$$

Для всякого $i \in I$ Люстиг определяет некоторый автоморфизм $T(i)$ алгебры U .

Пусть ω — наибольший элемент группы Вейля W алгебры Ли $g(I)$, и пусть N — его длина. Выберем приведенное разложение τ элемента ω . Это дает некоторую последовательность $i_1, \dots, i_N$ элементов из I . Для последовательности целых чисел $c = (c_1, \dots, c_N)$ Люстиг полагает

$$F^c = F_{i_1} \cdot T(i_1) F_{i_2} \dots T(i_1) \dots T(i_N) F_{i_N}.$$

Элементы F^c образуют базис, называемый базисом Пуанкаре–Биркгофа–Витта $Q[v, v^{-1}]$ -алгебры U^- . Так как этот базис зависит от выбора приведенного разложения τ элемента ω , то он будет обозначаться через B_τ . Пусть $\mathcal{L}_\tau$ есть $Q[v^{-1}]$ -модуль, порожденный B_τ .

Предложение 3.1 (Люстиг). (1) $Q[v^{-1}]$ -модуль $\mathcal{L}_\tau$, рассматриваемый как подпространство подалгебры U^- , не зависит от выбора приведенного разложения. Можно положить $\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}$.

(2) Пусть $\pi: \mathcal{L} \rightarrow v^{-1}\mathcal{L}$ — каноническая проекция. Тогда $\pi(B_\tau)$ есть базис β пространства $\mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$, не зависящий от приведенного разложения τ .

Хотя формулировка следующей теоремы элементарна, ее доказательство использует теорию колчанов.

Теорема 3.2 (Люстиг). (1) *Ограничение проекции $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$ индуцирует изоморфизм $\rho: \mathcal{L} \cap \sigma\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$.*

(2) *Положим $\mathbf{B} = \rho^{-1}(\beta)$. Тогда $\mathbf{B}$ есть базис $\mathbf{Q}[v^{-1}]$ -модуля $\mathcal{L}$.*

Формально соотношения, определяющие обертывающую алгебру алгебры $\mathfrak{g}(I)$, получаются, если в представлении квантовой обертывающей алгебры Джимбо и Дринфельда положить $v = 1$. Следовательно, глобальный базис $\mathbf{B}$ подалгебры U^- определяет базис $\mathbf{B}$ подалгебры U^- .

4. БАЗИСЫ РИНГЕЛЯ

Пусть I — граф Дынкина. Выберем ориентацию на I , что позволит связать с I колчан $\mathcal{C}$ (см. разд. 2). Пусть k — поле, и пусть Ω — множество классов изоморфных k -представлений колчана $\mathcal{C}$. Обозначим через $\mathbf{Z}\Phi^-$ свободный $\mathbf{Z}$ -модуль, порожденный Φ^- . Теорема Габриэля (см. разд. 2) утверждает, что имеется естественный изоморфизм $\Omega \simeq \mathbf{Z}\Phi^-$. В частности, Ω не зависит от k . Обозначим через $\mathbf{C}\Omega$ векторное пространство над $\mathbf{C}$ с базисом Ω . Предположим теперь, что k — конечное поле с q элементами, и пусть $V, V', V'' \in \Omega$. Обозначим через $g_{V, V', V''}$ число подпредставлений представления V , изоморфных V'' , факторы по которым изоморфны V' . Рингель [Ri] определил структуру ассоциативной алгебры на $\mathbf{C}\Omega$, положив

$$V' \cdot V'' = \sum_V g_{V, V', V''} V.$$

Заметим, что указанная сумма на самом деле конечна. Действительно, если коэффициент $g_{V, V', V''}$ — не нуль, то $\dim V = \dim V' + \dim V''$, так что для данных V' и V'' только конечное число коэффициентов отлично от нуля.

Теорема 4.1 (Рингель). *Пусть $V, V', V'' \in \Omega$. Тогда коэффициент $g_{V, V', V''}$, рассматриваемый как функция от q , является многочленом от q с целыми коэффициентами.*

Можно также определить новую структуру ассоциативной алгебры на $\mathbf{C}\Omega$, положив

$$V' \cdot V'' = \sum_V g_{V, V', V''}(1) V.$$

Пусть $i \in I$. Обозначим через F_i элемент модуля Ω , соответствующий простому корню d_i , определенному равенством $d_i(j) = \delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Легкое вычисление показывает, что

$[F_i, F_j] = 0$, если i, j не являются концами ребра графа I ,
 $\text{ad}(F_i)^2(F_j) = 0$ в противном случае.

Следовательно, существует единственный морфизм алгебр $R: U^- \rightarrow \mathcal{C}\Omega$, такой, что $R(f_i) = F_i$.

Теорема 4.2 (Рингель). *Морфизм R есть изоморфизм.*

Поясним принцип доказательства. Пусть $d: I \rightarrow \mathbb{N}$. Выберем векторное пространство F , имеющее разложение $F = \bigoplus F_i$, такое, что $\dim F_i = d(i)$. Положим $E_d = \bigoplus \text{Hom}(F_i, F_j)$, причем суммирование проводится по парам (i, j) , которые соответствуют ориентированным ребрам графа I . Положим $G_d = \prod \text{GL}(F_i)$. Пространство E_d отождествляется с пространством представлений колчана $\mathcal{C}$, ассоциированного с ориентированным графом I , и фактормножество E_d/G_d есть множество классов изоморфизма представлений размерности d . На представлениях размерности d имеется отношение частичного порядка: если V, V' — два таких представления, то полагаем $V \leq V'$, если орбита представления V при действии G_d в E_d включается в замыкание орбиты представления V' . Доказательство сюръективности морфизма R основано на индукции по d и на частичном упорядочении, определенном выше (см. [Lul, Sec. 5]).

Существует естественное отображение (симметризация) $\gamma: U^- \rightarrow \text{Sg}^-$, определенное единственным образом условием $\gamma(x^n) = x^n$ (это отображение в действительности определено для произвольной обертывающей алгебры). Отображение γ есть изоморфизм векторных пространств. Обозначим через $K(d)$ функцию разбиения Костанта, т.е. число способов записать d в виде суммы отрицательных корней с целыми положительными коэффициентами. Используя симметризацию γ , получаем $\dim U_d^- = K(d)$. Обозначим через Ω_d подмножество в Ω , образованное классами неразложимых представлений. Так как неразложимые представления соответствуют отрицательным корням (теорема Габриэля), то число элементов в Ω_d также равно $K(d)$. Кроме того, пространства $\mathcal{C}\Omega_d$ и U_d^- имеют одну и ту же размерность. Следовательно, R есть изоморфизм.

Далее, изоморфизм Рингеля отождествляет U^- с алгеброй $\mathcal{C}\Omega$, которая имеет естественный базис, а именно Ω . Этот базис не является каноническим в смысле Люстига, так как зависит от выбора ориентации графа Дынкина. Как мы увидим в следующем разделе, конструкция Люстига является модификацией предыдущей конструкции.

Пример 4.3. Вычислим базис Рингеля в случае, когда I имеет тип A_1 (случай, когда I сводится к точке). Алгебра Ли $\mathfrak{g}(I)$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2)$, и ее базис составляют элементы e, f и h (так как здесь имеется лишь один индекс, то мы его опускаем). Для каждого целого

числа d пространство Ω_d сводится к одному элементу. Обозначим через $F(d)$ соответствующий элемент из U^- . Обозначим через $g_{d,a,b}(q)$ число векторных подпространств размерности b в k^d , факторы по которым имеют размерность a . Это число всегда равно нулю, исключая случай $d = a + b$. Это соотношение отныне будет предполагаться выполненным. Тогда $g_{d,a,b}(q)$ есть число k -точек грассманиана $G(d, b)$ векторных подпространств размерности b в k^d . Разложение Брюа есть разложение многообразия $G(d, b)$, страты которого изоморфны векторным пространствам. Следовательно, $g_{d,a,b}(q) = \sum a_n q^n$, где a_n есть число стратов размерности n . Так как число стратов размерности n не зависит от характеристики, то мы видим, что в этом случае $g_{d,a,b}(q)$ есть многочлен от q . Явные формулы для коэффициентов a_n сложны, однако известно, что общее число стратов равно $d!/a!b!$ (это число элементов в $S_d/S_a \times S_b$). Значит, мы имеем $g_{d,a,b}(1) = d!/a!b!$. Отсюда мы выводим, что базис Рингеля образован элементами вида $f^n/n!$.

Замечание. Здесь мы приводим специализацию многочленов Рингеля $gv, v', v''(q)$ при $q = 1$. В действительности теорема Рингеля является более точной. Теорема 4.1 позволяет определить структуру алгебры на $S\Omega \otimes C[q]$. Рингель отождествил эту алгебру с некоторой замечательной подалгеброй квантовой обертывающей алгебры Джимбо и Дринфельда.

5. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ БАЗИСА B

В этом разделе приняты те же обозначения, что и в предыдущем. Предполагается заданным граф Дынкина I , снабженный ориентацией, и через C обозначен соответствующий колчан. Конструкция базиса B зависит от выбора ориентации, но не сам базис. Здесь в качестве основного поля выбрано поле C , а не конечное поле k . Пусть $d: I \rightarrow \mathbb{N}$, и пусть $r \in E_d$. Напомним, что группа G_d действует на E_d . Обозначим через $G_d(r)$ стабилизатор точки r относительно группы G_d . Из односвязности графа I вытекает, что группа $G_d(r)$ связна. Пусть X — замыкание орбиты O группы G_d в E_d . Комплекс когомологий Горески–Макферсона $IC(X)$ есть неприводимый G_d -эквивариантный извращенный пучок на E_d . Обратно, из конечности числа G_d -орбит в E_d и связности стабилизаторов вытекает, что всякий извращенный эквивариантный пучок на E_d является пучком когомологий Горески–Макферсона замыкания орбиты.

Обозначим через P_d множество неприводимых эквивариантных извращенных пучков на пространстве E_d , и положим $P = \coprod P_d$. Пусть CP — векторное пространство с базисом P . Как утверждает Люстиг, на CP существует естественная структура ассоциативной ал-

гебры. Для определения умножения фиксируем $d, d', d'' \in \mathbb{N}^I$ и рассмотрим следующую диаграмму:

$$E_{d'} \times E_{d''} \xleftarrow{\beta} E' \xrightarrow{\beta'} E'' \xrightarrow{\beta''} E_d,$$

определенную следующим образом. Напомним, что мы раз и навсегда выбрали векторные I -градуированные пространства F, F', F'' размерностей соответственно d, d', d'' . Точка пространства E_d — это по определению представление колчана C на F . Точка пространства E'' — это задание представления колчана C на F и подпредставления V'' размерности d'' . Точка из E' — это задание представления C на F , подпредставления V'' размерности d'' и двух изоморфизмов векторных пространств $\mu: V'' \rightarrow F''$ и $\mu': F/V' \rightarrow F'$. Отображения β, β', β'' являются естественными. Группа $G_d \times G_{d'} \times G_{d''}$ действует естественно на многообразиях указанной выше диаграммы, и, кроме того,

- (а) отображение β' является главным расслоением с группой $G_{d'} \times G_{d''}$;
- (б) отображение β является локально тривиальным расслоением с гладким слоем;
- (с) отображение β'' собственное.

Пусть $P \in P_{d'}$, $P'' \in P_{d''}$. Из утверждений (а) и (б) вытекает, что существует извращенный пучок Q на пространстве E'' , такой, что $\beta'^* Q = \beta^*(P \otimes P'')$. Из теоремы Бейлинсона, Бернштейна, Делиня и Габбера вытекает, что имеет место разложение

$$\beta''_* Q = \bigoplus P \otimes A_P,$$

где P пробегает P_d и A_P — градуированные векторные пространства. Умножение Люстига на CP тогда определяется следующей формулой:

$$P \cdot P'' = \sum \dim(A_P) P.$$

Для всякого $i \in I$ обозначим также через F_i единственный элемент из P , отвечающий простому корню d_i .

Теорема 5.1 (Люстиг). *Существует изоморфизм алгебр $L: U^- \rightarrow CP$, переводящий образующие f_i в F_i .*

Так как алгебра CP имеет естественный базис (а именно P), то сформулированная теорема позволяет указать базис B подалгебры U^- . Доказательство этой теоремы основывается на рассуждениях, аналогичных рассуждениям в теореме Рингеля. Доказательство следующей теоремы имеет совершенно другую природу. Оно основано

на результатах Делиня, касающихся геометрического преобразования Фурье.

Теорема 5.2 (Люстиг). *Базис B является каноническим, т. е. он не зависит от выбора ориентации графа Дынкина I .*

Размерность векторного пространства есть целое положительное число. Следующая теорема, которая является непосредственным следствием формулы, определяющей умножение в CP , показывает, что топологический подход является более точным, чем элементарный.

Теорема 5.3 (Люстиг). *Произведение b, b' двух элементов канонического базиса B есть линейная комбинация с целыми положительными коэффициентами элементов из B .*

В действительности Люстиг доказал аналогичный результат для копроизведения [Lu3]. Кроме того, векторные пространства A_p в формуле, определяющей произведение, являются $\mathbb{Z}$ -градуированными. Следовательно, на $CP \otimes C[q, q^{-1}]$ можно определить структуру алгебры. На самом деле результаты Люстига являются более точными, так как он отождествляет эту алгебру над $C[q, q^{-1}]$ с замечательной подалгеброй квантовой обертывающей алгебры.

Пусть $v: I \rightarrow \mathbb{N}$, и пусть x — вектор старшего веса в $L(v)$. Пусть, далее, $\pi_v: U^- \rightarrow L(v)$ — отображение, определенное по формуле $\pi_v(u) = u \cdot x$ для $u \in U^-$. Из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта вытекает, что отображение π_v сюръективно. Положим $B_v = \{u \in B \mid \pi_v(u) \neq 0\}$, так что $\pi_v(B_v)$ порождает векторное пространство $L(v)$.

Теорема 5.4 (Люстиг). *Для всякой функции v множество $\pi_v(B_v)$ есть базис в $L(v)$.*

В дальнейшем изложении обозначим, кроме того, через B_v базис в $\pi_v(B_v)$. Пусть V, V' — два простых конечномерных $g(I)$ -модуля. Тензорное произведение $V \otimes V'$ полупросто. Разложить это тензорное произведение — это значит определить пространство $\text{Hom}_{g(I)}(V \otimes V', L(v))$ для любых v . Существуют единственная функция $u: I \rightarrow \mathbb{N}$ и ненулевой вектор y модуля V , такие, что $e_i \cdot y = 0$ и $h_i \cdot y = u(h_i)$ для всякого $i \in I$ (вектор y является вектором старшего веса и единствен с точностью до скалярного множителя). Аналогично, существует единственная функция $w: I \rightarrow \mathbb{Z}_-$ и ненулевой вектор z модуля V , такой, что $f_i \cdot z = 0$ и $h_i \cdot z = w(h_i) \cdot z$ для всякого $i \in I$ (вектор z является вектором младшего веса и единствен с точностью до скалярного множителя). Обозначим через $L(v)[u + w, u]$ подпространство в $L(v)$, образованное элементами t пространства $L(v)$,

такими, что $h_i \cdot m = (u + w)(h_i) \cdot m$ и $(e_i)^{(u(h_i)+1)} \cdot m = 0$. Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 5.5. *Отображение $\text{Hom}_{\mathfrak{g}(I)}(V \otimes V', L(v)) \rightarrow L(v)[u + v, u]$, переводящее θ в $\theta(y \otimes z)$ (значение в точке $(y \otimes z)$), является изоморфизмом.*

Следовательно, представляет интерес нахождение базисов A модулей $L(v)$, таких, что для любых $u: I \rightarrow \mathbb{N}$ и $w: I \rightarrow \mathbb{Z}_-$ множество $A \cap L(v)[u + v, u]$ является базисом в $L(v)[u + v, u]$. По лемме 5.5 такие базисы обеспечивают разложения тензорных произведений. Базис A , удовлетворяющий указанным выше условиям, называется хорошим базисом. Существование хороших базисов в общем случае было доказано в [М], но до работ Люстига явное построение хороших базисов было известно лишь для SL_n благодаря работе Кончини и Каждана [DK].

Теорема 5.6 (Люстиг). *Базис B_v является хорошим.*

Наконец, Люстиг получил комбинаторное описание множеств $A \cap L(v)[u + v, u]$, что позволило ему дать новые комбинаторные формулы для кратностей тензорных произведений и комбинаторно описать пространство ковариантов тензорных произведений трех модулей.

6. КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ КАСИВАРЫ И ЦВЕТНЫЕ ГРАФЫ

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли. Для простоты предположим, что это одна из алгебр $\mathfrak{g}(I)$ из разд. 1. На самом деле теория Касивары построена для любой симметризуемой алгебры Каца-Мули и нет существенной разницы между частным случаем, рассмотренным ниже, и общим случаем. В работах [Ka1] и [Ka2] Касивара дает конструкцию базисов конечномерных простых представлений алгебры $\mathfrak{g}(I)$. Как и элементарная конструкция Люстига, конструкция Касивары существенным образом основана на использовании квантовых обертывающих алгебр Дринфельда и Джимбо. Впрочем, Люстиг показал, что базисы Касивары совпадают с теми, которые получил он [Lu2]. Следует отметить, что построения и доказательства Касивары элементарны. Мы не будем приводить эту конструкцию, зато поясним, как Касивара использовал эти базисы, чтобы получить замечательные комбинаторные формулы для разложения тензорного произведения представлений (эти формулы основаны на совершенно иной комбинаторике, чем формулы Люстига).

Цветной граф определяется заданием:

- 1) множества G , называемого множеством вершин;

2) множества A пар элементов из G , которое называется множеством ребер графа;

3) двух отображений, называемых начальным и конечным, $s, b: A \rightarrow G$, таких, что $a = \{s(a), b(a)\}$ для всякого $a \in A$;

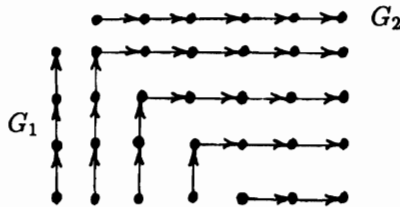
4) множества I , называемого множеством цветов, и отображения $c: A \rightarrow I$. Ребро a называется ребром цвета i , если $c(a) = i$.

Нитью назовем нецветной и ориентированный граф следующего вида:



Пример нити длины 4, т. е. с пятью точками

Следуя Касиваре, определим тензорное произведение некоторых цветных графов следующим образом. Сначала рассмотрим два множества G_1 и G_2 , снабженные структурой нецветного ориентированного графа. Предположим, что G_1 и G_2 являются нитями. Тогда на произведении $G_2 \times G_2$ можно определить структуру нецветного ориентированного графа. Укажем общую формулу на примере:



Произведение двух нитей. Первая строка представляет граф из шести точек G_2 . Первый столбец представляет граф из четырех точек G_1

Пусть G есть I -цветной граф. Скажем, что он допустимый, если для всякого цвета $i \in I$ выполнено следующее условие: если оставить в графе только ребра цвета i , то получится объединение нитей. Пусть G_1 и G_2 — два допустимых цветных графа. Тогда указанная выше процедура позволяет определить структуру цветного I -графа на произведении $G_1 \times G_2$.

Пример. 6.1. В этом примере рассмотрим графы с двумя цветами a и b . Будем изображать ребра цвета a сплошными линиями, а ребра цвета b пунктиром. Пусть G — граф с тремя элементами следующего типа:



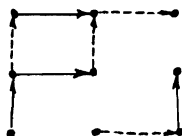
Если сохранить в G лишь ребра цвета a , то граф распадется на две нити:



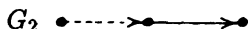
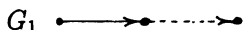
Аналогично, если сохранить лишь ребра цвета b , то граф распадется на две нити:



Положим $G_1 = G_2 = G$. Тогда произведение $G_1 \times G_2$ есть следующий граф с 9 точками:



Пример 6.2. При тех же соглашениях произведение следующих графов:



есть граф



Возвратимся к представлениям. Пусть $v: I \rightarrow \mathbb{N}$. Пусть $L(v)$ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}(I)$, определенное в разд. 1. Пусть далее x — старший вектор, и пусть B_v — канонический базис. Касивара естественным образом определил на B_v структуру I -цветного графа. Вот перечень свойств графа Касивары:

- (1) Граф B_v связан.
- (2) x есть начальная точка графа B_v (т.е. x не является концом ни для какого ребра графа) и притом единственная его начальная точка.
- (3) Граф является допустимым.
- (4) Нить цвета i с началом в x имеет длину $v(i)$.

На самом деле предыдущие утверждения (1) и (2) можно сформулировать иначе: для всякого элемента y графа B_v существует ориентированный путь, идущий из x в y . Заметим, что свойство (4) позволяет найти v , отправляясь от графа.

Пусть $u, v: I \rightarrow \mathbb{N}$. Напомним, что всякое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}(I)$ полупросто и является суммой некоторых $L(w)$. В частности, тензорное произведение $L(u) \otimes L(v)$ полупросто.

Теорема 6.3 (Касивара). *Граф-произведение $B_u \times B_v$ есть несвязное объединение графов B_w . Кроме того, число связных компонент графа $B_u \times B_v$, изоморфных B_w , есть в точности кратность представления $L(w)$ в $L(u) \otimes L(v)$.*

Теорема Касивары дает комбинаторную процедуру и алгоритм для вычисления кратностей тензорных произведений. Действительно, предположим, что графы B_u и B_v известны. Чтобы получить кратности тензорного произведения $L(u) \otimes L(v)$, достаточно проделать следующие вычисления:

- (1) используя предыдущие формулы, вычислить граф $B_u \times B_v$,
- (2) разложить $B_u \times B_v$ на связные компоненты,
- (3) для каждой связной компоненты найти единственную вершину, которая является начальной (единственность начальной вершины утверждается в теореме Касивары),
- (4) каждой начальной вершине s связной компоненты сопоставим функцию $w_s: I \rightarrow \mathbb{N}$, которая определяется следующим образом: $w_s(i)$ — это длина нити цвета i с начальной вершиной s .

Например, пусть V — естественное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3)$. Пример 6.1 демонстрирует разложение произведения $V \otimes V$, а пример 6.2 — произведения $V \otimes V^*$. Само собой разумеется, что оба примера выбраны очень легкими, но замечательно то, что этот метод применим ко всем простым алгебрам Ли.

Формула Стейнберга [S], дающая кратности тензорных произведений, есть общая формула, имеющая большое теоретическое значение. Тем не менее она содержит как положительные, так и отрицательные члены. Поэтому многие авторы делали попытки указать комбинаторные формулы для вычисления разложений тензорных произведений. Здесь слова «комбинаторная формула» обозначают формулу, описывающую кратности как число элементов некоторого множества, но не как разность мощностей двух множеств. Например, для группы $SL(n)$ формула Литтлвуда и Ричардсона выражает эти кратности в терминах таблицы Юнга. Литтлман [L] недавно обобщил эту конструкцию на все классические группы. Тем более замечательно, что формула Касивары справедлива для всех полупростых алгебр Ли (включая особые) и на самом деле для всех симметризуемых алгебр Каца–Мути.

Добавление (сентябрь 1991 г.). В работах шести авторов (Касивары, Канга, Мисры, Мивы, Накасими, Накаясики) дано комбинаторное описание кристаллических базисов представлений аффинных алгебр с помощью «путей на диаграммах» [KMN1, KMN2].

ЛИТЕРАТУРА

- [BLM] Beilinson A., Lusztig G., McPherson R., A geometric setting for quantum groups, *Duke Math. J.* **61** (1990), 655.
- [BZ] Berenstein A., Zelevinsky A., Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition space, Preprint, 1989.
- [DJM] Date E., Jimbo M., Miwa T., Representation of $U_q \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ at $q = 0$ and the Robinson–Schensted correspondence, *Phys. and Math. of strings* (vol. à la mémoire de V. Kniznik) W. Se., Singapour, 1990, 185–211.
- [DK] De Concini C., Kazhdan D., Special bases for S_n and GL_n , *Isr. J. Math.* **40** (1981), 416–432.
- [Dr] Дринфельд В. Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера. — ДАН СССР, 1985, т. 283, №5, с. 1060–1064.
- [Gi] Ginzburg V., Lagrangian constructions of the enveloping algebra of $U(\mathfrak{sl}_n)$, Preprint, 1990.
- [Ji] Jimbo M., A q -difference of $U(g)$ and the Yang–Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63–69.
- [Ka1] Kashiwara M., Crystallizing the q -analog of universal enveloping algebras, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 249–260.
- [Ka2] Kashiwara M., On crystal bases of the Q -analog of universal enveloping algebras, Preprint, 1990.
- [Ka3] Kashiwara M., Crystallizing the q -analogue of universal enveloping algebras. Proceedings ICM 90 (Kyoto), Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991, 791–797.
- [KN] Kashiwara M., Nakashima T., Crystal graphs of the q -analog of classical Lie algebras, RIMS Preprint.
- [KMN1] Kang S., Kashiwara M., Misra K., Miwa T., Nakashima T., Nakayashiki S., Affine crystal and vertex models, in: *Infinite analysis, Part. A, B* (Kyoto, 1991), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, 449–484.
- [KMN2] Misra K., Miwa T., Nakashima T., Nakayashiki S., Perfect crystals of quantized enveloping algebras, *Duke Math. J.* **68**, No. 3, 499–607.
- [LMS] Lakshmibai V., Musili C., Seshadri C., Geometry of G/P IV, *Proc. Ind. Acad. Sc.* **99** (1979), 279–362.
- [L] Lakshmibai V., Standard monomial theory for SL_n , Preprint, 1991.
- [LS] Lakshmibai V., Seshadri C., Geometry of G/P V, *J. Algebra* **100** (1986), 462–557.
- [Li] Littleman P., A generalization of the Littlewood–Richardson rule, Preprint, 1987.
- [Lu1] Lusztig G., Canonical bases arising from quantized enveloping algebras I, *J. Amer. Math. Soc.*, **3** (1990), 447–498.
- [Lu2] Lusztig G., Canonical bases arising from quantized enveloping algebras II, *Progress of Theor. Physics* **202**, suppl. (1990), 175–201.
- [Lu3] Lusztig G., Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras, Preprint.
- [Lu4] Lusztig G., Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras, Preprint.
- [Ma] Mathieu O., Good bases for G -modules, *Geometriae Dedicata* (Tits volume) **36** (1990), 51–66.

- [MM] Misra K., Miwa T., Crystal basis for the basic representation of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, Preprint.
- [N] Nakashima T., A basis of symmetric tensor representations for the quantum analogue of the Lie algebras A_n , B_n , C_n , D_n , Publ. RIMS, Kyoto Univ. **26** (1990), 723–733.
- [Ri] Ringel C., Hall algebras and quantum groups, Invent. Math. **101** (1990), 583–592.
- [St] Steinberg R., A general Clebsch–Gordan theorem, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 406–407.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ ГРУПП¹⁾

Марк Россо

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Уравнение Янга–Бакстера — это уравнение на функцию $R(\lambda, \mu)$ комплексных переменных, принимающую значения в эндоморфизмах тензорного произведения конечномерного векторного пространства V на себя. Оно введено Янгом [Yg] в контексте квантовой задачи n тел размерности 1 как условие разложения матрицы рассеяния S , и Бакстером [Ba1, Ba2] при получении точной формулы для статистических сумм некоторых точно решаемых моделей статистической механики (метод трансфер-матрицы). Оно играет важную роль в методе обратной задачи рассеяния теории квантовых вполне интегрируемых систем, развиваемой главным образом Фаддеевым и его школой в Ленинграде [Fa].

Для функции $R(\lambda, \mu)$ со значениями в $\text{End}(V \otimes V)$ это уравнение записывается в виде

$$\begin{aligned} & [R(\lambda, \mu) \otimes 1][1 \otimes R(\lambda, \nu)][R(\mu, \nu) \otimes 1] \\ & = [1 \otimes R(\mu, \nu)][R(\lambda, \nu) \otimes 1][1 \otimes R(\lambda, \mu)], \end{aligned} \quad (1)$$

где имеется в виду равенство в $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$.

Пусть $P: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ — оператор перестановки $P(x \otimes y) = y \otimes x$, $x, y \in V$. Часто уравнением Янга–Бакстера называют уравнение, которому удовлетворяет $P \cdot R(\lambda, \mu)$. В силу принятых здесь соглашений решения уравнения (1), постоянные по (λ, μ) , определяют представления группы кос в тензорных степенях пространства V и допускают интерпретацию в терминах сплетающих операторов.

Любое решение уравнения (1) называется R -матрицей. Назовем (λ, μ) спектральными параметрами.

Имеется по крайней мере два способа применения алгебр Хопфа и их представлений для нахождения решений уравнения Янга–Бакстера.

1.2. Следующая схема предложена в [J1] и применялась в [C-P1, C-P2, DJMM] и в других работах.

¹⁾Rosso Marc. Représentations des groupes quantiques. — Séminaire Bourbaki, 1990–91, n° 743, Astérisque, 201–202–203, 1991, 443–478.

Рассмотрим алгебру Хопфа U и предположим, что имеется семейство ее представлений $(V, \pi_\xi)_{\xi \in S}$, индексированное подмножеством S пространства $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) для произвольных (ξ, λ, μ) представление $(V \otimes V \otimes V, \pi_\xi \otimes \pi_\lambda \otimes \pi_\mu)$ неразложимо;
- (ii) для $\xi, \mu \in S$ существует сплетающий оператор

$$R(\xi, \mu): V \otimes V \rightarrow V \otimes V,$$

переводящий $\pi_\xi \otimes \pi_\mu$ в $\pi_\mu \otimes \pi_\xi$;

- (iii) $R(\xi, \xi) = \text{id}$ для любого $\xi \in S$.

Тогда $R(\xi, \mu)$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера.

1.3. Другой подход, связанный с «универсальной R -матрицей», в рамках квазитреугольных алгебр Хопфа, введенных Дринфельдом [D2], описывается следующим образом:

Определение. Задать квазитреугольную алгебру Хопфа — это значит задать пару (A, R) , состоящую из алгебры Хопфа A и обратимого элемента R алгебры $A \otimes A$, удовлетворяющего следующим условиям:

- (i) $R\Delta(x)R^{-1} = \Delta'(x)$ для любого $x \in A$, где Δ обозначает копроизведение в A , а Δ' — противоположное копроизведение;
- (ii) $(\Delta \otimes \text{id})(R) = R_{13}R_{23}$, $(\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$, где если $R = \sum a_i \otimes b_i$, то $R_{13} = \sum a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R_{23} = \sum 1 \otimes a_i \otimes b_i, \dots$

Тогда если $(V, \rho_\lambda)_{\lambda \in S}$ — семейство представлений алгебры Хопфа A в одном и том же конечномерном векторном пространстве V , то $R(\lambda, \mu) = P(\rho_\lambda \otimes \rho_\mu)(R)$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера.

Более общим образом можно, вслед за Дринфельдом [D2], определить категорию квантовых групп как категорию, дуальную к категории алгебр Хопфа с единицей, коединицей и обратимым антиподом.

Представляет интерес построение различных классов примеров, с той или иной точки зрения связанных с уравнением Янга–Бакстера.

1.4. Кулиш–Решетихин [Ku-R] и Склянин [Sk] для случая $Sl(2)$ и независимо Дринфельд и Джимбо [D1, D2, J3] для общего случая ввели деформации универсальных обертывающих алгебр простых алгебр Ли и симметризуемых алгебр Каца–Мути, которые являются квазитреугольными алгебрами Хопфа.

Они связаны с так называемыми тригонометрическими решениями уравнения Янга–Бакстера (т.е. $R(\lambda, \mu)$ является рациональной функцией от λ/μ).

Другим весьма важным классом примеров являются янгианы, введенные Дринфельдом и изучавшиеся, среди прочих, Чередником [Ch1, Ch2], Дринфельдом [D3, D4], Кирилловым–Решетихиным [K-R1], Ольшанским [O], Чари и Прессли [C-P2, C-P3].

Они связаны с рациональными решениями уравнения Янга–Бакстера (т.е. рационально зависят от $\lambda - \mu$).

1.5. Воронович предложил другой подход к теории квантовых групп, в рамках теории C^* -алгебр, совершенно независимый от приведенных здесь мотивировок [W1, W2, W3].

Он предлагает деформировать алгебру функций на группе Ли.

Некоторые пополнения ограниченных дуальных к квантовым универсальным обертывающим алгебрам, рассмотренным выше, доставляют такие примеры.

На этот подход будем (для краткости) ссылаться как на пятый.

1.6. Решетихин, Тахтаджян и Фаддеев [F-R-T], вдохновившись методом обратной задачи рассеяния, предложили другую формулировку, в которой алгебра Хопфа и ее дуальная строятся исходя из R -матрицы.

1.7. Манин предложил подход в терминах квадратичных алгебр, в котором квантовые группы возникают как «группы автоморфизмов» квантовых пространств [Ma].

1.8. Данное изложение в основном посвящено представлениям квантовых универсальных обертывающих алгебр Дринфельда и Джимбо.

С точки зрения Дринфельда основным кольцом является алгебра формальных рядов $C[[h]]$ (которая позволяет выразить универсальную R -матрицу), а с точки зрения Джимбо следует рассматривать алгебры Хопфа над $C(q)$ или над C , но зависящие от ненулевого комплексного числа q .

Лкюстиг понял, что подобные деформации можно определить над $Z[q, q^{-1}]$ (строая аналог Z -формы Костанта). Если взять q равным корню из единицы, получается модификация определения Джимбо. Это позволило Лкюстигу установить аналогию между теорией модулярных представлений полупростых групп над алгебраически замкнутым полем характеристики p и теорией конечномерных представлений соответствующих квантовых групп, отвечающих корню p -й степени из единицы. Он предположил, что эти теории в большой степени совпадают.

Изучение представлений в определении Джимбо в случае корней из единицы представляет интерес для физики. В самом деле, Де Кончини и Кац обнаружили, что в этом случае квантовые универсальные обертывающие алгебры имеют большой центр и что их неприводимые

представления максимальной размерности параметризуются некоторым алгебраическим аффинным многообразием, размерность которого равна размерности ассоциированной алгебры Ли. Вообще при некоторых ограничениях эти дополнительные параметры можно рассматривать как спектральные параметры в смысле, напоминающем п. 1.2. (На самом деле нужно рассматривать ассоциированные алгебры Каца–Мууди; точнее см. [B-S, DJMM].)

Упомянутые представления также представляют большой интерес в связи с теорией рациональных конформных полей (интерпретация «правил слияния»¹⁾ и представлений монодромий в терминах представлений квантовых групп с параметром деформации, равным корню из единицы²⁾) В [Т-К, Koh, D6] установлена эквивалентность между двумя представлениями группы кос: представлением, заданным с помощью монодромии уравнения Книжника–Замолотчикова, и представлением, заданным с помощью R -матрицы.

2. КВАНТОВЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ: ОБЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА

2.1. Обозначения.

2.1.1. Пусть q — переменная и $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.

Для $n \in \mathbb{Z}$ и $d \in \mathbb{N}$ пусть $[n]_d = (q^{dn} - q^{-dn}) / (q^d - q^{-d}) \in \mathcal{A}$.

Полагаем $[n]_d! = [n]_d[n-1]_d \dots [1]_d$ и $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_d = \frac{[n]_d!}{[n-j]_d![j]_d!}$; это элементы из $\mathcal{A}$.

Если $d = 1$, то индекс d опускается.

2.1.2. Пусть $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ — неприводимая $n \times n$ -матрица с целыми коэффициентами, такими, что $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$ и существуют взаимно простые $d_1, \dots, d_n$ из набора $\{1, 2, 3\}$, такие, что матрица $(d_i a_{ij})$ является симметричной и положительно определенной.

Следовательно, (a_{ij}) является матрицей Картана полупростой конечномерной алгебры Ли $\mathcal{G}$.

Полагаем $q_i = q^{d_i}$.

2.1.3. Пусть P — свободная абелева группа с базисом ω_i , $i = 1, \dots, n$. Положим $\rho = \sum_{i=1}^n \omega_i$ и $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \omega_i$ для $j = 1, \dots, n$.

Пусть $Q = \sum_i \mathbb{Z} \alpha_i$, $Q_+ = \sum_i \mathbb{Z}_+ \alpha_i$. Для $\beta = \sum k_i \alpha_i$ определяется высота $\text{ht } \beta = \sum_i k_i$.

На P вводится частичное упорядочение: $\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in Q_+$.

¹⁾В оригинале *regles de "fusion"*. — Прим. перев.

²⁾См., например, [A-G-S, F-G-P, M-R, P-S, ...].

Определяется билинейное спаривание $P \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$: $(\omega_i, \alpha_j) = \delta_{ij} d_i$.

Пусть τ_i — автоморфизм группы P , определяемый соотношением $\tau_i(\omega_j) = \omega_j - \delta_{ij} \alpha_i$ ($i, j = 1, \dots, n$). Тогда $\tau_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij} \alpha_i$.

Пусть W — подгруппа в $GL(P)$, порожденная элементами $\tau_1, \dots, \tau_n$. Тогда решетка Q инвариантна относительно W и упомянутое выше спаривание тоже.

Положим $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ и $R = W(\Pi)$, $R_+ = R \cap Q_+$. Тогда R является системой корней, соответствующей матрице (a_{ij}) , а W — ее группой Вейля.

2.2. Определения (Дринфельд [D1, D2], Джимбо [J1, J2, J3]).

2.2.1. Пусть k — поле характеристики нуль.

Пусть $\mathcal{U}$ — алгебра над $k(q)$, определенная образующими E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} , $1 \leq i \leq n$, и соотношениями

$$K_i K_j = K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad (2.2.1.1)$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q_i^{a_{ij}} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}} F_j, \quad (2.2.1.2)$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad (2.2.1.3)$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{d_i} E_i^{1-a_{ij}-s} E_j E_i^s = 0 \quad \text{для } i \neq j, \quad (2.2.1.4)$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{d_i} F_i^{1-a_{ij}-s} F_j F_i^s = 0 \quad \text{для } i \neq j. \quad (2.2.1.5)$$

$\mathcal{U}$ называется *квантовой (универсальной) обертывающей алгеброй или квантовой группой, ассоциированной с матрицей (a_{ij})* .

На самом деле $\mathcal{U}$ является алгеброй Хопфа с копроизведением Δ , коединицей ε и обратимым антиподом S , определенными следующим образом:

$$\Delta E_i = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta F_i = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \quad \Delta K_i = K_i \otimes K_i,$$

$$\varepsilon(E_i) = 0, \quad \varepsilon(F_i) = 0, \quad \varepsilon(K_i) = 1,$$

$$S(E_i) = -K_i^{-1} E_i, \quad S(F_i) = -F_i K_i, \quad S(K_i) = K_i^{-1}.$$

Можно определить антиавтоморфизм k -алгебр ω и автоморфизм k -алгебр φ , полагая

$$\omega(E_i) = F_i, \quad \omega(F_i) = E_i, \quad \omega(K_i) = K_i^{-1}, \quad \omega(q) = q^{-1},$$

$$\varphi(E_i) = F_i, \quad \varphi(F_i) = E_i, \quad \varphi(K_i) = K_i, \quad \varphi(q) = q^{-1}.$$

Введем, наконец, аналоги разделенных степеней:

$$E_i^{(s)} = \frac{E_i^s}{[s]_{d_i}!}, \quad F_i^{(s)} = \frac{F_i^s}{[s]_{d_i}!},$$

а также $[K_i; n] = (K_i q^n - K_i^{-1} q^{-n}) / (q_i - q_i^{-1})$,

$$\left[\begin{matrix} K_i \\ N \end{matrix} \right] = \prod_{s=1}^N \frac{K_i q_i^{1-s} - K_i^{-1} q_i^{s-1}}{q_i^s - q_i^{-s}}.$$

Заметим, что $[K_i; 0] = \left[\begin{matrix} K_i \\ 1 \end{matrix} \right]$.

2.2.2. Пусть $\mathcal{U}^+$ — подалгебра в $\mathcal{U}$, порожденная элементами E_i , $\mathcal{U}^-$ — подалгебра в $\mathcal{U}$, порожденная элементами F_i , и $\mathcal{U}^0$ — подалгебра в $\mathcal{U}$, порожденная элементами K_i , K_i^{-1} , $1 \leq i \leq n$.

Тогда (согласно [Ro1] и [Ro5]) имеется $k(q)$ -изоморфизм векторных пространств

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^- \otimes \mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{U}^+.$$

2.2.3. Для каждого $\varepsilon \in k^*$, такого, что $\varepsilon^{2d_i} \neq 1$ для всех $i = 1, \dots, n$, можно рассмотреть k -алгебру $\mathcal{U}_\varepsilon$, определенную образующими E_i , F_i , K_i , K_i^{-1} , $i = 1, \dots, n$, с теми же соотношениями, что и выше, где q заменено на ε .

Ее можно рассматривать как «специализацию» следующего вида: пусть $\mathcal{U}'$ является $k[q, q^{-1}]$ -подалгеброй в $\mathcal{U}$, порожденной элементами E_i , F_i , K_i , K_i^{-1} , $[K; 0]$. Легко получить ее представление с помощью образующих и соотношений и установить, что она является алгеброй Хопфа [DC-K].

Тогда $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U}' / (q - \varepsilon)\mathcal{U}'$. Алгебры $\mathcal{U}_\varepsilon^+$, $\mathcal{U}_\varepsilon^-$, $\mathcal{U}_\varepsilon^0$ определяются очевидным образом. Имеется также «треугольное разложение», подобное приведенному в п. 2.2.2.

Такое определение через специализацию имеет еще один аспект при $\varepsilon = 1$: элементы K_i являются центральными и фактор алгебры $\mathcal{U}_1$ по двустороннему идеалу, порожденному элементами $K_i - 1$ ($i = 1, \dots, n$), изоморфен универсальной обертывающей алгебре простой k -алгебры Ли, ассоциированной с матрицей (a_{ij}) .

Можно показать, что $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}$ не имеют делителей нуля [DC-K, J-L1].

2.2.4. Приведем, наконец, определение Дринфельда, которым мы будем пользоваться в разд. 3. Основное кольцо есть алгебра формальных рядов $k[[h]]$.

$\mathcal{U}_h$ — это $k[[h]]$ -алгебра, порожденная в h -адическом смысле элементами E_i, F_i, H_i ($1 \leq i \leq n$) и соотношениями

$$H_i H_j - H_j H_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.2.4.1)$$

$$H_i E_j - E_j H_i = a_{ij} E_i, \quad H_i F_j - F_j H_i = -a_{ij} F_j \quad (2.2.4.2)$$

и соотношениями (2.2.4.3), (2.2.4.4), (2.2.4.5), которые получаются соответственно из (2.2.1.3), (2.2.1.4), (2.2.1.5) заменой K_i на $\exp(-\frac{h}{2}d_i H_i)$ и q на $\exp(-\frac{h}{2})$.

$\mathcal{U}_h$ является топологической алгеброй Хопфа с копроизведением и всем прочим, полученным из приведенных в п. 2.2.1 путем тех же замен. Копроизведение принимает значения в тензорном произведении, пополненном в h -адической топологии.

2.2.5. Для простоты изложения мы ограничимся случаем невырожденных матриц Картана. Можно также сопоставить квантовую группу любой симметризуемой обобщенной матрице Картана, и ряд результатов, упомянутых ниже (при рассмотрении интегрируемых представлений) при этом останется верным. См. [J-L1].

2.3. Модули Верма и неприводимые конечномерные модули [L1, Ro1]. Разложение из п. 2.2.2 позволяет построить теорию, аналогичную классической.

2.3.1. Пусть Q_2^* — группа гомоморфизмов из Q в $\{\pm 1\}$.

Элементы $\delta \in Q_2^*$ и $\lambda \in P$ определяют гомоморфизм алгебр $\lambda_\delta: \mathcal{U}^0 \rightarrow k$ с помощью соотношения $\lambda_\delta(K_i) = \delta(\alpha_i) \cdot q^{(\lambda, \alpha_i)}$.

Можно, следовательно, рассмотреть представление размерности 1 подалгебры $\mathcal{U}^0 \mathcal{U}^+$ алгебры $\mathcal{U}$, где E_i действует умножением на 0, а K_i — умножением на $\lambda_\delta(K_i)$, и индуцированное им в силу п. 2.2.2 представление алгебры $\mathcal{U}$. Обозначим через $M(\lambda)^\delta$ соответствующий модуль, называемый *модулем Верма старшего веса λ и типа δ* .

Если M — какой-нибудь $\mathcal{U}$ -модуль, $\delta \in Q_2^*$ и $\lambda \in P$, можно определить весовое подпространство $M^{\lambda, \delta} = \{v \in M \mid K_i v = \delta(\alpha_i) q^{(\lambda, \alpha_i)} v \text{ для } i = 1, \dots, n\}$.

Вектор v из M называется *примитивным*, если он отличен от нуля, принадлежит некоторому весовому подпространству и аннулируется элементами E_i .

Модуль называется *модулем старшего веса*, если он порожден некоторым примитивным вектором. Такой модуль является фактором некоторого модуля Верма и прямой суммой весовых подпространств, имеющих конечную размерность.

У модуля $M(\lambda)^\delta$ имеется единственный неприводимый фактормодуль, обозначаемый через $L(\lambda)^\delta$.

Можно предполагать, тензорно домножив в случае необходимости на некоторое представление размерности 1, что $\delta(\alpha_i) = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$, что и делается ниже. Будем писать $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ вместо $L(\lambda)^1$ и $M(\lambda)^1$.

2.3.2. Неприводимый модуль $L(\lambda)$ конечномерен, если и только если вес λ является доминантным, т. е. $(\lambda, \alpha_i) \geq 0$ для всех i .

2.3.3. Для U_ϵ справедливы результаты, аналогичные 2.3.1 и 2.3.2, если ϵ является корнем из единицы.

2.3.4. Пусть M является U -модулем старшего веса $\lambda \in P$ и порожден элементом v_0 .

Можно определить его характер, элемент групповой алгебры $Z[P]$, с помощью обычной формулы $\text{Ch } M = \sum_{\mu \in P} \dim M^\mu \cdot e^\mu$.

Определим этот характер, следуя работам Люстига [L1, L5]. Пусть M' есть U' -подмодуль модуля M , порожденный элементом v_0 . Тогда

(i) M' есть сумма своих пересечений с весовыми подпространствами, которые являются свободными $k[q, q^{-1}]$ -модулями конечного ранга. Пусть $M'^\mu = M^\mu \cap M'$.

(ii) $k(q) \otimes_{k[q, q^{-1}]} M' \xrightarrow{\sim} M$ и $\dim_{k(q)} M^\mu = \text{rang}_{k[q, q^{-1}]} M'^\mu$.

(iii) Для $\epsilon \in k^*$ пусть $M_\epsilon = M' \otimes_{k[q, q^{-1}]} (k[q, q^{-1}]/(q - \epsilon))$. Это U_ϵ -модуль, характер которого определяется, как и выше: если

$$M_\epsilon^\mu = \left\{ v \in M_\epsilon \mid K_i v = \epsilon^{(\mu, \alpha_i)} v, [K_i, 0] v = \frac{\epsilon^{(\mu, \alpha_i)} - \epsilon^{-(\mu, \alpha_i)}}{\epsilon - \epsilon^{-1}} v \right\},$$

то

$$\text{Ch } M_\epsilon = \sum_{\mu \in P} \dim_k M_\epsilon^\mu \cdot e^\mu,$$

и мы получаем $\text{Ch } M_\epsilon = \text{Ch } M$.

(iv) В частности, для $\epsilon = 1$ благодаря изменению поля скаляров K_i действует умножением на 1 и мы получаем модуль старшего веса над универсальной обертывающей алгеброй Ли над k , ассоциированной с матрицей (a_{ij}) . Если к тому же M имеет конечную размерность, то полученный модуль обязательно неприводим и его характер дается формулой Г. Вейля.

Отсюда немедленно следует, что M сам неприводим (так как $\text{Ch } M = \text{Ch } L(\lambda)$).

Замечание. Джозеф и Летцер нашли $\text{Ch } L(\lambda)$, показав, что $M(s_i \cdot \lambda)$ для всех $i = 1, \dots, n$ является подмодулем модуля $M(\lambda)$ ($s_i \cdot \lambda = s_i(\lambda + \rho) - \rho$) и что $L(\lambda)$ изоморфно фактору модуля $M(\lambda)$ по сумме $\sum M(s_i \cdot \lambda)$ [J-L1].

2.3.5. Ввиду следующего предложения из п. 2.3.4 вытекает, что каждый конечномерный $\mathcal{U}$ -модуль над $k(q)$ вполне приводим.

Предложение [Ro3]. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) каждый конечномерный $\mathcal{U}$ -модуль вполне приводим;
- (ii) каждый конечномерный $\mathcal{U}$ -модуль старшего веса неприводим.

Действительно, импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) классическая.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i), следуя идее Армана Бореля, сводится путем рассуждений от противного к точной последовательности

$$0 \rightarrow L(\lambda) \rightarrow M \rightarrow L(\mu) \rightarrow 0,$$

где M неразложим и $\lambda < \mu$. Но тогда M — конечномерный модуль старшего веса и в силу 2.3.4 он является неприводимым. Противоречие.

Замечание. (i) Ниже (см. 2.8.5) показано, что если ε не является корнем из 1, то каждый конечномерный $\mathcal{U}_\varepsilon$ -модуль над k вполне приводим.

Когомологическое объяснение этого результата дается в [A-P-W1].

В [J-L1] Джозеф и Летцер получили теорему о полной приводимости для некоторых категорий модулей над $\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ ассоциирована с некоторой симметризуемой обобщенной матрицей Картана (а основное поле — поле $k(q)$).

(ii) В рамках своего подхода над $C[[h]]$ Дринфельд показал в [D5], что существует изоморфизм алгебр $\varphi: \mathcal{U}_h \rightarrow \mathcal{U}\mathcal{G} \otimes C[[h]]$, который тождествен по модулю h и ограничение которого на подпространство $\mathcal{H}$, порожденное элементами $H_1, \dots, H_n$, тождественно.

Из сказанного следует, что классификация $\mathcal{U}_h$ -модулей, являющихся свободными $C[[h]]$ -модулями конечного типа — это то же самое, что классификация конечномерных $\mathcal{U}\mathcal{G}$ -модулей над C , и, в частности, отсюда получается формула характеров для неприводимых $\mathcal{U}_h$ -модулей.

2.4. Действие группы кос (Люстиг [L4, L5]). Напомним, что группа Вейля W порождена отражениями $r_1, \dots, r_n$, и следующий набор соотношений является полным:

$$r_i^2 = 1, \quad r_i r_j r_i \dots = r_j r_i r_j \dots, \quad i \neq j;$$

при этом в последнем равенстве имеется 2, 3, 4 или 6 сомножителей в каждом члене в зависимости от того, равно $a_{ij}a_{ji}$ 0, 1, 2 или 3 соответственно.

Ассоциированная группа кос B определена образующими $T_1, \dots, T_n$ и соотношениями

$$T_i T_j T_i \dots = T_j T_i T_j \dots, \quad i \neq j,$$

как и выше, но больше не предполагается, что T_i^2 равно 1.

2.4.1. Для того чтобы построить базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта (см. п. 2.5 ниже) для $\mathcal{U}$, удобно ввести в $\mathcal{U}^+$ и $\mathcal{U}^-$ аналог корневых векторов.

В классической ситуации в алгебре Ли действует (элементарными автоморфизмами) некоторое конечное накрытие группы W , и можно получить корневые векторы, действуя этими автоморфизмами на корневые векторы простых корней.

Люстиг ввел представление группы B автоморфизмами алгебры $\mathcal{U}$ (не сохраняющими структуры коалгебры; это важно в разд. 3), что позволяет идти тем же путем. Другая конструкция осуществлена в [K-R3], а также в [So-V, So2, So3].

Следующее предложение проверяется вычислениями.

Предложение. (i) Для любого $i = 1, \dots, n$ существует единственный автоморфизм T_i алгебры $\mathcal{U}$, такой, что

$$\begin{aligned} T_i E_i &= -F_i K_i, & T_i E_j &= \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^{-s} E_i^{(-a_{ij}-s)} E_j E_i^{(s)}, & i \neq j, \\ T_i F_i &= -K_i^{-1} E_i, & T_i F_j &= \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^s F_i^{(s)} F_j F_i^{(-a_{ij}-s)}, & i \neq j, \\ T_i K_j &= K_j K_i^{-a_{ij}}. \end{aligned}$$

Этот автоморфизм удовлетворяет условиям

$$T_i \omega = \omega T_i, \quad T_i^{-1} = \varphi T_i \varphi^{-1}.$$

(ii) Эти автоморфизмы удовлетворяют соотношениям группы кос B , так что если $w \in W$ и $w = r_{i_1} \dots r_{i_k}$ — разложение элемента w , то автоморфизм $T_w = T_{i_1} \dots T_{i_k}$ алгебры $\mathcal{U}$ не зависит от выбора разложения элемента w .

(iii) Предположим, что $\beta = w\alpha_i \in R_+$, $\alpha_i \in \Pi$. Тогда $T_w E_i \in \mathcal{U}^+$.

2.5. Базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта. В этом пункте предполагается, что $k = \mathbb{Q}$. Положим $A = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.

Пусть $\mathcal{U}_A$ есть A -подалгебра в $\mathcal{U}$, порожденная элементами $E_i^{(N)}$, $F_i^{(N)}$, K_i , K_i^{-1} ($1 \leq i \leq n$, $N \geq 0$). Пусть $\mathcal{U}_A^+$ (соотв. $\mathcal{U}_A^-$) является

$\mathcal{A}$ -подалгеброй алгебры $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, порожденной элементами $E_i^{(N)}$ (соотв. $F_i^{(N)}$) для $N \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0$ — это $\mathcal{A}$ -подалгебра в $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, порожденная элементами $\begin{bmatrix} K_i \\ N \end{bmatrix}$, K_i , K_i^{-1} , $i = 1, \dots, n$, $N \geq 0$.

Люстиг построил $\mathcal{A}$ -базис в $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, являющийся аналогом $\mathbb{Z}$ -формы Костанта, следующим образом.

Пусть w_0 — элемент группы W наибольшей длины, и пусть ν — эта длина. Пусть $\mathcal{X}$ — множество разложений элемента w_0 , т. е. множество последовательностей $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_\nu)$ целых чисел, лежащих между 1 и n и таких, что $w_0 = r_{i_1} \dots r_{i_\nu}$.

Такая последовательность следующим образом определяет линейное упорядочение множества R_+ :

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \beta_2 = r_{i_1}(\alpha_{i_2}), \beta_3 = r_{i_1}r_{i_2}(\alpha_{i_3}), \dots, \beta_\nu = r_{i_1} \dots r_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu}).$$

Далее вводится аналог корневых векторов:

$$E_{\beta_s} = T_{i_1}T_{i_2} \dots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}), \quad F_{\beta_s} = \omega(E_{\beta_s}) = T_{i_1}T_{i_2} \dots T_{i_{s-1}}(F_{i_s}).$$

Для $c = (c_1, \dots, c_\nu)$ в N^ν положим $E_{\beta_s}^{(c_s)} = T_{i_1}T_{i_2} \dots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}^{(c_s)})$ и

$$E_{\mathbf{i}}^{(c)} = E_{\beta_{i_1}}^{(c_1)} E_{\beta_{i_2}}^{(c_2)} \dots E_{\beta_{i_\nu}}^{(c_\nu)}, \quad F_{\mathbf{i}}^{(c)} = \omega(E_{\mathbf{i}}^{(c)}).$$

Тогда справедливо следующее

Предложение [L5, D-L]. (i) Для каждого $\mathbf{i}$ из $\mathcal{X}$ элементы $E_{\mathbf{i}}^{(c)}$, $c \in N^\nu$, лежат в $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+$. Они образуют $\mathcal{A}$ -базис в $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+$ и $\mathbb{Q}(q)$ -базис в $\mathcal{U}$.

(ii) Точно так же элементы $F_{\mathbf{i}}^{(c)}$, $c \in N^\nu$, образуют $\mathcal{A}$ -базис в $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^-$ и $\mathbb{Q}(q)$ -базис в $\mathcal{U}$.

(iii) Элементы $\prod_{i=1}^n K_i^{\delta_i} \begin{bmatrix} K_i \\ n_i \end{bmatrix}$, $n_i \geq 0$, $\delta_i \in \{0, 1\}$, образуют $\mathcal{A}$ -базис в $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0$ и $\mathbb{Q}(q)$ -базис в $\mathcal{U}^0$.

(iv) Умножение определяет изоморфизм $\mathcal{A}$ -модулей

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+ \rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}}.$$

(v) Имеем

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{Q}(q) \simeq \mathcal{U}.$$

Кроме того, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ является алгеброй Хопфа и справедливы соотно-

шения

$$\Delta(E_i^{(N)}) = \sum_{k=0}^N q_i^{k(N-k)} E_i^{(N-k)} K_i^k \otimes E_i^{(k)},$$

$$\Delta(F_i^{(N)}) = \sum_{k=0}^N q_i^{-k(N-k)} F_i^{(k)} \otimes K_i^{-k} F_i^{(N-k)}.$$

При доказательстве предложения для установления линейной независимости над $\mathbf{Q}(q)$ используется специализация $q = 1$ неприводимых модулей достаточно большого старшего веса (ср. п. 2.3.4).

Замечания. (i) При рассмотрении $\mathcal{U}$ или $\mathcal{U}_\varepsilon$ иногда предпочитают рассматривать элементы $E_{\beta_i}^c = T_{i_1} \dots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}^c)$, $E_i^c = E_{\beta_1}^{c_1} \dots E_{\beta_\nu}^{c_\nu}$ и $F_i^c = \omega(E_i^c)$ вместо разделенных степеней.

(ii) Если теперь k — поле характеристики нуль, предложение составляет базисы алгебры $\mathcal{U}$ над $k(q)$ и для каждого $\varepsilon \in k^*$, такого, что $\varepsilon^{2d_i} \neq 1$ для всех i , базис алгебры $\mathcal{U}_\varepsilon$ над k . (Для $\mathcal{U}_\varepsilon$ используются элементы E_i^c и лемма из п. 2.6 ниже.)

(iii) Указанные базисы зависят от разложения элемента w_0 . Люстиг [L6] и Касивара [Ka] построили «канонический», или «кристаллический», базис, который не зависит от выбора разложения и обладает весьма замечательными свойствами. По этому поводу я отсылаю к обзору О. Матье в этом же выпуске «Трудов семинара».

(iv) Непосредственным следствием предложения является то, что характер модуля Верма $M(\lambda)$ над $\mathcal{U}$ дается той же формулой, что и в классическом случае.

Соглашение. В дальнейшем фиксируется разложение i элемента w_0 и указание на i опускается.

2.6. Аналоги корневых векторов E_β удовлетворяют следующим квазикоммутационным соотношениям (для любого разложения i элемента w_0):

Лемма [L-S1]. Если для линейного упорядочения на R_+ выполняются соглашения п. 2.5, то при $i < j$

$$E_{\beta_j} E_{\beta_i} - q^{(\beta_i, \beta_j)} E_{\beta_i} E_{\beta_j} = \sum_{c \in \mathbf{N}^\nu} a_c E^c,$$

где a_c — элемент из $k[q, q^{-1}]$ и $a_c = 0$, когда $c_p = 0$ для $p \leq i$ или $p \geq j$.

Де Кончини и Кац [DC-K] вводят далее фильтрацию на $\mathcal{U}$ (соотв. на $\mathcal{U}_\varepsilon$), такую, что ассоциированная градуированная алгебра является

алгеброй квазиполиномов (т. е. алгеброй, порожденной образующими $x_1, \dots, x_n$ и соотношениями $x_i x_j = \lambda_{ij} x_j x_i$ для ненулевых λ_{ij} из соответствующего основного поля).

К тому же они выводят, что $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_\epsilon$ являются алгебрами без делителей нуля и целозамкнуты в определенном смысле (см. [DC-K-P, Remark c), 6.4]).

Определение [DC-K]. Пусть A — алгебра без делителей нуля, Z — ее центр и $Q(Z)$ — поле частных кольца Z . Положим $Q(A) = Q(Z) \otimes_Z A$. Говорят, что A *целозамкнута*, если для всех подколец B в $Q(A)$, таких, что $A \subset B \subset z^{-1}A$ для некоторого ненулевого z в Z , имеем $B = A$.

Замечание. Если A коммутативна, из этого следует обычное определение.

2.7. Можно, используя антиавтоморфизм ω , ввести, как в классическом случае, для каждого модуля Верма $M(\lambda)$ (положим $\delta = 1$ для упрощения обозначений) эрмитову форму, контравариантную в следующем смысле.

Обозначим через $\bar{}$ k -билинейную инволюцию поля $k(q)$, которая отображает q в q^{-1} .

k -билинейная форма H на векторном $k(q)$ -пространстве V называется эрмитовой, если $H(av, w) = \bar{a}H(v, w)$, $H(v, aw) = aH(v, w)$, $H(v, w) = \overline{H(w, v)}$ для $a \in k(q)$, v и w из V .

Пусть v_λ — вектор старшего веса модуля $M(\lambda)$. На $M(\lambda)$ существует единственная эрмитова форма H , такая, что

$$H(v_\lambda, v_\lambda) = 1, \quad H(Xv, w) = H(v, \omega(X)w) \quad \text{для } X \in \mathcal{U}, v, w \in M(\lambda).$$

Тогда, как обычно, подпространства различных весов ортогональны, ядро формы H является единственным максимальным собственным подмодулем и представляет интерес ограничение H_η формы H на подпространства весов $\lambda - \eta$, $\eta \in Q_+$. Пусть $\det_\eta(\lambda)$ — определитель формы H_η в базисе $F^c v_\lambda$, введенном в п. 2.5, где c пробегает множество $\text{Par}(\eta) = \{(c_1, \dots, c_\nu) \in \mathbb{N}^\nu; \sum c_i \alpha_i = \eta\}$.

Заметим, что можно интерпретировать каждый элемент из $\mathcal{U}^0$ как функцию на P со значениями в $k(q)$ благодаря соотношению $K_\beta(\lambda) = q^{(\beta, \lambda)}$ для $\beta \in Q$, $\lambda \in P$.

Используя формулы характеров из пп. 2.3.4, 2.5 и формулу Шаповалова для детерминанта в классическом случае, Де Кончини и Кац получили следующую формулу:

Предложение [DC-K]. *Справедливо соотношение*

$$\det_{\eta} = \prod_{\beta \in R_+} \prod_{m=1}^{\infty} \left([m]_{d_{\beta}} \left[K_{\beta}; (\rho, \beta) - \frac{m}{2} (\beta, \beta) \right] \right)^{|\text{Par}(\eta - m\beta)|}$$

где $d_{\beta} = d_i$ для $\beta \in R_+$, если β принадлежит орбите элемента α_i относительно действия группы Вейля W .

Они также получили обычные критерии включения модулей Верма друг в друга; эти критерии получены также в [A-P-W1] кохомологическими методами.

2.8. Центр и гомоморфизм Хариш-Чандры. Т. Танисаки в [Ta] установил аналог изоморфизма Хариш-Чандры над $k[[h]]$. В [Ro3] доказан аналог критерия Хариш-Чандры для центральных характеров над $k(q)$. Изоморфизм Хариш-Чандры над $k(q)$ установлен в [DC-K] и [J-L1].

Мы следуем здесь Де Кончини и Кацу, так как их конструкция позволяет построить специализацию $\mathcal{U}_{\varepsilon}$ для $k = \mathbb{C}$ и $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$, если ε не является корнем из единицы.

2.8.1. Пусть Z — центр алгебры $\mathcal{U}$. Произвольный элемент из Z записывается в виде

$$z = \sum_{\eta \in Q_+} \sum_{k, r \in \text{Par}(\eta)} F^k \varphi_{k,r} E^r, \quad \text{где } \varphi_{k,r} \in \mathcal{U}^0.$$

Отображение $z \mapsto \varphi_{0,0}$ является гомоморфизмом $h: Z \rightarrow \mathcal{U}^0$, называемым гомоморфизмом Хариш-Чандры.

2.8.2. Пусть $\gamma: \mathcal{U}^0 \rightarrow \mathcal{U}^0$ — гомоморфизм, определенный соотношением $\gamma(K_i) = q_i K_i$. Если $\varphi \in \mathcal{U}^0$ рассматривается как функция на P , то

$$\gamma(\varphi)(\lambda) = \varphi(\lambda + \rho), \quad \lambda \in P.$$

Группа Q_2^* действует на $\mathcal{U}^0$ по формуле $\delta(K_{\beta}) = \delta(\beta) K_{\beta}$, $\delta \in Q_2^*$, $\beta \in Q$, что дает действие полупрямого произведения $W \times Q_2^*$ на $\mathcal{U}^0$.

Пусть $\widetilde{W}$ — подгруппа этой группы, порожденная подгруппами $\sigma W \sigma^{-1}$, $\sigma \in Q_2^*$, и $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}} = \{\varphi \in \mathcal{U}^0 \mid w(\varphi) = \varphi \text{ для любого } w \in \widetilde{W}\}$.

Теорема [DC-K, J-L1]. *Отображение $\gamma^{-1} \circ h$ переводит Z в $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}}$ и определяет изоморфизм Z на $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}}$.*

2.8.3. Идея доказательства. (а) Тот факт, что $\gamma^{-1} \circ h(z)$ лежит в $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}}$ для z из Z , доказывается путем рассмотрений включений модулей Верма.

(b) Де Кончини и Кац фактически построили обратный изоморфизм: выбирая φ в $\mathcal{U}^0$, ищем $z \in Z$ в форме, представленной в п. 2.8.1, с $\varphi_{00} = \varphi$. Определяем с помощью рекуррентной формулы по η матрицу $\varphi_\eta := (\varphi_{k,m})_{k,m \in \text{Par}(\eta)}$. Рассмотрим модуль Верма $M(\lambda)^\delta$ и для каждого γ из Q_+ матрицу оператора $\sum_{k,m \in \text{Par}(\gamma)} F^k \varphi_{k,r} E^r$ в базисе $F^s v_\lambda$, $s \in \text{Par}(\eta)$, подпространства весов $\lambda - \eta$; обозначим ее $\hat{G}_\gamma(\lambda)$. Используя то, что если $z \in Z$, то z действует в указанном подпространстве умножением на скаляр $\varphi(\lambda)$, получаем уравнение, связывающее функции с матричными значениями:

$$\varphi_\eta H_\eta + \sum_{\gamma < \eta} G_\gamma = \varphi \cdot I,$$

где G_γ , $\gamma < \eta$, предполагаются известными.

Из формулы для определителя формы H_η из п. 2.7 видно, что если S обозначает множество произведений элементов $[K_\beta; (\rho, \beta) - \frac{m}{2}(\beta, \beta)]$ для $\beta \in Q_+$, $m \in \mathbb{N}^*$, то $\varphi_{k,m}$ обязательно лежат в $S^{-1}\mathcal{U}$.

Де Кончини и Кац показали, что в этом случае $\varphi_{k,m}$ действительно лежат в $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда $\gamma^{-1}(\varphi) \in \mathcal{U}^{0\bar{W}}$. Рассмотрение степеней (у K_i) показывает, что $\varphi_{k,m}$ равны нулю для достаточно больших k и m .

Вдобавок, поскольку построенный таким образом элемент z действует умножением на скаляр на каждом модуле Верма, то он находится в центре. Обозначим его z_φ .

2.8.4. Предположим, что $\epsilon \in k^*$ не является корнем из единицы. Тогда для $\varphi \in \mathcal{U}_\epsilon^{0\bar{W}}$ можно «специализировать» элемент z_φ , построенный выше, и получить, в очевидных обозначениях, изоморфизм Хариш-Чандры:

$$\gamma_\epsilon^{-1} \circ h_\epsilon: Z_\epsilon \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}^{0\bar{W}}.$$

2.8.5. **Замечание.** Полная приводимость конечномерных представлений алгебры $\mathcal{U}_\epsilon$. Используя утверждение из п. 2.3, можно показать, что для характера конечномерного модуля старшего веса справедлива формула Г. Вейля.

Поскольку п. 2.8.4 дает критерий Хариш-Чандры для инфинитезимальных характеров, когда ϵ не является корнем из единицы, можно повторить аргументы работы [Ro3] для $\mathcal{U}$ и найти в силу п. 2.5, замечание (iv), характеры модулей Верма.

2.8.6. Рассмотрим, например, случай $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}(2)$. Тогда центральный элемент $C = (Kq + K^{-1}q^{-1})/(q - q^{-1})^2 + FE$, введенный Джимбо в [J2], порождает центр алгебры $\mathcal{U}$.

2.8.7. Используя квазитреугольную структуру алгебры $\mathcal{U}_h$ (подробнее см. в следующем разделе), Дринфельд построил в [D5] аналог квадратичного элемента Казимира. Прокомментируем это.

Предположим, более общим образом, что (A, R) — квазитреугольная алгебра Хопфа и $R = \sum a_i \otimes b_i$. Положим $u = \sum S(b_i) a_i$. Тогда $uS(u) = S(u)u$ находится в центре алгебры A и квадрат антипода S^2 в A является внутренним автоморфизмом, определенным по u .

Предположим, кроме того, что $A = \mathcal{U}_h$. Тогда S^2 также является внутренним автоморфизмом, определенным по $\exp(h\rho)$, где ρ — элемент подалгебры Картана в силу спаривания $(\cdot, \cdot)$.

Таким образом, $\exp(-h\rho)u = u \exp(-h\rho)$ лежит в центре алгебры $\mathcal{U}_h$, и Дринфельд показал, что этот элемент действует на всем модуле старшего веса λ путем умножения на $\exp[-\frac{h}{2}(\lambda, \lambda + 2\rho)]$.

3. УНИВЕРСАЛЬНАЯ R -МАТРИЦА ДЛЯ $\mathcal{U}_h$

В этом разделе определение Дринфельда применяется к построению универсальной R -матрицы. Формула получена для $\mathfrak{sl}(2)$ Дринфельдом, для $\mathfrak{sl}(N)$ в [Ro2] и, наконец, для общего случая Кирилловым–Решетихиным [K-R3] и Левендорским–Сойбельманом [L-S1].

Все рассмотрения основаны на конструкции квантового дубля, изложенной ниже.

Алгебру $\mathcal{U}_h$ (для которой топологическая подалгебра Хопфа $\mathcal{U}_h b_+$ h -адически порождена элементами $E_i, H_i, 1 \leq i \leq n$) Дринфельд называет *QUE-алгеброй*¹⁾, т.е. это топологическая алгебра Хопфа над $k[[h]]$, снабженная h -адической топологией, которая является свободным топологическим $k[[h]]$ -модулем и «классический предел» A/hA для которой изоморфен универсальной обертывающей алгебре над k .

В категории QUE-алгебр можно определить дуальную QUE-алгебру в смысле, определяемом ниже. Все тензорные произведения являются полными в h -адическом смысле.

3.1. Теорема и определение (Дринфельд [D2]). Пусть A — алгебра Хопфа и A^0 — дуальная алгебра Хопфа, снабженная противоположным коумножением. Тогда существует единственная квазитреугольная алгебра Хопфа (см. определение 1.3) $(D(A), R)$, такая, что

- (i) $D(A)$ содержит A и A^0 как подалгебры Хопфа;
- (ii) R является образом канонического элемента из $A \otimes A^0$ при вложении $A \otimes A^0 \rightarrow D(A) \otimes D(A)$;

¹⁾QUE — аббревиатура, соответствующая русскому термину «квантовая универсальная обертывающая». — Прим. перев.

(iii) линейное отображение $A \otimes A^0 \rightarrow D(A)$, $a \otimes b \mapsto ab$, является изоморфизмом коалгебр.

3.2. Метод построения элемента R состоит в нахождении квазитреугольной структуры алгебры $\mathcal{U}_h$ по квазитреугольной структуре дубля $\mathcal{U}_h b_+$: доказывается, что $(\mathcal{U}_h b_+)^0$ изоморфна как QUE-алгебра алгебре $\mathcal{U}_h b_-$ (топологической подалгебре Хопфа, h -адически порожденной элементами F_i , H_i с $1 \leq i \leq n$) и что это позволяет построить эпиморфизм алгебр Хопфа $D(\mathcal{U}_h b_+) \rightarrow \mathcal{U}_h$. Универсальная R -матрица алгебры $\mathcal{U}_h$ есть тогда образ универсальной R -матрицы алгебры $D(\mathcal{U}_h b_+)$ при этом отображении.

3.3. Формула Дринфельда [D2] для $\mathfrak{sl}(2)$ такова ($q = e^{-h/2}$):

$$\begin{aligned} R &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n}{[n]!} q^{-n(n-1)/2} E^n \otimes F^n \right) \text{Exp} \left(\frac{h}{4} H \otimes H \right) \\ &= \text{Exp} \left(\frac{h}{4} H \otimes H \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n}{[n]!} q^{-n(n-1)/2} \\ &\quad \times \left(\text{Exp} \left(\frac{h}{2} H \right) \cdot E \right)^n \otimes \left(\text{Exp} \left(-\frac{h}{2} H \right) \cdot F \right)^n. \end{aligned}$$

3.4. Общий случай. Заметим, что можно построить, как в п. 2.5, базисы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для $\mathcal{U}_h b_+$ или $\mathcal{U}_h b_-$, используя автоморфизмы T_i .

Для установления двойственности между $\mathcal{U}_h b_+$ и $\mathcal{U}_h b_-$ и вычисления канонического элемента можно, отправляясь от соответствующего базиса для $\mathcal{U}_h b_+$, найти дуальный базис. Для этого необходимо определить $\Delta(E_\beta)$ для каждого β из R_+ . Действительно, уже говорилось, что T_i — автоморфизмы алгебр и не сохраняют структуру коалгебры!

Тем не менее, основываясь на другой интерпретации T_i , Кириллов и Решетихин, а также Левендорский и Сойбельман (см., кроме того, [So2, So3, So-V]) получили следующую формулу:

3.4.1. Лемма [K-R3, L-S1]. Для всех x из $\mathcal{U}_h$

$$\Delta(T_i(x)) = \tilde{R}(i)^{-1}[(T_i \otimes T_i)\Delta(x)]\tilde{R}(i),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n}{[n]_{d_i}!} q^{-n(n-1)/2} \\ \times \left(\text{Exp} \left(\frac{h}{2} d_i H_i \right) E_i \right)^n \otimes \left(\text{Exp} \left(-\frac{h}{2} d_i H_i \right) F_i \right)^n. \end{aligned}$$

Идея состоит в рассмотрении скрещенного произведения алгебры $\mathcal{U}_h$ по действию группы кос и в применении автоморфизмов T_i в каждом представлении алгебры $\mathcal{U}_h$.

Пусть τ — антиавтоморфизм алгебр, определенный соотношениями $\tau(E_i) = F_i$, $\tau(F_i) = E_i$, $\tau(H_i) = H_i$. Для $\mathfrak{sl}(2)$, если ρ — конечномерное представление (т. е. лежит в свободном $k[[h]]$ -модуле конечного типа), то $\rho \circ \tau \circ S$ изоморфно контрагredientному представлению, и Кириллов и Решетихин построили в каждом неприводимом конечномерном представлении оператор, который реализует $\tau \circ S$.

Заметим, что это сводится к построению некоторой линейной формы w в пространстве матричных элементов конечномерных представлений $(\mathcal{U}_h)_{\text{res}}^*$ (ограниченном дуальном пространстве).

Используя соотношения между коэффициентами Клебша–Гордана для тензорного произведения двух неприводимых представлений и образом R -матрицы в том же тензорном произведении, выводим равенство

$$\Delta(w) = \tau^{-1} w \otimes w.$$

Тогда автоморфизм T реализуется элементом $\tilde{w} = w \text{Exp}(\frac{h}{8} H^2)$. Ваксман и Сойбельман непосредственно построили линейную форму $\tilde{w}$ как коэффициент некоторого конечномерного представления из $(\mathcal{U}_h)_{\text{res}}^*$.

В общем случае пусть $\mathcal{U}_{h,i}$ является подалгеброй Хопфа алгебры $\mathcal{U}_h$, порожденной элементами E_i , F_i , H_i (и изоморфной $\mathcal{U}_h \mathfrak{sl}(2)$). Беря композицию естественной проекции $(\mathcal{U}_h)_{\text{res}}^* \rightarrow (\mathcal{U}_{h,i})_{\text{res}}^*$ с упомянутой выше линейной формой $\tilde{w}$, получаем линейные формы $\tilde{w}_i$ и показываем, что сопряжение с помощью $\tilde{w}_i$ совпадает на $\mathcal{U}_h$ с автоморфизмом T_i . (Эти сопряжения имеют смысл в дуальном пространстве к $(\mathcal{U}_h)_{\text{res}}^*$.)

Из приведенной выше формулы для $\Delta(w)$ непосредственно вытекает лемма, и, кроме того, скрещенное произведение, указанное выше, получается как подалгебра дуальной алгебры к $(\mathcal{U}_h)_{\text{res}}^*$.

3.4.2. В этой ситуации можно показать, что дуальный базис к базису типа Пуанкаре–Биркгофа–Витта алгебры $\mathcal{U}_h b_+$ является, с точностью до скаляра, базисом типа Пуанкаре–Биркгофа–Витта алгебры $\mathcal{U}_h b_-$, и методом квантового дубля получается

Теорема [K-R3, L-S1]. *Справедливо соотношение*

$$R = \prod_{\alpha \in R_+} \left(\frac{(1 - q_\alpha^2)^n}{[n]_\alpha!} q_\alpha^{-n(n-1)/2} E_\alpha^n \otimes F_\alpha^n \right) \cdot \text{Exp} \left(\frac{\hbar}{2} \sum_{i,j} B_{ij} H_i \otimes H_j \right),$$

где произведение берется в соответствии с линейным упорядочением множества R_+ , заданным с помощью приведенного разложения элемента w_0 , $q_\alpha = q_i$, если α принадлежит орбите корня α_i под действием группы Вейля и (B_{ij}) — матрица, обратная к матрице $(d_{i\alpha_{ij}})$.

4. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

Вернемся к алгебре $\mathcal{U}_\epsilon$ с $k = \mathbb{C}$ и ϵ , не являющимся корнем из единицы.

Предположим, что (a_{ij}) — матрица Картана классической простой алгебры Ли (например, типа A, B, C, D). Фундаментальное представление старшего веса ω_1 задается теми же формулами, что и в классическом случае (с очевидными изменениями для $K_i^{\pm 1}$).

Образ R -матрицы в этом представлении найден Джимбо раньше, чем появилось понятие универсальной R -матрицы ([J1]; по существу им даны те же формулы для R со спектральным параметром, и R , равное константе, получается путем надлежащего предельного перехода). Сохраним за ним обозначение R .

Например, для (a_{ij}) типа A_N имеем (E_{ij} обозначают базисные матрицы)

$$R = \epsilon \sum_{i=1}^{N+1} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij} \otimes E_{ji} + \sum_{j > i} E_{jj} \otimes E_{ii}.$$

В этом случае можно рассмотреть тензорные степени фундаментального представления и изучить коммутант алгебры $\mathcal{U}_\epsilon$. Этот коммутант всегда содержит сдвиги элемента R : $R_i = I \otimes \dots \otimes I \otimes R \otimes I \otimes \dots \otimes I$ (R действует в позициях $(i, i+1)$), которые определяют представление группы кос типа A . Это представление факторизуется по некоторым конечномерным алгебрам, и R_i на самом деле порождают весь коммутант.

Определения. 1) *Алгебра Гекке $\mathcal{H}_p(\epsilon)$ — это ассоциативная $\mathbb{C}$ -алгебра, определенная элементами $g_1, \dots, g_{p-1}$ и соотношениями*

$$g_i g_j = g_j g_i, \quad |i - j| > 2, \quad (H1)$$

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad (H2)$$

$$g_i^2 = (\epsilon - 1) g_i + \epsilon. \quad (H3)$$

2) *Алгебра Бирман-Мураками-Венцла* [B-W, Mu] — это ассоциативная C -алгебра $C_p(r, \varepsilon)$, порожденная элементами $g_1, \dots, g_{p-1}$, которые предполагаются обратимыми, и следующими соотношениями: приведенными выше соотношениями (H1), (H2) и соотношениями

$$\begin{aligned} e_i g_i &= r^{-1} e_i, \\ e_i g_{i-1}^{\pm} e_i &= r^{\pm 1} e_i, \end{aligned} \quad (R1)$$

где e_i определяются условием $(\varepsilon - \varepsilon^{-1})(1 - e_i) = g_i - g_i^{-1}$.

Эти две алгебры можно снабдить следами, обладающими так называемым свойством Маркова [Jo, Re1, Tu, We]. Они играют важную роль в теории полиномиальных инвариантов зацеплений (полиномы HOMFLY для первой и полиномы Кауфмана для второй).

Следующий результат получен Джимбо для (a_{ij}) типа A [J3] и Решетихиным для (a_{ij}) типов B , C и D [Re1].

Теорема. (i) Пусть (a_{ij}) имеет тип A и (ρ, V) — фундаментальное представление алгебры $\mathcal{U}_\varepsilon$. Тогда операторы εR_i , $1 \leq i \leq p-1$, действующие в $V^{\otimes p}$, определяют представление алгебры Гекке $\mathcal{H}_p(\varepsilon^2)$, и образы алгебр $\mathcal{H}_p(\varepsilon^2)$ и $\mathcal{U}_\varepsilon$ в $\text{End}(V^{\otimes p})$ в точности являются коммутантами один другого.

(ii) Пусть (a_{ij}) имеет тип B , C или D и (ρ, V) — фундаментальное представление алгебры $\mathcal{U}_\varepsilon$. Тогда операторы R_i ($1 \leq i \leq p-1$), действующие в $V^{\otimes p}$, определяют представление алгебры $C_n(r, \varepsilon^2)$ с $r = \varepsilon^{2n}$, если (a_{ij}) имеет тип B_n , с $r = -\varepsilon^{(2n-1)/2}$, если (a_{ij}) имеет тип D_n ; и с $r = -\varepsilon^{-(2n+1)}$, если (a_{ij}) имеет тип C_n .

Образы алгебр $C_p(r, \varepsilon^2)$ и $\mathcal{U}_\varepsilon$ в $\text{End}(V^{\otimes p})$ являются в каждом из этих случаев коммутантами один другого.

5. КОМПАКТНЫЕ КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ МАТРИЦ

Здесь $k = C$, а ε не является корнем из единицы.

Выше упоминалась алгебра Хопфа $(\mathcal{U}_h)_{\text{res}}^*$ матричных элементов конечномерных представлений. Можно представить себе, что она заменяет алгебру регулярных функций на соответствующей комплексной алгебраической группе. В классической ситуации это в точности алгебра представляющих функций на ассоциированной компактной группе¹⁾, и эта алгебра плотна в C^* -алгебре непрерывных функций на компактной группе.

¹⁾То есть функций, орбиты которых порождают конечномерные подпространства. — *Прим. перев.*

5.1. Воронович ввел компактные квантовые группы матриц следующим образом [W1, W2]:

Определение. Компактная квантовая группа матриц задается C^* -алгеброй A и $N \times N$ -матрицей $u = (u_{ij})$ элементов из A , удовлетворяющей следующим условиям:

(i) инволютивная подалгебра $\mathcal{A}$, порожденная элементами u_{ij} , плотна в A ;

(ii) существует морфизм C^* -алгебр $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$, такой, что

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj};$$

(iii) u обратима и существует линейное антимультимпликативное отображение $S: A \rightarrow A$, такое, что

$$S(S(a^*)^*) = a \quad \forall a \in A$$

и матрица $(S(u_{ij}))$ является обратной к u .

Воронович установил, что в данном случае существует мера Хаара (т. е. такое состояние¹⁾ $h \in A^*$, для которого $h \cdot \eta = \eta \cdot h = \eta(1) \cdot h$ при всех $\eta \in A^*$) [W2].

Он развил общую теорию (унитарных) конечномерных представлений (т. е. $\mathcal{A}$ -комодулей) и получил характеристику этой категории в духе Танаки–Крейна [W3].

Это позволяет, отпавляясь от дуального объекта $(U_\epsilon)^*_{\text{res}}$, $\epsilon > 0$, строить компактные квантовые группы матриц [Ro4, So2, An].

Алгебра U_ϵ действует тогда в алгебре $\mathcal{A}$ «подкрученными дифференциальными операторами».

Представления соответствующей алгебры $\mathcal{A}$ подробно изучаются в [So1, So2, L-S].

5.2. Рассмотренные квантовые группы придают геометрический характер теории q -аналогов специальных функций, в частности, ортогональных полиномов. Например, « q -малые полиномы Якоби» естественно возникают как матричные элементы неприводимых унитарных представлений квантовой группы $SU(2)$, а коэффициенты Клебша–Гордана выражаются через q -полиномы Хана.

Уравнения в конечных разностях для этих полиномов возникают из действия оператора Казимира 2.8.6.

Мера Хаара выражается через интеграл Джексона q -перечислений, а соотношения ортогональности полиномов интерпретируются как

¹⁾ В квантовой механике состояние — функционал на алгебре наблюдаемых. — Прим. перев.

таковые для матричных элементов представлений по отношению к мере Хаара.

См., например, [K-K, Koo, K-R2, MMNNU, So-V].

6. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ (ИЛИ ОГРАНИЧЕННАЯ) СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ

В данном разделе l есть целое нечетное число, взаимно простое со всеми элементами матрицы Картана.

Пусть $k = \mathbf{Q}$ и $\mathcal{A} = \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$.

Напомним (см. п. 2.5), что $\mathcal{A}$ -алгебра $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ обладает базисом типа Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

Для каждой $\mathcal{A}$ -алгебры A можно взять $\otimes_{\mathcal{A}} A$ и получить A -алгебру $\mathcal{U}_A$, в частности, это можно сделать для $A = \mathbf{Z}$ или $\mathbf{Q}$, где q действует как 1.

Пусть B — фактор кольца $\mathcal{A}$ по идеалу, порожденному l -м круговым полиномом. Можно определить B -алгебры $\mathcal{U}_B$, $\mathcal{U}_B^{\pm}$, $\mathcal{U}_B^0$.

Точно так же можно рассмотреть фактор B кольца $\mathbf{Q}[q, q^{-1}]$ по тому же круговому полиному ($B \subset \mathcal{A}$) и получить $\mathcal{U}_B$, $\mathcal{U}_B^{\pm}$, $\mathcal{U}_B^0$.

Кроме того, обозначим через $\bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}$ обертывающую алгебру над $\mathbf{Q}$ простой $\mathbf{Q}$ -алгебры Ли, ассоциированной с (a_{ij}) , и пусть $\bar{E}_i$, $\bar{F}_i$, $\bar{H}_i$ — ее образующие, удовлетворяющие стандартным соотношениям. Пусть $\bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}}$ — это $\mathbf{Z}$ -форма Костанта, порожденная разделенными степенями: $\bar{E}_i^{(N)} = E_i^N/N!$, $\bar{F}_i^{(N)} = F_i^N/N!$ для $1 \leq i \leq n$, $n \geq 0$.

Если p — нечетное простое число, то пусть $\mathbf{F}_p$ — поле из p элементов. Тогда $\bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p} = \bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p$ есть гипералгебра простой алгебраической группы над $\mathbf{F}_p$, ассоциированной с (a_{ij}) .

6.1. И в $\mathcal{U}_B$, и в $\mathcal{U}_B$ справедливо соотношение $K_i^{2l} = 1$, причем K_i^l — центральный элемент. Обозначим через $\tilde{\mathcal{U}}_B$ и $\tilde{\mathcal{U}}_B$ соответствующие факторы по двустороннему идеалу, порожденному элементами $K_i^l - 1$, $1 \leq i \leq n$.

Кроме того, K_i является центральным элементом в $\mathcal{U}_{\mathbf{Z}}$ или в $\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}$ и можно определить алгебры $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}}$, $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}$.

Предложение [L4, L5]. (i) $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}$ и $\bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}$ (соотв. $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}}$ и $\bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}}$) изоморфны как алгебры Хопфа.

(ii) Пусть $l = p$. Можно отождествить $B/(q-1)B$ и $\mathbf{F}_p$, превратив тем самым $\mathbf{F}_p$ в B -алгебру, и образовать $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p} = \tilde{\mathcal{U}}_B \otimes_B \mathbf{F}_p$. Тогда $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p}$ и $\bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p}$ изоморфны как алгебры Хопфа.

6.2. Пусть $\bar{\mathcal{U}}$ — подалгебра в $\bar{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p}$, порожденная элементами $\bar{E}_i$, $\bar{F}_i$, $1 \leq i \leq n$. Это алгебра Хопфа размерности $p^{2\nu+n}$ над $\mathbf{F}_p$.

Двусторонний идеал алгебры $\bar{U}_{F_p}$, порожденный ядром аугментации алгебры $\bar{u}$ — не что иное, как ядро отображения Фробениуса $\text{Fr}: \bar{U}_{F_p} \rightarrow \bar{U}_{F_p}$ (обобщение обычного отображения Фробениуса на групповом кольце¹⁾ простой группы над F_p): $\text{Fr}(\bar{E}_i^{(N)}) = \bar{E}_i^{(N/p)}$, если p делит N , и $\text{Fr}(\bar{E}_i^{(N)}) = 0$ в противном случае, $\text{Fr}(\bar{F}_i^{(N)}) = \bar{F}_i^{(N/p)}$, если p делит N , и $\text{Fr}(\bar{F}_i^{(N)}) = 0$ в противном случае.

Рассмотрим параллельно B -подалгебру u алгебры $\tilde{U}_B$, порожденную элементами $E_i, F_i, K_i, 1 \leq i \leq n$, и ее фактор $\tilde{u}$ по двустороннему идеалу, порожденному $K_i^! - 1$. Тогда $\tilde{u}$ является свободным B -модулем ранга $l^{2\nu+n}$.

Мы увидим, что он допускает интерпретацию, аналогичную интерпретации алгебры $\bar{u}$, в терминах некоторого «отображения Фробениуса в характеристике нуль».

6.3. Отображение Фробениуса в характеристике нуль (Люстиг [L5]).

Теорема. *Существует единственный морфизм B -алгебр $\tilde{\text{Fr}}: \mathcal{U}_B \rightarrow \bar{U}_Q \otimes_Q B$, такой, что*

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Fr}}(E_i^{(N)}) &= \begin{cases} \bar{E}_i^{(N/l)}, & \text{если } l \text{ делит } N, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \tilde{\text{Fr}}(F_i^{(N)}) &= \begin{cases} \bar{F}_i^{(N/l)}, & \text{если } l \text{ делит } N, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \tilde{\text{Fr}}(K_i) &= 1. \end{aligned}$$

Ограничимся морфизмом B -алгебр

$$\tilde{\text{Fr}}: \mathcal{U}_B \rightarrow \bar{U}_Z \otimes_Z B$$

и пропустим его через факторы $\tilde{U}_B$ и $\tilde{u}$.

Пусть u' есть B -подалгебра алгебры $\tilde{U}_B$, порожденная элементами $E_i, F_i, K_i, 1 \leq i \leq n$, и u'^+ — ее B -подалгебра, порожденная элементами E_i .

Доказательство существования морфизма $\tilde{\text{Fr}}$ основано на интерпретации алгебры $\tilde{U}_B^+$ как «скрещенного произведения» u'^+ на обертыающую алгебру $\bar{U}_Q^+ \otimes_Q B$, действующую на u'^+ с помощью некоторых дифференцирований. Точнее, пусть δ_i (соотв. $\delta_i^!$) — дифференцирование алгебры $\mathcal{U}_B$, определенное соотношением $\delta_i(x) = E_i^{(l)} x - x E_i^{(l)}$

¹⁾В оригинале — *algèbre de coefficients*. — Прим. перев.

(соотв. $\delta'_i = F_i^{(l)}x - xF_i^{(l)}$). Тогда δ_i оставляет u и u^+ на месте, а δ'_i оставляет на месте u и u^- .

Можно показать, что на $(\mathcal{U}_Q^+ \otimes_Q B) \otimes_B u'^+$ существует единственная структура B -алгебры, которая совпадает с известными структурами на $\mathcal{U}_Q^+ \otimes B$ и на u'^+ и такова, что $E_i x = x E_i + \delta_i(x)$ для всех x в u'^+ . Эта алгебра изоморфна $\mathcal{U}_B^+$, причем соответствующий изоморфизм γ переводит $E_i \in \mathcal{U}_Q^+ \otimes_Q B$ в $E_i^{(l)} \in \mathcal{U}_B^+$ и $y \in u'^+$ в себя. Тогда $\tilde{F}\tilde{r}$ определен на $\mathcal{U}_B^+$, для чего используется γ^{-1} и отображение алгебры $(\mathcal{U}_Q^+ \otimes_Q B) \otimes_B u'^+$ на $\mathcal{U}_Q^+ \otimes_Q B$ с помощью аугментации алгебры u'^+ .

6.4. Ядро отображения $\tilde{F}\tilde{r}: \mathcal{U}_B \rightarrow \bar{U}_Z \otimes_Z B$ есть не что иное, как двусторонний идеал, порожденный идеалом аугментации алгебры Хопфа $\tilde{u}$, введенной в п. 6.2.

6.5. В данном пункте $l = p$.

Применим функтор $\otimes_B F_p$ к $\tilde{\mathcal{U}}_B$ и к $\bar{U}_Z \otimes_Z B$. Согласно п. 6.1, получаем в обоих случаях $\bar{U}_{F_p}$, и $\tilde{F}\tilde{r}$ становится отображением Фробениуса из п. 6.2.

Кроме того, $\tilde{u} \otimes_B F_p$ и $\bar{u}$ изоморфны как алгебры Хопфа над F_p .

Пусть $\tilde{u}' = \tilde{u} \otimes_B B$.

Предложение (Люстиг [L4]). (i) *Простые $\tilde{u}'$ -модули параметризуются множеством $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.*

(ii) *Если M является простым $\tilde{u}'$ -модулем, то он содержит B -решетку M_0 , которая является $\tilde{u}$ -подмодулем, такую, что $M_0 \otimes_B F_p$ имеет фактор, являющийся простым $\bar{u}$ -модулем с тем же параметром, что и u в $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.*

Люстиг фактически предполагает, что $\bar{u}$ и $\tilde{u}$ имеют одинаковые теории представлений (для малых p). В частности, простые $\bar{u}$ -модули, связанные с M , как указано выше, должны иметь ту же размерность, что и M .

6.6. Возвратимся к случаю не обязательно простого l и рассмотрим категорию $\mathcal{C}$ конечномерных $\mathcal{U}_B$ -модулей, на которых K_i^l действует как 1 (можно всегда свести дело к этому случаю). (См. [L2].)

6.6.1. Простые объекты категории классифицируются доминантными весами. Действительно, если λ — доминантный вес, то имеется конечномерный простой $\mathcal{U}$ -модуль $L(\lambda)$ над $\mathbb{Q}(q)$ и вектор старшего веса v . Пусть $L(\lambda)_A$ является $\mathcal{U}_A$ -подмодулем, порожденным вектором v , и $N(\lambda) = L(\lambda)_A \otimes_A B$. Это $\mathcal{U}_B$ -модуль, который имеет единственный простой фактор $\mathcal{L}(\lambda)$. Отображение $\lambda \mapsto \mathcal{L}(\lambda)$ является

биекцией множества P_+ на множество классов эквивалентности простых объектов в $\mathcal{C}$.

6.6.2. Если M является $\mathcal{U}_B$ -модулем из категории $\mathcal{C}$ и $\lambda \in P$, $\lambda = \sum k_i \omega_i$, Люстиг определяет подпространство веса λ

$$M_\lambda = \left\{ v \in M \mid K_i v = q_i^{k_i} v \text{ и } \begin{bmatrix} K_i \\ l \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} k_i \\ l \end{bmatrix} v \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

M является суммой весовых подпространств, и если $M = N(\lambda)$, то размерность весовых подпространств дается формулой Г. Вейля.

Для $\mathcal{L}(\lambda)$ эти размерности неизвестны.

По аналогии с имеющимися гипотезами для простых рациональных модулей над простыми алгебраическими группами над алгебраически замкнутым полем ненулевой характеристики Люстиг предложил гипотетическую формулу для размерностей весовых подпространств модуля $\mathcal{L}(\lambda)$ в терминах полиномов Кэждана-Люстига аффинной группы Вейля, связанной с (a_{ij}) [L2].

6.7. В силу аналога теоремы Стейнберга о тензорном произведении все сводится на самом деле к случаю, когда координаты k_i доминантных весов λ таковы, что $0 \leq k_i \leq l-1$ (Lusztig [L2]).

Действительно, доминантный вес λ единственным образом записывается в виде $\lambda = \lambda' + l\lambda''$, где λ'' — доминантный вес, а координаты веса λ' заключены между 0 и $l-1$. Тогда $\mathcal{L}(\lambda) \simeq \mathcal{L}(\lambda') \otimes \mathcal{L}(l\lambda'')$ как $\mathcal{U}_B$ -модули. На самом деле u' действует в $\mathcal{L}(l\lambda'')$ тривиально, и представление $\mathcal{U}_B$ в $\mathcal{L}(l\lambda'')$ пропускается через отображение Фробениуса $\tilde{F}_\Gamma: \mathcal{U}_B \rightarrow \overline{U}_Q \otimes_Q B$, так что структура весовых подпространств модуля $\mathcal{L}(l\lambda'')$ известна. Кроме того, ограничение $\mathcal{L}(\lambda')$ на u' остается неприводимым, и каждый неприводимый u' -модуль, на котором $K_i^!$ действует умножением на 1, получается именно как такое ограничение.

6.8. Теория представлений алгебры $\mathcal{U}_B$ для случая, когда (a_{ij}) имеет тип A , подробно изучается в [A-P-W1, A-P-W2, A-W] и в [P-W].

Андерсен, Поло и Вен ввели для $\mathcal{U}$ «алгебру координат», которая является свободным $\mathbb{Z}[q]$ -модулем, и использовали ее для развития общей теории индукции. В частности, они получили аналоги теоремы Серра, теоремы об обращении в нуль Кемпфа для доминантных характеров и формулы характеров Демазюра, а также определили фильтрацию типа Янсена. Они проверили гипотезу Люстига для случая системы корней ранга 2 и для случая, когда (a_{ij}) имеет тип A_3 .

За более точной информацией мы отсылаем читателя к их статьям.

7. СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ

Результаты данного раздела получены Де Кончини и Кацем [DC-K].

Пусть $k = \mathbb{C}$ и ε — примитивный корень l -й степени из 1. Положим $l' = l$, если l нечетно, и $l' = l/2$, если четно. Предположим, что $l' > \max\{d_i\}$.

7.1. Элементы $E_\alpha^{l'}$, $F_\alpha^{l'}$, $K_\beta^{l'}$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} E_\alpha^{l'} E_\beta &= \varepsilon^{-(\alpha, \beta)l'} E_\beta E_\alpha^{l'}, & F_\alpha^{l'} F_\beta &= \varepsilon^{(\alpha, \beta)l'} F_\beta F_\alpha^{l'}, \\ E_\alpha^{l'} F_\beta &= F_\beta E_\alpha^{l'}, & F_\alpha^{l'} E_\beta &= E_\beta F_\alpha^{l'}, \\ K_\beta^{l'} E_\alpha &= \varepsilon^{(\alpha, \beta)l'} E_\alpha K_\beta^{l'}, & K_\beta^{l'} F_\alpha &= \varepsilon^{-(\alpha, \beta)l'} F_\alpha K_\beta^{l'}. \end{aligned}$$

Следовательно, элементы $E_\alpha^{l'}$, $F_\alpha^{l'}$, $K_\beta^{l'}$ ($\alpha \in R_+$, $\beta \in Q$) лежат в центре Z_ε алгебры $\mathcal{U}_\varepsilon$, и $F_\alpha^{l'} v_\lambda$ порождает в модуле Верма $M(\lambda)$ собственный подмодуль старшего веса для каждого $\alpha \in R_+$.

Диагональный $\mathcal{U}_\varepsilon$ -модуль $\bar{M}(\lambda)$ определяется как фактор модуля $M(\lambda)$ по подмодулю, порожденному всевозможными $F_\alpha^{l'} v_\lambda$, $\alpha \in R_+$.

Из этого непосредственно следует, что элементы $F_{\beta_1}^{m_1} \dots F_{\beta_n}^{m_n} v_\lambda$, где $0 \leq m_i < l'$, образуют базис модуля $\bar{M}(\lambda)$ над $\mathbb{C}$.

Кроме того, при рассмотрении детерминанта контравариантной эрмитовой формы (которую можно специализировать, когда $|\varepsilon| = 1$), видно, что если $\lambda(K_\beta^{l'})^2 \neq 1$ для всех β из R_+ , то $\bar{M}(\lambda)$ неприводим.

7.2. Для каждого α из R_+ пусть $x_\alpha = E_\alpha^{l'}$, $y_\alpha = F_\alpha^{l'}$, и пусть $z_\beta = K_\beta^{l'}$ для каждого β из Q . Представляет интерес подалгебра Z_0 алгебры Z_ε , порожденная этими элементами, и ее подалгебры Z_0^+ , Z_0^- , Z_0^0 , порожденные соответственно элементами x_α , y_α и z_β . Пусть $z_i = z_{\alpha_i}$. Алгебра Z_0^0 является алгеброй полиномов Лорана от z_i , z_i^{-1} .

Предложение. (i) $Z_0 = Z_0^+ \otimes Z_0^0 \otimes Z_0^-$.

(ii) Z_0^+ (соотв. Z_0^-) является алгеброй полиномов от x_α (соотв. y_α), $\alpha \in R_+$.

(iii) $\mathcal{U}_\varepsilon$ является свободным Z_0 -модулем с базисом $F^k K_1^{m_1} \dots K_n^{m_n} E^r$, где

$$0 \leq m_i < l, \quad 0 \leq k_j < l, \quad 0 \leq r_j < l.$$

(iv) $\mathcal{U}_\varepsilon^\pm \cap Z_\varepsilon = Z_0^\pm$.

(v) Z_0 инвариантна относительно автоморфизмов T_i .

7.3. $\mathcal{U}_\epsilon$, следовательно, является нётеровым Z_0 -модулем; поэтому его подмодуль Z_ϵ конечно порожден над Z_0 и, следовательно, является целым над Z_0 . По теореме Гильберта о базисе Z_ϵ является конечно порожденной алгеброй.

Можно, следовательно, рассмотреть ее спектр $\text{Spec } Z_\epsilon$, т. е. аффинное алгебраическое многообразие гомоморфизмов алгебры Z_ϵ в $\mathbb{C}$. То же можно сделать и для Z_0 . Получим $\text{Spec } Z_0 \simeq \mathbb{C}^{2\nu} \times (\mathbb{C}^*)^n$ (не канонически).

Пусть $\text{Rep } \mathcal{U}_\epsilon$ — множество классов эквивалентности неприводимых конечномерных представлений алгебры $\mathcal{U}_\epsilon$ над $\mathbb{C}$. Имеются следующие канонические отображения:

$$\text{Rep } \mathcal{U}_\epsilon \xrightarrow{X} \text{Spec } Z_\epsilon \xrightarrow{\tau} \text{Spec } Z_0,$$

где X сопоставляет каждому неприводимому представлению его центральный характер и τ индуцировано вложением $Z_0 \subset Z_\epsilon$. Так как Z_ϵ является целым над Z_0 , τ является конечным и сюръективным (теорема Козэна-Зайденберга). Отображение X сюръективно, поскольку если $\chi \in \text{Spec } Z_\epsilon$ и если I^χ — идеал в $\mathcal{U}_\epsilon$, порожденный ядром гомоморфизма χ , то алгебра $\mathcal{U}_\epsilon^\chi = \mathcal{U}_\epsilon / I^\chi$ не равна $\{0\}$ (лемма Накаямы).

7.4. Для определения максимальной размерности неприводимых представлений алгебры $\mathcal{U}_\epsilon$ и степени отображения τ можно воспользоваться теорией конечномерных ассоциативных алгебр.

Напомним, что $\mathcal{U}_\epsilon$ не содержит делителей 0. Можно, следовательно, рассмотреть поле частных $Q(Z_\epsilon)$ кольца Z_ϵ и $Q(\mathcal{U}_\epsilon) := Q(Z_\epsilon) \otimes_{Z_\epsilon} \mathcal{U}_\epsilon$. Это алгебра с делением, конечномерная над своим центром. Пусть F — максимальное подполе в $Q(\mathcal{U}_\epsilon)$: оно обязательно содержит $Q(Z_\epsilon)$, и если m — его размерность над $Q(Z_\epsilon)$, то размерность $Q(\mathcal{U}_\epsilon)$ над $Q(Z_\epsilon)$ равна m^2 и $F \otimes_{Q(Z_\epsilon)} \mathcal{U}_\epsilon$ изоморфно алгебре $m \times m$ -матриц над F . Число m называют степенью алгебры $\mathcal{U}_\epsilon$.

Сказанное выше позволяет рассматривать характеристический полином, след tr , норму элемента из $\mathcal{U}_\epsilon$ и билинейную форму $(x, y) = \text{tr}(xy)$. Так как $\mathcal{U}_\epsilon$ целозамкнута, то Z_ϵ также целозамкнута и коэффициенты характеристических полиномов элементов из $\mathcal{U}_\epsilon$ лежат в Z_ϵ . Дискриминантный идеал алгебры $\mathcal{U}$ определяется как (ненулевой) идеал в Z_ϵ , порожденный элементами $\det((u_i, u_j), 1 \leq i, j \leq m^2)$, где $u_1, \dots, u_{m^2}$ пробегает $\mathcal{U}_\epsilon$. Множество нулей этого идеала образует некоторое замкнутое собственное подмногообразие $\mathcal{D}$ спектра $\text{Spec } Z_\epsilon$, называемое дискриминантным подмногообразием.

Можно сформулировать следующий основной результат.

Теорема. Пусть l — нечетное целое число, $l > \max\{d_i\}$ и ϵ — примитивный корень l -й степени из единицы.

(i) $\text{Spec } Z_\epsilon$ является нормальным аффинным алгебраическим многообразием и отображение $\tau: \text{Spec } Z_\epsilon \rightarrow \text{Spec } Z_0$ имеет конечную степень l^n .

(ii) Если $\chi \in \text{Spec } Z_\epsilon \setminus \mathcal{D}$, то $X^{-1}(\chi)$ состоит из единственного (класса) неприводимого представления алгебры $\mathcal{U}_\epsilon$ размерности l^ν .

7.5. Приведем этапы доказательства.

Используя методы ассоциативных конечномерных алгебр, Де Кончини и Кац сначала показывают, что если χ не лежит в $\mathcal{D}$, то алгебра $\mathcal{U}_\epsilon^\chi$ (обозначения п. 7.3) изоморфна $M_m(\mathbb{C})$, и что если χ лежит в $\mathcal{D}$, то размерность $\mathcal{U}_\epsilon^\chi$ больше или равна m^2 , а размерность каждого ее неприводимого представления строго меньше чем m .

Речь идет, следовательно, о нахождении m и степени отображения τ .

Напомним, что имеются диагональные представления $\bar{M}(\lambda)$ размерности l^ν и что если $\lambda(z_\alpha^2) \neq 1$ для любого $\alpha \in R_+$, то $\bar{M}(\lambda)$ неприводимо. Зафиксируем такое λ .

Пусть $H_0 \subset \text{Spec}(Z_0)$ определено соотношениями $x_\alpha = 0$, $y_\alpha = 0$ и $z_\alpha^2 \neq 1$. Тогда $\tau \circ \chi(\bar{M}(\lambda)) \in H_0$ и полный прообраз при отображении $\tau \circ \chi$ этого элемента содержит l^n элементов. С другой стороны, $\dim_{Q(Z_0)} Q(\mathcal{U}_\epsilon) = l^{2\nu+n}$ (предложение 7.2(iii)); следовательно, $l^{2\nu+n} = m^2 \deg \tau$ и $m \geq l^\nu$.

Далее, введем группу автоморфизмов G некоторого пополнения $\widehat{\mathcal{U}_\epsilon}$ алгебры $\mathcal{U}_\epsilon$, действующую в $\text{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon)$, $\text{Spec}(Z_\epsilon)$, $\text{Spec}(Z_0)$ (X и τ эквивариантны) и такую, что орбита GH_0 содержит открытое по метрике непустое подмножество из $\text{Spec}(Z_0)$. (Эта орбита состоит из образов диагональных неприводимых представлений размерности l^ν , подкрученных группой G . Каждая точка этой орбиты имеет ровно l^n прообразов.)

Отсюда следует, что $\deg \tau \geq l^n$ и, значит, $\deg \tau = l^n$ и $m = l^\nu$.

Опишем построение группы G (будем считать l нечетным):

а) Напомним, что в специализации типа Люстига вводятся дифференцирования, заданные через коммутатор с аналогами разделенных степеней. Можно, разумеется, рассмотреть подобные дифференцирования в алгебре $\mathcal{U}$ над $\mathbb{C}(q)$; замечательно, что эти дифференцирования спускаются на $\mathcal{U}_\epsilon$.

Обозначим через e_α , f_α , $k_{\pm\alpha}$ дифференцирования, связанные с $E_\alpha^{(l)}$, $F_\alpha^{(l)}$; $K_{\pm\alpha}^{(l)}/[l]_{d_\beta}!$, и положим $e_i = e_{\alpha_i}$, $f_i = f_{\alpha_i}$. Тогда если $\alpha = w\alpha_i$, $w \in W$, то $e_\alpha = T_w e_i T_w^{-1}$, $f_\alpha = T_w f_i T_w^{-1}$ и e_i , f_i , $k_{\pm\beta}$ даются явными формулами.

б) Рассмотрим алгебру Ли $\widehat{\mathcal{G}}$ дифференцирований алгебры $\mathcal{U}_\epsilon$, определенную над Z_0 и порожденную элементами e_α , f_α , $k_{\pm\alpha}$. Она

нормализуется элементами T_i , и Z_0 является инвариантным относительно $\hat{\mathcal{G}}$.

с) Чтобы представить себе соответствующую группу автоморфизмов, удобно пополнить Z_0 следующим образом: $\hat{Z}_0$ есть алгебра формальных рядов от x_α , y_α ($\alpha \in R_+$), z_i и z_i^{-1} , сходящихся к голоморфной функции на $\mathbb{C}^{2\nu} \times (\mathbb{C}^*)^n$. Положим $\hat{U}_\epsilon = \hat{Z}_0 \otimes_{Z_0} U_\epsilon$ и $\hat{Z}_\epsilon = \hat{Z}_0 \otimes_{Z_0} Z_\epsilon$.

Тогда для всех $t \in \mathbb{C}$ ряды $\exp t e_\alpha$, $\exp t f_\alpha$, $\exp t k_\beta$ сходятся к автоморфизмам (над $\mathbb{C}$) алгебры $\hat{U}_\epsilon$, и можно рассмотреть подгруппу G группы автоморфизмов алгебры $\hat{U}_\epsilon$, порожденную элементами $\exp t e_\alpha$, $\exp t f_\alpha$, $\exp t k_\alpha$, $\alpha \in R_+$.

$\hat{Z}_\epsilon$ и $\hat{Z}_0$ инвариантны относительно G , так что последняя действует голоморфными преобразованиями на $\text{Spec } Z_\epsilon$ и $\text{Spec } Z_0$.

д) Из явных формул для действия элементов e_α , f_α в Z_0 следует, что орбита GH_0 содержит открытое по метрике непустое множество из $\text{Spec } Z_0$.

7.6. Действие G на $\text{Spec } Z_0$ глубже изучается в [DC-K-P].

7.7. Неприводимые представления максимальной размерности для матриц (a_{ij}) типа A , упоминавшиеся в теореме 7.4, описаны в [Ar, Ar-Ch1, DJMM3]. См. также [Ar-Ch2, DJMM1, DJMM2, DJMM4].

РЕЗЮМЕ

В промежутке между написанием данного текста и его публикацией Д. Каждан и Г. Люстиг установили в статье «Affine Lie Algebras and Quantum Groups» (Intern. Math. Research Notes 2 (1991), 21–29) эквивалентность в смысле тензорных категорий между категорией представлений аффинной алгебры Ли и категорией конечномерных представлений квантовой обертывающей алгебры.

Отсюда вытекает в силу работ Л. Касиана и С. Кумара о гипотезе Каждана–Люстига для представлений отрицательного уровня аффинных алгебр Каца–Мури гипотеза Люстига о характерах простых модулей квантовой обертывающей алгебры с параметром, равным корню из единицы (см. п. 6.6.2).

ЛИТЕРАТУРА

- [A-G-S] Alvarez-Gaume L., Gomez C., Sierra G., Quantum group interpretation of some conformal field theories, Preprint CERN
 [A-P-W1] Andersen H. H., Polo P., Wen K., Representations of quantum algebras, Invent. Math. 104 (1991), 1–60.

- [A-P-W2] Andersen H. H., Polo P., Wen K., Injective modules for quantum algebras, *Amer. J. Math.* **114**, No. 3 (1992), 571–604.
- [A-W] Andersen H. H., Wen K., Representations of quantum algebras: the mixed case, Preprint Aarhus Universitet 1991, n° 5.
- [An] Andruskiewitch N., Some exceptional compact matrix pseudogroups, Preprint École Polytechnique
- [Ar] Arnaudon D., Periodic and flat irreducible representations of $SU(3)_q$, *Comm. Math. Phys.* **134** (1990), 523–537.
- [Ar-Ch1] Arnaudon D., Chakrabarti A., Periodic and partially periodic representations of $SU(N)_q$, *Comm. Math. Phys.* **139**, No. 3 (1991), 461–478.
- [Ar-Ch2] Arnaudon D., Chakrabarti A., Flat periodic representations of $U_q(\mathcal{G})$, Preprint École Polytechnique A023-1190.
- [B] Babelon O., Extended conformal algebra of Yang–Baxter equation, *Phys. Lett. B* **125** (1988), 523–529.
- [Ba1] Baxter R. J., Partition of the eight-vertex lattice model, *Ann. Phys.* **70** (1972), 193–228.
- [Ba2] Baxter R. J., Exactly solved models in Statistical Mechanics, Academic Press, London, 1982.
- [B-S] Bazhanov V. V., Stroganov Y. G., Chiral Potts models as a descendant of the six vertex model, *J. Stat. Phys.* **51** (1990), 799–817.
- [B-M-L] Beilinson A. A., Mac Pherson R., Lusztig G., A geometric setting for the quantum deformation of GL_n , *Duke Math. J.* **61** (1990), No. 2, 655–677.
- [Be] Bernard D., Vertex operator representations of the quantum affine algebra $U_q(\text{Br}^{(1)})$, *Lett. Math. Phys.* **17** (1989), 239–245.
- [B-W] Birman J., Wenzl H., Braids, link polynomials and a new algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* **313** (1989), 249–273.
- [Ca] Cartier P., Développements récents sur les groupes de tresses; applications à la topologie et à l'algèbre, Séminaire Bourbaki, exp. n°716, Astérisque **189–190** (1991), 17–67. [Имеется перевод: Картье П. Новые достижения в теории групп кос. Применения в топологии и алгебре. — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1990 г. — М.: Мир, 1996, с. 14–49.]
- [C-P1] Chari V., Pressley A., Quantum affine algebras, *Comm. Math. Phys.* (1991).
- [C-P2] Chari V., Pressley A., Yangians and R -Matrices, *Enseign. Math.* **36** (1990), 267–302.
- [C-P3] Chari V., Pressley A., Fundamental representations of Yangians and singularities of R -matrices, *J. Reine Angew. Math.* **417** (1991), 87–128.
- [Ch1] Cherednik J., Quantum groups as hidden symmetries of classical representation theory, *Proceed. of 17th Int. Conf. on diff. geom. methods in theoretical physics*, World Scient., 1989, 47.
- [Ch2] Cherednik J., A new interpretation of Gelfand–Tsetlin bases, *Duke Math. J.* **54** (1987), 563.

- [C-G] Gremmer E., Gervais J.-L., The quantum group structure associated non linearly extended Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.* **134** (1990), 619.
- [DJMM1] Date E., Jimbo M., Miki K., Miwa T., New R -matrices associated with cyclic representations of $\mathcal{U}_q(A_2^{(2)})$, Preprint RIMS 706, 1990.
- [DJMM2] Date E., Jimbo M., Miki K., Miwa T., R -matrix for cyclic representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))$ at $q^3 = 1$, *Phys. Lett. A* **148** (1990), 45–49.
- [DJMM3] Date E., Jimbo M., Miki K., Miwa T., Cyclic representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}))$ at $q^N = 1$, *Publ. RIMS* **27**, No. 2 (1991), 347–366.
- [DJMM4] Date E., Jimbo M., Miki K., Miwa T., Generalized chiral Potts models and minimal cyclic representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$, *Comm. Math. Phys.* **137**, No. 1 (1991), 133–147.
- [DC-K] De Concini C., Kac V. G., Representations of quantum groups at roots of 1, *Colloque Dixmier 1989*, 471–506, *Progress in Math.* **92**, Birkhäuser, 1990.
- [DC-K-P] De Concini C., Kac V. G., Procesi C., Quantum coadjoint action, Preprint Scuola Normale Superiore Pisa, n° 95, 1991.
- [D1] Дринфельд В. Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера. — *ДАН СССР*, 1985, т. 283, №5, с. 1060–1064.
- [D2] Drinfeld V. G., Quantum groups, *Proceedings ICM, Berkeley*, 1, 1986, 798–820.
- [D3] Дринфельд В. Г. Новая реализация янгианов и квантованных аффинных алгебр. — *ДАН СССР*, 1987, т. 296, №1, с. 13–17.
- [D4] Дринфельд В. Г. Вырожденные аффинные алгебры Гекке и янгианы. — *Функц. анализ и его прил.*, 1986, т. 20, вып. 1, с. 69–70.
- [D5] Дринфельд В. Г. О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа, — *Алгебра и анализ*, 1989, т. 1, вып. 2, с. 30–46.
- [D6] Дринфельд В. Г. Квазихопфовы алгебры. — *Алгебра и анализ*, 1989, т. 1, вып. 6, с. 114–148.
- [D-L] Dyer M., Lusztig G., Appencice à [L5].
- [Fa] Faddeev L. D., Integrable models in $(1+1)$ -dimensional quantum field theory, *Les Houches 1982*, Elsevier Science Publisher (1984).
- [F-R-T] Решетихин Н., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантование групп Ли и алгебр Ли. — *Алгебра и анализ*, 1989, т. 1, вып. 1, с. 178–206.
- [Fr] Fröhlich J., Statistics of fields, the Yang–Baxter equation and the theory of knots and links, dans “Non Perturbative Quantum Field Theory”, eds. G. 't Hooft et al., Plenum Press, 1988.
- [F-J] Frenkel I., Jing N., Vertex representations of quantum affine algebras, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **85** (1988), 9373–9377.
- [F-G-P] Ferlan P., Ganchev A., Petkova V., Quantum groups and fusion rules multiplicities, *Nucl. Phys. B* **343** (1990), 205–227.
- [H] Hayashi T., Q -analogues of Clifford and Weyl algebras. Spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras, *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), 129–144.
- [Jl] Jimbo M., Quantum R -matrix for the generalized Toda system, *Comm. Math. Phys.* **102** (1986), 537–547.

- [J2] Jimbo M., A q -difference analogue of $U(\mathcal{G})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63-69.
- [J3] Jimbo M., A q -difference analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), 247-252.
- [Jg] Jing N., Twisted vertex representations of quantum affine algebras, *Invent. Math.* **102** (1990), 663-690.
- [Jo] Jones V. F. R., Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. of Math.* **126** (1987), 335-388.
- [J-L1] Joseph A., Letzter G., Local finiteness of the adjoint action for quantized enveloping algebras, *J. Algebra* **153**, No. 2 (1992), 289-318.
- [J-L2] Joseph A., Letzter G., Separation of variables for quantized enveloping algebras, Preprint.
- [Ka] Kashiwara M., Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras, Preprint RIMS; Bases cristallines, *C. R. Acad. Sci. Paris* **311** (1990), 277.
- [K-R1] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Y., Yangians and Bethe ansatz, *Lett. Math. Phys.* **12** (1986), 199-208.
- [K-R2] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Y., Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q -orthogonal polynomials and invariant of links, in: *Infinite dimensional Lie algebras and groups*, ed. V. G. Kac, World Scient., Singapore, 1989.
- [K-R3] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Y., q -Weyl group and a multiplicative formula for universal R -matrices, *Comm. Math. Phys.* **134** (1990), No. 2, 421-431.
- [K-K] Koelink H. T., Koornwinder T. H., The Clebsch-Gordan coefficients for the quantum group $SU_\mu(2)$ and q -Hahn polynomials, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **92** (1989), 443-456.
- [Koh] Kohno T., Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations, *Ann. Inst. Fourier* **37** (1987), 139-160; *Quantized universal enveloping algebras and braid groups*, Preprint.
- [Koo] Koornwinder T. H., Representations of the twisted $SU(2)$ quantum group and some q -hypergeometric orthogonal polynomials, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **92** (1989), 97-117.
- [Ku-R] Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., The quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations, *J. Soviet Math.* **23**, No. 4 (1983).
- [L-S1] Levendorskii S. Z., Soibelman Ya. S., Some applications of quantum Weyl group 1. The multiplicative formula for universal R -matrix for simple Lie algebras, *J. Geom. Phys.* **7** (1990), No. 2, 241-254.
- [L-S2] Levendorskii S. Z., Soibelman Yu. S., Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori, *Comm. Math. Phys.* **139** (1991), No. 1, 141-170.
- [L1] Lusztig G., Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras, *Adv. in Math.* **70** (1988), 237-249.
- [L2] Lusztig G., Modular representations and quantum groups, *Contemp. Math.* **82** (1989), 59-77.
- [L3] Lusztig G., On quantum groups, *J. Algebra* **131** (1990), 466-475.

- [L4] Lusztig G., Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 257–296.
- [L5] Lusztig G., Quantum groups at roots of 1, *Geom. Dedicata* (1990).
- [L6] Lusztig G., Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, I: *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 447–498, II: *Progress of Theor. Physics* **102**, suppl. (1990), 175–201.
- [L7] Lusztig G., Introduction to quantized enveloping algebras, in: *New developments in Lie theory and their applications* (Cordoba, 1989), Birkhauser, Boston, 1992, 49–65.
- [Ma] Manin Yu., Quantum groups and non-commutative geometry, CRM Université de Montréal, 1989.
- [MMNNU] Masuda T., Mimachi K., Nakagami Y., Noumi M., Ueno K., Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q -Jacobi polynomials, *J. Funct. Analysis.*, **99** (1991), No. 2, 357–386.
- [M-R] Moore G., Reshetikhin N. Yu., A comment on quantum group symmetry in conformal field theory, *Nuclear Phys. B* **328** (1989), No. 3, 557–574.
- [Mu] Murakami J., The Kauffman polynomial of links and representation theory, *Osaka J. Math.* **24** (1987), 745–758.
- [O] Ольшанский Г. И. Расширение алгебры $U(\mathcal{G})$ для бесконечномерных классических алгебр Ли $\mathcal{G}$ и янгианы $Y(\mathfrak{gl}(m))$, — *ДАН СССР*, 1987, т. 297, №5, с. 1050–1054.
- [P-W] Parshall B., Wang J. P., Quantum linear groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **89**, No. 439 (1991).
- [P-S] Pasquier V., Saleur H., Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups, *prépublication*.
- [P-W] Podles P., Woronowicz S. L., Quantum deformations of Lorentz group, *Comm. Math. Phys.* **130** (1990), 381–431.
- [Re1] Решетихин Н. Ю. Квантовые обертывающие алгебры, уравнение Янга–Бакстера и инварианты узлов I и II, *Препринты ЛОМИ* E-4-87 и E-17-87.
- [Re2] Решетихин Н. Ю. Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты зацеплений. — *Алгебра и анализ*, 1989, т. 1, вып. 2, с. 169–188.
- [Re-S] Reshetikhin N. Yu., Semenov-Tian-Shanski M., Central extensions of quantum current groups, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990), 133–143.
- [Ri] Ringel C. M., Hall algebras and quantum groups, *Invent. Math.* **101** (1990), 583–592.
- [R-A] Roche P., Arnaudon D., Irreducible representations of the quantum analogue of $SU(2)$, *Lett. Math. Phys.* **17** (1989), 295–300.
- [Ro1] Rosso M., Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra, *Comm. Math. Phys.* **117** (1988), 581–593.
- [Ro2] Rosso M., Analogue of PBW theorem and the universal R -matrix for $\mathcal{U}_h \mathfrak{sl}(N+1)$, *Comm. Math. Phys.* **124** (1989), 307–318.
- [Ro3] Rosso M., Analogues de la forme de Killing et du théorème d'Harish-Chandra pour les groupes quantiques, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **23** (1990), 445–467.

- [Ro4] Rosso M., Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compact de matrices et calcul différentiel non commutatif, *Duke Math. J.* **61** (1990), 11–40.
- [Ro5] Rosso M., Groupes quantiques, représentations linéaires et applications, *Thèse Université Paris 7* (1990).
- [Sk] Склянин Е. К. Об алгебрах, порожденных квадратичными соотношениями. — *УМН*, 1985, т. 40, вып. 2, №2.
- [So1] Сойбельман Я. С. Неприводимые представления алгебры функций на квантовой группе $SU(n)$ и клетки Шуберта, — *ДАН СССР, сер. матем.*, 1989, т. 307, №1, с. 41–45.
- [So2] Сойбельман Я. С. Алгебра функций на компактной квантовой группе и ее представления. — *Алгебра и анализ*, 1990, т. 2, №1, с. 190–212.
- [So3] Сойбельман Я. С. Структуры состояний Гельфанда–Наймарка и квантовая группа Вейля для $SU(n)$. — *Функц. анализ и его прил.*, 1990, т. 24, вып. 3.
- [So-V] Ваксман Л. Л., Сойбельман Я. С. Алгебра функций на квантовой группе $SU(2)$. — *Функц. анализ и его прил.*, 1988, т. 22, вып. 3, с. 1–14.
- [T] Takeuchi M., The q -bracket product and quantum enveloping algebras of classical type, *J. Math. Soc. Japan* **42** (1990), 605–630.
- [Ta] Tanisaki T., Harish–Chandra isomorphisms for quantum algebras, Preprint.
- [T-K] Tsuchiya A., Kanie Y., Vertex operators in two dimensional conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid groups, *Adv. Stud. Pure Math.*, Vol. 16 (1988), 297–372 and Vol. 19 (1989), 675–682.
- [Tu] Turaev V. G., The Yang–Baxter equation and invariants of links, *Invent. Math.* **92** (1988), 527–553.
- [Ve] Verdier J.-L., Groupes quantiques (d’après V. G. Drinfel’d), *Sem. Bourbaki*, exp. n°685, *Astérisque* **152–153** (1987), 305–319.
- [We] Wenzl H., Quantum groups and subfactors of type B, C, and D, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 383–432.
- [W1] Woronowicz S. L., Twisted $SU(2)$ group. An example of noncommutative differential calculus, *Publ. RIMS* **23** (1987), 117–181.
- [W2] Woronowicz S. L., Compact matrix pseudogroups, *Comm. Math. Phys.* **111** (1987), 613–655.
- [W3] Woronowicz S. L., Tanaka–Krein duality for compact matrix pseudogroups, Twisted $SU(N)$ group, *Invent. Math.* **93** (1988), 35–76.
- [Ym] Yamane H., A Poincaré–Birkhoff–Witt theorem for quantized enveloping algebras of type A_N , *Publ. RIMS* **25** (1989), 503–520.
- [Yg] Yang C. N., Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312–1315.

ПОПРАВКА К СТАТЬЕ:
ФОРМЫ МААСА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАЛУА
(по работам Блазиуса, Клозеля, Харриса,
Рамакришнана и Тейлора)¹⁾²⁾

Ги Энньяр

Теорему Блазиуса, Клозеля и Рамакришнана, сформулированную в § 1 указанной статьи и утверждающую, что собственные значения операторов Гёкке для форм Мааса типа Галуа являются алгебраическими числами, нельзя в настоящий момент считать доказанной. Ее доказательство, приведенное в статье, является ошибочным в одном тонком, но важном моменте. Мне сообщили об этом Д. Блазиус и Д. Рамакришнан в письме от 9 апреля 1991 г. В этой заметке мы кратко объясним, в чем состоит ошибка, а также уточним, какая часть цитированных работ ею не затрагивается.

Напомним в основных чертах использовавшийся метод: рассматривается представление Мааса типа Галуа π (не диэдрального типа) и выбираются мнимое квадратичное поле K и (достаточно регулярный) алгебраический характер Гекке χ группы $A_K^\times/K^\times$. Посредством замены базы $\mathbb{Q}$ на K , скручивания с помощью χ , а затем процесса автоморфного индуцирования с K на $\mathbb{Q}$ получается автоморфное каспидальное представление $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(\pi, \chi)$ группы $GL_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, которое происходит из некоторого представления $\Pi = \Pi(\pi, \chi)$ группы $GSp_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Неприятность заключается в том, что компонента на бесконечности Π_∞ представления Π *никогда* не имеет указанного в статье типа, так как отвечающий ей L -пакет не может содержать предела дискретной серии. (Ниже мы разъясним это подробнее.) Теоремы 1, 2 и 4 рассматриваемой статьи, таким образом, не доказаны. Тео-

¹⁾ Henniat Guy. Erratum á exposé n°711: Formes de Maass et représentation galoisiennés (d'après Blasius, Clozel, Harris, Ramakrishnan et Taylor). — Astérisque, 201-202-203, 1991, p. 485–486.

²⁾ См.: Henniat Guy. Formes de Maass et représentation galoisiennes (d'après Blasius, Clozel, Harris, Ramakrishnan et Taylor). — Séminaire Bourbaki, 1988–89, n° 711, Astérisque, 177-178, 1989, p. 277–302. [Имеется перевод в кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1989 г. — М.: Мир, 1991, с. 281–309.]

рему 3 (о переносе из GL_2 в GSp_4 , анонсированную Жаке, Пятецким-Шапиро и Шалайкой) это не затрагивает, но в нашем случае она не дает нам адекватного представления группы $GSp_4(A_Q)$. Теорема 5 (об алгебраичности представлений группы $GSp_4(A_Q)$, которые являются пределами дискретных серий на бесконечности, анонсированная Блазиусом, Харрисом и Рамакришнаном) тоже не затрагивается, но она неприменима в случае форм Мааса.

Метод Блазиуса и Рамакришнана, изложенный в пп. 5.1–5.5, по тем же причинам неприменим в случае форм Мааса. Однако Р. Тейлор сообщил, что с помощью метода, аналогичного описанному в пп. 5.7–5.10, он получил представления Галуа, связанные с некоторыми автоморфными формами над мнимыми квадратичными полями, где процесс автоморфного индуцирования позволяет получить представления группы GSp_4 с хорошей компонентой на бесконечности.

Результаты пп. 6.1–6.4 не затрагиваются, но программа, упомянутая в п. 6.5, по-видимому, содержит ошибку в случае унитарных групп, аналогичную указанной ошибке для GSp_4 .

В заключение более четко объясним, откуда возникла ошибка при вычислении компоненты Π_∞ . Итак, мы имеем автоморфное каспидальное представление группы $GSp_4(A_Q)$, поскольку существует характер ψ группы $A_Q^\times/Q^\times$, такой, что функция $L(\tilde{\Pi}, \Lambda^2 \otimes \psi, s)$ имеет полюс в $s = 1$. Компонента $\tilde{\Pi}_\infty$ представления $\tilde{\Pi}$ соответствует по классификации Ленглендса некоторому представлению (точнее, его классу эквивалентности) σ_∞ группы W_R в $GL_4(\mathbb{C})$. Так как $\tilde{\Pi}_\infty$ получается из Π_∞ , то σ_∞ является линейным представлением, связанным с некоторым представлением $\tilde{\sigma}_\infty: W_R \rightarrow GSp_4(\mathbb{C})$ (которое определяет L -пакет компоненты Π_∞ по классификации Ленглендса). Но для σ_∞ имеется два неэквивалентных представления $\tilde{\sigma}'_\infty$ и $\tilde{\sigma}''_\infty$ группы W_R в $GSp_4(\mathbb{C})$, которые эквивалентны представлению σ_∞ как представления в $GL_4(\mathbb{C})$. Следовательно, а priori для π_∞ имеется два возможных L -пакета и лишь один из них содержит пределы дискретной серии. Эти два пакета являются различными относительно симплектического подобия $W_R \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Но это подобие задается компонентой на бесконечности характера ψ^{-1} . Этот характер можно вычислить, и оказывается, что в обоих случаях мы попадаем в плохой L -пакет на бесконечности!

СОДЕРЖАНИЕ

Семинар Н. Бурбаки в издательстве «Мир»	5
Бен Ару Ж. Геометрия плоских броуновских кривых. Перевод с французского С. С. Анисова	6
Бост Ж.-Б. Арифметическая теория пересечений и арифметическая теорема Римана-Роха. Перевод с французского Д. Б. Каледина	34
Грамэн А. О классической теории узлов. 2-я часть. Перевод с французского Н. П. Долбилина и М. А. Штанько	73
Сикорав Ж.-К. Гомологии, ассоциированные с функционалами (по А. Флёрю). Перевод с французского В. Н. Лексина	95
Йоккоз Ж.-К. Квадратичные многочлены и аттрактор Эно. Перевод с французского А. А. Глуцкого	121
Колец Ф. Гидродинамические пределы. Перевод с французского В. И. Оселедца	141
Эннъяр Г. Представления редутивных р-адических групп. Перевод с французского Е. Е. Демидова	163
Ле Потье Ж. Расслоения Хиггса и локальные системы. Перевод с французского А. Е. Полищука	186
Пансю П. Геодезический поток на римановых многообразиях отрицательной кривизны. Перевод с французского В. В. Солюдова	226
Скандалис Ж. Подход к гипотезе Новикова с помощью циклических когомологий (по А. Конну, М. Громову и Х. Московичи). Перевод с французского С. К. Ландо	251
Бургиньон Ж.-П. Устойчивость метрики Минковского при нелинейных деформациях (по С. Клайнерману и Д. Кристодулу). Перевод с французского Д. А. Эршлера	269
Денеф Ж. О локальной дзета-функции Игузы. Перевод с английского С. К. Ландо	300
Лёзер Ф. Вторичные многогранники и дискриминанты. Перевод с французского С. Ю. Орекова	331
Матье О. Базисы представлений простых комплексных групп (по Касиваре, Люстигу, Рингелю и др). Перевод с французского В. А. Голубевой	359
Россо М. Представления квантовых групп. Перевод с французского О. К. Шейнман	377
Эннъяр Г. Поправка к статье: Формы Мааса и представления Галуа (по работам Блазиуса, Клозеля, Харриса, Рамакришнана и Тейлора). Перевод с французского Г. М. Цукерман	411

Научное издание

ТРУДЫ СЕМИНАРА Н. БУРБАКИ ЗА 1991 г.

Сборник статей

Заведующий редакцией академик В. И. Арнольд

Зам. зав. редакцией А. С. Попов

Ведущий редактор Г. М. Цукерман

Художественный редактор Н. В. Дубова

Технический редактор Е. В. Денюкова

Корректор В. И. Киселева

Оригинал-макет подготовлен Б. А. Амосовым в пакете AMS-TEX

Лицензия ЛР № 010174 от 20.05.97 г.

Сдано в набор 17.10.97. Подписано в печать 30.09.98.

Формат 60 x 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура Computer Modern. Объем 13,00 бум. л. Усл. печ. л. 26,00.

Уч.-изд. л. 28,03. Изд. № 1/9591. Тираж 500 экз. Зак. № 175: C017.

Издательство «Мир»

Государственного комитета Российской Федерации по печати.

129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано с готовых оригинал-макетов в ГУП «Облиздат»

248640 г. Калуга, пл. Старый торг, 5, тел. 57-40-70

В издательстве «Мир» готовятся к выпуску в свет

1. Труды семинара Н. Бурбаки за 1992 г.: Сб. статей: Пер. с англ. и франц./Сост. Попов В. Л. и Паршин А. Н. — 25 л.
2. Международный конгресс математиков в Цюрихе. Избранные доклады: Пер. с англ. — 25 л.
3. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительную алгебраическую геометрию и коммутативную алгебру: Пер. с англ. — 40 л.
4. Бауэс Г. Алгебраическая гомотопия: Пер. с англ. — 28 л.
5. Хесс П. Периодические параболические задачи и положительность: Пер. с англ. — 8 л.
6. Каку М. Введение в теорию суперструн: Пер. с англ. — 38 л.
7. Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов: Теория паросочетаний в математике, физике, химии: Пер. с англ. — 37 л.
8. Логический подход к искусственному интеллекту: От обучения в информационных системах к областям, граничным с искусственным интеллектом: Пер. с франц./Тейз А., Дельсарт Ф., Хейгельштейн Дж. и др. — 20 л.
9. Барндорф-Нильсен О., Кокс Д. Асимптотические методы в математической статистике: Пер. с англ. — 14 л.
10. Уотермен М. Математические методы анализа последовательностей ДНК: Пер. с англ. — 27 л.
11. Занг В.-Б. Синергетическая экономика: Пер. с англ. — 21 л.
12. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика: Пер. с англ. — 48 л.
13. Гуссенс М., Миттельбах Ф., Самарин А. Путеводитель по макропакету LaTeX и его расширению LaTeX2e: Пер. с англ. — 42 л.
14. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. — 45 л.
15. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания информатики: Пер. с англ. — 45 л.
16. Каханер Д., Моулер К., Нэш С., Численные методы и программное обеспечение: Пер. с англ. — 40 л.

Заказы на приобретение этих книг можно сделать в ближайшем магазине научно-технической литературы или направить непосредственно в издательство «Мир», редакция математики.

Телефон: 286-42-88, E-mail: asp@mir.msk.su

Имеются в продаже

1. Алиприантис К., Браун Д., Бёркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия: Пер. с англ., 1995, 384 с.
2. Атья М. Геометрия и физика узлов: Пер. с англ., 1995, 192 с.
3. Гербер М. Математика страхования жизни: Пер. с англ., 1995, 156 с.
4. Труды семинара Н. Бурбаки за 1990 г.: Сб. статей: Пер. с англ. и франц., 1996, 348 с.
5. Международный конгресс математиков в Киото, 1990: Пер. с англ., 1996, 431 с.
6. Саломаа А. Криптография с открытым ключом: Пер. с англ., 1996, 320 с.
7. Рамм А. Теория оценивания случайных полей: Пер. с англ., 1996, 352 с.
8. Касивара М., Шапира П. Пучки на многообразиях: Пер. с англ., 1997, 656 с.
9. Бухвалов А. В., Идельсон А. В. Самоучитель по финансовым расчетам. 1997, 176 с.
10. Говорухин В. Н., Цыбулин В. Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. 1997, 208 с.
11. Пайген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: Пер. с англ., 1993, 176 с.
12. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х томах, т. 2.: Пер. с англ., 1991, 342 с.
13. Файтс Ф., Джонстон П., Кранц М. Компьютерный вирус: проблемы и прогноз: Пер. с англ., 1994, 176 с.
14. Ревюз Д. Цепи Маркова: Пер. с англ., 1997, 432 с.
15. Логический подход к искусственному интеллекту: От распознавания речи к логике экспертных систем: Пер. с франц./Тейз А., Брюффертс А., Дюпон П. и др., 1998, 494 с.

Заказы на приобретение этих книг можно сделать в ближайшем магазине научно-технической литературы или направить непосредственно в издательство «Мир», редакция математики.
Телефон: 286-42-88, E-mail: asp@mir.msk.su