АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ТРУДЫ
ордена Ленина
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
имени В. А. СТЕКЛОВА

CLX

А. В. Иванов

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ И НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1982

УДК 517.946

Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Иванов А. В. — Труды ордена Ленина Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Т. 160. Л., «Наука», 1982. 286 с.

Монография посвящена изучению вопросов разрешимости основных краевых задач для квазилинейных вырождающихся и неравномерно эллиптических и параболических уравнений второго порядка, а также исследованию дифференциальных и некоторых качественных свойств решений таких уравнений. Построена теория обобщенной разрешимости краевых задач для квазилинейных уравнений с фиксированным вырождением эллиптичности или параболичности. Исследована регулярность обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Установлены теоремы существования классического решения первой краевой задачи для широких классов квазилинейных неравномерно эллиптических и параболических уравнений. Рассчитана на специалистов в области уравнений с частными производными. Лит. — 181 назв.

Ответственный редактор
академик С. М. НИКОЛЬСКИЙ

Заместитель ответственного редактора
докт. физ.-мат. наук Е. А. ВОЛКОВ

Рецензенты:
доктора физ.-мат. наук Л. Д. КУДРЯВЦЕВ и Н. Н. УРАЛЬЦЕВА

И $\frac{1702050000\text{-}649}{055(02)\text{-}82}$ 6-82, кн. 2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта монография посвящена изучению вопросов разрешимости основных краевых задач для вырождающихся и неравномерно эллиптических и параболических уравнений второго порядка и исследованию дифференциальных и некоторых качественных свойств решений таких уравнений. К квазилинейным вырождающимся или неравномерно эллиптическим и параболическим уравнениям приводит изучение различных вопросов вариационного исчисления, дифференциальной геометрии и механики сплошных сред. К таким уравнениям приводят, например, некоторые нелинейные задачи теплопроводности, диффузии, фильтрации, теории капиллярности, теории упругости и др. К неравномерно эллиптическим уравнениям относятся уравнения, определяющие среднюю кривизну гиперповерхности в евклидовом и римановом пространствах, в том числе уравнение минимальных поверхностей. Уравнения Эйлера для многих вариационных задач оказываются квазилинейными вырождающимися или неравномерно эллиптическими.

По характеру применяемых методов эта монография органически связана с монографией О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа» и монографией О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова и Н. Н. Уральцевой «Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа». В указанных монографиях, в частности, была построена теория разрешимости основных краевых задач для квазилинейных невырожденных и равномерно эллиптических и параболических уравнений.

Монография состоит из четырех частей. В ч. I главным объектом исследования является вопрос о классической разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных неравномерно эллиптических и параболических уравнений недивергентного вида. Для широких классов таких уравнений устанавливаются априорные оценки градиентов их решений в замкнутой области, что приводит в силу известных результатов Ладыженской и Уральцевой к теоремам существования решений указанной задачи. В этой же части установлены также квалифицированные локальные оценки градиентов решений, с помощью которых, в частности, получены двусторонние и односторонние лиувиллевские теоремы. Характерной особенностью полученных в ч. I априорных оценок градиентов решений является независимость этих оценок от каких-либо минорант для наименьшего собственного числа матрицы коэффициентов при вторых производных на рассматриваемом решении уравнения. Это обстоятельство предопределяет возможность использования указанных и подобных им оценок при исследовании квазилинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений.

II и III части монографии посвящены построению теории разрешимости основных краевых задач для широких классов квазилинейных уравнений с неотрицательной характеристической формой. В ч. II монографии вводится класс квазилинейных так называемых $(A, \mathfrak{b})$-эллиптических уравнений, частными случаями которых являются классические эллиптические и параболические квазилинейные уравнения, а также линейные уравнения с произвольной неотрицательной характеристической формой. Для $(A, \mathfrak{b})$-эллиптических уравнений дана постановка общей краевой задачи (в частности, первой, второй, третьей) и исследован вопрос о существовании и единственности обобщенного решения энергетического типа такой задачи для класса $(A, \mathfrak{b}, m, \mathfrak{m})$-эллиптических уравнений. В этой же части установлены теоремы существования и единственности регулярных обобщенных решений первой краевой задачи для $(A, \mathfrak{b})$-эллиптических уравнений.

В ч. III монографии вопросы разрешимости основных краевых задач детально изучаются для важных частных случаев $(A, \mathfrak{b})$-эллиптических уравнений — $(A, 0)$-эллиптических и так называемых $(A, 0)$-параболических уравнений, являющихся более непосредственными обобщениями классических эллиптических и параболических квазилинейных уравнений. Все условия, при которых в этой части монографии для $(A, 0, m, \mathfrak{m})$-эллиптических и $(A, 0, m, \mathfrak{m})$-параболических уравнений установлены теоремы существования и единственности обобщенного решения (энергетического типа) общей краевой задачи, имеют легко проверяемый характер. Для $(A, 0)$-эллиптических уравнений установлены также теоремы существования и единственности так называемых A-регулярных обобщенных решений первой краевой задачи. Приводятся примеры, которые показывают, что для уравнений рассматриваемой структуры исследование A-регулярности их решений (вместо обычной регулярности) является естественным. Дано применение указанных результатов к исследованию некоторого класса нерегулярных вариационных задач.

Некоторые из полученных во II и III частях результатов являются новыми и для случая линейных уравнений с произвольной неотрицательной характеристической формой. Для последних уравнений теория краевых задач была построена в работах Г. Фикеры, О. А. Олейник, Дж. Кона и Л. Ниренберга, М. И. Фрейдлина и др.

Ч. IV посвящена изучению свойств обобщенных решений квазилинейных слабо вырожденных параболических уравнений. Из полученных результатов видно, как с улучшением регулярности функций, образующих уравнение, улучшаются и свойства обобщенных решений этого уравнения. Это улучшение, однако, не беспредельно, как в случае невырожденных параболических уравнений, поскольку наличие слабого вырождения ставит преграду на пути улучшения дифференциальных свойств функций, образующих уравнение.

Эта монография не является обзором по теории квазилинейных эллиптических и параболических уравнений, и потому многие направления этой теории не нашли в ней отражения. То же самое относится и к списку литературы.

Автор выражает благодарность Ольге Александровне Ладыженской за полезное обсуждение излагаемых здесь результатов. Именно ей принадлежит и сама идея написания этой монографии.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Через $\mathbb{R}^n$ обозначается n-мерное вещественное пространство, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$, Ω — область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$. Все рассматриваемые функции считаются вещественными.

Пусть G — некоторое измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{R}^n$. Функции, эквивалентные на G, т. е. имеющие равные значения при почти всех (п. в.) $x \in G$, считаются неразличимыми (совпадающими).

Через $L^p(G)$, $1 \leqslant p < +\infty$, обозначается банахово пространство, которое получается, если на множестве всех измеримых по Лебегу на множестве G функций u с конечным интегралом Лебега $\int\limits_G |u(x)|^p\, dx$ ввести норму

$$\|u\|_{p, G} \equiv \|u\|_{L^p(G)} = \left(\int\limits_G |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

$L^\infty(G)$ — банахово пространство, которое получается, если на множестве всех измеримых и существенно ограниченных на G функций ввести норму

$$\|u\|_{\infty, G} \equiv \|u\|_{L^\infty(G)} = \operatorname*{supess}_{x \in G} |u(x)|.$$

Через $L^p_{loc}(G)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, обозначается множество функций, принадлежащих $L^p(G')$ для любой строго внутренней в G подобласти G' (т. е. такой G', что $\overline{G'} \subset G$).

$W^l_p(\Omega)$ — известное пространство С. Л. Соболева, которое получается, если на множестве всех функций u, принадлежащих вместе со всеми своими частными производными до порядка l включительно пространству $L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, ввести норму

$$\|u\|_{W^l_p(\Omega)} = \sum_{k=0}^{l} \|D^k u\|_{p, \Omega},$$

где

$$D^k u \equiv \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad |k| = k_1 + \ldots + k_n.$$

Через $C^m(\Omega)\,[C^\infty(\Omega)]$ обозначается класс всех m раз непрерывно дифференцируемых на Ω (всех бесконечно дифференцируемых на Ω) функций, а через $C^m(\overline{\Omega})\,[C^\infty(\overline{\Omega})]$, где $\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω, — множество таких функций из $C^m(\Omega)$ [из $C^\infty(\Omega)$], для которых любую из ее частных производных до порядка m включительно [любую из ее частных производных] можно продолжить до непрерывной функции на $\overline{\Omega}$. Множество всех непрерывных на Ω (на $\overline{\Omega}$) функций обозначается просто через $C(\Omega)$ $[C(\overline{\Omega})]$.

Носителем функции $u \in C(\Omega)$ называется множество $\operatorname{supp} u \equiv \overline{\{x \in \Omega\colon\ u(x) \neq 0\}}$. Через $C^m_0(\Omega)\,[C^\infty_0(\Omega)]$ обозначается множество всех функций из $C^m(\Omega)\,[C^\infty(\Omega)]$, имеющих компактный носитель в Ω.

Пусть K — некоторое компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что функция u, определенная на K, принадлежит классу $C^\alpha(K)$, где $\alpha \in (0, 1)$, если существует такая константа c, что

$$|u(x)-u(x')| \leqslant c\,|x-x'|^\alpha, \quad \forall\forall x,\ x' \in K,\ x \neq x'.$$

В этом случае говорят также, что функция u непрерывна по Гельдеру с показателем α на множестве K. Наименьшую из постоянных c, для которых имеет место последнее неравенство, называют константой Гельдера функции u на множестве K и обозначают через $\langle u\rangle_K^{(\alpha)}$. В частности, если $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, то

$$\langle u\rangle_{\bar\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{x,\,x' \in \Omega,\ x \neq x'} \frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|^\alpha}.$$

Если на множестве $C^\alpha(\bar{\Omega})$ ввести норму

$$\|u\|_{\bar\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{\Omega} |u(x)| + \langle u\rangle_{\bar\Omega}^{(\alpha)},$$

то получится банахово пространство, которое обозначается также через $C^\alpha(\bar{\Omega})$.

Функции u, удовлетворяющие условию

$$|u(x)-u(x')| \leqslant c\,|x-x'|, \quad \forall\forall x,\ x' \in \bar\Omega,\ x \neq x',$$

называются липшицевыми в $\bar\Omega$. Такие функции образуют банахово пространство $\mathrm{Lip}(\bar\Omega)$, норма в котором определяется по формуле

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}\,(\bar\Omega)} = \sup_{\Omega} |u(x)| + \langle u\rangle_{\bar\Omega}^{(1)},$$

где константа Липшица $\langle u\rangle_{\bar\Omega}^{(1)}$ определяется так же, как $\langle u\rangle_{\bar\Omega}^{(\alpha)}$, но только при $\alpha = 1$. Через $\mathrm{Lip}(\Omega)$ обозначается совокупность непрерывных в Ω функций, принадлежащих $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega'})$, $\forall \overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Через $C^{m+\alpha}(\bar\Omega)$ обозначается банахово пространство, элементами которого являются функции класса $C^m(\bar\Omega)$ с производными m-го порядка, принадлежащими классу $C^\alpha(\bar\Omega)$, а норма определена по формуле

$$\|u\|_{\bar\Omega}^{(m+\alpha)} = \sum_{|k|=0}^{m} \sup_{\Omega} |D^k u(x)| + \sum_{|k|=m} \langle D^k u(x)\rangle_{\bar\Omega}^{(\alpha)}.$$

Через $C^{m+\alpha}(\Omega)$ обозначается множество функций, принадлежащих $C^{m+\alpha}(\overline{\Omega'})$ при $\forall\Omega'$, такой, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Обозначим через $\tilde{C}^k(\bar\Omega)$ множество всех функций класса $C^{k-1}(\bar\Omega)$, все частные производные которых порядка k кусочно непрерывны в $\bar\Omega$ (и, следовательно, ограничены в Ω). В частности, через $\tilde{C}^1(\bar\Omega)$ обозначается множество всех непрерывных и кусочно непрерывно дифференцируемых в $\bar\Omega$ функций.

Пусть Γ — некоторое фиксированное подмножество на $\partial\Omega$. Обозначим через $\tilde{C}^1_{0,\,\Gamma}(\bar\Omega)$ множество всех функций из класса $\tilde{C}_1(\bar\Omega)$, равных 0 вне некоторой (своей для каждой функции) n-мерной окрестности множества Γ. В случае $\Gamma = \partial\Omega$ соответствующее множество будем обозначать через $\tilde{C}^1_0(\bar\Omega)$.

Область Ω называется строго липшицевой, если существуют такие константы $R > 0$ и $L > 0$, что для всякой точки $x_0 \in \partial\Omega$ можно построить такую декартову (ортогональную) систему координат $y_1, \ldots, y_n$ с центром в точке x_0, что пересечение границы $\partial\Omega$ области Ω с цилиндром $\text{Ц}_{R,\,L} \equiv \equiv \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 < R^2,\ |y_n| < 2LR \right\}$ задается уравнением

$$y_n = \varphi(y'),\quad y' \equiv (y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

где $\varphi(y')$ есть липшицева функция в области $\{|y'|\leqslant R\}$, причем ее константа Липшица $\langle\varphi\rangle^{(1)}_{\{|y'|\leqslant R\}}$ не превосходит L, а

$$\bar{\Omega}\cap\bar{\text{Ц}}_{R,L}\equiv\{y\in\mathbb{R}^n:|y'|\leqslant R,\ \varphi(y')\leqslant y_n\leqslant 2LR\}.$$

Произвольная выпуклая область является, как известно, строго липшицевой.

Область Ω с границей $\partial\Omega$ называется областью класса C^k, $k\geqslant 1$, если для любой точки границы $\partial\Omega$ найдется такая окрестность ω, что часть границы $\partial\Omega\cap\omega$ представима в виде

$$x_l=\varphi_l(x_1,\ \ldots,\ x_{l-1},\ x_{l+1},\ \ldots,\ x_n) \tag{*}$$

при некотором $l\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, причем функция φ_l принадлежит классу $C^k(\omega_l)$, где ω_l — проекция $\omega\cap\partial\Omega$ на плоскость $x_l=0$.

Введем еще классы $\tilde{C}^{(k)}$, $k\geqslant 1$, областей с кусочно гладкой границей (см. определение классов $B^{(k)}$ в работе [102]). Класс таких областей удобно ввести по индукции относительно размерности области. Одномерной областью класса $\tilde{C}^{(k)}$ является интервал. Область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ принадлежит классу $\tilde{C}^{(k)}$, если ее граница совпадает с границей замыкания $\bar{\Omega}$ и если ее можно разбить на конечное число кусков S^j, $j=1,\ldots,N$, гомеоморфных $(n-1)$-мерному шару, пересекающихся между собой, быть может, лишь в граничных точках и таких, что каждый кусок S^j можно представить в виде (*) при некотором $l\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, где функция φ_l определена в некоторой $(n-1)$-мерной замкнутой области $\bar{\sigma}$ класса $\tilde{C}^{(k)}$ на плоскости $x_l=0$, причем $\varphi_l\in\tilde{C}^k(\bar{\sigma})$.

Если $\Omega\in\tilde{C}^{(k)}$, $k\geqslant 1$, то к $\Omega\cup\partial\Omega$ можно применять формулу интегрирования по частям, преобразующую n-кратный интеграл по Ω в $(n-1)$-кратный интеграл по $\partial\Omega$.

Пусть B_1 и B_2 — какие-нибудь банаховы пространства. Следуя работе [32], будем записью

$$B_1\to B_2$$

обозначать факт непрерывного вложения пространства B_1 в пространство B_2. Другими словами, эта запись означает: $B_1\subset B_2$ (каждый элемент B_1 принадлежит и B_2) и существует такая константа $c>0$, что

$$\|u\|_{B_2}\leqslant c\|u\|_{B_1},\ \forall u\in B_1.$$

Мы привели выше только те из обозначений и определений, которые будут наиболее часто встречаться в тексте. Кроме приведенных выше будут употребляться без особого разъяснения и некоторые другие общепринятые обозначения и термины. Многие обозначения и определения будут вводиться по мере изложения.

В монографии часто используется известное соглашение о суммировании по всем дважды встречающимся индексам. Например, $a^{ij}u_{x_ix_j}$ означает сумму $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a^{ij}u_{x_ix_j}$ и т. п.

Внутри каждой главы нумерация формул отражает номер параграфа и номер формулы в данном параграфе. Например, в обозначении (2. 8) первое число указывает на номер параграфа в данной главе, а второе — на номер формулы в данном параграфе. При необходимости сослаться на какую-нибудь формулу из другой главы употребляется трехкомпонентная запись этой формулы. Например, при ссылке в гл. 7 на формулу (1. 2) гл. 5 употребляется обозначение (5. 1. 2). Аналогичным образом даются ссылки на номера теорем и параграфов. Особым образом нумеруются формулы во введениях к первой, второй и третьей частям монографии. Здесь нумерация отражает только номер формулы внутри данного введения. Ссылки на эти формулы вне пределов данного введения отсутствуют.

Ссылки на литературу на русском языке обозначаются номерами, набранными светлым, а на иностранных языках — полужирным шрифтом.

ЧАСТЬ I

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

Краевые задачи для линейных и квазилинейных эллиптических и параболических уравнений были предметом исследования огромного числа работ. Большой вклад в эту область внесли работы О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой, результаты которых подытожены в монографиях [83, 80]. В этих монографиях также освещена история создания предшествующих работ, изложены результаты некоторых других математиков и приведена подробная библиография. Отметим, что кроме названных развитию теории краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений способствовали работы С. Н. Бернштейна, Ю. Шаудера, Ж. Лерэ, С. Л. Соболева, Л. Ниренберга, Ч. Морри, О. А. Олейник, М. И. Вишика, Ж.-Л. Лионса, Е. М. Ландиса, А. Фридмана, А. И. Кошелева, В. А. Солонникова, Ф. Браудера, Дж. Нэша, Ю. Мозера, Д. Гилбарга, Дж. Серрина, И. В. Скрыпника, С. Н. Кружкова, Ю. А. Дубинского, Н. С. Трудингера и многих других математиков.

Главным объектом исследования в монографиях [83, 80] были так называемые равномерно эллиптические и параболические уравнения. Под равномерной эллиптичностью уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} = a(x, u, \nabla u) \tag{1}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ [равномерной параболичностью уравнения

$$-u_t + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, t, u, \nabla u) u_{x_i x_j} = a(x, t, u, \nabla u) \tag{2}$$

в цилиндре $Q = \Omega \times (0, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$] понимается выполнение для этого уравнения не только условия эллиптичности $a^{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$ [условия параболичности $a^{ij}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$], но и условия: при всех $(x, u, p) \in \bar{\Omega} \times \{|u| \leqslant m\} \times \mathbb{R}^n$ [$(x, t, u, p) \in \bar{Q} \times \{|u| \leqslant m\} \times \mathbb{R}^n$]

$$\Lambda(x, u, p) \leqslant c\lambda(x, u, p) \, [\Lambda(x, t, u, p) \leqslant c\lambda(x, t, u, p)], \tag{3}$$

где λ и Λ — суть соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы коэффициентов при старших производных, c — постоянная, зависящая от параметра m. Ввиду результатов Ладыженской и Уральцевой проблема разрешимости краевой задачи для неравномерно эллиптического или параболического уравнения сводится к вопросу построения априорных оценок максимумов модулей градиентов решений для подходящего однопараметрического семейства подобных уравнений. Указанному вопросу и посвящена большая доля ч. I данной монографии. Вопрос о справедливости априорных оценок максимумов модулей градиентов решений для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений является ключевым, поскольку именно на этом этапе возникают основные ограничения на структуру таких уравнений.

В гл. 1 рассматриваются неравномерно эллиптические уравнения вида (1). Известно (см. [83, 40]), что для возможности обеспечить существование классического решения задачи Дирихле для уравнения вида (1) при любой достаточно гладкой граничной функции необходимо согласовать поведение при $p \to \infty$ правой части $a(x, u, p)$ уравнения с поведением при $p \to \infty$ некоторых характеристик уравнения, определяемых его старшими членами $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$. В работе Дж. Серрина [40] доказано, что более быстрый рост $a(x, u, p)$ при $p \to \infty$, чем рост каждой из функций $\mathscr{E}_1(x, u, p)\psi(|p|)$ и $\mathscr{E}_2(x, u, p)$ при $p \to \infty$, где $\mathscr{E}_1(x, u, p) \equiv a^{ij}(x, u, p) p_i p_j$, $\int^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho\psi(\rho)} = +\infty$, $\mathscr{E}_2(x, u, p) = \mathrm{Sp}\,\|a^{ij}(x, u, p)\|\,|p|$, приводит к несуществованию классического решения задачи Дирихле при некотором выборе бесконечно дифференцируемых граничных функций. С другой стороны, достаточные условия классической разрешимости задачи Дирихле при любой достаточно гладкой граничной функции, полученные в работах [4, 77, 79, 40, 29, 81, 31, 34, 35, 83, 42] для различных классов равномерно и неравномерно эллиптических уравнений, позволяют рассматривать в качестве правых частей уравнений (1) функции $a(x, u, p)$, растущие при $p \to \infty$ не быстрее, чем $\mathscr{E}_1$. Достаточные условия указанной разрешимости задачи Дирихле, полученные в статьях [29, 31, 34, 35] для достаточно широких классов неравномерно эллиптических уравнений и в работе [42] для уравнений специальной структуры, позволяют рассматривать в качестве правых частей уравнений (1) функции $a(x, u, p)$, растущие при $p \to \infty$ не быстрее, чем $\mathscr{E}_2$.

Таким образом, функции (или мажоранты, как мы их называем) $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ являются регуляторами допустимого роста правой части уравнения. В связи с этим одним из первых вопросов общей теории краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений вида (1) является вопрос о выделении таких классов уравнений, для которых условия разрешимости задачи Дирихле обеспечивают возможность естественного роста правой части $a(x, u, p)$ при $p \to \infty$, т. е. роста, не превосходящего роста хотя бы одной из мажорант $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Именно такие классы выделены в работах [4, 77—79, 40, 29, 31, 34, 35, 42, 83].

Работы автора [29, 31, 34, 35], на основе которых написана гл. 1 данной монографии, выделяют широкие классы неравномерно эллиптических уравнений такого сорта. Для них характерно то обстоятельство, что условия, налагаемые на старшие коэффициенты уравнения, формулируются в терминах мажорант $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и относятся не к отдельным коэффициентам a^{ij}, а к агрегатам вида $A^\tau \equiv a^{ij}(x, u, p)\tau_i\tau_j$, где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — произвольный единичный вектор в $\mathbb{R}^n$. Важно, что при указанных условиях установленные априорные оценки градиентов решений не зависят ни от каких минорант для наименьшего собственного числа λ матрицы $\|a^{ij}\|$. Это обстоятельство предопределяет возможность использования полученных здесь результатов и при изучении краевых задач для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений, что, собственно, и делается в ч. II и III.

Установление априорной оценки $\max_{\Omega}|\nabla u|$ разбивается, как и в случае равномерно эллиптических уравнений, на два этапа: 1) получение $\max_{\partial\Omega}|\nabla u|$ (где $\partial\Omega$ — граница области Ω) через $\max_{\Omega}|u|$ и 2) получение оценки $\max_{\Omega}|\nabla u$ через $\max_{\partial\Omega}|\nabla u|$ и $\max_{\Omega}|u|$. Оценки $\max_{\partial\Omega}|\nabla u|$ устанавливаются сначала при помощи техники глобальных барьеров, разработанной Дж. Серрином (см. [40]).

Модификации результатов Дж. Серрина, полученные таким путем, оказываются, в частности, полезными при изучении квазилинейных вырождающихся уравнений. Далее мы устанавливаем локальные оценки градиентов решений уравнений вида (1), сочетая использование некоторых приемов, характерных для техники глобальных барьеров, с конструкциями, применявшимися О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой (см. [83]). Полученные на этом пути результаты являются некоторым усилением (для случая неравномерно эллиптических уравнений) соответствующих результатов [77, 19, 83] по локальным оценкам $|\nabla u|$ на границе области.

Далее в гл. 1 устанавливаются априорные оценки $\max_{\Omega}|\nabla u|$ через $\max_{\partial\Omega}|\nabla u|$. Метод доказательства таких оценок основан на применении принципа максимума для эллиптических уравнений. Это обстоятельство роднит его с классическими методами оценок градиентов решений, сложившимися в работах С. Н. Бернштейна (при $n=2$) и О. А. Ладыженской (при $n \geqslant 2$) и применявшимися в работах [77—79, 40, 4, 11 и др.]. Однако, как показывает сравнение результатов [77—79, 40, 4] и [29, 31, 34, 35], эти методы имеют различные границы применимости. Сначала указанная оценка $\max_{\Omega}|\nabla u|$ устанавливается для класса уравнений, структура которого описывается в терминах мажоранты $\mathscr{E}_1$ (см. условия (1. 6. 4)). Этот класс содержит как частный случай класс квазилинейных равномерно эллиптических уравнений, рассматривавшийся в монографии [83]. Затем оценка $\max_{\Omega}|\nabla u|$ строится для класса уравнений, структура которого описывается в терминах мажоранты $\mathscr{E}_2$ (см. условия (1. 7. 1.)) Этот класс содержит, в частности, уравнение, главная часть которого совпадает с главной частью уравнения минимальных поверхностей (1. 7. 13). Последнее содержится и в третьем классе уравнений, для которого также установлена оценка $\max_{\Omega}|\nabla u|$. Структура этого класса имеет более специальный характер (см. условия (1. 8. 1)). Выделение этого класса в самостоятельный вызвано интересами детального изучения уравнений поверхностей с заданной средней кривизной. Заметим, что условия на правую часть уравнения вида (1. 7. 13), которые вытекают из условий (1. 8. 1), не совпадают с условиями, вытекающими из условий (1. 7. 1). Класс уравнений, определяемый условиями (1. 8. 1), содержит как частные случаи некоторые классы уравнений типа уравнений поверхностей заданной средней кривизны, выделявшиеся различными авторами [40, 4, 83].

Заметим, что оценке $\max_{\Omega}|\nabla u|$ для решений неравномерно эллиптических уравнений вида (1) были посвящены также работы [48, 103, 104, 54, 30, 55], в которых применялся так называемый дивергентный метод оценки $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$, разработанный Ладыженской и Уральцевой для равномерно эллиптических уравнений. В этих работах структура уравнения (1) характеризуется не в терминах мажорант $\mathscr{E}_1$ или $\mathscr{E}_2$.

В конце гл. 1 при помощи фундаментального результата Ладыженской и Уральцевой об оценке нормы $\|u\|_{C^{1+\alpha}(\Omega)}$ через $\|u\|_{C^1(\Omega)}$ для решений произвольных эллиптических уравнений вида (1) из полученных априорных оценок выводятся теоремы существования классических решений задачи Дирихле. Аналогичные результаты по разрешимости задачи Дирихле установлены автором и для некоторых классов неравномерно эллиптических систем [37]. Однако ввиду ограниченности объема данной монографии эти результаты не излагаются.

В гл. 2 изучается первая краевая задача для неравномерно параболических уравнений вида (2). Как и в случае эллиптических уравнений вида (1), старшие коэффициенты уравнения (2) определяют допустимый рост правой части $a(x, t, u, p)$ при $p \to \infty$, поскольку более быстрый рост $a(x, t, u, p)$ при $p \to \infty$, чем рост каждой из функций $\mathscr{E}_1\psi(|p|)$ и $\mathscr{E}_2$ при $p \to \infty$, где $\mathscr{E}_1 \equiv a^{ij}(x, t, u, p)p_ip_j$, $\mathscr{E}_2 = \mathrm{Sp}\|a^{ij}(x, t, u, p)\| \cdot |p|$, $\int\limits^{+\infty} \frac{d\rho}{\psi(\rho)\rho} = +\infty$, приводит к несуществованию классического решения первой краевой задачи при некоторых бесконечно дифференцируемых граничных функциях (см., например, [13]). Достаточные условия классической разрешимости первой краевой задачи при любой достаточно гладкой граничной функции, полученные в работах [78, 83, 98] для равномерно параболических уравнений, в статье [13] для некоторого специального класса неравномерно параболических уравнений и в работе автора [38] для широкого класса неравномерно параболических уравнений вида (2), позволяют в качестве правых частей уравнения рассматривать функции, растущие не быстрее чем $\mathscr{E}_1$. В статье [38], на базе которой написана гл. 2 монографии, получены также достаточные условия классической разрешимости первой краевой задачи, допускающие правые части $a(x, t, u, p)$, растущие при $p \to \infty$ не быстрее чем функция $\mathscr{E}_2$. (Заметим, что, как и в случае эллиптических уравнений, смысл выражения «рост функции при $p \to \infty$» имеет относительный характер).

Таким образом, мажоранты $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ являются регуляторами допустимого роста правой части уравнения и в случае параболических уравнений. Однако присутствие члена u_t в уравнении (2) несколько изменяет картину. Дело в том, что в число достаточных условий, обеспечивающих справедливость разрешимости первой краевой задачи при любых достаточно гладких граничных функциях и при естественных условиях на поведение $a(x, t, u, p)$ при $p \to \infty$, входит условие

$$\mathscr{E}_1\psi(|p|) + \mathscr{E}_2 \to \infty \text{ при } p \to \infty. \tag{4}$$

При невыполнении условия (4) мы устанавливаем существование классического решения первой краевой задачи при естественных условиях роста $a(x, t, u, p)$ в случае произвольной достаточно гладкой граничной функции, зависящей только от пространственных переменных. Это предположение (о независимости граничной функции от t при невыполнении условия (4)) вызвано, однако, существом дела. Мы доказываем теорему несуществования (см. теорему 2. 5. 2), которая утверждает, что при выполнении условий, являющихся в определенном смысле отрицанием условия (4), существуют бесконечно дифференцируемые граничные функции, существенно зависящие от переменной t, при которых первая краевая задача не имеет никакого классического решения.

Возвращаясь к обсуждению достаточных условий для разрешимости первой краевой задачи, представленных в гл. 2, отметим, что, как и в эллиптическом случае, условия на старшие коэффициенты $a^{ij}(x, t, u, p)$ уравнения относятся к суммарным характеристикам $A^{\tau} \equiv a^{ij}(x, t, u, p)\tau_i\tau_j$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, $|\tau|=1$, и формулируются в терминах мажорант $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Здесь также важно отметить, что структура этих условий и характер установленных основных априорных оценок для решений уравнения (2) не зависят от «константы параболичности» уравнения. Это предопределяет возможность использования полученных результатов и при изучении краевых задач для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Ввиду результатов Ладыженской и Уральцевой (см. [80]) доказательство классической разрешимости первой краевой задачи для уравнений вида (2) можно свести к построению справедливости априорной оценки $\max\limits_{Q} |\nabla u|$, где ∇u — пространственный градиент, для решений однопараметрического семейства уравнений (2), имеющих такую же структуру, что и исходное уравнение (см. § 2.1).

Для получения такой оценки мы находим сначала априорную оценку пространственного градиента ∇u на параболической границе Γ цилиндра Q, опираясь на технику глобальных барьеров. Затем устанавливаем априорные оценки $\max\limits_{Q}|\nabla u|$ через $\max\limits_{\Gamma}|\nabla u|$ и $\max\limits_{Q}|u|$. Достаточные условия справедливости такой оценки формулируются в терминах как мажоранты $\mathscr{E}_1$, так и мажоранты $\mathscr{E}_2$. Первый класс уравнений вида (2), для решений которых установлена указанная оценка (см. условия (2.3.2)), содержит как частный случай класс квазилинейных равномерно параболических уравнений, рассматривавшийся в монографии [83]. Второй класс уравнений, выделенный в указанной связи и характеризуемый условиями, формулируемыми в терминах мажоранты $\mathscr{E}_2$, содержит, в частности, параболический аналог уравнения заданной средней кривизны (см. (2. 3. 25)). Такие уравнения находят применение в механике сплошных сред. Из полученных оценок доказательство существования классического решения первой краевой задачи собирается при помощи известного результата Ладыженской и Уральцевой об оценке нормы $\|u\|_{C^{1+\alpha}(\bar{Q})}$ через $\|u\|_{C^1(\bar{Q})}$ для решений произвольных параболических уравнений вида (2).

Глава 3, завершающая ч. I, посвящена получению локальных оценок градиентов решений квазилинейных эллиптических уравнений вида (1) и их применению к доказательству некоторых качественных свойств решений этих уравнений. В случае равномерно эллиптических уравнений локальные оценки градиентов решений уравнений вида (1) установлены О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой (см. [83]). В работах [**19**, **43**, 26, 83] указанные оценки распространены на некоторые классы неравномерно эллиптических уравнений вида (1). В перечисленных работах модуль $|\nabla u(x_0)|$ градиента решения u в произвольной внутренней точке x_0 области Ω оценен через $\max\limits_{K_\rho(x_0)}|u|$, где $K_\rho(x_0)$ — шар радиуса ρ с центром в точке

x_0. Результаты автора [26], полученные в связи с такой оценкой, находят отражение в начале гл. 3. Указанная оценка устанавливается здесь при условиях, сформулированных в терминах мажоранты $\mathscr{E}_1$ (см. условия (3.1.1)—(3.1.6)). Важной особенностью этих условий и полученной оценки $|\nabla u(x_0)|$ является их независимость от константы эллиптичности уравнения (1), т. е. от какой-либо миноранты для наименьшего собственного числа матрицы $\|a^{ij}(x, u, \nabla u)\|$ на рассматриваемом решении этого уравнения. Поэтому полученный результат имеет значение даже для случая равномерно эллиптических уравнений. Кроме того, отсюда вытекает возможность использования такой оценки при изучении квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений. Заметим также, что вместо ограничения *на степень неравномерности эллиптичности уравнения* (см. [83]) условия (3.1.1)—(3.1.6) выражают ограничение на более общие характеристики неравномерности эллиптичности, чем степень.

В работе Дж. Серрина и Л. А. Пелетье (см. [34]) были выделены более специальные классы уравнений вида (1), для которых $|\nabla u(x_0)|$ можно выразить только через $\max\limits_{K_\rho(x_0)} u$ или $\min\limits_{K_\rho(x_0)} u$ или вообще только через структурные характеристики уравнения. Аналогичным вопросам была посвящена статья [48]. В гл. 3 излагаются и оценки $|\nabla u(x_0)|$ указанного сорта. Полученные локальные оценки градиентов используются в этой главе для получения теорем лиувиллевского типа и (в одном специальном случае) для доказательства неравенства Гарнака. Теоремы лиувиллевского типа для квазилинейных эллиптических уравнений недивергентного вида были предметом исследования работ [43, 26, 34, 48]. Двусторонние лиувиллевские теоремы, состоящие в утверждении, что всякое ограниченное по модулю или имеющее не слишком большой рост по модулю при $p \to \infty$ решение есть тождественная константа, установлены в статьях [43] — для нелинейного уравнения Пуассона $\Delta u = f(u, \nabla u)$ и [26] — для квазилинейных эллиптических уравнений вида $a^{ij}(\nabla u)\, u_{x_i x_j} = a(u, \nabla u)$, допускающих определенную неравномерность эллиптичности. В частности, из результатов работы [26] вытекает предельная двусторонняя лиувиллевская теорема для уравнения Эйлера вариационной задачи на минимум интеграла $\int\limits_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{m/2} dx$, $m > 1$, т. е. уравнения

$$[(1 + |\nabla u|^2)\,\delta_i^j + (m-2)\, u_{x_i} u_{x_j}]\, u_{x_i x_j} = 0. \tag{5}$$

А именно, из теоремы 3.1.1 следует, что для любого достаточно гладкого в $\mathbb{R}^n$ решения u уравнения (5) при любой $x_0 \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка $|\nabla u(x_0)| \leqslant c \operatorname*{osc}\limits_{K_\rho(x_0)} u \cdot \rho^{-1}$, где константа c зависит лишь от n и m. Отсюда легко вытекает, что всякое достаточно гладкое в $\mathbb{R}^n$ решение уравнения (5), растущее при $|x| \to \infty$ как $o(|x|)$, есть тождественная константа. Этот результат невозможно усилить, поскольку линейная функция является решением уравнения (5) в $\mathbb{R}^n$.

В работе [34] для некоторых классов равномерно эллиптических уравнений были доказаны односторонние лиувиллевские теоремы, в которых априорное требование к решению носит односторонний характер: предполагается лишь ограниченность роста при $\rho \to \infty$ величины $\sup\limits_{|x| \leqslant \rho} u$ или $\inf\limits_{|x| \leqslant \rho} u$. В статье [48] односторонние лиувиллевские теоремы установлены для других классов уравнений вида (1). В работах [43, 26, 34, 48] были доказаны также так называемые ослабленные лиувиллевские теоремы, в которых кроме априорного ограничения роста самой функции на бесконечности требуется еще и ограниченность роста градиента. Изложение теорем лиувиллевского типа в гл. 3 ведется на основе статей автора [26, 48]. В работах [39, 44] были установлены двусторонние теоремы лиувиллевского типа для некоторых классов эллиптических систем недивергентного вида, однако в данной монографии лиувиллевские теоремы для эллиптических систем не излагаются. Мы не упоминаем здесь большого цикла работ по лиувиллевским теоремам для линейных эллиптических уравнений и систем и для квазилинейных эллиптических уравнений дивергентного вида, в которых используется другая методика их получения.

ГЛАВА 1

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Основные характеристики квазилинейного эллиптического уравнения

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, квазилинейное уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv a^{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} - a(x, u, \nabla u) = 0, \qquad (1.1)$$

где $a^{ij} = a^{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющее условию эллиптичности

$$a^{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j > 0 \text{ при } \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \xi \neq 0, \ \forall (x, u, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \qquad (1.2)$$

Относительно функций $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $a(x, u, p)$ в этой главе всегда предполагается, что они по крайней мере непрерывны в $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. При исследовании условий разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1. 1), т. е. задачи

$$\mathscr{L}u = 0 \text{ в } \Omega, \ u = \varphi \text{ на } \partial\Omega, \qquad (1.3)$$

где φ — заданная функция, первым вопросом является, естественно, вопрос о допустимой структуре этого уравнения, т. е. вопрос о том, при каких условиях на функции $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ задача вида (1. 3) имеет классическое решение в любой (хотя бы строго выпуклой) области Ω с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ и при любой достаточно гладкой граничной функции φ. При этом под классическим решением задачи (1. 3) понимается всякая функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая уравнению (1. 1) в Ω и совпадающая с φ на $\partial\Omega$. Если допустимая структура линейных эллиптических уравнений определяется главным образом условием достаточной гладкости коэффициентов, то при изучении квазилинейных эллиптических уравнений на первый план выступают условия допустимого роста функции $a(x, u, p)$ при $p \to \infty$ в зависимости от поведения при $p \to \infty$ некоторых характеристик уравнения (1. 1), определяемых старшими коэффициентами $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Первая из этих характеристик — функция

$$\mathscr{E}_1 \equiv \mathscr{E}_1(x, u, p) = a^{ij}(x, u, p) p_i p_j \equiv \mathcal{A}p \cdot p, \qquad (1.4)$$

где $A \equiv \|a^{ij}(x, u, p)\|$ известна еще с ранних работ С. Н. Бернштейна. Второй такой характеристикой является функция

$$\mathcal{E}_2 \equiv \mathcal{E}_2(x, u, p) = \operatorname{Sp} A\,|p|. \tag{1.5}$$

Рост правой части уравнения $a(x, u, p)$ при $p \to \infty$ не может превосходить одновременно рост функций $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ в следующем смысле.

Теорема 1.1 (Дж. Серрин). *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, граница $\partial\Omega$ которой содержит хотя бы одну точку x_0, которой можно извне коснуться некоторым шаром K (так, что $K \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}$). Предположим, что*

$$|a(x, u, p)| \geqslant \mathcal{E}_1(x, u, p)\,\psi(|p|) \ \text{при}\ x \in \bar{\Omega},\ |u| \geqslant m,\ |p| \geqslant l, \tag{1.6}$$

где m и l — некоторые положительные константы, а функция $\psi(\rho)$, $0 \leqslant \rho < +\infty$, удовлетворяет условию

$$\int^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho\,\psi(\rho)} < +\infty, \tag{1.7}$$

и пусть

$$\frac{|a(x, u, p)|}{\mathcal{E}_2(x, u, p)} \to +\infty \ \text{при}\ p \to \infty \ \text{равномерно по}\ x \in \bar{\Omega},\ u \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Тогда существует такая бесконечно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$ функция $\varphi(x)$, для которой задача Дирихле (1.3) *не имеет никакого классического решения.*

Теорема 1.1 доказана в работе [40] при помощи техники глобальных барьеров, разработанной там же.

Для конкретных эллиптических уравнений вида (1.1) определяющую роль играет обычно одна из функций $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, а именно та, рост которой больше при $p \to \infty$. Так, для равномерно эллиптических уравнений, характеризуемых условием

$$\Lambda(x, u, p)\,\lambda^{-1}(x, u, p) \leqslant \text{const},\ x \in \bar{\Omega},\ u \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

где $\Lambda = \Lambda(x, u, p)$ и $\lambda = \lambda(x, u, p)$ — соответственно наибольшее и наименьшее собственное значение матрицы $A(x, u, p)$, определяющую роль всегда играет функция $\mathcal{E}_1$, поскольку в этом случае $\mathcal{E}_1 \sim \lambda|p|^2$, $\mathcal{E}_2 \sim \lambda|p|$ при $p \to \infty$. Для (нормированного) уравнения поверхности заданной средней кривизны

$$\left(\frac{1 + |\nabla u|^2}{|\nabla u|^2}\,\delta_i^j - \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{|\nabla u|^2}\right) u_{x_i x_j} = n\mathcal{H}(x, u, \nabla u)\frac{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}{|\nabla u|^2} \tag{1.10}$$

определяющую роль играет, напротив, функция $\mathcal{E}_2$, поскольку в этом случае $\mathcal{E}_1 \equiv 1$, $\mathcal{E}_2 > (n-1)\,|p|$. В дальнейшем функции $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ называются также мажорантами.

«Положительная роль» мажоранты $\mathcal{E}_1$, заключающаяся в допустимости для разрешимости задачи (1.3) роста $a(x, u, p)$ при $p \to \infty$, не более быстрого, чем рост $\mathcal{E}_1$ при $p \to \infty$ (при выполнении, конечно, и некоторых условий другого типа), первоначально была обоснована в случае $n=2$ Бернштейном [4], а в случае $n \geqslant 2$ — Ладыженской и Уральцевой [77] в пределах класса равномерно эллиптических уравнений. Этими же авторами были приведены примеры, показывающие, что в определенном смысле существенно более быстрый рост правой части уравнения при $p \to \infty$, чем рост $\mathcal{E}_1$ при $p \to \infty$, вообще говоря, уже не является допустимым для разрешимости задачи Дирихле даже в случае строго выпуклой области Ω. В этом состоит «отрицательная роль» мажоранты $\mathscr{E}_1$. В дальнейшем «положительная роль» мажоранты $\mathscr{E}_1$ была подтверждена в работах [79, 40, 29, 81, 31, 34, 35, 83] для различных классов неравномерно эллиптических уравнений.

Приведенная выше теорема Серрина, доказанная после работ Ладыженской и Уральцевой по равномерно эллиптическим уравнениям, уточняет, что в общих рамках неравномерно эллиптических уравнений граница недопустимого роста определяется уже двумя функциями, $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, и показывает, что «отрицательная роль» мажорант $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ носит универсальный характер. По-видимому, статья Серрина [40] является первой, где выявлена «отрицательная роль» мажоранты $\mathscr{E}_2$. Заметим, что в этой статье «положительная роль» мажоранты $\mathscr{E}_2$ была выявлена только на этапе получения оценки $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$, причем для уравнений специальной структуры. В дальнейшем «положительная роль» мажоранты $\mathscr{E}_2$ была обоснована в работах автора [29, 31, 34, 35] для достаточно широких классов неравномерно эллиптических уравнений и в работе [42] — для уравнений специальной структуры. ∎

§ 2. Условная теорема существования

Приведем прежде всего два известных фундаментальных результата, играющих основную роль в сведении доказательства классической разрешимости задачи (1.3) к задаче построения априорной оценки $\max\limits_{\overline{\Omega}}(|u|+|\nabla u|)$ для решений некоторого однопараметрического семейства задач Дирихле, связанных с задачей (1.3). Эти результаты мы приводим в рамках, достаточных для нужд данной монографии.

Теорема Шаудера. *Пусть коэффициенты линейного уравнения*

$$a^{ij}(x)u_{x_ix_j}=a(x) \tag{2.1}$$

принадлежат классу $C^{l-2+\alpha}(\Omega)$, где l — целое положительное число, $l\geqslant 2$ $\alpha\in(0,1)$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и пусть выполнено условие эллиптичности

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\nu\xi^2,\quad \nu=\text{const}>0,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad x\in\overline{\Omega}. \tag{2.2}$$

Тогда всякое решение $u\in C^2(\Omega)$ уравнения (2.1) принадлежит классу $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega'})$, причем

$$\|u\|_{C^{l+\alpha}(\overline{\Omega'})}\leqslant c_1, \tag{2.3}$$

где $\overline{\Omega'}\subset\overline{\Omega''}\subset\Omega$, а константа c_1 зависит лишь от $\|u\|_{C(\overline{\Omega''})}$, n, ν, α, l, $\|a^{ij}\|_{C^{l-2+\alpha}(\Omega)}$, $\|a\|_{C^{l-2+\alpha}(\Omega)}$ и расстояния Ω' до $\partial\Omega$. Если область Ω принадлежит классу $C^{l+\alpha}$, а граничная функция $\varphi\in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, то задача Дирихле

$$a^{ij}(x)u_{x_ix_j}=a(x)\ \text{в}\ \Omega,\quad u=\varphi\ \text{на}\ \partial\Omega \tag{2.4}$$

имеет точно одно классическое решение u, причем $u\in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ и

$$\|u\|_{C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})}\leqslant c_2,$$

где c_2 зависит лишь от n, ν, α, l, $\|a^{ij}\|_{C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})}$, $\|a\|_{C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})}$, $\|\varphi\|_{C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})}$ и от $C^{l+\alpha}$-норм функций, описывающих границу $\partial\Omega$ области Ω.

Теорема Шаудера является известным классическим результатом.

Теорема Ладыженской и Уральцевой [83]. *Пусть функция $u \in C^2(\bar\Omega)$, удовлетворяющая условию*

$$\max_{\bar\Omega}|u|\leqslant m,\quad \max_{\bar\Omega}|\nabla u|\leqslant M, \tag{2.5}$$

является решением уравнения (1.1) *в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, причем уравнение* (1.1) *эллиптично на этом решении в том смысле, что*

$$a^{ij}(x,\ u(x),\ \nabla u(x))\xi_i\xi_j\geqslant \nu\xi^2,\quad \nu=\mathrm{const}>0,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\bar\Omega. \tag{2.6}$$

Пусть на множестве $\mathscr{F}_{\Omega,m,M}\equiv\bar\Omega\times\{|u|\leqslant m\}\times\{|p|\leqslant M\}$ функции $a^{ij}(x,u,p)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$ и $a(x,u,p)$ удовлетворяют условию:

$$|a^{ij}|+\left|\frac{\partial a^{ij}}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial a^{ij}}{\partial u}\right|+\left|\frac{\partial a^{ij}}{\partial p}\right|+|a|\leqslant M_1\equiv\mathrm{const}>0 \text{ на } \mathscr{F}_{\Omega,m,M}. \tag{2.7}$$

Тогда существует такое число $\gamma\in(0,1)$, зависящее только от n, ν, M, M_1, что для любой подобласти Ω', $\bar{\Omega'}\subset\Omega$, справедлива оценка

$$\|\nabla u\|_{C^\gamma(\bar{\Omega'})}\leqslant c_1, \tag{2.8}$$

где c_1 зависит лишь от n, ν, M, M_1 и расстояния Ω' до границы $\partial\Omega$. Если область Ω принадлежит классу C^2, а $u=\varphi(x)$ на $\partial\Omega$, где $\varphi\in C^2(\bar\Omega)$, то

$$\|\nabla u\|_{C^\gamma(\bar\Omega)}\leqslant c_2, \tag{2.9}$$

где c_2 и γ зависят от тех же величин, что и константы c_1 и γ в (2.8) *и, кроме того, от $\|\varphi\|_{C^2(\bar\Omega)}$ и от C^2-норм функций, описывающих границу $\partial\Omega$.*

При помощи теорем Шаудера и Ладыженской—Уральцевой и известного топологического принципа Лерэ—Шаудера (в форме Шеффера) существования неподвижной точки у компактного оператора в банаховом пространстве устанавливается следующая условная теорема существования классического решения задачи Дирихле.

Теорема 2.1. *Пусть функции $a^{ij}(x,u,p)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, $a(x,u,p)$ принадлежат классу $C^2(\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и пусть при любых $(x,u,p)\in\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$*

$$a^{ij}(x,\ u,\ p)\xi_i\xi_j\geqslant\nu|\xi|^2,\quad \nu=\mathrm{const}>0,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

Предположим также, что область Ω принадлежит классу C^3, а функция $\varphi\in C^3(\bar\Omega)$. Пусть, наконец, для всякого решения $v\in C^2(\bar\Omega)$ задачи

$$\mathscr{L}_\tau v\equiv a^{ij}(x,\ v,\ \nabla v)v_{x_ix_j}-\tau a(x,\ v,\ \nabla v)=0 \text{ в } \Omega, \tag{2.11}$$
$$v=\tau\varphi \text{ на } \partial\Omega,\ \tau\in[0,1]$$

справедлива оценка

$$\max_{\bar\Omega}(|v|+|\nabla v|)\leqslant c_0, \tag{2.12}$$

где $c_0=\mathrm{const}>0$ не зависит ни от v, ни от τ. Тогда задача Дирихле (1.3) *имеет хотя бы одно классическое решение. Более того, это решение принадлежит классу $C^2(\bar\Omega)$.*

Доказательство теоремы 2.1 приведено, например, в статье [40]. Заметим, что вместо семейства задач вида (2.11) можно рассматривать и другие, более общие, однопараметрические семейства задач (см. [83, 40]). Теорема 2.2 определяет программу исследования проблемы разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения вида (1.1). Она сводится к последовательному доказательству справедливости априорных оценок

$\max\limits_{\Omega}|u|$ и $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$. Получение оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ обычно разбивается на два этапа: 1) установление оценки $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ через $\max\limits_{\Omega}|u|$ и 2) установление оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ через $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ и $\max\limits_{\Omega}|u|$. В настоящее время известно много достаточных условий для получения априорной оценки $\max\limits_{\Omega}|u|$ (см. [83, 82, **40**] и др.). В связи с этим в нашей монографии оценки $\max\limits_{\Omega}|v|$ для решений задач (2.11), не зависящие от τ, обычно постулируются при формулировках условий разрешимости задачи (1.3). Последующие рассмотрения в ч. 1 посвящены в основном построению различных методов получения оценок $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$.

§ 3. Некоторые факты из барьерной техники

Лемма 3.1 (Дж. Серрин). *Пусть функция $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ удовлетворяет в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, уравнению* (1.1), *причем предполагается, что выполнено условие* (1.2) *и что $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, и $a(x, u, p)$ суть непрерывные функции своих аргументов в $\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Пусть (барьерная) функция $\omega\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ удовлетворяет в Ω при любой константе $c\geqslant 0$ неравенству*

$$\mathcal{L}(\omega+c)\equiv a^{ij}(x, \omega+c, \nabla\omega)\omega_{x_ix_j}-a(x, \omega+c, \nabla\omega)\leqslant 0. \tag{3.1}$$

Тогда если $u\leqslant\omega$ на границе $\partial\Omega$ области Ω, то $u\leqslant\omega$ и во всей области $\bar\Omega$.

Доказательство леммы 3.1 изложено в статье [**40**]. Оно основано на применении строгого принципа максимума для линейных эллиптических уравнений.

Пусть область Ω принадлежит классу C^3. В некоторой подобласти $D_0\subset\Omega$, примыкающей к граничной поверхности $\partial\Omega$, можно определить функцию $d=d(x)$ как расстояние точки $x\in D_0$ до границы $\partial\Omega$ (т. е. $d(x)=\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$). Область D_0 характеризуется условием

$$D_0\equiv\{x\in\Omega: d(x)<\delta_0\}, \tag{3.2}$$

причем число $\delta_0>0$ определяется только границей $\partial\Omega$ области Ω. Далее всегда будем считать, что $\delta_0\leqslant K^{-1}$, где K — верхняя грань абсолютных величин нормальных кривизн на $\partial\Omega$. В работе [40] доказано, что при выполнении последнего условия функция $d(x)$ принадлежит классу $C^2(D_0)$.

Лемма 3.2 (Дж. Серрин). *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, — ограниченная область класса C^3, и пусть*

$$\omega(x)=\varphi(x)+h(d),\ d=d(x)\equiv\operatorname{dist}(x, \partial\Omega),\ x\in D\equiv \\ \equiv\{x\in\Omega: d(x)<\delta\}, \tag{3.3}$$

где $\varphi\in C^3(\bar D)$, $h(d)\in C^2((0, \delta))\cap C([0, \delta])$, $0<\delta<\delta_0$, δ_0 — число из условия (3.2), *причем $h'(d)>0$ на $[0, \delta]$. Тогда в области D выражение $\mathcal{L}(\omega+c)\equiv a^{ij}(x, \omega+c, \nabla\omega)\omega_{x_ix_j}-a(x, \omega+c, \nabla\omega)$, $c=\mathrm{const}>0$, можно оценить сверху выражением*

$$\mathcal{T}\frac{h''}{h'^2}+K\operatorname{Sp}Ah'+a^{ij}\varphi_{x_ix_j}-a, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{T}=A(p-p_0)\cdot(p-p_0)$, $A\equiv\|a^{ij}(x, \omega(x)+c, \nabla\omega(x))\|$, $p=\nabla\omega(x)$, $p_0=\nabla\varphi(x)$, причем $p=p_0+\nu h'$, ν — единичный вектор внутренней нор-

мали к $\partial\Omega$ *в точке* $y=y(x)\in\partial\Omega$, *ближайшей к* x *на* $\partial\Omega$, $h'=h'(d(x))$, $K=\sup\limits_{i=1,\ldots,n-1,\ y\in\partial\Omega}|k_i(y)|$, $k_i(y)$, $i=1,\ldots,n-1$, — *главные кривизны поверхности* $\partial\Omega$ *в точке* y, $a=a(x,\ \omega(x)+c,\ \nabla\omega(x))$. *Если область* Ω *выпукла, то выражение* $\mathscr{L}(\omega+c)$, $c=\mathrm{const}>0$, *можно также оценить сверху в области* D *выражением*

$$\mathscr{T}\,\frac{h''+Kh'}{h'^2}-k\,\mathrm{Sp}\,Ah'+a^{ij}\varphi_{x_ix_j}-a, \tag{3.5}$$

где $k=\inf\limits_{i=1,\ldots,n-1,\ y\in\partial\Omega}k_i(y)$, *причем* $k\geqslant 0$.

Доказательство. Результаты леммы 3.2 очевидным образом вытекают из формул, полученных в работе [40] (см. с. 422—423).

Приведем теперь простое предложение, связанное с рассмотрением одного обыкновенного дифференциального уравнения.

Лемма 3.3. *Пусть положительная непрерывная функция* $\Phi(\rho)$, $0\leqslant\rho<+\infty$, *удовлетворяет условию* $\int\limits^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2\Phi(\rho)}=+\infty$, *и пусть фиксировано число* $\delta_0>0$. *Тогда при любых* $q>0$ *и* $\alpha>0$ *существуют число* $\delta\in(0,\ \delta_0)$ *и функция* $h=h(d)\in C^2((0,\ \delta))\cap C([0,\ \delta])$, *удовлетворяющая условиям*

$$\begin{gathered}\frac{h''}{h'^3}+\Phi(h')=0 \text{ на } (0,\ \delta),\\ h(0)=0,\ h(\delta)=q,\ h'(d)\geqslant\alpha \text{ на } (0,\ \delta),\end{gathered} \tag{3.6}$$

причем δ *зависит только от* q, α *и* $\Phi(\rho)$.

Доказательство. Ввиду условия $\int\limits^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2\Phi(\rho)}=+\infty$ существует такое число β, что

$$q=\int\limits_{\bar\alpha}^{\beta}\frac{d\rho}{\rho^2\Phi(\rho)}, \tag{3.7}$$

где $\bar\alpha=\max(\alpha,\ q\delta_0^{-1})$, так что $\beta>\bar\alpha\geqslant\alpha$. Пусть

$$\delta=\int\limits_{\bar\alpha}^{\beta}\frac{d\rho}{\rho^3\Phi(\rho)}. \tag{3.8}$$

Очевидно, что $\delta\leqslant q/\bar\alpha\leqslant\delta_0$. Зададим теперь функцию $h(d)$ на отрезке $[0,\ \delta]$ следующими параметрическими уравнениями:

$$h=\int\limits_{\rho}^{\beta}\frac{d\rho}{\rho^2\Phi(\rho)},\qquad d=\int\limits_{\rho}^{\beta}\frac{d\rho}{\rho^3\Phi(\rho)},\qquad \bar\alpha\leqslant\rho\leqslant\beta. \tag{3.9}$$

Легко убедиться непосредственной проверкой, что $h''/h'^3+\Phi(h')=0$ на $(0,\delta)$. Очевидно также, что $h'=\rho\geqslant\bar\alpha\geqslant\alpha$ на $[0,\ \delta]$, $h(0)=0$, $h(\delta)=q$. Лемма 3.3 доказана.

§ 4. Оценки $|\nabla u|$ на границе $\partial\Omega$ при помощи глобальных барьеров

В этом параграфе при помощи техники глобальных барьеров, разработанной Дж. Серрином, устанавливаются оценки нормальной производной решения задачи (4.3), а тем самым и всего градиента этого решения на границе $\partial\Omega$. Приводимые здесь результаты являются модификацией соответствующих результатов работы [40]. Через D_0 ниже обозначается приграничная подобласть Ω, определенная по формуле (3.2). Предположим также, что для уравнения (1.1) выполнено условие (1.2).

Теорема 4.1. *Пусть на множестве* $\mathfrak{N}_{m,l} \equiv \bar{D}_0 \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$, $m = \text{const} \geqslant 0$, $l = \text{const} \geqslant 0$, *функции* a^{ij}, $\frac{\partial a^{ij}}{\partial p_k}$, a, $\frac{\partial a}{\partial p_k}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, *непрерывны и удовлетворяют условию*

$$|a(x, u, p)| \leqslant \psi(|p|)\mathscr{E}_1(x, u, p) + \delta(|p|)\mathscr{E}_2(x, u, p), \tag{4.1}$$

где $\mathscr{E}_1$ *и* $\mathscr{E}_2$ *определены по формулам* (1.4) *и* (1.5), $\psi(\rho)$, $0 \leqslant \rho < +\infty$, — *положительная монотонная непрерывная функция, такая, что* $\lim\limits_{\rho \to +\infty} \frac{\psi(\rho)}{\rho} = 0$ *и при* $\forall c = \text{const} \geqslant 0$ *функция* $\rho\psi(\rho \pm c)$ *монотонна и*

$$\int^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho\psi(\rho \pm c)} = +\infty, \tag{4.2}$$

а $\delta(\rho)$, $0 < \rho < +\infty$, — *неотрицательная невозрастающая функция, такая, что*

$$\lim_{\rho \to \infty} \delta(\rho) = 0. \tag{4.3}$$

Пусть $u \in C^2(D_0) \cap C^1(\bar{D}_0)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая в области* D_0 *уравнению* (1.1), *совпадающая на границе* $\partial\Omega$ *с функцией* $\varphi \in C^3(\bar{D}_0)$ *и такая, что* $|u(x)| \leqslant m$ *в* D_0. *Предположим также, что область* Ω *строго выпукла и принадлежит классу* C^3. *Тогда*

$$\left|\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\right| \leqslant M_0, \quad y \in \partial\Omega, \tag{4.4}$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — *производная по направлению внутренней нормали к* $\partial\Omega$ *в точке* $y \in \partial\Omega$, *а* M_0 *зависит лишь от* m, l, *числа* δ_0 *из условия* (3.2), *функций* $\psi(\rho)$ *и* $\delta(\rho)$ *из* (4.1), $\|\varphi\|_{C^2(\bar{D}_0)}$, *а также от* k^{-1} *и* K, *где* $k = \inf\limits_{i=1,\ldots,n-1,\, y \in \partial\Omega} k_i(y)$, $k_i(y)$, $i = 1, \ldots, n-1$, — *главные кривизны поверхности* $\partial\Omega$ *в точке* $y \in \partial\Omega$. *Если дополнительно предполагается, что на множестве* $\mathfrak{N}_{m,l}$

$$\psi(|p|)\mathscr{E}_1(x, u, p) \geqslant \mathscr{E}_2(x, u, p), \tag{4.5}$$

то оценка (4.4) *будет иметь место и без предположения о строгой выпуклости области* Ω. *В этом случае константа* M_0 *в* (4.4) *зависит от тех же величин, что и ранее, за исключением величины* k^{-1}.*)

Доказательство. Будем сначала считать, что условия (4.1) и (4.5) выполнены при любых u, точнее, на множестве $\mathfrak{N}_{\infty,l} \equiv \bar{D}_0 \times \mathbb{R} \times \{|p| > l\}$. Это предположение будет устранено в конце доказательства. Докажем сперва первую часть теоремы, предполагая, что условие (4.5) отсутствует. Пусть функция ω определена по формуле (3.3), где $\varphi(x)$ — функция из условий теоремы, а выбор функции $h(d) \in C^2((0, \delta)) \cap C([0, \delta])$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, и в частности числа δ, характеризующего область определения функции $h(d)$, уточним ниже. Применяя лемму 3.2, получим при любой константе c неравенство

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant \mathscr{T}\frac{h'' + Kh'}{h'^2} - k\,\mathrm{Sp}\,Ah' + a^{ij}\varphi_{x_i x_j} - a, \quad x \in D, \tag{4.6}$$

*) Вторая часть теоремы 4.1 является результатом Дж. Серрина, изложенным в статье [40] (см. с. 432—433).

где в соответствии с обозначениями, принятыми в лемме 3.2, $\mathcal{F}= A(p-p_0)\cdot(p-p_0)$, $A=\|a^{ij}(x, \omega(x)+c, \nabla\omega(x))\|$, $p=\nabla\omega(x)$, $p_0=\nabla\varphi(x)$, причем $p=p_0+\nu h'$, $K=\sup\limits_{i=1,\ldots,n-1}|k_i(y)|$, $a=a(x, \omega(x)+c, p)$. Предположим, что $h'(d)\geqslant c_\varphi+l+1$ на $[0, \delta]$, где $c_\varphi\equiv\|\varphi\|_{C(\bar D)}+\sum\limits_{i=1}^{n}\|\varphi_{x_i}\|_{C(\bar D)}+ \sum\limits_{i,j=1}^{n}\|\varphi_{x_ix_j}\|_{C(\bar D)}$. Тогда $|p|>l$. Применяя неравенство (4.1), оценивая $|a^{ij}\varphi_{x_ix_j}|\leqslant c_\varphi \operatorname{Sp} A$ и учитывая также, что $h'-c_\varphi\leqslant|p|\leqslant h'+c_\varphi\leqslant 2h'$, получим оценку

$$a^{ij}\varphi_{x_ix_j}-a\leqslant c_\varphi \operatorname{Sp} A+\psi(h'\pm c_\varphi)\mathcal{E}_1+2h'\delta(h'-c_\varphi)\operatorname{Sp} A, \quad x\in D. \quad (4.7)$$

Докажем теперь, что

$$\mathcal{E}_1\leqslant 2\mathcal{F}+4c_\varphi^2 \operatorname{Sp} A \text{ на } D. \quad (4.8)$$

Действительно, учитывая, что $|Ap\cdot p_0|\leqslant|Ap||p_0|\leqslant c_\varphi|Ap|$ и $|Ap|\leqslant(\operatorname{Sp} A)^{1/2}(Ap\cdot p)^{1/2}$, получим неравенстно $|Ap\cdot p_0|\leqslant c_\varphi(\operatorname{Sp} A)^{1/2}(Ap\cdot p)^{1/2}$. Тогда $\mathcal{F}=Ap\cdot p-2Ap\cdot p_0+Ap_0\cdot p_0\geqslant Ap\cdot p-2Ap\cdot p_0\geqslant Ap\cdot p-2c_\varphi(\operatorname{Sp} A)^{1/2}(Ap\cdot p)^{1/2}\geqslant {}^1/_2\mathcal{E}_1-2c_\varphi^2 \operatorname{Sp} A$, откуда и следует (4.8). Из (4.6) — (4.8) вытекает, что для функции ω на множестве D справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(\omega+c)\leqslant\mathcal{F}h'\left\{\frac{h''}{h'^3}+\frac{K}{h'^2}+\frac{2\psi(h'\pm c_\varphi)}{h'}\right\}+ + h'\left\{-k+\frac{c_\varphi}{h'}+\frac{4c_\varphi^2\psi(h'\pm c_\varphi)}{h'}+2\delta(h'-c_\varphi)\right\}\operatorname{Sp} A, \quad (4.9)$$

где $c=\text{const}>0$.

Ввиду условий (4.2), (4.3)

$$\frac{c_\varphi}{\rho}+\frac{4c_\varphi^2\psi(\rho\pm c_\varphi)}{\rho}+2\delta(\rho-c_\varphi)\to 0$$

при $\rho\to+\infty$. Поэтому, считая $h'\geqslant\alpha_0$, где $\alpha_0>0$ — достаточно большое число, зависящее лишь от k, c_φ, $\psi(\rho)$ и $\delta(\rho)$, можно ослабить неравенство (4.9), отбрасывая неположительную вторую фигурную скобку в (4.9). Тогда

$$\mathcal{L}(\omega+c)\leqslant\mathcal{F}h'\left\{\frac{h''}{h'^3}+\Phi(h')\right\}, \quad x\in D, \quad (4.10)$$

где

$$\Phi(\rho)=\frac{K}{\rho^2}+\frac{2\psi(\rho\pm c_\varphi)}{\rho},$$

причем $\int\limits^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2\Phi(\rho)}=+\infty$.

Уточним теперь выбор функции $h(d)$ и ее области определения. Пусть δ определено по формуле (3.8) при $\bar\alpha=\max(\alpha, q\delta_0^{-1})$, $q=c_\varphi+m$, $\alpha= \max(\alpha_0, c_\varphi+l+1)$, а функция $h(d)$ определена на отрезке $[0, \delta]$ по формуле (3.9). Из леммы 3.3 тогда следует, что $\delta\in(0, \delta_0)$ и

$$\mathcal{L}(\omega+c)\leqslant 0, \quad x\in D. \quad (4.11)$$

Кроме того, на границе ∂D области D выполняется неравенство $u\leqslant\omega$. Действительно, поскольку $h(0)=0$, то $\omega=\varphi=u$ на $\partial\Omega$. На множестве же

$\{x\in\Omega: d(x)=\delta\}$ справедливы неравенства $u\leqslant m=(m+c_\varphi)-c_\varphi=h(\delta)-c_\varphi\leqslant\omega$. Тогда из леммы 3.1 следует, что $u\leqslant\omega$ в D. Ввиду того что на $\partial\Omega$ $u=\omega$, из последнего неравенства вытекает, очевидно, оценка

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\leqslant\left|\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right| \text{ на } \partial\Omega. \tag{4.12}$$

Поскольку функция $\tilde u\equiv -u$ есть решение уравнения, имеющего точно такую же структуру, что и исходное, из доказанного следует также оценка

$$-\frac{\partial u}{\partial\nu}\leqslant\left|\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right| \text{ на } \partial\Omega. \tag{4.13}$$

Очевидно, что из (4.12) и (4.13) и следует оценка (4.4).

Перейдем теперь к рассмотрению второй части теоремы (т. е. предположим, что выполнены оба условия, (4.1) и (4.5)). Эта часть теоремы была доказана в работе [40]. Для полноты изложения приведем здесь ее доказательство, следуя рассуждениям этой работы. Ввиду условия (4.5) и того, что $|p|\psi^{-1}(|p|)\to\infty$, существует такая константа α_1, зависящая только от $\psi(\rho)$, что

$$\mathscr{E}_1\geqslant 8c_\varphi^2\operatorname{Sp}A \text{ на } \mathfrak{N}_{\infty,\max(l,\alpha_1)}. \tag{4.14}$$

Пусть $h'\geqslant\alpha=c_\varphi+l+\alpha_1+1$. Тогда $|p|>l$ и, следовательно, из (4.8) и (4.14) следует неравенство

$$\mathscr{T}\geqslant {}^1/_2\,\mathscr{E}_1-2c_\varphi^2\operatorname{Sp}A\geqslant{}^1/_4\mathscr{E}_1 \text{ на } D. \tag{4.15}$$

Оценивая $\mathscr{L}(\omega+c)$ сверху выражением (3.4) и учитывая, что при условии (4.5) можно без ограничения общности положить в (4.1) $\delta(\rho)\equiv 0$, получим:

$$\mathscr{L}(\omega+c)\leqslant\mathscr{T}h'\left\{\frac{h''}{h'^3}+\frac{(K+c_\varphi)\operatorname{Sp}A}{\mathscr{T}}+\frac{\psi(|p|)\,\mathscr{E}_1}{h'\mathscr{T}}\right\},\quad x\in D. \tag{4.16}$$

Учитывая (4.5), (4.15), а также неравенства $h'-c_\varphi\leqslant|p|\leqslant h'+c_\varphi$, выведем из (4.16) неравенство

$$\mathscr{L}(\omega+c)\leqslant\mathscr{T}h'\left\{\frac{h''}{h'^3}+\Phi(h')\right\},\quad x\in D, \tag{4.17}$$

где

$$\Phi(\rho)=4(c_\varphi+K+1)\frac{\psi(\rho\pm c_\varphi)}{\rho-c_\varphi}.$$

Очевидно, что $\int\limits^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2\Phi(\rho)}=+\infty$. Поскольку (4.17) совпадает по виду с (4.10), дальнейшее доказательство не отличается от доказательства предыдущего случая. Таким образом, оценка вида (4.4) установлена и в этом случае.

Устраним теперь предположение о том, что условия (4.1) и (4.5) выполнены при всех u. Пусть эти условия выполнены на множестве $\mathfrak{N}_{m,l}$, где $m\geqslant\max\limits_{D_0}|u|$. Рассмотрим новое уравнение вида (1.1) с матрицей главных коэффициентов, определенной по фомуле

$$\hat A(x,u,p)=\begin{cases} A(x,-m,p) & \text{при } u<-m,\\ A(x,u,p) & \text{при } -m\leqslant u\leqslant m,\\ A(x,m,p) & \text{при } u>m,\end{cases} \tag{4.18}$$

$y_0 \in \partial\Omega$. Предположим, что Γ принадлежит классу C^3. Пусть существует такое число $\delta_0 > 0$, что для каждой точки x из области

$$D_\Gamma^0 \equiv \{x \in \Omega : x = y + \tau\nu(y), \quad y \in \Gamma, \quad \tau \in (0, \delta_0)\} \tag{5.1}$$

найдется единственная точка $y = y(x) \in \Gamma$, такая, что $\operatorname{dist}(x, \Gamma) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(x, y(x))$. Точно так же, как в случае $\Gamma = \partial\Omega$, доказывается, что функция $d = d(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$, определенная на D_Γ^0, принадлежит классу C^2, если δ_0 достаточно мало (см. [40]).

Пусть $K_r(y_0)$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке y_0. Обозначим

$$\Omega_r = K_r(y_0) \cap \Omega, \quad S_r = K_r(y_0) \cap \Gamma, \tag{5.2}$$

причем число $r > 0$ предполагается столь малым, что $K_r(y_0) \cap \Gamma = K_r(y_0) \cap \partial\Omega$ и $\Omega_r \subset D_\Gamma^0$.

Предположим также, что для уравнения (1.1) выполнено условие (1.2).

Теорема 5.1. *Пусть на множестве* $\mathfrak{N}_{\Gamma, m, l} \equiv \overline{D_\Gamma^0} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$ *функции* a^{ij}, $\frac{\partial a^{ij}}{\partial p_k}$, a, $\frac{\partial a}{\partial p_k}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, *непрерывны и удовлетворяют неравенству* (4.1), *где* $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\psi(\rho)$, $\delta(\rho)$ — *такие же, как в теореме* 4.1. *Пусть функция u удовлетворяет условиям:*

$$\begin{gathered} u \in C^2(\Omega_r) \cap C^1(\bar{\Omega}_r), \quad |u| \leqslant m \ \text{ в } \ \Omega_r, \\ \mathcal{L}u \equiv a^{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} - a(x, u, \nabla u) = 0 \ \text{ в } \ \Omega_r, \\ u = \varphi \ \text{ на } \ S_r, \quad \varphi \in C^3(\Omega_r). \end{gathered} \tag{5.3}$$

Предположим также, что выполнены условия:

Ω_r содержится в некотором шаре $K_R(x_0)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке x_0, лежащей на оси, определяемой вектором ν внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y_0, причем $K_R(x_0)$ касается $\partial\Omega$ в точке y_0, (5.4)

и

$$k = \inf_{i=1 \ldots, n-1, \ y \in \Gamma} k_i(y) > 0, \tag{5.5}$$

*где $k_1(y), \ldots, k_{n-1}(y)$ — главные кривизны поверхности $\partial\Omega$ в точке $y \in \Gamma$.**) *Тогда*

$$\left| \frac{\partial u(y_0)}{\partial \nu} \right| \leqslant M_0, \tag{5.6}$$

где M_0 зависит лишь от m, l, $\|\varphi\|_{C^2(\Omega_r)}$, $K \equiv \sup_{y \in \Gamma, \ i=1, \ldots, n-1} k_i(y)$, k^{-1}, Rr^{-2}, поверхности Γ, а также от функций $\psi(\rho)$ и $\delta(\rho)$ из условия (4.1). *Если дополнительно предполагается, что на множестве $\mathfrak{N}_{\Gamma, m, l}$ выполнено условие* (4.5), *то оценка* (5.6) *остается справедливой, если вместо условий* (5.4), (5.5) *выполнено условие:*

*существует открытый шар $K_R(x_*)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке x_*, не имеющий общих точек с Ω_r и содержащий точку y_0 на своей границе.***) (5.7)

В этом случае константа M_0 в (5.6) *зависит лишь от m, l, $\|\varphi\|_{C^2(\Omega_r)}$, K, R, r^{-1}, Γ и от функции $\psi(\rho)$.*

*) Из условия (5.5) следует, как нетрудно убедиться, справедливость условия (5.4). Однако для доказательства теоремы удобно условие (5.4) выписать отдельно.

**) Очевидно, что условие (5.7) является более общим по сравнению с условием (5.4) (т. е. из условия (5.4) следует выполнимость условия (5.7)).

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что неравенства (4.1) и (4.5) справедливы на множестве $\mathfrak{N}_{\Gamma,\infty,l}$ (т. е. при любых значениях переменной u; см. конец доказательства теоремы 4.1). Обозначим $D_\Gamma \equiv \{x \in D_\Gamma^0\colon\ d(x) < \delta\}$, где $0 < \delta < \delta_0$, а δ_0 — число из условия (5.1). Рассмотрим на D_Γ функцию

$$\omega(x) = f(x) + h(d(x)), \quad f(x) = \varphi(x) + \mu\rho(x), \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \qquad (5.8)$$

где $\rho(x)$ определена на D_Γ по формуле $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, P_{y_0})$, причем через P_{y_0} обозначена касательная плоскость к $\partial\Omega$ в точке y_0, $h(d) \in C^2((0, \delta)) \cap \cap C([0, \delta])$, $d(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$. Выбор числа $\delta \in (0, \delta_0)$ и функции $h(d)$, $d \in [0, \delta]$, а также константы $\mu > 0$ будет сделан ниже. Поскольку лемма 3.2 носит локальный характер, ее результатами можно воспользоваться и в случае локальных барьеров вида (5.8) (другими словами, оценки $\mathscr{L}(\omega + c)$ через выражения (3.5) или (3.4) справедливы при условиях теоремы 5.1 на множестве D_Γ). Докажем сначала первую часть теоремы, предполагая, что условие (4.5) отсутствует. Ввиду леммы 3.2 при любой константе $c \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant \mathscr{F}\,\frac{h'' + Kh'}{h'^2} - k\,\mathrm{Sp}\,Ah' + a^{ij} f_{x_i x_j} - a, \quad x \in D_\Gamma, \qquad (5.9)$$

где использованы обозначения, принятые в лемме 3.2. Ввиду линейности функции $\rho(x)$, на D_Γ справедливо равенство $a^{ij}\rho_{x_i x_j} = 0$, и потому (5.9) по виду совпадает с (4.6), хотя аргументы функций a^{ij}, a, $\mathscr{F}$ в (5.9) и (4.6) различны, поскольку $f(x) = \varphi(x) + \mu\rho(x)$.

Пусть выполнено условие $h'(d) \geqslant c_\varphi + \mu + l + 1$ на $[0, \delta]$, где $c_\varphi \equiv \equiv \|\varphi\|_{C^2(D_\Gamma)}$. Из этого условия вытекает неравенство $h'(d) \geqslant \max\limits_{D_\Gamma} |\nabla f| + + l + 1$ на $[0, \delta]$, поскольку $|\nabla f| \leqslant |\nabla\varphi| + \mu \leqslant c_\varphi + \mu$ на D_Γ, ввиду того что $|\nabla\rho| = 1$. Тогда для $p \equiv |\nabla\omega(x)|$ выполнено условие $|p| > l$. Применяя далее точно такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 4.1, с заменой в них c_φ на $c_\varphi + \mu$, устанавливаем неравенство

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant \mathscr{F} h' \left\{\frac{h''}{h'^3} + \Phi(h')\right\}, \quad x \in D_\Gamma, \qquad (5.10)$$

где

$$\Phi(\rho) = \frac{K}{\rho^2} + \frac{2\psi\,(\rho \pm c_\varphi \pm \mu)}{\rho}$$

$\left(\text{очевидно, что } \int\limits^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^2 \Phi(\rho)} = +\infty\right)$.

Уточним теперь выбор функции $h(d)$ и числа $\delta \in (0, \delta_0)$. Пусть δ определено по формуле (3.8) при $\bar{\alpha} = \max(\alpha, q\delta_0^{-1})$, $q = c_\varphi + m$, $\alpha = = \max(\alpha_0, c_\varphi + \mu + l + 1)$, где α_0 зависит только от k, c_φ, μ и функций $\psi(\rho)$ и $\delta(\rho)$ и определяется так, чтобы вторые фигурные скобки в (4.9) были отрицательными. Пусть функция $h(d)$ определена на отрезке $[0, \delta]$ по формуле (3.9) так, что $h(0) = 0$, $h(\delta) = c_\varphi + m$, $\alpha \leqslant h' \leqslant \beta$ на $[0, \delta]$, где β определяется из формулы (3.7) при указанных выше значениях $\bar{\alpha}$ и q. Тогда из леммы 3.3 следует, что

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant 0, \quad x \in D_\Gamma \cap \Omega_r. \qquad (5.11)$$

Докажем, что при подходящем выборе константы $\mu > 0$ на границе $\partial(D_\Gamma \cap \Omega_r)$ области $D_\Gamma \cap \Omega_r$ справедливо неравенство $u \leqslant \omega$. Очевидно, что

$\partial(D_\Gamma\cap\Omega_r)=S_r\cup S_r'\cup S_r''$, где $S_r'=\Omega_r\cap\{x\in D_\Gamma: d(x)=\delta\}$, $S_r''=\partial(D_\Gamma\cap\cap\Omega_r)\setminus(S_r\cup S_r')$, причем множество S_r'' представляет собой ту часть граничной поверхности шара K_r, которая вырезается поверхностями Γ и $\{x\in D_\Gamma: d(x)=\delta\}$. Действительно, учитывая вид функции ω и свойства функций $h(d)$ и $\rho(x)$, легко убеждаемся, что $u\leqslant\omega$ на $S_r\cup S_r'$. Для доказательства указанного неравенства на S_r'' заметим, что из геометрических соображений легко вытекает неравенство

$$\inf_{\partial\Omega_r\setminus S_r}\rho(x)\geqslant\frac{r^2}{2R}, \tag{5.12}$$

где R — число из условия (5.4), и выберем $\mu=(c_\varphi+m)(2R/r^2)$. Тогда на S_r'' справедливы неравенства

$$\omega(x)\geqslant-\max_{\Omega_r}|\varphi|+(c_\varphi+m)\frac{2R}{r^2}\inf_{S_r''}\rho(x)\geqslant-c_\varphi+$$
$$+(c_\varphi+m)\frac{2R}{r^2}\inf_{\partial\Omega_r\setminus S_r}\rho(x)\geqslant m\geqslant u(x).$$

Итак,

$$\mathscr{L}(\omega+c)\leqslant 0 \text{ в } D_\Gamma\cap\Omega_r,\quad u\leqslant\omega \text{ на } \partial(D_\Gamma\cap\Omega_r). \tag{5.13}$$

Применяя лемму 3.1, выведем из (5.13), что $u\leqslant\omega$ во всей области $\Omega_r\cap D_\Gamma$. Учитывая, что $u(y_0)=\omega(y_0)=\varphi(y_0)$, получим оценку

$$\frac{\partial u(y_0)}{\partial\nu}\leqslant\left|\frac{\partial\omega(y_0)}{\partial\nu}\right|\leqslant\beta+c_\varphi+\mu.$$

Аналогичным образом оценивается сверху и $-\frac{\partial u(y_0)}{\partial\nu}$, так что $\left|\frac{\partial u(y_0)}{\partial\nu}\right|\leqslant\leqslant\beta+c_\varphi+\mu$, откуда и следует первая часть теоремы.

Докажем теперь вторую ее часть. Доказательство оценки (5.6) распадается в этом случае на два этапа. На первом этапе мы установим оценку (5.6), заменяя условие (5.7) на более сильное условие (5.4). На втором этапе предположение об указанной выше замене условий будет устранено. Итак, предположим сначала, что выполнены условия (4.1), (4.5), (5.3) и (5.4). Ввиду условия (4.5) будем считать, не ограничивая общности, что в условии (4.1) $\delta(\rho)\equiv 0$. Рассмотрим снова на D_Γ^δ функцию $\omega(x)$, определенную по формуле (5.8). Используя на основании леммы 3.2 оценку $\mathscr{L}(\omega+c)$ сверху через выражение вида (3.4), получим, учитывая также, что $a^{ij}\rho_{x_ix_j}=0$ на D_Γ, неравенство

$$\mathscr{L}(\omega+c)\leqslant\mathscr{T}\frac{h''}{h'^2}+K\operatorname{Sp}Ah'+a^{ij}\varphi_{x_ix_j}-a,\quad x\in D_\Gamma. \tag{5.14}$$

Предполагая, что $h'\geqslant\alpha=c_\varphi+\mu+l+\alpha_1+1$, где $\alpha_1>0$ определяется условием (4.14) и зависит только от функции $\psi(\rho)$, точно так же, как при доказательстве второй части теоремы 4.1, устанавливаем, что

$$\mathscr{L}(\omega+c)\leqslant\mathscr{T}h'\left\{\frac{h''}{h'^3}+\Phi(h')\right\},\quad x\in D_\Gamma, \tag{5.15}$$

где

$$\Phi(\rho)=4(c_\varphi+\mu+K+1)\frac{\psi(\rho\pm c_\varphi\pm\mu)}{\rho-c_\varphi-\mu}$$

удовлетворяет условию $\int^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2\varphi(\rho)}=+\infty$.

Определим число δ и функцию $h(d)$ по тем же формулам, что и при доказательстве первой части теоремы. При этом оказываются выполненными условия: $\mathscr{L}(\omega+c)\leqslant 0$ в $D_\Gamma\cap\Omega_r$, $u\leqslant\omega$ на $S_r\cup S'_r$. Выбирая μ точно так же, как при доказательстве первой части теоремы, и учитывая неравенство (5.12), устанавливаем, что $u\leqslant\omega$ на $\partial(D_\Gamma\cap\Omega_r)$. Из доказанного, точно так же, как и выше, выводится оценка (5.6). Покажем, наконец, каким образом можно устранить предположение о замене условия (5.7) условием (5.4). Пусть выполнены условия (4.1), (4.5), (5.7). Произведем такую замену переменных,

$$\tilde{x}=\tilde{x}(x), \tag{5.16}$$

которая осуществляет преобразование инверсии относительно сферы $\partial K_R(x_*)$ (см. условие (5.7)). При таком преобразовании область Ω_r перейдет в область $\tilde{\Omega}_r$, причем $\tilde{\Omega}_r$ будет содержаться в шаре $K_R(x_*)$ радиуса R с центром в точке x_*, лежащей на оси, определяемой вектором внутренней (относительно новой области $\tilde{\Omega}_r$) нормали ν поверхности $\partial\Omega$ в точке $\tilde{y}_0=y_0$ (очевидно, что точка y_0 является неподвижной точкой преобразования (5.16)). Таким образом, для новой области $\tilde{\Omega}_r$ выполнено условие вида (5.4).

Очевидно, что определенное выше преобразование (5.16) осуществляет диффеоморфизм класса C^∞ между Ω_r и $\tilde{\Omega}_r$. В частности, функция $\tilde{x}=\tilde{x}(x)$, $x\in\Omega_r$, и обратная функция $x=x(\tilde{x})$, $\tilde{x}\in\tilde{\Omega}$, будут ограничены вместе со своими частными производными первого и второго порядков некоторой постоянной, зависящей лишь от R и диаметра области Ω_r. Уравнение (1.1) преобразуется при этом в уравнение вида

$$\tilde{a}^{kl}(\tilde{x},\ u,\ \tilde{\nabla}u)\,u_{\tilde{x}_k\tilde{x}_l}-\tilde{a}(\tilde{x},\ u,\ \tilde{\nabla}u)=0, \tag{5.17}$$

где $\tilde{a}^{kl}=a^{ij}\dfrac{\partial\tilde{x}_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial\tilde{x}_l}{\partial x_j}$, $\tilde{a}=a-a^{ij}\dfrac{\partial^2\tilde{x}_k}{\partial x_i\partial x_j}u_{\tilde{x}_k}$. Обозначая $\nabla u(x)=p$, $\tilde{\nabla}u(\tilde{x})=\tilde{p}$, замечая, что

$$\begin{gathered}c_1|p|\leqslant|\tilde{p}|\leqslant c_2|p|,\quad c_3\operatorname{Sp}A\leqslant\operatorname{Sp}\tilde{A}\leqslant c_4\operatorname{Sp}A,\\ \mathscr{E}_1\equiv Ap\cdot p=\tilde{A}\tilde{p}\cdot\tilde{p}\equiv\tilde{\mathscr{E}}_1,\end{gathered} \tag{5.18}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые положительные постоянные, $A\equiv\|a^{ij}(x,\ u,\ p)\|$, $\tilde{A}\equiv\|\tilde{a}^{ij}(\tilde{x},\ u,\ \tilde{p})\|$, и учитывая

$$\tilde{A}=CAC^*,\quad C=\left\|\frac{\partial\tilde{x}_k}{\partial x_i}\right\|, \tag{5.19}$$

выведем из условий (4.1), (4.5) неравенства

$$\tilde{\varphi}(|\tilde{p}|)\,\tilde{\mathscr{E}}_1\geqslant c_5\operatorname{Sp}\tilde{A}\,|\tilde{p}|,\quad c_5=\mathrm{const}>0, \tag{5.20}$$

и

$$|\tilde{a}(\tilde{x},\ u,\ \tilde{p})|\leqslant c_6\tilde{\varphi}(|\tilde{p}|)\,\tilde{\mathscr{E}}_1,\quad c_6=\mathrm{const}>0, \tag{5.21}$$

где $\tilde{\varphi}(\rho)=c_7\psi(c_8\rho)$, c_7, $c_8=\mathrm{const}>0$, удовлетворяет, очевидно, условию $\displaystyle\int^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho\tilde{\varphi}(\rho)}=+\infty$. Таким образом, для уравнения (5.17) и области $\tilde{\Omega}_r$ выполнены все условия, для которых (при доказательстве второй части теоремы) была установлена оценка вида (5.6), т. е.

$$\left|\frac{\partial\tilde{u}(y_0)}{\partial\nu}\right|\leqslant M_0. \tag{5.22}$$

Возвращаясь к старым переменным, выведем из (5.22) оценку (5.6). Теорема 5.1 доказана полностью.

В дальнейшем мы будем использовать следующий вариант второй части теоремы 5.1.

Теорема 5.1′. *Пусть функции* a^{ij}, $\frac{\partial a^{ij}}{\partial p_k}$, a, $\frac{\partial a}{\partial p_k}$, $i, j, k=1, \ldots, n$, *непрерывны на множестве* $\mathfrak{N}_{\Gamma, m, l}$, *и пусть при всех* $x \in D_\Gamma^0$, $u \in [-m, m]$ *и любых числах* μ *и* t, *таких, что* $\mu > 0$, $t \geqslant \mu + l$, *где* $l = \text{const} > 0$, *выполнены неравенства*

$$|a(x, u, \mu\nabla\rho + t\nu)| \leqslant \psi(|\mu\nabla\rho + t\nu|)\,\mathscr{E}_1(x, u, \mu\nabla\rho + t\nu) \tag{5.23}$$

и

$$\psi(|\mu\nabla\rho + t\nu|)\,\mathscr{E}_1(x, u, \mu\nabla\rho + t\nu) \geqslant |\mu\nabla\rho + t\nu|\,\mathrm{Sp}\,A(x, u, \mu\nabla\rho + t\nu), \tag{5.24}$$

где $A \equiv \|a^{ij}\|$, $\rho = \rho(x) = \operatorname{dist}(x, P_{y_0})$, P_{y_0} — *касательная плоскость к* $\partial\Omega$ *в точке* y_0, $\nu = \nu(y(x))$ — *единичный вектор внутренней нормали к* $\partial\Omega$ *в точке* $y(x)$, *ближайшей на* Γ *к* $x \in D_\Gamma^0$, *а функции* $\mathscr{E}_1$ *и* ψ — *такие же, как в теореме* 5.1. *Пусть функция и удовлетворяет условию* (5.3) *в случае* $\varphi \equiv 0$. *Предположим также, что выполнено условие* (5.4). *Тогда справедлива оценка* (5.6), *в которой константа* M_0 *зависит лишь от* m, l, K, R, r^{-1}, δ_0 *и от функции* ψ.

Доказательство. Справедливость теоремы 5.1′ вытекает непосредственно из доказательства второй части теоремы 5.1. Аналогичную модификацию формулировки можно было бы привести и для первой ее части. Однако мы ее опускаем, поскольку она нигде не используется далее.

Замечание 5.1. Если при условиях теоремы 5.1 [5.1′] функция φ тождественно равна 0 в $\bar{\Omega}$, то оценка (4.4) [(5.6)] имеет вид

$$\left|\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\right| \leqslant \beta, \quad \left[\left|\frac{\partial u(y_0)}{\partial \nu}\right| \leqslant \beta + \mu\right], \tag{5.25}$$

где β определяется по формуле (3.7) при $\bar{\alpha} = \max(\alpha, m\delta_0^{-1})$, $\alpha = \max(\alpha_0, l+1)$ [при $\bar{\alpha} = \max(\alpha, m\delta_0^{-1})$, $\alpha = \max(\alpha_0, \mu + l + 1)$, $\mu = m2R/r^2$], причем α_0 зависит лишь от функций $\psi(\rho)$, $\delta(\rho)$ и от границы $\partial\Omega$.

§ 6. Оценки $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ для уравнений, структура которых описывается в терминах мажоранты $\mathscr{E}_1$

Пусть функции $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$, образующие уравнение (1.1), принадлежат классу $C^1(\mathfrak{M}_{\Omega, m, L})$, где $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L} \equiv \bar{\Omega} \times \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > L\}$, $m = \text{const} > 0$, $L = \text{const} > 0$. Предположим также, что на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$

$$a^{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{6.1}$$

Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — произвольный фиксированный вектор с $|\tau| = 1$. Обозначим

$$A^\tau \equiv a^{ij}(x, u, p)\,\tau_i\tau_j \equiv A\tau \cdot \tau. \tag{6.2}$$

Введем еще следующие обозначения для произвольной функции $\Phi \equiv \equiv \Phi(x, u, p)$:

$$\delta\Phi \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{|p|}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + |p|\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad p\Phi_p \equiv \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}. \tag{6.3}$$

Теорема 6.1. *Предположим, что на множестве* $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ *при любом* τ, $|\tau|=1$, *выполнены неравенства*

$$
\begin{gathered}
|pA_p^\tau| \leqslant \sqrt{\mu_1 A^\tau \mathcal{E}_1 \omega(|p|)}\, |p|^{-1}, \quad |\delta A^\tau| \leqslant \sqrt{\frac{\sigma_1 A^\tau \mathcal{E}_1}{\omega(|p|)}}, \\
|a - pa_p| \leqslant \mu_2 \mathcal{E}_1, \quad \delta a \geqslant -\sigma_2 \mathcal{E}_1 |p| \omega^{-1}(|p|), \quad \mathcal{E}_1 > 0,
\end{gathered}
\tag{6.4}
$$

где μ_1, μ_2 — *произвольные неотрицательные постоянные,* σ_1, σ_2 — *неотрицательные постоянные, достаточно малые в зависимости от* n, μ_1, μ_2, m, *) *и где* $\omega(\rho) > 0$, $0 \leqslant \rho < +\infty$, — *произвольная неубывающая непрерывная функция. Тогда для любого решения* $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *уравнения* (1.1), *удовлетворяющего условию*

$$
\max_{\Omega} |u| \leqslant m, \tag{6.5}
$$

величина $\max\limits_{\bar{\Omega}} |\nabla u|$ *оценивается лишь через* m, $M_1 \equiv \max\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|$, n, L, μ_1, μ_2.

Доказательство. Применяя к уравнению (1.1) оператор $u_{x_k} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ и обозначая $v = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{x_k}^2$, получим тождество

$$
\frac{1}{2} a^{ij} v_{ij} = a^{ij} u_{ki} u_{kj} + \frac{1}{2} \left[a_{p_l} - a^{ij}_{p_l} u_{ij} \right] v_l + \sqrt{v}\, (\delta a - \delta a^{ij} u_{ij}), \quad x \in \Omega, \tag{6.6}
$$

причем в (6.6) и далее мы используем сокращенные обозначения производных: $v_l \equiv v_{x_l}$, $u_{ij} \equiv u_{x_i x_j}$ и т. п. Умножим обе части (6.6) на $f(v(x))$, где $f(v) > 0$, $f'(v) \geqslant 0$ при $v > 0$, и введем функцию

$$
w = \int\limits_0^v f(t)\, dt. \tag{6.7}
$$

Учитывая, что $w_i = f v_i$, $w_{ij} = f v_{ij} + f' v_i v_j$, выведем из (6.7) тождество

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2} a^{ij} w_{ij} = \frac{1}{2} f' a^{ij} v_i v_j + f a^{ij} u_{ki} u_{kj} + \frac{1}{2} \left[a_{p_l} - a^{ij}_{p_l} u_{ij} \right] w_l + \\
+ f \sqrt{v}\, (\delta a - \delta a^{ij} u_{ij}), \quad x \in \Omega.
\end{gathered}
\tag{6.8}
$$

Пусть $z = z(u)$ — некоторая положительная дважды дифференцируемая функция, заданная на $[-m, m]$. Рассмотрим функцию $\bar{w}$, определяемую формулой

$$
w = z(u)\, \bar{w}. \tag{6.9}
$$

Учитывая, что $w_i = z' u_i \bar{w} + z \bar{w}_i$, $w_{ij} = z'' u_i u_j \bar{w} + z' u_{ij} \bar{w} + z' u_i \bar{w}_j + z' u_j \bar{w}_i + z \bar{w}_{ij}$, выведем из (6.8) тождество

$$
\begin{gathered}
z a^{ij} \bar{w}_{ij} + \sum_{k=1}^{n} b^k \bar{w}_k = -z'' \mathcal{E}_1 \bar{w} + \frac{f'}{f^2} z'^2 \mathcal{E}_1 \bar{w}^2 + 2 f a^{ij} u_{ki} u_{kj} + z' (p a_p - a)\, \bar{w} - \\
- z' (a^{ij})_{p_l} u_l u_{ij} \bar{w} + 2 f \sqrt{v}\, (\delta a - \delta a^{ij} u_{ij}),
\end{gathered}
\tag{6.10}
$$

где $\mathcal{E}_1 \equiv a^{ij}(x, u, \nabla u)\, u_{x_i} u_{x_j}$, а вид функций b^k безразличен для дальнейших рассмотрений. При выводе (6.10) было учтено также, что $a^{ij} u_{ij} = a$ в Ω. Далее тождество (6.10) будет использоваться только на множестве $\Omega_L \equiv \{x \in \Omega : |\nabla u| > L\}$.

---

*) Эта зависимость будет уточнена при доказательстве теоремы.

Рассмотрим матрицу $\|u_{ij}\|$ в фиксированной точке множества Ω_L. Пусть $T \equiv \|t_{ij}\|$ — ортогональная матрица, приводящая матрицу $\|u_{ij}\|$ к диагональной матрице $\|\tilde{u}_{ij}\|$, где $\tilde{u}_{ij}=0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\|u_{ij}\| = T\|\tilde{u}_{ij}\|T^*. \tag{6.11}$$

Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу

$$\tilde{A} = T^* A T. \tag{6.12}$$

Докажем, что справедливы неравенства

$$\begin{gathered} |z'(a^{ij})_{p_l} u_l u_{ij} \bar{w}| \leqslant \frac{1}{2} f a^{ij} u_{ki} u_{kj} + c_0 \frac{z'^2}{f} \frac{\omega}{v} \mathcal{E}_1 \bar{w}^2, \\ |2\sqrt{v}\, f \delta a^{ij} u_{ij}| \leqslant \frac{1}{2} f a^{ij} u_{ki} u_{kj} + 2\sigma_1 n \frac{fv}{\omega} \mathcal{E}_1, \end{gathered} \tag{6.13}$$

где $c_0 = \mu_1 n/2$, а μ_1, σ_1 — константы из условия (6.4). Действительно, справедливы равенства

$$\begin{gathered} z'(a^{ij})_{p_l} u_l u_{ij} \bar{w} = z'(\tilde{a}^{ii})_{p_l} u_l \tilde{u}_{ii} \bar{w} = z'\left(A^{\tau_i}\right)_{p_l} u_l \tilde{u}_{ii} \bar{w}, \\ 2\sqrt{v}\, f \delta a^{ij} u_{ij} = 2\sqrt{v}\, f \delta \tilde{a}^{ii} \tilde{u}_{ii} = 2\sqrt{v}\, f \delta A^{\tau_i} \tilde{u}_{ii}, \end{gathered} \tag{6.14}$$

где $p_l = u_l$, τ_i есть i-й столбец ортогональной матрицы T (так что $|\tau_i| = 1$), а $\tilde{a}^{ii} = t^*_{ik} a^{kl} t_{li} = A\tau^i \cdot \tau^i \equiv A^{\tau_i}$. Если при каком-нибудь значении $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\tilde{a}^{ii} = 0$, то из условия (6.4) следует, что для этого номера i и

$$(\tilde{a}^{ii})_p\, p = 0, \quad \delta \tilde{a}^{ii} = 0. \tag{6.15}$$

Если же $\tilde{a}^{ii} \neq 0$, то, применяя неравенство Коши и учитывая условие (6.4), можно соответствующие слагаемые в суммах (6.14) оценить следующим образом:

$$\begin{gathered} |z'(\tilde{a}^{ii})_{p_l} u_l \tilde{u}_{ii} \bar{w}| \leqslant \frac{1}{2} f \tilde{a}^{ii} \tilde{u}^2_{ii} + \frac{1}{2} \frac{z'^2}{f} \mu_1 \frac{\omega}{v} \mathcal{E}_1 \bar{w}^2, \\ |2f\sqrt{v}\, \delta \tilde{a}^{ii} \tilde{u}_{ii}| \leqslant \frac{1}{2} f \tilde{a}^{ii} \tilde{u}^2_{ii} + 2\sigma_1 f \frac{v}{\omega} \mathcal{E}_1. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Заметим, что в (6.16) не предполагается суммирования по индексу i. Неравенства (6.16) установлены только для тех индексов i, для которых $\tilde{a}^{ii} \neq 0$ в рассматриваемой точке $x \in \Omega_L$. Но ввиду (6.15) неравенства (6.16) тривиально справедливы для тех индексов i, для которых $\tilde{a}^{ii} = 0$. Поэтому, суммируя (6.16) по всем $i = 1, \ldots, n$ и учитывая, что $\tilde{a}^{ii} \tilde{u}^2_{ii} = a^{ij} u_{ki} u_{kj}$, получим неравенства (6.13).

Будем считать, что функция f имеет вид $f(v) = \exp\left\{2c_0 \int\limits_1^v \frac{\omega(t)}{t}\, dt\right\}$ при $v \geqslant 1$. Такая функция удовлетворяет условиям:

$$\frac{f'}{f} = 2c_0 \frac{\omega}{v}, \quad f(v) \geqslant 1 \text{ при } v \geqslant 1. \tag{6.17}$$

Тогда из (6.10), (6.13) и (6.17) вытекает неравенство

$$\begin{gathered} z a^{ij} \bar{w}_{ij} + \sum_{k=1}^{n} b^k w_k \geqslant \left(-z'' + c_0 \frac{z'^2}{z} \frac{w}{vf} \omega\right) \mathcal{E}_1 \bar{w} + f a^{ij} u_{ki} u_{kj} + \\ + z'(p a_p - a)\bar{w} + 2f\sqrt{v}\, \delta a - 2n\sigma_1 \frac{fv}{\omega} \mathcal{E}_1, \quad x \in \Omega_L. \end{gathered} \tag{6.18}$$

Предполагая, без ограничения общности, что $c_0 \geqslant 1$, $\omega(\rho) \geqslant 1$, $0 \leqslant \rho < +\infty$, убедимся, что справедливо неравенство

$$f \leqslant 8c_0 \frac{\omega}{v} w \quad \text{при } v \geqslant L^2. \tag{6.19}$$

Действительно, поскольку функция ω, которую можно считать функцией от v, предполагается неубывающей, то

$$f(v) - 1 = \int_1^v f'(t)\,dt = 2c_0 \int_1^v \frac{\omega(t)}{t} f(t)\,dt \leqslant 2c_0 \frac{\omega(v)}{v} F(v), \tag{6.20}$$

где $F(v) \equiv v \int_1^v \frac{f(t)}{t}\,dt$. Функция $\frac{f(t)}{t}$, $t \geqslant 1$, возрастает, поскольку ввиду (6.17)

$$\left(\frac{f(t)}{t}\right)' = \frac{f'(t)\,t - f(t)}{t^2} = \frac{f(t)}{t^2}\left(\frac{f'(t)\,t}{f(t)} - 1\right) = \\ = \frac{f(t)}{t^2}(2c_0\omega(t) - 1) \geqslant \frac{f(t)}{t^2} > 0 \tag{6.21}$$

при $t \geqslant 1$. Поэтому

$$F(v) = \int_1^v F'(t)\,dt = \int_1^v f(t)\,dt + \int_1^v dt \int_1^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau \leqslant \int_1^t f(t)\,dt + \\ + \int_1^v \frac{f(t)}{t} \int_1^t d\tau \leqslant 2w. \tag{6.22}$$

Очевидно, что из (6.20) и (6.22) следует (6.19). Учитывая теперь условие (6.4) в отношении к $pa_p - a$ и δa, а также неравенство (6.19), выведем из (6.18) неравенство

$$za^{ij}\bar{w}_{ij} + \sum_{k=1}^n b^k \bar{w}_k \geqslant \left[-z'' + \frac{1}{8}\frac{z'^2}{z} - \mu_2|z'| - 16c_0(n\sigma_1 + \sigma_2)z\right]\mathscr{E}_1\bar{w}. \tag{6.23}$$

Подберем теперь какую-нибудь функцию $z \in C^2([-m, m])$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} -z'' + \frac{1}{8}\frac{z'^2}{z} - \mu_2|z'| - 16c_0(n\sigma_1 + \sigma_2)z > 0 \quad \text{на } [-m, m], \\ z(u) \geqslant c_1 = \mathrm{const} > 0 \quad \text{на } [-m, m]. \end{gathered} \tag{6.24}$$

Для доказательства существования такой функции приходится требовать, чтобы константы σ_1 и σ_2 были достаточно малы в зависимости от m, μ_2 и c_0. Рассмотрим, например, функцию $z(u) = 1 + e^{\alpha m} - e^{\alpha u}$. Учитывая, что $z' = -\alpha e^{\alpha u}$, $z'' = -\alpha^2 e^{\alpha u}$, имеем: $-z'' - \mu_2|z'| - 16c_0(n\sigma_1 + \sigma_2)z \geqslant \geqslant \alpha(\alpha - \mu_2)e^{\alpha u} - 16c_0(n\sigma_1 + \sigma_2)(1 + e^{\alpha m})$. Тогда очевидно, что условие (6.24) будет заведомо выполнено при указанном выборе функции z, если считать, что $\alpha = \mu_2 + 1$, и потребовать, чтобы

$$(\mu_2 + 1)e^{-(\mu_2+1)m} > 16c_0(n\sigma_1 + \sigma_2)(1 + e^{(\mu_2+1)m}). \tag{6.25}$$

Условие (6.25) есть условие малости величин σ_1 и σ_2 в (6.4).

Ввиду (6.24) и предположения положительности $\mathscr{E}_1$ на $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ из (6.23) следует, что функция $\bar{w}$ не может достигать максимума на множестве Ω_L. Поэтому

$$\max_{\Omega} \bar{w} \leqslant \max\left\{\max_{\partial\Omega} \frac{w}{z}, \max_{\Omega\setminus\Omega_L} \frac{w}{z}\right\}. \tag{6.26}$$

Учитывая, что $w = \int\limits_0^v f(t)\,dt$, выведем из (6.26) оценку

$$\max_{\Omega} w \leqslant \frac{\max z}{\min z} \max\left\{\int\limits_0^{M_1^2} f(t)\,dt, \int\limits_0^{L^2} f(t)\,dt\right\}, \tag{6.27}$$

где $M_1 = \max\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|$. Из (6.27) с учетом (6.7), вида функции z и неубывания функции f легко следует оценка

$$\int\limits_0^{M^2} f(t)\,dt \leqslant \max\left\{\int\limits_0^{(aM_1)^2} f(t)\,dt, \int\limits_0^{(aL)^2} f(t)\,dt\right\}, \tag{6.28}$$

где обозначено: $M \equiv \max\limits_{\Omega} |\nabla u|$, $a = (1 + e^{(\mu_2+1)m})^{1/2}$. Тогда

$$M \leqslant a^{1/2} \max\{M_1, L\}. \tag{6.29}$$

Теорема 6.1 доказана.

Замечание 6.1. Очевидно, что в условии (6.4) постоянные σ_1 и σ_2, удовлетворяющие условию (6.25), можно заменить на функции $\sigma_1(|p|)$ и $\sigma_2(|p|)$, предполагая, что $\sigma_1(\rho) \to 0$, $\sigma_2(\rho) \to 0$ при $\rho \to +\infty$. Тогда, считая параметр L достаточно большим, сведем этот случай к рассмотренному в теореме 6.1.

Замечание 6.2. Отметим, что условия теоремы 6.1 допускают вырождение матрицы $A \equiv \|a^{ij}(x, u, p)\|$, характеризуемое условием $\mathscr{E}_1(x, u, p) > 0$ на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$. Выделим особо важный частный случай теоремы 6.1, получающийся из нее предположением, что $\omega(\rho) = \mathrm{const} \geqslant 1$.

Теорема 6.1′. *Пусть на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ выполнены неравенства*

$$\begin{gathered}|pA_p^\tau| \leqslant \sqrt{\mu_1 A^\tau \mathscr{E}_1}\,|p|^{-1}, \quad |\delta A^\tau| \leqslant \sqrt{\sigma_1 A^\tau \mathscr{E}_1}, \quad |pa_p - a| \leqslant \mu_2 \mathscr{E}_1, \\ \delta a \geqslant -\sigma_2 \mathscr{E}_1 |p|, \quad \mathscr{E}_1 > 0,\end{gathered} \tag{6.30}$$

где $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, *причем выполнено условие* (6.25), *где* $c_0 = \mu_1 n/2$ *Тогда для любого решения* $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, *удовлетворяющего неравенству* (6.5), *справедлива оценка вида* (6.29), *где* $M_1 = \max\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|$, $a = (1 + \exp((\mu_2 + 1)m))^{1/2}$.

Теорема 6.1′ содержит как частный случай известный результат Ладыженской и Уральцевой об оценке $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ через $\max\limits_{\Omega} |u|$ и $\max\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|$ для решений квазилинейных равномерно эллиптических уравнений [83]. Условия соответствующей теоремы Ладыженской и Уральцевой можно записать в виде

$$\begin{gathered}\Lambda\lambda^{-1} \leqslant c, \quad |pa_p^{ij}| \leqslant \tilde{\mu}_1 \lambda, \quad |\delta a^{ij}| \leqslant \tilde{\sigma}_1 \lambda |p|, \quad i, j = 1, \ldots, n, \\ |pa_p - p| \leqslant \tilde{\mu}_2 \lambda |p|^2, \quad \delta a \geqslant -\tilde{\sigma}_2 \lambda |p|^3 \text{ на } \mathfrak{M}_{\Omega, m, L},\end{gathered} \tag{6.31}$$

где Λ и λ — соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ — произвольные, $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ — достаточно малые постоянные. Легко видеть, что из условий (6.31) вытекают условия (6.30), поскольку при любом τ с $|\tau|=1$ справедливы неравенства

$$\sqrt{\lambda} \leqslant c\sqrt{A^\tau}, \quad \sqrt{\lambda} \leqslant c\sqrt{\mathscr{E}_1}\,|p|^{-1}, \quad \lambda|p|^2 \leqslant c\mathscr{E}_1, \tag{6.32}$$

причем константа c в (6.32) не зависит от τ. Заметим, что в самое последнее время [84] Ладыженская и Уральцева усилили свой результат, заменив в (6.31) достаточно малые константы σ_1 и σ_2 на произвольные постоянные. Это сделано за счет доказательства для решений равномерно эллиптических уравнений априорной оценки гельдеровской нормы $\|u\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}$.

§ 7. Оценка $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ для уравнений, структура которых описывается в терминах мажоранты $\mathscr{E}_2$

Пусть функции $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, и $a(x, u, p)$ принадлежат классу $C^1(\mathfrak{M}_{\Omega, m, L})$, и пусть на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ выполнено условие (6.1).

Теорема 7.1. *Предположим, что на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ при любом τ, $|\tau|=1$, выполнены условия*

$$\begin{gathered} |A_p^\tau|\,|p| \leqslant \sqrt{\mu_1 A^\tau \operatorname{Sp} A}, \quad |\delta A^\tau| \leqslant \sqrt{\sigma_1 A^\tau \operatorname{Sp} A}, \\ |a_p|\,|p| \leqslant \sigma_2\mathscr{E}_2, \quad \delta a \geqslant -\sigma_3\mathscr{E}_2, \quad \operatorname{Sp} A > 0, \end{gathered} \tag{7.1}$$

где μ_1 — произвольная неотрицательная постоянная, а σ_1, σ_2, σ_3 — неотрицательные постоянные, достаточно малые в зависимости от n, μ_1 и диаметра области Ω. Тогда для любого решения $u \in C^3(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ уравнения (1.1), *удовлетворяющего условию* (6.5), *величина $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ оценивается лишь через m, $M_1 \equiv \max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$, L, n, μ_1 и диаметр d области Ω. При дополнительном условии $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij} \geqslant \varepsilon_0 \operatorname{Sp} A$ на $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$, где $\varepsilon_0=\mathrm{const}>0$, в неравенствах* (7.1) *вместо σ_2 можно допускать произвольную константу $\mu_2 \geqslant 0$.*

Доказательство. Применяя к уравнению (1.1) оператор $u_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ и обозначая $v=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2$, получим тождество (6.6). Далее это тождество будет рассматриваться только на множестве $\Omega_L=\{x\in\Omega : |\nabla u|>L\}$. Рассуждая точно так же, как при выводе неравенств (6.13) при доказательстве теоремы 6.1, докажем, что в каждой точке области Ω_L справедливы неравенства

$$\begin{gathered} |(a^{ij})_{p_l} u_{ij} v_l| \leqslant \frac{1}{2} a^{ij}u_{ki}u_{kj} + \frac{\mu_1 n}{2}\frac{|\nabla v|^2}{v}\operatorname{Sp} A, \\ |\sqrt{v}\,\delta a^{ij}u_{ij}| \leqslant \frac{1}{2} a^{ij}u_{ki}u_{kj} + \frac{\sigma_1 n}{2}\operatorname{Sp} A v. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Действительно, используя равенства (6.11), (6.12) в фиксированной точке $x\in\Omega_L$ и учитывая, что $\tilde a^{ii}=A^{\tau_i}$, $i=1, \ldots, n$, где $\tau_i=(t_{1i}, \ldots, t_{ni})$, получим при помощи первых двух условий из (1.1) неравенства

$$\begin{gathered} |a_{p_l}^{ij}u_{ij}v_l| = |\tilde a_{p_l}^{ii}\tilde u_{ii}v_l| \leqslant \frac{1}{2}\tilde a^{ii}\tilde u_{ii}^2 + \frac{\mu_1}{2}\operatorname{Sp}\tilde A\,\frac{|\nabla v|^2}{v}, \\ |\sqrt{v}\,\delta a^{ij}u_{ij}| = |\sqrt{v}\,\delta\tilde a^{ii}\tilde u_{ii}| \leqslant \frac{1}{2}\tilde a^{ii}\tilde u_{ii}^2 + \frac{\sigma_1}{2}\operatorname{Sp}\tilde A v, \end{gathered} \tag{7.3}$$

причем в (7.3) нет суммирования по индексу i и взяты только те значения этого индекса, для которых $\tilde{a}^{ii} \neq 0$. Однако для тех значений индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых в рассматриваемой точке $x_0 \in \Omega_L$ $\tilde{a}^{ii} = 0$, неравенства (7.3) выполняются тривиально, поскольку из (7.1) при $\tau = \tau_i$ следует в этом случае, что $\tilde{a}_p^{ii} = 0$, $\delta \tilde{a}^{ii} = 0$. Суммируя (7.3) по $i = 1, \ldots, n$, получим неравенства (7.2). Из (6.6) и (7.2) вытекает неравенство

$$a^{ij} v_{ij} \geqslant a^{ij} u_{ki} u_{kj} + a_{p_l} v_l + 2\sqrt{v}\,\delta a - \mu_1 n \operatorname{Sp} A \frac{|\nabla v|^2}{v} -$$

$$- \sigma_1 n \operatorname{Sp} A v, \quad x \in \Omega_L. \tag{7.4}$$

Пусть $z = z(x)$ — положительная в $\bar{\Omega}$ функция, принадлежащая классу $C^2(\bar{\Omega})$. Введем функцию $\bar{v}$, определяемую из равенства

$$v = z\bar{v}. \tag{7.5}$$

Учитывая, что $v_i = z_i \bar{v} + z\bar{v}_i$, $v_{ij} = z_{ij}\bar{v} + z_i \bar{v}_j + z_j \bar{v}_i + z\bar{v}_{ij}$, выведем из (7.4) оценку

$$z a^{ij} \bar{v}_{ij} + b^k \bar{v}_k \geqslant -a^{ij} z_{ij} \bar{v} + a^{ij} u_{ki} u_{kj} + a_{p_l} z_l \bar{v} +$$

$$+ 2\sqrt{v}\,\delta a - \mu_1 n \operatorname{Sp} A \frac{|\nabla z|^2}{z} \bar{v} - \sigma_1 n z \operatorname{Sp} A \bar{v}, \tag{7.6}$$

причем вид b^k для дальнейшего безразличен. Принимая во внимание условия (7.1) на $|a_p|$ и δa, выведем из (7.6) неравенство

$$z a^{ij} \bar{v}_{ij} + b^k \bar{v}_k \geqslant \left[-a^{ij} z_{ij} - \left(\mu_1 n \frac{|\nabla z|^2}{z} + \sigma_2 |\nabla z| + (n\sigma_1 + 2\sigma_3) z \right) \operatorname{Sp} A \right] \bar{v},$$

$$x \in \Omega_L. \tag{7.7}$$

Подберем какую-нибудь функцию $z = z(x)$, удовлетворяющую условиям

$$-a^{ij} z_{ij} - \left(\mu_1 n \frac{|\nabla z|^2}{z} + \sigma_2 |\nabla z| + (n\sigma_1 + 2\sigma_3) z \right) \operatorname{Sp} A > 0 \text{ на } \Omega_L,$$

$$z \geqslant c_1 = \text{const} > 0 \text{ на } \Omega_L. \tag{7.8}$$

Пусть, например, $z(x) = \alpha + d^2 - |x|^2$, где $\alpha = \text{const} > 1$, d — диаметр области Ω, причем, не ограничивая общности, считаем, что начало координат содержится в Ω. Учитывая, что $z_i = -2x_i$, $z_{ij} = -2\delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера, легко убедимся, что условия (7.8) будут выполнены, если выбрать сначала константу $\alpha > 1$ так, чтобы $\mu_1 n (4d^2/\alpha) \leqslant 1/2$, а затем наложить на σ_1, σ_2, σ_3 условие

$$2\sigma_2 d + (n\sigma_1 + 2\sigma_3)(\alpha + d^2) < \frac{1}{2}. \tag{7.9}$$

Условие (7.9) есть условие малости величин σ_1, σ_2 и σ_3 в (7.1). Ввиду (7.8) и условия положительности $\mathscr{E}_2$ на Ω_L из (7.7) следует, что функция $\bar{v}$ не может достигать максимума на Ω_L. Поэтому

$$\max_{\bar{\Omega}} \bar{v} \leqslant \max \left\{ \max_{\partial\Omega} \frac{v}{z}, \max_{\{|\nabla u| < L\}} \frac{v}{z} \right\}. \tag{7.10}$$

Учитывая вид функции z, получим тогда

$$\max_{\bar{\Omega}} v \leqslant \frac{\alpha + d^2}{d^2} \max \{M_1^2, L^2\}, \tag{7.11}$$

где $M_1 = \max_{\partial\Omega} |\nabla u|$, откуда и следует искомая оценка

$$\max_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leqslant \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{d}\right) \max \{M_1, L\}. \tag{7.12}$$

Предположим теперь, что на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ выполнено условие $\sum_{i, j=1}^{n} a^{ij} \geqslant \varepsilon_0 \operatorname{Sp} A$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$. В этом случае вместо функции $z = \alpha + d^2 - |x|^2$ рассмотрим функцию $z = \alpha + e^{\beta n d} - e^{-\beta \sum_{k=1}^{n} x_k}$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $\beta = \mathrm{const} > 0$, d — диаметр области Ω, причем, как и выше, предполагаем, что начало координат содержится в Ω. Учитывая соотношение $z_i = \beta e^{-\beta \sum_{k=1}^{n} x_k}$, $z_{ij} = -\beta^2 e^{-\beta \sum_{k=1}^{n} x_k}$, убедимся, что условие (7.8) будет выполнено, если сначала выбрать $\beta > 0$ так, чтобы $\beta^2 \varepsilon_0 - \sigma_2 n \beta = {}^1/_2 \beta^2 \varepsilon_0$, затем выбрать $\alpha > 1$ так, чтобы ${}^1/_2 \beta^2 e^{-\beta n d} \varepsilon_0 - \mu_1 n \beta^2 e^{2\beta n d} \alpha^{-1} \geqslant {}^1/_4 \beta^2 \varepsilon_0 e^{-\beta n d}$, и считать σ_1 и σ_2 столь малыми, чтобы $(n\sigma_1 + 2\sigma_3)(\alpha + e^{\beta n d}) < {}^1/_4 \beta \varepsilon_0 e^{-\beta n d}$. Тогда, рассуждая далее точно так же, получим оценку

$$\max_{\Omega} |\nabla u| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha + e^{\beta n d}}{\alpha}} \max(M_1, L),$$

причем при ее выводе на величину σ_2 не накладывалось никакого ограничения. Теорема 7.1 доказана.

Замечание 7.1. Результат теоремы 7.1 сохранится, если в выражении (7.1) постоянные σ_1, σ_2, σ_3, удовлетворяющие условию (7.9), заменить на функции $\sigma_1(|p|)$, $\sigma_2(|p|)$, $\sigma_3(|p|)$, предполагая, что $\sigma_1(\rho) \to 0$, $\sigma_2(\rho) \to 0$, $\sigma_3(\rho) \to 0$ при $\rho \to +\infty$.

Замечание 7.2. Отметим, что условия теоремы 7.1 допускают вырождение матрицы $A \equiv \|a^{ij}(x, u, p)\|$, характеризуемое условием $\operatorname{Sp} A > 0$ на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$.

Рассмотрим в качестве примера уравнение, главная часть которого совпадает с главной частью нормированного уравнения минимальных поверхностей, т. е. уравнение вида

$$\left(\frac{1 + |\nabla u|^2}{|\nabla u|^2} \delta_i^j - \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{|\nabla u|^2}\right) u_{x_i x_j} = a(x, u, \nabla u). \qquad (7.13)$$

В этом случае

$$a^{ij} = \frac{1 + |p|^2}{|p|^2} \delta_i^j - \frac{p_i p_j}{|p|^2}, \quad A^\tau = \left(\frac{1 + |p|^2}{|p|^2} \delta_i^j - \frac{p_i p_j}{|p|^2}\right) \tau_i \tau_j,$$

$$\mathcal{E}_1 \equiv 1, \quad \operatorname{Sp} A = n - 1 + \frac{n}{|p|^2}, \quad \mathcal{E}_2 = (n-1)|p| + \frac{n}{|p|},$$

$$\frac{\partial A^\tau}{\partial p_k} = -\frac{2p_k + 2\tau_k p \cdot \tau |p|^2 - 2(p \cdot \tau)^2 p_k}{|p|^4},$$

$\tau \in \mathbb{R}^n$, $|\tau| = 1$. Всякий вектор τ, $|\tau| = 1$, можно представить в виде $\tau = \alpha\xi + \beta\sigma$, где $\xi \cdot \sigma = 0$, $|\xi| = 1$, $\sigma = p/|p|$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Тогда, очевидно, $A^\tau = \alpha^2 + |p|^{-2}$, $\left|\frac{\partial A^\tau}{\partial p_k}\right| |p| \leqslant 2|p|^{-2} + 2\alpha$, причем при выводе последнего неравенства учитывается, что $|\beta| \leqslant 1$, $|\xi_k| \leqslant 1$. Из доказанного видно, что

$$\sqrt{A^\tau \operatorname{Sp} A} \geqslant \sqrt{\frac{n-1}{2}} (\alpha + |p|^{-1}), \quad |A_p^\tau| |p| \leqslant 2\sqrt{n} (\alpha + |p|^{-1}), \qquad (7.14)$$

откуда легко следует неравенство $|A_p^\tau| |p| \leqslant 2\sqrt{2n/(n-1)} \sqrt{A^\tau \operatorname{Sp} A}$. Учитывая еще, что $\delta A^\tau \equiv 0$ и $\operatorname{Sp} A > n - 1$, заключаем, что первые два и последнее условия в (7.1) выполнены для уравнения (7.13) с $\mu_1 = 8n/(n-1)$ и $\sigma_1 = 0$.

Для возможности применить к уравнению (7.13) теорему 7.1 нужно потребовать, чтобы на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ (при некотором известном $L \geqslant 0$) выполнялись условия

$$|a_p| \leqslant \sigma_2, \quad \delta a \geqslant -\sigma_3 |p|, \tag{7.15}$$

где σ_2 и σ_3 достаточно малы в зависимости от n и d (см. (7.9)). Рассмотрим, в частности, нормированное уравнение поверхности заданной средней кривизны вида (1.10), для которого

$$a(x, u, p) = \mathscr{H}(x, u, p) \frac{(1+|p|^2)^{3/2}}{|p|^2}.$$

Предположим, что

$$\mathscr{H}(x, u, p) = H_0 + \hat{H}(x, u, p),$$

где H_0 — произвольная константа. В этом случае условие (7.15) будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$|\mathscr{H}| + |p| |\hat{H}_p| \leqslant \sigma_2, \quad \delta \hat{H} \geqslant -\sigma_3 \text{ на } \mathfrak{M}_{\Omega, m, L} \tag{7.16}$$

при достаточно малых σ_2 и σ_3.

§ 8. Оценка $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ для одного специального класса уравнений

В предыдущем параграфе были, в частности, указаны условия на правую часть уравнения (7.13), связанного с изучением различных вопросов геометрии и механики сплошных сред, обеспечивающие оценку $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ через $\max\limits_{\Omega} |u|$ и $\max\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|$. В этом параграфе выделяется некоторый класс уравнений, содержащий уравнение вида (7.13), для которого указанная оценка строится другим способом, вызывающим другие ограничения на их структуру. В частности, в случае уравнения (7.13) на правую часть $a(x, u, p)$ налагаются условия, вообще говоря, не вкладывающиеся в условия (7.15) и не содержащие их.

Теорема 8.1. *Предположим, что на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ при любом τ, $|\tau| = 1$, $\tau \cdot p = 0$, выполнены условия*

$$\begin{gathered} |pA_p^\tau| \leqslant \sqrt{\sigma_1 A^\tau \mathscr{E}_1}\, |p|^{-1}, \quad |\delta A^\tau| \leqslant \sqrt{\mu_1 A^\tau \mathscr{E}_1}, \quad \mathscr{E}_1 > 0, \\ \mathscr{E}_1 - p(\mathscr{E}_1)_p > \mu_2 \mathscr{E}_1, \quad |\delta \mathscr{E}_1| \leqslant \mu_3 \mathscr{E}_1 |p|, \\ |a - pa_p| \leqslant \mu_4 \mathscr{E}_1, \quad \delta a \geqslant -\mu_5 \mathscr{E}_1 |p|, \end{gathered} \tag{8.1}$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_5$ — произвольные неотрицательные постоянные, а постоянная $\sigma_1 \geqslant 0$ достаточно мала в зависимости от $\mu_2 > 0$. Тогда для любого решения $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (6.5), величина $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ оценивается лишь через m, $M_1 \equiv \max\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|$, L, n, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5.

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $\bar{u}$, определяемую из равенства

$$u = K^{-1} \ln \bar{u}, \quad K = \text{const}. \tag{8.2}$$

Учитывая, что $u_i = K^{-1}\bar{u}^{-1}\bar{u}_i$, $u_{ij} = K^{-1}\bar{u}^{-1}\bar{u}_{ij} - Ku_iu_j$, заключаем, что функция $\bar{u}$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{a}^{ij}\bar{u}_{ij} - \bar{a} = 0, \tag{8.3}$$

где $\bar{a}^{ij} = a^{ij}(x, \; K^{-1}\ln\bar{u}, \; K^{-1}\bar{u}^{-1}\bar{p})$, $\bar{a} = K\bar{u}a(x, \; K^{-1}\ln\bar{u}, \; K^{-1}\bar{u}^{-1}\bar{p}) + K^2\bar{u}\mathscr{E}_1(x, K^{-1}\ln\bar{u}, K^{-1}\bar{u}^{-1}\bar{p})$. Применяя к уравнению (8.3) оператор $\bar{u}_k\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}_k}$ и обозначая $\bar{v} = \sum\limits_{k=1}^{n}\bar{u}_k^2$, получим тождество

$$\frac{1}{2}a^{ij}\bar{v}_{ij} = a^{ij}\bar{u}_{ki}\bar{u}_{kj} + \frac{1}{2}\left(\bar{a}_{p_l} - \bar{a}^{ij}_{p_l}\bar{u}_{ij}\right)\bar{v}_l + \sqrt{\bar{v}}\,(\bar{\delta}\bar{a} - \bar{\delta}a^{ij}\bar{u}_{ij}), \tag{8.4}$$

где $\bar{\delta} \equiv \dfrac{p_k}{|p|}\dfrac{\partial}{\partial x_k} + |p|\dfrac{\partial}{\partial u}$. Если $\Phi = \Phi(x, u, p) \equiv \Phi(x, K^{-1}\ln\bar{u}, K^{-1}\bar{u}^{-1}\bar{p})$, то

$$\bar{\delta}\Phi = \frac{p_k}{|p|}\Phi_{x_k} + |p|\Phi_u - K|p|\Phi_p p \equiv \delta\Phi - K|p|p\Phi_p. \tag{8.5}$$

Если $\Phi = \Phi(\bar{u})$, то

$$\bar{\delta}\Phi = K\bar{u}|p|\Phi_{\bar{u}}. \tag{8.6}$$

Используя (8.5), (8.6) и учитывая, что $v = |p|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}u_k^2 = K^{-2}\bar{u}^{-2} \times \sum\limits_{k=1}^{n}\bar{u}_k^2 \equiv K^{-2}\bar{u}^{-2}\bar{v}$, получим равенства

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{v}}\,\bar{\delta}\bar{a} &= \bar{v}\left[Ka + K^2\mathscr{E}_1 + \frac{\delta a}{|p|} - Kpa_p + K\frac{\delta\mathscr{E}_1}{|p|} - K^2p(\mathscr{E}_1)_p\right], \\ \sqrt{\bar{v}}\,\bar{\delta}a^{ij}\bar{u}_{ij} &= \sqrt{\bar{v}}\,[\delta a^{ij}u_{ij} - K|p|(a^{ij})_p\,p\bar{u}_{ij}]. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Из (8.4) и (8.7) следует, что если функция $\bar{v}$ максимальное значение принимает во внутренней точке x_0 области Ω, то в этой точке справедливо равенство

$$\frac{1}{2}a^{ij}\bar{v}_{ij} = a^{ij}\bar{u}_{ki}\bar{u}_{kj} + \bar{v}\left[K^2(\mathscr{E}_1 - p(\mathscr{E}_1)_p) + K\frac{\delta\mathscr{E}_1}{|p|} + K(a - pa_p) + \frac{\delta a}{|p|}\right] + \sqrt{\bar{v}}\,[\delta a^{ij}\bar{u}_{ij} - K|p|p(a^{ij})_p\bar{u}_{ij}]. \tag{8.8}$$

Оценим члены, входящие в последние квадратные скобки в (8.8). Пусть $T = \|t_{ij}\|$ — ортогональная матрица, приводящая матрицу $\|\bar{u}_{ij}\|$ в точке x_0 к диагональной матрице $\|\tilde{u}_{ij}\|$ с $\tilde{u}_{ij} = 0$ при $i \neq j$, так что справедливо равенство вида (6.11). Обозначим $\tilde{A} = T^*AT$. Тогда, учитывая, что $\tilde{a}^{ii} = A^{\tau_i} \equiv A\tau_i \cdot \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $\tau_i = (t_{1i}, \ldots, t_{ni})$ — i-й столбец матрицы T, причем $|\tau_i| = 1$, получим равенства

$$\begin{aligned} K|p|p(a^{ij})_p\bar{u}_{ij} &= K|p|p(\tilde{a}^{ii})_p\tilde{u}_{ii} = K|p|p\left(A^{\tau_i}\right)_p\tilde{u}_{ii}, \\ \delta a^{ij}\bar{u}_{ij} &= \delta\tilde{a}^{ii}\tilde{u}_{ii} = \delta A^{\tau_i}\tilde{u}_{ii}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Из определения вектора τ_i следует векторное равенство $\|\bar{u}_{ij}\|\tau_i = \tilde{u}_{ii}\tau_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Умножая скалярно обе части этого равенства на вектор $\nabla\bar{u}$, получим при любом $i = 1, \ldots, n$ равенство

$$(\|\bar{u}_{ij}\|\tau_i)\cdot\nabla\bar{u} = \tilde{u}_{ii}(\tau_i\cdot\nabla\bar{u}). \tag{8.10}$$

Расписывая левую часть (8.10) в виде суммы (по k, $l = 1, \ldots, n$) $\bar{u}_{kl}t_{li}\bar{u}_k \equiv \dfrac{1}{2}\bar{v}_lt_{li}$ и замечая, что в точке x_0 производные $\bar{v}_l = 0$, $l = 1, \ldots, n$ (необходимое условие экстремума), получим равенства

$$\tilde{u}_{ii}(\tau_i\cdot\nabla\bar{u}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.11}$$

Из (8.11) следует, что при любом $i=1,\ldots,n$ либо $\tilde{u}_{ii}=0$, либо $\tau_i\cdot p=0$, поскольку $\nabla\bar{u}\equiv\bar{p}=K\bar{u}p$, причем $\bar{u}\neq 0$, так как $\bar{u}=e^{Ku}$.

Предположим, что точка x_0 максимума в $\bar{\Omega}$ функции $\bar{v}$ принадлежит области Ω_L (т. е. $x_0\in\Omega$ и $|\nabla u(x_0)|>L$). Докажем тогда, что справедливы неравенства

$$\begin{gathered}|\sqrt{\bar{v}}\,K\,|p|\,p\,(a^{ij})_p\,\bar{u}_{ij}|\leqslant\frac{1}{2}a^{ij}\bar{u}_{ki}\bar{u}_{kj}+\frac{1}{2}nK^2\sigma_1\mathscr{E}_1\bar{v},\\ |\sqrt{\bar{v}}\,\delta a^{ij}\bar{u}_{ij}|\leqslant\frac{1}{2}a^{ij}\bar{u}_{ki}\bar{u}_{kj}+\frac{1}{2}n\mu_1\mathscr{E}_1\bar{v}.\end{gathered}\tag{8.12}$$

Пусть для некоторого индекса $i\in\{1,\ldots,n\}$ в рассматриваемой точке $x_0\in\Omega_L$ справедливы условия: $\tilde{a}^{ii}>0$, $\tilde{u}^{ii}\neq 0$. В этом случае $\tau_i\cdot p=0$, и поэтому для оценки $p\left(A^{\tau_i}\right)_p$ и δA^{τ_i} можно воспользоваться соответствующими условиями из (8.1). Тогда, применяя неравенство Коши, получим при указанных значениях индексов i неравенства

$$\begin{gathered}|\sqrt{\bar{v}}\,K\,|p|\,p\,(\tilde{a}^{ii})_p\,\tilde{u}_{ii}|\leqslant\frac{1}{2}\tilde{a}^{ii}\tilde{u}_{ii}^2+\frac{1}{2}K^2\sigma_1\mathscr{E}_1\bar{v},\\ |\sqrt{\bar{v}}\,\delta\tilde{a}^{ii}\tilde{u}_{ii}|\leqslant\frac{1}{2}\tilde{a}^{ii}\tilde{u}_{ii}^2+\frac{1}{2}\mu_1\mathscr{E}_1\bar{v}.\end{gathered}\tag{8.13}$$

Если же для некоторого индекса $i\in\{1,\ldots,n\}$ в точке x_0 хотя бы одно из чисел $\tilde{a}^{ii}$ и $\tilde{u}_{ii}$ равно 0, то левые части в (8.13) равны 0, поскольку при $\tilde{u}_{ii}=0$ это очевидно, а при $\tilde{a}^{ii}=0$ из первых двух неравенств в (8.1) при $\tau=\tau_i$ следует, что $(\tilde{a}^{ii})_p\,p=0$, $\delta\tilde{a}^{ii}=0$. Таким образом, в этом случае неравенства (8.13) выполнены тривиальным образом. Суммируя (8.13) по всем индексам $i=1,\ldots,n$, получим оценки (8.12). Из (8.8), (8.12) следует, что при сделанном предположении в точке x_0 справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}a^{ij}\bar{v}_{ij}\geqslant\Big\{K^2\Big[\mathscr{E}_1-p(\mathscr{E}_1)_p-\frac{n\sigma_1}{2}\mathscr{E}_1\Big]+\\ +K\Big[\frac{\delta\mathscr{E}_1}{|p|}+a-pa_p\Big]+\frac{\delta a}{|p|}-\frac{n\mu_1}{2}\mathscr{E}_1\Big\}\bar{v}.\end{gathered}\tag{8.14}$$

Предположим, что $\sigma_1\leqslant\mu_2/n$, и будем считать константу K столь большой, что $\frac{1}{2}\mu_2K^2-(\mu_3+\mu_4)K-(\mu_5+n\mu_1/2)\geqslant(\mu_2/4)K$. Тогда из (8.14) следует, что в точке x_0 $\frac{1}{2}a^{ij}\bar{v}_{ij}>0$, что противоречит сделанному выше предположению, что в точке $x_0\in\Omega_L$ функция $\bar{v}$ имеет свое максимальное в $\bar{\Omega}$ значение. Следовательно,

$$\max_{\bar{\Omega}}\bar{v}\leqslant\max\{\max_{\partial\Omega}\bar{v},\ \max_{\Omega\setminus\Omega_L}\bar{v}\}.\tag{8.15}$$

Вспоминая, что $v=K^{-2}\bar{u}^{-2}\bar{v}$, выведем из (8.15) оценку

$$\max_{\bar{\Omega}}v\leqslant\frac{\max\limits_{\bar{\Omega}}\bar{u}^2}{\min\limits_{\bar{\Omega}}\bar{u}^2}\max\{\max_{\partial\Omega}v,\ L^2\},\tag{8.16}$$

откуда легко следует:

$$\max_{\bar{\Omega}}|\nabla u|\leqslant e^{Km}\max\{\max_{\partial\Omega}|\nabla u|,\ L\}.\tag{8.17}$$

Теорема 8.1 доказана.

Замечание 8.1. Как показывает доказательство, результат теоремы 8.1 останется справедливым, если вместо условий (8.1) потребовать выполнения на $\mathfrak{M}_{\mathfrak{Q}, m, L}$ при всех τ, $|\tau|=1$, $\tau \cdot p=0$, следующих неравенств:

$$\mathscr{E}_1 - p(\mathscr{E}_1)_p - \frac{n}{2}\frac{(pA_p^\tau)^2|p|^2}{A^\tau} \geqslant c_0 = \mathrm{const} > 0,$$
$$\frac{\delta\mathscr{E}_1+\delta a}{\mathscr{E}_1|p|} - \frac{a-pa_p}{\mathscr{E}_1} - \frac{n}{2}\frac{|\delta A^\tau|^2}{A^\tau} \leqslant c_1 = \mathrm{const} > 0,\ \mathscr{E}_1 > 0. \tag{8.18}$$

Очевидно, что как (8.1), так и (8.18) допускают определенное вырождение эллиптичности уравнения (1.1), характеризуемое условием: $\mathscr{E}_1 > 0$ на $\mathfrak{M}_{\mathfrak{Q}, m, L}$.

Рассмотрим в качестве примера к теореме 8.1 уравнение (7.13). Поскольку для этого уравнения при всех τ, $|\tau|=1$, $\tau \cdot p = 0$, справедливы соотношения $A^\tau = 1+|p|^{-2}$, $|pA_p^\tau| = 2|p|^{-2}$, $\mathscr{E}_1 = 1$, $\sqrt{A^\tau\mathscr{E}_1}/|p| \geqslant |p|^{-1}$, то при $|p| > L$ первое условие [в (8.1) выполняется с $\sigma_1 = 4L^{-2}$, второе и четвертое — с $\mu_1 = \mu_3 = 0$, а третье — с $\mu_2 > 1$. Тогда очевидно, что условие малости величины σ_1, выраженное при доказательстве теоремы 8.1 неравенством $\sigma_1 \leqslant \mu_2/n$, будет выполнено для уравнения (7.13), если только $L > 2n$. Таким образом, для возможности применить теорему 8.1 к уравнению (7.13) надо потребовать, чтобы при некотором фиксированном $L > 2n$ выполнялось условие

$$|a - pa_p| \leqslant \mu_4,\ \delta a \geqslant -\mu_5|p| \text{ на } \mathfrak{M}_{\mathfrak{Q}, m, L} \tag{8.19}$$

при любых константах μ_4 и μ_5.

Сравнивая (8.19) и (7.15), замечаем, что второе условие на рост правой части при $p \to \infty$ [в (8.19) слабее соответствующего условия в (7.15), в то время как первое условие в (8.19), вообще говоря, сильнее первого условия в (7.15), но может оказаться слабее в случае специальной структуры функции $a(x, u, p)$. Рассмотрим, в частности, уравнение вида (1.10), для которого

$$a(x, u, p) = \mathscr{H}(x, u, p)\frac{(1+|p|^2)^{3/2}}{|p|^2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{(1+|p|^2)^{3/2}}{|p|^2} = |p| + \varphi(|p|),$$

где $\varphi(|p|) \sim (3/2)|p|^{-1}$ при $|p| \to \infty$, запишем:

$$a - pa_p = \mathscr{H}\{[|p|+\varphi(|p|)] - p[|p|+\varphi(|p|)]_p\} - p\mathscr{H}_p[|p|+\varphi(|p|)] =$$
$$= \mathscr{H}(\varphi - p\varphi_p) - p\mathscr{H}_p[|p|+\varphi(|p|)],\ \delta a = \delta\mathscr{H}[|p|+\varphi(|p|)]. \tag{8.20}$$

Поскольку $\varphi - p\varphi_p = O(|p|^{-1})$, $|p|+\varphi(|p|) = O(|p|)$ при $p \to \infty$, то из (8.19), (8.20) вытекают следующие условия на рост функции $\mathscr{H}(x, u, p)$:

$$|\mathscr{H}| \leqslant \mu_0|p|,\ |p\mathscr{H}_p| \leqslant \frac{\mu_1}{|p|},\ \delta\mathscr{H} \geqslant -\mu_3 \text{ на } \mathfrak{M}_{\mathfrak{Q}, m, L}, \tag{8.21}$$

где μ_0, μ_1, μ_3 — произвольные константы.

Сравнивая (8.21) и (7.16), замечаем, что условие на $p\mathscr{H}_p$ в (8.21), вообще говоря, на целый порядок сильнее, чем условие на $|p||\hat{H}_p|$ в (7.16). Однако если рассмотреть случай $\mathscr{H}(x, u, p) = h(x, u, p/|p|)$, то ввиду однородности нулевой степени функции h по p имеем $ph_p=0$, так что в этом специальном случае условиям (8.21) соответствуют условия

$$|h|\leqslant\mu_0,\ \delta h\geqslant-\mu_3 \text{ на } \mathfrak{M}_{\Omega, m, L} \tag{8.22}$$

с произвольными константами μ_0 и μ_3, в то время как условия (7.16) при $\hat{H}\equiv h(x, u, p/|p|)$ сохраняют свой вид, т. е.

$$|h|+|p||h_p|\leqslant\sigma_2,\ \delta h\geqslant-\sigma_3 \text{ на } \mathfrak{M}_{\Omega, m, L} \tag{8.23}$$

с достаточно малыми константами σ_2 и σ_3. Ясно, что в последнем случае условия (8.22) несколько слабее условий (8.23).

Замечание 8.2. Выделенный в теореме 8.1 класс уравнений вида (1.1) содержит в себе классы уравнений типа уравнения поверхности заданной средней кривизны, выделявшиеся различными авторами (см. [40, 4, 83]). В частности, в монографии [83] был выделен класс уравнений, определяемый следующими условиями на $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$:

$$\begin{gathered}\left(\sum_{i, j=1}^{n}(a^{ij})^2\right)^{1/2}\leqslant c_0\nu,\ \nu\xi^2\leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j\leqslant c_1\nu\xi^2 \text{ при } \xi\in\mathbb{R}^n,\ \xi\cdot p=0,\\ \nu=\nu(x, u, p)>0,\ |(a^{ij})_p p|\leqslant\sigma_1\sqrt{\mathscr{E}_1\nu}\,|p|^{-1},\ |\delta a^{ij}|\leqslant\mu_1\sqrt{\mathscr{E}_1\nu},\\ \mathscr{E}_1-p(\mathscr{E}_1)_p\geqslant\mu_2\mathscr{E}_1,\ |\delta\mathscr{E}_1|\leqslant\mu_3\mathscr{E}_1|p|,\ |a-pa_p|\leqslant\mu_4\mathscr{E}_1,\ \delta a\geqslant-\mu_5\mathscr{E}_1|p|.\end{gathered} \tag{8.24}$$

Поскольку для $\xi=\tau$, где $|\tau|=1$, $\tau\cdot p=0$, из (8.24) следует неравенство $\nu\leqslant A^\tau$, то из условия $|p(a^{ij})_p|\leqslant\sigma_1\sqrt{\mathscr{E}_1\nu}\,|p|^{-1}$ вытекает, что $|pA_p^\tau|\leqslant\leqslant\sigma_1\sqrt{\mathscr{E}_1A^\tau}\,|p|^{-1}$, а из условия $|\delta a^{ij}|\leqslant\mu_1\sqrt{\mathscr{E}_1\nu}$ — что $|\delta A^\tau|\leqslant\tilde{\mu}_1\sqrt{A^\tau\mathscr{E}_1}$. Таким образом, из (8.24) вытекают условия (8.1). Заметим также, что классы уравнений вида (1.1), выделенные в указанной связи в статьях [40] и [4], определяются некоторыми предположениями, из которых вытекают условия (8.24).

§ 9. Теорема существования решения задачи Дирихле в случае произвольной области Ω с достаточно гладкой границей

Поскольку в теореме 2.1 оценка (2.12) постулирована для решений задач вида (2.11) в предположении, что эти решения принадлежат классу $C^2(\bar{\Omega})$, а в теоремах 6.1, 7.1, 8.1 оценки $\max\limits_{\bar{\Omega}}|\nabla u|$ получены для решений из класса $C^3(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$, а также в связи с желанием несколько ослабить требования теоремы 2.1 на границу $\partial\Omega$ и граничную функцию φ, для получения теорем существования задачи Дирихле (1.3) на базе полученных выше результатов необходимо проводить некоторые дополнительные рассуждения, которые и составляют содержание настоящего и следующего параграфов.

Теорема 9.1 *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, класса C^2, а функции $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1,\dots, n$, и $a(x, u, p)$ непрерывны в $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и имеют частные производные $\frac{\partial a^{ij}}{\partial p_k}$, $\frac{\partial a^{ij}}{\partial u}$, $\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial a}{\partial p_k}$, $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial a}{\partial x_k}$, ограниченные на любом компакте в $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Пусть выполнено условие (1.2). Предположим, что для всякого решения $v\in C^2(\bar{\Omega})$ задачи (2.11) при $\forall\tau\in[0, 1]$ справедлива оценка*

$$\max_{\bar{\Omega}}|v|\leqslant m. \tag{9.1}$$

Пусть на $\mathfrak{N}_{m,\,l} \equiv \bar{D}_0 \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$, *где область* D_0 *определена условием* (3.2), m — *константа из* (9.1), l — *некоторая неотрицательная константа, выполнены неравенства* (4.1), (4.5), *а на множестве* $\mathfrak{M}_{\Omega,\,m,\,L} \equiv \equiv \bar{\Omega} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > L\}$, *где* m — *константа из* (9.1), L — *некоторая неотрицательная константа, справедливы условия* (6.4), (6.25). *Пусть также функция* $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$. *Тогда задача* (1.3) *имеет хотя бы одно классическое решение* u, *причем* $u \in C^{1+\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$ *при некотором* $\gamma \in (0,\ 1)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\Omega \in C^3$, $\varphi \in C^3$, а функции $a^{ij}(x,\ u,\ p)$, $i,\ j = 1, \ldots, n$, $a(x,\ u,\ p)$ принадлежат классу $C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Пусть функция $v \in C^2(\bar{\Omega})$ является решением задачи (2.11) при некотором $\tau \in [0,\ 1]$. Из условия теоремы следует, что для функции v справедлива оценка (9.1). Поскольку функции $\tilde{a} = \tau a$ и $\tilde{\varphi} = \tau\varphi$, $\tau \in [0,\ 1]$, удовлетворяют точно таким же условиям, что и функции a и φ, то из теоремы 4.1 вытекает оценка

$$\max_{\partial\Omega} |\nabla v| \leqslant M_1, \tag{9.2}$$

где M_1 не зависит ни от v, ни от τ. Чтобы воспользоваться теперь теоремой 6.1, необходимо сначала убедиться, что на самом деле функция $v \in C^3(\Omega)$. Действительно, поскольку функции $x \to a^{ij}(x,\ v(x),\ \nabla v(x))$, $i,\ j = 1, \ldots, n$, $x \to a(x,\ v(x),\ \nabla v(x))$ принадлежат $C^1(\bar{\Omega})$, а $\tau\varphi \in C^3(\Omega)$ и $\Omega \in C^3$, то из теоремы Шаудера следует, что $v(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0,\ 1)$. Тогда функции $x \to a^{ij}(x,\ v(x),\ \nabla v(x))$, $i,\ j = 1, \ldots, n$, $x \to a(x,\ v(x),\ \nabla v(x))$ принадлежат классу $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0,\ 1)$. Применяя снова теорему Шаудера, заключаем, что $v \in C^{3+\alpha}(\Omega)$. Поскольку для уравнения (2.11) условия (6.4) выполнены с теми же константами, что и для исходного уравнения (1.1), то из теоремы 6.1 вытекает оценка

$$\max_{\bar{\Omega}} |\nabla v| \leqslant \bar{M}_1, \tag{9.3}$$

где $\bar{M}_1$ не зависит ни от v, ни от τ. Ввиду (9.1), (9.3) из теоремы 2.1 следует, что задача (1.3) имеет хотя бы одно решение $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Устраним теперь излишние предположения гладкости Ω, φ, a^{ij} и a. Пусть Ω, φ, a^{ij}, a — такие, как в формулировке теоремы 9.1. Воспользуемся стандартным методом аппроксимации Ω, φ, a^{ij}, a соответствующими объектами, обладающими той степенью гладкости, которая использовалась выше, с учетом компактности получающегося семейства решений задач вида (1.3) (см., например, [40], с. 453). Можно считать, что аппроксимирующие области $\tilde{\Omega}$ расширяются и содержатся в Ω. Заметим, что константы M_1 и $\bar{M}_1$ из (9.2) и (9.3) зависят только от C^2-норм $\partial\Omega$ и φ и от известных величин из тех условий на структуру уравнения (1.1), которые оговорены в формулировке теоремы 9.1. Поэтому для решений $\tilde{u}$ аппроксимирующих задач получим равномерную оценку

$$\max_{\tilde{\Omega}} (|\tilde{u}| + |\nabla \tilde{u}|) \leqslant c.$$

Применяя теорему Ладыженской и Уральцевой, установим для этих решений равномерную оценку

$$\|\tilde{u}\|_{C^{1+\gamma}(\bar{\tilde{\Omega}})} \leqslant c_1 \tag{9.4}$$

при некотором фиксированном $\gamma \in (0,\ 1)$. Из (9.4) и теоремы Шаудера следуют равномерные оценки

$$\|\tilde{u}\|_{C^{2+\gamma}(\overline{\Omega'})} \leqslant c_2(\Omega') \tag{9.5}$$

для каждой Ω', $\overline{\Omega'} \in \bar{\Omega}$. Применяя теперь классическую теорему Асколи—Арцелла, выделим последовательность решений аппроксимирующих задач, сходящуюся в $C^2_{loc}(\Omega)$ к некоторой функции $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Очевидно, что найденная функция и будет решением задачи (1.3). Из оценок (9.4) легко следует, что найденное решение u принадлежит $C^{1+\gamma}(\bar{\Omega})$. Тогда из теоремы Шаудера следует, что $u \in C^{2+\gamma}(\Omega) \cap C^{1+\gamma}(\bar{\Omega})$. Теорема 9.1 доказана.

Замечание 9.1. Если при выполнении всех условий теоремы 9.1 потребовать дополнительно, чтобы $\Omega \in C^{2+\beta}$, $\varphi \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$, $\beta \in (0, 1)$, то задача (1.3) будет иметь решение $u \in C^{2+\gamma}(\bar{\Omega})$, $\gamma \in (0, \beta]$.

§ 10. Теоремы существования решения задачи Дирихле в случае строго выпуклой области Ω

Точно так же, как и теорема 9.1, устанавливаются следующие результаты.

Теорема 10.1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 9.1, *за исключением условия* (4.5). *Пусть, кроме того, область Ω строго выпукла. Тогда задача* (1.3) *имеет хотя бы одно решение* $u \in C^{1+\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$ *при некотором* $\gamma \in (0, 1)$. *Если же* $\Omega \in C^{2+\beta}$, $\varphi \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$, $\beta \in (0, 1)$, *то* $u \in C^{2+\gamma}(\bar{\Omega})$ *при некотором* $\gamma \in (0, \beta]$.

Теорема 10.2. *Пусть Ω — строго выпуклая ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *принадлежащая классу* C^2, *а функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ *непрерывны в* $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *и имеют все свои частные производные первого порядка, ограниченные на любом компакте в* $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Пусть выполнено условие* (1.2). *Предположим, что для всякого решения* $v \in C^2(\bar{\Omega})$ *задачи* (2.11) *при любом* $\tau \in [0, 1]$ *справедлива оценка* (9.1). *Пусть на множестве* $\mathfrak{N}_{m, l}$ *выполнено условие* (4.1), *а на множестве* $\mathfrak{M}_{\Omega, m, L}$ — *либо условия* (7.1), (7.9), *либо условие* (8.1) *с* $\sigma_1 \leqslant \mu_2/n$. *Пусть, наконец,* $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$. *Тогда задача* (1.3) *имеет хотя бы одно решение* $u \in C^{1+\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$ *при некотором* $\gamma \in (0, 1)$. *Если же* $\Omega \in C^{2+\beta}$, $\varphi \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$, $\beta \in (0, 1)$, *то* $u \in C^{2+\gamma}(\bar{\Omega})$ *при некотором* $\gamma \in (0, \beta]$.

Прежде чем формулировать следующую теорему, докажем сначала одну лемму, в которой устанавливается априорная оценка $\max\limits_{\bar{\Omega}} |u|$ для решений задачи (1.3). Эта лемма имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 10.1. *Пусть Ω — произвольная ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *и пусть функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ *непрерывны в* $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *и удовлетворяют условию* (1.2). *Предположим, что на множестве* $\mathcal{F}_{\Omega, m_0, l_0} \equiv \bar{\Omega} \times \{|u| \geqslant m_0\} \times \{|p| \geqslant l_0\}$, *где* m_0 *и* l_0 — *некоторые фиксированные положительные числа, выполнено неравенство*

$$a(x, u, p) \geqslant -(\delta_1 |p| + \delta_2 |u|) \operatorname{Sp} A, \tag{10.1}$$

причем δ_1, δ_2 — *неотрицательные константы, удовлетворяющие условию* $2\delta_1 + (1 + \hat{d}^2)\delta_2 < 2$, *где* $\hat{d}$ — *некоторая геометрическая характеристика области* Ω. *Тогда для любого классического решения* u *задачи* (1.3) $\max\limits_{\bar{\Omega}} |u|$ *оценивается величиной, зависящей только от* $\max\limits_{\partial\Omega} |\varphi|$ *и от структуры уравнения* (1.1). *Если же на множестве* $\mathcal{F}_{\Omega, m_0, l_0}$ *дополнительно выполнено условие*

$$\sum_{i, j=1}^{n} a^{ij} \geqslant \varepsilon_0 \operatorname{Sp} A, \quad \varepsilon_0 = \text{const} > 0, \tag{10.2}$$

то указанная выше оценка $\max\limits_{\bar\Omega}|u|$ *сохранится и при замене константы* δ_1 *в условии* (10.1) *на произвольную константу* $\mu\geqslant 0$; *при этом константа* δ_2 *должна быть достаточно мала в зависимости от* ε_0, μ *и размеров области* Ω.

Доказательство. Пусть $z=z(x)$ — некоторая функция класса $C^2(\bar\Omega)$, такая, что $z>0$ и $|\nabla z|>0$ в $\bar\Omega$. Введем новую неизвестную функцию $\bar u$, полагая $u=z\bar u$. Очевидно, что функция $\bar u$ удовлетворяет в Ω тождеству

$$za^{ij}\bar u_{ij}+b^k\bar u_k+a^{ij}z_{ij}\bar u=a, \tag{10.3}$$

причем вид b^k безразличен для дальнейших рассуждений. Предположим, что функция $\bar u$ достигает наибольшего значения в точке $x_0\in\Omega$. Тогда, учитывая необходимые условия экстремума, заключаем, что в этой точке

$$a-a^{ij}z_{ij}\bar u\leqslant 0, \tag{10.4}$$

где $a=a(x_0,\ z_0\bar u_0,\ (\nabla z)_0\bar u_0)$, $z_0=z(x_0)$, $\bar u_0=\bar u(x_0)$, $(\nabla z)_0=\nabla z(x_0)$.

Зафиксируем некоторое число m_1, удовлетворяющее условию

$$m_1=\max\left\{m_0,\ \frac{\max\limits_{\bar\Omega} z}{\min\limits_{\bar\Omega}|\nabla z|}l_0\right\}. \tag{10.5}$$

Предположим, что $\bar u_0\geqslant m_1/z_0$. Тогда $u_0\geqslant m_1\geqslant m_0$ и ввиду (10.5)

$$|(\nabla z)_0\bar u_0|=\frac{|(\nabla z)_0|}{z_0}u_0\geqslant\frac{l_0}{m_1}m_1=l_0.$$

Поэтому в точке x_0 можно применить условие (10.1). Из (10.1) следует, что в точке x_0

$$a\geqslant-(\delta_1|(\nabla z)_0|+\delta_2 z_0)\bar u_0\operatorname{Sp}A. \tag{10.6}$$

Пусть функция z удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}-a^{ij}z_{ij}-(\delta_1|\nabla z|+\delta_2 z)\operatorname{Sp}A>0\ \text{ в } \Omega,\\ z>0\ \text{ в } \bar\Omega,\quad |\nabla z|>0\ \text{ в } \bar\Omega.\end{gathered} \tag{10.7}$$

Если условие (10.2) не выполнено, положим $z=1+\hat d^2-|x|^2$, где $\hat d=\sup\limits_{\bar\Omega}|x|$, причем без ограничения общности будем считать, что $\inf\limits_{\bar\Omega}|x|\geqslant 1$. Учитывая тогда, что на $\bar\Omega$ справедливы соотношения $z\geqslant 1$, $z\leqslant 1+\hat d^2$, $z_i=-2x_i$, $|\nabla z|\geqslant 2$, $z_{ij}=-2\delta_i^j$, легко убеждаемся, что все условия (10.7) будут выполнены, если выполнено неравенство

$$2\delta_1+(1+\hat d^2)\delta_2<2. \tag{10.8}$$

Но при выполнении условия (10.8) из (10.4), (10.6) и (10.7) следует невозможность сделанного выше предположения о том, что функция $\bar u$ достигает своего наибольшего значения в такой точке $x_0\in\Omega$, в которой $\bar u_0\geqslant m_1/z_0$. Поэтому

$$\max_{\bar\Omega}\bar u\leqslant\max\left\{\max_{\partial\Omega}\bar u,\ \frac{m_1}{z_0}\right\}. \tag{10.9}$$

Тогда

$$\max_{\bar\Omega} u\leqslant\frac{\max\limits_{\bar\Omega} z}{\min\limits_{\bar\Omega} z}\max\left\{\max_{\partial\Omega}|\varphi|,\ m_1\right\}. \tag{10.10}$$

Учитывая вид выбранной функции z и формулу (10.5), выведем из (10.10) оценку

$$\max_{\Omega} u \leqslant (1+\hat{d}^2)\max\left\{\max_{\partial\Omega}|\varphi|,\ m_0,\ (1+\hat{d}^2)\,l_0\right\}. \tag{10.11}$$

Поскольку функция $\tilde{u}=-u$ является решением уравнения, имеющим точно такую же структуру, что и исходное, то $\max\limits_{\Omega}(-u)$ также оценивается через правую часть формулы (10.11). Таким образом,

$$\max_{\Omega}|u| \leqslant (1+\hat{d}^2)\max\left\{\max_{\partial\Omega}|\varphi|,\ m_0,\ (1+\hat{d}^2)\,l_0\right\}. \tag{10.12}$$

Предположим теперь, что выполнено также условие (10.2). Тогда, полагая $z=1+e^{\beta n\hat{d}}-e^{-\beta\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}$, где $\beta=\mathrm{const}>0$, $\hat{d}=\max\limits_{\Omega}|x|$, и учитывая, что тогда на $\bar{\Omega}$ справедливы соотношения $z\geqslant 1$, $z\leqslant 1+e^{\beta n\hat{d}}$, $z_i=\beta e^{-\beta\sum\limits_{1}^{n}x_k}$, $|\nabla z|\geqslant\beta e^{-\beta\sum\limits_{1}^{n}x_k}$, $z_{ij}=-\beta^2 e^{-\beta\sum\limits_{1}^{n}x_k}$, легко убеждаемся, что все условия (10.7) будут выполнены, если выполнены неравенства

$$\varepsilon_0\beta>\delta_1,\quad \delta_2(1+e^{\beta n\hat{d}})<\varepsilon_0\beta-\delta_1. \tag{10.13}$$

Но при выполнении условий (10.13) из (10.4), (10.6) и (10.7) следует невозможность сделанного выше предположения о том, что $\max\limits_{\Omega}\tilde{u}$ достигается в такой точке $x_0\in\Omega$, где $\tilde{u}_0\geqslant m_1/z_0$. Отсюда, как и при доказательстве первой части теоремы, выводим оценку (10.10). Учитывая теперь вид функции z и формулу (10.5), получим оценку

$$\max_{\Omega}|u| \leqslant (1+e^{\beta n\hat{d}})\max\left\{\max_{\partial\Omega}|\varphi|,\ m_0,\ (1+e^{\beta n\hat{d}})\,l_0\right\}. \tag{10.14}$$

Лемма 10.1 доказана.

Теорема 10.3. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, — ограниченная строго выпуклая область класса C^2, а функции $a^{ij}(x,u,p)$, $i, j=1,\ldots,n$, $a(x,u,p)$ непрерывны в $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и имеют все свои частные производные первого порядка, ограниченные на любом компакте в $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Пусть выполнено условие* (1.2). *Предположим, что на множестве $\mathcal{F}_{\Omega,m_0,l_0}$ выполнены либо условия* (10.1), (10.8), *либо условия* (10.1), (10.2), (10.13) *при любой константе $\varepsilon_0>0$. Пусть, далее, на множестве $\mathfrak{N}_{m,l}$ выполнено условие* (4.1), *а на множестве $\mathfrak{M}_{\Omega,m,L}$ — условия* (7.1), (7.9). *Тогда справедлив результат теоремы* 10.2.

Доказательство. Ввиду теоремы 10.2 для доказательства теоремы 10.3 достаточно установить априорную оценку вида (9.1) для любого решения $v\in C^2(\bar{\Omega})$ задачи (2.11) при любом $\tau\in[0,1]$ (не зависящую ни от v, ни от τ). Но такая оценка вытекает, очевидно, из леммы 10.1. Теорема 10.3 доказана.

Замечание 10.1. В условии (10.1), входящем в число условий теоремы 10.3, константу δ_2, подчиненную некоторому условию малости, невозможно заменить с сохранением результата теоремы 10.3 на произвольную константу $\mu \geqslant 0$, поскольку, как известно, существуют такие значения $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых задача Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega$$

не имеет никакого классического решения при некоторых $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ в круге $\Omega \equiv \{|x| \leqslant 1\}$.

ГЛАВА 2

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВНОМЕРНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Условная теорема существования

Пусть $Q = \Omega \times (0, T]$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, $T > 0$. Рассмотрим в Q квазилинейное уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv -u_t + a^{ij}(x, t, u, \nabla u) u_{x_i x_j} - a(x, t, u, \nabla u) = 0, \qquad (1.1)$$

где $a^{ij} = a^{ji}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, удовлетворяющее условию параболичности

$$a^{ij}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j > 0 \text{ при } \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi \neq 0,\ \forall (x, t, u, p) \in \bar{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Относительно функций $a^{ij}(x, t, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $a(x, t, u, p)$ далее всегда предполагается, что они как минимум непрерывны в $\bar{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Обозначим через Γ параболическую границу цилиндра Q: $\Gamma = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{t = 0\})$, а через Γ' — часть Γ, состоящую из точек, не принадлежащих множеству $\partial\Omega \times \{t = 0\}$, т. е. $\Gamma' = (\partial\Omega \times (0, T]) \cup (\Omega \times \{t = 0\})$. Пусть $C^{2,1}(Q)[C^{2,1}(\bar{Q})]$ — множество всех функций $u(x, t)$, непрерывных в $Q[\bar{Q}]$ вместе с u_t, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Аналогичным образом через $C^{2,1}(Q \cup \Gamma')$ обозначается множество всех функций $u(x, t)$, непрерывных вместе с u_t, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$ в $Q \cup \Gamma'$. Пусть Q' — произвольное компактное множество, содержащееся в $\bar{Q}$. Через $C_\alpha(Q')$ обозначим множество всех функций $u(x, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|u\|_{\alpha, Q'} \equiv \max_{Q'} |u(x, t)| + \max_{(x, t), (x', t') \in Q'} \frac{|u(x, t) - u(x', t')|}{(|x - x'|^2 + |t - t'|)^\alpha} \leqslant K,$$

где $K = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\alpha = \mathrm{const} \in (0, 1)$.

Пусть $C_{1+\alpha}(Q')[C_{2+\alpha}(Q')]$, $\alpha \in (0, 1)$, — множество всех функций $u(x, t)$, для которых u, $u_{x_i} \in C^\alpha(Q')$, $i = 1, \ldots, n$, $[u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_t \in C^\alpha(Q')$, $i, j = 1, \ldots, n]$. Через $C_{2+\alpha}(Q \cup \Gamma')$ обозначается множество всех $u(x, t)$, принадлежащих $C_{2+\alpha}(Q')$ при любом компакте $Q' \subset Q \cup \Gamma$. Пусть, наконец, при $\alpha \in (0, 1)$:

$$\|u\|_{1+\alpha, Q'} \equiv \|u\|_{\alpha, Q'} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\alpha, Q'}; \quad \|u\|_{2+\alpha, Q'} \equiv \|u\|_{1+\alpha, Q'} +$$
$$+ \sum_{i, j=1}^n \|u_{x_i x_j}\|_{\alpha, Q'} + \|u_t\|_{\alpha, Q'}.$$

В этой главе изучается вопрос о классической разрешимости первой краевой задачи для уравнения (1.1), т. е. задачи

$$\mathcal{L}u = 0 \text{ в } Q, \quad u = \varphi \text{ на } \Gamma, \qquad (1.3)$$

где $\varphi = \varphi(x, t)$ — заданная функция. При этом под классическим решением задачи (1.3) понимается всякая функция $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$, удовлетворяющая уравнению (1.1) в Q и совпадающая с функцией φ на параболической границе Γ. Выделим основные результаты, играющие определяющую роль в сведении доказательства классической разрешимости задачи (1.3) к задаче построения априорной оценки $\max\limits_{\bar{Q}}(|u|+|\nabla u|)$ для решений подходящего семейства однопараметрических краевых задач, связанного с задачей (1.3).

Теорема 1.1. (А. Фридман, В. А. Солонников). *Пусть* $\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\varphi \in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$, $A^{ij}(x, t) \in C_\alpha(\bar{Q})$, $f(x, t) \in C_\alpha(\bar{Q})$, *где* $\alpha \in (0, 1)$. *Тогда линейная задача*

$$-W_t + A^{ij}(x, t) W_{x_i x_j} - f(x, t) = 0 \text{ в } Q, \quad W = \varphi \text{ на } \Gamma, \tag{1.4}$$

где $A^{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2$, $\nu = \mathrm{const} > 0$, $(x, t) \in Q$, *имеет единственное решение* $W \in C_{2+\alpha}(Q \cup \Gamma') \cap C_{1+\beta}(\bar{Q})$ *при любом* $\beta \in (0, 1)$, *причем справедливы оценки*

$$\|W\|_{2+\alpha, \bar{Q}'} \leqslant c_1 \tag{1.5}$$

и

$$\|W\|_{1+\beta, \bar{Q}} \leqslant c_2, \tag{1.6}$$

где $\bar{Q}'$ — *любой компакт, содержащийся в* $Q \cup \Gamma'$, $c_1 = c_1(n, \nu, \|a^{ij}\|_{\alpha, \bar{Q}}, \|f\|_{\alpha, \bar{Q}}, \|\varphi\|_{2+\alpha, \bar{Q}}, d)$, d — *расстояние от* Q' *до* $\partial\Omega \times \{t = 0\}$, $c_2 = c_2(n, \nu, \|a^{ij}\|_{\alpha, \bar{Q}}, \|f\|_{\alpha, \bar{Q}}, \|\varphi\|_{2+\alpha, \bar{Q}}, \beta)$. *Если граничная функция* φ *удовлетворяет на* $\partial\Omega \times \{t = 0\}$ *условию согласования*

$$-\varphi_t + A^{ij}(x, t)\varphi_{x_i x_j} - f(x, t) = 0, \tag{1.7}$$

то решение $W \in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$.

Доказательство. Теорема 1.1 является объединением известных результатов А. Фридмана [123] и В. А. Солонникова [116] (см. также [80], с. 260—261 и 388—389). В частности, оценка (1.5) получена А. Фридманом, оценка (1.6) — В. А. Солонниковым.

Теорема 1.2. (О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева). *Пусть функция* $u \in C^{2,1}(Q \cup \Gamma') \cap C(\bar{Q})$ *удовлетворяет в* Q *уравнению* (1.1) *и совпадает на* Γ *с функцией* $\varphi(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q})$. *Пусть на этом решении*

$$\nu|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x, t, u(x, t), \nabla u(x, t))\xi_i\xi_j \leqslant \mu|\xi|^2, \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n; \ \nu, \mu = \mathrm{const} > 0,$$

и коэффициенты $a^{ij}(x, t, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x, t, u, p)$ *непрерывны вместе со всеми своими частными производными первого порядка в области* $\{(x, t) \in \bar{Q}\} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| \leqslant M\}$, *где* $m = \max\limits_{\bar{Q}}|u(x, t)|$, $M = \max\limits_{\bar{Q}}|\nabla u(x, t)|$. *Пусть, наконец,* $\partial\Omega \in C^2$. *Тогда существует* $\alpha \in (0, 1)$, *при котором* $u \in C_{1+\alpha}(\bar{Q})$, *причем*

$$\|u\|_{1+\alpha, \bar{Q}} \leqslant c_3, \tag{1.8}$$

где константа c_3 *зависит лишь от* n, ν, μ, m, M, *верхних границ в* $\bar{Q}$ *модулей функций* a^{ij}, $\dfrac{\partial a^{ij}}{\partial p_k}$, $\dfrac{\partial a^{ij}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial a^{ij}}{\partial t}$, a, $\dfrac{\partial a}{\partial p_k}$, $\dfrac{\partial a}{\partial u}$, $\dfrac{\partial a}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial a}{\partial t}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, *вычисляемых на рассматриваемом решении, от* $\|\varphi\|_{C^{2,1}(\bar{Q})}$ *и от* C^2*-норм функций, описывающих границу* $\partial\Omega$. *Этими же величинами определяется и показатель* α.

Доказательство теоремы 1.2 содержится, в частности, в монографии [80] (см. с. 608—609 и 505).

Приведем теперь одну известную теорему о неподвижной точке компактного оператора в банаховом пространстве, которая будет использована ниже.

Теорема Лерэ—Шаудера (в форме Шеффера). *Пусть T — компактный оператор, переводящий банахово пространство B в себя. Если для любых элементов $v \in B$, удовлетворяющих уравнению*

$$v = \tau T v, \quad \tau \in [0, 1],$$

справедлива оценка $\|v\|_B \leqslant c$ с константой c, не зависящей ни от v, ни от $\tau \in [0, 1]$, то оператор T имеет хотя бы одну неподвижную точку в B, т. е. существует $v \in B$, для которого $v = Tv$.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы данного параграфа.

Теорема 1.3. *Пусть функции $a^{ij}(x, t, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x, t, u, p)$ принадлежат классу C^1 на множестве $\bar{Q} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| \leqslant M\}$ и удовлетворяют условию (1.2), $\Omega \in C_{2+\gamma}$, $\varphi \in C_{2+\gamma}(\bar{Q})$, $\gamma \in (0, 1)$. Если произвольное решение $v \in C^{2,1}(\bar{Q})$ задачи*

$$-v_t + a^{ij}(x, t, v, \nabla v) v_{x_i x_j} - \tau a(x, t, v, \nabla v) = 0 \text{ в } Q, \quad v = \tau\varphi \text{ на } \Gamma, \tag{1.9}$$

где $\tau \in [0, 1]$, удовлетворяет неравенствам

$$\max_{\bar{Q}} |v| \leqslant m, \quad \max_{\bar{Q}} |\nabla v| \leqslant M, \tag{1.10}$$

где m и M не зависят ни от v, ни от $\tau \in [0, 1]$ и на $\partial\Omega \times \{t = 0\}$ выполнены условия $\varphi = 0$, $\nabla\varphi = 0$ и

$$-\varphi_t + a^{ij}(x, t, \varphi, \nabla\varphi) \varphi_{x_i x_j} - a(x, t, \varphi, \nabla\varphi) = 0, \tag{1.11}$$

то задача (1.3) имеет хотя бы одно решение $u \in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$, $\alpha \in (0\gamma]$.

Доказательство. Пусть $w \in C_{1+\alpha}(\bar{Q})$, где выбор показателя $\alpha \in (0, \gamma)$ будет уточнен ниже. Рассмотрим линейную задачу

$$-W_t + a^{ij}(x, t, w, \nabla w) W_{x_i x_j} - a(x, t, w, \nabla w) = 0 \text{ в } Q, \quad W = \varphi \text{ на } \Gamma, \tag{1.12}$$

т. е. задачу вида (1.4) при $A^{ij}(x, t) = a^{ij}(x, t, w, \nabla w)$, $i, j = 1, \ldots n$, и $f(x, t) = a(x, t, w, \nabla w)$. Очевидно, что для задачи (1.12) выполнены все условия теоремы 1.1. Поэтому задача (1.12) имеет единственное решение $W \in C_{2+\alpha}(Q \cup \Gamma') \cap C_{1+\beta}(\bar{Q})$, $\forall \beta \in (0, 1)$, что определяет некоторый оператор T, преобразующий банахово пространство $C_{1+\alpha}(\bar{Q})$ в себя. Легко видеть, что этот оператор компактен. Действительно, ввиду оценки Солонникова (1.6) всякое ограниченное в $C_{1+\alpha}(Q)$ множество переводится оператором T в множество, ограниченное в $C_{1+\beta}(\bar{Q})$, где $\beta > \alpha$. Поскольку вложение $C_{1+\beta}(\bar{Q})$ в $C_{1+\alpha}(\bar{Q})$ компактно, отсюда и следует компактность оператора T.

Докажем теперь, что множество всех неподвижных точек операторов τT, $\tau \in [0, 1]$, ограничено в $C_{1+\alpha}(\bar{Q})$ при надлежащем выборе $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $v = \tau T v$, $\tau \in [0, 1]$, $v \in C_{2+\alpha}(Q \cup \Gamma') \cap C_{1+\beta}(\bar{Q})$, $\forall \beta \in (0, 1)$. Из определения оператора T следует тогда, что такая функция v есть решение задачи (1.9). Ввиду (1.11) и теоремы 1.1 $v \in C^{2+\alpha}(\bar{Q}) \subset C^{2,1}(\bar{Q})$. Согласно условию теоремы 1.3, для нее справедливы неравенства (1.10). Применяя теорему 1.2, заключаем, что для v справедлива оценка (1.8) при некотором определенном значении $\alpha \in (0, \gamma]$. Именно это значение α мы и считаем выбранным при рассмотрении пространства $C_{1+\alpha}(\bar{Q})$. Применяя тогда теорему Лерэ—Шаудера в форме Шеффера, заключаем, что задача (1.3) имеет хотя бы одно решение $u \in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$. Теорема 1.3 доказана.

§ 2. Оценки $|\nabla u|$ на Γ

Лемма 2.1. (Д. Е. Эдмунд, Л. А. Пелетье). *Пусть функция* $u \in C^{2,1}(Q) \cap C^{1,0}(\bar{Q})$, *где* $C^{1,0}(\bar{Q})$ — *множество всех функций* $u(x, t)$, *непрерывных со своими производными* u_{x_i}, $i=1, \ldots, n$, *в* $\bar{Q}$, *удовлетворяет в цилиндре* Q *уравнению вида* (1.1), *причем предполагается, что выполнено условие* (1.2) *и что* a^{ij}, $\frac{\partial a^{ij}}{\partial p_k}$, a, $\frac{\partial a}{\partial p_k}$, $i, j, k=1, \ldots, n$, *суть непрерывные функции своих аргументов в* $\bar{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Пусть (барьерная) функция* $\omega(x, t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ *при любой константе* $c \geqslant 0$ *удовлетворяет в* $\Omega \times (0, T]$ *неравенству*

$$\mathscr{L}(\omega+c) \equiv -\omega_t + a^{ij}(x, t, \omega+c, \nabla\omega)\omega_{x_ix_j} - a(x, t, \omega+c, \nabla\omega) \leqslant 0. \qquad (2.1)$$

Тогда если $u(x, t) \leqslant \omega(x, t)$ *на параболической границе* Γ *цилиндра* Q, *то* $u(x, t) \leqslant \omega(x, t)$ *и во всем цилиндре* Q.

Доказательство леммы 2.1 приведено в работе **[13]**. Оно основано на применении строгого принципа максимума для линейных параболических уравнений.

Теорема 2.1. *Пусть* $\Omega \in C^3$, *а функции* a^{ij}, $\frac{\partial a^{ij}}{\partial p_k}$, a, $\frac{\partial a}{\partial p_k}$, $i, j, k= =1, \ldots, n$, *непрерывны и удовлетворяют условию* (1.2) *в* $\bar{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Пусть на множестве* $\{D_0 \times (0, T]\} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$, *где* D_0 *определяется условием* (1.3.2), $m = \mathrm{const} \geqslant 0$, $l = \mathrm{const} \geqslant 0$, *выполнено неравенство*

$$|a(x, t, u, p)| \leqslant \psi(|p|)\mathscr{E}_1 + \delta(|p|)\mathscr{E}_2, \qquad (2.2)$$

где $\mathscr{E}_1 \equiv a^{ij}(x, t, u, p)p_ip_j$, $\mathscr{E}_2 = \mathrm{Sp}\,A\,|p|$, $A = \|a^{ij}(x, t, u, p)\|$, $\psi(\rho)$, $0 \leqslant \rho < +\infty$, — *положительная монотонная непрерывная функция, удовлетворяющая условию* (1.4.2), $\delta(\rho)$, $0 < \rho < +\infty$, — *неотрицательная невозрастающая функция, удовлетворяющая условию* (1.4.3). *Пусть* $u \in C^{2,1}(Q) \cap C^{1,0}(\bar{Q})$ — *произвольное решение в* $D_0 \times (0, T)$ *уравнения* (1.1), *удовлетворяющее условию* $u = \varphi$ *на* Γ, *где* $\varphi \in C^{3,1}(\bar{Q})$, *причем* $C^{3,1}(\bar{Q})$ — *множество функций* $u(x, t)$, *непрерывных в* $\bar{Q}$ *вместе со своими производными* u_{x_i}, $u_{x_ix_j}$, $u_{x_ix_jx_k}$ *и* u_t, *и неравенству* $|u| \leqslant m$ *в* $D_0 \times (0, T)$. *Предположим далее, что выполнено условие*

$$\mathscr{E}_1\psi(|p|) + \mathscr{E}_2 \to \infty \text{ при } p \to \infty \text{ (равномерно относительно } (x, t) \in \bar{Q},$$
$$u \in [-m, m]). \qquad (2.3)$$

Тогда:

1) *если область* Ω *строго выпукла, то*

$$\left|\frac{\partial u(y, t)}{\partial \nu}\right| \leqslant M_1 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \qquad (2.4)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — *производная по направлению внутренней нормали к* $\partial\Omega \times (0, T]$ *в точке* $(y, t) \in \partial\Omega \times (0, T]$, *причем константа* M_1 *зависит лишь от* m, l, $\psi(\rho)$, $\delta(\rho)$, $\|\varphi\|_{C^{2,1}(\bar{Q})}$, k^{-1}, K, *где* $k = \inf\limits_{\substack{i=1, \ldots, n-1 \\ y \in \partial\Omega}} k_i(y)$, $K = \sup\limits_{\substack{i=1, \ldots, n-1 \\ y \in \partial\Omega}} k_i(y)$, $k_i(y)$ — *главные кривизны поверхности* $\partial\Omega$ *в точке* y;

2) *если на множестве* $\{D_0 \times (0, T]\} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$ *выполнено неравенство*

$$\mathscr{E}_2 \leqslant \psi(|p|)\mathscr{E}_1, \qquad (2.5)$$

где $\psi(\rho)$, $0 \leqslant \rho < +\infty$, — *та же функция, что и в* (2.2), *то оценка* (2.4) *справедлива с константой* M_1, *зависящей лишь от* m, l, $\psi(\rho)$, $\|\varphi\|_{C^{2,1}(\bar{Q})}$ *и* $K \equiv \sup\limits_{\substack{i=1,\ldots,n-1 \\ y \in \partial\Omega}} |k_i(y)|$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Будем считать, что условие (2.2) выполнено при всех $u \in \mathbb{R}$ (см. доказательство теоремы 1.4.1). Рассмотрим в $D_0 \times (0, T]$ барьерную функцию

$$\omega(x, t) = \varphi(x, t) + h(d), \tag{2.6}$$

где функция $h(d) \equiv h(d(x))$, $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $x \in D_0$, $h(d) \in C^2(0, \delta) \cap \cap C([0, \delta])$, $0 < \delta < \delta_0$, причем выбор функции $h(d)$ и числа δ мы уточним ниже. Применяя лемму 1.3.2, получим при $\forall c = \mathrm{const} > 0$ неравенство

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant \mathscr{T}\frac{h'' + Kh'}{h'^2} - k\,\mathrm{Sp}\,Ah' + \left(-\varphi_t + a^{ij}\varphi_{x_i x_j} - a\right), \tag{2.7}$$

где $\mathscr{T} = A(p - p_0)(p - p_0)$, $A = \|a^{ij}(x, t, \omega(x, t) + c, \nabla\omega(x, t))\|$, $p = \nabla\omega(x, t)$, $p_0 = \nabla\varphi(x, t)$, $p = p_0 + \nu h'$, $a = a(x, t, \omega(x, t) + c, \nabla\omega(x, t))$, причем через ∇ в этой главе всегда обозначается пространственный градиент.

Неравенство (2.7) отличается от неравенства (1.4.6) только членом $-\varphi_t$ в правой части. Поскольку условия (2.2) и (1.4.1) совершенно аналогичны, то точно так же, как при доказательстве правой части теоремы 1.4.1, получим оценку

$$\begin{gathered}\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant |\varphi_t| + Fh'\left\{\frac{h''}{h'^3} + \frac{K}{h'^2} + \frac{2\psi(h' \pm c_\varphi)}{h'}\right\} + \\ + h'\left\{-k + \frac{c_\varphi}{h'} + \frac{4c_\varphi^2\psi(h' \pm c_\varphi)}{h'} + 2\delta(h' - c_\varphi)\right\}\mathrm{Sp}\,A,\end{gathered} \tag{2.8}$$

где $c_\varphi = \max\limits_{\bar{Q}}(|\varphi| + |\nabla\varphi| + |D^2\varphi|)$, $|D^2\varphi|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \varphi^2_{x_i x_j}$, если только $h'(d) \geqslant c_\varphi + l + 1$ на $[0, \delta]$. Учитывая свойства функций $\psi(\rho)$ и $\delta(\rho)$ и считая, что $h'(d) \geqslant \alpha$, где $\alpha = \max\{c_\varphi + l + 1, \alpha_0, \alpha_1\}$, α_0 выбирается так, что

$$\frac{c_\varphi}{\rho} + \frac{4c_\varphi^2\psi(\rho \pm c_\varphi)}{\rho} + 2\delta(\rho - c_\varphi) \leqslant \frac{k}{2},$$

а $\alpha_1 > 0$ будет выбрано ниже, выведем из (2.8) неравенство

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant |\varphi_t| + \mathscr{T}h'\left\{\frac{h''}{h'^2} + \Phi(h')\right\} - \frac{k}{2}\,\mathrm{Sp}\,Ah' - \frac{1}{2}\mathscr{T}h'\Phi(h'), \tag{2.9}$$

причем оценка (2.9) справедлива для всех $(x, t) \in D \times (0, T]$, где $D \equiv \{x \in D_0 : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$, а $\Phi(\rho) = 2(K\rho^{-2} + 2\psi(\rho + c_\varphi)\rho^{-1})$.

Уточним теперь выбор функции $h(d)$ и числа δ. Пусть δ определено по формуле (1.3.8) при $\bar{\alpha} = \max(\alpha, q\delta_0^{-1})$, $q = c_\varphi + m$, а функция $h(d)$ — на отрезке $[0, \delta]$ по формуле (1.3.9). Из леммы 1.3.3 следует тогда, что $\delta \in (0, \delta_0)$ и

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant \max_{\bar{Q}}|\varphi_t| - \frac{1}{2}\mathscr{T}h'\Phi(h') - \frac{k}{2}\,\mathrm{Sp}\,Ah' \quad \text{на } D \times (0, T). \tag{2.10}$$

Учитывая соотношение (1.4.8) и то, что функцию $\Phi(\rho)$ можно считать убывающей, запишем вместо (2.10) неравенство

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant \max_{\bar{Q}}|\varphi_t| - \frac{1}{4}\mathscr{E}_1 h'\Phi(h') - \frac{k}{4}\,\mathrm{Sp}\,Ah' \quad \text{на } D \times (0, T], \tag{2.11}$$

если только α_1 достаточно велико. Учитывая условие (2.3) и соотношения $h' \geqslant |p| - c_\varphi \geqslant \frac{1}{2}|p|$, можно выбрать α_1 столь большим, что правая часть (2.11) будет заведомо отрицательной, т. е.

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant 0 \text{ на } D \times (0, T]. \qquad (2.12)$$

При этом мы воспользовались также тем, что $(1/4)h'\Phi(h') \geqslant \psi(h' \pm c_\varphi) \geqslant \psi(|p|)$. Очевидно, что $u \leqslant \omega$ на $\partial\Omega \times (0, T]$ и на $D \times \{t=0\}$. На множестве же $\{x \in \Omega : d(x) = \delta\} \times (0, T]$ справедливы неравенства $u \leqslant m = (m + c_\varphi) - c_\varphi = h(\delta) - c_\varphi \leqslant \omega$. Таким образом, $u \leqslant \omega$ на параболической границе цилиндра $D \times (0, T]$. Применяя лемму 2.1, заключаем, что $u \leqslant \omega$ и в $D \times (0, T]$. Отсюда (см. (1.4.12), (1.4.13)) и следует оценка (2.4).

Итак, первая часть теоремы 2.1 доказана. Докажем теперь вторую ее часть, также считая, что условие (2.2) выполнено при всех $u \in \mathbb{R}$. Ввиду условия (2.5) можно считать, что в (2.2) $\delta(\rho) \equiv 0$. Точно так же как при доказательстве второй части теоремы 1.4.1, получим оценку

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant |\varphi_t| + \mathscr{F}h'\left\{\frac{h''}{h'^2} + \Phi(h')\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{F}h'\Phi(h'), \qquad (2.13)$$

причем

$$\Phi(\rho) = 8(c_\varphi + K + 1)\,\frac{\psi(\rho \pm c_\varphi)}{\rho - c_\varphi},$$

если только $h' \geqslant c_\varphi + l + 1 + \alpha_1$, где $\alpha_1 > 0$ выбирается так, чтобы обеспечить выполнение неравенства вида (1.4.14) на $\{D \times (0, T]\} \times \mathbb{R} \times \{|p| > \max(l, \alpha_1)\}$.

Уточним теперь выбор функции $h(d)$ и числа δ. Пусть δ определяется из формулы (1.3.8) при $\bar{\alpha} = \max(\alpha, q\delta_0^{-1})$, $\alpha = c_\varphi + l + 1 + \alpha_1 + \alpha_2$, причем выбор $\alpha_2 > 0$ будет уточнен ниже, $q = c_\varphi + m$, а функция $h(d)$ определена на $[0, \delta]$ по формуле (1.3.9). Из леммы 1.3.3 и соотношений (1.4.8) и (1.4.14) следует тогда, что $\delta \in (0, \delta_0)$ и

$$\mathscr{L}(\omega + c) \leqslant \max_{\bar{Q}}|\varphi_t| - \frac{1}{2}\mathscr{F}h'\Phi(h') \leqslant \max_{\bar{Q}}|\varphi_t| - \frac{1}{4}\mathscr{E}_1 h'\Phi(h') + \frac{1}{8}\mathscr{E}_1 h'\Phi(h') \leqslant \max_{\bar{Q}}|\varphi_t| - \frac{1}{8}\mathscr{E}_1 h'\Phi(h'). \qquad (2.14)$$

Учитывая условие (2.3) и соотношения $h' - c_\varphi \leqslant |p| \leqslant h' + c_\varphi$, можно выбрать α_2 столь большим, что правая часть в (2.14) будет отрицательной, так что справедливо неравенство (2.12). Дальнейшее доказательство оценки (2.4) точно такое же, как при доказательстве первой части теоремы. Теорема 2.1 доказана.

Заметим, что справедливость оценки (2.4) при замене во второй части теоремы 2.1 условий (2.2) и (2.5) более сильным условием

$$|p| + \mathrm{Sp}\,A \cdot |p| + |a| \leqslant \psi(|p|)\mathscr{E}_1,$$

где $\psi(\rho)$, $0 \leqslant \rho < +\infty$, — такая же функция, как в (2.2), (2.5), была установлена в работе **[13]**. Таким образом, этот результат работы **[13]** является частным случаем второй части теоремы 2.1.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $\Omega \in C^3$, и пусть функции $a^{ij}(x, t, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $a(x, t, u, p)$ непрерывны и удовлетворяют условию* (1.2) *в* $\bar{Q}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. *Предположим, что на множестве* $\{D_0\times(0,\ T]\}\times\{|u|\leqslant\leqslant m\}\times\{|p|>l\}$ *выполнено неравенство*

$$|a(x,\ t,\ u,\ p)|\leqslant\psi(|p|)\mathcal{E}_1+\delta(|p|)\mathcal{E}_2, \tag{2.15}$$

где функции $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\psi(\rho)$, $\delta(\rho)$, $0\leqslant\rho<+\infty$, *— такие же, как в теореме* 2.1. *Пусть* $u\in C^{2,1}(Q)\cap C^{1,0}(\bar{Q})$ *— произвольное решение в* $D_0\times(0,\ T)$ *уравнения* (1.1), *удовлетворяющее условиям:* $u=\varphi$ *на* Γ, *где* $\varphi=\varphi(x)\in\in C^2(\bar{\Omega})$, *и* $|u|\leqslant m$ *в* $D_0\times(0,\ T]$. *Тогда:*

1) *если область* Ω *строго выпукла, то оценка* (2.4) *справедлива с константой* M_1, *зависящей лишь от* m, l, $\psi(\rho)$, $\delta(\rho)$, $\|\varphi\|_{C^2(\bar{\Omega})}$, k^{-1} *и* K;

2) *если на множестве* $\{D_0\times(0,\ T]\}\times\{|u|\leqslant m\}\times\{|p|>l\}$ *выполнено неравенство* (2.5), *где* $\psi(\rho)$ *— та же функция, что и в* (2.13), *то оценка* (2.4) *справедлива с константой* M_1, *зависящей лишь от* m, l, $\psi(\rho)$, $\|\varphi\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ *и* K.

Доказательство. Теорема 2.2 доказывается точно так же, как теорема 2.1, причем условие (2.3) теперь не используется, поскольку в неравенствах (2.9) и (2.13) $\varphi_t\equiv 0$. В остальном доказательство теоремы 2.1 остается без изменения. Теорема 2.2 доказана.

§ 3. Оценки $\max\limits_{\bar{Q}}|\nabla u|$

В этом параграфе мы предполагаем, что функции $a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)$, $i,\ j=1,\ldots,n$, и $a(x,\ t,\ u,\ p)$ принадлежат классу $C^1(\mathfrak{M}_{Q,m,L})$, где $\mathfrak{M}_{Q,m,L}\equiv\bar{Q}\times\{|u|\leqslant m\}\times\{|p|>L\}$, m, $L=\mathrm{const}\geqslant 0$. Предположим также, что

$$a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)\xi_i\xi_j\geqslant 0,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \text{на}\ \mathfrak{M}_{Q,m,L}. \tag{3.1}$$

Пусть $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ — произвольный вектор с $|\tau|=1$. Обозначим $A^\tau\equiv a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)\tau_i\tau_j\equiv A\tau\cdot\tau$ и введем для произвольной функции $\Phi(x,\ t,\ u,\ p)$ обозначения:

$$\delta\Phi\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{|p|}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+|p|\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad p\Phi_p\equiv\sum_{k=1}^{n}p_k\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}.$$

Теорема 3.1. *Предположим, что на множестве* $\mathfrak{M}_{Q,m,L}$ *при любом* τ, $|\tau|=1$, *выполнены неравенства*

$$\begin{gathered}|pA^\tau_p|\leqslant\sqrt{\mu_1A^\tau\mathcal{E}_1\omega(|p|)}\,|p|^{-1},\quad |\delta A^\tau|\leqslant\sqrt{\frac{\sigma_1A^\tau\mathcal{E}_1}{\omega(|p|)}},\\ |a-pa_p|\leqslant\mu_2\mathcal{E}_1+\tilde{\mu}_2,\quad \delta a\geqslant-\sigma_2\mathcal{E}_1|p|[\omega(|p|)]^{-1}-\tilde{\mu}_3|p|,\quad \mathcal{E}_1>0,\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\mathcal{E}_1\equiv\mathcal{E}_1(x,\ t,\ u,\ p)\equiv a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)p_ip_j$, μ_1, μ_2, $\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\mu}_3$ *— произвольные неотрицательные постоянные,* σ_1, σ_2 *— неотрицательные постоянные, достаточно малые в зависимости от* n, μ_1, μ_2, T, $\tilde{\mu}_3$, m,*) *и где* $\omega(\rho)$, $0\leqslant\leqslant\rho<+\infty$, *— произвольная непрерывная неубывающая функция. Тогда для любого решения* $u\in C^{3,1,1}(Q)\cap C^{1,0}(\bar{Q})$ **) *уравнения* (1.1), *такого, что* $\max\limits_{\bar{Q}}|u|\leqslant m$, *справедлива оценка*

$$\max_{\bar{Q}}|\nabla u|\leqslant\bar{M}_1, \tag{3.3}$$

где $\bar{M}_1$ *зависит лишь от* n, m, $M_1\equiv\max\limits_{\Gamma}|\nabla u|$, L, μ_1, μ_2, $\tilde{\mu}_2$ *и* T.

---

*) Эта зависимость будет уточнена при доказательстве теоремы.

**) Через $C^{3,1,1}(Q)$ обозначается множество функций u, непрерывных в Q вместе u_t, u_{tx_i}, u_{x_i}, $u_{x_ix_j}$, $u_{x_ix_jx_k}$, $i,\ j,\ k=1,\ldots,n$.

Доказательство. Применяя к уравнению (1.1) оператор $u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ и обозначая $v = \sum_{k=1}^{n} u_k^2$, где $u_k \equiv u_{x_k}$, получим в Q тождество

$$\frac{1}{2}(-v_t + a^{ij}v_{ij}) = a^{ij}u_{ki}u_{kj} + \frac{1}{2}\left[a_{p_l} - a_{p_l}^{ij}u_{ij}\right]v_l + \sqrt{v}\,(\delta a - \delta a^{ij}u_{ij}), \qquad (3.4)$$

причем в (3.4) и ниже мы используем сокращенные обозначения частных производных $v_l \equiv v_{x_l}$, $u_{ij} \equiv u_{x_i x_j}$ и т. п. Полагая в (3.4) $v = e^{\varkappa t}\bar{v}$, $\varkappa = \mathrm{const} > 0$, получим тождество

$$-\bar{v}_t + a^{ij}\bar{v}_{ij} = 2e^{-\varkappa t}a^{ij}u_{ki}u_{kj} + [a_{p_l} - a_{p_l}^{ij}u_{ij}]\,\bar{v}_l + 2\bar{v}\left(\frac{\varkappa}{2} + \frac{\delta a}{|p|} - \frac{\delta a^{ij}}{|p|}u_{ij}\right), \qquad (3.5)$$

которое далее мы рассматриваем лишь на множестве $Q_L \equiv \{(x, t) \in Q : |\nabla u| > L\}$. Учитывая условие на δa в (3.2) и полагая $\varkappa = 2\tilde{\mu}_3$, получим на Q_L неравенство

$$-\bar{v}_t + a^{ij}\bar{v}_{ij} \geqslant 2e^{-\varkappa T}a^{ij}u_{ki}u_{kj} + [a_{p_l} - a_{p_l}^{ij}u_{ij}]\,\bar{v}_l + 2\bar{v}\left(\frac{\bar{\delta} a}{|p|} - \frac{\delta a^{ij}}{|p|}u_{ij}\right), \qquad (3.6)$$

где $\bar{\delta} a \equiv \delta a + \mu_3 |p|$, так что в силу (3.2)

$$\bar{\delta} a \geqslant -\sigma_2 \mathcal{E}_1 \frac{|p|}{\omega}.$$

Умножим обе части (3.6) на $f(\bar{v}(x))$, где $f(\bar{v}) > 0$, $f'(\bar{v}) \geqslant 0$ при $\bar{v} > 0$, и положим $w = \int_0^{\bar{v}} f(t)\,dt$. Пусть $z = z(u)$ — некоторая положительная дважды дифференцируемая функция на отрезке $[-m, m]$. Обозначим через $\bar{w}$ функцию, определяемую из формулы $w = z(u)\bar{w}$. Тогда точно так же, как при доказательстве теоремы 1.6.1, получим неравенство (см. вывод неравенства (1.6.18))

$$z(-\bar{w}_t + a^{ij}\bar{w}_{ij}) + b^k\bar{w}_k \geqslant \left(-z'' + c_0\frac{z'^2}{z}\frac{w\omega}{\bar{v}f}\right)\mathcal{E}_1\bar{w} + e^{-\varkappa T}fa^{ij}u_{ki}u_{kj} + z'(pa_p - a)\,\bar{w} + 2f\bar{v}\frac{\bar{\delta} a}{|p|} - 2\sigma_1 n e^{\varkappa T}\frac{f\bar{v}}{\omega}\mathcal{E}_1, \quad (x, t) \in Q_L, \qquad (3.7)$$

где $c_0 = (n/2)\exp(\varkappa T)$. Будем считать, что $f(\bar{v}) = \exp\left\{2c_0\int_1^{\bar{v}}\omega(t)\,t^{-1}dt\right\}$ при $\bar{v} \geqslant 1$. Учитывая теперь условия на $pa_p - a$ и $\bar{\delta} a$ (см. (3.2)) и неравенство (1.6.19), выведем из (3.7) неравенство

$$z(-\bar{w}_t + a^{ij}\bar{w}_{ij}) + b^k\bar{w}_k \geqslant \left[-z'' + \frac{1}{8}\frac{z'^2}{z} - \mu_2|z'| - (c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2)\,z\right]\mathcal{E}_1\bar{w} - |z'|\,\tilde{\mu}_2\bar{w}, \quad c_1 = 16c_0 n e^{\varkappa T}, \quad c_2 = 8c_0. \qquad (3.8)$$

Пусть $z = 1 + e^{\alpha m} - e^{\alpha u}$. Очевидно, что выражение в квадратных скобках в (3.8) превосходит величину $\alpha(\alpha - \mu_2)\,e^{\alpha u} - (c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2)(1 + e^{\alpha m})$. Пусть $\alpha = \mu_2 + 1$, а σ_1 и σ_2 настолько малы, что

$$(\mu_2 + 1)\,e^{-(\mu_2+1)m} > (c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2)\,[1 + e^{(\mu_2+1)m}]. \qquad (3.9)$$

Тогда, учитывая еще, что $|z'| \leqslant \alpha e^{\alpha m}$, запишем вместо (3.8) неравенство

$$z(-\bar{w}_t + a^{ij}\bar{w}_{ij}) + b^k\bar{w}_k > \alpha e^{\alpha m}\tilde{\mu}_2\bar{w}, \quad (x, t) \in Q_L. \qquad (3.10)$$

Полагая $\bar{w} = e^{-\gamma t}\bar{\bar{w}}$, $\gamma = \alpha e^{\alpha m}\tilde{\mu}_2$, получим из (3.10) (с учетом того, что $z \geqslant 1$) неравенство

$$z(-\bar{\bar{w}}_t + a^{ij}\bar{\bar{w}}_{ij}) + b^k\bar{\bar{w}}_k > 0, \quad (x, t) \in Q_L. \tag{3.11}$$

Ввиду (3.11) очевидно, что функция $\bar{\bar{w}}$ не может иметь максимума в области Q_L. Поэтому

$$\max_Q \bar{w} \leqslant \max\{\max_\Gamma \bar{w}, \max_{\{v \leqslant L\}} \bar{w}\} e^{\gamma T},$$

$$\max_Q w \leqslant \frac{\max z}{\min z} \max\left\{\int_0^{M_1^2} f(t)\,dt, \int_0^{L^2} f(t)\,dt\right\} e^{\gamma T}. \tag{3.12}$$

Из (3.12) с учетом вида функции z и ввиду возрастания функции f легко следует оценка

$$\int_0^{\bar{M}_1^2} f(t)\,dt \leqslant \max\left\{\int_0^{(aM_1)^2} f(t)\,dt, \int_0^{(aL)^2} f(t)\,dt\right\}, \tag{3.13}$$

где $\bar{M}_1 \equiv \max_Q |\nabla u|$, $a = [(1 + e^{(\mu_2+1)m}) e^{(\varkappa+\gamma)T}]^{1/2}$. Тогда из (3.13) следует, очевидно, оценка

$$\bar{M}_1 \leqslant a \max\{M_1, L\}. \tag{3.14}$$

Теорема 3.1 доказана.

Выделим особо важный частный случай теоремы 3.1, получающийся из нее предположением $\omega(\rho) \equiv \mu_1 = \text{const} \geqslant 1$.

Теорема 3.1′. *Пусть на множестве* $\mathfrak{M}_{Q,m,L}$ *при любом* $\tau \in \mathbb{R}^n$, $|\tau| = 1$, *справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} |pA_p^\tau| \leqslant \sqrt{\mu_1 A^\tau \mathscr{E}_1}\,|p|^{-1}, \quad |\delta A^\tau| \leqslant \sqrt{\sigma_1 A^\tau \mathscr{E}_1}, \\ |a - pa_p| \leqslant \mu_2 \mathscr{E}_1 + \tilde{\mu}_2, \quad \delta a \geqslant -\sigma_2 \mathscr{E}_1 |p| - \tilde{\mu}_3 |p|, \quad \mathscr{E}_1 > 0, \end{gathered} \tag{3.15}$$

где μ_1, μ_2, $\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\mu}_3$, σ_1, σ_2 — *неотрицательные константы, причем выполнено условие вида* (3.9). *Тогда для любого решения* $u \in C^{3,1,1}(Q) \cap C^{1,0}(\bar{Q})$ *уравнения* (1.1), *такого, что* $\max_Q |u| \leqslant m$, $\max_\Gamma |\nabla u| \leqslant M_1$, *справедлива оценка* (3.14).

Теорема 3.1′ содержит как частный случай известный результат О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой об оценке $\max_Q |\nabla u|$ для решений квазилинейных равномерно параболических уравнений [80]. Заметим, что в самое последнее время Ладыженская и Уральцева усилили свой результат для равномерно параболических уравнений, сняв условия ослабленного вхождения аргумента u в коэффициенты уравнения [85].

Теорема 3.1 (и, в частности, теорема 3.1′) дает оценку $\max_{\bar{Q}} |\nabla u|$ для уравнений, структура которых описывается в терминах мажоранты $\mathscr{E}_1$. Следующая теорема дает такую оценку для уравнений, структура которых описывается в терминах мажоранты $\mathscr{E}_2$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* (3.1), *и пусть на множестве* $\mathfrak{M}_{Q,m,L}$ *при любом* τ, $|\tau| = 1$, *выполнены неравенства*

$$\begin{gathered} |A_p^\tau|\,|p| \leqslant \sqrt{\mu_1 A^\tau \operatorname{Sp} A}, \quad |\delta A^\tau| \leqslant \sqrt{\sigma_1 A^\tau \operatorname{Sp} A}, \quad \operatorname{Sp} A > 0, \\ |a_p|\,|p| \leqslant \sigma_2 \mathscr{E}_2 + \tilde{\mu}_2 |p|, \quad \delta a \geqslant -\sigma_3 \mathscr{E}_2 - \tilde{\mu}_3 |p|, \end{gathered} \tag{3.16}$$

где μ_1, $\tilde\mu_2$, $\tilde\mu_3$ — *произвольные неотрицательные постоянные, а* σ_1, σ_2, σ_3 — *неотрицательные постоянные, достаточно малые в зависимости от* n, T, μ_1 *и диаметра области* Ω. *Тогда для любого решения* $u \in C^{3,1,1}(Q) \cap C^1(\bar Q)$ *уравнения* (1.1), *такого, что* $\max\limits_{Q}|u| = m$, $\max\limits_{\Gamma}|\nabla u| = M_1$, *справедлива оценка* (3.3), *где* $\bar M_1$ *зависит лишь от* n, m, M_1, L, μ_1, T *и диаметра* d *области* Ω. *При дополнительном условии* $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij} \geqslant \varepsilon_0 \operatorname{Sp} A$ *на* $\mathfrak{M}_{Q,m,L}$, *где* $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$, *в условиях* (3.16) *вместо* σ_2 *допускается произвольная константа* $\mu_2 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим тождество (3.4) на множестве $Q_L \equiv \equiv \{(x, t) \in Q : |\nabla u| > L\}$. Рассуждая точно так же, как при выводе оценок (1.7.2), получим неравенства вида (1.7.2) во всех точках области Q_L. С учетом этих неравенств выведем из (3.4) неравенство

$$-v_t + a^{ij}v_{ij} \geqslant a^{ij}u_{ki}u_{kj} + a_{p_l}v_l + 2\sqrt{v}\,\delta a - \\ - \mu_1 n \frac{|\nabla v|^2}{v} \operatorname{Sp} A - \sigma_1 n v \operatorname{Sp} A, \quad (x, t) \in Q_L. \tag{3.17}$$

Пусть $z = z(x, t)$ — положительная в $\bar Q$ функция класса $C^2(\bar Q)$. Положим $v = z\bar v$. Учитывая, что $v_t = z_t\bar v + z\bar v_t$, $v_i = z_i\bar v + z\bar v_i$, $v_{ij} = z_{ij}\bar v + z_i\bar v_j + + z_j\bar v_i + z\bar v_{ij}$, выведем из (3.17) неравенство

$$z(-\bar v_t + a^{ij}\bar v_{ij}) + b^k\bar v_k \geqslant (z_t - a^{ij}z_{ij})\bar v + \frac{1}{2}a^{ij}u_{ki}u_{kj} + a_{p_l}z_l\bar v + \\ + 2\frac{\delta a}{|p|}z\bar v - \mu_1 n \frac{|\nabla z|^2}{z}\operatorname{Sp} A\bar v - \sigma_1 n z \operatorname{Sp} A\bar v, \quad (x, t) \in Q_L, \tag{3.18}$$

причем вид b^k для дальнейшего безразличен. Учитывая условие (3.16) на $|a_p|$ и δa, выведем из (3.18) неравенство

$$z(-\bar v_t + a^{ij}\bar v_{ij}) + b^k\bar v_k \geqslant \Big\{-a^{ij}z_{ij} - \Big[\mu_1 n \frac{|\nabla z|^2}{z} + \sigma_2|\nabla z| - \\ - (n\sigma_1 + 2\sigma_3)z\Big]\operatorname{Sp} A + [z_t - \tilde\mu_2|\nabla z| - 2\tilde\mu_3 z]\Big\}\bar v, \quad (x, t) \in Q_L. \tag{3.19}$$

Положим $z = \alpha + e^{\varkappa t} - |x|^2$, $\alpha = (N+1)d^2$, $d = \max\limits_{\Omega}|x| > 0$, где $\varkappa > 0$ и $N > 0$ — некоторые константы. Учитывая, что $|\nabla z| \leqslant 2d\sqrt{n}$, $z_t = \varkappa e^{\varkappa t}$, $|\nabla z|^2 z^{-1} \leqslant 4nN^{-1}$, $z \leqslant (1 + N)d^2 + e^{\varkappa t}$, $z_{ij} = -2\delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера, $z_t = \varkappa e^{\varkappa t}$, напишем вместо (3.19) неравенство

$$z(-\bar v_t + a^{ij}\bar v_{ij}) + b^k\bar v_k \geqslant \Big\{\Big[2 - \frac{4\mu_1 n}{N} - 2\sigma_2 d - (n\sigma_1 + 2\sigma_3)((N+1)d^2 + e^{\varkappa T})\Big] \times \\ \times \operatorname{Sp} A + \big[\varkappa e^{\varkappa t} - 2\sqrt{n}\,\tilde\mu_2 d - 2\tilde\mu_3(1 + N)d^2 - 2\tilde\mu_3 e^{\varkappa t}\big]\Big\}\bar v. \tag{3.20}$$

Выберем сначала N так, что $2 - 4\mu_1 n^2 N^{-1} = 1$, а затем положим: $\varkappa = 2\tilde\mu_3 + \tilde\varkappa$, $\tilde\varkappa = 1 + 2\sqrt{n}\,\tilde\mu_2 d + 2\tilde\mu_3(1 + N)d^2$. Уточним теперь условия малости величин σ_1, σ_2, σ_3. Предположим, σ_1, σ_2, σ_3 настолько малы, что

$$2\sigma_2 d + (n\sigma_1 + 2\sigma_3)((N+1)d^2 + e^{\varkappa T}) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

Тогда из (3.20) вытекает неравенство

$$z(-\bar v_t + a^{ij}\bar v_{ij}) + b^k\bar v_k > 0 \quad \text{на } Q_L, \tag{3.22}$$

которое показывает, что функция $\bar v$ не может достигать своего максимума в области Q_L. Поэтому

$$\max_Q v \leqslant \max z \max \{\max_\Gamma \bar{v},\ \max_{\{v \leqslant L\}} \bar{v}\} \leqslant \frac{\max z}{\min z} \max \{\max_\Gamma v,\ L^2\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(N+1)\,d^2 + e^{\varkappa T}}{Nd^2} \max \left\{\max_\Gamma v,\ L^2\right\}, \tag{3.23}$$

откуда и следует оценка вида (3.3) с

$$\bar{M}_1 = \left(\frac{N+1}{N} + \frac{e^{\varkappa T}}{Nd^2}\right)^{1/2} \max (M_1,\ L).$$

Предположим теперь, что на множестве $\mathfrak{M}_{Q,\,m,\,L}$ выполнено условие $\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij} \geqslant \varepsilon_0 \operatorname{Sp} A$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$. В этом случае будем считать, что в неравенстве (3.19) в качестве функции z выступает функция $z = \alpha + e^{\varkappa t} + e^{\beta n d} - e^{-\beta \sum_{k=1}^{n} x_k}$, где $\varkappa$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $\beta = \mathrm{const} > 0$, $d = \sup_\Omega |x|$. Учитывая теперь, что $z \leqslant \alpha + e^{\varkappa t} + e^{\beta n d}$, $|\nabla z| \leqslant \sqrt{n}\beta e^{-\beta \sum_1^n x_k}$, $|\nabla z|^2 z^{-1} \leqslant \beta^2 e^{2\beta n d} \alpha^{-1}$, $z_{ij} = -\beta^2 e^{-\beta \sum_1^n x_k}$, выберем сначала $\beta > 0$ так, чтобы $\varepsilon_0\beta^2 - \sigma_2 \sqrt{n}\beta = 1/2\varepsilon_0\beta^2$. Тогда $-a^{ij} z_{ij} - \sigma_2 |\nabla z| \geqslant 1/2\varepsilon_0 \beta^2 e^{-\beta n d}$. Затем выберем $\alpha > 1$ так, чтобы $1/2\varepsilon_0\beta^2 e^{-\beta n d} - \mu_0 n \beta^2 e^{2\beta n d} \alpha^{-1} \geqslant (\varepsilon_0/4)\beta^2 e^{-\beta n d}$, и будем считать, что σ_1 и σ_3 столь малы, что

$$(n\sigma_1 + 2\sigma_3)(\alpha + e^{\varkappa T} + e^{\beta n d}) \leqslant \frac{1}{8} \varepsilon_0 \beta^2 e^{-\beta n d}, \tag{3.24}$$

где $\varkappa = 2\tilde{\mu}_3 + \tilde{\varkappa}$, $\tilde{\varkappa} = 1 + \tilde{\mu}_2 \sqrt{n}\beta e^{\beta n d} + 2\tilde{\mu}_3 (\alpha + e^{\beta n d})$. Тогда из (3.19) следует неравенство (3.22), из которого точно так же, как и в предыдущем случае, выводится оценка

$$\max_Q v \leqslant \frac{\alpha + e^{\varkappa T} + e^{\beta n d}}{\alpha + e^{\beta n d}} \max \{\max_\Gamma v,\ L^2\},$$

из которой и следует оценка (3.3) с

$$\bar{M}_1 = \left(\frac{\alpha + e^{\varkappa T} + e^{\beta n d}}{\alpha + e^{\beta n d}}\right)^{1/2} \max (M_1,\ L).$$

Теорема 3.2 доказана.

Рассмотрим в качестве примера уравнения, к которому применима теорема 3.2, уравнение вида

$$-u_t + \left(\frac{1 + |\nabla u|^2}{|\nabla u|^2} \delta_i^j - \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{|\nabla u|^2}\right) u_{x_i x_j} = a(x,\ t,\ u,\ \nabla u). \tag{3.25}$$

Анализ уравнения (1.7.13), проведенный в § 1.7, показывает, что для уравнения (3.25) все условия первой части теоремы 3.2 будут выполнены, если для правой части $a(x,\ t,\ u,\ p)$ этого уравнения выполняются условия

$$|a_p| \leqslant \mu_2, \quad \delta a \geqslant -\mu_3 \text{ на } \mathfrak{M}_{Q,\,m,\,L}. \tag{3.26}$$

Условия (3.26), как мы убедимся в § 5, являются в определенном смысле неулучшаемыми.

В заключение параграфа отметим, что априорная оценка $\max_Q |\nabla u|$ через $\max_Q |u|$ и $\max_\Gamma |\nabla u|$ для уравнений специфической структуры была получена в работе [13], где предполагалось, что старшие коэффициенты уравнения имеют следующий специальный вид:

$$a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)=\lambda(x,\ t,\ u,\ p)\,b^{ij}\left(\frac{p}{|p|}\right)+\lambda_1(x,\ t,\ u,\ p)\,p_i p_j,$$
$$i,\ j=1,\ldots,n,\ n\geqslant 2,\ \lambda>0 \text{ на } \mathfrak{M}_{Q,\,m,\,L}. \tag{3.27}$$

Условия на рост правой части уравнения с указанной в (3.27) главной частью даны в статье [13] в терминах мажоранты $\mathcal{E}_1$. Заметим, что при $\lambda_1<0$ во многих случаях выгоднее налагать условия на рост правой части в терминах $\mathcal{E}_2$, пользуясь теоремой 3.2 (см., в частности, уравнение (3.25)).

§ 4. Теоремы существования классического решения первой краевой задачи

Теоремы 1.3, 2.1, 2.2, 3.1 и 3.2 позволяют получить нижеследующие теоремы существования.

Теорема 4.1. *Пусть функции* $a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)$, $i,\ j=1,\ldots,n$, *и* $a(x,\ t,\ u,\ p)$ *непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию* (1.2) *в* $\bar{Q}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, *где* $Q=\Omega\times(0,\ T]$, Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, *класса* $C^{2+\gamma}$, $0<\gamma<1$. *Предположим, что для всякого решения* $v\in C^{2,1}(\bar{Q})$ *задачи* (1.9) *при любом* $\tau\in[0,\ 1]$ *справедлива оценка* $\max\limits_{Q}|v|\leqslant m$, *где* m *не зависит ни от* v, *ни от* $\tau\in[0,\ 1]$. *Пусть на множестве* $\{D_0\times(0,\ T)\}\times\times\{|u|\leqslant m\}\times\{|p|>l\}$, *где* D_0 *определяется условием* (1.3.2), $l=\mathrm{const}\geqslant 0$, *справедливы неравенства* (2.2) *и* (2.5), *причем выполнено также условие* (2.3). *Пусть на множестве* $\bar{Q}\times\{|u|\leqslant m\}\times\{|p|>L\}$, *где* $L=\mathrm{const}\geqslant 0$, *выполнено условие* (3.2). *Тогда при любой* $\varphi(x,\ t)\in C_{2+\gamma}(\bar{Q})$, $0<\gamma<1$, *удовлетворяющей условию* (1.11), *существует хотя бы одно решение* $u\in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$ (*при некотором* $\alpha\in(0,\ 1)$) *задачи* (1.3).

Доказательство. Пусть сначала $\Omega\in C^3$, $\varphi\in C^{3,1}(\bar{Q})\cap C_{2+\gamma}(\bar{Q})$, а функции $a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)$, $i,\ j=1,\ldots,n$, $a(x,\ t,\ u,\ p)$ принадлежат классу $C^2(\bar{Q}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Из результатов А. Фридмана [123], относящихся к линейным параболическим уравнениям, вытекает тогда, что всякое решение $u(x,\ t)\in C^{2,1}(\bar{Q})$ будет принадлежать и классу $C^{3,1,1}(Q)$, так что можно пользоваться теоремами 2.1 и 3.1. Тогда из теорем 2.1, 3.1, 1.3 вытекает, что задача (1.3) имеет решение $u\in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$ при некотором $\alpha\in(0,\gamma]$. Пусть теперь $\Omega\in C^{2+\gamma}$, $0<\gamma<1$, a^{ij}, $a\in C^1$, $\varphi\in C_{2+\gamma}(\bar{Q})$. Аппроксимируем область Ω расширяющимися областями $\tilde{\Omega}\subset\Omega$ класса C^3, стягивающимися в пределе к исходной области Ω так, чтобы $C^{2+\gamma}$ — нормы их границ были равномерно ограничены, и рассмотрим в цилиндрах $\tilde{Q}=\tilde{\Omega}\times(0,\ T]$ задачи вида

$$-\tilde{u}_t+\tilde{a}^{ij}(x,\ t,\ \tilde{u},\ \nabla\tilde{u})\tilde{u}_{x_ix_j}-\tilde{a}(x,\ t,\ \tilde{u},\ \nabla\tilde{u})=0 \text{ в } \tilde{Q},\ \tilde{u}=\tilde{\varphi} \text{ на } \tilde{\Gamma}, \tag{4.1}$$

где функции $\tilde{a}^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)$, $i,\ j=1,\ldots,n$, $\tilde{a}(x,\ t,\ u,\ p)$ и $\tilde{\varphi}(x,\ t)$ аппроксимируют соответственно функции $a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)$, $i,\ j=1,\ldots,n$, $a(x,\ t,\ u,\ p)$ и $\varphi(x,\ t)$ так, что $\tilde{a}^{ij}$, $\tilde{a}\in C^2$, $\tilde{\varphi}\in C^{3,1}(\bar{\tilde{Q}})\cap C_{2+\gamma}(\bar{\tilde{Q}})$, причем для функций $\tilde{a}^{ij}$ и $\tilde{a}$ условия (2.2). (2.5), (2.3), (3.2) выполнены равномерно по параметрам аппроксимации, а для функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\Gamma}$ выполнены условия вида (1.11). Указанная выше аппроксимация уравнения и его области определения является стандартной (см., например, [40], с. 518—519). Поскольку ввиду равномерной оценки $\max\limits_{\tilde{Q}}(|\tilde{u}|+|\nabla\tilde{u}|)\leqslant\tilde{M}_1$ и теоремы

Ладыженской и Уральцевой (см. теорему 1.2) для решений задач вида (4.1) справедлива равномерная оценка $\|\tilde{u}\|_{1+\alpha, \bar{Q}} \leqslant c_1$, то в силу результатов Фридмана [123] получаем равномерную оценку нормы $\|\tilde{u}\|_{2+\alpha, \bar{Q}} \leqslant c_2$. Очевидно, что существует последовательность $\{\tilde{u}_n\}$, сходящаяся к некоторой функции u в $C^2_{1oc}(Q)$. Легко видеть, что предельная функция $u \in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$, $\alpha \in (0, \gamma]$, удовлетворяет в Q уравнению (1.1) и совпадает на Γ с функцией φ. Теорема 4.1 доказана.

Аналогичным образом на основании результатов предыдущих параграфов этой главы доказываются нижеследующие теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть функции $a^{ij}(x, t, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $a(x, t, u, p)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию* (1.2) *в $\bar{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, где $Q = \Omega \times (0, T]$, Ω — ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, причем $\Omega \in C^{2+\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $T = \mathrm{const} > 0$. Предположим, что для всякого решения $v \in C^{2,1}(\bar{Q})$ задачи* (1.9) *при $\forall \tau \in [0, 1]$ справедлива оценка $\max\limits_{Q} |v| \leqslant m$, где m не зависит ни от v, ни от $\tau \in [0, 1]$. Пусть на множестве $\{D_0 \times (0, T]\} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$, где D_0 определяется условием* (1.3.2), *$l = \mathrm{const} \geqslant 0$, справедливо неравенство* (2.2), *причем выполнено также условие* (2.3). *Пусть на множестве $\bar{Q} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > L\}$, где $L = \mathrm{const} > 0$, выполнено либо условие* (3.2), *либо условие* (3.16). *Тогда при любой $\varphi(x, t) \in C_{2+\gamma}(\bar{Q})$, удовлетворяющей условию* (1.11), *существует хотя бы одно решение $u \in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$ (при некотором $\alpha \in (0, 1)$) задачи* (1.3).

Теорема 4.3. *Пусть функции $a^{ij}(x, t, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $a(x, t, u, p)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию* (1.2) *в $\bar{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, где $Q = \Omega \times (0, T]$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, класса $C^{2+\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $T = \mathrm{const} > 0$. Пусть для всякого решения $v \in C^{2,1}(\bar{Q})$ задачи* (1.9) *при $\forall \tau \in [0, 1]$ справедлива оценка $\max |v| \leqslant m$, где m не зависит ни от v, ни от $\tau \in [0, 1]$. Пусть на множестве $\{D_0 \times (0, T]\} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$, где D_0 определяется по формуле* (1.3.2), *$l = \mathrm{const} > 0$, справедливы неравенства* (2.15) *и* (2.5), *а на множестве $\bar{Q} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > L\}$, где $L = \mathrm{const} > 0$, — условие* (3.2). *Тогда при любой $\varphi = \varphi(x) \in C_{2+\gamma}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющей условию* (1.11), *существует хотя бы одно решение $u \in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$ (при некотором $\alpha \in (0, 1)$) задачи* (1.3).

Теорема 4.4. *Пусть функции $a^{ij}(x, t, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $a(x, t, u, p)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию* (1.2) *в $\bar{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, где $Q = \Omega \times (0, T]$, Ω — ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, причем $\Omega \in C^{2+\gamma}$, $0 < \gamma < 1$. Предположим, что для всякого решения $v \in C^{2,1}(\bar{Q})$ задачи* (1.9) *при $\forall \tau \in [0, 1]$ справедлива оценка $\max\limits_{Q} |v| \leqslant m$, где m не зависит ни от v, ни от $\tau \in [0, 1]$. Пусть на множестве $\{D_0 \times (0, T]\} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$, где D_0 определяется по формуле* (1.3.2), *$l = \mathrm{const} \geqslant 0$, справедливо неравенство* (2.15), *а на множестве $\bar{Q} \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > L\}$, где $L = \mathrm{const} \geqslant 0$, выполнены либо условия* (3.2), *либо условия* (3.16). *Тогда при любой $\varphi = \varphi(x) \in C_{2+\gamma}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющей условию* (1.1), *существует хотя бы одно решение $u \in C_{2+\alpha}(\bar{Q})$ (при некотором $\alpha \in (0, 1)$) задачи* (1.3).

Заметим, что хотя в теоремах 4.1—4.4 оценка $\max\limits_{Q} |v| \leqslant m$ для решений задачи (1.9) постулирована, по существу эти теоремы представляют собой безусловные результаты, поскольку известно много достаточных условий, гарантирующих такую оценку. Некоторые серии таких оценок можно найти в работах [80] и [13]. В частности (см. [80]), оценка $\max_{Q}|v|\leqslant m$ обеспечивается следующими условиями: при любых $(x,\ t)\in Q$ и $u\in\mathbb{R}$

$$a^{ij}(x,\ t,\ u,\ 0)\xi_i\xi_j\geqslant 0,\quad ua(x,\ t,\ u,\ 0)\geqslant -c_1u^2-c_2, \tag{4.2}$$

где $c_1,\ c_2=\mathrm{const}\geqslant 0$.

Теорема существования классического решения задачи (1.3) для уравнений специальной структуры (3.27) получена в статье [13].

§ 5. Теоремы несуществования

В этом параграфе устанавливаются результаты, показывающие, что основные структурные условия, при которых в § 4 доказаны теоремы существования классического решения задачи (1.3), вызваны существом дела. При доказательстве используется следующее предложение, основанное на применении строгого принципа максимума для параболических уравнений.

Лемма 5.1. *Пусть $u\in C^{2,1}(Q)\cap C^{1,0}(\bar{Q})$ удовлетворяет в Q уравнению* (1.1), *а $\omega\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$ удовлетворяет в Q при любой константе $c\geqslant 0$ неравенству* (2.1). *Пусть S — некоторое открытое подмножество на $\partial\Omega$, $\Gamma_S=S\times(0,\ T]$. Предположим, что $u\leqslant\omega$ на $\Gamma\setminus\Gamma_S$ и $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}=-\infty$ на Γ_S, где ν — единичный вектор внутренней нормали к Γ_S. Тогда $u\leqslant\omega$ в $\bar{Q}$.*

Лемма 5.1 является вариантом леммы 2.1 и доказывается, например, при помощи леммы 2.1. Предложения типа леммы 5.1 использовались в работах [4, 5, 6, 40, 13, 38] и др. В частности, доказательство леммы 5.1 можно найти в статье [13] (см. с. 418).

Прежде всего приведем результат, полученный в работе [13].

Теорема 5.1 *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$. Предположим, что функции $a^{ij}(x,\ t,\ u,\ p)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, и $a(x,\ t,\ u,\ p)$ удовлетворяют условиям*

$$|a(x,\ t,\ u,\ p)|\geqslant\mathscr{E}_1(x,\ t,\ u,\ p)\psi(|p|)\ \text{в}\ \bar{Q}\times\{|u|\geqslant m_0\}\times\{|p|\geqslant l_0\}, \tag{5.1}$$

где $\psi(\rho)$ — положительная непрерывная функция, такая, что $\int^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho\psi(\rho)}<+\infty$, $m_0=\mathrm{const}\geqslant 0$, $l_0=\mathrm{const}\geqslant 0$, и

$$\frac{a(x,\ t,\ u,\ p)}{\mathscr{E}_2(x,\ t,\ u,\ p)}\to+\infty\ \text{при}\ p\to\infty \tag{5.2}$$

(равномерно относительно $(x,\ t)\in Q$, $|u|\geqslant m_0$).

Тогда существует функция $\varphi(x,\ t)\in C^\infty(\bar{Q})$, причем $\frac{\partial\varphi}{\partial t}\not\equiv 0$ в Q, для которой задача (1.3) *не имеет никакого классического решения.*

Теоремы 4.1, 4.2 и 5.1 показывают, что мажоранты $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ (с точностью до множителя $\psi(|p|)$ для мажоранты $\mathscr{E}_1$, где $\int^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho\psi(\rho)}=+\infty$) являются границами роста правой части уравнения (1.1), допустимого для того, чтобы задача (1.3) была разрешима при любой достаточно гладкой функции $\varphi(x,\ t)$, если только выполнено условие (2.3). Выясним теперь, является ли естественным условие $\varphi(x,\ t)=\varphi(x)$ в общей ситуации, т. е. когда условие (2.3) не налагается. Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Предположим, что функции $a^{ij}(x, t, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $a(x, t, u, p)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\mathcal{E}_1 \leqslant \frac{1}{\delta(|p|)} \text{ при } (x, t) \in \bar{Q},\ |u| \geqslant m_0,\ |p| \geqslant l_0, \tag{5.3}$$

где $\delta(\tau)$, $0 \leqslant \tau < +\infty$, — положительная непрерывная возрастающая функция, такая, что $\int\limits^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau\delta(\tau)} < +\infty$, $m_0 = \text{const} \geqslant 0$, $l_0 = \text{const} \geqslant 0$;

$$\begin{gathered} \mathcal{E}_2(x, t, u, p) \to 0 \text{ при } p \to \infty \\ (\text{равномерно относительно } (x, t) \in \bar{Q},\ |u| \geqslant m_0), \end{gathered} \tag{5.4}$$

$$|a(x, t, u, p)| \leqslant \alpha(|p|)\mathcal{E}_1 + \beta\mathcal{E}_2 \text{ при } (x, t) \in \bar{Q},\ |u| \geqslant m_0,\ |p| \geqslant l_0, \tag{5.5}$$

где $\alpha(\tau)$, $0 \leqslant \tau < +\infty$, — положительная непрерывная возрастающая функция, такая, что $\int\limits^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)} = +\infty$, $\beta = \text{const} > 0$. *Тогда существует функция $\varphi(x, t) \in C^\infty(\bar{Q})$, причем $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \not\equiv 0$ в Q, при которой задача (1.3) не имеет никакого классического решения.*

Доказательство. Пусть точка $y_0 \in \partial\Omega$ такова, что существует сфера $K_{2\rho}(x_0)$ радиуса 2ρ, $\rho > 0$, с центром в точке $x_0 \in \Omega$, содержащаяся в Ω и касающаяся $\partial\Omega$ в точке y_0. Пусть диаметр области Ω равен числу $R > 0$. Обозначим через $r = r(x)$ расстояние точки x от точки y_0, т. е. $r(x) = \operatorname{dist}(x, y_0)$, $x \in \Omega$. Рассмотрим в цилиндре $Q^\rho \equiv \Omega^\rho \times (0, T]$, где $\Omega^\rho \equiv \{x \in \Omega : r(x) \geqslant \rho\}$, функцию

$$\omega(x, t) = 2t + \hat{m} + h(r), \quad r = r(x),\ h(r) \geqslant 0, \tag{5.6}$$

где $\hat{m} = \max(m_0, m_1)$, $m_1 = \max\limits_{\Gamma\setminus\Sigma_\rho} |u|$, $\sum_\rho = \{x \in \partial\Omega : r < \rho\} \times (0, T]$, а убывающая функция $h(r) \in C^2((\rho, R)) \cap C([\rho, R])$ будет определена ниже. Очевидно, что при $\forall c = \text{const} \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega + c) &\equiv -\omega_t + a^{ij}(x, t, \omega + c, \nabla\omega)\omega_{ij} - a(x, t, \omega + c, \nabla\omega) = \\ &= -2 + h'' a^{ij} r_i r_j + h' a^{ij} r_{ij} - a, \quad (x, t) \in Q^\rho, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $r_i \equiv \frac{\partial r}{\partial x_i}$, $r_{ij} \equiv \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Учитывая, что $\nabla\omega = h'\nabla r$, $|\nabla\omega| = |h'|$, $\mathcal{E}_1(x, t, \omega + c, \nabla\omega) = a^{ij} r_i r_j h'^2$, $a^{ij} r_{ij} = (1/r)[\operatorname{Sp} A - a^{ij} r_i r_j]$, где $A \equiv \| a^{ij}(x, t, \omega + c, \nabla\omega) \|$, выведем из (5.7) равенство

$$\mathcal{L}(\omega + c) = -2 + \mathcal{E}_1 \frac{h''}{h'^2} + \frac{h'}{r}[\operatorname{Sp} A - a^{ij} r_i r_j] - a(x, t, \omega + c, \nabla\omega). \tag{5.8}$$

Будем считать, что $h'' > 0$ и $h'(r) \leqslant -\hat{l}$, где $\hat{l} = \max(l_0, l_1)$, где число $l_1 > 0$ будет определено ниже. Тогда, учитывая, что $0 \leqslant \operatorname{Sp} A - a^{ij} r_i r_j$, и используя условие (5.5), получим оценку

$$\mathcal{L}(\omega + c) \leqslant -2 + \frac{h''}{h'^2}\mathcal{E}_1 + \alpha(|h'|)\mathcal{E}_1 + \beta\mathcal{E}_2,\ (x, t) \in Q^\rho. \tag{5.9}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha(\tau)/\delta(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, так что $\alpha(\tau) \leqslant c\delta(\tau)$ при всех достаточно больших τ. Тогда, учитывая условия (5.3), (5.4), выведем из (5.9) неравенство

$$\mathcal{L}(\omega + c) \leqslant -1 + \frac{h''}{h'^2} \frac{1}{\delta(|h'|)}, \tag{5.10}$$

если в качестве l_1 выбрать достаточно большое число. В качестве функции $h(r)$ можно выбрать функцию, обладающую следующими свойствами:

$$h''(h')^{-2}\leqslant\delta(|h'|) \text{ при } r\in[\rho,\ R],\ h'(\rho)=-\infty,\ h(R)=0,$$
$$h''(r)\geqslant 0,\ h'(r)\leqslant -\hat{l} \text{ на } [\rho,\ R]. \tag{5.11}$$

Действительно, положим $\varkappa=\max\left(1,\ (R-\rho)\Big/\int\limits_{\hat{l}}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^2\delta(\tau)}\right)$ и пусть число $\alpha>0$ определено условиями:

$$\int\limits_{\alpha}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^2\delta(\tau)}=R-\rho, \text{ если } \varkappa=1,\ \alpha=\hat{l}, \text{ если } \varkappa=(R-\rho)\Big/\int\limits_{\hat{l}}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^2\delta(\tau)}. \tag{5.12}$$

Очевидно, что $\alpha\geqslant\hat{l}$. Зададим функцию $h(r)$ на $[\rho,\ R]$ параметрическими уравнениями

$$h=\varkappa\int\limits_{\alpha}^{\tau}\frac{d\tau}{\tau\delta(\tau)},\quad r=\rho+\varkappa\int\limits_{\tau}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^2\delta(\tau)},\quad \alpha\leqslant\tau<+\infty. \tag{5.13}$$

Очевидно, что $h'=-\tau\leqslant-\hat{l}$, $h'(\rho)=-\infty$, $h(R)=0$ и $h''/h'^2=\delta(|h'|)/\varkappa\leqslant\delta(|h'|)$. Тогда из (5.10) и (5.11) вытекает, что

$$\mathscr{L}(\omega+c)\leqslant 0,\quad \forall c=\mathrm{const}\geqslant 0,\quad (x,\ t)\in Q^\rho. \tag{5.14}$$

Рассмотрим произвольное решение $u(x,\ t)\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$ уравнения (1.1). Сравним функции $u(x,\ t)$ и $\omega(x,\ t)$ в цилиндре Q^ρ. Обозначим через $\partial\Omega^\rho$ границу области Ω^ρ, лежащей в основании цилиндра Q^ρ. Пусть $S^\rho\equiv\equiv\partial\Omega^\rho\diagdown\partial\Omega$, $\Gamma_{S^\rho}\equiv S^\rho\times(0,\ T]$. Из определения функции ω следует, что $u\leqslant\omega$ на $\Gamma^\rho\diagdown\Gamma_{S^\rho}$, где $\Gamma^\rho\equiv(\partial\Omega_\rho\times(0,\ T])\cup(\Omega_\rho\times\{t=0\})$, и что $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}=-\infty$ на Γ_{S^ρ}, где ν — единичный вектор внутренней нормали к Γ_{S^ρ}. Поэтому ввиду леммы 5.1

$$u(x,\ t)\leqslant\max_{\overline{Q^\rho}}\omega(x,\ t)\equiv m_*,\quad (x,\ t)\in\overline{Q^\rho}, \tag{5.15}$$

причем $m_*=2T+\hat{m}+\varkappa\int\limits_{\alpha}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau\delta(\tau)}<+\infty.$

Рассмотрим теперь в цилиндре $\tilde{Q}^{\varepsilon,\rho}\equiv\{K_\rho(y_0)\cap K_{2\rho-\varepsilon}(x_0)\}\times(0,\ T]$, $0<\varepsilon<\rho$, функцию

$$\tilde{\omega}(x,\ t)=3t+m_*+\tilde{h}(\tilde{r}),\quad \tilde{r}=\tilde{r}(x)=\mathrm{dist}(x,\ x_0), \tag{5.16}$$

где функция $\tilde{h}(\tilde{r})\in C^2((\rho,\ 2\rho-\varepsilon))\cap C([\rho,\ 2\rho-\varepsilon])$ удовлетворяет условиям:

$$\tilde{h}''(\tilde{h}')^{-2}\leqslant\delta(|\tilde{h}'|) \text{ при } \tilde{r}\in[\rho,\ 2\rho-\varepsilon],\ \tilde{h}(\rho)=0,$$
$$\tilde{h}'(2\rho-\varepsilon)=+\infty,\ \tilde{h}''(\tilde{r})\geqslant 0,\ \tilde{h}'(\tilde{r})\geqslant l=\mathrm{const}>0 \text{ на } [\rho,\ 2\rho-\varepsilon], \tag{5.17}$$

$l=\max(l_0,\ l_2)$, причем константа l_2 будет уточнена ниже. Очевидно, что всем условиям (5.17) удовлетворяет функция $\tilde{h}(\tilde{r})$, заданная на $[\rho,\ 2\rho-\varepsilon]$ параметрическими уравнениями

$$\tilde{h}=\tilde{\varkappa}\int\limits_{\tilde{\alpha}}^{\tau}\frac{d\tau}{\tau\delta(\tau)},\quad \tilde{r}=2\rho-\varepsilon-\tilde{\varkappa}\int\limits_{\tau}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^2\delta(\tau)},\quad \tilde{\alpha}\leqslant\tau\leqslant+\infty, \tag{5.18}$$

где

$$\tilde{\varkappa}=\max\left(1,\ (\rho-\varepsilon)\Big/\int\limits_{l}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^2\delta(\tau)}\right),$$

а число $\tilde{\alpha} > 0$ определено условиями:

$$\int\limits_{\tilde{\alpha}}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^2\delta(\tau)} = \rho - \varepsilon, \text{ если } \tilde{\varkappa} = 1, \quad \tilde{\alpha} = l, \text{ если } \tilde{\varkappa} = (\rho - \varepsilon) \Bigg/ \int\limits_{l}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^2\delta(\tau)}. \quad (5.19)$$

Учитывая, что для функции $\tilde{\omega}$ выражение $\mathscr{L}(\omega + c)$, $c = \mathrm{const} \geqslant 0$, получается заменой в правой части (5.7) h на $\tilde{h}$ и r на $\tilde{r}$, а также замечая, что $\tilde{h}' a^{ij} \tilde{r}_{ij} = \tilde{h}' \tilde{r}^{-1} [\mathrm{Sp}\, A - a^{ij} \tilde{r}_i \tilde{r}_j] \leqslant \tilde{h}' \rho^{-1} \mathrm{Sp}\, A = \mathscr{E}_2 \rho^{-1}$, $A \equiv \| a^{ij}(x, t, \tilde{\omega} + c, \nabla\tilde{\omega}) \|$, $|\nabla\tilde{\omega}| = \tilde{h}'$, $\mathscr{E}_1 = a^{ij} \tilde{r}_i \tilde{r}_j \tilde{h}'^2$, получим неравенство

$$\mathscr{L}(\tilde{\omega} + c) \leqslant -3 + \frac{\tilde{h}''}{\tilde{h}'^2} \mathscr{E}_1 + \frac{\mathscr{E}_2}{\rho} - a(x, t, \tilde{\omega} + c, \nabla\tilde{\omega}), \ (x, t) \in \tilde{Q}^{\varepsilon,\rho}. \ (5.20)$$

Учитывая условия (5.3)—(5.5), замечаем, что при достаточно большом l_2, зависящем лишь от ρ, β и характера стремления к 0 при $p \to \infty$ функций $\alpha(|p|)/\delta(|p|)$ и $\mathscr{E}_2(x, t, u, p)$, справедливы неравенства

$$\mathscr{E}_2 \rho^{-1} \leqslant 1, \quad -a(x, t, \tilde{\omega} + c, \nabla\tilde{\omega}) \leqslant 1, \quad (x, t) \in \tilde{Q}^{\varepsilon,\rho}. \quad (5.21)$$

Тогда из (5.20) и (5.21) с учетом (5.3) следует неравенство

$$\mathscr{L}(\tilde{\omega} + c) \leqslant -1 + \frac{\tilde{h}''}{\tilde{h}'^2} \frac{1}{\delta(\tilde{h}')}, \quad (x, t) \in \tilde{Q}^{\varepsilon,\rho}. \quad (5.22)$$

Учитывая еще, что $\tilde{h}''(\tilde{h}')^{-2} \leqslant \delta(\tilde{h}')$ (см. (5.17)), получаем оценку

$$\mathscr{L}(\tilde{\omega} + c) \leqslant 0, \quad \forall c = \mathrm{const} \geqslant 0, \quad (x, t) \in \tilde{Q}^{\varepsilon,\rho}. \quad (5.23$$

Сравним рассматриваемое решение $u(x, t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ уравнения (1.1) с функцией $\tilde{\omega}(x, t)$ в цилиндре $\tilde{Q}^{\varepsilon,\rho}$. На нижнем основании этого цилиндра $u(x, t) \leqslant \tilde{\omega}(x, t)$, поскольку из самого определения функции $\tilde{\omega}$ следует, что $\tilde{\omega} \geqslant m_* > \hat{m} > m_1 = \max\limits_{\Gamma \setminus \Sigma_\rho} |u| \geqslant \max\limits_{\Omega \times \{t=0\}} |u|$. Боковая поверхность цилиндра $\tilde{Q}^{\varepsilon,\rho}$ является объединением двух поверхностей, первая из которых является частью поверхности $\{(r = \rho) \cap \Omega\} \times (0, T]$, а вторая — частью поверхности $\{(\tilde{r} = 2\rho - \varepsilon) \cap \Omega\} \times (0, T]$. По доказанному выше, на первой из этих поверхностей $u(x, t) \leqslant m_* \leqslant \tilde{\omega}(x, t)$ (см. (5.15) и (5.16)), а на второй

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\nu} = -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\tilde{r}} = -\tilde{h}'(2\rho - \varepsilon) = -\infty$$

(см. (5.17)). Применяя тогда лемму 5.1, заключаем, что $u(x, t) \leqslant \tilde{\omega}(x, t) \leqslant \leqslant m^*$, где $m^* = 3T + m_* + \tilde{\varkappa} \int\limits_{\tilde{\alpha}}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau\delta(\tau)}$, $(x, t) \in \overline{\tilde{Q}^{\varepsilon,\rho}}$. Ввиду непрерывности функции $u(x,t)$ в $\bar{Q}$ отсюда, в частности, следует оценка

$$u(y_0, T/2) \leqslant m^*. \quad (5.24)$$

Оценка (5.24) показывает, что при условиях теоремы 5.2 задача (1.3) не имеет классического решения при некоторой $\varphi(x, t) \in C^\infty(\bar{Q})$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \not\equiv 0$ в Q. Действительно, взяв в качестве $\varphi(x, t)$ функцию класса $C^\infty(\bar{Q})$, такую, что $\varphi(x, t) = 0$ вне $Q \cap \{(|x - y_0| \leqslant \rho) \times (T/4, 3T/4)\}$ и $\varphi(y_0, T/2) = m^* + 1$, мы получим противоречие с оценкой (5.24). Теорема 5.2 доказана.

ЛОКАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТОВ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

§ 1. Оценки $|\nabla u(x_0)|$ через $\max\limits_{K_\rho(x_0)}|u|$

Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$.

Лемма 1.1. *Пусть $u\in C^3(\Omega)$ — некоторое решение уравнения* (1.1.1), *где $a(x, u, p)=b(x, u, p)+\hat{b}(x, u, p)$, в области Ω. Предположим, что на этом решении на множестве $K_{\rho,L}(x_0)\equiv\{x\in K_\rho(x_0):|\nabla u|>L\}$, где $K_\rho(x_0)$ — шар радиуса $\rho>0$ с центром в точке $x_0\in\mathbb{R}^n$, содержащийся со своим замыканием в Ω, $L=\mathrm{const}\geqslant 0$, выполнены условия*

$$a^{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j\geqslant 0,\quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_1>0,\quad |pA_p^\tau|\leqslant\sqrt{\frac{\mu_0}{n}A^\tau\mathscr{E}_1}\,|p|^{-1},\quad |\delta A^\tau|\leqslant\sqrt{\frac{\mu_1}{n}A^\tau\mathscr{E}_1},\\ |A_p^\tau||p|\leqslant\sqrt{\frac{\mu_2}{n^2}A^\tau\mathscr{E}_1}\,|p|^{r/2-1},\quad \|A\|\leqslant\frac{\mu_3}{n}\mathscr{E}_1|p|^{r-2},\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$pb_p-b\geqslant-\mu_4\mathscr{E}_1,\quad \delta b\geqslant-\mu_5\mathscr{E}_1|p|,\quad |b_p|\leqslant\frac{\mu_6}{\sqrt{n}}\mathscr{E}_1|p|^{-2\varepsilon_1}, \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}|p\hat{b}_p|\leqslant\hat{\mu}_4|\hat{b}|,\quad |\delta_-\hat{b}|\leqslant\hat{\mu}_5|\hat{b}||p|,\quad |\hat{b}_p|\leqslant\frac{\hat{\mu}_6}{\sqrt{n}}|\hat{b}||p|^{-2\hat{\varepsilon}_1},\\ \operatorname{sign}|\hat{b}|\operatorname{Sp}A|p|^2\leqslant\hat{\mu}_7\mathscr{E}_1,\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$(\operatorname{sign}|\hat{b}|)|b|\leqslant\hat{\mu}_8\mathscr{E}_1,^{*)} \tag{1.5}$$

где

$$\mathscr{E}_1=a^{ij}(x, u, p)p_ip_j,\quad A^\tau=a^{ij}(x, u, p)\tau_i\tau_j,\quad \tau\in\mathbb{R}^n,\ |\tau|=1,$$

$$\delta=\frac{p_k}{|p|}\frac{\partial}{\partial x_k}+|p|\frac{\partial}{\partial u},\quad \delta_-\hat{b}\equiv\frac{p_k}{|p|}\frac{\partial\hat{b}}{\partial x_k}+|p|\left(\frac{\partial\hat{b}}{\partial u}\right)_-,\quad \left(\frac{\partial\hat{b}}{\partial u}\right)_-=\min\left(\frac{\partial b}{\partial u},\ 0\right),$$

$$\|A\|=\left(\sum_{i,j=1}^n(a^{ij})^2\right)^{1/2},\quad a^{ij}=a^{ij}(x, u, p),\ b=b(x, u, p),\ \hat{b}=\hat{b}(x, u, p),$$

$$x\in K_\rho(x_0),\quad u=u(x),\quad p=\nabla u(x),\quad p_k=\frac{\partial u(x)}{\partial x_k},\quad k=1, \ldots, n,$$

а константы μ_i, $\hat{\mu}_i$, r, ε_1 и $\hat{\varepsilon}_1$ удовлетворяют условиям

$$\mu_i\geqslant 0,\ i=0, 1, \ldots, 6;\quad \hat{\mu}_i\geqslant 0,\quad i=4, \ldots, 8;\quad 0\leqslant r<2,\quad \varepsilon_1>0,\quad \hat{\varepsilon}_1>0. \tag{1.6}$$

Тогда при любой положительной неубывающей функции $z(u)\in C^2(\varkappa)$, где $\varkappa$ — множество значений u в $K_\rho(x_0)$, и любом числе $\theta>0$ справедлива следующая альтернатива: либо в точке $x_*\in K_\rho(x_0)$ максимума в $\overline{K_\rho(x_0)}$ функции $\bar{\omega}(x)$, определенной соотношениями

$$\begin{gathered}\bar{\omega}=\frac{\omega}{z(u(x))},\quad \omega=\frac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1},\quad \alpha=\mathrm{const}>0,\\ w=v\zeta,\quad v=\sum_{k=1}^n u_k^2,\quad u_k=u_{x_k}(x),\quad k=1, \ldots, n,\\ \zeta=\zeta(\xi),\quad \zeta\in C^2([0, 1]),\ \zeta(0)=0,\ \zeta(\xi)>0 \text{ при } \xi>0,\ \xi(1)=1,\\ \xi=\xi(x)=\begin{cases}1-|x-x_0|^2\rho^{-2} & \text{в } K_\rho(x_0),\\ 0 & \text{вне } K_\rho(x_0),\end{cases}\end{gathered} \tag{1.7}$$

---

*) Через $\operatorname{sign}c$ ($c\in\mathbb{R}$), как обычно, обозначается величина $\operatorname{sign}c=-1$, если $c<0$, $\operatorname{sign}c=0$, если $c=0$, $\operatorname{sign}c=1$, если $c>0$.

выполняется неравенство

$$-z'' + \frac{\alpha-\gamma-\nu_0}{\alpha+1}\frac{z'^2}{z} - \nu_1 z' - \nu_2 z - \left(\frac{\nu_3}{\rho^2\theta^{2\varepsilon}} + \frac{\nu_4}{\rho^2\theta^{1+\hat{\varepsilon}_1}} + \frac{\nu_5}{\rho\theta^{2\varepsilon_1}} + \frac{\nu_6}{\rho\theta^{2\hat{\varepsilon}_1}}\right) z +$$
$$+ \frac{\alpha+1}{4}\frac{a^2}{\mathscr{E}_1 \operatorname{Sp} A\,|p|^2} z \leqslant 0, \qquad (1.$$

где

$$\nu_0 = \mu_0 + \hat{\mu}_4^2\hat{\mu}_7 + \hat{\mu}_7,\ \ \nu_1 = \mu_4 + \hat{\mu}_4\hat{\mu}_8 + \hat{\mu}_8,\ \ \nu_2 = 4(\alpha+1)(\mu_1 + \mu_5 + \hat{\mu}_5^2\hat{\mu}_7 + \hat{\mu}_5\hat{\mu}$$
$$\nu_3 = 4(\alpha+1)\sigma^{-2}[3\mu_2 + \mu_3(\gamma^{-1}+4)],\ \ \nu_4 = 4(\alpha+1)\sigma^{-2}\hat{\mu}_6^2\hat{\mu}_7,\ \ \nu_5 = 2(\alpha+1)\sigma^{-1}\mu$$
$$\nu_6 = 2(\alpha+1)\sigma^{-1}\hat{\mu}_6\hat{\mu}_8,\quad \gamma > 0,\quad \sigma = \min(\varepsilon/2,\ \varepsilon_1,\ \hat{\varepsilon}_1), \qquad (1.$$

либо

$$|\nabla u(x_0)| \leqslant \left(\frac{z_0}{z_*}\right)^{1/2(\alpha+1)} \max(L,\ \theta), \qquad (1.1$$

где $z_0 \equiv z(u(x_0))$, $z_* \equiv z(u(x_*))$.

Доказательство. Применяя к уравнению (1. 1. 1) оператор $u_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ получим для функции $v \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2$ в $K_\rho(x_0)$ тождество

$$1/2 a^{ij} v_{ij} = a^{ij} u_{ki} u_{kj} + 1/2\left(a_{p_l} - a^{ij}_{p_l} u_{ij}\right) v_l + \sqrt{v}\,(\delta a - \delta a^{ij} u_{ij}). \quad (1.1$$

Тогда для функции $w = v\zeta$ (см. (1. 7)) справедливо тождество

$$a^{ij} w_{ij} = 2\zeta a^{ij} u_{ki} u_{kj} + \left(a_{p_l} - a^{ij}_{p_l} u_{ij}\right)\left(w_l - \frac{\zeta_l}{\zeta} w\right) + 2\sqrt{v}\,\zeta(\delta a - \delta a^{ij} u_{ij}) +$$
$$+ 2 a^{ij} w_i \frac{\zeta_j}{\zeta} + \left(a^{ij}\frac{\zeta_{ij}}{\zeta} - 2a^{ij}\frac{\zeta_i}{\zeta}\frac{\zeta_j}{\zeta}\right) w. \qquad (1.1$$

Умножая обе части (1. 12) на $f(w) = w^\alpha$, $\alpha > 0$, и обозначая $\omega = w^{\alpha+1}/(\alpha+1$ выведем из (1. 12) следующее тождество на множестве $\{x \in K_\rho(x_0) : |\nabla u(x)| > 0$

$$a^{ij}\omega_{ij} = \frac{f'}{f^2} a^{ij}\omega_i\omega_j + 2\zeta a^{ij} u_{ki} u_{kj} + \left(a_{p_l} - a^{ij}_{p_l} u_{ij}\right)\left(\omega_l - \frac{\zeta_l}{\zeta} f w\right) +$$
$$+ 2f\sqrt{v}\,\zeta(\delta a - \delta a^{ij} u_{ij}) + 2a^{ij}\omega_i\frac{\zeta_j}{\zeta} + \left(a^{ij}\frac{\zeta_{ij}}{\zeta} - 2a^{ij}\frac{\zeta_i}{\zeta}\frac{\zeta_j}{\zeta}\right) f w. \qquad (1.1$$

Полагая теперь $\omega = z(u)\bar{\omega}$, получим вместо (1. 13) тождество

$$z a^{ij}\bar{\omega}_{ij} + b_k\bar{\omega}_k = -z''\mathscr{E}_1\bar{\omega} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{z'^2}{z}\mathscr{E}_1\bar{\omega} + 2\zeta a^{ij} u_{ki} u_{kj} f +$$
$$+ (a_p p - a) z'\bar{\omega} - (a^{ij})_p p u_{ij} z'\bar{\omega} - \left(a_{p_l} - a^{ij}_{p_l} u_{ij}\right)\frac{\zeta_l}{\zeta} f w +$$
$$+ 2f\sqrt{v}\,\zeta(\delta a - \delta a^{ij} u_{ij}) + 2a^{ij} u_i \frac{\zeta_j}{\zeta} z'\bar{\omega} + \left(a^{ij}\frac{\zeta_{ij}}{\zeta} - 2a^{ij}\frac{\zeta_i}{\zeta}\frac{\zeta_i}{\zeta}\right) f w, \qquad (1.14$$

где $p\dfrac{\partial}{\partial p} \equiv p_k \dfrac{\partial}{\partial p_k}$, а вид b_k для дальнейшего безразличен. Далее мы бу дем рассматривать и преобразовывать тождество (1. 14) только на множе стве $K_{\rho, L}(x_0)$. Используя условия (1. 2) точно так же, как в § 1. 6, оцени

$$|a^{ij}_p p z' u_{ij}\bar{\omega}| \leqslant \frac{f\zeta}{4} a^{ij} u_{ki} u_{kj} + \frac{\mu_0}{\alpha+1}\frac{z'^2}{z}\mathscr{E}_1\bar{\omega},$$
$$|2f\sqrt{v}\,\zeta\delta a^{ij} u_{ij}| \leqslant \frac{f\zeta}{4} a^{ij} u_{ki} u_{kj} + 4(\alpha+1)\mu_1 z\mathscr{E}_1\bar{\omega},$$
$$\left|a^{ij}_{p_l} u_{ij}\frac{\zeta_l}{\zeta} f w\right| \leqslant \frac{f\zeta}{4} a^{ij} u_{ki} u_{kj} + 4(\alpha+1)\mu_2\frac{\zeta'^2}{\zeta^2}\frac{z}{\rho^2 v^{\varepsilon}}\mathscr{E}_1\bar{\omega}, \qquad (1.15$$
$$\left|2a^{ij} u_i\frac{\zeta_j}{\zeta} z'\bar{\omega}\right| \leqslant \frac{\gamma}{\alpha+1}\frac{z'^2}{z}\mathscr{E}_1\bar{\omega} + \frac{4(\alpha+1)}{\gamma}\mu_3\frac{\zeta'^2}{\zeta^2}\frac{z}{\rho^2 v^{\varepsilon}}\mathscr{E}_1\bar{\omega},$$

$$\left| a^{ij} \frac{\zeta_{ij}}{\zeta} fw \right| \leqslant 8(\alpha+1)\mu_3 \frac{|\zeta''|+|\zeta'|}{\zeta} \frac{z}{\rho^2 v^{\varepsilon}} \mathscr{E}_1 \bar{\omega},$$

$$\left| 2a^{ij} \frac{\zeta_i}{\zeta} \frac{\zeta_j}{\zeta} fw \right| \leqslant 8(\alpha+1)\mu_3 \frac{\zeta'^2}{\zeta^2} \frac{z}{\rho^2 v^{\varepsilon}} \mathscr{E}_1 \bar{\omega},$$

где $\varepsilon = 1 - r/2 > 0$. Заметим, что при выводе неравенств (1.15) мы учли, в частности, неравенства $|\nabla\zeta| \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{\rho}$, $\|D^2\zeta\| \leqslant 2n/\rho^2$, где $\|D^2\zeta\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \zeta_{ij}^2\right)^{1/2}$.

Оценим теперь оставшиеся в (1.14) члены $(a_p p - a) z'\bar{\omega}$, $a_{pl} \frac{\zeta_l}{\zeta} fw$, $2f\sqrt{v}\zeta\delta a$. Учитывая, что $a = b + \hat{b}$, и применяя условия (1.3)—(1.5), (1.7), получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
(pa_p - a) z'\bar{\omega} = (pb_p - b) z'\bar{\omega} + (p\hat{b}_p - \hat{b}) z'\bar{\omega}, \\
(pb_p - b) z'\bar{\omega} \geqslant -\mu_4 z' \mathscr{E}_1 \bar{\omega}, \\
p\hat{b}_p z'\bar{\omega} = p\frac{\hat{b}_p}{\hat{b}} \hat{b} z'\bar{\omega} = p\frac{\hat{b}_p}{\hat{b}} (a^{ij}u_{ij} - b) z'\bar{\omega}, \\
\hat{b} z'\bar{\omega} = (a^{ij}u_{ij} - b) z'\bar{\omega}, \\
\left| p\frac{\hat{b}_p}{\hat{b}} a^{ij}u_{ij} z'\bar{\omega} \right| \leqslant \frac{f\zeta}{4} a^{ij}u_{ki}u_{kj} + \frac{\hat{\mu}_4^2\hat{\mu}_7}{\alpha+1} \frac{z'^2}{z} \mathscr{E}_1\bar{\omega}, \\
\left| p\frac{\hat{b}_p}{\hat{b}} b z'\bar{\omega} \right| \leqslant \hat{\mu}_4\hat{\mu}_8 z' \mathscr{E}_1 \bar{\omega}, \\
|a^{ij}u_{ij} z'\bar{\omega}| \leqslant \frac{f\zeta}{4} a^{ij}u_{ki}u_{kj} + \frac{\hat{\mu}_7}{\alpha+1} \frac{z'^2}{z} \mathscr{E}_1\bar{\omega}, \\
|bz'\bar{\omega}| \leqslant \hat{\mu}_8 z' \mathscr{E}_1 \bar{\omega}; \\
a_{pl} \frac{\zeta_l}{\zeta} fw = b_{pl} \frac{\zeta_l}{\zeta} fw + \hat{b}_{pl} \frac{\zeta_l}{\zeta} fw, \\
\left| b_{pl} \frac{\zeta_l}{\zeta} fw \right| \leqslant 2(\alpha+1)\mu_6 \frac{|\zeta'|}{\zeta\rho} \frac{z}{v^{\varepsilon_1}} \mathscr{E}_1\bar{\omega}, \\
\hat{b}_{pl} \frac{\zeta_l}{\zeta} fw = \frac{\hat{b}_{pl}}{\hat{b}} \hat{b} \frac{\zeta_l}{\zeta} fw = \frac{\hat{b}_{pl}}{\hat{b}} (a^{ij}u_{ij} - b) \frac{\zeta_l}{\zeta} fw, \\
\left| \frac{\hat{b}_{pl}}{\hat{b}} \frac{\zeta_l}{\zeta} fwa^{ij}u_{ij} \right| \leqslant \frac{f\zeta}{4} a^{ij}u_{ki}u_{kj} + 4(\alpha+1)\hat{\mu}_6^2\hat{\mu}_7 \frac{\zeta'^2}{\zeta} \frac{z}{\rho^2 v^{2\hat{\varepsilon}_1}} \mathscr{E}_1\bar{\omega}, \\
\left| \frac{\hat{b}_{pl}}{\hat{b}} b \frac{\zeta_l}{\zeta} fw \right| \leqslant (\alpha+1)\hat{\mu}_6\hat{\mu}_8 \frac{|\zeta'|}{\zeta} \frac{2}{\rho} \frac{z}{v^{\hat{\varepsilon}_1}} \mathscr{E}_1\bar{\omega}; \\
2f\sqrt{v}\zeta\delta a \geqslant 2f\sqrt{v}\zeta\delta b + 2f\sqrt{v}\zeta\delta_\hat{b}, \\
2f\sqrt{v}\zeta\delta b \geqslant 2fw \frac{\delta b}{|p|} \geqslant -2(\alpha+1)\mu_5 z \mathscr{E}_1\bar{\omega}, \\
2f\sqrt{v}\zeta\delta_\hat{b} = 2f\sqrt{v}\zeta \frac{\delta\hat{b}}{\hat{b}} \hat{b} = 2f\sqrt{v}\zeta \frac{\delta\hat{b}}{\hat{b}} (a^{ij}u_{ij} - b), \\
\left| 2f\sqrt{v}\zeta \frac{\delta_\hat{b}}{\hat{b}} a^{ij}u_{ij} \right| \leqslant \frac{f\zeta}{4} a^{ij}u_{ki}u_{kj} + 4(\alpha+1)\hat{\mu}_5^2\hat{\mu}_7 z \mathscr{E}_1\bar{\omega}, \\
\left| 2f\sqrt{v}\zeta \frac{\delta_\hat{b}}{\hat{b}} b \right| \leqslant 2(\alpha+1)\hat{\mu}_5\hat{\mu}_6 z \mathscr{E}_1\bar{\omega}.
\end{gathered} \qquad (*)$$

Заметим, что соотношения $(*)$ рассматриваются только в тех точках $K_{\rho,L}(x_0)$, где $\hat{b}(x, u(x), \nabla u(x)) \neq 0$. В тех точках $K_{\rho,L}(x_0)$, где $\hat{b} = 0$, соответствующие выражения, которые оценивались в $(*)$, будут просто отсутствовать. Полагая $\zeta(\xi) = \xi^{1/\sigma}$, где $\sigma = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \hat{\varepsilon}_1, \varepsilon_1\right)$, заметим, что

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{1}{\sigma\zeta^{\sigma}}, \quad \frac{\zeta'^2}{\zeta^2} = \frac{1}{\sigma^2\zeta^{2\sigma}}, \quad \frac{|\zeta''|+|\zeta'|}{\zeta} \leqslant \frac{2}{\sigma^2\zeta^{2\sigma}},$$

так что

$$\frac{\zeta'^2}{\zeta^2 v^\varepsilon} \leqslant \frac{1}{c^2 w^\varepsilon}, \quad \frac{|\zeta''|+|\zeta'|}{\zeta v^\varepsilon} \leqslant \frac{2}{c^2 w^\varepsilon}, \quad \frac{\zeta'^2}{\zeta^2 v^{2\hat\varepsilon_1}} \leqslant \frac{1}{\sigma^2 w^{2\hat\varepsilon_1}}, \quad \frac{\zeta'}{\zeta v^{\varepsilon_1}} \leqslant \frac{1}{\sigma w^{\varepsilon_1}}, \quad \frac{|\zeta'|}{\zeta v^{\hat\varepsilon_1}} \leqslant \frac{1}{\sigma w^{\hat\varepsilon_1}} \tag{1.16}$$

Из (1.14)—(1.16) и (*), а также используя неравенство

$$1/4 f\zeta a^{ij} u_{ki} u_{kj} \geqslant \frac{\alpha+1}{4} \frac{a^2}{\mathscr{E}_1 \operatorname{Sp} Av} z\bar\omega \mathscr{E}_1, \tag{1.17}$$

вытекающее из оценки $a^{ij} u_{ki} u_{kj} \geqslant a^2/\operatorname{Sp} A$ и соотношений (1.7), получим

$$z a^{ij} \bar\omega_{ij} + b_k \bar\omega_k \geqslant \Big[-z'' + \frac{\alpha-\gamma-\nu_0}{\alpha+1} \frac{z'^2}{z} - \nu_1 z' - \nu_2 z -$$

$$- \Big(\frac{\nu_3}{\rho^2 w^\varepsilon} + \frac{\nu_4}{\rho^2 w^{2\hat\varepsilon_1}} + \frac{\nu_5}{\rho w^{\varepsilon_1}} + \frac{\nu_6}{\rho w^{\hat\varepsilon_1}} \Big) z + \frac{\alpha+1}{4} \frac{a^2}{\mathscr{E}_1 \operatorname{Sp} Av} z \Big] \mathscr{E}_1 \bar\omega, \tag{1.18}$$

где величины ν_i, $i=0, \ldots, 6$, определены формулами (1.9).

Пусть x_* — точка максимума функции $\bar\omega$ в $\overline{K_\rho(x_0)}$. Очевидно, что $x_* \in K_\rho(x_0)$, так как $\bar\omega(x)=0$ на границе шара $K_\rho(x_0)$. Обозначим ради краткости записей $F(w) \equiv w^{\alpha+1}/(\alpha+1)$, и пусть Φ — функция, обратная к F, так что $\Phi(F(w)) \equiv w$. Справедлива следующая альтернатива: либо одновременно выполнены неравенства

$$|\nabla u(x_*)| > L, \quad \Phi(z(x_*)\bar\omega(x_*)) \geqslant \theta^2, \tag{1.19}$$

либо хотя бы одно из этих неравенств не имеет места. В первом случае, учитывая, что неравенство $|\nabla u(x_*)| > L$ позволяет рассматривать неравенство (1.18) в точке x_*, и замечая, что из второго неравенства в (1.19) вытекает оценка

$$w_* = \Phi(z_* \bar\omega_*) \geqslant \theta^2, \tag{1.20}$$

где $w_* \equiv w(x_*)$, $z_* \equiv z(x_*)$, $\bar\omega_* \equiv \bar\omega(x_*)$, заключаем (с учетом необходимых условий максимума), что в точке x_* выполнено неравенство (1.8). Для завершения доказательства леммы достаточно тогда установить, что при нарушении хотя бы одного из неравенств (1.19) справедлива оценка (1.10). Действительно, если $|\nabla u(x_*)| \leqslant L_*$, то $v(x_*) \leqslant L^2$ и из соотношений (1.7) вытекают неравенства

$$F(v_0) = F(w_0) = \omega_0 = z_0 \bar\omega_0 \leqslant z_0 \bar\omega_* = \frac{z_0}{z_*} \omega_* = \frac{z_0}{z_*} F(v_*) \leqslant \frac{z_0}{z_*} F(L^2), \tag{1.21}$$

откуда следует оценка

$$v_0 \leqslant \Phi\Big(\frac{z_0}{z_*} F(L^2)\Big) = \Big(\frac{z_0}{z_*}\Big)^{1/(\alpha+1)} L^2. \tag{1.22}$$

Если же $\Phi(z_* \bar\omega_*) \leqslant \theta^2$, то из соотношений (1.7) следует, что

$$F(v_0) = F(w_0) = \omega_0 = z_0 \bar\omega_0 \leqslant z_0 \bar\omega_* = \frac{z_0}{z_*} F(\Phi(z_* \bar\omega_*)) \leqslant \frac{z_0}{z_*} F(\theta^2), \tag{1.23}$$

откуда

$$v_0 \leqslant \Phi\Big(\frac{z_0}{z_*} F(\theta^2)\Big) = \Big(\frac{z_0}{z_*}\Big)^{1/(\alpha+1)} \theta^2. \tag{1.24}$$

Из (1.22), (1.24) и следует, очевидно, оценка (1.10). Лемма 1.1 доказана.

Роль леммы 1.1 заключается в том, что, налагая различные ограничения на константы в условиях (1.1)—(1.6), можно подобрать функцию $z(u)$ и число θ (зависящее только от структуры уравнения) так, чтобы первое условие альтернативы, приведенной в формулировке леммы 1.1, было невозможно. Это дает априорную оценку вида (1.10) для градиента решения в фиксированной точке x_0.

Теорема 1.1. *Пусть* $u \in C^3(\Omega)$ — *некоторое решение уравнения* (1.1.1) *в* Ω, *такое, что* $m_1 \leqslant u(x) \leqslant m_2$, $x \in K_\rho(x_0)$, m_1, $m_2 = \mathrm{const}$, *где* $K_\rho(x_0) \subset \Omega$, $\rho > 0$, *и пусть на этом решении на множестве* $K_{\rho, L}(x_0) \equiv \{x \in K_\rho(x_0): :|\nabla u| > L\}$ *выполнены условия* (1.1)—(1.6), *причем*

$$\nu_2 < \frac{1}{2}\nu_1^2 e^{-2\nu_1 m}, \quad m \equiv m_2 - m_1, \quad \nu_1 > 0, \tag{1.25}$$

где ν_1 *и* ν_2 *определены в* (1.9) *при* $\alpha = 2(\mu_0 + \hat{\mu}_4^2\hat{\mu}_7 + \hat{\mu}_7)$. *Тогда справедлива оценка*

$$|\nabla u(x_0)| \leqslant 2\max(L, \theta), \tag{1.26}$$

где

$$\theta = \max\left\{\left(\frac{8\nu_3 e^{2\nu_1 m}}{\rho^2\nu_1^2}\right)^{1/2\varepsilon}, \left(\frac{8\nu_4 e^{2\nu_1 m}}{\rho^2\nu_1^2}\right)^{1/4\hat{\varepsilon}_1}, \left(\frac{8\nu_5 e^{2\nu_1 m}}{\rho\nu_1^2}\right)^{1/2\varepsilon_1}, \left(\frac{8\nu_6 e^{2\nu_1 m}}{\rho\nu_1^2}\right)^{1/2\hat{\varepsilon}_1}\right\}, \tag{1.27}$$

причем ν_3, ν_4, ν_5, ν_6 *определены в* (1.9) *при* $\alpha = 2\nu_0$, $\gamma = \alpha/2$, $\nu_0 > 0$. *Если же вместо условия* (1.25) *выполнены условия*

$$\nu_1 < \frac{1}{2m}, \quad \nu_2 < \frac{1}{4m^2}, \quad m = m_2 - m_1, \tag{1.28}$$

то оценка (1.26) *справедлива при* θ, *определенном по формуле*

$$\theta = \max\left\{\left(\frac{16\nu_3 m^2}{\rho^2}\right)^{1/2\varepsilon}, \left(\frac{16\nu_4 m^2}{\rho^2}\right)^{1/4\hat{\varepsilon}_1}, \left(\frac{16\nu_5 m^2}{\rho}\right)^{1/2\varepsilon_1}, \left(\frac{16\nu_6 m^2}{\rho}\right)^{1/2\hat{\varepsilon}_1}\right\}. \tag{1.29}$$

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Положим $z(u) = 2e^{\beta m} - e^{\beta(m_2 - u)}$, $m = m_2 - m_1$, $\beta = \mathrm{const} > 0$, и пусть число θ определено по формуле (1.27). Покажем, что в случае таких $z(u)$ и θ первая часть альтернативы, приведенной в формулировке леммы 1.1, не может иметь места. Пусть $\gamma = \alpha/2$, $\alpha = 2\nu_0$. Тогда, учитывая, что $z' = \beta e^{\beta(m_2-u)} > 0$, $z'' = -\beta^2 e^{\beta(m_2-u)}$, $e^{\beta m} \leqslant z \leqslant 2e^{\beta m}$, $e^{\beta(m_2-u)} \geqslant 1$, выведем из неравенства (1.8) неравенство

$$(\beta^2 - \beta\nu_1) - 2\nu_2 e^{\beta m} - 2\left(\frac{\nu_3}{\rho^2\theta^{2\varepsilon}} + \frac{\nu_4}{\rho^2\theta^{4\hat{\varepsilon}_1}} + \frac{\nu_5}{\rho\theta^{2\varepsilon_1}} + \frac{\nu_6}{\rho\theta^{2\hat{\varepsilon}_1}}\right)e^{\beta m} \leqslant 0. \tag{1.30}$$

Положим $\beta = 2\nu_1$. Тогда $\beta^2 - \beta\nu_1 = 2\nu_1^2$ и, используя условие (1.25), получаем, что $\beta^2 - \beta\nu_1 - 2\nu_2 e^{\beta m} > \nu_1^2$. С другой стороны, из определения числа θ следует, что

$$2\left(\frac{\nu_3}{\rho^2\theta^{2\varepsilon}} + \frac{\nu_4}{\rho^2\theta^{4\hat{\varepsilon}_1}} + \frac{\nu_5}{\rho\theta^{2\varepsilon_1}} + \frac{\nu_6}{\rho\theta^{2\hat{\varepsilon}_1}}\right)e^{2\nu_1 m} \leqslant \nu_1^2.$$

Но тогда из сказанного следует, что выражение, стоящее в левой части (1.30), положительно вопреки неравенству (1.30). Отсюда следует, что при сделанном выборе $z(u)$ и θ неравенство (1.30) невозможно. Следовательно, справедлива вторая часть альтернативы из формулировки леммы 1.1, т. е. неравенство (1.10) при выбранных $z(u)$ и θ. Учитывая, что $z_0/z_* \leqslant 2$, получаем неравенство (1.26) с θ из (1.27).

Пусть теперь вместо условия (1.25) выполнено условие (1.28). В этом случае в качестве $z(u)$ возьмем функцию $z(u) = 2m^2 - (m_2 - u)^2$, $m = m_2 - m_1$, считая, что $m > 0$ (в противном случае $u \equiv \mathrm{const}$ в $K_\rho(x_0)$), и пусть число θ определено по формуле (1.29). Пусть также $\gamma = \alpha/2$, $\alpha = 2\nu_0$, $\nu_0 > 0$. Учитывая, что $z'=2(m_2-u)\geqslant 0$, $-z''=2$, $m^2\leqslant z(u)\leqslant 2m^2$, выведем из (1.8) неравенство

$$2-2\nu_1 m-2\nu_2 m^2-2m^2\left(\frac{\nu_3}{\rho^2\theta^{2\varepsilon}}+\frac{\nu_4}{\rho^2\theta^{4\hat{\varepsilon}_1}}+\frac{\nu_5}{\rho\theta^{2\varepsilon_1}}+\frac{\nu_6}{\rho\theta^{2\hat{\varepsilon}_1}}\right)\leqslant 0. \qquad (1.31)$$

Однако из условия (1.28) и определения θ по формуле (1.29) следует, что неравенство (1.31) невозможно. Поэтому ввиду леммы 1.1 справедлива оценка (1.10) с θ из (1.29). Теорема 1.1 доказана.

Замечание 1.1. Очевидно, что условия теоремы 1.1 допускают произвольное вырождение уравнения (1.1) на множестве $\{|p|\leqslant L\}$ и вырождение, характеризуемое условием $\mathscr{E}_1>0$ на множестве $\{|p|>L\}$.

§ 2. Оценка $|\nabla u(x_0)|$ через $\max\limits_{K_\rho(x_0)} u$ ($\min\limits_{K_\rho(x_0)} u$). Неравенство Гарнака

Сначала в этом параграфе выделяется такой класс уравнений вида (1.1.1), для решений которых величина $|\nabla u(x_0)|$ зависит только от структуры уравнения и не зависит от каких-либо границ самого решения. Далее на основе такой оценки выделяется более широкий класс уравнений вида (1.1.1), для решений которых устанавливается оценка $|\nabla u(x_0)|$, зависящая от $\max\limits_{K_\rho(x_0)} u$ (или от $\min\limits_{K_\rho(x_0)} u$).

Теорема 2.1. *Пусть $u\in C^3(\Omega)$ — некоторое решение уравнения* (1.1.1), *причем $a(x, u, p)=b(x, u, p)+\hat{b}(x, u, p)$. Предположим, что на этом решении на множестве $K_{\rho,L}(x_0)\equiv\{x\in K_\rho(x_0):|\nabla u|>L\}$ выполнены условия*

$$\mathscr{E}_1>0,\ |\delta A^\tau|\leqslant\sqrt{\frac{\mu_1}{n}A^\tau\mathscr{E}_1},\ |A^\tau p||p|\leqslant\sqrt{\frac{\mu_2}{n^2}A^\tau\mathscr{E}_1}\,|p|^{r/2-1},$$
$$\|A\|\leqslant\frac{\mu_3}{n}\mathscr{E}_1|p|^{r-2}, \qquad (2.1)$$

$$|b_p|\leqslant\frac{\mu_6}{\sqrt{n}}\mathscr{E}_1|p|^{-2\varepsilon_1}, \qquad (2.2)$$

$$|\delta_-\hat{b}|\leqslant\hat{\mu}_5|\hat{b}||p|,\ |\hat{b}_p|\leqslant\frac{\hat{\mu}_6}{\sqrt{n}}|b||p|^{-2\hat{\varepsilon}_1},\ \operatorname{sign}|\hat{b}|\operatorname{Sp}A|p|^2\leqslant\hat{\mu}_7\mathscr{E}_1, \qquad (2.3)$$

$$(\operatorname{sign}|\hat{b}|)|b|\leqslant\hat{\mu}_8\mathscr{E}_1, \qquad (2.4)$$

где $\mathscr{E}_1$, A^τ, δ, δ_- определены в формулировке леммы 1.1, *а константы μ_1, $\mu_2,\ldots, r$, ε_1 и $\hat{\varepsilon}_1$ удовлетворяют неравенствам* (1.6). *Предположим, что при каком-нибудь $\beta\in(0, 1]$ на множестве $K_{\rho,L}(x_0)$ выполняется неравенство*

$$(1-\beta)\frac{a^2}{\mathscr{E}_1\operatorname{Sp}A|p|^2}+\frac{\delta b}{\mathscr{E}_1|p|}-\left(\frac{\mu_1}{\beta}+\frac{\hat{\mu}_5^2\hat{\mu}_7}{\beta}+\hat{\mu}_5\hat{\mu}_8\right)\geqslant c_0, \qquad (2.5)$$

где $c_0=\mathrm{const}>0$. Тогда

$$|\nabla u(x_0)|\leqslant\max(L,\ \theta), \qquad (2.6)$$

где

$$\theta=\max\left\{\left(\frac{4c_0^{-1}\varkappa_1}{\rho^2}\right)^{1/2\varepsilon},\ \left(\frac{4c_0^{-1}\varkappa_2}{\rho^2}\right)^{1/4\hat{\varepsilon}_1},\ \left(\frac{4c_0^{-1}\varkappa_3}{\rho}\right)^{1/2\varepsilon_1},\ \left(\frac{4c_0^{-1}\varkappa_4}{\rho}\right)^{1/2\hat{\varepsilon}_1}\right\}, \qquad (2.7)$$

а $\varkappa_1=\varkappa(\mu_2+\mu_3)$, $\varkappa_2=\varkappa\hat{\mu}_6^2\hat{\mu}_7$, $\varkappa_3=\varkappa\mu_6$, $\varkappa_4=\varkappa\hat{\mu}_6\hat{\mu}_8$, $\varkappa=2\sigma^{-2}\max(1/\beta,\ 12)$, $\varepsilon=1-r/2$.

Доказательство. Применяя к уравнению (1.1.1) в шаре $K_\rho(x_0)$ оператор $u_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, получим тождество (1.11). Используя условия (2.1)—(2.4) точно так же, как при доказательстве леммы 1.1, получим на множестве $K_{\rho,L}(x_0)$ следующие оценки,

$$\begin{gathered}
\left|a^{ij}_{p_l}u_{ij}\frac{\zeta_l}{\zeta}w\right|\leqslant\frac{\beta}{2}\zeta a^{ij}u_{ki}u_{kj}+\frac{2\mu_2}{\beta}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2\rho^2v^{\varepsilon}}\mathscr{E}_1w,\\
\left|2\sqrt{v}\,\zeta\delta a^{ij}u_{ij}\right|\leqslant\frac{\beta}{2}\zeta a^{ij}u_{ki}u_{kj}+\frac{2\mu_1}{\beta}\mathscr{E}_1w,\\
\left|a^{ij}\frac{\zeta_{ij}}{\zeta}w\right|\leqslant\mu_3\frac{8}{\rho^2}\frac{|\zeta''|+|\zeta'|}{\zeta v^{\varepsilon}}\mathscr{E}_1w,\\
2a^{ij}\frac{\zeta_i}{\zeta}\frac{\zeta_j}{\zeta}w\leqslant 8\mu_3\frac{\zeta'^2}{\zeta^2\rho^2v^{\varepsilon}}\mathscr{E}_1w,
\end{gathered}\tag{2.8}$$

где $\varepsilon=1-r/2>0$, $\beta=\mathrm{const}\in(0,\ 1]$;

$$\begin{gathered}
\left|a_{p_l}\frac{\zeta_l}{\zeta}w\right|\leqslant\left|b_{p_l}\frac{\zeta_l}{\zeta}w\right|+\left|\hat{b}_{p_l}\frac{\zeta_l}{\zeta}w\right|\leqslant\Bigl(2\mu_6\frac{|\zeta'|}{\zeta\rho v^{\varepsilon_1}}+\\
+\frac{2}{\beta}\hat{\mu}_6^2\hat{\mu}_7\frac{\zeta'^2}{\zeta^2\rho^2v^{2\hat{\varepsilon}_1}}+2\hat{\mu}_6\hat{\mu}_8\frac{|\zeta'|}{\zeta\rho v^{\hat{\varepsilon}_1}}\Bigr)\mathscr{E}_1w-\frac{\beta}{2}\zeta a^{ij}u_{ki}u_{kj};
\end{gathered}\tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}
2\sqrt{v}\,\zeta\delta a\geqslant 2\sqrt{v}\,\zeta\delta b+2\sqrt{v}\,\zeta(\delta b)_-\geqslant 2\sqrt{v}\,\zeta\delta b-\\
-\Bigl(\frac{2\hat{\mu}_5^2\hat{\mu}_7}{\beta}+2\hat{\mu}_5\hat{\mu}_8\Bigr)\mathscr{E}_1w-\beta\frac{\zeta}{2}a^{ij}u_{ki}u_{kj}.
\end{gathered}\tag{2.10}$$

Учитывая также, что

$$2(1-\beta)\zeta a^{ij}u_{ki}u_{kj}\geqslant 2(1-\beta)\frac{a^2}{\operatorname{Sp}A}=2(1-\beta)\frac{a^2}{\operatorname{Sp}A\,|p|^2\mathscr{E}_1}\mathscr{E}_1w,\tag{2.11}$$

и выбирая $\zeta(\xi)=\xi^{1/\sigma}$, где $\sigma=\min(\varepsilon/2,\ \varepsilon_1,\ \hat{\varepsilon}_1)$, выведем из (1.11), (2.8)—(2.11) неравенство

$$\begin{gathered}
a^{ij}w_{ij}+b^kw_k\geqslant\Bigl\{\Bigl[2(1-\beta)\frac{a^2}{\operatorname{Sp}A\,|p|^2\mathscr{E}_1}+\frac{2\delta b}{\mathscr{E}_1|p|}-\Bigl(\frac{2\mu_1+2\hat{\mu}_5^2\hat{\mu}_7}{\beta}+2\hat{\mu}_5\hat{\mu}_8\Bigr)\Bigr]-\\
-\varkappa\Bigl[\frac{\mu_2+\mu_3}{\rho^2w^{\varepsilon}}+\frac{\hat{\mu}_6^2\hat{\mu}_7}{\rho^2w^{2\hat{\varepsilon}_1}}+\frac{\mu_6}{\rho w^{\varepsilon_1}}+\frac{\hat{\mu}_6\hat{\mu}_8}{\rho w^{\hat{\varepsilon}_1}}\Bigr]\Bigr\}\mathscr{E}_1w,\quad x\in K_{\rho,L}(x_0),
\end{gathered}\tag{2.12}$$

где вид b^k для дальнейшего безразличен, а $\varkappa=2\sigma^{-2}\max(1/\beta,\ 12)$. Пусть x_* — точка максимума функции w в $\overline{K_\rho(x_0)}$ (очевидно, что $x_*\in K_\rho(x_0)$). Справедлива следующая альтернатива: либо одновременно выполнены неравенства $|\nabla u(x_*)|>L$, $w(x_*)\geqslant\theta^2$, либо хоть одно из этих неравенств не имеет места. В первом случае, учитывая также вид числа θ (см. (2.7)), заключаем, что $x_*\in K_{\rho,L}(x_0)$ и в этой точке справедливо неравенство

$$\varkappa\Bigl[\frac{\mu_2+\mu_3}{\rho^2w^{\varepsilon}}+\frac{\hat{\mu}_6\hat{\mu}_7}{\rho^2w^{2\hat{\varepsilon}_1}}+\frac{\mu_6}{\rho w^{\varepsilon_1}}+\frac{\hat{\mu}_6\hat{\mu}_8}{\rho w^{\hat{\varepsilon}_1}}\Bigr]<c_0.$$

Тогда из (2.12) и (2.5) следует, что в точке x_* $a^{ij}w_{ij}>0$. Однако последнее неравенство противоречит тому, что $x_*\in K_\rho(x_0)$ — точка максимума функции w. Следовательно, первое утверждение альтернативы не может иметь места. Из второй части альтернативы легко следует оценка (2.6). Теорема 2.1 доказана.

Отметим, что несколько другие классы уравнений вида (1.1.1), для решений $u(x)$ которых устанавливается оценка $|\nabla u(x_0)|$, зависящая только от структуры уравнения (в частности, не зависящая от каких-либо границ самого решения), были выделены в работе [34]. Очевидно, что теорема 2.1 допускает вырождение эллиптичности такого же сорта, что и теорема 1.1.

Выделим теперь некоторые классы уравнений, для которых $|\nabla u(x_0)|$ можно оценить через $u(x_0)$ и $\sup\limits_{K_\rho(x_0)} u$ ($\inf\limits_{K_\rho(x_0)} u$). С этой целью произведем в уравнении (1.1.1) замену неизвестной функции $u=\varphi(\bar{u})$. Тогда уравнение (1.1.1) перейдет в уравнение

$$\bar{a}^{ij}\bar{u}_{ij}=\bar{a}, \tag{2.13}$$

где

$$\bar{a}^{ij}(x,\ \bar{u},\ \bar{p})=a^{ij}(x,\ \varphi(\bar{u}),\ \varphi'(\bar{u})\bar{p}),\ \bar{a}(x,\ \bar{u},\ \bar{p})=\frac{1}{\varphi'(\bar{u})}a(x,\ \varphi(\bar{u}),\ \varphi'(\bar{u})\bar{p})-$$
$$-\frac{\varphi''(\bar{u})}{\varphi'(\bar{u})}\bar{\mathscr{E}}_1,\ \bar{\mathscr{E}}_1=a^{ij}(x,\ \varphi(\bar{u}),\ \varphi'(\bar{u})\bar{p})\bar{p}_i\bar{p}_j=\mathscr{E}_1[\varphi'(\bar{u})]^{-2}.$$

Заметим также, что $p=\varphi'(\bar{u})\bar{p}$, $\bar{A}^\tau\equiv\bar{a}^{ij}(x,\bar{u},\bar{p})\tau_i\tau_j=A^\tau$, $\tau\in\mathbb{R}^n$, $|\tau|=1$. Выберем функцию $\varphi(\bar{u})$ так, чтобы $\varphi''(\varphi')^{-1}=\mathrm{const}$. Точнее, пусть

$$u=\varphi(\bar{u})\equiv m-\delta+e^{\bar{u}},\quad m\equiv\inf_{K_\rho(x_0)}u,\quad \delta=\mathrm{const}>0. \tag{2.14}$$

Лемма 2.1. *Пусть на множестве* $K_{\rho,l}(x_0)\equiv\{x\in K_\rho(x_0):|\nabla u(x)|>l\}$ *на решении* $u\in C^3(\Omega)$ *уравнения* (1.1.1), *удовлетворяющем условию* $u(x)\geqslant m$ *в* $K_\rho(x_0)$, *выполнены условия*

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_1>0,\ |pA_p^\tau|\leqslant\sqrt{\frac{\mu_0}{n}A^\tau\mathscr{E}_1}\,|p|^{-1},\quad |\delta A^\tau|\leqslant\sqrt{\frac{\mu_1}{n}A^\tau\mathscr{E}_1}\,|p|^{-1},\\ |A_p^\tau||p|\leqslant\sqrt{\frac{\mu_2}{n^2}A^\tau\mathscr{E}_1}\,|p|^{-1},\quad \|A\|\leqslant\mu_3\mathscr{E}_1|p|^{-2},\end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}a=b+\hat{b},\ pb_p-b\geqslant-\mu_4\mathscr{E}_1|p|^{-1},\ \delta b\geqslant-\mu_5\mathscr{E}_1,\ |b_p|\leqslant\frac{\mu_6}{\sqrt{n}}\mathscr{E}_1|p|^{-2},\\ \delta\mathscr{E}_1\geqslant-\mu_5'\mathscr{E}_1,\quad |(\mathscr{E}_1)_p|\leqslant\frac{\mu_6'}{\sqrt{n}}\mathscr{E}_1|p|^{-1},\quad a_+\leqslant\mu_7\,\mathrm{Sp}\,A\,|p|,\end{gathered} \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}|p\hat{b}_p-\hat{b}|\leqslant\hat{\mu}_4|\hat{b}|,\quad |\delta_-\hat{b}|\leqslant\hat{\mu}_5|\hat{b}|,\quad |\hat{b}_p|\leqslant\frac{\hat{\mu}_6}{\sqrt{n}}|\hat{b}||p|^{-1},\\ \mathrm{sign}\,|\hat{b}|\,\mathrm{Sp}\,A\,|p|^2\leqslant\hat{\mu}_7\mathscr{E}_1,\quad (\mathrm{sign}\,|\hat{b}|)|b|\leqslant\frac{\hat{\mu}_8}{|p|}\mathscr{E}_1,\end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered}2-\frac{p(\mathscr{E}_1)_p}{\mathscr{E}_1}+\frac{(1-\beta)\mathscr{E}_1}{\mathrm{Sp}\,A\,|p|^2}-\frac{2\mu_7(1-\beta)}{L}-2\left(\mu_0+\frac{\mu_1}{L^2}\right)\beta^{-1}-\\ -\frac{\mu_4+\mu_5+\mu_5'}{L}-\left(\frac{\hat{\mu}_5}{L}+\hat{\mu}_4\right)^2\hat{\mu}_7\beta^{-1}-\left(\frac{\hat{\mu}_5}{L}+\hat{\mu}_4\right)\left(\frac{\hat{\mu}_8}{L}+1\right)\geqslant c_0,\end{gathered} \tag{2.18}$$

где $L=\mathrm{const}\geqslant l/\delta$, $\beta=\mathrm{const}\in[0,1]$, $l=\mathrm{const}\geqslant 0$, *а константы* $\mu_0,\ldots,\hat{\mu}_8$ *неотрицательны. Тогда на множестве* $K_{\rho,\bar{l}}(x_0)$, *где* $\bar{l}=L$, *на решении* $\bar{u}(x)$ *уравнения* (2.13), *соответствующем выбору функции* φ *по формуле* (2.14), *выполнены все условия теоремы* 2.1 *в случае* $r=0$, $\varepsilon_1=1/2$, $\hat{\varepsilon}_1=1/2$.

Доказательство. Лемма 2.1 доказывается непосредственной проверкой выполнимости условий теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть* $u\in C^3(\Omega)$ — *некоторое решение в области* Ω *уравнения* (1.1.1), *такое, что* $u(x)\geqslant m_1$ *в* $K_\rho(x_0)$. *Пусть на этом решении на множестве* $K_{\rho,l}(x_0)\equiv\{x\in K_\rho(x_0):|\nabla u|>l\}$ *выполнены условия* (2.15)—(2.17). *Предположим также, что при некоторых числах* $\beta\in[0,1]$ *и* $L\geqslant l\delta^{-1}$, *где* δ — *фиксированное положительное число, выполнено условие* (2.18). *Тогда*

$$|\nabla u(x_0)|\leqslant\max(L,\ \theta)[u(x_0)-m_1+\delta], \tag{2.19}$$

где $\theta = \frac{4c_0^{-1}(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4)}{\rho}$, c_0 *— константа из условия* (2.18), $\varkappa_1 = \varkappa(\mu_2 + \mu_3)$, $\varkappa_2 = \varkappa\hat{\mu}_6^2\hat{\mu}_7$, $\varkappa_3 = \varkappa(\mu_6/L + \mu_6')$, $\varkappa_4 = \varkappa\hat{\mu}_6$, $\varkappa = 2\sigma^{-2}\max(2/\beta,\ 4 + 2\sqrt{n})$. *Если условия* (2.15)—(2.17) *выполнены на множестве* $K_{\rho,0}(x_0)$ ***при***

$$\mu_1 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_5' = \mu_7 = \hat{\mu}_8 = \hat{\mu}_5 = 0 \tag{2.20}$$

и *если на множестве* $K_{\rho,0}(x_0)$

$$\begin{gathered} 2 - \frac{p(\mathscr{E}_1)_p}{\mathscr{E}_1} + \frac{(1-\beta)\,\mathscr{E}_1}{\operatorname{Sp} A\,|p|^2} - \frac{2\mu_0}{\beta} \geqslant c_0 = \mathrm{const} > 0, \\ p\hat{b}_p - \hat{b} \geqslant 0, \end{gathered} \tag{2.21}$$

то справедлива оценка

$$|\nabla u(x_0)| \leqslant c_1 \frac{u(x_0) - m_1}{\rho}, \tag{2.22}$$

где $c_1 = c_0^{-1}(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4)$.

Доказательство. Пусть сначала выполнены условия первой части теоремы. Ввиду леммы 2.1 функция $\bar{u}$, определенная по формуле (2.14), является решением уравнения (2.13), и на ней на множестве $\bar{K}_{\rho,l}(x_0) \equiv \{x \in K_\rho(x_0) : |\nabla\bar{u}| > l\}$, где $l = L \geqslant l/\delta$, выполнены все условия теоремы 2.1. Тогда из теоремы 2.1 следует оценка

$$|\nabla\bar{u}(x_0)| \leqslant \sup(L,\ \theta).$$

Учитывая, что $|\nabla u(x_0)| = e^{\bar{u}(x_0)}|\nabla\bar{u}(x_0)|$, $e^{\bar{u}(x_0)} = u(x_0) - m_1 + \delta$, выведем отсюда оценку (2.19). Докажем теперь вторую часть теоремы. При условиях второй части теоремы легко убедиться в том, что для уравнения (2.13) будет выполнено условие вида (2.5). Поскольку все остальные условия теоремы 2.1 также будут выполнены в случае $L = 0$, то для $|\nabla\bar{u}(x_0)|$ верна оценка $|\nabla\bar{u}(x_0)| \leqslant \theta$, из которой, очевидно, и следует неравенство (2.22). Теорема 2.2 доказана. Совершенно аналогичным образом устанавливается и оценка $|\nabla u(x_0)|$ через $u(x_0)$ и $\sup\limits_{K_\rho(x_0)} u(x)$. Очевидно, что теорема 2.2 допускает вырождение эллиптичности такого же сорта, что и теорема 1.1.

Результат, аналогичный, но не тождественный теореме 2.2, был установлен ранее в работе [34]. Заметим, наконец, что из неравенства вида (2.21) можно вывести следующее неравенство Гарнака (см. [34], с. 89).

Теорема 2.3. *Пусть* $u \in C^3(\Omega)$ *— некоторое неотрицательное решение уравнения* (1.1.1) *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Пусть на этом решении на множестве* $\{x \in \Omega : |\nabla u| > 0\}$ *выполнены условия* (2.15)—(2.17), (2.20), (2.21). *Тогда для любой компактной в* Ω *подобласти* Ω' *существует такая константа* $K > 1$, *зависящая лишь от структуры уравнения и* $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \Omega')$, *что*

$$\max_{\Omega'} u \leqslant K \min_{\Omega'} u. \tag{2.23}$$

Доказательство. Обозначим $x - x_0 = \xi|x - x_0| \equiv r\xi$, где $x \in \overline{K_\rho(x_0)} \subset \Omega$, $\rho > 0$, и рассмотрим в $[0, \rho]$ функцию $v = v(r) \equiv u(x_0 + r\xi)$. Очевидно, что $v'(r) = \xi \cdot \nabla u(x)$. Учитывая, что $K_{\rho-r}(x) \subset K_\rho(x_0)$, выведем из оценки (2.22) (при $m_1 \geqslant 0$) неравенство

$$v'(r) \leqslant |v'(r)| \leqslant c_1 \frac{v(r)}{\rho - r}, \quad 0 \leqslant r < \rho. \tag{2.24}$$

Интегрируя (2.24) по $[0, r]$, $r \in (0, \rho/2]$, получим, что при $r \in [0, \rho/2]$: $v(r) \leqslant v(0)(1 - r/\rho)^{-c_1}$. Последнее неравенство можно переписать в вид

$$u(x) \leqslant u(x_0)\left(1 - \frac{|x - x_0|}{\rho}\right)^{-c_1}, \quad x \in K_{\rho/2}(x_0). \tag{2.25}$$

Из неравенства (2.25) при помощи стандартных рассуждений следует существование такой константы $K > 0$, что для любой пары точек $x \in \Omega'$, $y \in \Omega'$ справедливо неравенство $u(x) \leqslant Ku(y)$, равносильное неравенству (2.23). Теорема 2.3 доказана.

При других условиях на структуру уравнения (1.1.1) результаты, аналогичные теоремам 2.1—2.3, были получены в работе [34].

§ 3. Двусторонние лиувиллевские теоремы

Если функция $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения (1.1.1) во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, то, следуя работе [43], будем называть такую функцию целым решением уравнения (1.1.1). Обозначим

$$m(\rho) = \sup_{|x| \leqslant \rho} |u(x)|.$$

Теорема 3.1. *Пусть функции* $a^{ij}(x, u, p), i, j = 1, \ldots, n, a(x, u, p)$, *образующие уравнение* (1.1.1), *удовлетворяют на множествах* $\mathfrak{M}_l \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \{|p| > l\}$ *условиям* (1.1)—(1.6) *с константами* $\mu_0, \ldots, \hat{e}_1$, *зависящими, вообще говоря, от* l, *и пусть при этом выполнено условие*

$$\mu_1 + \mu_5 + \hat{\mu}_5^2\hat{\mu}_7 + \hat{\mu}_5\hat{\mu}_8 = 0. \tag{3.1}$$

Тогда всякое целое решение и уравнения (1.1.1), *удовлетворяющее условию* $m(\rho) = o(\ln \rho)$, $\rho \to \infty$, *есть константа. Если кроме условия* (3.1) *выполнено условие*

$$\mu_4 + \hat{\mu}_4\hat{\mu}_8 + \hat{\mu}_8 = 0, \tag{3.2}$$

то всякое целое решение уравнения (1.1.1), *для которого* $m(\rho) = o(\sqrt{\rho})$, $\rho \to \infty$, *есть константа. Наконец, если кроме условий* (3.1), (3.2) *выполнено условие*

$$\mu_6 + \hat{\mu}_6\hat{\mu}_8 = 0, \tag{3.3}$$

то всякое целое решение уравнения (1.1.1), *для которого* $m(\rho) = o(\rho)$ *при* $\rho \to \infty$, *есть константа.*

Доказательство. Пусть фиксированы число $l > 0$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $m_1(\rho) = \min\limits_{K_\rho(x_0)} u(x)$, $m_2(\rho) = \max\limits_{K_\rho(x_0)} u(x)$, $m(\rho) = \operatorname{osc}\limits_{K_\rho(x_0)} u(x) = m_2(\rho) - m_1(\rho)$. Предположим сначала, что выполнено условие (3.1). Тогда величина ν_2, определенная в (1.9), равна 0. Поэтому, считая $\mu_4 + \hat{\mu}_4\hat{\mu}_8 + \hat{\mu}_8 > 0$, замечаем, что для функции $u(x)$ в шаре $K_\rho(x_0)$ выполнены все условия первой части теоремы 1.1 при $m_1 = m_1(\rho)$, $m_2 = m_2(\rho)$, $L = l$. (В частности условие (1.25) тривиально выполнено). Тогда для $|\nabla u(x_0)|$ справедлива оценка вида (1.26) при $L = l$ и θ, определенном по формуле (1.27) (с заменой m на $m(\rho)$). Из условия $m(\rho) = o(\ln \rho)$, $\rho \to \infty$, и вида θ вытекает, что $\theta \to 0$ при $\rho \to \infty$. Поэтому, выбирая ρ столь большим, что $\theta < l$, получим оценку $|\nabla u(x_0)| \leqslant 2l$. Ввиду произвола $l > 0$ отсюда следует, что $\nabla u(x_0) = 0$. Учитывая, что x_0 — произвольная точка в $\mathbb{R}^n$, заключаем, что $u(x) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathbb{R}^n$. Вторая и третья части теоремы 3.1 доказываются совершенно аналогичным образом с использованием второй части теоремы 1.1. Теорема 3.1

доказана. Теорема 3.1 является обобщением двусторонних лиувиллевских теорем, доказанных в [43], [36].

Следствие 3.1. *Пусть для функций* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ *на множествах* $\mathfrak{M}_{m,l}\equiv\mathbb{R}^n\times\{|u|\leqslant m\}\times\{|p|>l\}$ *выполнены условия* (1.1)—(1.6) *с константами* $\mu_0, \ldots, \hat{\varepsilon}_1$, *зависящими от* l *и* m. *Пусть также* (*при всех* $l>0$, $m>0$) *выполнено условие* (3.1). *Тогда всякое целое решение уравнения* (1.1.1), *ограниченное во всем* $\mathbb{R}^n$, *есть константа.*

Доказательство. Переопределяя функции $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, и $a(x, u, p)$ надлежащим образом при $|u|\geqslant m$, сведем условия следствия 3.1 к условиям первого случая теоремы 3.1, из которой и вытекает результат следствия 3.1.

Приведем в качестве примеров некоторые частные случаи теоремы 3.1.

1. Пусть уравнение (1.1.1) имеет вид

$$a^{ij}(\nabla u)u_{x_ix_j}=b(u, \nabla u),\ b(u, p)=f(u)h(p), \tag{3.4}$$

причем на множествах $\mathfrak{M}_l$ выполнены условия вида (1.2) для матрицы $A\equiv\|a^{ij}(p)\|$ и условия $|f|\leqslant c_1$, $\frac{\partial f}{\partial u}\geqslant 0$, $|ph_p-p|\leqslant c_2\mathscr{E}_1$, $|h_p|\leqslant c_3\mathscr{E}_1|p|^{-2\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1>0$, $h\geqslant 0$, где c_1, $c_2=\text{const}\geqslant 0$. Тогда всякое целое решение уравнения (3.4), такое, что $m(\rho)=o(\ln\rho)$, $\rho\to\infty$, есть константа.

2. Пусть уравнение (1.1.1) имеет вид

$$a^{ij}(\nabla u)u_{x_ix_j}=\hat{b}(u, \nabla u), \tag{3.5}$$

причем на множествах $\mathfrak{M}_l$ выполнены условия вида (1.2) для матрицы $A=\|a^{ij}(p)\|$ и условия $\frac{\partial\hat{b}}{\partial u}\geqslant 0$, $|p\hat{b}_p|\leqslant c_1|\hat{b}|$, $|\hat{b}_p|\leqslant c_2|\hat{b}||p|^{-2\hat{\varepsilon}_1}$, $\hat{\varepsilon}_1>0$ (заметим, что последним условиям при $\hat{\varepsilon}_1=1/2$ удовлетворяет, например, любая функция $\hat{b}=f(|p|)$, такая, что $|f'(t)||t|\leqslant c|f(t)|$, $c=\text{const}>0$, $0\leqslant t<+\infty$. Тогда всякое целое решение уравнения (3.5), такое, что $m(\rho)=o(\rho)$, $\rho\to\infty$, есть константа.

Следующий результат можно назвать ослабленной двусторонней лиувиллевской теоремой.

Теорема 3.2. *Пусть функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, *и* $a(x, u, p)$ *удовлетворяют на множествах* $\mathfrak{M}_{(l,L)}\equiv\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\{l<|p|<L\}$, $l>0$, $L>l$, *условиям* (1.1)—(1.5) *при любом* $r\geqslant 0$ *и* $\varepsilon_1=\hat{\varepsilon}_1=1/2$ *с константами* $\mu_0, \mu_1, \ldots, \hat{\mu}_8$, *зависящими от* l *и* L. *Пусть* u — *целое решение уравнения* (1.1.1), *такое, что* $\sup\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|<+\infty$. *Тогда:*

1) *если при всех* $l>0$, $L>l$ *выполнено условие* (3.1) *и* $m(\rho)=o(\ln\rho)$, $\rho\to\infty$, *то* $u\equiv\text{const}$ *в* $\mathbb{R}^n$;

2) *если при всех* $l>0$ *и* $L>l$ *выполнены условия* (3.1), (3.2) *и* $m(\rho)=o(\sqrt{\rho})$, $\rho\to\infty$, *то* $u\equiv\text{const}$ *в* $\mathbb{R}^n$;

3) *если при всех* $l>0$ *и* $L>l$ *выполнены условия* (3.1)—(3.3) *и* $m(\rho)=o(\rho)$, $\rho\to\infty$, *то* $u\equiv\text{const}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|=M_1$. Тогда при любых $x_0\in\mathbb{R}^n$ и $\rho>0$ для функции $u(x)$ на множестве $K_{\rho,l}(x_0)\equiv\{x\in K_\rho(x_0):|\nabla u(x)|>l\}$ будут выполнены условия (1.1)—(1.6) (с константами $\mu_0, \ldots, \hat{\varepsilon}_1$, зависящими от l и M) и условие $m_1\leqslant u(x)\leqslant m_2$ с $m_1=\min\limits_{K_\rho(x_0)}u$, $m_2=\max\limits_{K_\rho(x_0)}u$. Пере-

(a^{ji} определяя функции x, u, p), $i, j=1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ надлежащим образом при $|p| \geqslant M_1$, сведем условия теоремы 3.2 к условиям теоремы 3.1, из которой и следуют все результаты теоремы 3.2.

Аналогичным образом из следствия 3.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1′. *Пусть функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ *удовлетворяют на множествах* $\mathfrak{M}_{m,(l,L)} \equiv \mathbb{R}^n \times \{|u| \leqslant m\} \times \{l < |p| < L\}$, *где* m, l *и* L — *любые положительные числа, условиям* (1.1)—(1.5) *при любом* $r \geqslant 0$ *и* $\varepsilon_1 = \hat{\varepsilon}_1 = 1/2$ *с константами* $\mu_0, \mu_1, \ldots, \hat{\mu}_8$, *зависящими от* m, l *и* L. *Пусть* u — *целое решение уравнения* (1.1.1), *такое, что* $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u| + \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| < +\infty$. *Предположим, что при всех* $m > 0$, $l > 0$, $L > 0$ *выполнено условие* (3.1). *Тогда* $u \equiv \mathrm{const}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Замечание 3.1. Очевидно, что в теореме 3.2 и следствии 3.1′ степень неравномерности эллиптичности не играет никакой роли.

Из теоремы 3.2 вытекает, в частности, следующий известный результат ([26], [43]): всякое целое решение уравнения поверхности постоянной средней кривизны K, т. е. уравнения вида (1.1.10) при $\mathscr{H}(x, u, p) \equiv K = \mathrm{const}$, удовлетворяющее условиям $m(\rho) = o(\ln \rho)$, $|\nabla u| \leqslant \mathrm{const}$ в $\mathbb{R}^n$, есть тождественная константа в $\mathbb{R}^n$. Действительно, в этом случае условия (1.1)—(1.5) очевидным образом выполнены на множестве $\mathfrak{M}_{l, M_1}$ (причем мы считаем здесь, что $a = b + \hat{b}$, $b = nK(1+|p|^2)^{3/2}$, $\hat{b} \equiv 0$), поскольку выражения, стоящие в правых частях неравенств (1.1)—(1.5), ограничены снизу некоторым положительным числом $c_1(l, M_1)$, а модули выражений из левых частей этих неравенств не превосходят константы $c_2(l, M_1)$.

Далее мы приводим результат, утверждающий при определенных условиях, что всякое целое решение уравнения (1.1.1), осцилляция во всем пространстве которого не превосходит некоторой величины, определяемой структурой уравнения, есть тождественная константа. Очевидно, что результаты такого сорта также следует относить к числу лиувиллевских теорем.

Теорема 3.3. *Пусть функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ *удовлетворяют на множествах* $\mathfrak{M}_{m,l} \equiv \mathbb{R}^n \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| > l\}$ *условиям* (1.1)—(1.6) *с константами* $\mu_0, \ldots, \hat{\varepsilon}_1$, *зависящими от* m *и* l. *Пусть* u — *целое решение уравнения* (1.1.1), *и пусть при любых* $m \in (0, \operatorname{osc}\limits_{\mathbb{R}^n} u)$ *и* $l > 0$ *выполнено хотя бы одно из условий*

$$\nu_1^2 (2\nu_2)^{-1} > 1, \quad \operatorname*{osc}_{\mathbb{R}^n} u < \left(\ln \frac{\nu_1^2}{2\nu_2}\right)(2\nu_1)^{-1} \leqslant c_1 = \mathrm{const}, \tag{3.6}$$

или

$$\operatorname*{osc}_{\mathbb{R}^n} u < \min\left\{(2\nu_1)^{-1}, \left(2\sqrt{\nu_2}\right)^{-1}\right\} \leqslant c_2 = \mathrm{const}, \tag{3.7}$$

где ν_1 *и* ν_2 *определены в* (1.9) *при* $\alpha = 2(\mu_0 + \hat{\mu}_4^2\hat{\mu}_7 + \hat{\mu}_7)$, *а* c_1 *и* c_2 *не зависят от* l *и* m. *Тогда* $u \equiv \mathrm{const}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\rho > 0$. Из условий теоремы 3.3 вытекает, что для функции u на множестве $K_{\rho,l}(x_0)$ выполнены все условия первой или второй части теоремы 1.1 при $m_1 = \inf\limits_{K_\rho(x_0)} u(x)$, $m_2 = \sup\limits_{K_\rho(x_0)} u(x)$. Тогда для функции $u(x)$ справедлива оценка $|\nabla u(x_0)| \leqslant 2\max(l, \theta)$, где θ определено либо по формуле (1.27), либо по формуле (1.29). Пусть при фиксированных x_0 и $l > 0$ радиус ρ стремится к ∞. Учитывая, что $\lim\limits_{\rho\to\infty} \theta = 0$ (поскольку $m = m_2(\rho) - m_1(\rho)$ ограничено), получаем в обоих случаях оценку $|\nabla u(x_0)| \leqslant 2l$, из которой ввиду произвола x_0 и l легко следует результат теоремы 3.3. Теорема 3.3 доказана.

Рассмотрим, например, уравнение

$$e^{\lambda_i u} u_{x_i x_i} = 0, \quad \lambda_i = \mathrm{const} > 0, \; i = 1, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Легко видеть, что условия (1.2) выполнены на множествах $\mathfrak{M}_{m,l}$ в случае этого уравнения с константами $\mu_0 = \mu_2 = 0$, $\mu_1 = \lambda^2 e^{4\lambda m} n$, $\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \lambda_i$, $r = 0$, $\mu_3 = \mu_3(\lambda, m)$, а условия (1.3)—(1.5) — с нулевыми константами. Тогда ввиду (1.9) $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 4\mu_1$. Применяя теорему 3.3 (с условием (3.7)), заключаем, что всякое целое решение уравнения (3.8), для которого $\operatorname{osc}\limits_{\mathbb{R}^n} u < \min\{1, 1/4\sqrt{n}\lambda e^{2\lambda}\}$, есть константа.

§ 4. Односторонние лиувиллевские теоремы

Теорема 4.1. *Пусть функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ *удовлетворяют на множествах* $\mathfrak{M}_l = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \{|p| > l\}$, $l = \mathrm{const} > 0$, *условиям* (2.15)—(2.17) *с константами* $\mu_0, \ldots, \hat{\mu}_8$, *зависящими от* l *и удовлетворяющими условиям* (2.20). *Предположим также, что выполнены условия* (2.21) *с константой* c_0, *не зависящей от* l. *Тогда всякое целое решение уравнения* (1.1.1), *удовлетворяющее условию*

$$\sup_{|x|\leqslant\rho} u = o(\rho), \; \rho \to +\infty \; (\inf_{|x|\leqslant\rho} u = o(\rho), \; \rho \to +\infty), \tag{4.1}$$

есть тождественная константа в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Докажем теорему 4.1, например, при условии $\inf\limits_{|x|\leqslant\rho} u = o(\rho)$, $\rho \to +\infty$. Из оценки (2.22) с заменой m_1 на $m_1(\rho) = \inf\limits_{K_\rho(x_0)} u$ следует, что $|\nabla u(x_0)| = 0$, если в (2.22) перейти к пределу при $\rho \to \infty$. Ввиду произвола точки x_0 отсюда следует, что $\nabla u \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$, т. е. $u \equiv \mathrm{const}$ в $\mathbb{R}^n$. Теорема 4.1 доказана. Результат, аналогичный теореме 4.1, установлен также в работе [34].

Докажем теперь одностороннюю лиувиллевскую теорему, имеющую менее традиционный характер, но относящуюся к более широкому классу уравнений, чем тот, который рассматривается в теореме 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a(x, u, p)$ *удовлетворяют на множестве* $\mathscr{P}_l \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \{|p| > l\}$ *при любом* $l > 0$ *условиям* (1.1)—(1.6) *с константами* $\mu_0, \ldots, \hat{\mu}_8$, *зависящими, вообще говоря, от* l, *и константами* $r = 0$, $\varepsilon_1 = 1/2$, $\hat{\varepsilon}_1 = 1/2$. *Предположим также, что*

$$\mu_4 + \hat{\mu}_4 \hat{\mu}_8 + \hat{\mu}_8 = 0, \; \mu_1 + \mu_5 + \hat{\mu}_5^2 \hat{\mu}_7 + \mu_5 \hat{\mu}_8 = 0, \; \mu_6 = 0. \tag{4.2}$$

Тогда существует такое число $\alpha > 1$, *зависящее только от структуры уравнения* (1.1.1), *что всякое целое решение уравнения* (1.1.1), *удовлетворяющее при какой-нибудь* $\beta \in [0, 1]$ *условию*

$$\inf_{|x|\leqslant\rho} u = o(\rho^\beta), \quad |\nabla u| = O(\rho^{(1-\beta)/\alpha}), \quad \rho \to +\infty, \tag{4.3}$$

есть константа. В случае $\beta = 1$ *в* (4.3) *указанный результат сохраняется, если условия* (1.1)—(1.6), (4.2) *выполнены на множествах* $\mathfrak{M}_{(l,L)} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \{l < |p| < L\}$ *с константами* $\mu_0, \ldots, \hat{\mu}_7$, *зависящими от* l *и* L.

Доказательство. Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ввиду леммы 1.1 либо в точке x_* максимума в $\overline{K_\rho(x_0)}$ функции $\bar{\omega}(x)$, определенной соотношениями (1.7), справедливо неравенство (1.8), либо имеет место оценка (1.10) (с заменой в (1.10) L на l). Пусть число $\alpha > 0$ из (1.8) удовлетворяет следующему условию: существует такое число $\varkappa \in (1/2, 1)$, что

$$\alpha - \gamma - \nu_0 = \varkappa\alpha, \quad (2\varkappa - 1)\alpha > 1, \tag{4.4}$$

где $\varkappa$ — некоторое фиксированное число из $(0, 1)$ (очевидно, что условие (4.4) будет выполнено, если $\alpha > 2(\varkappa + \nu_0) + 1$). Обозначим: $q = 2(2\alpha\varkappa/(\alpha + 1) - 1)$. Очевидно, что $q > 0$. Тогда, полагая в (1.8)

$$z(u) = (u - m_1 + \delta)^2, \quad \delta = \mathrm{const} > 1, \quad m_1 = m_1(\rho) = \inf_{K_\rho(x_0)} u,$$

получим ввиду (4.4), что

$$-z'' + \frac{\alpha - \gamma - \nu_0}{\alpha + 1} \frac{z'^2}{z} \geqslant q. \tag{4.5}$$

Поэтому в указанной выше альтернативе неравенство (1.8) можно заменить неравенством

$$q - \frac{\nu_3 + \nu_4}{\rho^2\theta^2} z_* \leqslant 0, \tag{4.6}$$

где ν_3 и ν_4 определены в (1.9) при выбранных выше значениях α и γ и где $z_* \equiv z(u(x_*))$, причем мы учли также, что из сделанных предположений вытекают равенства $\nu_4 = 0$, $\nu_6 = 0$. Положим $\theta = (4\nu_3 z_*/q\rho^2)^{1/2}$. При таком выборе θ левая часть в (4.6) превосходит положительное число $q/2$, что противоречит неравенству (4.6). Таким образом, при выбранных $z(u)$ и θ справедливо неравенство

$$v_0 \equiv |\nabla u(x_0)|^2 \leqslant \max\left\{\left(\frac{z_0}{z_*}\right)^{1/(\alpha+1)} l, \quad \left(\frac{z_0}{z_*}\right)^{1/(\alpha+1)} \theta^2\right\}, \tag{4.7}$$

где $z_0 \equiv z(u(x_0))$. Ввиду того что x_* является точкой максимума функции $\bar{\omega} = \omega/z$, справедливо неравенство $\omega_0/z_0 \leqslant \omega_*/z_*$, из которого следует, что

$$z_* \leqslant \frac{\omega_*}{\omega_0} z_0 = \frac{w_*^{\alpha+1}}{w_0^{\alpha+1}} \qquad \frac{v_*^{\alpha+1}}{v_0^{\alpha+1}} z_0.$$

Тогда

$$\left(\frac{z_0}{z_*}\right)^{1/(\alpha+1)} \theta^2 \leqslant \frac{2(\nu_3 + \nu_4)}{q\rho^2} {z_*}^{1-1/(\alpha+1)} {z_0}^{1/(\alpha+1)} \leqslant \frac{2(\nu_3 + \nu_4)}{q\rho^2} \frac{v_*^\alpha}{v_0^\alpha} z_0, \tag{4.8}$$

где $v_* = |\nabla u(x_*)|^2$.

Из (4.7) и (4.8) следует неравенство

$$v_0^{\alpha+1} \leqslant \max\left\{\left(\frac{z_0}{z_*}\right)^{1/(\alpha+1)} v_0^\alpha l, \quad \frac{2(\nu_3 + \nu_4)}{q} \frac{z_0 v_*^\alpha}{\rho^2}\right\}. \tag{4.9}$$

Пусть фиксировано некоторое число $l > 0$. Учитывая, что

$$\frac{\sqrt{z_0 v_*^\alpha}}{\rho} \leqslant \frac{\sqrt{(u_0 + \delta)^2 - m_1^2(\rho)}}{\rho^\beta} \frac{\left(\sup\limits_{K_\rho(x_0)} |\nabla u|\right)^\alpha}{\rho^{1-\beta}}, \quad \beta \in [0, 1], \tag{4.10}$$

можно ввиду условия (4.3) выбрать ρ столь большим, что

$$\frac{2(\nu_3 + \nu_4)}{q} \frac{z_0 v_*^\alpha}{\rho^2} < {z_0}^{1/(\alpha+1)} v_0^\alpha l$$

(поскольку $z_0 \geqslant 1$, а $v_0^\alpha l$ — постоянное число при фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$). Поэтому, учитывая еще, что $z_* \geqslant 1$, получим неравенство

$$v_0^{\alpha+1} \leqslant z_0^{1/(\alpha+1)} v_0^\alpha l. \tag{4.11}$$

Ввиду произвола l из (4.11) следует, что $v_0 = 0$. Учитывая, что x_0 — любая точка в $\mathbb{R}^n$, заключаем тогда, что $\nabla u \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$, т. е. $u \equiv \mathrm{const}$ в $\mathbb{R}^n$. Теорема 4.2 доказана.

Аналогичным образом устанавливается вариант теоремы 4.2, соответствующий условию $\sup\limits_{|x| \leqslant \rho} u = o(\rho^\beta)$, $|\nabla u| = o(\rho^{(1-\beta)/\alpha})$, $\rho \to \infty$ (ср. (4.3)). В работе [34] был выделен несколько другой класс уравнений вида (1.1.1), для которых результат теоремы 4.2 установлен в случае $\beta = 1$ в условии (4.3). Справедливо следующее обобщение теоремы 4.2.

Теорема 4.2′. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4.2, *за исключением условий* $r = 0$, $\hat{\varepsilon}_1 = 1/2$. *Пусть вместо последних условий справедливы соотношения:* $\varepsilon = 1 - r/2 > 0$, $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon/2$. *Тогда существует такое число* $\alpha > 1$, *зависящее только от структуры уравнения* (1.1.1), *что всякое целое решение уравнения* (1.1.1), *удовлетворяющее при каком-нибудь* $\beta \in [0, 1]$ *условию*

$$\inf_{|x| \leqslant \rho} u = o(\rho^\beta) \, [\sup_{|x| \leqslant \rho} u = o(\rho^\beta)], \quad \sup_{|x| \leqslant \rho} |\nabla u| = O(\rho^{(1-\beta)/(\alpha-1+\varepsilon)}), \quad \rho \to \infty, \tag{4.12}$$

есть константа.

Теорема 4.2′ доказывается точно так же, как теорема 4.2.

ЧАСТЬ II

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ (A, b)-ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

II и III части монографии посвящены исследованию вопросов разрешимости краевых задач для квазилинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. Изучению этих вопросов было посвящено большое (особенно в случае линейных уравнений) число работ. Обширный цикл работ посвящен исследованию линейных эллиптических и параболических уравнений, вырождающихся на границе области. В связи с изучением таких уравнений методами функционального анализа возникла теория весовых функциональных пространств. Библиографию работ этого цикла можно найти, например, в монографиях [102, 113]. В частности, указанным вопросам были посвящены работы М. В. Келдыша [61], С. Г. Михлина [91], М. И. Вишика [12], Л. Д. Кудрявцева [73, 74], С. М. Никольского [95, 96], А. В. Бицадзе [9], В. П. Глушко [17], В. А. Кондратьева [64], В. Г. Мазьи [89] и многих других математиков.

В работе Г. Фикеры [14] были поставлены краевые задачи для общего линейного уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой и доказаны теоремы существования некоторых обобщенных решений таких задач. Теоремы существования и единственности нерегулярных обобщенных решений и теоремы существования гладких решений первой краевой задачи при широких условиях на структуру общего линейного уравнения с неотрицательной характеристической формой получены в работах О. А. Олейник [99, 102]. В монографии [102] приведены результаты других математиков в указанной области, а также обширная библиография. Отметим, в частности, работы А. М. Ильина [56], М. И. Фрейдлина [120, 121], Дж. Кона и Л. Ниренберга [18], Р. Филлипса и Л. Сарасона [35], Е. В. Радкевича [107], А. Л. Трескунова [117]. В перечисленных работах линейные уравнения рассматривались при определенных условиях гладкости их коэффициентов. В этом случае характерно падение граничного условия на части границы. В работах С. Н. Кружкова [69], М. К. В. Мерси и Г. Стампаккиа [31], Н. С. Трудингера [55] были изучены так называемые слабо вырожденные линейные эллиптические, а в работах автора [28, 43] — слабо вырожденные линейные параболические уравнения, для которых корректны краевые задачи в традиционных для невырожденных уравнений постановках. Заметим, что наличие слабого вырождения влечет определенную нерегулярность уравнения.

Ряд работ посвящен изучению краевых задач для некоторых квазилинейных эллиптических и параболических уравнений, допускающих неявное вырождение. В работах О. А. Олейник, А. С. Калашникова, Чжоу Юйлиня, Е. С. Сабининой и др. ([97, 100, 101, 59, 60, 108, 109]) изучены уравнения, возникающие в теории пограничного слоя при постепенном разгоне, а также в задачах нестационарной фильтрации. В работах Ю. А. Дубинского [18, 19] рассматривались квазилинейные эллиптические и параболические уравнения порядка $2m$, зависящие линейным образом от производных m-го порядка, такие, что вырождение происходит в точках, в которых производные $(m-1)$-го порядка, входящие в уравнение в некоторой степени, обращаются в 0. В случае $m=2$ ограничение Дубинского на линейность вхождения градиента в уравнение было снято недавно аспирантом ЛОМИ Н. З. Мкртычяном [93]. Разрешимость нелинейных вырождающихся уравнений, возникающих в теории управляемых процессов диффузионного типа, изучалась в работах Н. В. Крылова [71, 72]. Некоторые одномерные квазилинейные параболические уравнения с неявным вырождением рассмотрены в работе П. Равьяра [36]. В перечисленных работах (большинство из которых связано с весьма специфическими уравнениями) вырождение носит сугубо неявный характер, т. е. точки вырождения эллиптичности или параболичности зависят от рассматриваемого решения.

Разрешимость краевых задач для некоторых классов квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка, допускающих фиксированное вырождение (т. е. вырождение, не зависящее от рассматриваемого решения), изучалась в работах М. И. Фрейдлина [122] и Г. М. Фатеевой [119]. В этих работах предполагалось, однако, что производные от решения входят в уравнение линейным образом. Более того, в статье [122] предполагалась достаточная малость граничной функции и ее производных. В работах автора [44—47, 49—53] построена теория краевых задач для широких классов квазилинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений второго порядка, допускающих, в частности, фиксированное вырождение эллиптичности или параболичности. Рассмотренные классы уравнений захватывают, в частности, линейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Изложению этой теории посвящены ч. II и III монографии.

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, квазилинейное уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv -\frac{d}{dx_i} l^i(x, u, \nabla u) + l_0(x, u, \nabla u) = f(x), \tag{1}$$

где

$$\frac{d}{dx_i} l^i(x, u, \nabla u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial l^i}{\partial u_{x_j}} u_{x_i x_j} + \frac{\partial l^i}{\partial u} u_{x_i} + \frac{\partial l^i}{\partial x_i}.$$

Мы говорим, что уравнение (1) имеет $(A, \mathbf{b})$-структуру в области Ω, если существуют такие матрица $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ порядка n, вектор $\mathbf{b} \equiv (b^1(x), \ldots, b^n(x))$ и функции $l'^i(x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, $l'_0(x, u, q)$, что

$$\mathbf{l}(x, u, p) = A^* \mathbf{l}'(x, u, Ap), \quad l_0(x, u, p) = l'_0(x, u, Ap) + b^i(x) p_i. \tag{2}$$

Функции $l'^i(x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, $l'_0(x, u, q)$ мы называем приведенными коэффициентами такого уравнения. Приведенные коэффициенты уравнения, имеющего $(A, \mathbf{b})$-структуру, являются инвариантами этого уравнения (относительно невырожденных гладких преобразований независимых переменных). Уравнение вида (1), имеющее $(A, \mathbf{b})$-структуру в области

Ω, мы называем (A, $\mathfrak{b}$)-эллиптическим [строго (A, $\mathfrak{b}$)-эллиптическим] в Ω, если

$$\frac{\partial l'^i(x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j\geqslant 0,\ \eta=A\xi,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\bar{\Omega},\ u\in\mathbb{R},\ q=Ap,\ p\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial l'^i(x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j>0,\ \eta=A\xi\neq 0,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\bar{\Omega},\ u\in\mathbb{R},\ q=Ap,\ p\in\mathbb{R}^n\right]. \tag{3'}$$

Заметим, что матрица A может допускать произвольное вырождение на любом подмножестве в Ω. Если матрица A вырождается в Ω, то даже строго (A, $\mathfrak{b}$)-эллиптическое уравнение вида (1) является вырождающимся эллиптическим уравнением в Ω, поскольку ввиду (2)

$$\frac{\partial l^i(x,\ u,\ p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j=\frac{\partial l'^k(x,\ u,\ Ap)}{\partial q_s}A_k\xi A_s\xi,$$

где $A_k\xi\equiv a^{kr}\xi_r$, $k=1,\ \ldots,\ n$, так что форма $\frac{\partial l^i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j$ вырождается в любой точке $x\in\Omega$, где матрица A вырождена.

(A, $\mathfrak{b}$)-эллиптические уравнения охватывают широкий класс квазилинейных уравнений с неотрицательной характеристической формой. В частности, они содержат: 1) невырожденные эллиптические уравнения ($A\equiv I$, $\mathfrak{b}\equiv 0$, I — единичная матрица); 2) невырожденные параболические уравнения $\left(A=\begin{Vmatrix}0 & \cdots\ 0\\ \vdots & I\\ 0 & \end{Vmatrix},\ \mathfrak{b}=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)\right)$; 3) невырожденные ультрапараболические уравнения $\left(A=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{Vmatrix},\ \ \mathfrak{b}=(1\ \ \ldots,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)\right)$; 4) квазилинейные уравнения первого порядка ($A=0$, $\mathfrak{b}=(b^1,\ \ldots,\ b^n)$); 5) линейные уравнения с неотрицательной характеристической формой

$$-\frac{d}{dx_i}(\alpha^{ij}(x)u_{x_j})+\beta^i(x)u_{x_i}+c(x)u=f(x), \tag{4}$$

где $\alpha^{ij}=\alpha^{ji}$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, $\mathfrak{A}\equiv\|\alpha^{ij}(x)\|$ — неотрицательно определенная в Ω матрица ($A=\mathfrak{A}^{1/2}$; $\mathfrak{b}\equiv\beta=(\beta^1,\ \ldots,\ \beta^n)$), причем к уравнениям вида (4) приводятся и недивергентные линейные уравнения с неотрицательной характеристической формой, если только их старшие коэффициенты являются достаточно гладкими функциями.

Важным частным случаем (A, $\mathfrak{b}$)-эллиптических уравнений являются (A, 0)-эллиптические уравнения ($\mathfrak{b}\equiv 0$). В частности, в рамки (A, 0)-эллиптических уравнений укладываются уравнения Эйлера для вариационных задач на минимум интегралов вида

$$\int\limits_{\Omega}[\mathcal{F}(x,\ u,\ A\nabla u)-f(x)u]\,dx,\ u|_{\{x\in\partial\Omega:\,A\nu\neq 0\}}=0, \tag{5}$$

причем $\frac{\partial\mathcal{F}(x,\ u,\ q)}{\partial q_i\partial q_j}\eta_i\eta_j\geqslant 0$, $\eta=A\xi$, $\xi\in\mathbb{R}^n$; $A\nabla u\equiv(A_1\nabla u,\ldots,A_n\nabla u)$, $A_i\nabla u\equiv$ $\equiv a^{ij}u_{x_j}$, $i=1,\ \ldots,\ n$; $\nu=(\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n)$ — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$. Далее вектор $A\nabla u$ будем называть A-градиентом функции u, а его компоненты $A_1\nabla u,\ \ldots,\ A_n\nabla u$ — A-производными этой функции. Действительно, упомянутое уравнение Эйлера имеет вид

$$-\frac{d}{dx_i}\left[a^{ki}(x)\,\frac{\partial\mathcal{F}(x,\ u,\ A\nabla u)}{\partial q_k}\right]+\frac{\partial\mathcal{F}(x,\ u,\ A\nabla u)}{\partial u}=f(x) \tag{6}$$

и, как легко видеть, — структуру $(A, 0)$-эллиптического уравнения с приведенными коэффициентами

$$l'^i(x, u, q) = \frac{\partial \mathscr{F}(x, u, q)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad l'_0(x, u, q) = \frac{\partial \mathscr{F}(x, u, q)}{\partial u}. \quad (7)$$

В случае $\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & A & \\ 0 & & \end{Vmatrix}$, $\tilde{\mathfrak{b}} = (1, b^1, \ldots, b^n)$ соответствующее $(\tilde{A}, \tilde{\mathfrak{b}})$-эллиптическое уравнение мы называем $(A, \mathfrak{b})$-параболическим. $(A, \mathfrak{b})$-параболические уравнения мы рассматриваем обычно в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Важным частным случаем $(A, \mathfrak{b})$-параболических уравнений являются $(A, 0)$-параболические уравнения. К таким уравнениям приводит изучение некоторых вопросов теории теплопроводности, диффузии и др.

Именно $(A, 0)$-эллиптические и $(A, 0)$-параболические уравнения являются центральными объектами наших исследований. Детальное изучение краевых задач для таких уравнений проводится в ч. III монографии. В ч. II рассматриваются общие $(A, \mathfrak{b})$-эллиптические уравнения. В гл. 5 дана постановка общей краевой задачи (в частности, первой, второй, третьей) для $(A, \mathfrak{b})$-эллиптического уравнения в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Например, первая краевая задача для такого уравнения имеет вид

$$\mathscr{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma \subset \partial\Omega, \quad (8)$$

где Γ — так называемая $(A, \mathfrak{b})$-эллиптическая граница области Ω, определяемая в зависимости от структуры уравнения. Очевидно, что выбор Γ должен обеспечивать корректность задачи (8). Если уравнение (1) является строго $(A, \mathfrak{b})$-эллиптическим уравнением и матрица A достаточно гладкая, то $(A, \mathfrak{b})$-эллиптическую границу Γ можно определить по формуле

$$\Gamma = \Sigma \cup \Sigma'_-, \quad (9)$$

где Σ — нехарактеристическая часть $\partial\Omega$, Σ' — характеристическая часть $\partial\Omega$, $\Sigma'_- \equiv \{x \in \Sigma' : b(x) \equiv -b^i \nu_i < 0\}$, причем $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \equiv \boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$. Далее мы используем также обозначения: $\Sigma'_+ \equiv \{x \in \Sigma' : b(x) > 0\}$, $\Sigma'_0 \equiv \{x \in \Sigma' : b(x) = 0\}$, $\Sigma'_{0,-} = \Sigma'_0 \cup \Sigma'_-$. Очевидно, что в указанном случае

$$\Sigma = \{x \in \partial\Omega : A\boldsymbol{\nu} \neq 0\}, \quad \Sigma' = \{x \in \partial\Omega : A\boldsymbol{\nu} = 0\}. \quad (10)$$

Определение Γ по формулам (9), (10) сохраняется и в ряде случаев не строго $(A, \mathfrak{b})$-эллиптических уравнений, но при условии, что матрица A достаточно гладкая. Для менее гладких матриц A определение $(A, \mathfrak{b})$-эллиптической границы Γ по формуле (9) сохраняется, но теперь множества Σ и Σ' надо определять несколько иначе, чем в (10) (см. § 5.3).

Мы изучаем вопросы существования и единственности решений задачи (8) в следующих классах обобщенных решений: а) обобщенные решения энергетического типа, б) A-регулярные обобщенные решения, в) регулярные обобщенные решения. Последние два класса обобщенных решений могут иметь различную степень регулярности. В первом классе обобщенных решений на самом деле изучается общая краевая задача, но для краткости здесь мы будем обсуждать постановку только первой краевой задачи.

Для определения обобщенных решений энергетического типа вводится энергетическое пространство $H \equiv \overset{0,\Sigma}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$, определяемое как пополнение множества $\tilde{C}^1_{0,\Sigma}(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_H \equiv \|u\|_{m,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \|A_i \nabla u\|_{m_i,\Omega}. \tag{11}$$

Обобщенное решение энергетического типа задачи (8) мы определяем в случае так называемых $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений, где $m = \mathrm{const} > 1$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$. $(A, \mathbf{b})$-эллиптическое уравнение вида (1) называется $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптическим в Ω, если приведенные коэффициенты $l'^i(x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, $l'_0(x, u, q)$ удовлетворяют таким условиям роста при $u \to \infty$, $q \to \infty$, при которых для любой функции $u \in \overset{0,\Sigma}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$ выполнены условия: $l'^i(x, u, A\nabla u) \in L^{m'_i}(\Omega)$, $1/m_i + 1/m'_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$; $l'_0(x, u, A\nabla u) \in L^{m'}(\Omega)$, $1/m + 1/m' = 1$, причем выражение $A\nabla u$ для функции $u \in \overset{0,\Sigma}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$ означает так называемый обобщенный A-градиент этой функции (см. § 4.1, 5.2, 5.3). Функции из $\overset{0,\Sigma}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$ в определенном смысле обращаются в 0 на $\Sigma \subset \partial\Omega$ (см. § 4.2). Обобщенным решением (энергетического типа) задачи (8) для $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптического уравнения называется всякая функция $u \in \overset{0,\Sigma}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_\Omega \left[\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l'_0(x, u, A\nabla u)\,\eta - u\frac{\partial}{\partial x_i}(b^i\eta)\right] dx =$$
$$= \int_\Omega f\eta\, dx, \quad \forall \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma\cup\Sigma'_+}(\overline{\Omega}). \tag{12}$$

A-регулярным обобщенным решением задачи (8) для $(A, \mathbf{b})$-эллиптического в области Ω уравнения мы называем всякую функцию $u \in L^\infty(\Omega) \cap \overset{0,\Sigma}{H}_m(A, \Omega)$, $\forall m > 1$ (где $\overset{0,\Sigma}{H}_m(A, \Omega) \equiv \overset{0,\Sigma}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$ при $\mathbf{m} = (m, \ldots, m)$), имеющую ограниченный в Ω A-градиент (т. е. $A\nabla u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$) и удовлетворяющую тождеству (12).

Регулярным обобщенным решением задачи (8) для $(A, \mathbf{b})$-эллиптического в Ω уравнения мы называем всякую функцию $u \in L^\infty(\Omega) \cap \overset{0,\Sigma}{H}_m(\Omega)$, $\forall m > 1$, имеющую $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$ и такую, что

$$\int_\Omega [\mathbf{l}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\eta + l_0(x, u, \nabla u)\,\eta]\, dx = \int_\Omega f\eta\, dx, \quad \forall \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma\cup\Sigma'_+}(\overline{\Omega}). \tag{13}$$

Мы рассматриваем также регулярные обобщенные решения задачи (8), имеющие ограниченные вторые производные в Ω.

В ч. II исследованы вопросы о существовании и единственности обобщенного решения энергетического типа общей краевой задачи для $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений и существовании и единственности регулярного и усиленно регулярного обобщенного решения первой краевой задачи для $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений. Описывая результаты по разрешимости краевых задач в классе обобщенных решений энергетического типа, мы для простоты рассмотрим здесь случай первой краевой задачи (8). Исследование указанной обобщенной разрешимости задачи (8) проводится нами на языке операторных уравнений в подходящих банаховых пространствах. Такая переформулировка задачи требует ввести в рассмотрение еще два функциональных пространства. Пусть X — пополнение $\overset{\circ}{C}{}^1_{0,\Sigma}(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_X = \|u\|_H + \|u\|_{L^2(\beta,\,\Omega_\beta)} + \|u\|_{L^2(b,\,\Sigma'_+)}, \tag{14}$$

а Y — пополнение $\overset{\circ}{C}{}^1_{0,\Sigma}(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_Y = \|u\|_X + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^2(|b^i|,\,\Omega_{b^i})}, \tag{15}$$

где

$$\beta = \sum_{i=1}^{n}\left(|b^i| + \left|\frac{\partial b^i}{\partial x_i}\right|\right), \quad \Omega_\beta \equiv \{x \in \Omega : \beta > 0\},$$

$$\Omega_{b^i} \equiv \{x \in \Omega : b^i \neq 0\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Оказывается, что $Y \to X$, $Y \to H$, $L^{m'}(\Omega) \to H^* \to X^* \to Y^*$. Однако отсутствует вложение $X \to H$. Рассмотрим оператор $\mathscr{L} : \overset{\circ}{C}{}^1_{0,\Sigma}(\bar{\Omega}) \subset X \to Y^*$, определенный по формуле

$$\mathscr{L} = \mathscr{A} + \mathscr{B}, \quad \mathscr{A} : \overset{\circ}{C}{}^1_{0,\Sigma}(\bar{\Omega}) \subset X \to H^* \subset Y^*, \quad \mathscr{B} : \overset{\circ}{C}{}^1_{0,\Sigma}(\bar{\Omega}) \subset X \to Y^*,$$

$$\langle \mathscr{A}u, \eta\rangle = \int_\Omega (\mathbf{l}' \cdot A\nabla\eta + l'_0\eta)\,dx, \quad \langle \mathscr{B}u, \eta\rangle = -\int_\Omega u\,(b^i\eta)_{x_i}dx + \int_{\Sigma'_+} bu\eta, \tag{16}$$

$$u, \eta \in \overset{\circ}{C}{}^1_{0,\Sigma}(\bar{\Omega}).$$

Оператор (16) ограничен и непрерывен, и потому его можно считать продолженным на все пространство X. Далее через $\mathscr{L} : X \to Y^*$ всегда обозначается именно этот продолженный оператор. Проблема нахождения обобщенного решения задачи (8) эквивалентна решению операторного уравнения

$$\mathscr{L}u = \mathscr{F}, \tag{17}$$

где $\mathscr{F} \in H^*$ определен по формуле $\langle \mathscr{F}, \eta\rangle = \int_\Omega f\eta\,dx$, $\eta \in H$. Поэтому оператор $\mathscr{L} : X \to Y^*$ будем называть оператором, соответствующим задаче (8). При исследовании разрешимости операторного уравнения (17) мы исходим из теории уравнений в банаховом пространстве с операторами, обладающими свойствами типа коэрцитивности и монотонности (или полуограниченности вариации). Такая теория построена в работах Ф. Браудера, Г. Минти, Ж.-Л. Лионса, Ю. А. Дубинского, М. М. Вайнберга и др. Специфика рассматриваемых нами уравнений потребовала построить некоторую новую схему операторных уравнений указанного типа с использованием тройки банаховых пространств H, X, Y, таких, что $Y \to X$, $Y \to H$, $H^* \to X^* \to Y^*$, причем изучаемые операторы $\mathscr{L}$ действуют из X в Y^* и имеют вид $\mathscr{L} = \mathscr{A} + \mathscr{B}$, где $\mathscr{A} : X \to H^*$, $\mathscr{B} : X \to Y^*$ (см. § 4.7).

Главная трудность изучения уравнений (17) связана с несогласованностью операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, источником которой является то обстоятельство, что при построении оператора $\mathscr{A}$ участвуют только A-производные функции u, а при построении оператора $\mathscr{B}$ — только обычные производные этой функции. Эта несогласованность проявляется, в частности, в том, что оператор $\mathscr{B}$ не является непрерывным по норме основного энергетического пространства $H \equiv \overset{0,\Sigma}{H}_{m,\,\mathfrak{m}}(A, \Omega)$. Поэтому в формулировках результатов по разрешимости уравнения (17) кроме условий коэрцитивности и монотонности (или полуограниченности вариации) оператора $\mathscr{L}$ присутствуют условия, осуществляющие согласование операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Совокупность указанных условий приводит к разрешимости уравнения (17). Замена условий коэрцитивности и монотонности оператора $\mathscr{L}$ на условие сильной монотонности этого оператора (см. § 4.6) приводит к однозначной разрешимости уравнения (17) и непрерывной зависимости решения этого уравнения от его правой части.

В гл. 5 даны просто проверяемые алгебраические критерии выполнимости условий коэрцитивности, монотонности и сильной монотонности для оператора $\mathscr{L}$, соответствующего задаче (8). Эти критерии даны в терминах приведенных коэффициентов уравнения (1) и компонент вектора $\mathbf{b}$ для произвольного $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптического уравнения. Проверка же условий, отвечающих за согласование операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, требует выделения более конкретных классов $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений. Во всяком случае такая проверка осуществлена в ч. III для классов $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-эллиптических и $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболических уравнений, причем для первого из указанных классов эта проверка является тривиальной. Подчеркнем, что для $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-эллиптических и $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболических уравнений получены теоремы существования для общей краевой задачи (и, в частности, задачи (8)), все условия в которых сопровождаются просто проверяемыми критериями их выполнимости.

В случае линейных уравнений с неотрицательной характеристической формой вида (4) (и несколько более общего вида), автоматически являющихся $(A, \mathbf{b}, 2, \mathbf{2})$-эллиптическими уравнениями относительно матрицы $A=\mathfrak{A}^{1/2}$ и $\mathbf{b}=\boldsymbol{\beta}$, условия согласования между операторами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ отпадают (см. теорему 4. 6. 2). Поэтому из результатов, полученных в гл. 5, вытекают законченные результаты о существовании обобщенных решений из класса $\overset{0,\,\Sigma}{H}_{2,\,\mathbf{2}}(A\Omega)$ общей краевой задачи для линейных уравнений с неотрицательной характеристической формой как дивергентного, так и недивергентного вида. Заметим, что в работах [14, 99, 102, 107, 120] с требуемой полнотой исследовались лишь «чистые» краевые задачи (первая, вторая, третья).

Одним из центральных результатов ч. II является теорема о разрешимости задачи (8) для $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений в классе регулярных обобщенных решений (см. теорему 6. 2. 3 и замечание 6. 2. 4). Существуют простые примеры $(A, \mathbf{b})$-эллиптических и, в частности, линейных $(A, \mathbf{0})$-эллиптических уравнений, обладающих требуемой гладкостью в достаточно гладкой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, для которых задача (8) не имеет регулярного обобщенного решения, причем оказывается, что для этих уравнений не выполнено условие

$$A\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0} \text{ на всей границе } \partial\Omega. \tag{18}$$

Пример такого уравнения приводится в гл. 6 (см. (6. 2. 11)). Суть таких примеров состоит в том, что подобные уравнения имеют ограниченные в Ω решения, производные которых стремятся к ∞ при приближении к тем точкам границы, где $A\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$. Поэтому при исследовании вопроса о существовании регулярных обобщенных решений задачи (8) естественно считать, что выполнено условие (18). При таком условии задача (8) принимает вид

$$\mathscr{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{19}$$

а интегральное тождество (13) может выполняться лишь при всех $\eta \in \overset{\circ}{C}{}_0^1(\Omega)$.

Для доказательства указанной разрешимости рассматриваются задачи вида (19) для регуляризованных уравнений, которые получаются из данного регуляризацией как матрицы A, так и приведенных коэффициентов l'^i, $i=1, \ldots, n$. Для решений регуляризованных задач устанавливается равномерная оценка максимумов модулей решений и их градиентов в Ω, которая является ключевым моментом в доказательстве разрешимости задачи (19). В связи с получением такой оценки мы выходим за рамки дивергентных $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений и рассматриваем недивергентные $(A, \mathbf{b})$-эллиптические уравнения вида

$$\hat{a}^{ij}(x, u, \hat{\nabla} u) u_{\hat{j}\hat{i}} - \hat{a}(x, u, \hat{\nabla} u) - b^i(x) u_{x_i} = 0, \tag{20}$$

где $u_{\hat{i}}$, $u_{\hat{i}\hat{j}}$ — A-производные функции u соответственно первого и второго порядков, $\hat{\nabla} u \equiv (u_{\hat{1}}, \ldots, u_{\hat{n}})$, u_{x_i}, $i=1, \ldots, n$, — обычные производные функции u, причем производная $u_{\hat{i}}$ определяется как производная функции u по направлению вектора $\mathbf{a}^i$, определяемого i-й строкой матрицы A (если $\mathbf{a}^i = \mathbf{0}$ в точке x, то, по определению, $u_{\hat{i}} = 0$ в этой точке). Уравнение вида (20) мы называем $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим [строго $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим] в Ω, если

$$\hat{a}^{ij}(x, u, q)\eta_i\eta_j \geqslant 0, \quad \eta = A\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad q = Ap, \quad p \in \mathbb{R}^n \tag{21}$$

$$[\hat{a}^{ij}(x, u, q)\eta_i\eta_j > 0, \quad \eta = A\xi \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad q = Ap, \quad p \in \mathbb{R}^n]. \tag{21'}$$

Рассматривавшиеся выше дивергентные $(A, \mathbf{b})$-эллиптические уравнения вида (1) являются частным случаем недивергентных $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений, поскольку ввиду условия (2) дифференцирование первого члена в (1) приводит к уравнению (20) при $\hat{a}^{ij}$ и $\hat{a}$, определенных по формуле (6. 1. 4). Устанавливая для достаточно гладких решений невырожденного $(A, \mathbf{b})$-эллиптического уравнения вида (20) априорную оценку $\max\limits_{\Omega}(|u| + |\nabla u|) \leqslant M$ с константой M, не зависящей от константы эллиптичности этого уравнения, мы тем самым получаем указанную выше равномерную оценку для решений регуляризованных задач, аппроксимирующих задачу (19). В связи с получением основной априорной оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ для решений уравнения (20) мы существенно используем результаты и методы, применявшиеся нами при изучении задачи Дирихле для неравномерно эллиптических уравнений в гл. 1. После того как оценка $\max\limits_{\Omega}(|u| + |\nabla u|)$ для решений регуляризованных уравнений вида (19) получена, эти уравнения можно считать равномерно эллиптическими и ограниченно нелинейными. Тогда, используя известные результаты Ладыженской и Уральцевой, устанавливаем существование решений регуляризованных задач с равномерно ограниченным $\max\limits_{\Omega}(|u| + |\nabla u|)$. Из семейства таких решений выбирается последовательность, сходящаяся к регулярному обобщенному решению исходной задачи (19).

Одним из основных условий на структуру $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений в обсуждаемой теореме 6. 2. 3 является условие (6. 2. 15). Следует заметить, что в случае линейности уравнения условие (6. 2. 15) переходит в одно из условий (см. (6. 2. 19)), выделенное О. А. Олейник при изучении разрешимости первой краевой задачи для линейных уравнений с неотридательной характеристической формой. Как показывают примеры (см. (6. 2. 17) и (6. 2. 20)), такие условия вызваны существом дела. В гл. 6 дано применение полученного результата к некоторым нерегулярным вариационным задачам.

Далее в гл. 6 устанавливается теорема существования и единственности регулярного обобщенного решения задачи (19), обладающего ограниченными вторыми производными в Ω. В связи с этим приходится получать априорную оценку максимума модуля вторых производных решений $(A, \mathfrak{b})$-эллиптических уравнений вида (20), снова используя результаты гл. 1 по неравномерно эллиптическим уравнениям. В частности, здесь существенно используются локальные оценки градиентов решений уравнений (1. 1. 1) на границе $\partial\Omega$. При установлении априорной оценки вторых производных возникают дополнительные сильные ограничения на структуру уравнения, приводящие к значительному приближению такого уравнения к линейному. Однако, как показывают примеры, эти ограничения вызваны существом дела.

Указанные выше результаты по разрешимости задачи (19) в классах регулярных обобщенных решений относятся к случаю достаточно гладкой области Ω. Однако, применяя результаты гл. 2, можно совершенно аналогичным образом получить подобные результаты для $(A, \mathfrak{b})$-параболических уравнений в цилиндре $Q=\Omega\times(T_1, T_2)$. Ввиду ограниченности объема этой монографии мы не приводим здесь изложение таких результатов.

ГЛАВА 4

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ $(A,\mathfrak{b})$-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Обобщенные A-производные

Пусть в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, задана квадратная матрица $A=\|a^{ij}(x)\|$ порядка n, элементы которой удовлетворяют условию

$$a^{ij}\in L^{m_i}(\Omega),\quad m_i\geqslant 1,\quad i, j=1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Матрица A может иметь вырождение на любом подмножестве в Ω. Обозначим через $\tilde{C}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ множество всех функций, принадлежащих $\tilde{C}^1(\Omega')$ (см. основные обозначения) при любой Ω', такой, что $\overline{\Omega'}\subset\Omega$. Отображение

$$u\to(A_1\nabla u, \ldots, A_n\nabla u),\quad A_i\nabla u\equiv\sum_{j=1}^{n}a^{ij}(x)u_{x_j},\ i=1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

можно рассматривать как линейный оператор, действующий из $\tilde{C}^1_{\text{loc}}(\Omega)\subset$ $\subset L^m_{\text{loc}}(\Omega)$ в $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{\text{loc}}(\Omega)$, где $m\geqslant 1$ и $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega)=L^{m_1}(\Omega)\times\ldots\times L^{m_n}(\Omega)$. Такой оператор будем называть оператором взятия A-градиента. Поскольку в пространствах $L^m_{\text{loc}}(\Omega)$ и $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{\text{loc}}(\Omega)$ можно ввести естественные топологии, то имеет смысл вопрос о существовании слабого замыкания оператора взятия A-градиента. Предположим, что выполнено условие:

оператор взятия A-градиента допускает слабое замыкание. (1.3)

Условие (1.3) означает, очевидно, что если $u_n \to 0$ слабо в $L^m_{loc}(\Omega)$ и $A\nabla u_n \to \mathbf{v}$ слабо в $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{loc}(\Omega)$, где $u_n \in \tilde{C}^1_{loc}(\Omega)$, $n=1, 2, \ldots$, то $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ п. в. в Ω.

Определение 1.1. При выполнении условия (1.3) будем говорить, что функция $u \in L^m_{loc}(\Omega)$ имеет в Ω обобщенный A-градиент $A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{loc}(\Omega)$, если функция u принадлежит области определения слабого замыкания оператора взятия A-градиента, а вектор $A\nabla u$ есть значение полученного оператора на функции u. Компоненты вектора $A\nabla u$ будем обозначать через $A_1\nabla u, \ldots, A_n\nabla u$ и называть обобщенными A-производными функции u в области Ω; при этом, очевидно, $A_i\nabla u \in L^{m_i}_{loc}(\Omega)$, $i=1, \ldots, n$.

Таким образом, при выполнении условия (1.3) функция $u \in L^m_{loc}(\Omega)$ имеет обобщенный A-градиент $A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{loc}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{loc}(\Omega)$, $n=1, 2, \ldots$, и векторная функция $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{loc}(\Omega)$, такие, что $u_n \to u$ слабо в $L^m_{loc}(\Omega)$, а $A\nabla u_n \to \mathbf{v}$ слабо в $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{loc}(\Omega)$; при этом $A\nabla u = \mathbf{v}$.

Лемма 1.1 *Пусть выполнены условие* (1.1) *и условие*

$$a^{ij}, \ \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j} \in L^{m'}_{loc}(\Omega), \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{m'}=1, \quad i, j=1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

где под $\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}$ *понимаются обычные (соболевские) обобщенные производные функций* a^{ij} *по* x_j. *Тогда при любом* $\mathbf{m}=(m_1, \ldots, m_n)$, *где* $m_i \geqslant 1$, $i=1, \ldots, n$, *оператор взятия A-градиента допускает слабое замыкание (т. е. условие* (1.3) *выполнено).*

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{loc}(\Omega)$, $n=1, 2, \ldots,$ — такая последовательность, что $u_n \to 0$ слабо в $L^m_{loc}(\Omega)$, $A\nabla u_n \to \mathbf{v}$ слабо в $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{loc}(\Omega)$. Тогда при всех $n=1, 2, \ldots$

$$\int_\Omega u_n\left(A_i\nabla\eta+\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}\eta\right)dx=-\int_\Omega A_i\nabla u_n\eta dx, \quad \forall\eta \in \tilde{C}^1_0(\Omega), \tag{1.5}$$

где через $\tilde{C}^1_0(\Omega)$ обозначено множество всех функций из $\tilde{C}^1(\Omega)$, имеющих компактный носитель в Ω. Переходя в (1.5) к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\int_\Omega v_i\eta dx=0$, $\forall\eta \in \tilde{C}^1_0(\Omega)$, $i=1, \ldots, n$, откуда следует, очевидно, что $v_i=0$ п. в. в Ω, $i=1, \ldots, n$, т. е. $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ п. в. в Ω. Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.1 показывает, что выполнение условия (1.3) обеспечивается наложением на элементы матрицы A некоторого условия регулярности (условия (1.4)). В дальнейшем будет показано, что выполнение условия (1.3) обеспечивается также условием достаточной слабости вырождения матрицы A.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.1) *и* (1.4), *и пусть функция* $u \in L^m_{loc}(\Omega)$ *имеет обобщенный A-градиент* $A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{loc}(\Omega)$. *Тогда справедливы тождества*

$$\int_\Omega u\left(A_i\nabla\eta+\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}\eta\right)dx=-\int_\Omega A_i\nabla u\eta dx, \quad \forall\eta \in \tilde{C}^1_0(\Omega), \ i=1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

где $A_i\nabla u$ — *i-я компонента обобщенного A-градиента функции u в области* Ω.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{loc}(\Omega)$, $n=1, 2, \ldots,$ — такая последовательность, что $u_n \to u$ слабо в $L^m_{loc}(\Omega)$ и $A\nabla u_n \to A\nabla u$ слабо в $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{loc}(\Omega)$.

Переходя в тождествах (1.5), записанных для членов такой последовательности, к пределу при $n \to \infty$, получим (1.6). Лемма 1.2 доказана.

При несколько более сильных условиях на матрицу A, чем условия (1.1), (1.4), справедливо следующее обращение леммы 1.2.

Лемма 1.3. *Пусть элементы матрицы A удовлетворяют условию*

$$a^{ij} \in \operatorname{Lip}(\Omega), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.7}$$

и пусть для некоторых функций $u \in L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $m > 1$, справедливы тождества

$$\int_\Omega u\left(A_i \nabla\eta + \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}\eta\right)dx = -\int_\Omega v_i \eta\, dx, \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{C}{}^1_0(\Omega), \ i = 1, \ldots, n, \tag{1.8}$$

где $v_i \in L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — компоненты векторной функции $\mathbf{v}$. Тогда функция $u \in L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ имеет обобщенный A-градиент $A\nabla u \in \mathbf{L}^m(\Omega)$, причем $A\nabla u = \mathbf{v}$.

Доказательство. Поскольку из условия (1.7) вытекает выполнимость условий (1.1), (1.4), то ввиду леммы 1.1 условие (1.3) выполнено. Докажем тогда, что существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой справедливы условия

$$u_n \to u \text{ слабо в } L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad A\nabla u_n \to \mathbf{v} \text{ слабо в } \mathbf{L}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{1.9}$$

Рассмотрим усреднения

$$u_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y)u(y)\,dy, \quad h > 0,$$
$$x \in \Omega_h \equiv \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h\}, \tag{1.10}$$

функции u с бесконечно дифференцируемым нормированным ядром

$$\omega_h(z) = \frac{1}{\varkappa_n h^n}\,\omega\left(\frac{|z|}{h}\right), \quad \omega(t) = \begin{cases} \lambda(t) \text{ при } t \in [0, 1], \\ 0 \text{ при } t > 1, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $\varkappa_n = \sigma_n \int_0^1 \lambda(t) t^{n-1} dt$, σ_n — площадь поверхности единичного шара в $\mathbb{R}^n$, а функция $\lambda(t)$, определенная на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяет условиям

$$\lambda \in C^\infty([0, 1]), \ \int_0^1 \lambda(t) t^{n-1} dt > 0, \ \lambda(t) \geqslant 0, \ \lambda^{(k)}(1) = 0, \ k = 0, 1, \ldots \tag{1.12}$$

Из условий (1.11), (1.12) вытекает, что $\omega_h(z) \in \overset{\circ}{C}{}^1_0(\mathbb{R}^n)$, $\omega_h(z) = 0$ при $|z| > h$, $\omega_h(z) \geqslant 0$ при $|z| \leqslant h$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(z)\,dz = 1$.

Очевидно, что в любой точке $x \in \Omega_h$ при любом $j = 1, \ldots, n$ справедливо равенство

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \omega_h(x-y)}{\partial x_j} u(y)\,dy = \int_\Omega \frac{\partial \omega_h(x-y)}{\partial x_j} u(y)\,dy. \tag{1.13}$$

Вычислим при фиксированном $i \in \{1, \ldots, n\}$ в точке $x \in \Omega_h$ выражение

$$A_i \nabla u_h = \int_\Omega a^{ij}(x) \frac{\partial \omega_h(x-y)}{\partial x_j} u(y)\,dy = -\int_\Omega a^{ij}(x) \frac{\partial \omega_h(x-y)}{\partial y_j} u(y)\,dy =$$
$$= -\int_\Omega a^{ij}(y) \frac{\partial \omega_h(x-y)}{\partial y_j} u(y)\,dy - \int_\Omega [a^{ij}(x) - a^{ij}(y)] \frac{\partial \omega_h(x-y)}{\partial y_j}\,dy. \tag{1.14}$$

В силу (1.8) при $\eta = \omega_h$ из (1.14) вытекает равенство

$$A_i \nabla u_h = \int_\Omega v_i(y)\omega_h(x-y)\,dy + \int_\Omega \frac{\partial a^{ij}(y)}{\partial y_j}\omega_h(x-y)u(y)\,dy -$$

$$-\int_\Omega [a^{ij}(x) - a^{ij}(y)]\frac{\partial \omega_h(x-y)}{\partial y_j}u(y)\,dy \equiv v_{ih} + J_h, \tag{1.15}$$

причем J_h можно записать также в виде

$$J_h = \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}u\right)_h + a^{ij}u_{hx_j} - (a^{ij}u)_{hx_j}. \tag{1.16}$$

Докажем сначала, что $A_i \nabla u_h \to v_i$ слабо в $L^m_{\text{loc}}(\Omega)$. Ввиду (1.15) и известного факта сильной сходимости v_{ih} к v_i в $L^m_{\text{loc}}(\Omega)$ для этого достаточно доказать, что $J_h \to 0$ слабо в $L^m_{\text{loc}}(\Omega)$. Пусть фиксирована некоторая компактная в Ω подобласть Ω' ($\bar{\Omega}' \subset \Omega$). Докажем сначала, что $\lim\limits_{h\to 0}\int_{\Omega'} J_h\eta\,dx = 0$, $\forall \eta \in \tilde{C}^1_0(\Omega')$. Пусть $h < \operatorname{dist}(\partial\Omega', \partial\Omega)$. Умножая обе части равенства (1.16) на $\eta \in \tilde{C}'_0(\Omega')$ и интегрируя получившееся равенство по области Ω', получим:

$$\int_{\Omega'} J_h\eta\,dx = \int_{\Omega'}\left[\left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}u\right)_h\eta - \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}u_h\eta - a^{ij}u_h\eta_{x_j} + (a^{ij}u)_h\,\eta_{x_j}\right]dx. \tag{1.17}$$

Устремляя в (1.17) h к нулю и используя свойства локально интегрируемых функций, найдем, что $\lim\limits_{h\to 0}\int_{\Omega'} J_h\eta\,dx = 0$. Ввиду того что Ω' — произвольная строго внутренняя подобласть Ω, для завершения доказательства слабой сходимости $J_h \to 0$ при $h \to 0$ в $L^m_{\text{loc}}(\Omega)$ достаточно убедиться, что нормы $\| A_i\nabla u_h\|_{m,\Omega'}$ ограничены равномерно по $h \in \mathbb{R}_+$. Используя условие (1.7), оценим

$$2^{1-m}\|J_h\|^m_{m,\Omega'} \leqslant \int_{\Omega'} dx\left|\int_{K_h(x)}\frac{\partial a^{ij}(y)}{\partial y_j}\omega_h(x-y)u(y)\,dy\right|^m +$$

$$+\int_{\Omega'} dx\left|\int_{K_h(x)}[a^{ij}(x) - a^{ij}(y)]\frac{\partial\omega_h(x-y)}{\partial y_j}u(y)\,dy\right|^m \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\|\,|u|_h\|^m_{m,\Omega'}\sum_{j=1}^n\left[\int_{\Omega'}dx\int_{K_h(x)} h\left|\frac{\partial\omega_h(x-y)}{\partial x_j}\right||u(y)|\,dy\right]^m\right\}, \tag{1.18}$$

где $K_h(x)$ — шар радиуса h с центром в точке $x \in \Omega'$, причем $\overline{K_h(x)} \subset \Omega$. Будем для определенности считать, что функция $\lambda(t)$ в (1.11) выбрана традиционным образом, т. е.

$$\lambda(t) = \begin{cases} \exp(t^2(t^2-1)^{-1}) & \text{при } t \in [0, 1), \\ 0 & \text{при } t = 1. \end{cases} \tag{1.19}$$

Ввиду (1.11) и (1.19) справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial\omega_h(z)}{\partial z_j}\right| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n h^{n+1}}\,\tilde{\omega}\left(\frac{|z|}{h}\right), \tag{1.20}$$

где

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}(t) & \text{при } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{при } t > 1, \end{cases} \qquad \tilde{\lambda}(t) = \frac{2t}{1-t^2}e^{t^2/(t^2-1)}. \tag{1.21}$$

Очевидно, что функция $\tilde{\lambda}(t)$ наряду с функцией (1.19) удовлетворяет всем условиям (1.12). Обозначая

$$\tilde{\omega}_h(z)=\frac{1}{\tilde{x}_n h^n}\,\tilde{\omega}\left(\frac{|z|}{h}\right),\quad \tilde{x}_n=\sigma_n\int\limits_0^1 \tilde{\lambda}(t)\,t^{n-1}\,dt, \tag{1.22}$$

получим в силу (1.11), (1.19)—(1.21) неравенство

$$h\left|\frac{\partial\omega_h(z)}{\partial z_j}\right|\leqslant\frac{\tilde{x}_n}{x_n}\,\tilde{\omega}_h(z),\quad j=1,\ldots,n. \tag{1.23}$$

Тогда из (1.18) и (1.23) следует оценка

$$\|J_h\|_{m,\Omega'}\leqslant c\left[\||u|_h\|_{m,\Omega'}+\|\widetilde{|u|}_h\|_{m,\Omega'}\right], \tag{1.24}$$

где $\widetilde{|u|}_h$ — усреднение функции $|u|$ относительно нового ядра $\tilde{\omega}_h$. Поскольку $u\in L^m(\Omega')$ и $\||u|_h\|_{m,\Omega'}\leqslant c\|u\|_{m,\Omega'}$, $\|\widetilde{|u|}_h\|_{m,\Omega'}\leqslant c\|u\|_{m,\Omega'}$, то из (1.24) и следует оценка $\|J_h\|_{m,\Omega'}\leqslant c$ с константой c, не зависящей от $h\in\mathbb{R}_+$. Таким образом, $J_h\to 0$ слабо в $L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и, следовательно, $A_i\nabla u_h\to v_i$ слабо в $L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Учитывая, что $u_h\in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $u_h\to u$ в $L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $h\to 0$, заключаем, что для любой последовательности $\{u_{h_n}\}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$, выполняются условия: $u_{h_n}\to u$ слабо в $L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $A\nabla u_{h_n}\to\mathbf{v}$ слабо в $\mathbf{L}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, откуда и следует, что $\mathbf{v}\in L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ есть обобщенный A-градиент функции $u\in L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Лемма 1.3 доказана.

Из доказательства леммы 1.3 вытекает справедливость следующего предложения.

Следствие 1.1. *Пусть выполнено условие* (1.7), *и пусть функция* $u\in L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *имеет обобщенный A-градиент* $A\nabla u\in L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Пусть u_h — усреднение функции u, определенное по формулам* (1.10)—(1.12), (1.19). *Тогда* $A\nabla u_h\to A\nabla u$ *слабо в* $\mathbf{L}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

В частном случае, когда матрица $A\equiv\|a^{ij}\|$ постоянна в Ω, этот результат можно усилить, заменив в утверждении следствия 1.1 слабую сходимость $A\nabla u_h\to A\nabla u$ в $\mathbf{L}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ на сильную. Действительно, если матрица A постоянна, то $J_h\equiv 0$ в Ω. Тогда из (1.15) и сильной сходимости v_{ih} к v_i в $L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i=1,\ldots,n$, и вытекает указанное утверждение.

В заключение данного параграфа заметим, что не представляет никакого труда дать определение обобщенных A-производных любого порядка k $(k>1)$ относительно некоторой квадратной матрицы A порядка n^k, определенной в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

§ 2. Обобщенные предельные значения функции на границе области

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Предположим, что в области Ω задана квадратная матрица $A\equiv\|a^{ij}(x)\|$ порядка n, удовлетворяющая условиям (1.1) и (1.3) при фиксированных $m\geqslant 1$ и $\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_n)$, $m_i\geqslant 1$, $i=1,\ldots,n$. Пусть Γ — произвольная часть границы $\partial\Omega$ (в частности, допустимы случаи $\Gamma=\partial\Omega$ или $\Gamma=\varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество).

Обозначим через $H\equiv\overset{0,\Gamma}{H}_{m,\mathbf{m}}(A,\Omega)$ пополнение множества $\tilde{C}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_H\equiv\|u\|_{m,\Omega}+\|A\nabla u\|_{\mathbf{m},\Omega}, \tag{2.1}$$

где $\|A\nabla u\|_{\mathrm{m},\Omega}=\sum_{i=1}^{n}\|A_i\nabla u\|_{m_i,\Omega}$. Очевидно, что H — банахово пространство. В случае $\Gamma=\partial\Omega$ пространство H обозначается через $H\equiv\mathring{H}_{m,\mathrm{m}}(A,\ \Omega)$, а в случае $\Gamma=\varnothing$ — через $H\equiv H_{m,\mathrm{m}}(A,\ \Omega)$.

Пусть $\Pi\subset\partial\Omega$ — произвольное множество. Сопоставим каждой функции $u\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$ ее значение $u|_\Pi$ на множестве Π, т. е. рассмотрим отображение

$$u\to u|_\Pi. \tag{2.2}$$

Отображение (2.2) можно рассматривать как линейный оператор, область определения которого содержится в $H_{m,\mathrm{m}}(A,\ \Omega)$ (при фиксированных выше m, m и A), а множество значений — в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$. Такой оператор будем называть оператором принятия предельного значения на множестве Π.

Предположим, что для множества Π выполнено следующее условие:

оператор принятия предельного значения на Π допускает замыкание. (2.3)

Условие (2.3) означает, очевидно, что если $u_n\to 0$ в H, $u_n|_\Pi\to\varphi$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, где $u_n\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, то $\varphi=0$ п. в. на Π.

Определение 2.1. При выполнении условия (2.3) будем говорить, что функция $u\in H_{m,\mathrm{m}}(A,\ \Omega)$ имеет обобщенное предельное значение $u|_\Pi$ на множестве Π, если функция u принадлежит области определения замыкания оператора принятия предельного значения на множестве Π, а $u|_\Pi$ есть значение полученного оператора на функции u.

Таким образом, при выполнении условия (2.3) функция $u\in H_{m,\mathrm{m}}(A,\ \Omega)$ имеет обобщенное предельное значение на множестве Π тогда и только тогда, когда существуют последовательность $\{u_n\}$, $u_n\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, и функция $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, такие, что $u_n\to u$ в H, а $u_n|_\Pi\to\varphi$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$; при этом $u|_\Pi=\varphi$.

Далее мы будем говорить, что функция $u\in H_{m,\mathrm{m}}(A,\ \Omega)$ имеет обобщенное предельное значение $u|_\Pi\in L^r_{\mathrm{loc}}(\Pi)$ на множестве Π, если существуют последовательность $\{u_n\}$, $u_n\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, и функция $\varphi\in L^r_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, такие, что $u_n\to u$ в $H_{m,\mathrm{m}}(A,\ \Omega)$ и $u_n|_\Pi\to\varphi$ в $L^r_{\mathrm{loc}}(\Pi)$; при этом $u|_\Pi=\varphi$.

В следующей лемме иллюстрируется роль, которую могут играть обобщенные предельные значения на $\Pi\subset\partial\Omega$ для функций, обладающих указанными значениями.

Лемма 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, класса C^1, $a^{ij}\in W^1_2(\Omega)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, и для некоторого подмножества $\Pi\subset\partial\Omega$ выполнено условие* (2.3) *при $m=2$, $\mathrm{m}=\mathbf{2}$. Тогда для любой функции $u\in H_{2,2}(A,\ \Omega)$, имеющей обобщенное предельное значение $u|_\Pi\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, справедливы тождества*

$$\begin{gathered}\int_\Omega u\left(A_i\nabla\eta+\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}\eta\right)dx=-\int_\Omega A_i\nabla u\eta dx-\int_\Pi A_i\nu u|_\Pi\eta ds,\\ \forall\eta\in\tilde{C}^1_{0,\partial\Omega\setminus\Pi}(\bar{\Omega}),\quad i=1,\ \ldots,\ n,\end{gathered} \tag{2.4}$$

где ν — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$, а через $\tilde{C}^1_{0,\partial\Omega\setminus\Pi}(\bar{\Omega})$ обозначено множество всех функций из $\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, равных 0 в некоторой (своей для каждой функции η) окрестности множества $\partial\Omega\setminus\Pi$.

Доказательство. Пусть Ω — функция, обладающая свойствами, указанными в формулировке леммы. Тогда существует такая последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $n=1, 2, \ldots$, что $u_n \to u$ в $H_{2,2}(A, \Omega)$, $u_n|_\Pi \to u|_\Pi$ в $L^1_{loc}(\Omega)$ при $n \to \infty$. Ввиду условия $a^{ij} \in W^1_2(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и известной теоремы вложения С. Л. Соболева $A_i\nu \equiv (A\nu)_i \in L^2(\Pi)$, $i=1, \ldots, n$, так что для каждой функции u_n, $n=1, 2, \ldots$, справедливы тождества:

$$\int_\Omega u_n\left(A_i\nabla\eta + \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}\eta\right)dx = -\int_\Omega A_i\nabla u_n\eta dx - \int_\Pi A_i\nu u_n\eta ds,$$
$$\forall \eta \in \tilde{C}^1_{0,\partial\Omega\setminus\Pi}(\bar{\Omega}), \quad i=1, \ldots, n.$$

Переходя в этих тождествах к пределу при $n \to \infty$, получим тождества (2.4). Лемма 2.1 доказана.

Приведем теперь достаточные условия на матрицу A и множество $\Pi \subset \partial\Omega$, гарантирующие выполнимость условия (2.3).

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.1) *и* (1.3), *и пусть для матрицы A и множества $\Pi \subset \partial\Omega$ выполнено следующее условие.*

Для каждой точки $x_0 \in \operatorname{int}\Pi$ существуют такие поверхности P_{x_0}, $\hat{P}_{x_0}$ класса C^2, $x_0 \in \hat{P}_{x_0} \subset P_{x_0} \subset \Pi$ и числа d_0, $\hat{d}_0$, $0 < \hat{d}_0 \leqslant d_0$, что:

1) множество $\omega_{x_0} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x = y + t\nu(y),\ y \in P_{x_0},\ t \in [0, d_0]\}$, где $\nu(y)$ — единичный вектор внутренней нормали к Π в точке y, содержится в $\bar{\Omega}$;

2) элементы матрицы A непрерывны, а элементы матрицы A^*A, где A^* — сопряженная к A матрица, непрерывно дифференцируемы на множестве ω_{x_0}; (2.5)

3) вектор $A^*(y)A(y)\nu(y)$ не лежит в касательной плоскости к $\partial\Omega$ в точке y при $\forall y \in \hat{P}_{x_0}$;

4) множество $\hat{\omega}_{x_0} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n:\ x = y + tA^*(y)A(y)\nu(y),\ y \in \hat{P}_{x_0},\ t \in [0, \hat{d}_0]\}$ содержится в ω_{x_0}; *)

5) существует такая константа $c_0 > 0$, что при любых $y \in \hat{P}_{x_0}$, $t \in [0, \hat{d}_0]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $|A(y)\xi| \leqslant c_0|A(y + tA^*(y)A(y)\nu(y))\xi|$.

Тогда оператор принятия предельного значения на множестве Π допускает замыкание, т. е. условие (2.3) *выполнено.*

Доказательство. Пусть функция $u \in H_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$ и последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $n=1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям: $u_n \to u$ в H, $u_n|_\Pi \to \varphi$ в $L^1_{loc}(\Pi)$ при $n \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что

$$u_n \to u \text{ в } H_{m_*}(A, \Omega), \quad u_n|_\Pi \to \varphi \text{ в } L^1_{loc}(\Pi), \tag{2.6}$$

где $m_* = \min(m, m_1, \ldots, m_n)$, $H_{m_*}(A, \Omega) \equiv H_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$ при $m = m_*$, $\mathbf{m} = (m_*, m_*, \ldots, m_*)$. Заметим, что условие (2.6) инвариантно относительно ортогональных преобразований переменных $x_1, \ldots, x_n$. Для доказательства леммы достаточно установить, что из (2.6) вытекает равенство $\varphi = 0$ п. в. на $\operatorname{int}\Pi$. Пусть $x_0 \in \operatorname{int}\Pi$. Учитывая, что условия (2.5) и (2.6) инвариантны относительно ортогональных преобразований переменных $x_1, \ldots, x_n$, **) будем

---

*) Поскольку $A^*A\nu = A\nu \cdot A\nu \geqslant 0$, то ввиду условия 3) вектор $A^*A\nu$ всегда составляет острый угол с внутренней нормалью к $\partial\Omega$.

**) Заметим, что, совершая ортогональное преобразование $x = C(x - x_0)$, мы получаем справедливость условий вида (2.5) и (2.6) для матрицы $\bar{A} = AC^{-1}$ и вектора $\bar{\nu} = C\nu$, причем при проверке этих условий мы учитываем, в частности, равенства $A^*A\nu \cdot \nu = \bar{A}^*\bar{A}\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}$ и $A\nabla_x u = \bar{A}\nabla_{\bar{x}} u$, где $u \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$.

считать, что система координат $Ox_1 \dots x_n$ является местной относительно точки x_0, т. е. ось Ox_n направлена по внутренней нормали ν к поверхности $\hat{P}_{x_0} \subset P_{x_0} \subset \Pi$, а остальные оси расположены в плоскости, касательной к P_{x_0} в точке x_0. Можно также считать, что поверхность $\hat{P}_{x_0}$ задана в указанной системе координат уравнением

$$y_n = \Phi(y'), \quad y' \equiv (y_1, \dots, y_{n-1}), \quad |y'| \leqslant \delta_0 = \text{const} > 0. \tag{2.7}$$

Из условия (2.5) следует, что функция Φ принадлежит классу $C^2\{|y'| \leqslant \delta_0\}$.

Рассмотрим отображение, определенное по формуле

$$\begin{gathered} (y', t) \to x = (x_1, \dots, x_n), \quad |y'| \leqslant \delta_0, \ t \in [0, \hat{d}_0], \\ x_i = y_i + t[A^*(y)A(y)\nu(y)]_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ x_n = \Phi(y') + t[A^*(y)A(y)\nu(y)]_n, \end{gathered} \tag{2.8}$$

где $d_0 = \text{const} > 0$, $\nu(y)$ — единичный вектор внутренней нормали к $\hat{P}_{x_0}$ в точке $y \equiv (y', \Phi(y'))$, $(A^*(y)A(y)\nu(y))_i$ — i-я компонента вектора $A^*(y)A(y)\nu(y)$, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что якобиан J преобразования (2.8) не равен 0 в точке $(0, \dots, 0)$, поскольку при $(y', t) = (0, 0)$

$$\begin{gathered} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad \frac{\partial x_n}{\partial t} = [A^*(0)A(0)\nu(0)]_n; \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_j} = 0, \ j = 1, \dots, n-1, \end{gathered} \tag{2.9}$$

причем $[A^*(0)A(0)\nu(0)]_n = |A(0)\nu(0)|^2 > 0$. Учитывая, что из условия (2.5) следует непрерывность всех первых производных функций $x_i(y', t)$, $i = 1, \dots, n$, задающих преобразование (2.8), можем тогда считать числа $\delta_0 > 0$ и $\hat{d}_0 > 0$ столь малыми, что $J > 0$ на $(|y'| \leqslant \delta_0) \times (0 \leqslant t \leqslant \hat{d}_0)$. Тогда преобразование (2.8) является диффеоморфизмом между $(|y'| \leqslant \delta_0) \times \times (0 \leqslant t \leqslant \hat{d}_0)$ и множеством $\hat{\omega}_{x_0} \subset \bar{\Omega}$.

Пусть $f \in \bar{C}^1(\hat{\omega}_{x_0})$, а y — фиксированная точка на $\hat{P}_{x_0} \equiv \{y \equiv (y', \varphi(y')) : : |y'| \leqslant \delta_0\}$. Учитывая, что $W^1_{m_*}([0, \hat{d}_0]) \to C([0, \hat{d}_0])$, имеем оценку

$$\begin{gathered} |f(y)|^{m_*} \leqslant \max_{t \in [0, \hat{d}_0]} |f(y) + tA^*(y)A(y)\nu(y)|^{m_*} \leqslant \\ \leqslant c\left[\int_0^{\hat{d}_0} |f(y + \tau(A^*A\nu)(y))|^{m_*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\hat{d}_0} |(A^*A\nu)(y) \cdot \nabla f(y + \tau(A^*A\nu)(y))|^{m_*} d\tau \right], \end{gathered} \tag{2.10}$$

где $c = 2^{m_*-1}\max(1, \hat{d}_0^{-1})$. Записывая $A^*A\nu \cdot \nabla f$ в виде $A\nu \cdot A\nabla f$ и используя условия 2) и 5) из (2.5), оценим

$$\begin{gathered} |f(y)|^{m_*} \leqslant c_1\left[\int_0^{\hat{d}_0} |f(y + \tau A^*(y)A(y)\nu(y))|^{m_*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\hat{d}_0} |A(y + \tau A^*(y)A(y)\nu(y))\nabla f(y + \tau A^*(y)A(y)\nu(y))|^{m_*} d\tau \right], \end{gathered} \tag{2.11}$$

где c_1 зависит от c, $\max\limits_{\hat{P}_{x_0}} |a^{ij}|$ и константы c_0 из условия 5) в (2.5). Интегрируя (2.11) по множеству $\hat{P}_{x_0}$, получим:

$$\int_{\hat{P}_{x_0}} |f|^{m_*} ds \leqslant c_1 \int_0^{\hat{d}_0} \int_{\hat{P}_{x_0}} \left(|f|^{m_*} + |A\nabla f|^{m_*}\right) ds d\tau. \tag{2.12}$$

Учитывая гладкость поверхности $\hat{P}_{x_0}$ и положительность якобиана J преобразования (2.8), из неравенства (2.12) легко вывести оценку

$$\int_{\hat{P}_{x_0}} |f|^{m_*} ds \leqslant c_2 \int_{\hat{\omega}_{x_0}} \left(|f|^{m_*} + |A\nabla f|^{m_*}\right) dx, \tag{2.13}$$

где c_2 зависит от c_1, $\max\limits_{|y'|\leqslant\delta_0} |\nabla\Phi|$ и $\min\limits_{(|y'|\leqslant\delta_0)\times[0,\hat{d}_0]} J$. Полагая в (2.13) $f = u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{u_n\}$ — последовательность из условия (2.6), и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\varphi \in L^{m_*}(\hat{P}_{x_0})$ и справедливо неравенство

$$\int_{\hat{P}_{x_0}} |\varphi|^{m_*} ds \leqslant c_2 \lim_{n\to\infty} \int_{\omega_{x_0}} \left(|u_n|^{m_*} + |A\nabla u_n|^{m_*}\right) dx = 0. \tag{2.14}$$

Таким образом, ввиду (2.14) и произвола точки $x_0 \in \operatorname{int}\Pi$ заключаем, что $\varphi = 0$ п. в. на $\operatorname{int}\Pi$, т. е. условие (2.5) выполнено. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.3), *и пусть для матрицы A и множества $\Pi \subset \partial\Omega$ выполнено условие* (2.5). *Тогда всякая функция $u \in H_{m,\mathrm{m}}(A, \Omega)$ имеет на Π обобщенное предельное значение $u|_\Pi \in L^{m_*}_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, где $m_* = \min(m, m_1, \ldots, m_n)$. При этом для каждой точки $x_0 \in \operatorname{int}\Pi$ существует такая окрестность $\hat{P}_{x_0} \subset \Pi$, что*

$$\int_{\hat{P}_{x_0}} |u|_\Pi|^{m_*} ds \leqslant c \int_{\hat{\omega}_{x_0}} \left(|u|^{m_*} + |A\nabla u|^{m_*}\right) dx, \tag{2.15}$$

где $\hat{\omega}_{x_0} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x = y + tA^*(y)A(y)\nu(y),\ y \in \hat{P}_{x_0},\ t \in [0, \hat{d}_0]\}$ (см. условие 4) в (2.5)), *а константа c не зависит от функции $u \in H_{m,\mathrm{m}}(A, \Omega)$. Значение $u|_\Pi$ принимается функцией $u \in H_{m,\mathrm{m}}(A, \Omega)$ в следующем смысле:*

$$\lim_{\tau\to 0} \int_{\hat{P}_{x_0}} |u(y + \tau A^*(y)A(y)\nu(y)) - u|_\Pi(y)|^{m_*} ds = 0. \tag{2.16}$$

Доказательство. Пусть $u \in H_{m,\mathrm{m}}(A, \Omega)$. Тогда существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \bar{C}^1(\bar{\Omega})$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $u_n \to u$ в H. Из доказательства леммы 2.2 следует, что при $\forall x_0 \in \operatorname{int}\Pi$ справедливо неравенство (см. (2.13) при $f = u_n - u_m$, $n, m = 1, 2, \ldots$)

$$\int_{\hat{P}_{x_0}} |u_n - u_m|^{m_*} ds \leqslant c_2 \int_{\hat{\omega}_{x_0}} \left(|u_n - u_m|^{m_*} + |A\nabla(u_n - u_m)|^{m_*}\right) dx. \tag{2.17}$$

Поскольку правая часть в (2.17) стремится к 0 при $n, m \to \infty$, то, учитывая произвол точки $x_0 \in \operatorname{int}\Pi$, заключаем, что существует функция $\varphi \in L^{m_*}_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, такая, что $u_n \to \varphi$ в $L^{m_*}_{\mathrm{loc}}(\Pi)$. Тогда из леммы 2.2 следует, что функция $u \in H$ имеет на Π обобщенное предельное значение $u|_\Pi = \varphi \in L^{m_*}_{\mathrm{loc}}(\Pi)$. Полагая теперь в (2.13) (при любой фиксированной точке $x_0 \in \operatorname{int}\Pi$) $f = u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим оценку (2.15). Докажем теперь равенство (2.16). Пусть числа $\delta_0 > 0$ и $\hat{d}_0 > 0$ столь малы, что преобразование (2.8) является диффеоморфизмом между $(|y'| \leqslant \delta_0) \times (0 \leqslant t \leqslant \hat{d}_0)$ и $\hat{\omega}_{x_0} \subset \Omega$ (см. доказательство леммы 2.2). Очевидно, что для любой $f \in \bar{C}^1(\hat{\omega}_{x_0})'$ и любой $y \in \hat{P}_{x_0} \equiv \{y \equiv (y', \Phi(y')): : |y'| \leqslant \delta_0\}$ справедливо неравенство

$$|f(y+tA^*(y)A(y)\nu(y)) - f(y)| \leqslant \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau}[f(y+\tau A^*(y)A(y)\nu(y))] \right| d\tau =$$

$$= \int_0^t |A^*(y)A(y)\nu(y)\cdot\nabla f(y+\tau A^*(y)A(y)\nu(y))|\,d\tau =$$

$$= \int_0^t |A(y)\nu(y)\cdot A(y)\nabla f(y+\tau A^*(y)A(y)\nu(y))|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^t |A(y)\nabla f(y+\tau A^*(y)A(y)\nu(y))|\,d\tau, \quad t \in (0, \hat{d}_0], \tag{2.18}$$

где константа c зависит лишь от $\max\limits_{\hat{P}_{x_0}} |a^{ij}|$, $i, j = 1, \ldots, n$. Возводя (2.18) в степень m_* и интегрируя получившееся неравенство по $\hat{P}_{x_0}$, получим оценку

$$\int_{\hat{P}_{x_0}} |f(y+tA^*(y)A(y)\nu(y)) - f(y)|^{m_*} ds \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_0^t \int_{\hat{P}_{x_0}} |A(y)\nabla f(y+\tau A^*(y)A(y)\nu(y))|^{m_*} ds\,d\tau, \quad t \in [0, \hat{d}_0]. \tag{2.19}$$

Учитывая гладкость поверхности $\hat{P}_{x_0}$, положительность якобиана J преобразования (2.8) и условие 5) из (2.5), выведем из (2.19) оценку

$$\int_{\hat{P}_{x_0}} |f(y+tA^*(y)A(y)\nu(y)) - f(y)|^{m_*} ds \leqslant c_2 \int_{(\hat{\omega}_{x_0})_t} |A\nabla f|^{m_*} dx, \tag{2.20}$$

где $(\hat{\omega}_{x_0})_t \equiv \{x \in \mathbb{R}^n\colon x = y + \tau A^*(y)A(y)\nu(y),\ y \in \hat{P}_{x_0},\ \tau \in [0, t]\} \subset \hat{\omega}_{x_0} \subset \bar{\Omega}$, $t \in (0, \hat{d}_0]$, c_2 зависит от c_1, $\max\limits_{|y'| \leqslant \delta_0} |\nabla\Phi|$, $\min J$ и константы c_0 из условия 5) в (2.5).

Подставляя в (2.20) $f = u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, получим:

$$\int_{\hat{P}_{x_0}} |u_n(y+tA^*(y)A(y)\nu(y)) - u_n(y)|^{m_*} ds \leqslant c_2 \int_{(\hat{\omega}_{x_0})_t} |A\nabla u_n|^{m_*} dx,$$
$$n = 1, 2, \ldots \tag{2.21}$$

Из условия $u_n \to u$ в H следует, в частности, что для некоторой подпоследовательности — обозначим ее снова через $\{u_n\}$ — справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\hat{P}_{x_0}} |(u_n - u)(y+tA^*(y)A(y)\nu(y))|^{m_*} ds = 0 \text{ при п. в. } t \in [0, \hat{d}_0], \tag{2.22}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(\hat{\omega}_{x_0})_t} |A\nabla u_n - A\nabla u|^{m_*} dx = 0. \tag{2.23}$$

Кроме того, по доказанному выше,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\hat{P}_{x_0}} |u_n - u|_{\Pi}|^{m_*} ds = 0. \tag{2.24}$$

Из (2.21)—(2.24) и следует, очевидно, равенство (2.16). Лемма 2.3 доказана. Совершенно аналогичным образом доказывается следующий вариант лемм 2.2 и 2.3.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.3), *и пусть для некоторого множества* $\Pi \in \partial\Omega$ *и матрицы* A *выполнено условие:*

1) *в замыкании* $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$ *некоторой* n*-мерной окрестности* ω *множества* $\Pi \subset \partial\Omega$ *элементы матрицы* A *непрерывны, а элементы матрицы* A^*A *непрерывно дифференцируемы;*

2) *при некотором числе* $d_0 > 0$ *множество* $\omega_\Pi \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x = y + tA^*(y) A(y) \nu(y),\ y \in \Pi,\ t \in [0, d_0]\}$ *содержится в* $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$;

3) *отображение* $x = y + tA^*(y) A(y) \nu(y),\ y \in \Pi,\ t \in [0, d_0]$, *является гомеоморфизмом между* $\Pi \times [0, d_0]$ *и* ω_Π;

4) *множество* Π *допускает параметрическое задание* $y = \Phi(s')$, $s' \in S \subset \mathbb{R}^{n-1}$, *причем* $\Phi \in C^2(S)$ *и* $\sup\limits_S |\nabla\Phi| \leqslant \mathrm{const}$; (2.25)

5) *якобиан* J *преобразования* $(s', t) \to x,\ s' \in S,\ t \in [0, d_0]$, *определенного по формуле* $x = \Phi(s') + tA^*(\Phi(s')) A(\Phi(s')) \nu(\Phi(s')),\ s' \in S$, $t \in [0, d_0]$, *положителен, причем* $\inf\limits_{S \times [0, d_0]} J \geqslant \alpha_0 = \mathrm{const} > 0$;

6) *существует такая константа* $c_0 > 0$, *что при любых* $y \in \Pi,\ t \in [0, d_0],\ \xi \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство* $|A(y)\xi| \leqslant c_0 |A(y + tA^*(y) A(y) \nu(y))\xi|$.

Тогда оператор принятия предельного значения на множестве Π *допускает замыкание, всякая функция* $u \in H_{m, \mathbf{m}}(A, \Omega)$ *имеет на* Π *обобщенное предельное значение* $u|_\Pi \in L^{m_*}(\Pi)$, *где* $m_* = \min(m, m_1, \ldots, m_n)$, *причем справедливы неравенства*

$$\int\limits_\Pi |u|_\Pi|^{m_*} ds \leqslant c \int\limits_{\omega_\Pi} (|u|^{m_*} + |A\nabla u|^{m_*})\, dx, \tag{2.26}$$

где c *не зависит от функции* u, *и равенство*

$$\lim_{\tau \to 0} \int\limits_\Pi |u(y + \tau A^*(y) A(y) \nu(y)) - u|_\Pi(y)|^{m_*} \partial s = 0. \tag{2.27}$$

§ 3. Правильная и особая части границы $\partial\Omega$

Пусть матрица $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ удовлетворяет в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, условиям (1.1) и (1.3) относительно некоторого показателя $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $m \geqslant 1$.

Определение 3.1. Множество $\Pi \subset \partial\Omega$ называется правильной частью границы (относительно матрицы A и показателей m, $\mathbf{m}$), если оператор принятия предельного значения на Π, определенный в § 2, допускает замыкание (т. е. для Π выполнено условие (2.3)). Множество $\mathscr{P} \subset \partial\Omega$ называется особой частью границы $\partial\Omega$ (относительно матрицы A и показателей m, $\mathbf{m}$), если для $\mathscr{P}$ выполнено условие:

$$\text{множество } \overset{\circ}{C}{}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar{\Omega}) \text{ плотно в } H_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega). \tag{3.1}$$

Если для множества $\Pi \subset \partial\Omega$ выполнено условие (2.3), т. е. если множество Π является правильной частью $\partial\Omega$, то всякая функция из $\overset{0,\Pi}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$ обращается в 0 на Π в следующем обобщенном смысле: если

$u \in \overset{0,\,\Pi}{H}_{m,\,\mathbf{m}}(A,\,\Omega)$ и последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $n=1,\,2,\,\ldots$, сходится к функции u по норме (2.1) и при этом $u_n|_\Pi \to \varphi$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$, то необходимо $\varphi=0$ п. в. на Π. В частности, если некоторая последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{0,\,\Pi}(\bar{\Omega})$, $n=1,\,2,\,\ldots$, сходится к функции $u \in C^1(\bar{\Omega})$ по норме (2.1), то необходимо $u|_\Pi=0$. Таким образом, среди гладких в $\bar{\Omega}$ функций, принадлежащих $\overset{0,\,\Pi}{H}_{m,\,\mathbf{m}}(A,\,\Omega)$, нет таких, которые не равны тождественно нулю на Π. Как показано выше (см. условие (2.5)), правильность множества $\Pi \subset \partial\Omega$ обеспечивается предположением достаточной гладкости Π и матрицы A вблизи Π и невырожденностью на Π вектора $A\boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внутренней нормали к Π (т. е. $A\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$ на Π). В этом случае всякая функция $u \in H_{m,\,\mathbf{m}}(A,\,\Omega)$ имеет на Π обобщенное предельное значение $u|_\Pi \in L^{m_*}_{\text{loc}}(\Pi)$. В дальнейшем будут даны и другие критерии правильности Π. Очевидно, что выполнение для множества $\Pi \subset \partial\Omega$ условия (2.3) влечет справедливость для Π отрицания условия (3.1) (т. е. правильная часть $\partial\Omega$ заведомо не является особой).

Если для множества $\mathscr{P} \subset \partial\Omega$ выполнено условие (3.1), то для $\mathscr{P}$ справедливо отрицание условия (2.3). Действительно, пусть условие (3.1) выполнено для множества $\mathscr{P}$, и пусть последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{0,\,\mathscr{P}}(\bar{\Omega})$, $n=1,\,2,\,\ldots$, сходится в H к функции $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u \neq 0$, на $\mathscr{P}$ (существование такой последовательности вытекает из условия (3.1)). Пусть $\{\tilde{u}_n\}$ — стационарная последовательность, причем $\tilde{u}_n \equiv u$, $n=1,\,2,\,\ldots$ Обозначим $v_n = u_n - \tilde{u}_n$, $n=1,\,2,\,\ldots$ Очевидно, что $v_n \to 0$ в H, но $v_n|_{\mathscr{P}} \equiv -u|_{\mathscr{P}}$ не стремится к 0 в $L^1_{\text{loc}}(\mathscr{P})$. Таким образом, для $\mathscr{P}$ несправедливо условие (2.3). Ниже приводятся достаточные условия справедливости для множества $\mathscr{P} \subset \partial\Omega$ условия (3.1).

Лемма 3.1. *Предположим, что множество $\mathscr{P} \subset \partial\Omega$ удовлетворяет следующему условию.*

$\mathscr{P}$ есть объединение конечного или счетного множества поверхностей $\mathscr{P}_k$, $k=1,\,2,\,\ldots$, класса C^2, таких, что $\bar{\mathscr{P}}_k \cap \bar{\mathscr{P}}_l = \varnothing$ при $k \neq l$, причем существует такое число $\delta_0 > 0$, что для каждой поверхности $\mathscr{P}_k$ выполнены следующие условия:

1) для каждого $\delta \in (0,\,\delta_0)$ существует поверхность с краем $\mathscr{P}_{k,\,\delta}$ класса C^2, содержащая $\mathscr{P}_k$, трубчатая полуокрестность которой $\omega_{k,\,\delta} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x = y + d\boldsymbol{\nu}(y),\ 0 \leqslant d \leqslant \delta,\ y \in \mathscr{P}_{k,\,\delta}\}$, где $\boldsymbol{\nu}(y)$ — единичный вектор нормали к $\mathscr{P}_{k,\,\delta}$, непрерывно меняющийся вдоль $\mathscr{P}_{k,\,\delta}$ и совпадающий на $\mathscr{P}_k$ с единичным вектором внутренней нормали к $\partial\Omega$, разбивает область Ω на части $\Omega \cap \omega_{k,\,\delta}$ и $\Omega \setminus \omega_{k,\,\delta}$, так, что $\overline{\Omega \cap \omega_{k,\,\delta}} \cap \overline{\Omega \setminus \omega_{k,\,\delta}} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x = y + \delta\boldsymbol{\nu}(y),\ \ y \in \mathscr{P}_{k,\,\delta}\}$;

2) существуют такие константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ (не зависящие от k и δ), что $\omega_{k,\,\delta}$ содержится в $c_1\delta$ — окрестности множества $\mathscr{P}_k$ в $\mathbb{R}^n$ (т. е. для всякого $x \in \omega_{k,\,\delta}$ $\operatorname{dist}(x,\,\mathscr{P}_k) < c_1\delta$), а $\operatorname{mes}_n \omega_{k,\,\delta} \leqslant c_2\delta$; (3.2)

3) для любой точки $x \in \omega_{k,\,\delta}$ существует единственная точка $y \equiv y(x) \in \mathscr{P}_{k,\,\delta}$, для которой $\operatorname{dist}(x,\,\mathscr{P}_{k,\,\delta}) = \operatorname{dist}(x,\,y)$;

4) при любых $k \neq l$ и всех $\delta \in (0,\,\delta_0)$ $\omega_{k,\,\delta} \cap \omega_{l,\,\delta} = \varnothing$;

5) функции $x \to A_i(x)\,\boldsymbol{\nu}(y(x))$, $i=1,\,\ldots,\,n$, удовлетворяют в $\omega_{k,\,\delta} \cap \bar{\Omega}$ условиям Гельдера

$$|A_i(x)\,\boldsymbol{\nu}(y(x)) - A_i(x')\,\boldsymbol{\nu}(y(x'))| \leqslant c_3\,|x-x'|^{\alpha_i},$$

где $\alpha_i > 1/m_i'$, $1/m_i + 1/m_i' = 1$, $i=1,\ldots,n$, *причем константы* c_3 *и* α_i *не зависят от* k *и* δ;

6) $A_i(y)\nu(y) = 0$ *на* $\mathscr{P}_k$, $i=1,\ldots,n$.

Тогда $\mathscr{P}$ — *особая часть* $\partial\Omega$.

Доказательство. Для доказательства плотности $\tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar\Omega)$ в $H_{m,\mathbf{m}}(A,\Omega)$ (см. (3.1)) достаточно показать, что для всякой $u \in \tilde{C}^1(\bar\Omega)$ найдется последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar\Omega)$, $n=1, 2, \ldots$, сходящаяся к u в H, поскольку $\tilde{C}^1(\bar\Omega)$ плотно в H. Будем сначала считать, что в условии (3.2) $k=1$. В этом случае вместо $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_{1\delta}$ будем использовать обозначения $\mathscr{P} \equiv \mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_\delta \equiv \mathscr{P}_{1,\delta}$. Обозначим также $\omega_\delta \equiv \{x \in \Omega : x = y + d\nu(y),\ y \in \mathscr{P}_\delta,\ 0 \leqslant d \leqslant \delta\}$, $\omega_{\delta/2,\delta} = \omega_\delta \setminus \omega_{\delta/2}$, $0 < \delta < \delta_0$. Положим

$$\zeta_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \in \omega_{\delta/2}, \\ \frac{2}{\delta}\left[d(x) - \frac{\delta}{2}\right], & x \in \omega_{\delta/2,\delta}, \\ 1, & x \in \Omega \setminus \omega_\delta, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\delta \in (0, \delta_0)$, а $d(x) \equiv \operatorname{dist}(x, \mathscr{P}_\delta)$ — функция, определенная на множестве ω_δ. Из условия (3.2) и равенства $\nabla d(x) = \nu(y(x))$, $x \in \omega_\delta$, следует, что $\zeta_\delta \in \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar\Omega)$, причем

$$\nabla\zeta_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \in \omega_{\delta/2} \cup (\Omega \setminus \omega_\delta), \\ \frac{2}{\delta}\nu(y(x)), & x \in \omega_{\delta/2,\delta}, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $y(x)$ — ближайшая к x точка на $\mathscr{P}_\delta$. Положим для выбранной функции $u \in \tilde{C}^1(\bar\Omega) : u_\delta(x) = u(x)\zeta_\delta(x)$. Очевидно, что $u_\delta \in \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar\Omega)$. Оценим

$$\begin{aligned} \|u - u_\delta\|_H &= \|u(1-\zeta_\delta)\|_{m,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|A_i[\nabla u(1-\zeta_\delta) - u\nabla\zeta_\delta]\|_{m_i,\Omega} \leqslant \\ &\leqslant \|u\|_{m,\omega_\delta} + \sum_{i=1}^n \|A_i\nabla u\|_{m_i,\omega_\delta} + \sum_{i=1}^n \|uA_i\nabla\zeta_\delta\|_{m_i,\omega_{\delta/2,\delta}}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

причем мы учли, что $\zeta_\delta = 1$ вне ω_δ. Ввиду (3.4) для каждого $i \in \{1,\ldots,n\}$ справедливо равенство

$$\|uA_i\nabla\zeta_\delta\|^{m_i}_{m_i,\omega_{\delta/2,\delta}} = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{m_i} \int\limits_{\omega_{\delta/2,\delta}} |A_i(x)\nu(y(x))|^{m_i}|u(x)|^{m_i}\,dx. \tag{3.6}$$

Ввиду условия 2) в (3.2) для $\forall x \in \omega_{\delta/2,\delta}$ найдется точка $z \in \mathscr{P}$, такая, что $\operatorname{dist}(x,z) \leqslant C_1\delta$. Тогда из условий 2), 5) и 6) в (3.2) следует, что

$$|A_i(x)\nu(y(x))| \leqslant c_3(c_1\delta)^{\alpha_i}, \quad i=1,\ldots,n. \tag{3.7}$$

Учитывая еще, что $\operatorname{mes}_n\omega_{\delta/2,\delta} \leqslant c_2\delta$ (см. условие 2) в (3.2)), получим оценку

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)^{m_i} \int\limits_{\omega_{\delta/2,\delta}} |A_i(x)\nu(y(x))|^{m_i}|u(x)|^{m_i}\,dx \leqslant c\delta^{m_i(-1+\alpha_i+1/m_i)} = c\delta^{m_i\varepsilon_i}, \tag{3.8}$$

где $\varepsilon_i = \alpha_i - 1/m_i' > 0$, а константа c не зависит от δ. Из (3.5)—(3.8) следует, очевидно, что $u_\delta \to u$ в H при $\delta \to 0$. Выбирая произвольную последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n \in (0, \delta_0)$, $\delta_n \to 0$, заключаем, что $u_{\delta_n} \to u$ в H, причем $u_{\delta_n} \in \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar\Omega)$. Таким образом, $\tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar\Omega)$ плотно в H. Пусть теперь число k в условии (3.2) произвольно. Учитывая условие 4) в (3.2) и обозначая через $\zeta_\delta^{(k)}$ функцию, определенную по формуле вида (3.3) для компоненты $\mathscr{P}_k$ множества $\mathscr{P}$, положим:

$$\zeta_\delta(x) = \prod_{k=1,2,\ldots} \zeta_\delta^{(k)}(x). \tag{3.9}$$

Заметим, что в каждой фиксированной точке $x \in \Omega$ в произведении (3.9) только один из сомножителей может быть отличен от 1. Очевидно, что $\zeta_\delta \in \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar{\Omega})$, причем $\zeta_\delta = 1$ в $\Omega \diagdown \bigcup_{k=1,2,\ldots} \omega_{k,\delta}$, где множества $\omega_{k,\delta}$ определяются аналогично множествам ω_δ (см. (3.2)). Обозначим для фиксированной функции $u \in \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar{\Omega})$:

$$u_\delta(x) = u(x)\zeta_\delta(x). \tag{3.10}$$

Очевидно, что $u_\delta \in \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar{\Omega})$. Рассуждая точно так же, как в случае $k=1$, устанавливаем, что

$$u_\delta \to u \text{ в } H, \tag{3.11}$$

откуда следует, что $\tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar{\Omega})$ плотно в H. Лемма 3.1 доказана.

Следствие 3.1. *При выполнении условий леммы* 3.1 *пространства* $\overset{0,\mathscr{P}}{H}_{m,\mathfrak{m}}(A,\Omega)$ *и* $H_{m,\mathfrak{m}}(A,\Omega)$ *совпадают. В частности, множество* $\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$ *содержится (и плотно) в пространстве* $\overset{0,\mathscr{P}}{H}_{m,\mathfrak{m}}(A,\Omega)$.

Доказательство. Утверждения следствия 3.1 очевидным образом вытекают из плотности $\tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar{\Omega})$ в $\overset{0,\mathscr{P}}{H}_{m,\mathfrak{m}}(A,\Omega)$ и определения пространств $\overset{0,\Gamma}{H}_{m,\mathfrak{m}}(A,\Omega)$.

§ 4. Некоторые теоремы вложения

В этом параграфе приводятся анизотропные аналоги некоторых теорем вложения С. Л. Соболева, а также некоторых мультипликативных неравенств, первоначально установленных В. П. Ильиным ([57]). Для удобства читателей дается краткое изложение доказательств этих результатов, которые устанавливаются в рамках, достаточных для нужд данной монографии.

Хорошо известен следующий результат, связанный с вопросом об эквивалентных нормах в пространстве $W^1_p(\Omega)$ (см., например, [8]).

Лемма 4.1. *Пусть* Ω — *ограниченная строго липшицева область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Тогда при любом* $p \geqslant 1$ *для любой функции* $u \in W^1_p(\Omega)$

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant c_1\left(\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{p,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}\right), \tag{4.1}$$

где c_1 *зависит лишь от* n, p *и* Ω. *Пусть, далее,* Γ — *некоторое подмножество положительной* $(n-1)$*-мерной поверхностной меры на* $\partial\Omega$. *Тогда при любом* $p \geqslant 1$ *для любой функции* $u \in W^1_p(\Omega)$

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant c_2\left(\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{p,\Omega} + \int_\Gamma |u|\,ds\right), \tag{4.2}$$

где c_2 *зависит лишь от* n, p, Ω *и* Γ.

Обозначим через $W^1_{p,\mathbf{q}}(\Omega)$, $p \geqslant 1$, $\mathbf{q}=(q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \geqslant 1$, банахово пространство функций $u \in L^p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $u_{x_i} \in L^{q_i}(\Omega)$, $i=1, \ldots, n$, с нормой

$$\|u\|_{W^1_{p,\mathbf{q}}(\Omega)} = \|u\|_{p,\Omega} + \|\nabla u\|_{\mathbf{q},\Omega} \equiv \|u\|_{p,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{q_i,\Omega}. \tag{4.3}$$

Обозначим через $H_{p,\mathbf{q}}(\Omega)$ при таких же показателях p и $\mathbf{q}$, что и в (4.3), замыкание множества $\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$ (см. основные обозначения) по норме (4.3). Если область Ω строго липшицева, то пространства $H_{p,\mathbf{q}}(\Omega)$ и $W^1_{p,\mathbf{q}}(\Omega)$, как известно, совпадают.

Обозначим через $\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$, $\mathbf{q}=(q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \geqslant 1$, $i=1, \ldots, n$, замыкание множества $\tilde{C}^1(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)} = \|u\|_{1,\Omega} + \|\nabla u\|_{\mathbf{q},\Omega}. \tag{4.4}$$

Из сказанного выше следует, что для строго липшицевой области Ω пространство $\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ совпадает с пространством $W^1_{1,\mathbf{q}}(\Omega)$. Из теорем вложения, которые устанавливаются ниже, вытекает, что пространство $\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ совпадает с пространством $W^1_{p,\mathbf{q}}(\Omega)$ при всех $p \in [1, \hat{l}]$, где $\hat{l}$ — некоторый предельный показатель, определяемый в зависимости от $\mathbf{q}$ и n.

Лемма 4.2. *Пусть фиксированы числа $q_i \geqslant 1$, $i=1, \ldots, n$, и $s \geqslant 1$, и пусть показатель l удовлетворяет при каком-нибудь $\alpha \in [0, 1]$ условиям*

$$\frac{1}{l} = \frac{\alpha}{\hat{l}} + \frac{1-\alpha}{s},$$

$$\hat{l} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} - 1} \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} > 1, \ n \geqslant 2,$$

$$\hat{l} \in (2, +\infty) \ \text{при} \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} = 1, \ n \geqslant 2, \ \hat{l} \in (2, +\infty] \tag{4.5}$$

$$\text{при} \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} < 1, \ n \geqslant 2 \ \text{и при} \ n=1.$$

Тогда для любой функции $u \in \tilde{C}^1_0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, справедливо неравенство

$$\|u\|_{l,\Omega} \leqslant c \|\nabla u\|^{\alpha}_{\mathbf{q},\Omega} \|u\|^{1-\alpha}_{s,\Omega}, \tag{4.6}$$

где $\|\nabla u\|_{\mathbf{q},\Omega} \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{q_i,\Omega}$, а константа c в (4.6) зависит лишь от n, $\mathbf{q}$, s и α при $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} > 1$ и от n, $\hat{l}$, s, α и Ω при $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} \leqslant 1$.

Доказательство. Для любой функции $u \in \tilde{C}^1_0(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{l,\Omega} \leqslant \|u\|^{\alpha}_{\hat{l},\Omega} \|u\|^{1-\alpha}_{s,\Omega}, \quad \frac{1}{l} = \frac{\alpha}{\hat{l}} + \frac{(1-\alpha)}{s}. \tag{4.7}$$

Воспользуемся теперь оценкой

$$\|u\|_{\hat{l},\Omega} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} h_i \right)^{1/n} \|\nabla u\|_{\mathbf{q},\Omega}, \tag{4.8}$$

где $h_i = 1 + \hat{l}/q'_i$, $1/q_i + 1/q'_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Оценка (4.8) вытекает, например, из рассуждений работы [87]. Она является следствием неравенства

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |u_i|^{1/(n-1)} dx \right)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right| dx \right), \tag{4.9}$$

справедливого для любых функций $u_i \in \overset{\circ}{C}{}_0^1(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, n$ (см. [87], с. 25). Действительно, если, например, $n \geqslant 2$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} 1/q_i > 1$, то, считая функцию u продолженной нулем на все $\mathbb{R}^n$, полагая $u_i = |u|^{h_i}$, $i = 1, \ldots, n$, и учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i = \hat{l}(n-1)$, выведем из (4.9) неравенство

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\hat{l}} dx \right)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^{n} h_i \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\hat{l}/q'_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx. \tag{4.10}$$

Применяя неравенство Гельдера, а затем возводя обе части получившегося неравенства в степень $1/\hat{l}(n-1)$, получим:

$$\|u\|_{\hat{l},\Omega} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} h_i \right)^{1/\hat{l}(n-1)} \|u\|_{\hat{l},\Omega}^{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} 1/q'_i \right) \Big/ (n-1)} \|\nabla u\|_{\mathbf{q},\Omega}^{n/\hat{l}(n-1)}. \tag{4.11}$$

Учитывая, что $1 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} 1/q'_i \right) \Big/ (n-1) = n/\hat{l}(n-1)$, выводим из (4.11) оценку (4.8). В случае $\sum\limits_{i=1}^{n} 1/q_i \leqslant 1$, $n \geqslant 2$, оценка (4.8) устанавливается аналогичным образом. Подставляя в (4.7) вместо $\|u\|_{\hat{l},\Omega}$ правую часть неравенства (4.8), получим оценку (4.6) с константой $c = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} h_i \right)^{\alpha/n}$. Это доказывает лемму 4.2 при $n \geqslant 2$. В случае $n = 1$ неравенство (4.6) очевидным образом вытекает из (4.7) и оценки

$$\max_{\mathbb{R}} |u| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{du}{dx} \right| dx, \quad \forall u \in C_0(\mathbb{R}).$$

Таким образом, лемму 4.2 можно считать доказанной.

Замечание 4.1. При условиях леммы 4.2 справедливо также неравенство

$$\|u\|_{l,\Omega} \leqslant c \left(\prod_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{q_i,\Omega}^{\alpha/n} \right) \|u\|_{s,\Omega}^{1-\alpha}. \tag{4.6'}$$

Действительно, наряду с оценкой (4.8) справедлива, очевидно, и оценка

$$\|u\|_{\hat{l},\Omega} \leqslant \prod_{i=1}^{n} h_i^{1/n} \|u_{x_i}\|_{q_i,\Omega}^{1/n}. \tag{4.8'}$$

Тогда (4.6′) вытекает из (4.7) и (4.8′).

Замечание 4.2. Обозначим через $\tilde{\overset{\circ}{H}}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ замыкание множества $\overset{\circ}{C}{}_0^1(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)}$. Тогда из леммы 4.2 легко следует, что при выполнении условия (4.5) всякая функция $u \in \tilde{\overset{\circ}{H}}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ принадлежит пространству $L^l(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству (4.6).

Лемма 4.3. *Пусть Ω — ограниченная строго липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Пусть*

$$\hat{l} = \frac{n}{\sum 1/q_i - 1} \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} > 1, \quad \hat{l} \in (2, \infty) \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} = 1,$$
$$\hat{l} \in (2, \infty] \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} < 1. \tag{4.12}$$

Тогда справедливо вложение $\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega) \to L^{\hat{l}}(\Omega)$. В частности, для любой функции $u \in \tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{\hat{l}, \Omega} \leqslant c \|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)}, \tag{4.13}$$

где константа c зависит только от n, $\hat{l}$, $\mathbf{q}$ и Ω. Если показатели l и $\mathbf{q}$ удовлетворяют условию (4.5) при каких-нибудь $\alpha \in (0, 1)$, $s \in [1, \hat{l})$, то имеет место компактное вложение $\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ в $L^l(\Omega)$, причем справедливо неравенство

$$\|u\|_{l, \Omega} \leqslant c \|u\|^{\alpha}_{\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{s, \Omega}, \quad \forall u \in \tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega), \tag{4.14}$$

где константа c зависит лишь от n, $\mathbf{q}$, α, s и Ω.

Доказательство. Применяя известный метод (см. [8, 57, 87]), продолжим заданную функцию $u \in \tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ на более широкую область $\hat{\Omega} \supset \Omega$ так, чтобы продолженная функция $\hat{u}$ принадлежала пространству $\tilde{\tilde{H}}_{\mathbf{q}}(\hat{\Omega})$ и удовлетворяла неравенствам

$$\|\hat{u}\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\hat{\Omega})} \leqslant c_1 \|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)}, \quad \|\hat{u}\|_{s, \hat{\Omega}} \leqslant c_2 \|u\|_{s, \Omega} \tag{4.15}$$

с константами c_1 и c_2, не зависящими от функции u. Тогда, используя результат, приведенный в замечании 4.2, а также компактность вложения $H_1(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$, легко доказать справедливость леммы 4.3.

Пусть Γ — некоторое фиксированное подмножество положительной $(n-1)$-мерной поверхностной меры на $\partial\Omega$. Обозначим через $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ замыкание множества $\tilde{C}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ (см. основные обозначения) по норме

$$\|u\|_{\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)} \equiv \|\nabla u\|_{\mathbf{q}, \Omega}. \tag{4.16}$$

Из леммы 4.1 (см. неравенство (4.2)) вытекает, что выражение (4.16) действительно определяет некоторую норму и что норма (4.16) эквивалентна норме $\|u\|_{W^1_{q_*, \mathbf{q}}(\Omega)}$, где $q_* = \min(q_1, \ldots, q_n)$. Очевидно, что $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega) \subset \tilde{\tilde{H}}_{\mathbf{q}}(\Omega)$. Заметим, что в случае $\Gamma = \partial\Omega$ пространство $\overset{\widetilde{0,\partial\Omega}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ совпадает с пространством $\tilde{\tilde{H}}_{\mathbf{q}}(\Omega)$, определенным в замечании 4.2. Обозначим еще через $\overset{0,\Gamma}{H}_{p,\mathbf{q}}(\Omega)$ замыкание множества $\tilde{C}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ по норме (4.3). Из следующей ниже леммы вытекает, что в случае строго липшицевой области Ω пространство $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ изоморфно пространству $\overset{0,\Gamma}{H}_{p,\mathbf{q}}(\Omega)$ при всех $p \leqslant \hat{l}$, где $\hat{l}$ — такой же предельный показатель, что и в лемме 4.3.

Лемма 4.4. *Пусть Ω — ограниченная строго липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть показатель $\hat{l}$ определен по формуле (4.12). Тогда* справедливо вложение $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega) \to L^{\hat{l}}(\Omega)$. *В частности, для любой функции* $u \in \overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{\hat{l},\Omega} \leqslant c\|\nabla u\|_{\mathbf{q},\Omega}, \tag{4.17}$$

где константа c *зависит от* n, $\hat{l}$, $\mathbf{q}$ *и* Ω. *Если показатели* l *и* $\mathbf{q}$ *удовлетворяют условиям* (4.5) *при каких-нибудь* $\alpha \in (0, 1)$, $s \in [1, \hat{l})$, *то имеет место компактное вложение* $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ *в* $L^{l}(\Omega)$, *причем справедливо неравенство*

$$\|u\|_{l,\Omega} \leqslant c(\|\nabla u\|_{\mathbf{q},\Omega})^{\alpha}\|u\|_{s,\Omega}^{1-\alpha}, \tag{4.18}$$

где константа c *зависит от* n, l, $\mathbf{q}$, s *и* Ω. *В случае* $\Gamma \equiv \partial\Omega$ *константы в* (4.17) *и* (4.18) *не зависят от* Ω.

Доказательство. Лемма 4.4 очевидным образом вытекает из лемм 4.3 и 4.1.

Замечание 4.3. Если под $\overset{0,\varnothing}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$, где $\varnothing$ — пустое подмножество на $\partial\Omega$, понимать пространство $\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$, то можно дать единое определение пространства $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$, где либо $\operatorname{mes}_{n-1}\Gamma > 0$, либо $\Gamma = \varnothing$ как замыкание множества $\tilde{C}^{1}_{0,\Gamma}(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{\mathbf{q},\Omega} + \delta(\Gamma)\|u\|_{1,\Omega}, \tag{4.19}$$

где $\delta(\Gamma) = 0$, если $\operatorname{mes}_{n-1}\Gamma > 0$, и $\delta(\Gamma) = 1$, если $\Gamma = \varnothing$.

Лемма 4.5. *Пусть* Ω — *ограниченная строго липшицева область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. *Тогда справедливо вложение*

$$\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega) \to L^{r}(\partial\Omega), \tag{4.20}$$

где показатель $r \geqslant 1$ *определяется из соотношений*

$$\begin{gathered}\frac{n-1}{r} = \frac{n}{q_*} - 1, \text{ если } q_* = \min(q_1, \ldots, q_n) < n,\\ r \in [1, +\infty) \text{ при } q_* \geqslant n.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Доказательство. Утверждение леммы 4.5 вытекает из вложения $\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega) \to W^{1}_{q_*}(\Omega)$ и известной теоремы вложения С. Л. Соболева.

Лемма 4.6. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, — *ограниченная строго липшицева область,* $\gamma \subset \partial\Omega$ — *измеримое по Лебегу на* $\partial\Omega$ *множество, причем либо* $\operatorname{mes}_{n-1}\gamma > 0$, *либо* $\gamma = \varnothing$. *Пусть функции* $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *образуют ортонормированный базис в* $L^2(\Omega)$, *и пусть показатели* $q_1, \ldots, q_n$, $q_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, *удовлетворяют условию*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} < \frac{n+2}{2} \text{ при } n \geqslant 2,$$

обеспечивающему компактность вложения $\overset{\widetilde{0,\gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ *в* $L^2(\Omega)$. *Тогда по любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать такой номер* N_ε, *что для любой функции* $u \in \overset{\widetilde{0,\gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (u, \psi_k)^2\right)^{1/2} + \varepsilon\|u\|_{\overset{\widetilde{0,\gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)}, \tag{4.22}$$

причем номер N_ε *не зависит от* u.

Доказательство. Условие (4.21) можно переписать в форме

$$\hat{l} > 2 \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} > 1, \ n \geqslant 2, \tag{4.23}$$

где $\hat{l}$ определено в зависимости от $\mathbf{q}$ и n в (4.5). Тогда из леммы 4.3 при $s=1$, $\alpha = 1/2(1-1/\hat{l})^{-1} \in (0, 1)$ и $l=2$ действительно следует, что вложение $\overset{\widetilde{0,\gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ компактно. Далее лемма 4.6 доказывается точно так же, как лемма 6.1 монографии [80] (см. с. 529—530), где рассмотрен случай $\mathbf{q} = (q, \ldots, q)$.

§ 5. Некоторые теоремы вложения для функций, зависящих от времени

В этом параграфе рассматриваются функции, зависящие от независимых переменных x, t, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t \in \mathbb{R}$. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ называются пространственными, а переменная t — временем. Обозначим через $L^{p, p_0}(Q)$, где $p \geqslant 1$, $p_0 \geqslant 1$, $Q = \Omega \times [T_1, T_2]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, банахово пространство всех измеримых в Q функций с нормой

$$\|u\|_{p, p_0, Q} \equiv \left(\int_{T_1}^{T_2} \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{p_0/p} dt \right)^{1/p_0}. \tag{5.1}$$

В частности, при $p_0 = p$ пространство $L^{p, p_0}(Q)$ совпадает с пространством $L^p(Q)$.

Лемма 5.1. *Если функция $u \in L^{q, q_0}(Q) \cap L^{s, s_0}(Q)$, то $u \in L^{p, p_0}(Q)$ и*

$$\|u\|_{p, p_0, Q} \leqslant \|u\|_{q, q_0, Q}^{\varkappa} \|u\|_{s, s_0, Q}^{1-\varkappa} \tag{5.2}$$

при условии, что

$$\frac{1}{p} = \frac{\varkappa}{q} + \frac{1-\varkappa}{s}, \quad \frac{1}{p_0} = \frac{\varkappa}{q_0} + \frac{(1-\varkappa)}{s_0}, \quad \varkappa \in [0, 1]. \tag{5.3}$$

Доказательство. Утверждение леммы 5.1 является хорошо известным фактом, устанавливаемым при помощи двукратного применения неравенства Гельдера.

Обозначим через $W^{0;\,1}_{p, p_0;\, \mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(Q)$, где $p \geqslant 1$, $p_0 \geqslant 1$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\mathbf{q}_0 = (q_{01}, \ldots, q_{0n})$, $q_i \geqslant 1$, $q_{0i} \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, банахово пространство, элементами которого являются функции $u \in L^{p, p_0}(Q)$, имеющие пространственные обобщенные (по С. Л. Соболеву) производные $u_{x_i} \in L^{q_i, q_{0i}}(Q)$, $i = 1, \ldots, n$, а норма имеет вид

$$\|u\|_{W^{0;\,1}_{p, p_0;\, \mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(Q)} = \|u\|_{p, p_0, Q} + \|\nabla u\|_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, Q}, \tag{5.4}$$

где $\|\nabla u\|_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, Q} \equiv \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{q_i, q_{0i}, Q}$. В частности, при $p = p_0$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ соответствующее пространство будем обозначать через $W^{0;\,1}_{p, \mathbf{q}}(Q)$. Если основание Ω цилиндра Q является ограниченной строго липшицевой областью в $\mathbb{R}^n$, то пространство $W_{p, p_0;\, \mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(Q)$ совпадает с замыканием множества $\bar{C}^1(Q)$ по норме (5.4). Последнее пространство будем обозначать через $H_{p, p_0;\, \mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(Q)$.

Пусть $\Gamma = \gamma \times (T_1, T_2)$, $\gamma \subset \partial\Omega$, причем далее всегда считаем, что либо

$\operatorname{mes}_{n-1}\gamma>0$, либо $\gamma=\varnothing$. Обозначим через $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$ замыкание множества $\tilde{C}^1_{0,\Gamma}(Q)$ всех функций из $\tilde{C}^1(Q)$, равных 0 вне некоторой n-мерной окрестности множества Γ, по норме

$$\|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)}=\|u\|_{2,\infty,Q}+\|\nabla u\|_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0,Q},\tag{5.5}$$

где $\|u\|_{2,\infty,Q}=\operatorname*{supess}_{t\in[T_1,T_2]}\|u\|_{2,\Omega}$. В случае $\gamma=\partial\Omega$ это банахово пространство будем обозначать через $\mathring{\tilde{H}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$, а в случае $\gamma=\varnothing$ — через $\tilde{H}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$. Очевидно, что пространство $\tilde{H}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$ совпадает с пространством $H_{2,\infty;\,\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$. Из теорем вложения, которые приводятся ниже, будет следовать, что пространство $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$ вкладывается в пространства $H_{p,p_0;\,\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$ для определенных пар показателей p, p_0.

В случае $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0$ пространство $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$ будем обозначать через $\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q}}(Q)$. Аналогичные упрощения обозначений пространств, связанных с рассмотрением «двойных норм» типа (5.1), будут применяться далее без специальных оговорок. Например, при $p=p_0$ пространство $H_{p,p_0;\,\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$ обозначается через $H_{p;\,\mathbf{q},\mathbf{q}_0}(Q)$ и т. п.

Лемма 5.2. *Пусть фиксированы числа* $q_i\geqslant1$, $q_{0i}\geqslant1$, $i=1,\ldots,n$, $p\in[1,+\infty]$, $p_0\in[1,+\infty]$, $r\in[1,+\infty]$, $r_0\in[1,+\infty]$, *и пусть показатели* l, l_0 *удовлетворяют при каких-нибудь значениях* $\alpha\in[0,1]$, $\beta\in[0,1]$ *условиям*

$$\frac{1}{l}=\frac{\alpha}{\hat{l}}+\frac{(1-\alpha)\beta}{p}+\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{r},\quad \frac{1}{l_0}=\frac{\alpha}{\hat{l}_0}+\frac{(1-\alpha)\beta}{p_0}+\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{r_0},$$

$$=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}1/q_i-1}\ \textit{при}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}>1,\ n\geqslant2,\ \hat{l}\in(2,+\infty)\ \textit{при}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}=1,\ n\geqslant2,\tag{5.6}$$

$$\in(2,+\infty]\ \textit{при}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}<1,\ n\geqslant2\ \textit{и при}\ n=1,\ \hat{l}_0=n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_{0i}}\right)^{-1}.$$

Тогда для любой функции $u\in\tilde{C}^1_{0,\partial\Omega\times(T_1,T_2)}(Q)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{l,l_0,Q}\leqslant c\,\|\nabla u\|^{\alpha}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0,Q}\,\|u\|^{(1-\alpha)\beta}_{p,p_0,Q}\,\|u\|^{(1-\alpha)(1-\beta)}_{r,r_0,Q},\tag{5.7}$$

где c *зависит лишь от* n, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, α *и* β *при* $\sum_{i=1}^{n}1/q_i>1$ *и от* n, $\hat{l}$, $\hat{l}_0$, α, *и* Ω *при* $\sum_{i=1}^{n}1/q_i\leqslant1$.

Доказательство. Пусть $u\in\tilde{C}^1_{0,\partial\Omega\times(T_1,T_2)}(Q)$. Ввиду замечания 4.1 при всех $t\in[T_1,T_2]$ справедливо неравенство (4.6) при каком-нибудь $s\geqslant1$. Возведем обе части такого неравенства в степень l_0 и проинтегрируем по t от T_1 до T_2. Тогда, применяя также неравенство

$$\|u\|_{s,\Omega}\leqslant\|u\|^{\beta}_{p,\Omega}\|u\|^{1-\beta}_{r,\Omega},\quad \frac{1}{s}=\frac{\beta}{p}+\frac{1-\beta}{r},\quad \beta\in[0,1],\tag{5.8}$$

получим:

$$\int_{T_1}^{T_2}\|u\|^{l_0}_{l,\Omega}dt\leqslant c\int_{T_1}^{T_2}\left(\prod_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|^{\alpha l_0/n}_{q_i,\Omega}\right)\|u\|^{(1-\alpha)l_0}_{s,\Omega}dt\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{T_1}^{T_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|^{\alpha l_0/n}_{q_i,\Omega}\right)\|u\|^{(1-\alpha)\beta l_0}_{p,\Omega}\|u\|^{(1-\alpha)(1-\beta)l_0}_{r,\Omega}dt.\tag{5.9}$$

Применяя к интегралу в правой части (5.9) неравенство Гельдера, оцен его сверху через

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{T_1}^{T_2}\|u_{x_i}\|_{q_i,\Omega}^{\alpha l_0/n\mu_i}dt\right)^{\mu_i}\left(\int_{T_1}^{T_2}\|u\|^{(1-\alpha)\beta l_0/\nu}dt\right)^{\nu}\left(\int_{T_1}^{T_2}\|u\|^{(1-\alpha)(1-\beta)l_0/\sigma}dt\right)^{\sigma} \quad (5.1$$

при любых $\mu_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,n$, $\nu\geqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}\mu_i+\nu+\sigma=1$. Выбер μ_i, ν и σ так, чтобы выполнялись равенства $\alpha l_0/n\mu_i=q_{0i}$, $i=1,\ldots,$ $(1-\alpha)\beta l_0/\nu=p_0$, $(1-\alpha)(1-\beta)/\sigma=r_0$. Отсюда находим: $\mu_i=\alpha l_0/nq_{0i}$, $i=1,\ldots,n$, $\nu=(1-\alpha)\beta l_0/p_0$, $\sigma=(1-\alpha)(1-\beta)/r_0$. Очевидно, что найде ные значения μ_i, ν и σ неотрицательны, а из условий (5.6) следует, ч $\sum_{i=1}^{n}\mu_i+\nu+\sigma=1$. Таким образом, неравенство Гельдера применено законн Из (5.9) и (5.10) с учетом неравенства Юнга и следует, очевидн оценка (5.7). Лемма 5.2 доказана.

Следствие 5.1. *Пусть фиксированы числа $q_i\geqslant 1$, $q_{0i}\geqslant 1$, $i=1,\ldots n$, и пусть показатели l, l_0 удовлетворяют при каком-нибу $\alpha\in[0, 1]$ условиям*

$$\frac{1}{l}=\frac{\alpha}{\hat{l}}+\frac{(1-\alpha)}{2},\quad \frac{1}{l_0}=\frac{\alpha}{\hat{l}_0}, \quad (5.1$$

где $\hat{l}$ и $\hat{l}_0$ определены в формуле (5.6). **Тогда для любой функции** $u\in\overset{\circ}{C}{}^1_{0,\partial\Omega\times(T_1,T_2)}(\bar{Q})$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{l,l_0,Q}\leqslant c\|\nabla u\|^{\alpha}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0,Q}\|u\|^{1-\alpha}_{2,\infty,Q}\leqslant c\|u\|_{\mathring{H}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0}}(Q), \quad (5.1$$

где c зависит только от n, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ и α в случае $\sum_{i=1}^{n}q_i>1$ и от n, $\hat{l}$, $\hat{l}$ α и Ω в случае $\sum_{i=1}^{n}1/q_i\leqslant 1$.

Доказательство. Следствие 5.1 является частным случаем леммы 5. при $\beta=0$, $r=2$, $r_0=+\infty$.

Следствие 5.2. 1) *Пусть при фиксированных $q_i\geqslant 1$, $q_{0i}\geqslant 1$, $i=1,\ldots,n$, показатели l, l_0 удовлетворяют при каких-нибудь $\alpha\in[0, 1$ $\beta\in[0, 1]$ условиям*

$$\frac{1}{l}=\frac{\alpha}{\hat{l}}+\frac{(1-\alpha)}{2},\quad \frac{1}{l_0}=\frac{\alpha}{\hat{l}_0}+(1-\alpha)\beta, \quad (5.1$$

где $\hat{l}$ и $\hat{l}_0$ — такие же, как в (5.6); *тогда*

$$\|u\|_{l,l_0,Q}\leqslant c\|\nabla u\|^{\alpha}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0,Q}\|u\|^{(1-\alpha)\beta}_{2,1,Q}\|u\|^{(1-\alpha)(1-\beta)}_{2,\infty,Q},\quad \forall u\in\overset{\circ}{C}{}^1_{0,\partial\Omega\times(T_1,T_2)}(\bar{Q}); \quad (5.1$$

2) *если*

$$\frac{1}{l}=\frac{\alpha}{\hat{l}}+\frac{(1-\alpha)}{2},\quad \frac{1}{l_0}=\frac{\alpha}{\hat{l}_0}+\frac{(1-\alpha)\beta}{2},$$
$$\alpha\in[0, 1],\ \beta\in[0, 1], \quad (5.1$$

где $\hat{l}$ и $\hat{l}_0$ — такие же, как в (5.6), *то*

$$\|u\|_{l,l_0,Q}\leqslant c\|\nabla u\|^{\alpha}_{\mathbf{q},\mathbf{q}_0,Q}\|u\|^{(1-\alpha)\beta}_{2,Q}\|u\|^{(1-\alpha)(1-\beta)}_{2,\infty,Q},\quad \forall u\in\overset{\circ}{C}{}^1_{0,\partial\Omega\times(T_1,T_2)}(\bar{Q}); \quad (5.1$$

3) *если*

$$\frac{1}{l}=\frac{\alpha}{\hat{l}}+\frac{(1-\alpha)}{2},\quad \frac{1}{l_0}=\frac{\alpha}{\hat{l}_0}+\frac{(1-\alpha)}{2},\quad \alpha\in[0,\ 1],\tag{5.17}$$

где $\hat{l}$ *и* $\hat{l}_0$ *— такие же, как в* (5.6), *то*

$$\|\nabla u\|_{l,\ l_0,\ Q}\leqslant c\|\nabla u\|^{\alpha}_{\mathbf{q},\ \mathbf{q}_0,\ Q}\|u\|^{1-\alpha}_{2,\ \infty,\ Q},\quad \forall u\in \tilde{C}^1_{0,\partial\Omega\times(T_1,T_2)}(\bar{Q}).\tag{5.18}$$

Константы в (5.14), (5.16) *и* (5.18) *зависят при* $\sum\limits_{i=1}^{n}1/q_i>1$ *от* n, $\hat{l}$, $\hat{l}_0$, α *и* β, *а при* $\sum\limits_{i=1}^{n}1/q_i\leqslant 1$ *еще и от* Ω.

Доказательство. Следствие 5.2 выделяет ряд частных случаев леммы 5.2, причем пункт 1) соответствует случаю $p=2$, $p_0=1$, $r=2$, $r_0=+\infty$; пункт 3) соответствует случаю $\beta=1$, $p=2$, $p_0=2$, $r=2$, $r_0=+\infty$.

Лемма 5.3. *Пусть* $Q=\Omega\times(T_1,\ T_2)$ *— цилиндр с ограниченной строго липшицевой областью* Ω, *лежащей в его основании, и пусть* $\Gamma=\gamma\times\times(T_1,\ T_2)$, $\gamma\subset\partial\Omega$, *причем либо* $\operatorname{mes}_{n-1}\gamma>0$, *либо* $\gamma=\varnothing$. *Пусть фиксированы числа* $q_i\geqslant 1$, $q_{0i}\geqslant 1$, $i=1,\ \ldots,\ n$, *а показатели* $\bar{l}$ *и* $\bar{l}_0$ *удовлетворяют при каком-нибудь* $\alpha\in[0,\ 1]$ *условиям* (5.11). *Тогда имеет место вложение* $\overset{0,\Gamma}{\widetilde{H}}_{\mathbf{q},\ \mathbf{q}_0}(Q)\to L^{\bar{l},\ \bar{l}_0}(Q)$, *причем для любой функции* $u\in\overset{0,\Gamma}{\widetilde{H}}_{\mathbf{q},\ \mathbf{q}_0}(Q)$ *справедливы неравенства вида* (5.12) *с константой* c, *зависящей от* n, $\bar{l}$, $\bar{l}_0$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ *и* Ω. *Если вместо показателей* $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ *рассматриваются показатели* l, l_0, *удовлетворяющие при каких-нибудь* $\alpha\in(0,\ 1)$, $\beta\in(0,\ 1)$ *условиям* (5.13), *то при любом* $\varepsilon>0$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{l,\ l_0,\ Q}\leqslant\varepsilon\|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q},\ \mathbf{q}_0}(Q)}+c_1\varepsilon^{-\lambda}\|u\|_{2,\ 1,\ Q}.\tag{5.19}$$

Если же вместо условий (5.13) *для показателей* l, l_0 *выполнены (при каких-нибудь* $\alpha\in(0,\ 1)$, $\beta\in(0,\ 1)$) *условия* (5.15), *то при любом* $\varepsilon>0$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{l,\ l_0,\ Q}\leqslant\varepsilon\|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q},\ \mathbf{q}_0}(Q)}+c_2\varepsilon^{-\lambda}\|u\|_{2,Q}.\tag{5.20}$$

Константы c_1 *и* c_2 *в* (5.19) *и* (5.20) *зависят лишь от* n, $\hat{l}$, $\hat{l}_0$, α, β *и* Ω,* *а* $\lambda>0$ *— только от* α *и* β. *В случае* $\Gamma=\partial\Omega\times(T_1,\ T_2)$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n}1/q_i>1$ *константы* c, c_1 *и* c_2 *из указанных выше неравенств не зависят от* Ω.

Доказательство. Пусть $u\in\tilde{C}^1_{0,\Gamma}(\bar{\Omega})$. Продолжим эту функцию на множество $\hat{Q}=\hat{\Omega}\times(T_1,\ T_2)$, $\hat{\Omega}\supset\Omega$, так, чтобы продолженная функция $\hat{u}$ принадлежала $\tilde{C}^1_{0,\ \partial\Omega\times(T_1,\ T_2)}(\bar{Q})$ и удовлетворяла неравенствам

$$\|\nabla\hat{u}\|_{\mathbf{q},\ \hat{\Omega}}\leqslant c_0\left(\|\nabla u\|_{\mathbf{q},\ \Omega}+\|u\|_{1,\ \Omega}\right),\quad \|\hat{u}\|_{2,\ \hat{\Omega}}\leqslant c_0\|u\|_{2,\ \Omega},\quad t\in[T_1,\ T_2],\tag{5.21}$$

где c_0 зависит лишь от области Ω и $\mathbf{q}$. Такое продолжение можно осуществить, используя, например, методы работ [8, 57, 87]. Тогда из следствия 5.1 с учетом (5.21) вытекает оценка

$$\|u\|_{\bar{l},\ \bar{l}_0,\ Q}\leqslant c\|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q},\ \mathbf{q}_0}(Q)},\quad \forall u\in\tilde{C}^1_{0,\ \Gamma}(\bar{Q}).\tag{5.22}$$

---

* Очевидно, что из неравенства (5.19) вытекает неравенство вида (5.20), но в этом случае константа c_2 в (5.20) зависит и от T_2-T_1.

Из оценки (5.22) легко вытекает первая часть леммы 5.3. Если теперь l, l_0 удовлетворяют условиям (5.13), то ввиду случая 1) следствия 5.2 для функции $\hat{u}$ справедливо неравенство

$$\|\hat{u}\|_{l,\,l_0,\,\hat{Q}} \leqslant c\,\|\nabla\hat{u}\|^{\alpha}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0,\,\hat{Q}}\,\|\hat{u}\|^{(1-\alpha)(1-\beta)}_{2,\,\infty,\,\hat{Q}}\,\|\hat{u}\|^{(1-\alpha)\beta}_{2,\,1,\,\hat{Q}}, \tag{5.23}$$

где $\alpha\in(0,\ 1)$, $\beta\in(0,\ 1)$. Применяя неравенство Юнга, получим при любом $\varepsilon>0$ оценку

$$\|\hat{u}\|_{l,\,l_0,\,\hat{Q}} \leqslant \varepsilon\left[\|\nabla\hat{u}\|_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0,\,\hat{Q}}+\|\hat{u}\|_{2,\,\infty,\,\hat{Q}}\right]+c\varepsilon^{-\lambda}\|\hat{u}\|_{2,1,\hat{Q}}, \tag{5.24}$$

где $\lambda=[1-\beta(1-\alpha)]/(1-\alpha)\beta$. Тогда, используя (5.21), легко получаем оценку (5.19). Аналогичным образом устанавливается и оценка (5.20) в предположении, что показатели l, l_0 удовлетворяют условиям (5.15). Лемма 5.3 доказана.

Замечание 5.1. Очевидно, что условия (5.11) на показатели $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ получаются из условий (5.15) при $\beta=0$. Для того чтобы показатели l, l_0 в (5.15) [в частности, показатели $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ в (5.11)] удовлетворяли неравенствам $l>2$, $l_0>2$ [$\bar{l}>2$, $\bar{l}_0>2$], необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{gathered}\hat{l}>2 \text{ при } \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}>1,\ n\geqslant 2,\ \frac{\alpha}{\hat{l}_0}+\frac{(1-\alpha)\beta}{2}<\frac{1}{2},\quad \alpha,\ \beta\in[0,\ 1]\\ \left[\hat{l}>2 \text{ при } \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}>1,\ n\geqslant 2,\ \frac{\alpha}{\hat{l}_0}<\frac{1}{2},\quad \alpha\in[0,\ 1]\right].\end{gathered} \tag{5.25}$$

Утверждение очевидным образом вытекает из соотношений (5.15), (5.11).

Замечание 5.2. Из леммы 5.3 вытекают, в частности, следующие результаты.

1. Справедливо вложение

$$\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q)\to L^{\bar{l}}(Q),\quad \bar{l}=2+\hat{l}_0-2\frac{\hat{l}_0}{\hat{l}}, \tag{5.26}$$

где $\hat{l}$ и $\hat{l}_0$ определены в (5.6), причем

$$\|u\|_{\bar{l},\,Q}\leqslant c\left(\|u\|_{2,\infty,\,Q}+\|\nabla u\|_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0,\,Q}\right),\quad \forall u\in\overset{\widetilde{0,\Gamma}}{H}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q), \tag{5.27}$$

где $c=c(n,\ \mathbf{q},\ \Omega)$ при $\sum_{i=1}^{n}1/q_i>1$, $c=c(n,\ \mathbf{q},\ \hat{l},\ \hat{l}_0,\ \Omega)$ при $\sum_{i=1}^{n}1/q_i\leqslant 1$. В частности, при $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0$ показатель $\bar{l}$ из (5.26) определяется по формуле $\bar{l}=(n+2)\Big/\sum_{i=1}^{n}1/q_i$.

2. При любом показателе l, удовлетворяющем при каком-нибудь $\beta\in(0,\ 1)$ условию

$$\frac{1}{l}=\frac{(1/2-\beta)(1/\hat{l}-1/2)}{1/2-\beta-1/\hat{l}+1/\hat{l}_0}+\frac{1}{2}, \tag{5.28}$$

и $\forall\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{l,\,Q}\leqslant\varepsilon\|u\|_{\mathcal{B}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q)}+c_1\varepsilon^{-\lambda}\|u\|_{2,1,\,Q},\quad \forall u\in\tilde{H}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q). \tag{5.29}$$

Если же показатель l удовлетворяет условию

$$\frac{1}{l}=\frac{(1-\beta)(1/\hat{l}-1/2)}{1-\beta-2(1/\hat{l}-1/\hat{l}_0)}+\frac{1}{2},\quad \beta\in(0,\ 1), \tag{5.30}$$

то при $\forall\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{l,Q} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q)} + c_2\varepsilon^{-\lambda}\|u\|_{2,Q}, \quad \forall u \in \tilde{H}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q). \tag{5.31}$$

Константы c_1 и c_2 в (5.29) и (5.31) зависят лишь от n, $\hat{l}$, $\hat{l}_0$, β и Ω, а $\lambda > 0$ — только от β. В случае $\Gamma = \partial\Omega \times (T_1, T_2)$ и $\sum_{i=1}^{n} 1/q_i > 1$ константы c_1 и c_2 не зависят от Ω. Заметим еще, что $\bar{l} \geqslant 2\,[l \geqslant 2]$ тогда и только тогда, когда $\hat{l} \geqslant 2$ при $\Sigma 1/q_i > 1$, $n \geqslant 2$ и $\bar{l} > 2\,[l > 2]$ тогда и только тогда, когда $\hat{l} > 2$ при $\Sigma 1/q_i > 1$, $n \geqslant 2$.

Лемма 5.4. *Пусть $Q = \Omega \times [T_1, T_2]$ — цилиндр с ограниченной строго липшицевой областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, лежащей в основании цилиндра Q. Тогда при любых p, p_0 и $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, где $p \geqslant 1$, $p_0 \geqslant 1$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\mathbf{q}_0 = (q_{01}, \ldots, q_{0n})$, $q_i \geqslant 1$, $q_{0i} \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, справедливо вложение*

$$H_{p,\,p_0;\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q) \to L^1(\partial\Omega \times (T_1, T_2)). \tag{5.32}$$

Доказательство. Вложение (5.32) вытекает из следующих известных вложений:

$$H_{p,\,p_0;\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q) \to W_1^{1,0}(Q) \to L^1(\partial\Omega \times (T_1, T_2)).$$

Замечание 5.3. Вместо (5.32) можно было бы получить точное вложение $H_{p,\,p_0;\,\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q)$ в $L^r(\partial\Omega \times (T_1, T_2))$ при некотором $r > 1$. Однако для дальнейших применений в этой работе нам достаточно иметь вложение (5.32).

§ 6. Общие операторные уравнения в банаховом пространстве

В этом параграфе через X и Y обозначаются вещественные сепарабельные банаховы пространства. Предположим, что Y и X рефлексивны и $Y \to X$, причем это вложение не только непрерывное, но и плотное. Пусть X^* и Y^* — сопряженные к X и Y соответственно пространства. Из предыдущих условий вытекает, что $X^* \to Y^*$, причем это вложение также не только непрерывное, но и плотное. Скалярное произведение (сопряжение) между X и X^*, а также между Y и Y^* будем обозначать через $\langle .\,, . \rangle$.

Рассмотрим (вообще говоря, нелинейный) оператор $\mathscr{L} : X \to Y^*$. Оператор $\mathscr{L} : X \to Y^*$ будем называть локально коэрцитивным, если существует такое число $\rho > 0$, что для всех $u \in Y$, $\|u\|_X = \rho$, справедливо неравенство $\langle \mathscr{L}u, u \rangle \geqslant 0$.

Оператор $\mathscr{L} : X \to Y^*$ будем называть коэрцитивным, если

$$\lim_{u \in Y,\, \|u\|_X \to +\infty} \frac{\langle \mathscr{L}u,\ u \rangle}{\|u\|_X} = +\infty. \tag{6.1}$$

Будем говорить, что оператор $\mathscr{L} : X \to Y^*$ имеет полуограниченную вариацию, если для каждого $\rho > 0$ при любых u, $v \in Y$, таких, что $\|u\|_X \leqslant \rho$, $\|v\|_X \leqslant \rho$, справедливо неравенство где $\gamma(\rho, \tau)$ — непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\gamma(\rho, \varepsilon\tau)}{\varepsilon} = 0, \quad \forall \rho \geqslant 0, \quad \forall \tau \geqslant 0, \tag{6.3}$$

а $\|\cdot\|'_X$ — норма, компактная по сравнению с $\|\cdot\|_X$, т. е. такая, что из ограниченной по норме $\|\cdot\|_X$ последовательности $\{u_\nu\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к u по норме $\|\cdot\|'_X$.

Оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ называется монотонным [строго монотонным], если

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v, u - v \rangle \geqslant 0, \ \forall u, v \in Y \ [\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v, u - v \rangle > 0, \\ \forall u, v \in Y, \ u \neq v]. \tag{6.4}$$

Оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ называется равномерно монотонным [сильно монотонным], если при любых $u, v \in Y$

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v, u - v \rangle \geqslant \gamma(\|u - v\|_X) [\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v, u - v \rangle \geqslant \\ \geqslant \delta(\|u - v\|_X) \|u - v\|_X], \tag{6.5}$$

где $\gamma(\rho)$ — непрерывная строго возрастающая на $[0, +\infty)$ функция, равная 0 при $\rho = 0$, а $\delta(\rho)$ — непрерывная неубывающая функция, равная 0 лишь при $\rho = 0$ и такая, что $\delta(\rho) \to +\infty$ при $\rho \to +\infty$.

Очевидно, что для оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$ из сильной монотонности следует равномерная монотонность, из равномерной монотонности — строгая, из строгой монотонности — монотонность, из монотонности — условие полуограниченности вариации. Приведенные выше определения хорошо известны в том частном случае, когда $X = Y$. Далее изучаются операторные уравнения вида $\mathscr{L}u = \mathscr{F}$, где $\mathscr{F} \in Y^*$, и в частности $\mathscr{L}u = 0$. Приведем прежде всего хорошо известную лемму об остром угле (см., например, [22]), которая будет использована при доказательстве разрешимости уравнений $\mathscr{L}u = F$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ — n-мерное векторное пространство. Введем в $\mathscr{P}_n$ какую-нибудь норму $\|v\|$ и некоторое скалярное произведение $v \cdot w$, где $v, w \in \mathscr{P}_n$. Пусть $|v|$ обозначает норму в $\mathscr{P}_n$, порожденную указанным скалярным произведением в $\mathscr{P}_n$. Тогда существуют такие константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что $c_1\|v\| \leqslant |v| \leqslant c_2\|v\|$, $\forall v \in \mathscr{P}_n$. Пусть T — непрерывное преобразование в $\mathscr{P}_n$.

Лемма 6.1 (об остром угле). *Предположим, что существует такое число $\rho > 0$, что $Tv \cdot v \geqslant 0$, $\forall v \in \mathscr{P}_n$, $\|v\| = \rho$. Тогда существует хотя бы один элемент $v \in \mathscr{P}_n$, такой, что $\|v\| \leqslant \rho$ и $Tv = 0$.*

Для того чтобы сформулировать теоремы существования указанных выше уравнений, сделаем некоторые дальнейшие предположения. Предположим, что кроме пространств X и Y задано третье вещественное сепарабельное рефлексивное пространство H, причем выполнено условие:

существует такое множество $\mathfrak{N}$, содержащееся и плотное в каждом из пространств Y, X и H, что $\|u\|_H \leqslant c_1\|u\|_X \leqslant c_2\|u\|_Y$, $\forall u \in \mathfrak{N}$, где константы c_1 и c_2 не зависят от $u \in \mathfrak{N}$. (6.6)

Из условия (6.6) вытекают вложения $H^* \to X^* \to Y^*$. Сопряжение между H и H^* будем обозначать так же, как между X и X^*, т. е. через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Предположим далее, что пространство Y можно отождествить с некоторым подпространством (линеалом) в H, причем $Y \to H$. Пусть заданы операторы $\mathscr{A}: X \to H^*$ и $\mathscr{B}: X \to Y^*$. Предположим, что оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ удовлетворяет условию:

$\mathscr{L} = \mathscr{A} + \mathscr{B}$, $\mathscr{A}: X \to H^*$ ограничен и деминепрерывен,*)
$\mathscr{B}: X \to Y^*$ линеен и непрерывен. (6.7)

Обозначим через V следующее подпространство в X:

$$V = \{u \in X : \mathscr{B}u \in H^*\}. \tag{6.8}$$

Пусть выполнено условие:

сужение оператора $\mathscr{B}: X \to Y^*$ на множество $V \cap Y \subset X$ представляет собой линейный ограниченный оператор из $(V \cap Y) \subset Y$ в X^*. (6.9)

Предположим, наконец, что выполнены условия:

$$\text{множество } V \cap Y \text{ плотно в } X \tag{6.10}$$

и

$$\text{функция } v \to \langle \mathscr{B}v, v \rangle,\ v \in V, \text{ непрерывна по норме } \|\cdot\|_X. \tag{6.11}$$

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* (6.6), (6.7), (6.9)—(6.11). *Предположим также, что оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ локально коэрцитивен и имеет полуограниченную вариацию. Тогда уравнение $\mathscr{L}u = 0$ имеет хотя бы одно решение $u \in V$.*

Доказательство. Очевидно, что существует расширяющаяся последовательность конечномерных подпространств $\mathscr{P}_N$ размерности $N = 1, 2, \ldots$, содержащихся в Y, такая, что $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{P}_N$ плотно в Y и $\bigcup_{N=1}^{\infty} (\mathscr{P}_N \cap V)$ плотно в $Y \cap V$ по норме $\|\cdot\|_Y$. Тогда $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{P}_N$ плотно в X и в H. Введем в каждом $\mathscr{P}_N$ норму $\|u\| \equiv \|u\|_X$ и какое-нибудь скалярное произведение $u \cdot v$, где $u, v \in \mathscr{P}_N$. Пусть $|\cdot|$ — норма в $\mathscr{P}_N$, порожденная этим скалярным произведением. Рассмотрим в $\mathscr{P}_N$ преобразование $\mathscr{L}_N$, определяемое по формуле $\mathscr{L}_N u = \mathscr{L}u|_{\mathscr{P}_N}$, $u \in \mathscr{P}_N$, где $\mathscr{L}u|_{\mathscr{P}_N}$ — сужение функционала $\mathscr{L}u$ на подпространство $\mathscr{P}_N$. Очевидно, что $\mathscr{L}_N u \cdot v = \langle \mathscr{L}u, v \rangle$ при всех $u, v \in \mathscr{P}_N$. Из условия (6.7) следует, что преобразование $\mathscr{P}_N$ непрерывно. Тогда из условия локальной коэрцитивности оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$ и леммы 6.1 следует, что при некотором $\rho > 0$ существует хотя бы один элемент $u_N \in \mathscr{P}_N \subset Y \subset X$, такой, что

$$\|u_N\|_X \leqslant \rho, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{6.12}$$

и

$$\langle \mathscr{L}u_N, \xi \rangle = 0,\ \forall \xi \in \mathscr{P}_N,\ N = 1, 2, \ldots \tag{6.13}$$

Рассмотрим последовательность $\{u_N\}$, $u_N \in \mathscr{P}_N \subset Y \subset X$, $N = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую условиям (6.12) и (6.13). Ввиду рефлексивности X из $\{u_N\}$ можно извлечь некоторую подпоследовательность, которая сходится

*) Напомним, что оператор $T: B_1 \to B_2$ (где B_1, B_2 — банаховы пространства) называется ограниченным, если всякое ограниченное в B_1 множество отображается этим оператором в множество, ограниченное в B_2. Оператор $T: B_1 \to B_2$ называется деминепрерывным, если он является непрерывным из B_1 с сильной топологией в B_2 со слабой топологией.

слабо в X к некоторому элементу $u \in X$. Учитывая рефлексивность пространства H^*, ограниченность оператора $\mathscr{A}: X \to H^*$ и непрерывность оператора $\mathscr{B}: X \to Y^*$, заключаем, что из такой подпоследовательности можно извлечь новую подпоследовательность (за которой мы сохраним обозначение исходной последовательности), такую, что

$$\mathscr{A}u_N \to f \text{ слабо в } H^*, \ \mathscr{B}u_N \to \mathscr{B}u \text{ слабо в } Y^*, \tag{6.14}$$

где f — некоторый элемент из H^*. Из (6.13) и (6.14) следует, очевидно, что

$$\langle f, \xi \rangle + \langle \mathscr{B}u, \xi \rangle = 0, \ \forall \xi \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{P}_N. \tag{6.15}$$

Ввиду плотности $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathscr{P}_N$ в Y и в H (6.15) дает возможность отождествить $\mathscr{B}u$ с элементом $-f \in H^*$. Поэтому $u \in V$ и

$$\langle f, \xi \rangle + \langle Bu, \xi \rangle = 0, \ \forall \xi \in H, \ \forall \xi \in X. \tag{6.16}$$

Воспользуемся теперь условием полуограниченности вариации оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$. Зафиксируем какой-нибудь номер N, и пусть $\xi \in \mathscr{P}_N \cap V$. Тогда (см. (6.2))

$$\langle \mathscr{L}u_N - \mathscr{L}\xi, u_N - \xi \rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u^N - \xi\|'_X), \tag{6.17}$$

где $\rho = \sup\limits_{N=1, 2, \dots} \|u^N\|_X + \|\xi\|_X$. Вычитая из (6.17) равенство $\langle \mathscr{L}u_N, u_N - \xi \rangle = 0$, вытекающее из (6.13), получим:

$$-\langle \mathscr{A}\xi, u_N - \xi \rangle - \langle \mathscr{B}\xi, u_N - \xi \rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u^N - \xi\|'_X), \ \forall \xi \in V \cap \mathscr{P}_N. \tag{6.18}$$

Учитывая, что ввиду (6.9) $\mathscr{B}\xi \in X^*$ при $\forall \xi \in \mathscr{P}_N \cap V$, а также слабую сходимость $u_N \to u$ в X, свойства функции γ и компактность нормы $\|\cdot\|'_X$ относительно $\|\cdot\|_X$, выведем из (6.18), что при всех $\xi \in \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} (\mathscr{P}_N \cap V)$

$$-\langle \mathscr{A}\xi, u - \xi \rangle - \langle \mathscr{B}\xi, u - \xi \rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u - \xi\|'_X). \tag{6.19}$$

Учитывая плотность $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} (\mathscr{P}_N \cap V)$ в $(Y \cap V) \subset Y$, вложения $Y \to X$, $H^* \to X^*$, условие (6.9) и свойства функции γ, легко доказать, что неравенство (6.19) справедливо и при всех $\xi \in Y \cap V$. Складывая тогда (6.19) с равенством вида (6.16), заменив в последнем ξ на $u - \xi$, где $\xi \in Y \cap V$, получим, что при $\forall \xi \in Y \cap V$

$$\langle f - \mathscr{A}\xi, u - \xi \rangle + \langle \mathscr{B}(u - \xi), u - \xi \rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u - \xi\|'_X). \tag{6.20}$$

В силу условий (6.10), (6.11) для найденного элемента $u \in V$ и фиксированного элемента $\xi \in V$ существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in Y \cap V$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $\xi_n \to \xi$ в X и $\langle \mathscr{B}(u - \xi_n), u - \xi_n \rangle \to \langle \mathscr{B}(u - \xi), u - \xi \rangle$. Отсюда и из (6.20) с учетом свойств оператора $\mathscr{A}: X \to H^*$, функции γ и нормы $\|\cdot\|'_X$ легко следует, что неравенство (6.20) справедливо и при $\forall \xi \in V$, причем в качестве ρ в правой части (6.20) можно взять $\rho = \sup\limits_{N=1, 2, \dots} \|u_N\|_X + \sup\limits_{n=1, 2, \dots} \|\xi_n\|_X$, где $\{\xi_n\}$ сходится к ξ в X. Таким образом, неравенство (6.20) справедливо при $\forall \xi \in V \cup Y$. Положим тогда в (6.20) $\xi = u - \varepsilon\eta$, где $\varepsilon \in (0, 1)$, $\eta \in Y \cap V$. Очевидно, что при этом число ρ в (6.20) не зависит от ε. Деля получившееся неравенство на ε, получим:

$$\langle f - \mathcal{A}(u - \varepsilon\eta), \eta\rangle + \varepsilon\langle\mathcal{B}\eta, \eta\rangle \geqslant -\frac{\gamma(\rho, \varepsilon\|\eta\|_X)}{\varepsilon}. \qquad (6.21)$$

Устремляя ε в (6.21) к 0 с учетом деминепрерывности оператора $\mathcal{A}$ и равенства (6.3), получим: $\langle f - \mathcal{A}u, \eta\rangle \geqslant 0$, $\forall\eta \in Y \cap V$. Заменяя η на $-\eta$, получим противоположное неравенство $\langle f - \mathcal{A}u, \eta\rangle \leqslant 0$, $\forall\eta \in Y \cap V$. Таким образом, справедливо равенство $\langle f - \mathcal{A}u, \eta\rangle = 0$, $\forall\eta \in Y \cap V$, из которого ввиду плотности $Y \cap V$ в X следует, что $\mathcal{A}u = f$. Тогда из (6.16) вытекает, что $\mathcal{A}u = f$. Теорема 6.1 доказана.

Следствие 6.1. *Пусть при выполнении всех прочих условий теоремы* 6.1 *условие локальной коэрцитивности оператора* $\mathcal{L}: X \to Y^*$ *заменено условием локальной коэрцитивности оператора* $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}: X \to Y^*$, *где* $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}u = \mathcal{L}u - \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in H^*$. *Тогда уравнение* $\mathcal{L}u = \mathcal{F}$ *при выбранном* $\mathcal{F} \in H^*$ *имеет хотя бы одно решение* $u \in V$.

Доказательство. Уравнение $\mathcal{L}u = \mathcal{F}$ равносильно уравнению $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}u = 0$, где $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}} + \mathcal{B}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}u = \mathcal{A}u - \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in H^*$. Поскольку для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}: X \to Y^*$ выполнены все условия теоремы 6.1, то из последней и следует результат следствия 6.1.

Следствие 6.2. *Пусть при выполнении всех прочих условий теоремы* 6.1 *условие локальной коэрцитивности оператора* $\mathcal{L}: X \to Y^*$ *заменено условием коэрцитивности этого оператора. Тогда при* $\forall\mathcal{F} \in H^*$ *уравнение* $\mathcal{L}u = \mathcal{F}$ *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{F} \in H^*$. Ввиду (6.1) для $\forall u \in Y$ с достаточно большой нормой $\|u\|_X$ будет выполнено неравенство $\langle\mathcal{L}_{\mathcal{F}}u, u\rangle \equiv \langle\mathcal{L}u, u\rangle - \langle\mathcal{F}, u\rangle \geqslant 0$, т. е. оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}: X \to Y^*$ локально коэрцитивен. Тогда из следствия 6.1 и вытекает результат следствия 6.2.

Теорема 6.2. *Пусть* Y, X *и* H — *такие же пространства, что и в теореме* 6.1. *Пусть оператор* $\mathcal{L}: X \to Y^*$ *удовлетворяет условиям:* $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{A}: X \to H^*$, $\mathcal{B}: X \to Y^*$, *где* $\mathcal{A}: X \to H^*$ *деминепрерывен и слабо компактен,**) *а* $\mathcal{B}: X \to Y^*$ *линеен и непрерывен.*

Предположим также, что оператор $\mathcal{L}: X \to Y^*$ *локально коэрцитивен. Тогда уравнение* $\mathcal{L}u = \mathcal{F}$ *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 6.2 используем ту же схему, что и при доказательстве теоремы 6.1. Существование приближенных решений u^N уравнения $\mathcal{L}u = 0$, определяемых тождествами (6.13), устанавливается точно так же, как в теореме 6.1, поскольку в этой части теоремы 6.1 используются лишь деминепрерывность и локальная коэрцитивность оператора $\mathcal{L}: X \to Y^*$. При этом устанавливается оценка (6.12), из которой вытекает существование подпоследовательности $\{u^N\}$, слабо сходящейся к некоторому элементу $u \in V$. В силу слабой компактности оператора $\mathcal{A}: X \to H^*$ из указанной последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{u^\nu\}$, для которой:

$$\mathcal{A}u^\nu \to \mathcal{A}u \text{ слабо в } H^*, \quad \mathcal{B}u^\nu \to \mathcal{B}u \text{ слабо в } Y^*. \qquad (6.22)$$

---

*) Слабая компактность оператора $\mathcal{A}: X \to H^*$ означает, что из слабой сходимости $\{u_n\}$ к u в X вытекает существование такой подпоследовательности $\{u_\nu\}$, для которой $\{\mathcal{A}u_\nu\} \to \mathcal{A}u$ слабо в H^*.

Тогда из (6.13) и (6.22) следует, что при $\forall \xi \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{P}_N$ для предельного элемента u справедливо равенство $\langle \mathscr{A}u, \xi\rangle + \langle \mathscr{B}u, \xi\rangle = 0$. Ввиду плотности $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{P}_N$ в Y и H последнее равенство справедливо и при $\forall \xi \in H$, т. е. $\mathscr{L}u = 0$. Теорема 6.2 доказана.

Замечание 6.1. По поводу разрешимости уравнения $\mathscr{L}u = \mathscr{F}$ заметим, что из теоремы 6.2 вытекают следствия, вполне аналогичные следствиям 6.1 и 6.2.

Теорема 6.3. *Пусть Y, X и H — такие же пространства, что и в теореме* 6.1, *и пусть оператор* $\mathscr{L} = \mathscr{A} + \mathscr{B}$, $\mathscr{A} : X \to H^* \subset Y^*$, $\mathscr{B} : X \to Y^*$, *удовлетворяет условию:*

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v,\ u - v\rangle > 0 \text{ при любых } u,\ v \in V,\ u \neq v. \tag{6.23}$$

Тогда при $\forall \mathscr{F} \in H^*$ уравнение $\mathscr{L}u = \mathscr{F}$ имеет не более одного решения в X. Условие (6.23) *заведомо выполнено, если справедливо условие: оператор $\mathscr{A} : X \to (H^* \subset X^*)$ строго монотонен, а оператор $\mathscr{B} : X \to Y^*$*

$$\text{линеен и такой, что } \langle \mathscr{B}v,\ v\rangle \geqslant 0,\ \forall v \in V. \tag{6.24}$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $u \in X$ — решение уравнения $\mathscr{L}u = \mathscr{F}$ при некотором $\mathscr{F} \in H^*$, то $\mathscr{B}u \in H^*$ (и, следовательно, $\mathscr{L}u \in H^*$), поскольку в этом случае $\mathscr{B}u = \mathscr{F} - \mathscr{A}u$, где $\mathscr{A}u \in H^*$. Пусть u^1, u^2 — какие-нибудь решения уравнения $\mathscr{L}u = \mathscr{F}$ при фиксированном $\mathscr{F} \in H^*$, причем $u^1 \neq u^2$. Тогда из (6.23) следует, что $\langle \mathscr{L}u^1 - \mathscr{L}u^2,\ u^1 - u^2\rangle > 0$. Однако такое неравенство невозможно, так как $\mathscr{L}u^1 = \mathscr{L}u^2 = \mathscr{F}$ и, следовательно, $\langle \mathscr{L}u^1 - \mathscr{L}u^2,\ u^1 - u^2\rangle = 0$. Заметим, наконец, что из условия (6.24) очевидным образом вытекает справедливость условия (6.23). Теорема 6.3 доказана.

Теорема 6.4. *Пусть Y, X и H — такие же пространства, что и в теореме* 6.1. *Пусть оператор $\mathscr{L} : X \to Y^*$ имеет вид $\mathscr{L} = \mathscr{A} + \mathscr{B}$, где $\mathscr{A} : X \to H^*$ деминепрерывен, а $\mathscr{B} : X \to Y^*$ линеен. Предположим также, что выполнены условия* (6.10) *и* (6.11). *Пусть, наконец, оператор $\mathscr{L} : X \to Y^*$ равномерно монотонен. Тогда при $\forall \mathscr{F} \in H^*$ уравнение $\mathscr{L}u = \mathscr{F}$ имеет не более одного решения в X.*

Доказательство. Из равномерной монотонности оператора $\mathscr{L} : X \to Y^*$ и линейности оператора $\mathscr{B} : X \to Y^*$ следует, что при любых $u, v \in Y$

$$\langle \mathscr{A}u - \mathscr{A}v,\ u - v\rangle + \langle \mathscr{B}(u - v),\ u - v\rangle \geqslant \tilde{\gamma}(\|u - v\|_X), \tag{6.25}$$

где $\tilde{\gamma}(\rho)$ — такая же функция, как функция $\gamma(\rho)$ в (6.5). Пусть u и v — произвольные элементы множества V. Ввиду (6.10) существуют последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, u_n, $v_n \in V \cap Y$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящиеся соответственно к u и v в X. Учитывая (6.25), заключаем, что при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\langle \mathscr{A}u_n - \mathscr{A}v_n,\ u_n - v_n\rangle + \langle \mathscr{B}(u_n - v_n),\ v_n - v_n\rangle \geqslant \tilde{\gamma}(\|u_n - v_n\|_X). \tag{6.26}$$

Тогда, используя деминепрерывность оператора $\mathscr{A} : X \to H^*$, вложение $H^* \to X^*$, условие (6.11) и свойства функции $\tilde{\gamma}$, получим, переходя к пределу в (6.25), что оценка (6.25) справедлива и при любых u, $v \in V$. Поскольку из такого условия вытекает выполняемость условия (6.23), то результат теоремы 6.4 вытекает из теоремы 6.3. Теорема 6.4 доказана.

Заметим теперь, что справедливо следующее очевидное утверждение.

Лемма 6.2. *Если оператор $\mathcal{L}: X \to Y^*$ сильно монотонен, то он коэрцитивен.*

Теорема 6.5. *Пусть Y, X, и H — такие же пространства, что и в теореме 6.1. Пусть выполнены условия (6.6), (6.7), (6.9) — (6.11). Предположим, что оператор $\mathcal{L}: X \to Y^*$ сильно монотонен. Тогда сужение $\hat{\mathcal{L}}: (V \subset X) \to H^*$ оператора $\mathcal{L}: X \to Y^*$ на множество V есть биекция, причем обратный оператор $\hat{\mathcal{L}}^{-1}: (H^* \subset X^*) \to (V \subset X)$ непрерывен.*

Доказательство. Учитывая лемму 6.2, заключаем, что из условий теоремы 6.5 вытекает, очевидно, выполнимость всех условий следствия 6.2 и теоремы 6.4. Поэтому отображение $\hat{\mathcal{L}}: (V \subset X) \to H^*$ есть биекция. Докажем, что оператор $\hat{\mathcal{L}}^{-1}: (H^* \subset X^*) \to (V \subset X)$ непрерывен. Из условий сильной монотонности оператора $\mathcal{L}: X \to Y^*$, деминепрерывности оператора $\mathcal{A}: X \to H^*$ и условий (6.10), (6.11) вытекает условие

$$\langle \mathcal{L}u - \mathcal{L}v,\ u - v\rangle \geqslant \delta(\|u - v\|)\|u - v\|_X,\quad u,\ v \in V. \tag{6.27}$$

Действительно, для заданных элементов u, $v \in V$ ввиду (6.10) найдутся последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, u_n, $v_n \in V \cap Y$, сходящиеся соответственно к u и v в X. При этом в силу (6.11) и линейности оператора $\mathcal{B}: X \to Y^*$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{B}(u_n - v_n),\ u_n - v_n\rangle = \langle \mathcal{B}(u - v),\ u - v\rangle. \tag{6.28}$$

Поскольку ввиду сильной монотонности оператора $\mathcal{L}: X \to Y^*$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{L}u_n - \mathcal{L}v_n,\ u_n - v_n\rangle = \langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}v_n,\ u_n - v_n\rangle + \langle \mathcal{B}(u_n - v_n),\ u_n - v_n\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \delta(\|u_n - v_n\|_X)\|u_n - v_n\|_X, \tag{6.29}$$

то, переходя в (6.29) к пределу при $n \to \infty$, получим с учетом деминепрерывности оператора $\mathcal{A}: X \to H^*$, вложения $H^* \to X^*$, равенства (6.28) и свойств функции $\delta(\rho)$, что имеет место неравенство (6.27). Из (6.27 с учетом того, что $H^* \to X^*$, легко следует неравенство

$$\delta(\|u - v\|_X) \leqslant \|\mathcal{L}u - \mathcal{L}v\|_{X^*},\quad u,\ v \in V,$$

из которого, очевидно, и следует непрерывность оператора $\hat{\mathcal{L}}^{-1}: (H^* \subset X^*) \to$ $\to (V \subset X)$. Теорема 6.5 доказана.

§ 7. Одно специальное пространство функций от скалярного аргумента со значениями в банаховом пространстве

Пусть $I \equiv [a, b]$ — какой-нибудь компактный промежуток вещественной оси $\mathbb{R}$, а Z — некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Z$. Множество функций, определенных на I со значениями в Z, обозначим через $\{I \to Z\}$. Далее мы используем пространства $C^m(I;\ Z)$, $m = 0, 1, \ldots$, и $L^p(I;\ Z)$, $p > 1$, понимаемые в общепринято смысле (см., например, [16]).

Пусть $u \in \{I \to Z\}$. Обозначим через $T_h u$ функцию из $\{I \to Z\}$, определенную по любой из формул

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i})\ T_h u(t) = \bar{u}(t + h),\\ &(\mathrm{ii})\ T_h u(t) = \tilde{u}(t + h),\\ &(\mathrm{iii})\ T_h u(t) = \hat{u}(t + h), \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $h \in \mathbb{R}$, $t \in I$, а функции $\bar{u}$, $\tilde{u}$, $\tilde{\tilde{u}}$ определены по формулам

$$\text{(i) } \bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in I, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus I; \end{cases}$$

$$\text{(ii) } \tilde{u}(t) = \begin{cases} u(a+\tau), & t = a - \tau, \ 0 \leqslant \tau \leqslant d \equiv (b-a), \\ u(t), & t \in [a, b], \\ u(b-\tau), & t = b + \tau, \ 0 \leqslant \tau \leqslant d, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [a-d, b+d]; \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\text{(iii) } \tilde{\tilde{u}}(t) = \begin{cases} -u(a+\tau), & t = a - \tau, \ 0 \leqslant \tau \leqslant d, \\ u(t), & t \in [a, b], \\ u(b-\tau), & t = b + \tau, \ 0 \leqslant \tau \leqslant d, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [a-d, b+d]. \end{cases}$$

Лемма 7.1. *Если* $u \in L^p(I; Z)$, $1 \leqslant p < +\infty$, *то* $T_h u \in L^p(I; Z)$ *и* $T_h u \to u$ *в* $L^p(I; Z)$.

Рассмотрим теперь усреднение $S_h u \in \{I \to Z\}$ функции $u \in L^1(I; Z)$, определенное по любой из формул

$$\text{(i) } (\bar{S}_h u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-\tau) \bar{u}(\tau) \, d\tau,$$

$$\text{(ii) } (\tilde{S}_h u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-\tau) \tilde{u}(\tau) \, d\tau, \tag{7.3}$$

$$\text{(iii) } (\tilde{\tilde{S}}_h u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-\tau) \tilde{\tilde{u}}(\tau) \, d\tau,$$

где функции $\bar{u}$, $\tilde{u}$, $\tilde{\tilde{u}}$ определены по формулам (7.2), а $\omega_h(\eta)$ — бесконечно дифференцируемое нормированное ядро усреднения. Пусть для определенности

$$\omega_h(\eta) = \frac{1}{\varkappa h} \omega\left(\frac{|\eta|}{h}\right), \quad \omega(\rho) = \begin{cases} e^{\rho^2/(\rho^2-1)}, & \rho \in [0, 1), \\ 0, & \rho \geqslant 1, \end{cases} \qquad \varkappa = \int_{-1}^{1} e^{\rho^2/(\rho^2-1)} d\rho. \tag{7.4}$$

Очевидно, что $S_h u \in C^\infty(I; Z) \subset L^p(I; Z)$, $p \in [1, +\infty]$. Справедливы следующие известные результаты.

Лемма 7.2. *Если* $u \in L^p(I; Z)$, $1 \leqslant p < +\infty$, *то*

$$\lim_{h \to 0} \| S_h u - u \|_{L^p(I; Z)} = 0.$$

Лемма 7.3. *Если* $u \in C(I; Z)$, *то* $\lim\limits_{h \to 0} \| \tilde{S}_h u - u \|_{C(I; Z)} = 0$.

Напомним теперь некоторые факты, связанные с понятием распределения на $I \equiv [a, b]$ со значениями в банаховом пространстве Z. Это понятие введено Л. Шварцем ([38], см. также [16], с. 166—170). Обозначим через $\mathscr{D}^*(I; Z)$ пространство всех непрерывных линейных отображений пространства $\mathscr{D}(I)$ (т. е. множества $C_0^\infty(I)$, снабженного топологией Л. Шварца) в пространство Z, рассматриваемое со слабой топологией. Элементы f пространства $\mathscr{D}^*(I; Z)$ и называются распределениями на I со значениями в Z. Введем на множестве $\mathscr{D}^*(I; Z)$ топологию, превратив $\mathscr{D}^*(I; Z)$ в локально выпуклое пространство при помощи семейства полунорм

$$p_{\varphi, \mathscr{F}}(f) = |(\mathscr{F}, f(\varphi))|, \quad \varphi \in \mathscr{D}(I), \quad \mathscr{F} \in Z^*, \quad f \in \mathscr{D}^*(I; Z), \tag{7.5}$$

где $(.\,,.)$ — скалярное произведение между Z и Z^*. Тогда для сходимости последовательности $\{f_n\}$ к f в $\mathscr{D}^*(I;\ Z)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}(F,\ f_n(\varphi))=(F,\ f(\varphi))$ при $\forall\varphi\in\mathscr{D}(I)$ и $\forall F\in Z^*$.

Если некоторая функция $u\in\{I\to Z\}$ локально интегрируема по Бохнеру на I, то ей можно сопоставить некоторое распределение f_u на I со значениями в Z по правилу $u\to f_u$, где

$$f_u(\varphi)=\int\limits_I u(t)\,\varphi(t)\,dt,\quad \varphi\in\mathscr{D}(I), \tag{7.6}$$

причем интеграл в (7.6) понимается как интеграл Бохнера. Заметим, что соответствие $u\to f_u$ является взаимно однозначным (при обычном соглашении, что эквивалентные локально интегрируемые по Бохнеру функции отождествляются). Поэтому множество $L^1_{\text{loc}}(I;\ Z)$ можно отождествить с некоторым подпространством в $\mathscr{D}^*(I;\ Z)$.

Напомним, что для каждого распределения $f\in\mathscr{D}^*(I;\ Z)$ производная $f'\in\mathscr{D}^*(I;\ Z)$ определяется по формуле

$$f'(\varphi)=-f(\varphi'),\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(I). \tag{7.7}$$

При этом отображение $f\to f'$ линейно и непрерывно в $\mathscr{D}^*(I;\ Z)$. Вспоминая, что $I=[a,\ b]$, обозначим через $\tilde{I}$ промежуток $\tilde{I}\equiv[\tilde{a},\ \tilde{b}]$, где $\tilde{a}=a-d$, $\tilde{b}=b+d$, $d=b-a$.

Лемма 7.4. *Если функция* $u\in L^1(I;\ Z)$, *рассматриваемая как элемент* $\mathscr{D}^*(I;\ Z)$, *имеет производную* $u'\in L^1(I;\ Z)$, *то функция* $\tilde{u}$, *определенная на* $\tilde{I}$ *по формуле* (ii) *в* (7.2), *принадлежит* $L^1(\tilde{I};\ Z)$, *а производная* $(\tilde{u})'$ *от функции* $\tilde{u}$, *рассматриваемой как элемент* $\mathscr{D}^*(\tilde{I};\ Z)$, *принадлежит* $L^1(\tilde{I};\ Z)$. *При этом* $(\tilde{u})'$ *совпадает* (*в смысле равенства элементов в* $\mathscr{D}^*(\tilde{I};\ Z)$) *с расширением* $\widetilde{\widetilde{u'}}$ *на* $\tilde{I}$ *производной* $u'\in L^1(I;\ Z)$, *определенным по формуле* (iii) *в* (7.2).

Заметим, что расширения $(\tilde{u})'$ и $\widetilde{\widetilde{u'}}$, рассматриваемые в лемме 7.4, совпадают и как элементы пространства $L^1(\tilde{I};\ Z)$.

Пусть B_0 — некоторое рефлексивное банахово пространство, а $l_k: G\subset B_0\to B_k$ — некоторые линейные операторы, определенные на плотном в B_0 подпространстве (линеале) G со значениями в рефлексивных банаховых пространствах B_k, $k=1,\ldots,N$. Предположим, что операторы l_k, $k=1,\ldots,N$, допускают замыкание. Зададим на G норму

$$\|u\|_B=\sum_{k=0}^{N}\|l_k u\|_{B_k}, \tag{7.8}$$

где $l_0u\equiv u$ для $\forall u\in G$. Обозначим через B замыкание по норме (7.8). Очевидно, что B — банахово пространство. Из условий, наложенных на операторы l_k, $k=1,\ldots,N$, следует, что пространство B можно отождествить с некоторым подпространством в B_0, поскольку из сходимостей $u_n\to u$, $\tilde{u}_n\to u$ в B_0 и $l_ku_n\to v_k$, $l_k\tilde{u}_n\to\tilde{v}_k$ в B_k, $k=1,\ldots,N$, где $u_n,\ \tilde{u}_n\in\overline{G}$, $n=1,\ 2,\ldots$, следует, что $v_k=\tilde{v}_k$, $k=1,\ldots,N$. Операторы l_k, $k=1,\ldots,N$, можно расширить на все B. Расширенные операторы $l_k: B\to B_k$, $k=1,\ldots,N$, рассматриваемые как операторы, действующие из банахова пространства B в банаховы пространства B_k, очевидно, непрерывны.

Пусть $\mathbb{H}$ — некоторое гильбертово пространство. Предположим еще, что существует такое банахово пространство $\hat{B}$, что $\hat{B}\to B\to B_0\to\mathbb{H}\to B_0^*\to$

$\to B^* \to \hat{B}^*$ и $\hat{B} \to B_k \to \mathbb{H} \to B_k^* \to B^\kappa$, $k=1, \ldots, N$, причем эти вложения не только непрерывные, но и плотные. Скалярные произведения между $\hat{B}$ и $\hat{B}^*$, а также между B_0 и B_0^*, B и B^*, B_k и B_k^*, $k=1, \ldots, N$, обозначим одинаково через $(.,.)$. Легко видеть, что пространство B рефлексивно и что каждый линейный в пространстве B функционал F можно задать формулой

$$(F, \eta)=(F_0, \eta)+\sum_{k=1}^{N}(F_k, l_k\eta), \quad \forall \eta \in B, \tag{7.9}$$

где $F_0 \subset B_0^*$, $F_k \in B_k^*$, $k=1, \ldots, N$, причем F_0 и F_k можно выбрать так, что

$$\|F\|_{B^*}=\sup\left(\|F_0\|_{B_0^*}, \|F_1\|_{B_1^*}, \ldots, \|F_N\|_{B_N^*}\right). \tag{7.10}$$

С другой стороны, при любых $F_0 \in B_0^*, \ldots, F_k \in B_k^*$ правая часть в (7.9) определяет некоторый линейный в пространстве B функционал, норма которого не превосходит величины, стоящей в правой части (7.10).*) Равенство (7.9) равносильно равенству

$$F=F_0+\sum_{k=1}^{N} l_k^* F_k, \tag{7.11}$$

понимаемому в смысле равенства элементов в пространстве B^*, причем $l_k^* F_k$, $k=1, \ldots, N$, определяются по формуле

$$(l_k^* F_k, \eta) \equiv (F_k, l_k\eta), \quad \eta \in B, \ k=1, \ldots, N. \tag{7.12}$$

Очевидно, что $F_0 \in B^*$, $l_k^* F_k \in B^*$, $k=1, \ldots, N$, поскольку

$$B_0^* \to B^* \text{ и } \sup_{\|\eta\|_B=1} |(F_k, l_k\eta)| \leqslant \|F_k\|_{B_k^*} \|l_k\eta\|_{B_k} \leqslant \|F_k\|_{B_k^*}, \ k=1, \ldots, N.$$

Обозначим через U множество всех функций из $\{I \to B\}$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_U=\sum_{k=0}^{N}\|l_k u\|_{L^{p_k}(I;\, B_k)}, \tag{7.13}$$

где $p_k \in (1, +\infty)$, $k=0, 1, \ldots, N$. Легко проверяется полнота пространства U. Из оценки

$$\int_I \|u\|_B\, dt=\int_I \sum_{k=0}^{N}\|l_k u\|_{B_k} dt \leqslant c \sum_{k=0}^{N}\|l_k u\|_{L^{p_k}(I;\, B_k)}=c\|u\|_U \tag{7.14}$$

вытекает вложение $U \to L^1(I;\, B)$, а следовательно, и вложение $U \to \to L^1(I;\, B^*)$.

Рассматривая отображение π: $U \to L^{p_0}(I;\, B_0) \times \ldots \times L^{p_N}(I;\, B_N)$, определяемое формулой $\pi(u)=(l_0 u, l_1 u, \ldots, l_N u)$, $u \in U$, и используя вид линейного функционала в пространстве $L^p(I;\, Z)$, устанавливаем, что каждый линейный в пространстве U функционал $\mathscr{F}$ можно представить в виде

$$\langle \mathscr{F}, \eta\rangle=\int_I\left[(\mathscr{F}_0, \eta)+\sum_{k=1}^{N}(\mathscr{F}_k, l_k\eta)\right] dt, \quad \eta \in U, \tag{7.15}$$

---

*) Доказательство аналогичных фактов проведено ниже в связи с утверждениями леммы 5.2.1.

где $\mathscr{F}_0 \in L^{p_0}(I;\ B_0^*)$, $\mathscr{F}_k \in L^{p_k}(I;\ B_k^*)$, $k=1, \ldots, N$, причем $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_k$ можно выбрать так, что

$$\|\mathscr{F}\|_{U^*} = \sup\left\{\|\mathscr{F}_0\|_{L^{p_0'}(I;\ B_0^*)}, \ldots, \|\mathscr{F}_N\|_{L^{p_N'}(I;\ B_N^*)}\right\}. \tag{7.16}$$

Очевидно также, что при любых $\mathscr{F}_0 \in L^{p_0'}(I;\ B_0^*), \ldots, \mathscr{F}_N \in L^{p_N'}(I;\ B_N^*)$ интеграл из правой части (7.15) представляет собой линейный в пространстве U функционал с нормой, не превосходящей величины, стоящей в правой части (7.16). Из вышесказанного следует, что $\langle\mathscr{F},\ \eta\rangle$ можно записать также в виде

$$\langle\mathscr{F},\ \eta\rangle = \int_I (\mathscr{F}(\eta),\ \eta(t))\,dt, \quad \eta \in U, \tag{7.17}$$

где $\mathscr{F}(t) = \mathscr{F}_0(t) + \sum_{k=1}^{N} l_k^*\mathscr{F}_k(t)$, причем $\mathscr{F}_0(t)$ и $l_k^*\mathscr{F}_k(t)$, $k=1, \ldots, N$, принадлежат B^* при п. в. $t \in I$ (см. (7.11), (7.12)). Обозначим через $l_k^*\mathscr{F}_k$, $k=1, \ldots, N$, линейные функционалы в U, определенные по формуле

$$\langle l_k^*\mathscr{F}_k,\ \eta\rangle \equiv \int_I (l_k^*\mathscr{F}_k(t),\ \eta(t))\,dt = \int_I (\mathscr{F}_k(t),\ (l_k\eta)(t))\,dt, \quad \eta \in U. \tag{7.18}$$

Заметим, что из оценки

$$|\langle l_k^*\mathscr{F}_k,\ \eta\rangle| \leqslant \|\mathscr{F}_k\|_{L^{p_k'}(I;\ B_k^*)} \|l_k\eta\|_{L^{p_k}(I;\ B_k)}, \quad k=1, \ldots, N, \tag{7.19}$$

следует, что формула (7.18) действительно определяет линейные функционалы в U. Тогда $\forall \mathscr{F} \in U^*$ можно записать в виде

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 + \sum_{k=1}^{N} l_k^*\mathscr{F}_k. \tag{7.20}$$

Ввиду очевидной оценки

$$\int_I \|\mathscr{F}(t)\|_{B^*}\,dt \leqslant c\,\|\mathscr{F}\|_{U^*}, \quad \mathscr{F} \in U^*, \tag{7.21}$$

справедливо вложение $U^* \to L^1(I;\ B^*)$.

Используя лемму 7.2 и вид нормы в пространствах U и U^*, устанавливаем следующее предложение.

Лемма 7.4. *Для любого* $u \in U$ *усреднение* $\tilde{S}_h u$ *(см. формулу* (ii) *в* (7.3)) *принадлежит* U *и стремится к* u *в* U *при* $h \to 0$. *Для любого* $\mathscr{F} \in U^*$ *усреднение* $\tilde{\tilde{S}}_h\mathscr{F}$ *(см. формулу* (iii) *в* (7.3)) *принадлежит* U^* *и стремится к* $\mathscr{F}$ *в* U^* *при* $h \to 0$.

Выделим теперь в пространстве U одно важное подпространство. Обозначим через $\mathscr{W}$ следующее подпространство (линеал),

$$\mathscr{W} = \{u \in U : u' \in U^*\}, \tag{7.22}$$

где через u' обозначена производная от u в смысле распределений на I со значениями в банаховом пространстве B^* (очевидно, что ввиду вложения $U \to L^1(I;\ B^*)$ каждый элемент $u \in U$ можно отождествить с некоторым элементом из $D^*(I;\ B^*)$). Легко видеть, что относительно нормы

$$\|u\|_{\mathscr{W}} \equiv \|u\|_U + \|u'\|_{U^*} \tag{7.23}$$

пространство $\mathcal{W}$ является банаховым пространством. Ввиду леммы 7.4 справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.5. *Для любого $u \in \mathcal{W}$ усреднение $\tilde{S}_h u$ (см. формулу* (ii) *в* (7.3)) *принадлежит $\mathcal{W}$ и стремится к u в $\mathcal{W}$ при $h \to 0$.*

В дальнейшем для упрощения записей будем употреблять обозначение

$$u_h \equiv \tilde{S}_h u. \qquad (7.24)$$

Следствие 7.1. *Множество $C^\infty(I;\ B)$ плотно в $\mathcal{W}$.*

Доказательство. Поскольку $u_h \in C^\infty(I;\ B)$, то плотность $C^\infty(I;\ B)$ в $\mathcal{W}$ вытекает из леммы 7.5.

Лемма 7.6. $\mathcal{W} \to C(I;\ \mathbb{H})$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathcal{W} \to C(I;\ B^*)$. Пусть $u \in \mathcal{W}$. Тогда $u' \in U^* \to L^1(I;\ B^*)$. Положим $v = \int\limits_a^t u'(\tau)\,d\tau$. Очевидно, что функция $v \in C(I;B^*)$ и, рассматриваемая как элемент пространства $\mathcal{D}^*(I;B^*)$, имеет производную v', равную u'. Тогда, как известно, функции u и v различаются на I на некоторую постоянную величину $\Phi_0 \in B^*$, т. е. $u(t) = v(t) + \Phi_0$ при п. в. $t \in I$. Поскольку $v \in C(I;\ B^*)$, то и $u \in C(I;\ B^*)$. Поэтому $w \in C(I;\ B^*)$. Докажем, что это вложение непрерывно. Из оценки $\|v\|_{C(I;\ B^*)} \leqslant \|u'\|_{L^1(I;\ B^*)}$ и неравенства вида (7.21) следует, что

$$\|v\|_{C(I;\ B^*)} \leqslant c\|u'\|_{U^*}. \qquad (7.25)$$

Учитывая, что $\Phi_0 = u(t) - v(t)$, оценим

$$d\|\Phi_0\|_{B^*} = \int\limits_I \|\Phi_0\|_{B^*} dt = \int\limits_I \|u - v\|_{B^*}\,dt \leqslant \int\limits_I \|u\|_{B^*} dt + c\|v\|_{C\,(I;\ B^*)}, \qquad (7.26)$$

где $d = b - a$. Тогда из (7.25), (7.26). (7.21), (7.14) и вложения $\mathcal{W} \to C(I;\ \mathbb{H})$ следует оценка

$$\|\Phi_0\|_{B^*} \leqslant c\left(\|u\|_U + \|u'\|_{U^*}\right) = c\|u\|_{\mathcal{W}}, \qquad (7.27)$$

а из (7.25) и (7.27) — оценка

$$\|u\|_{C(I;\ B^*)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}}. \qquad (7.28)$$

Таким образом, вложение $\mathcal{W} \to C(I;\ B^*)$ доказано.

Докажем теперь вложение $\mathcal{W} \to C(I;\ \mathbb{H})$. Прежде всего заметим, что для любых $v,\ w \in C^1(I;\ B)$ при всех $t_1,\ t_2 \in I$

$$(v,\ w)\big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \{(v',\ w) + (v,\ w')\}\,dt. \qquad (7.29)$$

Пусть $u \in C^1(I;\ B)$. Полагая $v = ((t-a)/d)u$, $w = ((b-t)/d)u$, $d = b - a$, записывая (7.29) сначала для функций v, u при $t_1 = a$, $t_2 = t \in (a,\ b]$, а затем для функций w, u при $t_1 = t \in [a,\ b)$, $t_2 = b$ и вычитая второе равенство из первого, получим:

$$(u(t),\ u(t)) = \frac{1}{d}\int\limits_a^b (u,\ u)\,dt + 2\int\limits_a^t \frac{\tau - a}{d}(u',\ u)\,d\tau - 2\int\limits_t^b \frac{b-\tau}{d}(u',\ u)\,d\tau. \qquad (7.30)$$

Из (7.30) следует оценка

$$\|u(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant d^{-1}\|u\|_{C(I;\ B^*)}\|u\|_{L^1(I;\ B)} + 4\|u'\|_{U^*}\|u\|_U,\quad t \in I. \qquad (7.31)$$

Тогда из (7.31) и (7.28) легко следует оценка

$$\|u(t)\|_{C(I;\ \mathbb{H})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}}. \tag{7.32}$$

Пусть u_h, $u_{h'}$ — усреднения произвольной функции $u \in \mathcal{W}$. Применяя (7.32) к функциям $u_h - u_{h'}$, получим:

$$\|u_h - u_{h'}\|_{C(I;\ \mathbb{H})} \leqslant c\|u_h - u_{h'}\|_{\mathcal{W}}. \tag{7.33}$$

Ввиду леммы 7.5 и полноты пространства $C(I;\ \mathbb{H})$ из (7.33) легко следует, что функция $u \in C(I;\ \mathbb{H})$ (как всегда, мы отождествляем эквивалентные функции), а также и справедливость оценки (7.32) для любой $u \in \mathcal{W}$. Лемма 7.6 доказана.

При доказательстве леммы 7.6 установлен также следующий факт.

Следствие 7.2. *Для любой функции $u \in \mathcal{W}$ ее усреднения u_h* (см. (7.24) и (7.3)) *сходятся к ней в $C(I,\ \mathbb{H})$, т. е.*

$$\lim_{h\to 0}\|u_h - u\|_{C(I;\ \mathbb{H})} = 0. \tag{7.34}$$

Лемма 7.7. *Формула* (7.29) *справедлива для любых v, $w \in \mathcal{W}$. Для любой $u \in \mathcal{W}$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}(u,\ u)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}(u',\ u)\,dt,\quad t_1,\ t_2 \in I. \tag{7.35}$$

Доказательство. Справедливость формулы (7.29) для любых v, $w \in C^1(I;\ B)$ уже отмечалась при доказательстве леммы 7.6. Пусть v, $w \in \mathcal{W}$, а v_h, w_h — их усреднения. Переходя в равенствах (7.29), записанных для v_h и w_h, к пределу при $h \to 0$, получим с учетом леммы 7.5 и следствия 7.2, что формула (7.29) справедлива для функций v, w. Равенство (7.35) есть частный случай (7.29) ($v = w = u$). Лемма 7.7 доказана.

ГЛАВА 5

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ (A, $\mathbf{b}$, m, $\mathbf{m}$)-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Структура уравнений и классическая постановка общей краевой задачи

Рассматривая дифференциальные уравнения вида

$$-\frac{d}{dx_i}l^i(x,\ u,\ \nabla u) + l_0(x,\ u,\ \nabla u) = 0, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, $\frac{d}{dx_i}$ — символ полной производной по переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$, $l^i(x,\ u,\ p)$ и $l_0(x,\ u,\ p)$ — заданные в $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ функции, мы обычно будем иметь дело с обобщенными решениями этих уравнений, что позволит рассматривать функции $l^i(x,\ u,\ p)$ и $l_0(x,\ u,\ p)$ при весьма слабых предположениях об их дифференциальных свойствах относительно независимых переменных. Мы всегда предполагаем, что функции $l^i(x,\ u,\ p)$, $i = 1, \ldots, n$, и $l_0(x,\ u,\ p)$ удовлетворяют в $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условию Каратеодори (т. е. эти функции измеримы по x в Ω при всех u, $p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и непрерывны по u, p в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ при п. в.

$x \in \Omega$). По мере надобности на функции $l^i(x, u, p)$ и $l_0(x, u, p)$ будут налагаться дополнительные условия регулярности. В формуле (1.1), как и во всей работе, если не оговорено особо, предполагается суммирование по всем дважды встречающимся индексам.

Определение 1.1. Будем говорить, что уравнение вида (1.1) имеет $(A, \mathbf{b})$-структуру в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, если существуют такие квадратная матрица $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ порядка n, вектор $\mathbf{b} \equiv (b^1(x), \ldots, b^n(x))$ и функции $l'^i(x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, $l_0'(x, u, q)$, что при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(x, u, p) &= A^*(x)\,\mathbf{l}'(x, u, A(x)p), \\ l_0(x, u, p) &= l_0'(x, u, A(x)p) + b^i(x)p_i, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где A^* — матрица, сопряженная к A, $\mathbf{l}(x, u, p) = (l^1(x, u, p), \ldots, l^n(x, u, p))$, $\mathbf{l}'(x, u, q) = (l'^1(x, u, q), \ldots, l'^n(x, u, q))$. Функции $l'^i(x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, $l_0'(x, u, q)$ будем называть приведенными коэффициентами такого уравнения.

Определение 1.2. Будем говорить, что уравнение вида (1.1) имеет $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-структуру в области Ω, если оно имеет $(A, \mathbf{b})$-структуру в этой области относительно матрицы A, удовлетворяющей условиям (4.1.1), (4.1.3) с $m_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, вектора $\mathbf{b}(x)$, такого, что $b^i \in C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial b^i}{\partial x_i} \in C(\bar{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$, и приведенных коэффициентов $l'^i(x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, $l_0'(x, u, q)$, удовлетворяющих в $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условию Каратеодори и таких, что при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |l'^i(x, u, q)| &\leqslant \mu_1\left(\sum_{k=1}^{n} |q_k|^{m_k/m_i'} + |u|^{m/m_i'} + \varphi_i(x)\right), \quad i = 1, \ldots, n, \\ |l_0'(x, u, q)| &\leqslant \mu_2\left(\sum_{k=1}^{n} |q_k|^{m_k/m'} + |u|^{m/m'} + \varphi_0(x)\right), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\mu_1, \mu_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\varphi_i \in L^{m_i'}(\Omega)$, $1/m_i + 1/m_i' = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\varphi \in L^{m'}(\Omega)$, $1/m + 1/m' = 1$, $m > 1$.

В изотропном случае $(m_1 = \ldots = m_n = \bar{m})$ неравенства (1.3) равносильны неравенствам

$$\begin{aligned} |\mathbf{l}'(x, u, q)| &\leqslant \mu_1(|q|^{\bar{m}/\bar{m}'} + |u|^{m/\bar{m}'} + \bar{\varphi}(x)), \\ |l_0(x, u, q)| &\leqslant \mu_2(|q|^{\bar{m}/m'} + |u|^{m/m'} + \varphi_0(x)), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где μ_1, $\mu_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\bar{\varphi} \in L^{\bar{m}'}(\Omega)$, $1/\bar{m} + 1/\bar{m}' = 1$, $\bar{m} > 1$, $\varphi_0 \in L^{m'}(\Omega)$, $1/m + 1/m' = 1$, $m > 1$.

Предложение 1.1. *Пусть при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} |(A^*)_i^{-1}\mathbf{l}(x, u, p)| \leqslant \mu_1\left(\sum_{k=1}^{n} |A_k p|^{m_k/m_i'} + |u|^{m/m_i'} + \varphi_i(x)\right), \\ i = 1, \ldots, n, \\ |l_0(x, u, p) - b^i(x)p_i| \leqslant \mu_2\left(\sum_{k=1}^{n} |A_k p|^{m_k/m'} + |u|^{m/m'} + \varphi_0(x)\right), \end{gathered} \tag{1.5}$$

где матрица A не вырождена при п. в. $x \in \Omega$, $(A^*)_i^{-1}\mathbf{l} \equiv ((A^*)^{-1}\mathbf{l})_i$ — i-я компонента вектора $(A^*)^{-1}\mathbf{l}$, а вектор $\mathbf{b}$, показатели m, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_0 — такие же, как в определении 1.1. Тогда уравнение (1.1) имеет $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-структуру в Ω.

Доказательство. Действительно, при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{l}(x, u, p) = A^*(A^*)^{-1}\mathbf{l}(x, u, A^{-1}(Ap)), \ l_0(x, u, p) - b^i(x)p_i = \\ = l_0(x, u, A^{-1}(Ap)) - \mathbf{b}(x)A^{-1}(Ap).$$

Тогда, полагая

$$\mathbf{l}'(x, u, q) = (A^*)^{-1}\mathbf{l}(x, u, A^{-1}q), \ l_0'(x, u, q) = l_0(x, u, A^{-1}q) - \mathbf{b}(x)A^{-1}q, \quad (1.6)$$

замечаем, что ввиду (1.5), (1.6) справедливы условия (1.2), (1.3). Предложение 1.1 доказано.

Определение 1.3. Уравнение вида (1.1), имеющее $(A, \mathbf{b})$-структуру в Ω, будем называть $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим [строго $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим] в Ω, если при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $q = Ap$, $\eta = A\xi$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено следующее условие A-эллиптичности [строгой A-эллиптичности]:

$$\frac{\partial l'^i(x, u, q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j \geqslant 0 \quad \left[\frac{\partial l'^i(x, u, q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j > 0, \ \forall \eta \neq 0\right]. \quad (1.7)$$

Уравнение вида (1.1), имеющее $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-структуру в Ω, будем называть $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптическим в Ω, если при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $q = Ap$, $\eta = A\xi$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено следующее квалифицированное условие A-эллиптичности:

$$\frac{\partial l'^i(x, u, q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n} |q_i|^{m_i - 2}\eta_i^2, \quad \nu = \mathrm{const} > 0. \quad (1.8)$$

Если уравнение (1.1) является $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптическим в Ω, то, учитывая, что

$$\frac{\partial l^i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j = a^{si}\frac{\partial l'^s}{\partial p_k}a^{kj}\xi_i\xi_j = \frac{\partial l'^s}{\partial p_k}(A_s\xi)(A_k\xi) = \frac{\partial l'^s}{\partial q_k}\eta_s\eta_k, \quad (1.9)$$

где $\eta = A\xi$, $A_s\xi \equiv (A\xi)_s \equiv a^{si}\xi_i$, $A_k\xi \equiv a^{kj}\xi_j$, заключаем, что уравнение (1.1) допускает фиксированное вырождение эллиптичности во всех точках области $x \in \Omega$, где матрица $A(x)$ вырождена. Кроме того, из (1.9), (1.8) следует, что уравнение (1.1) допускает неявное вырождение эллиптичности на множествах $\{A_i p = 0, \ i = 1, \ldots, j-1, \ j+1, \ldots, n\}$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптическое уравнение, будучи, как и любое $(A, \mathbf{b})$-эллиптическое уравнение, уравнением с неотрицательной характеристической формой $\frac{\partial l^i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j$, не является, вообще говоря, строго $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим уравнением.

Приведем примеры $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений.

1. Линейное уравнение вида

$$-\frac{d}{dx_i}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u - f(x) = 0 \quad (1.10)$$

с неотрицательной симметричной в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, матрицей $\mathfrak{A} \equiv \|a^{ij}(x)\|$, такой, что $A \equiv \mathfrak{A}^{1/2}$ удовлетворяет условиям (4.1.1) и (4.1.3) при $m = 2$, $\mathbf{m} = \mathbf{2}$, рассматриваемое при условиях $\beta^i \in C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial \beta^i}{\partial x_i} \in C(\bar{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, является $(A, \mathbf{b}, 2, \mathbf{2})$-эллиптическим относительно матрицы $A = \mathfrak{A}^{1/2}$ и вектора $\mathbf{b} = (\beta^1, \ldots, \beta^n)$.

2. Уравнение вида (1.1), удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial l^i(x,\ u,\ p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n}(1+|p_i|)^{m_i-2}\xi_i^2,\quad \nu=\mathrm{const}>0,$$

$$|l^i(x,\ u,\ p)| \leqslant \mu_1\left(\sum_{k=1}^{n}|p_k|^{m_k/m_i'}+|u|^{m/m_i'}+\varphi_i(x)\right),\quad i=1,\ldots,n, \qquad (1.11)$$

$$|l_0(x,\ u,\ p)| \leqslant \mu_2\left(\sum_{k=1}^{n}|p_k|^{m_k/m'}+|u|^{m/m'}+\varphi_0(x)\right),$$

где $\varphi_i \in L^{m_i'}(\Omega)$, $i=1,\ldots,n$, $\varphi_0 \in L^{m'}(\Omega)$, является, очевидно, $(A,\ \mathbf{b},\ m,\ \mathbf{m})$-эллиптическим уравнением относительно единичной матрицы $A=I$ и вектора $\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

3. Уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{d}{dx_i}l^i(t,\ x,\ u,\ \nabla u)+l_0(t,\ x,\ u,\ \nabla u)=0, \qquad (1.12)$$

где $\nabla u=(u_{x_1},\ldots,u_{x_n})$, рассматриваемое в цилиндре $Q=\Omega\times(T_1,\ T_2)\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $n\geqslant 1$, в предположении, что при п. в. $(t,\ x)\in Q$ и любых $u\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ выполнены условия

$$\frac{\partial l^i(t,\ x,\ u,\ p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n}(1+|p_i|)^{m_i-2}\xi_i^2,\quad \nu=\mathrm{const}>0,$$

$$|l^i(t,\ x,\ u,\ p)| \leqslant \mu_1\left(\sum_{k=1}^{n}|p_k|^{m_k/m_i'}+|u|^{m/m_i'}+\varphi_i(t,\ x)\right),\quad i=1,\ldots,n, \qquad (1.13)$$

$$|l_0(t,\ x,\ u,\ p)| \leqslant \mu_2\left(\sum_{k=1}^{n}|p_k|^{m_k/m'}+|u|^{m/m'}+\varphi_0(t,\ x)\right),$$

где $\varphi_i \in L^{m_i'}(Q)$, $i=1,\ldots,n$, $\varphi_0\in L^{m'}(Q)$, является, как легко убедиться, $(\tilde A,\ \tilde{\mathbf{b}},\ m,\ \tilde{\mathbf{m}})$-эллиптическим в Q уравнением относительно матрицы $\tilde A$ вида $\tilde A=\left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0\ \ldots\ 0 \\ \hline \vdots & \\ 0 & I \end{array}\right\|$ порядка $n+1$, $(n+1)$-мерного вектора $\tilde{\mathbf{b}}=(1,\ 0,\ldots,\ 0)$ и показателей m и $\tilde{\mathbf{m}}=(2,\ m_1,\ldots,\ m_n)$, причем условие вида (1.2) выполнено при $\mathbf{l}(x,\ u,\ \tilde p)=(0,\ l^1(x,\ u,\ p),\ldots,\ l^n(x,\ u,\ p))$, $\mathbf{l}'(x,\ u,\ \tilde q)=(q_0,\ l^1(x,\ u,\ q),\ldots,\ l^n(x,\ u,\ q))$, $A=\tilde A$, $\mathbf{b}=(1,\ 0,\ldots,\ 0)$.

4. Уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial u}{\partial t_k}-\frac{d}{dx_i}l^i(t,\ x,\ u,\ \nabla u)+l_0(t,\ x,\ u,\ \nabla u)=0, \qquad (1.14)$$

где $t=(t_1,\ldots,t_s)$, $s\geqslant 1$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $n\geqslant 1$, $s+n\geqslant 2$, $\nabla u=(u_{x_1},\ldots,u_{x_n})$, рассматриваемое в некоторой области $D\subset\mathbb{R}^{n+s}$ в предположении, что при п. в. $(t,\ x)\in D$ и любых $u\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial l^i(t,\ x,\ u,\ p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n}(1+|p_i|)^{m_i-2}\xi_i^2,\quad \nu=\mathrm{const}>0,\ m_i>1,\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (1.15)$$

и второе и третье неравенства в (1.13) с $t=(t_1,\ldots,t_s)$ и $\varphi_i\in L^{m_i'}(D)$, $i=1,\ldots,n$, $\varphi_0\in L^{m'}(D)$, является, как легко видеть, $(A,\ \mathbf{b},\ m,\ \mathbf{m})$-эллиптическим в D уравнением относительно матрицы $A=\left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I\end{array}\right\|$ порядка $n+s$,

$(n+s)$-мерного вектора $\mathbf{b}=(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ и показателей m и $\tilde{\mathbf{m}}=(2, \ldots, 2, m_1, \ldots, m_n)$.

5. Уравнение первого порядка

$$l_0(x, u)+\beta^i(x)u_{x_i}=f(x), \tag{1.16}$$

рассматриваемое в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ при условии $|l_0(x, u)|\leqslant\mu|u|^{m/m'}+\varphi(x)$, $\mu=\text{const}\geqslant 0$, $\varphi\in L^{m'}(\Omega)$, $f\in L^{m'}(\Omega)$, является $(0, \mathbf{b}, m, 0)$-эллиптическим уравнением относительно нулевой матрицы 0 и вектора $\mathbf{b}=(\beta^1, \ldots, \beta^n)$.

6. Уравнение вида

$$-\frac{d}{dx_i}(a_i(x)|u_{x_i}|^{m_i-2}u_{x_i})-f(x)=0, \quad m_i>1, \quad i=1, \ldots, n, \tag{1.17}$$

где $a_i(x)\geqslant 0$ в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, является $(A, \mathbf{0}, \mathbf{m}, m)$-эллиптическим в Ω относительно диагональной матрицы A с элементами $[a_i(x)]^{1/m_i}$, $i=1, \ldots, n$, на главной диагонали, $\mathbf{m}=(m_1, \ldots, m_n)$ и любого $m>1$, если только указанная диагональная матрица A удовлетворяет условиям (4. 1.1) и (4. 1.3).

7. Уравнение вида

$$u_t-\frac{d}{dx_i}\left(a_i(t, x)|u_{x_i}|^{m_i-2}u_{x_i}\right)-f(t, x)=0, \quad m_i>1, \quad i=1, \ldots, n, \tag{1.18}$$

где $a_i(t, x)\geqslant 0$ в цилиндре $Q=\Omega\times(T_1, T_2)\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $n\geqslant 1$, является $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптическим в Q относительно матрицы A порядка $n+1$ вида

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ . & \alpha_1 & 0 \\ . & & \ldots \\ . & 0 & \\ 0 & & \alpha_n \end{Vmatrix}, \quad \alpha_1=\sqrt[m_1]{a_1}, \ldots, \alpha_n=\sqrt[m_n]{a_n}, \tag{1.19}$$

$(n+1)$-мерного вектора $\mathbf{b}=(1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{m}=(2, m_1, \ldots, m_n)$ и любого $m>1$.

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, уравнение вида (1.1), предполагая сейчас, что функции $l^i(x, u, p)$, $i=1, \ldots, n$, и $l_0(x, u, p)$ принадлежат классам $C^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ и $C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ соответственно, а область Ω — классу C^2. Пусть уравнение (1.1) является строго $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим в Ω. Обозначим через $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$. При сделанных предположениях будем называть нехарактеристической частью границы $\partial\Omega$ множество $\sum=\left\{x\in\partial\Omega:\right.$ $\left.: \frac{\partial l^i(x, u, p)}{\partial p_j}\nu_i\nu_j>0 \text{ при всех } u\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{R}^n\right\}$, а характеристической частью границы $\partial\Omega$ множество $\sum'=\left\{x\in\partial\Omega: \frac{\partial l^i(x, u, p)}{\partial p_j}\nu_i\nu_j=0 \text{ при всех } u\in\mathbb{R},\right.$ $\left.p\in\mathbb{R}^n\right\}$. Ввиду равенства

$$\frac{\partial l^i}{\partial p_j}\nu_i\nu_j=\frac{\partial l'^s}{\partial q_k}(A_k\nu)(A_s\nu) \tag{1.20}$$

и условия строгой $(A, \mathbf{b})$-эллиптичности уравнения (1.1) имеем:

$$\sum=\{x\in\partial\Omega: A\nu\neq 0\}, \quad \sum'=\{x\in\partial\Omega: A\nu=0\}. \tag{1.21}$$

Пусть множество $\sum$ разбито произвольным образом на части $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ так, что $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = \sum$, $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. Рассмотрим на $\partial\Omega$ функцию

$$b = b(x) = -b^i(x)\nu_i(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.22}$$

Обозначим через $(\Sigma_i)_0, (\Sigma_i)_+, (\Sigma_i)_-$ те части множества $\Sigma_i (i = 1, 2, 3)$, на которых соответственно $b = 0$, $b > 0$, $b < 0$. Аналогичным образом разобъем множество Σ' на части $\Sigma'_0, \Sigma'_+, \Sigma'_-$. Пусть на множестве Σ_3 задана кусочно-непрерывная ограниченная положительная функция λ.

Рассмотрим при сделанных предположениях следующую общую краевую задачу: найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3) \cap C(\bar{\Omega})$, такую, что

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx_i} l^i(x, u, \nabla u) + l_0(x, u, \nabla u) = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = \varphi \text{ на } \Sigma_1 \cup \Sigma'_-, \ \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} + cu = \psi \text{ на } \Sigma_2, \ \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} + (c - \lambda) u = \chi \text{ на } \Sigma_3, \end{gathered} \tag{1.23}$$

где

$$c = \begin{cases} 0 & \text{на } (\Sigma_{2,3})_{0,+}, \\ b(x) & \text{на } (\Sigma_{2,3})_-, \end{cases} \quad (\Sigma_{2,3})_{0,+} = (\Sigma_2)_0 \cup (\Sigma_2)_+ \cup (\Sigma_3)_0 \cup (\Sigma_3)_+,$$
$$(\Sigma_{2,3})_- = (\Sigma_2)_- \cup (\Sigma_3)_-,$$

а φ, ψ и χ — кусочно-непрерывные функции, заданные соответственно на $\Sigma_1 \cup \Sigma'_-$, Σ_2 и Σ_3. Часть $\Sigma'_0 \cup \Sigma'_+$ границы $\partial\Omega$ остается свободной от задания на ней граничных условий.

Заметим, что условия на Σ_2 и Σ_3 можно переписать в более компактном виде,

$$\mathbf{l}(x, u, \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} - s(x) u = g(x) \text{ на } \Sigma_{2,3} \equiv \Sigma_2 \cup \Sigma_3, \tag{1.24}$$

где $g(x)$ — кусочно-непрерывная функция, заданная на $\Sigma_{2,3}$, а $s(x)$ — кусочно-непрерывная функция, заданная на $\Sigma_{2,3}$, такая, что

$$s(x) \geqslant \max(0, -b(x)) \text{ на } \Sigma_{2,3}.$$

Однако нам удобнее пользоваться (хотя и более громоздкой) предыдущей формой записи граничных условий на $\Sigma_{2,3}$.

Рассмотрим основные частные случаи задачи (1.2).

1. При выборе $\Sigma_1 = \Sigma$, $\Sigma_2 = \Sigma_3 = \varnothing$ получаем первую краевую задачу: найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$, такую, что

$$-\frac{d}{dx_i} l^i(x, u, \nabla u) + l_0(x, u, \nabla u) = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \Sigma \cup \Sigma'_-. \tag{1.25}$$

2. При выборе $\Sigma_1 = \varnothing$, $\Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_3 = \varnothing$ получаем вторую краевую задачу: найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Sigma) \cap C(\bar{\Omega})$, такую, что

$$-\frac{d}{dx_i} l^i + l_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \Sigma'_-, \quad \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} + cu = \psi \text{ на } \Sigma, \tag{1.26}$$

где $c = 0$ на $\Sigma_{0,+}$, $c = b(x)$ на Σ_-.

3. При выборе $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \varnothing$, $\Sigma_3 = \Sigma$ получаем третью краевую задачу: найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cap \Sigma) \cap C(\bar{\Omega})$, такую, что

$$-\frac{d}{dx_i} l^i + l_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \Sigma'_-, \quad \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} + (\lambda - c) u = \chi \text{ на } \Sigma, \tag{1.27}$$

где $c = 0$ на $\Sigma_{0,+}$, $c = b(x)$ на Σ_-.

В случае линейной зависимости $l(x, u, p)$ от u и p, т. е. в случае $l^i(x, u, p) = a^{ij}(x)p_j + \alpha^i(x)u + g^i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, условия на Σ_2 и Σ_3 принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial N} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu} u + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} + cu = \psi \quad \text{на } \Sigma_2, \\ &\frac{\partial u}{\partial N} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu} u + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} + (c - \lambda)u = \chi \quad \text{на } \Sigma_3, \end{aligned} \tag{1.28}$$

где $\frac{\partial u}{\partial N} \equiv a^{ij} u_{x_j} \nu_i$ есть так называемая производная функции u по конормали к $\partial\Omega$.

Применяя стандартный прием подходящей замены неизвестной функции, можно свести граничные условия в (1.23) к однородному виду. Ради краткости дальнейших формулировок мы будем далее, как правило, рассматривать общую краевую задачу в случае однородных граничных условий, т. е. будем считать, что задача (1.23) уже приведена к виду

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx_i} l^i + l_0 = 0 \ \text{в } \Omega, \quad u = 0 \ \text{на } \Sigma \cup \Sigma'_-, \quad \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} + cu = 0 \ \text{на } \Sigma_2, \\ \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nu} + (c - \lambda)u = 0 \ \text{на } \Sigma_3. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Заметим при этом, что само уравнение $-\frac{d}{dx_i} l^i + l_0 = 0$ не является, вообще говоря, однородным ввиду произвола функции $l_0(x, u, p)$. Приведенную выше постановку общей краевой задачи для уравнения (1.1) естественно считать классической.

Легко убедиться в том, что данная выше постановка общей краевой задачи вида (1.23) для $(A, \mathbf{b})$-эллиптического уравнения инвариантна относительно гладкого невырожденного преобразования независимых переменных. Действительно, пусть задано гладкое преобразование координат

$$\hat{x} = \hat{x}(x), \quad \det\left\|\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j}\right\| \neq 0 \ \text{в } \Omega. \tag{1.30}$$

Выполняя замену (1.30) в уравнении вида (1.1), получим новое уравнение

$$-\frac{d}{d\hat{x}_k} \hat{l}^k(\hat{x}, u, \hat{\nabla} u) + \hat{l}_0(\hat{x}, u, \hat{\nabla} u) = 0, \tag{1.31}$$

определенное в соответствующей области $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\hat{A} \equiv \equiv \|\hat{a}^{ik}(\hat{x})\|$ и $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}(x)$ матрицу и вектор, определяемые по формулам

$$\hat{a}^{ik}(\hat{x}) = a^{ij}(x)\frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j}, \quad \hat{b}^k(\hat{x}) = b^i(x)\frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_i}, \quad i, k = 1, \ldots, n. \tag{1.32}$$

Используя условие (1.2), нетрудно проверить, что уравнение (1.31) имеет $(\hat{A}, \hat{\mathbf{b}})$-структуру в области $\hat{\Omega}$ относительно матрицы $\hat{A}$ и вектора $\hat{b}$, определенных по формулам (1.32). При этом оказывается, что в роли функций $\hat{l}'^i(\hat{x}, u, \hat{q})$, $i = 1, \ldots, n$, и $\hat{l}'_0(\hat{x}, u, \hat{q})$ из тождеств вида

$$\hat{\mathbf{l}}(\hat{x}, u, \hat{p}) = \hat{A}^* \hat{\mathbf{l}}'(\hat{x}, u, \hat{A}\hat{p}), \quad \hat{l}_0(\hat{x}, u, \hat{p}) = \hat{l}'_0(\hat{x}, u, \hat{A}\hat{p}) + \hat{b}^k \hat{p}_k \tag{1.33}$$

выступают функции

$$\hat{l}'^i(\hat{x}, u, \hat{q}) = l'^i(x(\hat{x}), u, \hat{q}), \quad \hat{l}'_0(\hat{x}, u, \hat{q}) = l'_0(x(\hat{x}), u, \hat{q}) + a^{ki} l'^k \frac{\partial^2 \hat{x}_m}{\partial x_i \partial \hat{x}_m}. \tag{1.34}$$

Равенства (1.34) позволяют сформулировать следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Приведенные коэффициенты* $l'^i(x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$ $[l'_0(x, u, q)]$ *уравнения вида* (1.1), *имеющего* $(A, \mathbf{b})$*-структуру в области* Ω, *инвариантны относительно гладкого [линейного] преобразования независимых переменных, т. е. при любом гладком [линейном] преобразовании* (1.30) *уравнение вида* (1.1), *имеющее* $(A, \mathbf{b})$*-структуру в* Ω, *переходит в уравнение вида* (1.1), *имеющее* $(\hat{A}, \hat{\mathbf{b}})$*-структуру в* $\hat{\Omega}$, *где* $\hat{\Omega}$ — *образ* Ω *при отображении* (1.30) *относительно матрицы* $\hat{A}$ *и вектора* $\hat{\mathbf{b}}$, *определенных по формуле* (1.32), *причем старое и новое уравнения имеют одни и те же приведенные коэффициенты* l'^i, $i=1, \ldots, n$ $[l'_0]$ (см. (1.34)).

Легко проверяется далее, что векторы $A\nu$ и $\hat{A}\hat{\nu}$, вычисленные в соответствующих точках $\partial\Omega$ и $\partial\hat{\Omega}$, отличаются лишь ненулевым скалярным множителем. Отсюда следует, что в результате преобразования (1.30) множества Σ и $\hat{\Sigma}$, а также Σ' и $\hat{\Sigma}'$, определенные в соответствии с (1.21), переходят друг в друга. Легко также проверить, что функции $b(x)$ и $\hat{b}(\hat{x})$, определенные согласно формуле вида (1.22), связаны в соответствующих точках $x \in \partial\Omega$ и $\hat{x} \in \partial\hat{\Omega}$ равенством $b(x) = c(x)\hat{b}(\hat{x})$, где $c(x) > 0$. Это означает, что в результате преобразования (1.30) множества $(\Sigma_i)_+$ и $(\hat{\Sigma}_i)_+$, $(\Sigma_i)_{0,-}$ и $(\hat{\Sigma}_i)_{0,-}$, Σ'_0 и $\hat{\Sigma}'_0$, Σ'_+ и $\hat{\Sigma}'_+$, Σ'_- и $\hat{\Sigma}'_-$ переходят друг в друга. Учитывая еще, что левые части граничных условий в (1.23) инвариантны относительно замены (1.30), выведем из сказанного, что граничные условия на множествах $\Sigma_1 \cup \Sigma'_-$, Σ_2, Σ_3 переходят в совершенно аналогичные условия на множествах $\hat{\Sigma}_1 \cup \hat{\Sigma}'$, $\hat{\Sigma}_2$ и $\hat{\Sigma}_3$. Ввиду инвариантности приведенных коэффициентов $l'^i(x, u, q)$ новое уравнение (1.31) будет $(\hat{A}, \hat{\mathbf{b}})$ [строго $(\hat{A}, \hat{\mathbf{b}})$]-эллиптическим в $\hat{\Omega}$, если исходное уравнение было $(A, \mathbf{b})$ [строго $(A, \mathbf{b})$]-эллиптическим в области Ω. Тогда из доказанного вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.3. *Постановка общей краевой задачи для* $(A, \mathbf{b})$*-эллиптического уравнения инвариантна относительно любой гладкой невырожденной замены независимых переменных.*

Важным частным случаем $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений являются так называемые, $(A, \mathbf{b})$-параболические уравнения, рассматриваемые в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, $T_1 < T_2$, T_1, $T_2 = \mathrm{const}$, и определяемые как $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}})$-эллиптические в $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ уравнения вида

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} l^i(t, x, u, \nabla u) + l_0(t, x, u, \nabla u) - u_t = f(t, x) \qquad (1.1')$$

относительно матрицы $\tilde{A} = \left\| \begin{matrix} 0 \ldots & 0 \\ \vdots & A(t, x) \\ 0 & \end{matrix} \right\|$ порядка $n+1$ и $(n+1)$-мерного вектора $\tilde{\mathbf{b}} \equiv (0, b^1(t, x), \ldots, b^n(t, x))$. Несколько удобнее, однако, дать независимое определение $(A, \mathbf{b})$-параболического уравнения в цилиндре Q.

Определение 1.1'. Будем говорить, что уравнение вида (1.1) имеет пространственную $(A, \mathbf{b})$-структуру в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, если существуют такие квадратная матрица $A = \|a^{ij}(t, x)\|$ порядка n, n-мерный вектор $\mathbf{b} = (b^1(t, x), \ldots, b^n(t, x))$ и функции $l'^i(t, x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, $l'_0(t, x, u, q)$, что при п. в. $(t, x) \in Q$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\mathbf{l}(t, x, u, p) = A^*\mathbf{l}'(t, x, u, Ap), \quad l_0(t, x, u, p) = l'_0(t, x, u, Ap) + b^i(t, x)p_i, \qquad (1.2')$$

где A^* — матрица, сопряженная к A, $\mathbf{l}=(l^1, \ldots, l^n)$, $\mathbf{l}'=(l'_1, \ldots, l'_n)$. Функции $l'^i(t, x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$ и $l'_0(t, x, u, q)$ будем называть приведенными коэффициентами такого уравнения. Уравнение вида (1.1), имеющее пространственную $(A, \mathbf{b})$-структуру в цилиндре Q, будем называть $(A, \mathbf{b})$-параболическим [строго $(A, \mathbf{b})$-параболическим] в Q, если выполнено следующее условие A-параболичности [строгой A-параболичности]: при п. в. $(t, x)\in Q$ и любых $u\in\mathbb{R}$, $q=Ap$, $\eta=A\xi$, $p\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial l'^i(t, x, q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j\geqslant 0\left[\frac{\partial l'^i(t, x, u, q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j>0, \ \forall\eta\neq 0\right]. \qquad (1.7')$$

Легко видеть, что уравнение вида (1.1), имеющее в цилиндре Q пространственную $(A, \mathbf{b})$-структуру [являющееся $(A, \mathbf{b})$-параболическим (строго $(A, \mathbf{b})$-параболическим) в цилиндре Q], имеет и $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}})$-структуру в Q [является $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}})$-эллиптическим (строго $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}})$-эллиптическим) в Q] относительно матрицы $\tilde{A}=\begin{Vmatrix} 0 \ldots 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{Vmatrix}$, вектора $\tilde{\mathbf{b}}=(1, 0, \ldots, 0)$ и приведенных коэффициентов $\tilde{\mathbf{l}}'(\tilde{x}, u, \tilde{q})$ и $\tilde{l}'_0(\tilde{x}, u, \tilde{q})$, где $\tilde{x}=(t, x)$, $\tilde{q}=(q_0, q_1, \ldots, q_n)$, $\tilde{\mathbf{l}}'=(q_0, l'^1(x, t, u, q), \ldots, l'^n(x, t, u, q))$, $\tilde{l}'_0=l'_0(x, t, u, q)$, $q=(q_1, \ldots, q_n)$. Поэтому из предложений 1.2 и 1.3 вытекают следующие утверждения.

Предложение 1.2′. *Приведенные коэффициенты $l'^i(t, x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, $[l'_0(t, x, u, q)]$ уравнения вида (1.1′), имеющего пространственную $(A, \mathbf{b})$-структуру в цилиндре Q, инвариантны относительно любого гладкого [линейного] преобразования пространственных переменных, т. е. при любом гладком [линейном] преобразовании пространственных переменных $\hat{x}=\hat{x}(x)$, $x\in\Omega$ уравнение вида (1.1), имеющее пространственную $(A, \mathbf{b})$-структуру в цилиндре $Q=\Omega\times(T_1, T_2)$, переходит в уравнение вида (1.1), имеющее пространственную $(\hat{A}, \hat{\mathbf{b}})$-структуру в цилиндре $\hat{Q}=\hat{\Omega}\times(T_1, T_2)$, где $\hat{\Omega}$ — образ Ω при отображении $\hat{x}=\hat{x}(x)$, $\hat{A}=AP^*$, $\hat{\mathbf{b}}=P\mathbf{b}$, P — матрица Якоби указанного отображения, причем старое и новое уравнения имеют одни и те же приведенные коэффициенты, точнее, справедливы равенства*

$$\begin{gathered}\hat{l}'^i(t, \hat{x}, u, \hat{q})=l'^i(t, \hat{x}(x), u, \hat{q}), \ i=1, \ldots, n \\ [\hat{l}'_0(t, \hat{x}, u, \hat{q})=l'_0(t, x(\hat{x}), u, \hat{q})].\end{gathered} \qquad (1.34')$$

Предложение 1.3′. *При любой гладкой невырожденной замене пространственных переменных A, $\mathbf{b}$-параболическое [строго $(A, \mathbf{b})$-параболическое] уравнение в цилиндре $Q=\Omega\times(T_1, T_2)$ переходит в $(\hat{A}, \hat{\mathbf{b}})$-параболическое [строго $(\hat{A}, \hat{\mathbf{b}})$-параболическое] в цилиндре $\hat{Q}=\hat{\Omega}\times(T_1, T_2)$ уравнение, причем вид общей краевой задачи при этом не меняется.*

Вернемся теперь к общим $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим уравнениям. В дальнейшем нам будет удобнее иметь дело с уравнением, записанным в виде

$$-\frac{d}{dx_i}l^i(x, u, \nabla u)+l_0(x, u, \nabla u)=f(x), \qquad (1.35)$$

т. е. с явно выделенным членом $f(x)$, зависящим только от независимых переменных. Уравнение вида (1.35) будем называть $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптическим [имеющим $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-структуру] в области Ω, если таковым является уравнение $-\frac{d}{dx_i}l^i(x, u, \nabla u)+\bar{l}_0(x, u, \nabla u)=0$, где $\bar{l}_0(x, u, p)=l_0(x, u, p)-f(x)$.

Гладким решением уравнения вида (1.35) будем называть всякую функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, для которой $l^i(x, u, \nabla u) \in C^1(\bar{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$, $l_0(x, u, \nabla u) - f(x) \in C(\bar{\Omega})$ и во всех точках Ω справедливо тождество

$$-\frac{d}{dx_i} l^i(x, u, \nabla u) + l_0(x, u, \nabla u) = f(x).$$

Предложение 1.4. *Если уравнение* (1.35) *имеет* A, $\mathbf{b}$*-структуру в области* Ω, *а* u *— гладкое в* $\bar{\Omega}$ *решение этого уравнения, то имеет место тождество*

$$\int_{\Omega} [\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l_0'(x, u, A\nabla u)\eta - u(b^i\eta)_{x_i}]\, dx +$$
$$+ \int_{\partial\Omega} [\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\mathbf{v} + bu]\,\eta ds = \int_{\Omega} f\eta dx, \quad \forall \eta \in \tilde{C}^1(\Omega), \tag{1.36}$$

где $\mathbf{v}$ *— единичный вектор внутренней нормали к* $\partial\Omega$.

Доказательство. Умножая тождество вида (1.35) на произвольную функцию $\eta \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, интегрируя по области Ω и применяя формулу интегрирования по частям с учетом условия (1.2), получим тождество (1.36). Предложение 1.4 доказано.

Предложение 1.5. *Если уравнение* (1.35) *имеет* $(A, \mathbf{b})$*-структуру в области* Ω, *а* u *— гладкое в* Ω *решение этого уравнения, удовлетворяющее таким же граничным условиям, что и в* (1.29), *то имеет место тождество*:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l_0'(x, u, A\nabla u)\eta - u(b^i\eta)_{x_i}]\, dx +$$
$$+ \int_{\Sigma_3} \lambda u\eta ds + \int_{(\Sigma_{2,3})_+} bu\eta ds = \int_{\Omega} f\eta ds, \quad \forall \eta \in \tilde{C}^1_{0,\, \Sigma_1 \cup \Sigma'_+}(\Omega). \tag{1.37}$$

Доказательство. Учитывая, что $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma'$, перепишем граничный интеграл в (1.36) в виде следующей суммы интегралов:

$$\int_{\Sigma_1} (\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} + bu)\eta ds + \int_{(\Sigma_2)_{0,+}} \mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v}\eta ds + \int_{(\Sigma_2)_-} (\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} + bu)\eta ds +$$
$$+ \int_{(\Sigma_3)_{0,+}} (\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} - \lambda u)\eta ds + \int_{(\Sigma_3)_-} [\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} + (b - \lambda)u]\eta ds + \int_{\Sigma'_{0,-}} bu\eta ds +$$
$$+ \int_{\Sigma_3} \lambda u\eta ds + \int_{(\Sigma_{2,3})_+ \cup \Sigma'_+} bu\eta ds. \tag{1.38}$$

Учитывая, что $\eta = 0$ на $\Sigma_1 \cup \Sigma'_+$, $b = 0$ на Σ'_0 и граничные условия $\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} = 0$ на $(\Sigma_2)_+$, $\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} + bu = 0$ на $(\Sigma_2)_{0,-}$, $\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} - \lambda u = 0$ на $(\Sigma_3)_+$, $\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} + (b - \lambda)u = 0$ на $(\Sigma_3)_{0,-}$, $u = 0$ на Σ'_-, заключаем, что эта сумма интегралов равна сумме $\int_{\Sigma_3} \lambda u\eta ds + \int_{(\Sigma_{2,3})_+} bu\eta ds$, откуда и следует тождество (1.37). Предложение 1.5 доказано.

Тождество вида (1.37) будет положено далее в основу определения обобщенного решения общей краевой задачи вида (1.29) при значительно более широких предположениях относительно структуры уравнения и области Ω. Но предварительно мы должны рассмотреть некоторые функциональные пространства и операторы, связанные с указанной задачей.

§ 2. Основные функциональные пространства и операторы, связанные с общей краевой задачей для $(A, \mathbf{b}, m, \mathrm{m})$-эллиптического уравнения

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, класса $\tilde{C}^{(1)}$ уравнение вида (1.35), имеющее $(A, \mathbf{b}, m, \mathrm{m})$-структуру в Ω. Обозначим через $\widetilde{\partial\Omega}$ множество всех внутренних точек гладких кусков, составляющих $\partial\Omega$, считая, что $\mathrm{mes}_{n-1}(\partial\Omega \setminus \widetilde{\partial\Omega}) = 0$, и предположим, что выполнено условие:

$\widetilde{\partial\Omega} = \Sigma \cup \Sigma'$, где Σ — правильная, а Σ' — особая части $\partial\Omega$ (относительно матрицы A и показателей m, m) в смысле определения 4.3.1. (2.1)

Разобьем правильную часть Σ произвольно на части Σ_1, Σ_2, Σ_3 так, что $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = \Sigma$, $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, причем будем считать, что $\mathrm{mes}_{n-1}(\partial\Sigma_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, где через $\partial\Sigma_i$ обозначена граница множества Σ_i на $\partial\Omega$. Пусть на Σ_3 задана кусочно-непрерывная ограниченная положительная функция λ.

Пополнение множества $\tilde{C}_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{H_\lambda} = \|u\|_H + \|u\|_{L^2(\lambda, \Sigma_3)} \equiv \|u\|_{m,\Omega} + \|A\nabla u\|_{\mathrm{m},\Omega} + \|u\|_{L^2(\lambda, \Sigma_3)} \tag{2.2}$$

обозначим через $H_\lambda \equiv H_{m,\mathrm{m}}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3, \lambda)$. В случае $\Sigma_3 = \varnothing$ пространство H_λ совпадает с пространством $H \equiv \overset{0,\Gamma}{H}_{m,\mathrm{m}}(A, \Omega)$ при $\Gamma = \Sigma_1$, введенным в § 2 гл. 4.

Лемма 2.1. *Пространство H_λ сепарабельно и рефлексивно. Всякий линейный функционал F в пространстве H_λ можно задать равенством*

$$\langle F, \eta \rangle = \int_\Omega (f_0\eta + \mathbf{f} \cdot A\nabla\eta)\, dx + \int_{\Sigma_3} \lambda\psi\eta\, ds, \quad \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}), \tag{2.3}$$

где $f_0 \in L^{m'}(\Omega)$, $1/m + 1/m' = 1$, $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^n)$, $f^i \in L^{m'_i}(\Omega)$, $1/m_i + 1/m'_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\psi \in L^2(\Omega)$, причем f_0, $\mathbf{f}$ и ψ можно выбрать так, что

$$\|F\|_{H^*_\lambda} = \sup\left(\|f_0\|_{m',\Omega},\ \|f^1\|_{m'_1,\Omega}, \ldots, \|f^n\|_{m'_n,\Omega},\ \|\psi\|_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}\right), \tag{2.4}$$

где $\|F\|_{H^*_\lambda}$ — норма функционала F. Наоборот, всякое выражение вида (2.3) *с f_0, $\mathbf{f}$ и ψ, удовлетворяющими указанным выше условиям, определяет некоторый линейный в пространстве H_λ функционал, норма которого не превосходит величины, стоящей в правой части формулы* (2.4).

Доказательство. Сепарабельность пространства H_λ очевидна. Для доказательства рефлексивности H_λ рассмотрим отображение

$$\pi : \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\Omega) \subset H_\lambda \to L^m(\Omega) \times \mathbf{L}^{\mathrm{m}}(\Omega) \times L^2(\lambda, \Sigma_3),^{*)}$$

определенное по формуле

$$\pi(u) = \left(u,\ A_1\nabla u, \ldots, A_n\nabla u,\ u|_{\Sigma_3}\right), \quad u \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}).$$

Очевидно, что отображение π является линейным и изометричным. Распространим его на все пространство H_λ. Расширенное отображение $\pi : H_\lambda \to L^m(\Omega) \times \mathbf{L}^{\mathrm{m}}(\Omega) \times L^2(\lambda, \Sigma_3)$ также будет линейным и изометричным.

---

*) Пространство $L^m(\Omega) \times \mathbf{L}^{\mathrm{m}}(\Omega) \times L^2(\lambda, \Sigma_3)$ наделено нормой $\|(v_0, \mathbf{v}, \varphi)\| = \|v_0\|_{m,\Omega} + \|\mathbf{v}\|_{\mathrm{m},\Omega} + \|\varphi\|_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}$, причем $\|\mathbf{v}\|_{\mathrm{m},\Omega} \equiv \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^{\mathrm{m}}(\Omega)} \equiv \sum_{i=1}^n \|v^i\|_{m_i,\Omega}$, где $(v_0, \mathbf{v}, \varphi) \in L^m(\Omega) \times \mathbf{L}^{\mathrm{m}}(\Omega) \times L^2(\lambda, \Sigma_3)$, $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^n)$.

Поэтому образ $\pi(H_\lambda)$ пространства H_λ замкнут в $L^m(\Omega)\times \mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega)\times L^2(\lambda, \Sigma_3)$. Учитывая, что последнее пространство рефлексивно, заключаем, что и пространство H_λ также рефлексивно. Докажем теперь, что всякий линейный в пространстве H_λ функционал F можно задать по формуле (2.3). Прежде всего заметим, что задание функционала F на множестве $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ вполне определяет его, поскольку $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ плотно в H_λ. Из условия $F\in H^*_\lambda$ следует, что $F\circ\pi^{-1}$ является линейным функционалом на подпространстве $\pi(H_\lambda)$ пространства $L^m(\Omega)\times \mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega)\times L^2(\lambda, \Sigma_3)$. По теореме Хана—Банаха, такой функционал можно продолжить с сохранением нормы на все пространство $L^m(\Omega)\times \mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega)\times L^2(\lambda, \Sigma_3)$. Но всякий линейный функционал Φ в последнем пространстве можно представить в виде

$$\langle \Phi, (v_0, \mathbf{v}, \varphi)\rangle = \int_\Omega (f_0 v_0 + \mathbf{f}\cdot\mathbf{v})\,dx + \int_{\Sigma_3} \lambda\psi\varphi\,ds, \tag{2.5}$$

где f_0, f и ψ — такие, как указано в формулировке леммы. Поэтому при $\forall \eta\in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\Omega)$ значение $\langle F, \eta\rangle$ функционала F на функции η определяется по формуле

$$\langle F, \eta\rangle = \langle (F\circ\pi^{-1}), (\eta, A\nabla\eta, \eta|_{\Sigma_3})\rangle = \int_\Omega (f_0\eta + \mathbf{f}\cdot A\nabla\eta)\,dx + \int_{\Sigma_3}\lambda\psi\eta\,ds, \tag{2.6}$$

причем норма $\|F\|_{H^*_\lambda}$ совпадает с нормой функционала Φ, получившегося при расширении функционала $F\circ\pi^{-1}$, т. е. норма F в пространстве H_λ определяется по формуле (2.4). Последняя часть леммы легко следует из оценки

$$\left|\int_\Omega (f_0\eta + \mathbf{f}\cdot A\nabla\eta)\,dx + \int_{\Sigma_3}\lambda\psi\eta\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup\left(\|f_0\|_{m',\Omega}, \|f^1\|_{m_1',\Omega}, \ldots, \|f^n\|_{m_n',\Omega}, \|\psi\|_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}\right)\|\eta\|_{H_\lambda}, \tag{2.7}$$

справедливой для любой $\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Справедливо плотное вложение $H_\lambda\to H$. В случае $m\geqslant 2$, $m_i\geqslant 2$, $i=1, \ldots, n$, и при выполнении для Σ_3 условия* (4.2.25) *пространства H_λ и H изоморфны.*

Доказательство. Поскольку всякое подмножество правильной части $\partial\Omega$ также является правильным, то Σ_3 — правильная часть $\partial\Omega$. Тогда, очевидно, всякую последовательность, сходящуюся в себе в H_λ, можно отождествить с некоторым элементом в H, откуда легко следует первая часть леммы. Вторая часть леммы вытекает из оценки (4.2.26) (при $m_*=2$) и условия ограниченности λ на Σ_3. Лемма 2.2 доказана.

Таким образом, элементы пространства $H_{m,\mathbf{m}}(A; \Omega; \Sigma_3, \lambda)$ являются функциями из $L^m(\Omega)$, имеющими обобщенный A-градиент $A\nabla u\in\mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega)$ и обобщенные предельные значения $u|_{\Sigma_3}$ на множестве Σ_3, причем $u|_{\Sigma_3}\in$ $\in L^2(\lambda, \Sigma_3)$.

Лемма 2.3. *Предположим, что некоторое множество $\mathscr{P}\subset\Sigma'$ удовлетворяет условию* (4.3.2). *Тогда множество $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\mathscr{P}}(\bar{\Omega})$ плотно в $H_\lambda\equiv$ $\equiv \overset{0,\Sigma_1}{H}_{m,\mathbf{m}}(A; \Omega; \Sigma_3, \lambda)$.*

Доказательство. Лемма 2.3 доказывается точно так же, как лемма 3.1 гл. 1. Заметим лишь, что в правой части формулы (4.3.5) появится лишний член $\left(\int_{\Sigma_3\cap\omega_\delta}\lambda u^2\,ds\right)^{1/2}$. Ввиду того, что $\Sigma_3\cap\mathscr{P}=\varnothing$, и ввиду условия $\mathrm{mes}_{n-1}(\partial\Sigma_3)=0$ этот член будет стремиться к 0 при $\delta\to 0$. Остальные рассуждения переносятся дословно из доказательства леммы 2.2. Лемма 2.3 доказана.

Введем еще два функциональных пространства. Обозначим через $(\Sigma_i)_0$, $(\Sigma_i)_+$, $(\Sigma_i)_-$ такие части множества Σ_i ($i=2, 3$), на которых функция b, определенная по формуле (1.22), соответственно равна 0, больше 0 и меньше 0. Аналогичным образом разобъем Σ' на части Σ'_0, Σ'_+ и Σ'_-. Предположим, что

$$\mathrm{mes}_{n-1}\partial(\Sigma_i)_+=\mathrm{mes}_{n-1}\partial(\Sigma_i)'=0,\ i=2, 3;\ \mathrm{mes}_{n-1}\partial\Sigma'_+=\mathrm{mes}_{n-1}\partial\Sigma'_-=0. \quad (2.8)$$

Обозначим $\beta(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(|b^i(x)|+\left|\frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i}\right|\right)$, $\Omega_\beta\equiv\{x\in\Omega:\beta(x)>0\}$, $\Omega_{b^i}\equiv$ $\equiv\{x\in\Omega:b^i(x)\neq 0\}$, $i=1, \ldots, n$. Введем следующие нормы,

$$\|u\|_{L^2(\beta,\Omega)}=\Big(\int\limits_{\Omega_\beta}\beta u^2dx\Big)^{1/2},\ \|u\|_{L^2(|b|,(\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_+)}=$$
$$=\Big(\int\limits_{(\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_+}|b|u^2ds\Big)^{1/2},\ \|u\|_{L^2(|b^i|,\Omega_{b^i})}=\Big(\int\limits_{\Omega_{b^i}}|b^i|u^2dx\Big)^{1/2}, \quad (2.9)$$

где $(\Sigma_{2,3})_\pm\equiv(\Sigma_2)_\pm\cup(\Sigma_3)_\pm$, $(\Sigma_i)_\pm=(\Sigma_i)_+\cup(\Sigma_i)_-$, $i=2, 3$.

Пополнение множества $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar\Omega)$ по нормам

$$\|u\|_X=\|u\|_{H_\lambda}+\|u\|_{L^2(\beta,\Omega_\beta)}+\|u\|_{L^2(|b|,(\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_+)} \quad (2.10)$$

и

$$\|u\|_Y=\|u\|_X+\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{L^2(|b^i|,\Omega_{b^i})} \quad (2.11)$$

обозначим соответственно через $X\equiv\overset{0,\Sigma_1}{X}_{m,\mathbf{m}}(A;\ \mathbf{b};\ \Omega;\ \Sigma_2;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ и $Y\equiv$ $\equiv\overset{0,\Sigma_1}{Y}_{m,\mathbf{m}}(A;\ \mathbf{b};\ \Omega;\ \Sigma_2;\ \Sigma_3,\ \lambda)$.

Совершенно аналогично доказательству леммы 2.1 устанавливается справедливость следующей леммы.

Лемма 2.4. *Пространство $X[Y]$ сепарабельно и рефлексивно. Всякий линейный функционал F в пространстве $X[Y]$ можно задать равенством*

$$\langle F,\ \eta\rangle=\int\limits_{\Omega}(f_0\eta+\mathbf{f}\cdot A\nabla\eta)\,dx+\int\limits_{\Omega}\beta g_0\eta dx+$$
$$+\int\limits_{(\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_+}|b|h\eta ds\Big[+\sum_{i=1}^{n}|b^i|g_i\eta_{x_i}dx\Big],\ \eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar\Omega), \quad (2.12)$$

где f_0 и $\mathbf{f}$ — такие же функции, как в (2.3), $g_0\in L^2(\beta,\ \Omega_\beta)$, $q\in L^2(\lambda,\ \Sigma_3)$, $h\in L^2(|b|,\ (\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_+)$, $g^i\in L^2(|b^i|,\ \Omega_{b^i})$, $i=1, \ldots, n$, причем f_0, $\mathbf{f}$, g_0, q, h, g^i, $i=1, \ldots, n$, можно выбрать так, что норма $\|F\|_{X^*}$ $[\|F\|_{Y^*}]$ равна супремуму норм $\|f_0\|_{m',\Omega}$, $\|f^1\|_{m'_1,\Omega}$, $\ldots$, $\|f^n\|_{m'_n,\Omega}$, $\|g_0\|_{L^2(\beta,\Omega_\beta)}$, $\|q\|_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}$, $\|h\|_{L^2(|b|,(\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_+)}$ $[,\ \|g^1\|_{L^2(|b^1|,\Omega_{b1})},\ \ldots,\ \|g^n\|_{L^2(|b^n|,\Omega_{bn})}]$. Наоборот, всякое выражение вида (2.12), *рассматриваемое при выполнении перечисленных условий для f_0, $\mathbf{f}$, g_0, q, $h[g^i$, $i=1, \ldots, n]$, определяет некоторый линейный в X [в Y] функционал F с нормой, не превосходящей указанного выше супремума.*

Обозначим через $\hat{H}_\lambda$ пополнение множества $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar\Omega)$ по норме $\|u\|_{H_\lambda}+$ $+\|u\|_{L^2(\beta,\Omega_\beta)}$. Очевидно, что $\hat{H}_\lambda\to H_\lambda$.

Лемма 2.5. *Пространство X можно отождествить с некоторым подпространством в $\hat{H}_\lambda \times L^2(b, \Sigma'_+)$.*

Доказательство. Процесс доказательства леммы 2.4 (совершенно аналогичного доказательству леммы 2.1) показывает, что пространство X можно отождествить с некоторым подпространством в $L^m(\Omega) \times \mathbf{L}^m(\Omega) \times \times L^2(\beta, \Omega_\beta) \times L^2(\lambda, \Sigma_3) \times L^2(|b|, (\Sigma_{2,3})_\pm \cup \Sigma'_+)$, записывая элементы $\mathbf{u}$ пространства X в виде $\mathbf{u}=(u, \mathbf{v}, \tilde{u}, \varphi, \psi)$, где $u \in L^m(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^m(\Omega)$, $\tilde{u} \in L^2(\beta, \Omega_\beta)$, $\varphi \in L^2(\lambda, \Sigma_3)$, $\psi \in L^2(|b|, (\Sigma_{2,3})_\pm \cup \Sigma'_+)$. Учитывая, однако, что компоненты $\mathbf{v}$, $\tilde{u}$, φ и сужение компоненты ψ на множество $(\Sigma_{2,3})_\pm$ однозначно определяются первой компонентой u элемента $\mathbf{u} \in X$, можно отождествить пространство X с некоторым подпространством в $\hat{H}_\lambda \times \times L^2(b, \Sigma'_+)$, записывая элементы $\mathbf{u} \in X$ в виде пар $\mathbf{u}=(u, \varphi)$, где $u \in \hat{H}_\lambda$, $\varphi \in L^2(b, \Sigma'_+)$. Лемма 2.5 доказана.

Замечание 2.1. Пусть $\mathrm{mes}_{n-1}\Sigma'_+ > 0$, и пусть для множества Σ'_+ выполнено условие *)

$$\text{множество } \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Sigma'_+}(\bar{\Omega}) \text{ плотно в } \hat{H}_\lambda. \tag{2.13}$$

Тогда X нельзя отождествить с некоторым подпространством в $\hat{H}_\lambda$.

Действительно, ввиду (2.13) существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, $n=1, 2, \ldots$, сходящаяся в H_λ к заданной функции $u \in \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$, не равной 0 на Σ'_+. Очевидно, что для стационарной последовательности $\{\tilde{u}_n\}$, где $\tilde{u}_n = u$, $n=1, 2, \ldots$, также имеет место сходимость в $\hat{H}_\lambda$ к функции u. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - \tilde{u}_n\|_{\hat{H}_\lambda} = 0$. Однако очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - \tilde{u}_n\|_{L^2(b, \Sigma'_+)} \neq 0$, т. е. $\|u_n - \tilde{u}_n\|_X \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 2.6. *Пространство Y можно отождествить как с некоторым подпространством в X, так и с некоторым подпространством в $\hat{H}_\lambda$.*

Доказательство. Процесс доказательства леммы 2.3 (см. доказательство леммы 2.1) показывает, что пространство Y можно отождествить с некоторым подпространством в $L^m(\Omega) \times \mathbf{L}^m(\Omega) \times L^2(\beta, \Omega_\beta) \times L^2(|b|, (\Sigma_{2,3})_\pm \cup \Sigma'_+) \times \prod\limits_{i=1}^n L^2(|b^i|, \Omega_{b^i})$, записывая элементы $\mathbf{u} \in Y$ в виде $\mathbf{u} = =(u, \mathbf{v}, \tilde{u}, \varphi, \psi, \mathbf{z})$, где $u \in L^m(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^m(\Omega)$, $\tilde{u} \in L^2(\beta, \Omega_\beta)$, $\varphi \in L^2(\lambda, \Sigma_3)$, $\psi \in L^2(|b|, (\Sigma_{2,3})_\pm \cup \Sigma'_+)$, $\mathbf{z} \in \prod\limits_{i=1}^n L^2(|b^i|, \Omega_{b^i})$. Однако, как уже отмечалось при доказательстве леммы 2.5, компоненты $\mathbf{v}$, u, φ и сужение компоненты ψ на множество $(\Sigma_{2,3})_\pm$ однозначно определяются первой компонентой u этого элемента, причем $\mathbf{v}=A\nabla u$, $\tilde{u}=u$, $\varphi=u|_{\Sigma_3}$, $\psi|_{(\Sigma_{2,3})_\pm} = =u|_{(\Sigma_{2,3})_\pm}$. Докажем теперь, что компоненты z_i, $i=1, \ldots, n$, элемента $\mathbf{u} \in Y$ также однозначно определяются первой компонентой u этого элемента. Пусть последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$, $k=1, 2, \ldots$, сходится к $\mathbf{u}$ в Y. Отсюда, в частности, следует, что $u_k \to u$ в $L^m(\Omega)$, $u_k \to u$ в $L^2(\beta, \Omega_\beta)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_{b^i}} |b^i| (u_{kx_i} - z_i)^2 dx = 0$, $i=1, \ldots, n$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в тождествах

$$\int\limits_\Omega b^i u_{kx_i} \eta dx = -\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial b^i}{\partial x_i} u_k \eta + b^i u_k \eta_{x_i}\right) dx, \quad \eta \in \tilde{C}^1_0(\bar{\Omega}), \quad i=1, \ldots, n, \tag{2.14}$$

*) Достаточным условием выполнимости (2.13) является условие (4.3.2) для множества Σ'_+; это утверждение доказывается точно так же, как лемма 2.3.

получим тождества

$$\int\limits_{\Omega} b^i u \eta_{x_i} dx = -\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial b^i}{\partial x_i} u + b^i \tilde{z}_i\right) \eta dx, \quad \forall \eta \in \tilde{C}_0^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.15}$$

где обозначено: $\tilde{z}_i = \begin{cases} z_i \text{ на } \Omega_{b^i}, \\ 0 \text{ на } \Omega \setminus \Omega_{b^i}, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n.$

Поскольку $b^i \tilde{z}_i \in L^1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, отсюда следует, что функции $b^i u$ имеют в Ω обобщенные производные $\frac{\partial}{\partial x_i}(b^i u)$, $i = 1, \ldots, n$, причем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(b^i u) = \frac{\partial b^i}{\partial x_i} u + b^i \tilde{z}_i \text{ при п. в. } x \in \Omega, \; i = 1, \ldots, n. \tag{2.16}$$

Из (2.16) следуют равенства:

$$z_i = b_i^{-1}\left[\frac{\partial b^i}{\partial x_i} u - \frac{\partial}{\partial x_i}(b^i u)\right] \text{ при п. в. } x \in \Omega_{b^i}, \; i = 1, \ldots, n. \tag{2.17}$$

Применяя известные положения теории обобщенных производных ([97], с. 43—45), можно из равенства (2.16) вывести также, что функция u имеет в областях Ω_{b^i} обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, причем $\frac{\partial u}{\partial x_i} = z_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_{b^i}) \cap L^2(|b^i|, \Omega_{b^i})$, $i = 1, \ldots, n$. Условимся в дальнейшем под $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ понимать z_i, продолженную нулем на $\Omega \setminus \Omega_{b^i}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда вместо (2.16) можно записать равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(b^i u) = \frac{\partial b^i}{\partial x_i} u + b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ при п. в. } x \in \Omega, \; i = 1, \ldots, n. \tag{2.18}$$

В частности, из (2.18) следует, что $b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$.

Приведенные выше утверждения не только доказывают, что компонента $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ однозначно определяется компонентой u, но и устанавливают специфические свойства этой первой компоненты. Из доказанного следует, что пространство Y можно отождествить с некоторым подпространством в X, а элементы $\mathbf{u} \in Y$ — записывать в виде $\mathbf{u} = (u, \varphi)$, где $u \in \hat{H}_\lambda$, $\varphi \in L^2(b, \Sigma'_+)$, т. е. так же, как и элементы $\mathbf{u}$ пространства X. Докажем, однако, что для элемента $\mathbf{u} \equiv (u, \varphi) \in Y$ вторая компонента φ однозначно определяется первой компонентой u этого элемента. Действительно, пусть последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\overline{\Omega})$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к $\mathbf{u} = (u, \varphi)$ в Y. Тогда, переходя к пределу в тождестве

$$\int\limits_{\Omega} b^i u_{n x_i} \eta dx = -\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial b^i}{\partial x_i} u_n \eta + b^i u_n \eta_{x_i}\right) dx - \\ - \int\limits_{\Sigma'_+} b^i \nu_i u_n \eta ds, \qquad \eta \in \tilde{C}^1_{0, (\Sigma_2, \Sigma_3)_\pm \cup \Sigma'_-}(\overline{\Omega}), \tag{2.19}$$

получим, что

$$\int\limits_{\Omega} b^i u_{x_i} \eta dx = -\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial b^i}{\partial x_i} u \eta + b^i u \eta_{x_i}\right) dx - \\ - \int\limits_{\Sigma'_+} b^i \nu_i \varphi \eta ds, \qquad \eta \in \tilde{C}^1_{0, (\Sigma_2, \Sigma_3)_\pm \cup \Sigma'_-}(\overline{\Omega}), \tag{2.20}$$

причем мы воспользовались тем, что из сходимости $\{u_n\}$ к $\mathbf{u}$ в Y следует, в частности, сходимость $\{u_n\}$ к φ в $L^2(b, \Sigma'_+)$. Из (2.20) следует, что компонента φ элемента $\mathbf{u} \in Y$ однозначно определяется функцией u, поскольку, как видно из (2.20), значения интеграла $\int\limits_{\Sigma'_+} b^i \nu_i \varphi \eta ds$, $\eta \in \in \bar{C}^1_{0, (\Sigma_2, 3)_\pm \cup \Sigma'_-}(\bar{\Omega})$ вполне определяются функцией u, причем $b^i \nu_i \equiv -b \neq 0$ на Σ'_+, а сужения функций $\eta \in \bar{C}^1_{0, (\Sigma_2, 3)_\pm \cup \Sigma'_-}(\bar{\Omega})$ на множество Σ'_+ плотны в $L^2(b, \Sigma'_+)$. Поэтому условимся в дальнейшем компоненту φ элемента $\mathbf{u} = (u, \varphi) \in Y$ обозначать через $\varphi \equiv [u]_{\Sigma'_+}$. Из доказанного следует, что пространство Y можно отождествить с некоторым подпространством в $\hat{H}_\lambda$, а его элементы $\mathbf{u}$ записывать либо в виде $\mathbf{u} = (u, [u]_{\Sigma'_+})$, либо просто в виде функций $\mathbf{u} = u \in \hat{H}_\lambda$. Лемма 2.6 доказана.

Очевидно, что из лемм 2.1—2.4, 2.6 вытекают следующие вложения:

$$X \to \hat{H}_\lambda \times L^2(b, \Sigma'_+), \quad Y \to X, \quad Y \to \hat{H}_\lambda, \quad L^{m'}(\Omega) \to H^*_\lambda \to X^* \to Y^*. \quad (2.21)$$

Благодаря вложениям (2.21) и существованию общего плотного множества $\bar{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$ в H_λ, X и Y возможно одинаковое обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для сопряжения между H_λ и H^*_λ, X и X^*, Y и Y^*.

Замечание 2.2. В связи с тем что элементы пространства X реализуются в виде двоек $\mathbf{u} = (u, \varphi)$, аналогичную запись следовало бы применять и к элементам первоначального множества $\bar{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$, замыканием которого по норме (2.10) и получено пространство X. Условимся, однако, при рассмотрении элемента $u \in \bar{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$ как элемента пространства X записывать его обычным образом, отождествляя функцию $u \in \bar{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$ с парой $(u, u|_{\Sigma'_+})$, где $u|_{\Sigma'_+}$ — сужение функции $u \in \bar{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$ на множество Σ'_+.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{B} : \bar{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega}) \subset X \to Y^*$, определенный по формуле

$$\langle \mathcal{B}u, \eta \rangle = -\int\limits_\Omega u (b^i \eta)_{x_i} dx + \int\limits_{(\Sigma_2, 3)_\pm \cup \Sigma'_+} bu\eta ds, \quad u, \eta \in \bar{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega}). \quad (2.22)$$

Очевидно, что при любых u, $\eta \in \bar{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$ справедливо неравенство

$$|\langle \mathcal{B}u, \eta \rangle| \leqslant \|u\|_X \|\eta\|_Y. \quad (2.23)$$

Ввиду линейности оператора $\mathcal{B}$ и оценки (2.23) оператор $\mathcal{B}$ ограничен (а следовательно, и непрерывен). Поэтому его можно продолжить на все пространство X. В дальнейшем через $\mathcal{B} : X \to Y^*$ всегда обозначается этот продолженный оператор.

Обозначим через V важное для дальнейших рассмотрений подпространство (линеал) в X, определяемое условием

$$V = \{\mathbf{u} \in X : \mathcal{B}\mathbf{u} \in H^*_\lambda\}. \quad (2.24)$$

Лемма 2.7. *Пусть выполнено условие:*

$$\textit{множество } \bar{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Sigma'_+}(\bar{\Omega}) \textit{ плотно в } H_\lambda. \quad (2.25)$$

Тогда подпространство V можно отождествить с некоторым подпространством в $\hat{H}_\lambda$.

Доказательство. Заметим сначала, что сужение оператора $\mathcal{B} : X \to \to Y^*$ на множество V вполне определяется заданием значений $\langle \mathcal{B}\mathbf{u}, \eta \rangle$, $\mathbf{u} \in V$, $\eta \in \bar{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, причем

$$\langle \mathcal{B}\mathbf{u}, \eta \rangle = -\int\limits_\Omega u (b^i \eta)_{x_i} dx + \int\limits_{(\Sigma_2, 3)_\pm} bu|_{(\Sigma_2, 3)_+} \eta ds. \quad (2.26)$$

Действительно, переходя в равенстве вида (2.22), записанном для функций $u_n \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$, $n=1, 2, \ldots$, сходящихся к заданному элементу $\mathbf{u}=(u, \varphi)\in V$ в X, к пределу при $n\to\infty$, получим:

$$\langle \mathscr{B}\mathbf{u}, \eta\rangle = -\int\limits_{\Omega} u(b^i\eta)_{x_i}\,dx + \int\limits_{(\Sigma_2,3)_+} bu|_{(\Sigma_2,3)_+}\eta\,ds + \int\limits_{\Sigma'_+} b\varphi\eta\,ds, \quad \eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}). \tag{2.27}$$

Учитывая плотность $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$ в H_λ, доказываем справедливость сделанного выше утверждения и, в частности, получаем формулу (2.26). Из определения подпространства V следует существование такого элемента $F\in H^*_\lambda$, что

$$-\int\limits_{\Omega} u(b^i\eta)_{x_i}\,dx + \int\limits_{(\Sigma_2,3)_+} bu|_{(\Sigma_2,3)_+}\eta\,ds + \int\limits_{\Sigma'_+} b\varphi\eta\,ds = \langle F, \eta\rangle, \quad \eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}). \tag{2.28}$$

Пусть $\{\eta_n\}$, $\eta_n\in\tilde{C}^1_{0,(\Sigma_2,3)_+\cap\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, $n=1, 2, \ldots$, — последовательность, сходящаяся к фиксированной функции $\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ в H_λ. Обозначим через $\hat{\mathscr{B}}(u, \eta)$ выражение

$$\hat{\mathscr{B}}(u, \eta)\equiv -\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial}{\partial x_i}(b^i\eta)\,dx + \int\limits_{(\Sigma_2,3)_+} bu|_{(\Sigma_2,3)_+}\eta\,ds. \tag{2.29}$$

Выражение (2.29) имеет смысл при любых $u\in H_\lambda$, $\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$. Ввиду (2.28), (2.29)

$$\langle F, \eta\rangle = \lim_{\eta_n\to\eta \text{ в } H_\lambda} \hat{\mathscr{B}}(u, \eta_n), \tag{2.30}$$

где u — первая компонента рассматриваемого элемента $(u, \varphi)\in V$. Тогда из (2.28)—(2.30) следует равенство

$$\int\limits_{\Sigma'_+} b\varphi\eta\,ds = \lim_{\eta_n\to\eta \text{ в } H_\lambda} \hat{\mathscr{B}}(u, \eta_n-\eta) \tag{2.31}$$

при любой последовательности $\{\eta_n\}$, $\eta_n\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, $n=1, 2, \ldots$, сходящейся к η в H_λ. Учитывая, что $b\neq 0$ на Σ'_+, и произвол сужений функций η на Σ'_+, заключаем ввиду (2.31), что компонента φ элемента $\mathbf{u}=(u, \varphi)\in V$ вполне определяется первой компонентой $u\in \hat{H}_\lambda$ этого элемента. Лемма 2.7 доказана.

Условимся значение $\varphi\in L^2(b, \Sigma'_+)$ элемента $(u, \varphi)\in V$ обозначать через $(u)_{\Sigma'_+}$. Таким образом,

$$\int\limits_{\Sigma'_+} b(u)_{\Sigma'_+}\eta\,ds = \lim_{\eta_n\to\eta \text{ в } H_\lambda} \hat{\mathscr{B}}(u, \eta_n-\eta), \tag{2.32}$$

где функции η и η_n такие же, как в (2.31). В дальнейшем элементы $\mathbf{u}=(u, (u)_{\Sigma'_+})$ подпространства V обозначаем просто в виде функций $u\in H_\lambda$. В частности, формулу (2.27) можно переписать в виде

$$\langle \mathscr{B}u, \eta\rangle = -\int\limits_{\Omega} u(b^i\eta)_{x_i}\,dx + \int\limits_{(\Sigma_2,3)_+} bu|_{(\Sigma_2,3)_+}\eta\,ds, \quad u\in V, \quad \eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega}). \tag{2.33}$$

Замечание 2.3. Ввиду леммы 2.3 условие (2.25) заведомо выполнено, если:

$$\text{для множества } \Sigma'_+ \text{ выполнено условие (4.3.2).} \qquad (2.34)$$

При выполнении условия (2.25) подпространство V отождествляется с некоторым подпространством в $\hat{H}_\lambda$. Поставим теперь вопрос: при каком условии функция $u \in \hat{H}_\lambda$ содержится в подпространстве V.

Лемма 2.8. *Пусть выполнено условие* (2.25). *Функция u, принадлежащая $\hat{H}_\lambda$, является элементом подпространства V тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *существует такая последовательность* $\{u_k\}$, $u_k \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots$, *что* $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{\hat{H}_\lambda} = 0$, $\lim\limits_{k,s\to\infty} \|u_k - u_s\|_X = 0$;

$$(2.35)$$

2) *для любой функции* $\eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$ *и любой последовательности* $\{\eta_k\}$, $\eta_k \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots$, *сходящейся к* η *в* H_λ, *справедливо равенство* $\lim\limits_{k\to\infty} \hat{\mathscr{B}}(u, \eta_k - \eta) = 0$.

Доказательство. Если $u \in V$, то справедливость условий (2.35) вытекает из определения подпространства V и леммы 2.7. В частности, условие 2) в (2.35) следует из равенства (2.32), поскольку при $\forall \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$ левая часть в (2.32) равна 0. Пусть теперь для какой-нибудь функции $u \in \hat{H}_\lambda$ выполнены условия (2.35). Тогда из условия 1) в (2.35) следует, что функция u является первой компонентой некоторого элемента $\mathbf{u} = (u, \varphi) \in X$. Замечая (см. (2.27) и (2.29)), что $\langle \mathscr{B}(u, \varphi), \eta\rangle = \hat{\mathscr{B}}(u, \eta)$, $\forall \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, выведем из условия 2) в (2.35), что для найденного элемента $\mathbf{u} = (u, \varphi)$ линейное отображение $\eta \to \langle \mathscr{B}(u, \varphi), \eta\rangle$ непрерывно на $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$ в норме H_λ. Поскольку множество $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$ плотно в H_λ, отсюда следует, что $\mathscr{B}(u, \varphi) \in H^*_\lambda$, т. е. $(u, \varphi) \in V$. Таким образом, при выполнении условия (2.35) функция u оказывается первой компонентой некоторого элемента подпространства V, с которой и отождествляется этот элемент. Лемма 2.8 доказана.

Обозначим через $\mathscr{A} : \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}) \subset X^* \to H^*_\lambda \subset X^* \subset Y^*$ оператор, определенный по формуле

$$\langle \mathscr{A}u, \eta\rangle = \int\limits_\Omega [\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l'_0(x, u, A\nabla u)\eta]\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_3} \lambda u|_{\Sigma_3} \eta ds, \quad u, \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}), \qquad (2.36)$$

где $\mathbf{l}'(x, u, q)$ и $l'_0(x, u, q)$ — функции из условия (1.2). Из леммы 2.1 и условий (1.3) следует, что при $\forall u \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ формула (2.36) определяет некоторый линейный в пространстве H_λ функционал $\mathscr{A}u \in H^*_\lambda$, поскольку, используя неравенство Гельдера, легко получить оценку

$$|\langle \mathscr{A}u, \eta\rangle| \leqslant c\|\eta\|_{H_\lambda}, \quad u, \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}), \qquad (2.37)$$

где константа c зависит от $\|\mathscr{A}u\|_{H_\lambda}$.

Лемма 2.9. *Оператор* $\mathscr{A} : \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}) \subset X \to H^*_\lambda$ *ограничен и непрерывен.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый оператор $\mathscr{N} : L^p(\Omega) \times \mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, где $p \geqslant 1$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q \geqslant 1$, определенный по формуле

$$\mathscr{N}(z, \mathbf{z}) = \Phi(x, z(x), \mathbf{z}(x)), \ (z, \mathbf{z}) \in L^p(\Omega) \times \mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\Omega), \qquad (2.38)$$

причем функция $\Phi(x, z, \mathbf{z})$ удовлетворяет в $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условию Каратеодори и условию: $\Phi(x, z(x), \mathbf{z}(x)) \in L^q(\Omega)$ при любых $z \in L^p(\Omega)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$. Хорошо известно (см. [51], с. 31—41), что такой оператор ограничен и непрерывен. Используя условия, наложенные на функции $\mathbf{l}(x, u, q)$ и $l'_0(x, u, q)$ в определении 1.1 (см., в частности, условия (1.3)), легко свести доказательство леммы 2.9 к применению указанной выше теоремы М. А. Красносельского. Лемма 2.9 доказана.

Следствие 2.1. *Оператор $\mathscr{A}: \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega}) \subset X \to H^*_\lambda$ допускает расширение на все пространство X с сохранением свойств ограниченности и непрерывности.*

Доказательство. Утверждение следствия 2.1 очевидным образом вытекает из леммы 2.9. Выпишем явный вид значений $\langle \mathscr{A}u, \eta \rangle$, $\mathbf{u} = (u, \varphi) \in X$, $\eta \in H_\lambda$, где через $\mathscr{A}$ обозначено указанное расширение оператора (2.36). Пусть последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится к $\mathbf{u} = (u, \varphi) \in X$ в X. Тогда $u_k \to u$ в $L^m(\Omega)$, $A\nabla u_k \to A\nabla u$ в $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega)$, $u_k|_{\Sigma_3} \to u|_{\Sigma_3}$ в $L^2(\lambda, \Sigma_3)$, где $A\nabla u$ — обобщенный A-градиент, а $u|_{\Sigma_3}$ — обобщенное предельное значение u на Σ_3 функции $u \in H_\lambda$. Применяя теорему Красносельского, устанавливаем, что функции $l'^i(x, u_k, A\nabla u_k)$ сходятся к $l'^i(x, u, A\nabla u)$ в $L^{m'_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, а функции $l'_0(x, u_k, A\nabla u_k)$ — к $l'_0(x, u, A\nabla u)$ в $L^{m'}(\Omega)$. Из доказанного следует, что

$$\langle \mathscr{A}\mathbf{u}, \eta \rangle = \int_\Omega [\mathbf{l}'(x\ u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l'_0(x, u, A\nabla u)\eta]\, dx + \\ + \int_{\Sigma_3} \lambda u|_{\Sigma_3} \eta|_{\Sigma_3} ds, \tag{2.39}$$

где $\mathbf{u} = (u, \varphi) \in X$, $\eta \in H_\lambda$, причем в (2.39) через $A\nabla u$, $A\nabla\eta$ обозначены обобщенные A-градиенты функций u, η, а через $u|_{\Sigma_3}$, $\eta|_{\Sigma_3}$ — их обобщенные предельные значения на Σ_3. Следствие 2.1 доказано.

Далее через $\mathscr{A}: X \to H^*_\lambda$ всегда обозначается указанный выше расширенный оператор $\mathscr{A}$. Обозначим через $\mathscr{L}: X \to Y^*$ оператор, определенный по формуле:

$$\mathscr{L} = \mathscr{A} + \mathscr{B},\ \mathscr{A}: X \to H^*_\lambda \subset X^* \subset Y^* \text{ определен по формуле (2.39)}, \\ \mathscr{B}: X \to Y^* \text{ определен формулой (2.22).} \tag{2.40}$$

Из установленных выше свойств операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.10. *Оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$, определенный по формуле* (2.40), *ограничен и непрерывен.*

Очевидно, что оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$, определенный по формуле (2.40), однозначно определяется своими значениями $\langle \mathscr{L}u, \eta \rangle$, u, $\eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$, имеющими вид:

$$\langle \mathscr{L}u, \eta \rangle = \int_\Omega \left[\mathbf{l}' \cdot A\nabla\eta + l'_0\eta - u\frac{\partial}{\partial x_i}(b^i\eta)\right] dx + \\ + \int_{(\Sigma_2, s)_+ \cup \Sigma'_+} bu\eta ds + \int_{\Sigma_3} \lambda u\eta ds, \quad u, \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega}). \tag{2.41}$$

Сравнивая формулы (1.37) и (2.41), заключаем, что построенный оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ естественно называть оператором, соответствующим общей краевой задаче для уравнения (1.35), имеющего $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-структуру в области Ω.

§ 3. Обобщенная постановка общей краевой задачи для $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, класса $\tilde{C}^{(1)}$ уравнение вида (1.35), имеющее $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-структуру в этой области, предполагая, что выполнено условие (2.1) и произведено разбиение правильной части $\Sigma \subset \partial\Omega$ на множества Σ_1, Σ_2, Σ_3 и множеств Σ_i и Σ' — на подмножества $(\Sigma_i)_0$, $(\Sigma_i)_+$, $(\Sigma_i)_-$, $i=1, 2, 3$, Σ'_0, Σ'_+, Σ'_- так, как описано в начале § 2. В частности, предполагается, что выполнено условие (2.8). Предположим, что на множестве Σ_3 задана кусочно-непрерывная ограниченная положительная функция λ. Предположим также, что выполнено условие (2.25). Справедливость всех перечисленных выше условий мы всегда предполагаем в пределах этого параграфа. При таких условиях в § 2 введены и изучены пространства H_λ, X, Y (см. (2.2), (2.10), (2.11)), подпространство V (см. (2.24), (2.22)) и оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ (см. (2.40)), соответствующий общей краевой задаче вида

$$-\frac{d}{dx_i} l^i + l_0 = f \text{ в } \Omega,\ u=0 \text{ на } \Sigma_1 \cup \Sigma'_-, \quad \mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} + cu = 0 \text{ на } \Sigma_2,$$
$$\mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} + (c-\lambda)u = 0 \text{ на } \Sigma_3, \tag{3.1}$$

где $c=0$ на $(\Sigma_{2,3})_{0,+}$, $c=b(x)$ на $(\Sigma_{2,3})_-$, причем функция $b(x)$ определена по формуле (1.22).

Обобщенным решением (энергетического типа) *) задачи (3.1) будем называть всякую функцию $u \in V$, удовлетворяющую операторному уравнению

$$\mathscr{L}u = F, \tag{3.2}$$

где $\mathscr{L}: X \to Y^*$ — оператор, соответствующий задаче (3.1) (см. (2.40)), а элемент $F \in H_\lambda^*$ определен по формуле $\langle F, \eta\rangle = \int\limits_\Omega f(x)\eta(x)\,dx$, $\eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$.

Ввиду условия (2.25) и леммы 2.7 всякий элемент $u \in V$ представляет собой некоторую функцию $u(x)$, принадлежащую пространству $\hat{H}_\lambda$. Поскольку $V \subset X$, то из определения пространства X и правильности части $\Sigma \subset \partial\Omega$ следует, что всякая функция $u \in V$ имеет обобщенное предельное значение $u|_{\tilde{\Sigma}}$ на множестве $\tilde{\Sigma} \equiv \Sigma_1 \cup (\Sigma_{2,3})_\pm \cup \Sigma_3$, причем функция u принимает свое предельное значение $u|_{\tilde{\Sigma}}$ в следующем усиленном (по сравнению с общим определением обобщенного предельного значения функции $u \in H_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$, данным в § 4.2) смысле: существует такая последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$, $k=1, 2, \ldots$, что $u_k \to u$ в $\hat{H}_\lambda$, $u_k|_{\tilde{\Sigma}} \to u|_{\tilde{\Sigma}}$ в $L^1_{\text{loc}}(\tilde{\Sigma}) \cap L^2(|b|, (\Sigma_{2,3})_\pm) \cap L^2(\lambda, \Sigma_3)$. Действительно, из сходимости последовательности $\{u_k\}$ в X следует, в частности, сходимость $\{u_k|_{\tilde{\Sigma}}\}$ в $L^1_{\text{loc}}(\tilde{\Sigma})$ к некоторому элементу $\psi \in L^1_{\text{loc}}(\tilde{\Sigma})$, причем $\psi|_{\Sigma_1}=0$, $\psi|_{(\Sigma_{2,3})_\pm} \in L^2(|b|, (\Sigma_{2,3})_\pm)$, $\psi|_{\Sigma_3} \in L^2(\lambda, \Sigma_3)$; этот элемент $\psi \in L^1_{\text{loc}}(\tilde{\Sigma})$ и является обобщенным предельным значением функции u на множестве $\tilde{\Sigma}$. Условимся в дальнейшем в этой главе под словами «функция $u \in \hat{H}_\lambda$ имеет обобщенное предельное значение $u|_{\tilde{\Sigma}}$ на множестве $\tilde{\Sigma}$» понимать, что это свойство выполняется в указанном выше усиленном смысле.

---

*) Поскольку в пределах этой главы мы не будем рассматривать для задачи (3.1) обобщенных решений других типов, то в дальнейшем в этой главе мы именуем определяемые решения задачи (3.1) просто обобщенными решениями.

Учитывая перечисленные свойства элементов подпространства V, а также плотность $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$ в H_λ, вытекающую из условия (2.25) (см. замечание 2.3), можно сказать, что обобщенным решением задачи (3.1) называется всякая функция $u\in V\subset\hat{H}_\lambda$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$
\begin{gathered}
\langle\mathscr{L}u,\ \eta\rangle\equiv\int\limits_\Omega\Big[\mathbf{l}'(x,\ u,\ A\nabla u)\cdot A\nabla\eta+l'_0(x,\ u,\ A\nabla u)\,\eta-\\
-u\frac{\partial}{\partial x_i}(b^i\eta)\Big]dx+\int\limits_{\Sigma_3}\lambda u\,|_{\tilde{\Sigma}}\eta ds+\int\limits_{(\Sigma_{2,3})_+}bu\,|_{\tilde{\Sigma}}\eta ds=\langle F,\ \eta\rangle, \qquad (3.3)\\
\forall\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega}),
\end{gathered}
$$

где $A\nabla u$ — обобщенный A-градиент, а $u|_{\tilde{\Sigma}}$ — обобщенное предельное значение на $\tilde{\Sigma}$ функции u.

Предложение 3.1. *Всякая функция* $u\in\hat{H}_\lambda$, *имеющая обобщенное предельное значение* $u|_{\tilde{\Sigma}}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\tilde{\Sigma})\cap L^2(|b|,\ (\Sigma_{2,3})_\pm)\cap L^2(\lambda,\ \Sigma_3)$, *удовлетворяющая тождеству* (3.3), ***принадлежит подпространству** V и, следовательно, является обобщенным решением задачи* (3.1).

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.8. Из условия $u\in\hat{H}_\lambda$ и существования для функции u обобщенного предельного значения $u|_{\tilde{\Sigma}}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\tilde{\Sigma})\cap L^2(|b|,\ (\Sigma_{2,3})_\pm)\cap L^2(\lambda,\ \Sigma_3)$ следует, что найдется такая последовательность $\{u_k\}$, $u_k\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$, $k=1,\ 2,\ldots$, для которой выполнены условия: $\lim\limits_{k\to\infty}\|u_k-u\|_{\hat{H}_\lambda}=0$, $\lim\limits_{k,\,s\to\infty}\|u_k-u_s\|_X=0$. С другой стороны, для $\forall\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$ и $\forall\{\eta_k\}$, $\eta_k\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, $k=1,\ 2,\ldots$, сходящейся к η в H_λ, из (3.3) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\mathscr{B}(u,\ \eta_k-\eta)=0$. Таким образом, оба условия в (2.35) выполнены, откуда и следует, что $u\in V$. Предложение 3.1 доказано.

Замечание 3.1. Для того чтобы придать в дальнейшем результатам по разрешимости задачи (3.1) замкнутый характер, нам удобно в (3.2) (а следовательно, и в (3.3)) понимать под F произвольный элемент из H^*_λ. Поэтому условимся считать, что в (3.1) $f\equiv F\in H^*_\lambda$. Следует, однако, иметь в виду, что замена функции $f\in L^{m'}(\Omega)$ в (3.1) на произвольный элемент $F\in H^*_\lambda$ фактически искажает вид задачи. Ввиду леммы 2.1 задачу (3.1) с $f\equiv F\in H^*_\lambda$, реализованным в виде (2.3), можно переписать в виде

$$
\begin{gathered}
-\frac{d}{dx_i}l^i+l_0=0 \text{ в } \Omega,\ u=0 \text{ на } \Sigma_1\cup\Sigma'_-,\ \tilde{\mathbf{l}}'\cdot A\boldsymbol{\nu}+cu=\mathbf{f}\cdot A\boldsymbol{\nu} \text{ на } \Sigma_2,\\
\tilde{\mathbf{l}}'\cdot A\boldsymbol{\nu}+(c-\lambda)u=\mathbf{f}\cdot A\boldsymbol{\nu}+\lambda\psi \text{ на } \Sigma_3,
\end{gathered}
\qquad (3.1')
$$

где $c=0$ на $(\Sigma_{2,3})_{0,+}$ и $c=b(x)$ на $(\Sigma_{2,3})_-$.

Замечание 3.2. Из предложения 1.5 следует, что всякое гладкое в $\bar{\Omega}$ решение задачи (3.1) является и обобщенным решением этой задачи. Если u — обобщенное решение задачи (3.1), то его обращение в 0 на Σ_1 обеспечивается принадлежностью к пространству $H_\lambda\equiv\overset{0,\Sigma_1}{H}_{m,m}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ и условием правильности множества $\Sigma_1\subset\Sigma$.

При выделении конкретных условий, гарантирующих правильность множества Σ, становится ясно, в каком смысле из принадлежности функции u к пространству H_λ вытекает ее обращение в 0 на Σ_1. Заметим, что при выполнении, например, для множества Σ_1 условия (4.2.5) функция $u\in H_\lambda$ обращается в 0 на Σ_1 в том смысле, что для всех внутренних точек Σ_1

выполняются равенства вида (4.2.16) с заменой $u|_{\pi}$ на 0. Удовлетворение обобщенным решением остальным граничным условием в (3.1) определяется самим интегральным тождеством (3.3). Очевидно, что если обобщенное решение задачи (3.1) и функции, образующие уравнение (1.35), достаточно гладкие, а область $\Omega \in C^2$, то такое обобщенное решение является и классическим решением этой задачи.

§ 4. Условия существования и единственности обобщенного решения общей краевой задачи

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, класса $\tilde{C}^{(1)}$ общую краевую задачу вида (3.1) для уравнения (1.35), имеющего (A, $\mathbf{b}$, m, $\mathbf{m}$)-структуру в Ω, предполагая, что выполнены условия (2.1), (2.8), (2.34). При таких условиях в § 3 дано определение обобщенного решения (энергетического типа) задачи (3.1). Для доказательства существования и единственности такого решения задачи (3.1) мы воспользуемся результатами § 4.6. Из результатов § 2 следует, что для рассмотренных в нем пространств $H \equiv H_\lambda$, X и Y, возникающих в связи с обобщенной постановкой задачи (3.1), выполнены все условия, предъявляемые к пространствам H, X и Y в § 4.6. В частности, выполнено условие (4.6.6), причем в роли множества $\mathfrak{N}$ из (4.6.6) выступает здесь множество $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\overline{\Omega})$. Для оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$, соответствующего задаче (3.1), выполнено, очевидно, условие (4.6.7). Заметим, что в этом параграфе под оператором $\mathscr{L}: X \to Y^*$ всегда понимается оператор, соответствующий задаче (3.1) (см. (2.40)), а под операторами $\mathscr{A}: X \to H^*$ и $\mathscr{B}: X \to Y^*$ — его составляющие (см. (2.39) и (2.22)), где $H \equiv H_\lambda$, X и Y — пространства, определенные в § 2.

Из результатов § 4.6 вытекают непосредственно следующие результаты по обобщенной разрешимости задачи 3.1.

Теорема 4.1. *Предположим, что*:

1) *для уравнения* (1.35), *имеющего* (A, $\mathbf{b}$, m, $\mathbf{m}$)-*структуру в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *класса* $\tilde{C}^{(1)}$, *выполнены условия* (2.1), (2.8), (2.34);

2) *для оператора* $\mathscr{B}: X \to Y^*$ *выполнено условие* (4.6.9);

3) *для подпространства* V, *определенного по формуле* (2.24), *выполнено условие вида* (4.6.10), *т. е.* $V \cap Y$ *плотно в* X;

4) *функция* $v \to \langle \mathscr{B}v, v \rangle$, $v \in V$, *непрерывна в норме* $\|\cdot\|_X$.

Предположим также, что оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ *локально коэрцитивен* [*коэрцитивен*] *и имеет полуограниченную вариацию. Тогда задача* (3.1) *при* $F = 0$ [*задача* (3.1) *при* $\forall F \in H_\lambda^*$] *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Теорема 4.1 вытекает из теоремы 4.6.1 и следствия 4.6.2. Из теорем 4.6.3, 4.6.4 вытекают следующие результаты о единственности обобщенного решения задачи (3.1).

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условие* 1) *теоремы* 4.1 *и условие вида* (4.6.23) (*в частности, условие* (4.6.23) *выполнено, если оператор* $\mathscr{A}: X \to H^*$ *строго монотонен и* $\langle \mathscr{B}v, v \rangle \geqslant 0$ $\forall v \in V$). *Тогда при* $\forall F \in H_\lambda^*$ *задача* (3.1) *имеет не более одного обобщенного решения.*

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* 1), 3), 4) *теоремы* 4.1, *и пусть оператор* $\mathscr{L}: X \to Y^*$ *равномерно монотонен. Тогда при* $\forall F \in H_\lambda^*$ *задача* (3.1) *имеет не более одного обобщенного решения.*

Из теоремы 4.6.5 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* 1)—4) *теоремы* 4.1, *и пусть оператор* $\mathscr{L}: X \to Y^*$ *сильно монотонен. Тогда при* $\forall F \in H_\lambda^*$ *задача* (3.1) *имеет точно одно обобщенное решение, причем сужение* $\mathscr{L}: (V \subset X) \to (H_\lambda^* \subset Y^*)$ *оператора* $\mathscr{L}: X \to Y^*$ *на множество* V *есть гомеоморфизм.*

Наконец, из теоремы 4.6.2 вытекает следующий результат.

Теорема 4.5. *Пусть выполнено условие* 1) *теоремы* 4.1. *Предположим также, что оператор* $\mathscr{A}: X \to H_\lambda^*$ *слабо компактен, а оператор* $\mathscr{L}: X \to Y^*$ *локально коэрцитивен* [*коэрцитивен*]. *Тогда задача* (3.1) *при* $F = 0$ [*задача* (3.1) *при* $\forall F \in H_\lambda^*$] *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Далее мы приводим достаточные условия справедливости условий 2), 3) перечисленных выше теорем, а также алгебраические критерии выполнимости условий локальной коэрцитивности, коэрцитивности, монотонности и сильной монотонности оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$.

Лемма 4.1. *Предположим, что выполнено условие*

$$\|u\|_{L^2(|b|, \Sigma'_-)} \leqslant c\|u\|_Y, \quad \forall u \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega}), \tag{4.1}$$

где константа c *не зависит от функции* $u \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$. *Тогда функции* $u \in Y$ *имеют след* $u|_{\Sigma'_-} \in L^2(|b|, \Sigma'_-)$, *а сужение оператора* $\mathscr{B}: X \to Y^*$ *на множество* Y *определяется по формуле*

$$\langle \mathscr{B}u, \eta \rangle = \int_\Omega b^i u_{x_i} \eta dx + \int_{(\Sigma_{2,3})_- \cup \Sigma'_-} |b| u\eta ds, \quad u \in Y, \quad \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega}). \tag{4.2}$$

Доказательство. Из условия (4.1) сразу следует, что если $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к $u \in Y$ в Y, то последовательность $\{u_n|_{\Sigma'_-}\}$ сходится в $L^2(|b|, \Sigma'_-)$ к некоторой функции $(u)_- \in L^2(|b|, \Sigma'_-)$, которая, очевидно, и является следом функции $u \in Y$ на Σ'_-. Используя (2.22) и применяя формулу интегрирования по частям, получим, что

$$\langle \mathscr{B}u_n, \eta \rangle = \int_\Omega b^i (u_n)_{x_i} \eta dx + $$
$$+ \int_{(\Sigma_{2,3})_- \cup \Sigma'_-} |b| u_n \eta ds, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \forall \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega}). \tag{4.3}$$

Переходя в (4.3) к пределу при $n \to \infty$, получим равенство (4.2). Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Пусть выполнено условие* (4.1), *и пусть для каждого из множеств* Σ' *и* Σ'_+ *выполнено условие* (4.3.2), *а для множества* $(\Sigma_{2,3})_-$ — *условие* (4.2.25), *причем* $m_* = \min(m, m_1, \ldots, m_2) \geqslant 2$. *Тогда для принадлежности функции* $u \in Y$ *к подпространству* V *необходимо и достаточно, чтобы* $u = 0$ *на* Σ'_-.

Доказательство. Ввиду справедливости условия (4.3.2) для Σ'_+ и леммы 2.8 функция $u \in Y$ принадлежит V тогда и только тогда, когда для нее выполнено условие 2) в (2.35), т. е. $\lim\limits_{k \to \infty} \mathscr{B}(u, \eta_k - \eta) = 0$ при $\forall \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Sigma'_+}(\bar{\Omega})$ и любой последовательности $\{\eta_k\}$, $\eta_k \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к η в H_λ. Применяя формулу интегрирования по частям, перепишем $\mathscr{B}(u, \eta_k - \eta)$ в виде

$$\mathscr{B}(u, \eta_k - \eta) = \int_\Omega b^i u_{x_i} (\eta_k - \eta) dx + \int_{(\Sigma_{2,3})_- \cup \Sigma'_-} |b| u (\eta_k - \eta) ds, \tag{4.4}$$

где η и $\{\eta_k\}$ — такие, как описано выше. Ввиду условия (4.2.25) для $(\Sigma_{2,3})_-$ равенство $\lim\limits_{\eta_k\to\eta \text{ в } H_\lambda} \hat{\mathscr{B}}(u, \eta_k-\eta)=0$ для указанных η и $\{\eta_k\}$ равносильно равенству

$$\lim_{\eta_k\to\eta \text{ в } H_\lambda} \int\limits_{\Sigma'_-} bu(\eta_k-\eta)\,ds=0. \tag{4.5}$$

Таким образом, функция $u\in Y$ принадлежит V тогда и только тогда, когда для любых η и $\{\eta_k\}$, обладающих указанными выше свойствами, справедливо равенство (4.5). Если $u=0$ на Σ'_-, то справедливость (4.5) очевидна, так что в этом случае $u\in V$. Докажем теперь, что из справедливости (4.5) вытекает, что $u=0$ на Σ'_-. Пусть η — любая фиксированная функция из $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$. Ввиду того что множество Σ' удовлетворяет условию (4.3.2) (см. (2.1)), существует последовательность $\{\eta_k\}$, $\eta_k\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$, $k=1, 2, \ldots$, сходящаяся к выбранной функции η в H_λ (см. лемму 2.3). Тогда $\int\limits_{\Sigma'_-} bu\eta\,ds=0$ для $\forall\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega})$. Ввиду произвола η и условия $b\neq 0$ на Σ'_- отсюда легко следует, что $u=0$ на Σ'_-. Лемма 4.2 доказана.

Предложение 4.1. *Пусть выполнено условие* (4.1), *и пусть для каждого из множеств* Σ' *и* Σ'_+ *выполнено условие* (4.3.2), *а для множества* $(\Sigma_{2,3})_-$ — *условие* (4.2.25), *причем* $m^*=\min(m, m_1, \ldots, m_n)\geqslant 2$. *Тогда условие* 2) *теоремы* 4.1 *выполнено, т. е. для оператора* $\mathscr{B}: X\to Y^*$ *справедливо условие* (4.6.9).

Доказательство. Ввиду леммы 4.2 и равенства (4.2) сужение оператора $\mathscr{B}: X\to Y^*$ на множество $V\cap Y$ определяется по формуле

$$\langle\mathscr{B}u, \eta\rangle=\int\limits_\Omega b^i u_{x_i}\eta\,dx+\int\limits_{(\Sigma_{2,3})_-}|b|u\eta\,ds,\quad u\in V\cap Y,\quad \eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}),$$

из которой легко следует неравенство

$$|\langle\mathscr{B}u, \eta\rangle|\leqslant\|u\|_Y\|\eta\|_X,\quad u\in V\cap Y,\quad \eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}).$$

Ввиду плотности $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ в X отсюда и следует, что сужение оператора $\mathscr{B}: X\to Y^*$ на множество $V\cap Y$ есть линейный ограниченный оператор из $(V\cap Y)\subset Y$ в X^*. Предложение 4.1 доказано.

Лемма 4.3. *Пусть для множества* Σ'_- *выполнено условие вида* (4.3.2). *Тогда множество* $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_-}(\bar{\Omega})$ *плотно в* X.

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что для любой $u\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_-}(\bar{\Omega})$, $n=1, 2, \ldots$, сходящаяся к u в X. Рассмотрим последовательность $\{u_{\delta_n}\}$, где u_δ определена для фиксированной функции $u\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ по формуле (4.3.10) при $\mathscr{P}\equiv\Sigma'_-$, а $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Точно так же как при доказательстве леммы 4.3.1, устанавливаем, что $u_{\delta_n}\to u$ в H_λ. Учитывая, что $u_\delta=u$ вне некоторой n-мерной окрестности множества Σ'_-, стягивающейся к Σ'_- при $\delta\to 0$ (см. условие 2) в (4.3.2)), убеждаемся, что $u_{\delta_n}\to u$ в $L^2(\beta, \Omega_\beta)$. Учитывая, наконец, что $(\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_+$ не пересекается с Σ'_- и что $\operatorname{mes}_{n-1}\partial\Sigma'_-=0$ (см. (2.8)), устанавливаем, что $u_{\delta_n}\to u$ в $L^2(|b|, (\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_+)$. Из доказанного и следует, что $u_{\delta_n}\to u$ в X. Лемма 4.3 доказана.

Предложение 4.2. *Пусть для каждого из множеств* Σ', Σ'_+ *и* Σ'_- *выполнено условие* (4.3.2), *а для множества* $(\Sigma_{2,3})_-$ — *условие* (4.2.25). *Пусть* $m_* = \min(m, m_1, \ldots, m_n) \geqslant 2$. *Тогда условие* 3) *теоремы* 4.1 *выполнено, т. е.* $V \cap Y$ *плотно в* X.

Доказательство. Очевидно, что $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Sigma'_-}(\bar{\Omega}) \subset Y$. Ввиду леммы 4.2 $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Sigma'_-}(\bar{\Omega}) \subset V$, так что $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Sigma'_-}(\bar{\Omega}) \subset V \cap Y$. Ввиду леммы 4.3 $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Sigma'_-}(\bar{\Omega})$ плотно в X. Следовательно, $V \cap Y$ плотно в X. Предложение 4.2 доказано.

Предложение 4.3. *Пусть при п. в.* $x \in \Omega$ *и любых* $u \in \mathbb{R}$, $q = Ap$, $p \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$l'^i(x, u, q) q_i + l'_0(x, u, q) u - \frac{1}{2} \frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i} u^2 \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Тогда оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ *локально коэрцитивен.*

Доказательство. Пусть сначала $u \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\langle \mathscr{L}u, u \rangle = \int_\Omega \left[\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla u + l'_0(x, u, A\nabla u) u - \frac{\partial b^i}{\partial x_i} u^2 - b^i u u_{x_i} \right] dx +$$
$$+ \int_{\Sigma_3} \lambda u^2 ds + \int_{(\Sigma_{2,3})_+ \cup \Sigma'_+} b u^2 ds = \int_\Omega \left[\mathbf{l}' \cdot A\nabla u + l'_0 u - \frac{1}{2} \frac{\partial b^i}{\partial x_i} u^2 \right] dx +$$
$$+ \int_{\Sigma_3} \lambda u^2 ds + \frac{1}{2} \int_{(\Sigma_{2,3})_\pm \cup \Sigma'_\pm} |b| u^2 ds. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) следует неравенство

$$\langle \mathscr{L}u, u \rangle \geqslant 0, \quad \forall u \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}). \tag{4.8}$$

Учитывая, что $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ плотно в Y, $Y \to X$, а также что оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ непрерывен, заключаем, что неравенство (4.8) справедливо при всех $u \in Y$. Предложение 4.3 доказано.

Предложение 4.4. *Пусть при п. в.* $x \in \Omega$ *и любых* $u \in \mathbb{R}$, $q = Ap$, $p \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$l'^i(x, u, q) q_i + l'_0(x, u, q) u - \frac{1}{2} \frac{\partial b^i}{\partial x_i} u^2 \geqslant$$
$$\geqslant \nu_1 \sum_{i=1}^n |q_i|^{m_i} + \nu_2 |u|^m + \nu_3 \beta(x) u^2 - \varphi(x), \tag{4.9}$$

где ν_1, ν_2, ν_3 — *положительные константы, а* $\varphi \in L^1(\Omega)$. *Тогда оператор* $\mathscr{L}: X \to Y^*$ *коэрцитивен.*

Доказательство. Пусть сначала $u \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$. Для такой функции справедливо равенство (4.7). Используя условие (4.9), оценим

$$\langle \mathscr{L}u, u \rangle \geqslant \nu_1 \sum_{i=1}^n \|A_i \nabla u\|^{m_i}_{m_i,\Omega} + \nu_2 \|u\|^m_{m,\Omega} +$$
$$+ \nu_3 \|u\|^2_{L^2(\beta,\Omega_\beta)} + \|u\|^2_{L^2(\lambda,\Sigma_3)} + \frac{1}{2} \int_{(\Sigma_{2,3})_\pm \cup \Sigma'_\pm} |b| u^2 ds - \int_\Omega \varphi(x)\, dx. \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует, что для всякой функции $u \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющей условию $\|u\|_X \geqslant n + 3$, справедливо неравенство

$$\langle \mathscr{L}u, u \rangle \geqslant c \|u\|^{m_*}_X - \int_\Omega \varphi(x)\, dx, \tag{4.11}$$

где $c = \min(\nu_1, \nu_2, \nu_3, 1/2)(n+3)^{-m_*}$, $m_* = \min(m_1, \ldots, m_n, m, 2) > 1$. Учитывая непрерывность оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$, плотность $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ в Y и вложение $Y \to X$, заключаем, что неравенство (4.11) справедливо и для всякой функции $u \in Y$, удовлетворяющей условию $\|u\|_X \geqslant n+3$. Поскольку $m_* > 1$, то отсюда легко следует справедливость условия вида (4.5.1). Предложение 4.4 доказано.

Предложение 4.5. *Пусть при п. в.* $x \in \Omega$ *и любых* $u \in \mathbb{R}$, $q = Ap$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\eta = A\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial l'^i}{\partial q_j}\eta_i\eta_j + \frac{\partial l'^i}{\partial u}\xi_0\eta_i + \frac{\partial l'_0}{\partial q_j}\eta_j\xi_0 + \frac{\partial l'_0}{\partial u}\xi_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial b^i}{\partial x_i}\xi_0^2 \geqslant 0. \tag{4.12}$$

Тогда оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ *монотонен (а следовательно, и имеет полуограниченную вариацию).*

Доказательство. Пусть сначала $u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$. Преобразуем выражение $\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v, u - v\rangle$ следующим образом:

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v, u-v\rangle = \int_\Omega \Big\{[\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) - \mathbf{l}'(x, v, A\nabla v)]\cdot A\nabla(u-v) +$$
$$+ [l'_0(x, u, A\nabla u) - l'_0(x, v, A\nabla v)](u-v) - (u-v)\frac{\partial}{\partial x_i}[b^i(u-v)]\Big\}dx +$$
$$+ \int_{\Sigma_3}\lambda(u-v)^2 ds + \int_{(\Sigma_{2,3})_\pm \cup \Sigma'_+} b(u-v)^2 ds = \int_\Omega\int_0^1\Big\{\frac{d}{d\tau}[l'^i(x, v +$$
$$+ \tau(u-v), A\nabla v + \tau A\nabla(u-v))]A_i\nabla(u-v) + \frac{d}{d\tau}[l'_0(x, v +$$
$$+ \tau(u-v), A\nabla v + \tau A\nabla(u-v))](u-v)\Big\}d\tau dx + \int_\Omega b^i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{1}{2}(u-v)^2\Big]dx +$$
$$+ \int_{\Sigma_3}\lambda(u-v)^2 ds = \int_\Omega\int_0^1\Big[\frac{\partial l'^i(x, v+\tau(u-v), A\nabla v + \tau A\nabla(u-v))}{\partial q_j}\times$$
$$\times A_j\nabla(u-v)A_i\nabla(u-v) + \frac{\partial l'^i(x, v+\tau(u-v), A\nabla v + \tau A\nabla(u-v))}{\partial u}\times$$
$$\times(u-v)A_i\nabla(u-v) + \frac{\partial l'_0(x, v+\tau(u-v), A\nabla v + \tau A\nabla(u-v))}{\partial q_j}\times$$
$$\times A_j\nabla(u-v)(u-v) + \frac{\partial l'_0(x, v+\tau(u-v), A\nabla v + \tau A\nabla(u-v))}{\partial u}(u-v)^2\Big]\times$$
$$\times d\tau dx - \frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i}(u-v)^2 dx + \int_{\Sigma_3}\lambda(u-v)^2 ds +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{(\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma'_\pm}|b|(u-v)^2 ds. \tag{4.13}$$

Ввиду условия (4.12) из равенства (4.13) следует неравенство

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v, u-v\rangle \geqslant 0, \quad u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}). \tag{4.14}$$

Учитывая, что оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ непрерывен, а также плотность $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ в Y и вложение $Y \to X$, заключаем, что первое условие в (4.6.4) справедливо при любых $u, v \in Y$. Предложение 4.5 доказано.

Предложение 4.6. *Пусть при п. в.* $x \in \Omega$ *и любых* $u \in \mathbb{R}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $q = Ap$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\eta = A\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial l'^i(x, u, q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j + \frac{\partial l'^i(x, u, q)}{\partial u}\xi_0\eta_j + \frac{\partial l'_0(x, u, q)}{\partial q_j}\eta_j\xi_0 + \frac{\partial l'_0(x, u, q)}{\partial u}\xi_0^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i}\xi_0^2 \geqslant \alpha_0\Big[\sum_{i=1}^n |q_i|^{m_i-2}\xi_i^2 + (|u|^{m-2} + \beta(x))\xi_0^2\Big], \quad \alpha_0 = \mathrm{const} > 0, \tag{4.15}$$

причем

$$m_i \geqslant 2, \quad i=1, \ldots, n; \quad m \geqslant 2. \tag{4.16}$$

Тогда оператор $\mathscr{L}: X \to Y^*$ сильно монотонен.

Доказательство. Пусть сначала $u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$. При доказательстве предложения 4.5 было установлено, что для таких функций справедливо равенство (4.13). Ввиду условия (4.15) из (4.13) следует оценка

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v,\ u-v \rangle \geqslant \alpha_0 \int_\Omega \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n |A_i \nabla v + \tau A_i \nabla (u-v)|^{m_i-2} \times \right.$$

$$\left. \times |A_i \nabla (u-v)|^2 + |v+\tau(u-v)|^{m-2}(u-v)^2 + \beta(x)(u-v)^2 \right] d\tau dx +$$

$$+ \int_{\Sigma_3} \lambda (u-v)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{(\Sigma_{2,s})_\pm \cup \Sigma'_\pm} |b|(u-v)^2 ds, \tag{4.17}$$

справедливая для любых $u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$. Учитывая элементарное равенство

$$\int_0^1 |\mathbf{a} + \tau(\mathbf{b}-\mathbf{a})|^{q-2} d\tau \geqslant c_1 |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^{q-2}, \tag{4.18}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — фиксированные векторы (любой конечной размерности), $q \geqslant 2$, $c_1 > 0$ — константа, зависящая лишь от q, выведем из (4.17) оценку

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v,\ u-v \rangle \geqslant \alpha_0 c_1 \left[\sum_{i=1}^n \|A_i \nabla (u-v)\|^{m_i}_{m_i, \Omega} + \|u-v\|^m_{m,\Omega} + \right.$$

$$\left. + \|u-v\|^2_{L^2(\beta,\Omega_\beta)} \right] + \int_{\Sigma_3} \lambda (u-v)^2 ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{(\Sigma_{2,s})_\pm \cup \Sigma'_\pm} |b|(u-v)^2 ds, \quad u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}). \tag{4.19}$$

Из (4.19) следует, что для любых $u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих неравенству $\|u-v\|_X \leqslant 1$, справедлива оценка

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v,\ u-v \rangle \geqslant c_2 \|u-v\|^{m^*}_X, \tag{4.20}$$

где $c_2 = \min(\alpha_0 c_1, 1/2)$, $m^* = \max(m_1, \ldots, m_n, 2) \geqslant 2$, а для любых $u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих неравенству $\|u-v\|_X \geqslant n+4$, — оценка

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v,\ u-v \rangle \geqslant c_3 \|u-v\|^{m_*}_X, \tag{4.21}$$

где $c_3 = c_2(n+4)^{-m_*}$, $m_* = \min(m_1, \ldots, m_n, m, 2) = 2$. Наконец, для любых $u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\Omega)$, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant \|u-v\|_X \leqslant n+4$, из (4.19) вытекает, очевидно, как оценка (4.20), так и оценка (4.21) с некоторыми константами $\tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_3$ соответственно, зависящими лишь от $n, m, m_1, \ldots, m_n$. Таким образом, при любых $u, v \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ справедлива оценка

$$\langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v,\ u-v \rangle \geqslant \delta(\|u-v\|_X)\|u-v\|_X, \tag{4.22}$$

где $\delta(\rho) = c \min(\rho^{m^*}, \rho^{m_*})\rho^{-1}$, $c = \min(c_2, c_3, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$. Очевидно, что функция $\delta(\rho)$ непрерывна, возрастает, равна 0 лишь при $\rho = 0$ и $\lim\limits_{\rho \to +\infty} \delta(\rho) = +\infty$.

Ввиду плотности $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$ в Y, непрерывности оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$ и непрерывности функции $\delta(\rho)$ оценка (4.22) остается справедливой и при любых $u, v \in Y$. Но это и означает выполнение условия сильной монотонности оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$ (см. второе неравенство в 4.6.4). Предложение 4.6 доказано.

В дальнейшем для так называемых слабо вырожденных $(A, \mathbf{0})$-эллиптических уравнений будут даны другие критерии коэрцитивности, а также критерии полуограниченности вариации оператора $\mathscr{L}: X \to Y^*$.

Таким образом, все предположения теорем 4.1—4.4, за исключением условия 4) теоремы 4.1, получили выше конкретные достаточные условия их выполнимости. Что касается условия 4), то его проверка требует выделения более частных классов $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений. Во всяком случае в гл. 7 и 8 такая проверка будет проведена для классов $(A, 0, m, \mathbf{m})$-эллиптических и $(A, 0, m, \mathbf{m})$-параболических уравнений, наиболее интересных с прикладной точки зрения.

§ 5. Линейные $(A, \mathbf{b})$-эллиптические уравнения

В этом параграфе мы предполагаем, что уравнение (1.35) линейно, т. е. имеет вид

$$-\frac{d}{dx_i}(\alpha^{ij}u_{x_j} + \alpha^i u + g^i) + \beta^i u_{x_i} + \beta_0 u + g_0 = f, \tag{5.1}$$

где α^{ij}, α^i, g^i, β^i, β_0, g_0 — измеримые в Ω функции, причем $\alpha^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ в Ω при $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha^{ij} = \alpha^{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предположим, что при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}p + \boldsymbol{\alpha}u + \mathbf{g} = A^*(QAp + \mathbf{a}u + \mathbf{f}),\\ \boldsymbol{\beta}\cdot p + \beta_0 u + g_0 = \boldsymbol{\gamma}\cdot Ap + a_0 u + f_0 + b^i p_i,\end{gathered} \tag{5.2}$$

где

$$\mathfrak{A} \equiv \|\alpha^{ij}\|, \ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n), \ \mathbf{g} = (g^1, \ldots, g^n), \ \boldsymbol{\beta} = (\beta^1, \ldots, \beta^n),$$
$$A \equiv \|a^{ij}\|, \ Q = \|q^{ij}\|, \ \mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n), \ \mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^n), \ \boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \ldots \gamma^n),$$

причем a^{ij}, a^i, f^i, γ^i, a_0, f_0, b^i — измеримые в Ω функции. Пусть выполнены условия (2.1) (при $m = 2$, $\mathbf{m} = 2$), (2.8) и

$$\begin{gathered}a^{ij} \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega), \ b^i \in C(\bar\Omega), \ \frac{\partial b^i}{\partial x_i} \in C(\bar\Omega), \ i, j = 1, \ldots, n;\\ g^{ij} \in L^\infty(\Omega), \ i, j = 1, \ldots, n; \ \mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega),\\ f \in L^2(\Omega), \ a_0 \in L^\infty(\Omega), \ f_0 \in L^2(\Omega).\end{gathered} \tag{5.3}$$

Тогда для функций $\mathbf{l}'(x, u, q) \equiv Qq + \mathbf{a}u + \mathbf{f}$ и $l_0'(x, u, q) \equiv \boldsymbol{\gamma}\cdot q + a_0 u + f_0$ при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$ выполнены, очевидно, условия (1.2) и (1.3) при $m = 2$, $\mathbf{m} = 2$.

В рассматриваемом здесь случае общая краевая задача принимает вид

$$\begin{gathered}-\frac{d}{dx_i}(\alpha^{ij}u_{x_j} + \alpha^i u + g^i) + \beta^i u_{x_i} + \beta_0 u + g_0 = f \ \text{в}\ \Omega,\\ u = 0 \ \text{на}\ \Sigma_1 \cup \Sigma'_-, \ \frac{\partial u}{\partial N} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu}u + \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\nu} + cu = 0 \ \text{на}\ \Sigma_2,\\ \frac{\partial u}{\partial N} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu}u + \mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\nu} + (c - \lambda)u = 0 \ \text{на}\ \Sigma_3,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где $c = 0$ на $(\Sigma_{2,3})_{0,+}$, $c = b(x)$ на $(\Sigma_{2,3})_-$, $\frac{\partial u}{\partial N} \equiv A\nabla u \cdot A\boldsymbol{\nu}$ — производная функции u по конормали, а интегральное тождество (3.3) — вид

$$\int_{\Omega}[(QA\nabla u+\mathbf{a}u+\mathbf{f})\cdot A\nabla\eta+(\gamma\cdot A\nabla u+a_0u+f_0)\eta-u(b^i\eta)_{x_i}]\,dx+$$

$$+\int_{\Sigma_3}\lambda u|_{\Sigma}\eta ds+\int_{(\Sigma_{2,3})+}bu|_{\Sigma}\eta ds=\langle F,\eta\rangle,$$

$$\forall\eta\in\overset{\circ}{C}{}^1_{0,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\overline{\Omega}), \tag{5.5}$$

где $u\in H_\lambda\equiv\overset{0,\Sigma_1}{H}_{2,2}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$, $\langle F,\ \eta\rangle=\int_{\Omega}f\eta dx$, $f\in L^2(\Omega)$.

Далее мы будем рассматривать тождество (5.5) при $\forall F\in H^*_\lambda$, называя функцию $u\in H_\lambda$, удовлетворяющую этому тождеству, решением задачи (5.4) при $f\equiv F\in H^*_\lambda$. Легко видеть, что в рассматриваемом случае оператор $\mathcal{A}:X\to H^*_\lambda$ (см. (2.39)) слабо компактен.

Теорема 5.1. *Предположим, что при п. в.* $x\in\Omega$ *и любых* $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered}Q(x)\xi\cdot\xi\geqslant c_1|\xi|^2,\quad c_1=\mathrm{const}>0;\quad a_0(x)-\frac{1}{2}\frac{\partial b^i}{\partial x_i}-\frac{1}{2\varepsilon_1}|\mathbf{a}(x)|^2-\\-\frac{1}{2\varepsilon_2}|\gamma(x)|^2\geqslant c_2(1+\beta(x)),\quad c_2=\mathrm{const}>0,\end{gathered} \tag{5.6}$$

где $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, $1/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)<c_1$. *Тогда при любом* $F\in H^*_\lambda\equiv(\overset{0,\Sigma_1}{H}_{2,2}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda))^*$ *общая краевая задача* (5.4) *для уравнения* (5.1) *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Доказательство. Ввиду слабой компактности оператора $\mathcal{A}:X\to H^*_\lambda$ и теоремы 4.5 для доказательства теоремы 5.1 достаточно доказать коэрцитивность оператора $\mathcal{L}:X\to Y^*$. Применяя неравенство Коши с учетом условий (5.3), оценим

$$\begin{gathered}l'^iq_i+l'_0u-\frac{1}{2}\frac{\partial b^i}{\partial x_i}u^2\equiv Qq\cdot q+\mathbf{a}\cdot qu+\mathbf{f}\cdot q+(\gamma\cdot q+a_0u+f_0)u-\\-\frac{1}{2}\frac{\partial b^i}{\partial x_i}u^2\geqslant\left(c_1-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_2}{2}-\frac{\varepsilon_4}{2}\right)|q|^2+\left(a_0-\frac{1}{2}\frac{\partial b^i}{\partial x_i}-\frac{1}{2\varepsilon_1}|\mathbf{a}|^2-\right.\\\left.-\frac{1}{2\varepsilon_2}|\gamma|^2-\frac{\varepsilon_2}{2}\right)u^2-\frac{f_0^2}{2\varepsilon_3}-\frac{|\mathbf{f}|^2}{2\varepsilon_4},\end{gathered} \tag{5.7}$$

где $\varepsilon_3>0$, $\varepsilon_4>0$. Из (5.6) и (5.7) легко следует неравенство вида (4.9) при $m=2$, $\mathbf{m}=\mathbf{2}$. Действительно, пусть в (5.7) выбраны такие значения $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, при которых

$$\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2}<c_1,$$

а ε_3 и ε_4 выбраны так, что

$$\frac{\varepsilon_3}{2}<\frac{c_2}{2},\quad\frac{\varepsilon_4}{2}<c_1-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Тогда из (5.7) вытекает неравенство вида (4.9) с

$$m=2,\ \mathbf{m}=\mathbf{2},\ \nu_1=c_1-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_2}{2}-\frac{\varepsilon_4}{2},\ \nu_2=\nu_3=\frac{c_2}{2},$$

$$\varphi=\frac{f_0^2}{2\varepsilon_2}+\frac{|\mathbf{f}|^2}{2\varepsilon_4}\in L^1(\Omega).$$

Теорема 5.1 доказана.

Заметим, что ввиду ограниченности $\beta(x)$ в Ω второе условие в (5.6) будет заведомо выполнено, если при п. в. $x \in \Omega$

$$a_0(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i} - \frac{1}{2\varepsilon_1}|\mathbf{a}(x)|^2 - \frac{1}{2\varepsilon_2}|\gamma(x)|^2 \geqslant \tilde{c}_2 = \mathrm{const} > 0 \qquad (5.8)$$

при таких же ε_1 и ε_2, как в (5.6).

Рассмотрим частный случай уравнения вида (5.1), определяемый условиями: матрица $\mathfrak{A} \equiv \|\alpha^{ij}(x)\|$ симметрична и неотрицательна в Ω, $\boldsymbol{\alpha}(x) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(x) \equiv \mathbf{0}$ в Ω. В этом случае равенства (5.2) выполнены, очевидно, при $A = \mathfrak{A}^{1/2}$, $Q = I$, где I — единичная матрица, $a_0 = \beta_0$, $f_0 = g_0$, $b^i = \beta^i$, $i = 1, \ldots, n$. Предположим, что

$$\begin{gathered} a^{ij} \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega), \ \beta^i \in C(\bar{\Omega}), \ \frac{\partial \beta^i}{\partial x_i} \in C(\bar{\Omega}), \ i, j = 1, \ldots, n, \\ \beta_0 \in L^2(\Omega), \ g_0 \in L^2(\Omega), \ f \in L^2(\Omega), \end{gathered} \qquad (5.9)$$

где a^{ij} — элементы матрицы $A = \mathfrak{A}^{1/2}$. Тогда из теоремы 5.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.1. *При условиях* (5.9) *и*

$$\beta_0(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial \beta^i(x)}{\partial x_i} \geqslant c_0 = \mathrm{const} > 0 \quad \textit{п. в. в } \Omega \qquad (5.10)$$

общая краевая задача (5.4) *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Рассмотрим теперь недивергентное линейное уравнение

$$\alpha^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \beta^i(x) u_{x_i} + \beta(x) u = f(x) \qquad (5.11)$$

с неотрицательной и симметричной в Ω матрицей $\mathfrak{A} \equiv \|\alpha^{ij}(x)\|$. Пусть

$$\begin{gathered} \alpha^{ij}, \ \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x_j} \in C(\bar{\Omega}), \ \frac{\partial^2 \alpha^{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\bar{\Omega}), \ i, j = 1, \ldots, n; \\ \beta^i \in C(\bar{\Omega}), \ \frac{\partial \beta^i}{\partial x_i} \in C(\bar{\Omega}), \ i = 1, \ldots, n; \ \beta \in L^\infty(\Omega), \ f \in L^2(\Omega). \end{gathered} \qquad (5.12)$$

Условия (5.12) позволяют переписать уравнение (5.11) в дивергентном виде

$$-\frac{d}{dx_i}(\alpha^{ij} u_{x_j}) + \hat{\beta}^i u_{x_i} + \hat{\beta} u = \hat{f}, \qquad (5.13)$$

где $\hat{\beta}^i = \dfrac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x_j} - \beta^i$, $i = 1, \ldots, n$, $\hat{\beta} = -\beta$, $\hat{f} = -f$, причем для уравнения (5.13) выполнены условия вида (5.9). Рассмотрим для уравнения (5.11) общую краевую задачу вида

$$\begin{gathered} \alpha^{ij} u_{x_i x_j} + \beta^i u_{x_i} + \beta u = f \ \text{ в } \Omega, \ u = 0 \ \text{ на } \Sigma_1 \cup \Sigma'_-, \\ \frac{\partial u}{\partial N} + cu = 0 \ \text{ на } \Sigma_2, \ \frac{\partial u}{\partial N} + (c - \lambda) u = 0 \ \text{ на } \Sigma_3, \end{gathered} \qquad (5.14)$$

причем $c = 0$ на $(\Sigma_{2,3})_{0,+}$, $c = b(x) \equiv -b^i \nu_i$ на $(\Sigma_{2,3})_-$, где разбиение $\partial\Omega$ на части $(\Sigma_1)_{0,+,-}$, $(\Sigma_2)_{0,+,-}$, $(\Sigma_3)_{0,+,-}$, $\Sigma'_{0,+,-}$ произведено по матрице $A = \mathfrak{A}^{1/2}$ и вектору $b = (b^1, \ldots, b^n)$, причем $b^i = \beta^i - \dfrac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, n$, $\dfrac{\partial u}{\partial N} \equiv A\nabla u A \boldsymbol{\nu}$. Другими словами, мы рассматриваем общую краевую задачу вида (5.4) для уравнения (5.13).

Обобщенным решением задачи (5.14) будем называть всякую функцию $u \in H_\lambda \equiv \overset{0,\Sigma_1}{H}_{2,2}(A; \Omega; \Sigma_3, \lambda)$, имеющую обобщенное предельное значение $u|_\Sigma \in$

$\in L^1_{\mathrm{loc}}(\tilde{\Sigma})\cap L^2(|b|, (\Sigma_{2,3})_\pm)\cap L^2(\lambda, \Sigma_3)$, где $\tilde{\Sigma}\equiv\Sigma_1\cup(\Sigma_{2,3})_\pm\cup\Sigma_3$, и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega}\left\{A\nabla u\cdot A\nabla\eta+u\left[\left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}-b^i\right)\eta\right]_{x_i}-\beta u\eta\right\}dx+\int\limits_{\Sigma_3}\lambda u|_{\tilde{\Sigma}}\eta ds+$$
$$+\int\limits_{(\Sigma_{2,3})+}bu|_{\tilde{\Sigma}}\eta ds=\int\limits_{\Omega}f\eta dx,\quad \eta\in\tilde{C}^1_{0,\,\Sigma_1\cup\Sigma'_+}(\bar{\Omega}),\tag{5.15}$$

причем $A\equiv\mathfrak{A}^{1/2}$, а $A\nabla u$ — обобщенный A-градиент функции u.

Поскольку (5.15) является интегральным тождеством, соответствующим общей краевой задаче для дивергентного уравнения (5.13), то из следствия 5.1 вытекает следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть при п. в. $x\in\Omega$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i}{\partial x_i}-\frac{\partial^2a^{ij}}{\partial x_i\partial x_j}\right)-\beta(x)\geqslant c_0=\mathrm{const}>0.\tag{5.16}$$

Тогда общая краевая задача (5.14) *для уравнения* (5.11), *рассматриваемого при условиях* (5.12), *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Заметим, что результат теоремы 5.2, очевидно, сохранится, если функцию $f\in L^2(\Omega)$ в (4.10) заменить произвольным элементом $F\in H^*_\lambda$, где $H_\lambda\equiv\equiv\overset{0,\Sigma_1}{H}_{2,2}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$.

ГЛАВА 6

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ (A, $\mathbf{b}$)-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Недивергентные (A,$\mathbf{b}$)-эллиптические уравнения

В этой главе (A, $\mathbf{b}$)-эллиптические уравнения вида (5.1.35) рассматриваются при таких ограничениях на структуру уравнения и область Ω, при которых оказывается корректной первая краевая задача вида

$$\mathcal{L}u\equiv-\frac{dl^i(x,\ u,\ \nabla u)}{dx_i}+l_0(x,\ u,\ \nabla u)=f(x)\ \text{в}\ \Omega,\quad u=0\ \text{на}\ \partial\Omega.\tag{1.1}$$

Налагаемые условия позволяют установить существование обобщенного решения задачи (1.1) в классе липшицевых в $\bar{\Omega}$ функций, имеющих след на всей границе $\partial\Omega$. При установлении теорем существования решений задачи (1.1) мы выходим в гл. 6 за рамки дивергентных уравнений, рассматривая так называемые (A, $\mathbf{b}$)-эллиптические уравнения недивергентного вида.

Пусть функция u определена в некоторой окрестности точки $x\in\mathbb{R}^n$, а $A\equiv\|a^{ij}(x)\|$ — симметричная матрица порядка n с непрерывными в этой окрестности элементами a^{ij}, i, $j=1, \ldots, n$, причем матрица A может допускать вырождение любого ранга. По определению, i-й A-производной $u_{\tilde{i}}\equiv\equiv\frac{\partial}{\partial x_{\tilde{i}}}u\equiv A_i\nabla u$ функции u в точке x называется производная функции u по направлению вектора $\mathbf{a}=(a^{i1}, \ldots, a^{in})$, определенного i-й строкой матрицы A. Если, в частности, $\mathbf{a}^i=0$ в точке x, то в этой точке $u_{\tilde{i}}=0$. Таким образом, если функция u дифференцируема (в обычном смысле) в точке x, то

$u_{\hat{i}}=\sum_{j=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $i=1, \ldots, n$. Аналогичным образом определяются A-производные второго и более высоких порядков. Например, $u_{\hat{i}\hat{j}}=(u_{\hat{i}})_{\hat{j}}$ и т. п. Пусть $f(x, u(x), \mathbf{v}(x))$ — сложная функция от x. Через $\frac{\hat{d}}{dx_i}f(x, u, \mathbf{v})$ будем обозначать (полную) i-ю A-производную от этой сложной функции. Наоборот, символ $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_i}f(x, u, \mathbf{v})$ будет означать частную A-производную функции f по аргументу $x=(x_1, \ldots x_n)$ (при замороженных значениях $u=u(x)$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}(x)$). Если функция $f(x, u, \mathbf{v})$ непрерывна, имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u, \mathbf{v})$, $\frac{\partial f(x, u, \mathbf{v})}{\partial v_j}$, $j=1, \ldots, n$, и частные A-производные $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_i}f(x, u, \mathbf{v})$, $i=1, \ldots, n$, то она имеет и полные A-производные $\frac{\hat{d}}{\partial x_i}f(x, u, \mathbf{v})$, $i=1, \ldots, n$, причем

$$\frac{\hat{d}}{dx_i}f(x, u, \mathbf{v})=\frac{\hat{\partial}}{\partial x_i}f(x, u, \mathbf{v})+\frac{\partial f(x, u, \mathbf{v})}{\partial u}u_{\hat{i}}+\frac{\partial f(x, u, \mathbf{v})}{\partial v_j}v_{ji},$$

где $v_{ji}\equiv(v_j)_{\hat{i}}\equiv\frac{\hat{\partial}}{\partial x_i}v_j$.

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\hat{a}^{ij}(x, u, \hat{\nabla}u)u_{\hat{j}\hat{i}}-\hat{a}(x, u, \hat{\nabla}u)-b^i(x)u_{x_i}=0, \tag{1.2}$$

содержащее A-производные первого и второго порядков и обычные производные первого порядка (последние входят в уравнение линейным образом) от неизвестной функции $u=u(x)$, причем $\hat{\nabla}u\equiv(u_{\hat{1}}, \ldots, u_{\hat{n}})$.

Уравнение вида (1.2) будем называть недивергентным $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим [строго $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим] в области Ω уравнением, если при любых $x\in\Omega$, $u\in\mathbb{R}$, $q=Ap$, $\forall p\in\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\begin{gathered}\hat{a}^{ij}(x, u, q)\eta_i\eta_j\geqslant 0,\quad \eta=A\xi,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n[\hat{a}^{ij}(x, u, q)\eta_i\eta_j>0,\\ \eta\neq 0,\ \eta=A\xi,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n].\end{gathered} \tag{1.3}$$

Рассматривавшиеся выше дивергентные $(A, \mathbf{b})$-эллиптические уравнения вида (5.1.35) являются частным случаем недивергентных $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений, поскольку ввиду условия (2.1.2) дифференцирование первого члена уравнения (5.1.35) приводит к уравнению вида (1.2) при

$$\begin{gathered}\hat{a}^{ij}(x, u, q)=\frac{\partial l'^i(x, u, q)}{\partial q_j},\quad \hat{a}(x, u, q)=-\frac{\partial l'^k(x, u, q)}{\partial u}q_k-\\ -a^{ki}(x)\frac{\partial l'^k(x, u, q)}{\partial x_i}-\frac{\partial a^{ki}(x)}{\partial x_i}l'^k(x, u, q)-f(x)+l'_0(x, u, q),\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $l'^i(x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, $l'_0(x, u, q)$ — приведенные коэффициенты уравнения (5.1.35).

Уравнение вида (1.2) можно переписать и в терминах только обычных производных, т. е. в виде

$$a^{ij}(x, u, \nabla u)u_{ij}-a(x, u, \nabla u)=0, \tag{1.5}$$

где $\nabla u=(u_1, \ldots, u_n)$, $u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$, $i, j=1, \ldots, n$, причем

$$\begin{gathered}a^{ij}(x, u, p)=a^{ki}(x)\hat{a}^{ks}(x, u, A(x)p)a^{sj}(x),\\ a(x, u, p)=-a^{ki}(x)\hat{a}^{ks}(x, u, A(x)p)\frac{\partial a^{sj}(x)}{\partial x_i}p_j+\\ +\hat{a}(x, u, A(x)p)+b^i(x)p_i.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Если уравнение (1.2) порождено дивергентным $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим уравнением (1.1), то коэффициенты α^{ij} и α соответствующего уравнения (1.5) можно выразить также по формулам

$$\alpha^{ij}(x, u, p) = \frac{\partial l^i(x, u, p)}{\partial p_j}, \quad \alpha(x, u, p) = -\frac{\partial l^k(x, u, p)}{\partial u} p_k - \\ - \frac{\partial l^i(x, u, p)}{\partial x_i} - f(x) + l_0'(x, u, p). \tag{1.7}$$

Из установленной в § 5.1 инвариантности приведенных коэффициентов l'^i и l'_0 (см. предложение 5.1.2) следует, что для уравнения (1.2), порожденного уравнением (1.1), коэффициенты $\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $\hat{\alpha}(x, u, q)$ инвариантны, т. е. в результате произвольного невырожденного гладкого преобразования (5.1.30) получается уравнение вида (5.1.31), которому соответствует недивергентное $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}})$-эллиптическое уравнение вида

$$\hat{\tilde{\alpha}}^{ij}(\tilde{x}, u, \tilde{\nabla} u) u_{\hat{j}\hat{i}} - \hat{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}, u, \tilde{\nabla} u) - \tilde{b}^i(\tilde{x}) u_{\tilde{x}_j} = 0, \tag{1.8}$$

где дифференцирования в первых двух членах соответствуют матрице $\tilde{A} = AP^*$ и где $\tilde{\mathbf{b}} = P\mathbf{b}$, P — матрица Якоби преобразования (5.1.30), причем при всех $x \in \bar{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{\tilde{\alpha}}^{ij}(\tilde{x}, u, q) = \hat{\alpha}^{ij}(x(\tilde{x}), u, q), \ i, j = 1, \ldots, n; \ \hat{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}, u, q) = \hat{\alpha}(x(\tilde{x}), u, q). \tag{1.9}$$

Это утверждение очевидным образом вытекает из (5.1.34) и (1.4). Таким образом, установлено следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Функции* $\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\hat{\alpha}(x, u, q)$, *определяемые формулой* (1.4) *по приведенным коэффициентам дивергентного* $(A, \mathbf{b})$-*эллиптического уравнения вида* (1.1), *инвариантны (в указанном выше смысле) относительно произвольного гладкого невырождвнного преобразования координат.*

§ 2. Существование и единственность регулярных обобщенных решений первой краевой задачи

Сначала в этом параграфе мы будем рассматривать в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $(A, \mathbf{b})$-эллиптические уравнения недивергентного вида (1.2) (которые можно переписать также в виде (1.5), (1.6)), предполагая, что функции $\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $\hat{\alpha}(x, u, q)$ принадлежат классу $\tilde{C}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, т. е. они непрерывны в $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, а все их частные производные первого порядка ограничены на любом компакте в $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*) Предположим также, что элементы $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, матрицы $A(x)$ и компоненты $b^i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, вектора $\mathbf{b}(x)$ принадлежат классу $\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$ (см. основные обозначения). Очевидно, что тогда функции $\alpha^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $\alpha(x, u, p)$, определенные по формулам (1.6), будут принадлежать $\tilde{C}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$\begin{gathered} \hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)\eta_i\eta_j > 0 \ \text{при всех} \ (x, u, q) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \ \eta \in \mathbb{R}^n, \ \eta \neq 0, \\ a^{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \ \text{при всех} \ x \in \bar{\Omega}, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \ \xi \neq 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

*) Приведенное определение класса $\tilde{C}^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ будет использоваться далее в этой главе без напоминания его смысла.

Предположим также, что существует такая константа $m_0 \geqslant 0$, что при всех $x \in \bar{\Omega}$ и любых u, таких, что $|u| \geqslant m_0$, справедливо неравенство

$$\hat{\alpha}(x, u, 0) u \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Пусть u — классическое (т. е. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$) решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию: $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, где $\varphi \in C(\bar{\Omega})$. Тогда

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leqslant \max(m_0, \max_{\partial\Omega} |\varphi|).$$

Доказательство. Утверждение леммы 2.1 вытекает из хорошо известного классического факта об оценке максимума модуля решений квазилинейных эллиптических уравнений (см., например, [83]).

Замечание 2.1. Мы выбрали простейшее из достаточных условий, при которых справедлива априорная оценка максимума модуля самого решения. Вместо условия (2.2) можно наложить и любое другое из условий подобного сорта. Это всегда надо иметь в виду в дальнейшем.

Далее мы предполагаем, что область Ω принадлежит как минимум классу C^2. Обозначим

$$D_\delta \equiv \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}, \quad \delta \in (0, K^{-1}), \tag{2.3}$$

где K — верхняя грань абсолютных величин нормальных кривизн на $\partial\Omega$, а число δ настолько мало, что для каждой точки $x \in D_\delta$ существует единственная точка $y \in \partial\Omega$, такая, что $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(x, y)$.

Лемма 2.2. *Пусть функции $\alpha^{ij}(x, u, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\alpha(x, u, p)$, определенные по формуле (1.6), ограничены вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial\alpha^{ij}}{\partial p_k}$, $\dfrac{\partial\alpha}{\partial p_k}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, на любом компакте в $\bar{D}_\delta \times \times [-m, m] \times \mathbb{R}^n$, где $m = \mathrm{const} > 0$, причем $\Omega \in C^3$. Пусть выполнено условие (2.1). Предположим, что при всех $x \in D_\delta$, $u \in [-m, m]$ и любых $\rho \geqslant \geqslant l = \mathrm{const} > 0$ для функции $\alpha(x, u, p)$ справедливо неравенство*

$$|\alpha(x, u, \rho\nu)| \leqslant \tilde{\psi}(\rho) \hat{\mathscr{E}}_1(x, u, \rho A\nu), \tag{2.4}$$

причем $\hat{\mathscr{E}}_1(x, u, q) \equiv \hat{\alpha}^{ks}(x, u, q) q_k q_s$, ν — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $y = y(x)$, где $y(x)$ — ближайшая от $x \in D_\delta$ точка на $\partial\Omega$, $A\nu \equiv A(x)\nu(y(x))$, $\tilde{\psi}(\rho)$ — положительная функция от $\rho \geqslant 0$, такая, что $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho\tilde{\psi}(\rho)} = +\infty$. Пусть при таких же обозначениях выполнено также условие

$$\tilde{\psi}(\rho) \hat{\mathscr{E}}_1(x, u, \rho A\nu) \geqslant \operatorname{Sp} \mathfrak{A}(x, u, \rho\nu)\rho, \tag{2.5}$$

где $\mathfrak{A}(x, u, p) = A^*(x) \hat{\mathfrak{A}}(x, u, A(x)p) A(x)$, $\mathfrak{A} \equiv \|\alpha^{ij}\|$, $\hat{\mathfrak{A}} \equiv \|\hat{\alpha}^{ij}\|$. Тогда для всякого решения $u \in C^2(D_\delta) \cap C(\bar{D}_\delta)$ уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям $u = 0$ на $\partial\Omega$ и $|u| \leqslant m$ на D_δ, справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial u(y)}{\partial\nu} \right| \leqslant M_1, \quad y \in \partial\Omega, \tag{2.6}$$

с константой M_1, зависящей лишь от m, l, $\tilde{\psi}(\rho)$, δ и K.

Доказательство. Из условий леммы 2.2 вытекает справедливость всех условий второй части теоремы 1.4.1.′ Действительно, ввиду (1.6)

$$\hat{\mathscr{E}}_1(x, u, \rho A\nu) = \hat{\alpha}^{ks}(x, u, \rho A\nu) \rho A_k \nu \rho A_s \nu = \alpha^{ij}(x, u, \rho\nu) \rho\nu_i \rho\nu_j = \\ = \mathscr{E}_1(x, u, \rho\nu), \tag{2.7}$$

где $\mathscr{E}_1(x, u, p) \equiv a^{ij}(x, u, p)p_i p_j$. Поэтому условие (1.4.19) при $\delta(\rho) \equiv 0$ вытекает из условия (2.4), а условие (1.4.20) — из условия (2.5). Поэтому лемма 2.2 вытекает из теоремы 1.4.1′. Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.1. *Предположим, что область* Ω *принадлежит классу* C^3, *и пусть выполнено условие* (2.1). *Предположим, что на множестве* $\bar{D}_\delta \times [-m, m] \times (|q| > \hat{l})$, *где* $m = \text{const} \geqslant 0$, $\hat{l} = \text{const} \geqslant 0$, *справедливо неравенство*

$$|q| \max_{i, j=1, \ldots, n} |\hat{a}^{ij}(x, u, q)| + |\hat{a}(x, u, q)| + |q| \leqslant \psi(|q|)\hat{\mathscr{E}}_1(x, u, q), \quad (2.8)$$

где $\hat{\mathscr{E}}_1(x, u, q) \equiv \hat{a}^{ij}(x, u, q) q_i q_j$, *а* $\psi(\rho)$ — *положительная неубывающая функция, удовлетворяющая условию* $\int^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho\psi(\rho)} = +\infty$. *Пусть при всех* $y \in \partial\Omega$

$$2\gamma^{-1} \leqslant |A(y)\nu(y)| \leqslant \frac{1}{2}\gamma, \quad (2.9)$$

где $\nu(y)$ — *единичный вектор внутренней нормали к* $\partial\Omega$ *в точке* y, *а* $\gamma = \text{const} > 0$. *Предположим, наконец, что функция* $u \in C^2(D_\delta) \cap C^1(\bar{D}_\delta)$ *удовлетворяет в* D_δ *уравнению* (1.2), *причем* $u = 0$ *на* $\partial\Omega$ *и* $\max_{D_\delta} |u| \leqslant m$. *Тогда для функции* u *справедлива оценка* (2.6), *где* M_1 *зависит лишь от* m, $\hat{l}$, γ, $\psi(\rho)$ *и от* $K = \sup_{\substack{i=1, \ldots, n-1 \\ y \in \partial\Omega}} |k_i(y)|$, *причем* $k_1(y), \ldots, k_{n-1}(y)$ — *нормальные кривизны поверхности* $\partial\Omega$ *в точке* y.

Доказательство. Полагая в (2.8) $q = \rho A(x)\nu(y(x))$ при $\rho \geqslant l \equiv \hat{l}\gamma > 0$ и считая приграничную полоску D_δ настолько узкой, что в ней $\gamma^{-1} \leqslant |A(x)\nu(y(x))| \leqslant \gamma$, выведем (с учетом (1.6)) из неравенства (2.8) справедливость при $\rho \geqslant l$ неравенств (2.4) и (2.5) с $\psi(\rho) = c_1\psi(c_2\rho)$, где c_2 зависит от γ, а c_1 — от n, γ и границ $|a^{ij}|$, $\left|\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}\right|$, $|b^i|$ в Ω, i, j, $k = 1, \ldots, n$. Тогда результат теоремы 2.1 вытекает из леммы 2.2. Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.2. Условие (2.8) будет, в частности, выполнено, если при всех $(x, u, q) \in \bar{\Omega} \times [-m, m] \times (|q| > \hat{l})$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \hat{a}^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \nu|q|^{\bar{m}-2}\xi^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \\ |q||\hat{a}^{ij}| + |\hat{a}| \leqslant \mu\psi(|q|)|q|^{\bar{m}}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \end{gathered} \quad (2.10)$$

где $\nu = \text{const} > 0$, $\bar{m} > 1$, $\mu = \text{const} \geqslant 0$, а $\psi(\rho)$ — такая же функция как в (2.8). Заметим еще, что хотя в теореме 2.1 и предполагается невырожденность уравнения (1.5), (1.6) (т. е. уравнения (1.2), переписанного в терминах обычных производных), однако константа в оценке (2.6) не зависит от константы эллиптичности этого уравнения.

Покажем теперь, что условие (2.9) теоремы 2.1 является существенным. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ заключена в полосе $0 < x_1 < 3$ и имеет бесконечно гладкую границу $\partial\Omega$, состоящую из отрезка, соединяющего точки $(0, -2)$ и $(0, 2)$, отрезка, соединяющего точки $(3, -2)$ и $(3, 2)$, и дуг γ_1 и γ_2, причем дуга γ_1 соединяет точки $(0, -2)$ и $(3, -2)$ и расположена в прямоугольнике $[0, 3] \times [-3, -2]$, а дуга γ_2 соединяет точки $(0, 2)$ и $(3, 2)$ и расположена в прямоугольнике $[0, 3] \times [2, 3]$. Пусть $\xi(t)$ — функция класса $C^\infty([-3, 3])$, равная 1 при $|t| \leqslant 1$ и 0 при $|t| \geqslant 2$. Рассмотрим функцию $u_\varepsilon(x)=[(x_1+\varepsilon)^\lambda-\varepsilon^\lambda]\xi(x_1)\xi(x_2)$, где $\varepsilon\in(0, 1]$, $\lambda\in(0, 1)$. Легко видеть, что u_ε удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1+\varepsilon)^2\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[(x_1+\varepsilon)^2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right]+\lambda(\lambda+1)u=f(x), \qquad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned}f(x)=2(\lambda+1)(x_1+\varepsilon)^{\lambda+1}\xi'(x_1)\xi(x_2)+(x_1+\varepsilon)^{\lambda+2}\xi''(x_1)\xi(x_2)-\\ -\varepsilon^\lambda(x_1+\varepsilon)^2\xi''(x_1)\xi(x_2)-2\varepsilon^\lambda(x_1+\varepsilon)\xi'(x_1)\xi(x_2)+\\ +[(x_1+\varepsilon)^{\lambda+2}-\varepsilon^\lambda(x_1+\varepsilon)^2]\xi(x_1)\xi''(x_2)+\lambda(\lambda+1)\varepsilon^\lambda\xi(x_1)\xi(x_2).\end{aligned}$$

Уравнение (2.11) имеет структуру дивергентного $(A, 0)$-эллиптического уравнения относительно матрицы $A=(x_1+\varepsilon)I$, где I — единичная матрица, причем соответствующее недивергентное уравнение, записанное в терминах A-производных (см. (1.2), (1.4)), имеет вид

$$u_{\hat{1}\hat{1}}+u_{\hat{2}\hat{2}}-u_{\hat{1}}+\lambda(\lambda+1)u=f(x). \qquad (2.12)$$

В терминах обычных производных соответствующее недивергентное уравнение имеет вид (см. (1.5), (1.6))

$$(x_1+\varepsilon)^2u_{x_1x_1}+(x_1+\varepsilon)^2u_{x_2x_2}-2(x_1+\varepsilon)u_{x_1}+\lambda(\lambda+1)u=f(x). \qquad (2.13)$$

Таким образом, для этого уравнения $\hat{a}^{ij}=\delta_i^j$, $a^{ij}=(x_1+\varepsilon)\delta_i^j$, так что ввиду $\varepsilon>0$ условие (2.1) выполнено. Для решений u_ε справедлива равномерная по $\varepsilon\in(0, 1]$ оценка $|u_\varepsilon|\leqslant m$ в $\bar{\Omega}$ при некоторой абсолютной константе $m>0$. На множестве $\bar{\Omega}\times\{|u|\leqslant m\}\times\{|q|>1\}$ условие (2.8) выполнено равномерно по ε при $\psi(|q|)\equiv c_0$, где c_0 — некоторая абсолютная константа $\left(\text{так что условие }\int\limits^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho\psi(\rho)}=+\infty\text{ выполнено}\right)$, поскольку в данном случае $\hat{\mathscr{E}}_1=|q|^2\equiv q_1^2+q_2^2$, а $\hat{a}\equiv-\lambda(\lambda+1)u+f(x)$ ограничено по модулю на указанном множестве некоторой константой, не зависящей от ε. Таким образом, все условия теоремы 2.1, кроме условия (2.9), выполнены равномерно по $\varepsilon\in(0, 1]$. Однако условие (2.9) не выполнено равномерно по $\varepsilon\in(0, 1]$, поскольку $|A\nu|=\varepsilon$ в точке $(0, 0)\in\partial\Omega$. При этом не ограничены равномерно по $\varepsilon\in(0, 1]$ и производные $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(0, 0)\equiv\lambda\varepsilon^{\lambda-1}$. Итак, условие (2.9) теоремы 2.1 существенно (разумеется, принципиальное значение имеет только левая часть неравенства (2.9)).

Установим теперь оценку $\max\limits_{\bar{\Omega}}|\nabla u|$ через $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ для произвольного уравнения вида (1.5) с неотрицательной характеристической формой $a^{ij}\xi_i\xi_j$, не требуя, вообще говоря, чтобы это уравнение имело структуру $(A, \mathbf{b})$-эллиптического уравнения (т. е. определялось бы некоторым уравнением вида (1.2) по формуле (1.6)).*)

Теорема 2.2. *Пусть функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, *и* $a(x, u, p)$ *дифференцируемы на* $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *и удовлетворяют на множестве* $\bar{\Omega}\times[-m, m]\times\{|p|>L\}$, *где* $L=\text{const}\geqslant 0$, $m=\text{const}\geqslant 0$, *условиям*

$$a^{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j\geqslant 0, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \qquad (2.14)$$

и

$$-\frac{n}{4}\sup_{|\tau|=1}\frac{|\delta\mathfrak{A}^\tau|^2}{\mathfrak{A}^\tau}+\frac{\delta a}{|p|}>0, \qquad (2.15)$$

*) В этом случае можно формально считать, что уравнение вида (1.5) имеет структуру $(I, 0)$-эллиптического (но не строго $(I, 0)$-эллиптического) уравнения, где $I\equiv\|\delta_i^j\|$.

где $\mathfrak{A}^{\tau} \equiv a^{ij}(x, u, p)\tau_i\tau_j$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, $|\tau| = 1$, $\delta \equiv \frac{p_k}{|p|}\frac{\partial}{\partial x_k} + |p|\frac{\partial}{\partial u}$. *Тогда для любой функции* $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, *удовлетворяющей в* Ω *уравнению* (1.5) *и неравенству* $|u| \leqslant m$, *справедлива оценка*

$$\max_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leqslant \max(L, M_1), \tag{2.16}$$

где $M_1 \equiv \max_{\partial\Omega} |\nabla u|$.

Доказательство. Применяя к уравнению (1.5) оператор $u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ и обозначая $v = \sum_{k=1}^{n} u_k^2$, получим тождество

$$\frac{1}{2} a^{ij} v_{ij} = a^{ij} u_{ki} u_{kj} + \frac{1}{2}\left[a_{p_l} - a^{ij}_{p_l} u_{ij}\right] v_l + \sqrt{v}\,(\delta a - \delta a^{ij} u_{ij}),$$

где $v_l \equiv v_{x_l}$, $v_{ij} \equiv v_{x_i x_j}$ и т. п. Точно так же как при выводе неравенств (1.6.13), оценим

$$\sqrt{v}\,\delta a^{ij} u_{ij} \leqslant a^{ij} u_{ki} u_{kj} + \frac{1}{4}\frac{|\delta \tilde{a}^{ii}|^2}{\tilde{a}^{ii}} v,$$

где $\tilde{\mathfrak{A}} = T^*\mathfrak{A}T$, T — ортогональная матрица, приводящая гессиан функции u в рассматриваемой точке $x \in \Omega$ к диагональному виду, так что $\tilde{a}^{ii} = \mathfrak{A}^{\tau_i} = \mathfrak{A}\tau_i \cdot \tau_i$, $|\tau_i| = 1$, $i = 1, \ldots, n$ (см. § 1.6). Тогда ввиду условия (2.15) во всех точках $x \in \Omega$, где $|\nabla u| > l$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} a^{ij} v_{ij} \geqslant b^k v_k + \left(\frac{\delta a}{|p|} - \frac{n}{4}\sup_{|\tau|=1}\frac{|\delta\mathfrak{A}^{\tau}|^2}{\mathfrak{A}^{\tau}}\right) v > b^k v_k.$$

Из последнего неравенства следует, очевидно, что

$$\max_{\bar{\Omega}} v \leqslant \max(\max_{\partial\Omega} v,\ L^2),$$

откуда и вытекает неравенство (2.16). Теорема 2.2 доказана.

Условие (2.15) вызвано существом дела. Рассмотрим, например, уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[r^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}(r|\nabla u|)^{m-2}\right] + \lambda^{m-2}(m-2)(r|\nabla u|)^2 |u|^{m-3} +$$
$$+ (n\lambda + \lambda^2) u (r|\nabla u|)^{m-2} = 0, \tag{2.17}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $\lambda \in (0, 1)$, m — достаточно большое положительное число (последнее предположение объясняется соображением обеспечить достаточную гладкость коэффициентов уравнения). Легко проверить, что такое уравнение имеет в шаре $\{|x| \leqslant 1\}$ решение $u = r^{\lambda}$ с неограниченными в точке $x = 0$ первыми производными $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, хотя на границе $\{|x| = 1\}$ эти производные ограничены. Рассматриваемое нами уравнение (2.17) имеет вид (1.5) при

$$a^{ij} = r^m |p|^{m-2}\left[\delta_i^j + (m-2)\frac{p_i}{|p|}\frac{p_j}{|p|}\right], \quad a = -2x_i p_i (r|p|)^{m-2} -$$
$$- m x_i (r|p|)^{m-2} p_i + (m-2)\lambda^{m-2}(r|p|)^2 |u|^{m-3} + (n\lambda + \lambda^2) u (r|p|)^{m-2},$$

так что для него

$$\mathfrak{A}^{\tau} = r^m |p|^{m-2}\left[1 + \frac{(p, \tau)^2}{|p|^2}\right], \quad \delta\mathfrak{A}^{\tau} = m\frac{p_k x_k}{|p|\,r} r^{m-1}|p|^{m-2}\left[1 + (m-2)\frac{(p, \tau)^2}{|p|^2}\right],$$
$$\delta a|_{u=0} = [-2 + n\lambda + \lambda^2](r|p|)^{m-2}.$$

Таким образом, при некоторых значениях x, p, τ и при $u=0$ левая часть (2.15) не превосходит отрицательной при $\lambda\in(0, 1)$, $m\geqslant 2$, величины $(r|p|)^{m-2}[n\lambda+\lambda^2-2-(1/4)nm^2]$. Таким образом, для уравнения (2.17) условие (2.15) не выполнено. Ниже мы приведем пример существенности условия вида (2.15) в случае линейного вхождения ∇u в уравнение.

Замечание 2.3. В случае линейного уравнения

$$\alpha^{ij}(x)u_{x_ix_j}=\beta^i(x)u_{x_i}+c(x)u+f(x), \tag{2.18}$$

где $\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant 0$ при любых $x\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, условие (2.15) переходит в условие

$$-\frac{n}{4}\sup_{|\tau|=1}\frac{|\nabla\mathfrak{A}^\tau|^2}{\mathfrak{A}^\tau}+\min_{i=1,\ldots,n}\frac{\partial\beta^i}{\partial x_i}+c(x)-\sum_{i\neq k}\left|\frac{\partial\beta^i}{\partial x_k}\right|>0, \tag{2.19}$$

где $\mathfrak{A}^\tau\equiv\alpha^{ij}(x)\tau_i\tau_j$. Действительно, из неравенства (2.19) следует, что при всех $x\in\overline{\Omega}$ и любых $p\neq 0$

$$-\frac{n}{4}\sup_{|\tau|=1}\frac{|\delta\mathfrak{A}^\tau|^2}{\mathfrak{A}^\tau}+\frac{p_k\dfrac{\partial\beta^i}{\partial x_k}p_i}{|p|^2}>0.$$

Тогда для всех $(x, p)\in\Omega\times\{|p|>L\}$ при достаточно большом $L>0$ справедливо неравенство

$$-\frac{n}{4}\sup_{|\tau|=1}\frac{|\delta\mathfrak{A}^\tau|^2}{\mathfrak{A}^\tau}+\frac{p_k}{|p|}\frac{\partial\beta^i}{\partial x_k}\frac{p_i}{|p|}+c(x)+\frac{p_k}{|p|}\frac{\partial c(x)}{\partial x_k}-\frac{p_k}{|p|}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}>0,$$

равносильное неравенству (2.15) в случае, когда уравнение (1.5) имеет вид (2.18). Условие (2.19) очень близко к одному из условий работы [99], налагаемых при получении для решений линейных уравнений вида (2.18) априорной оценки $|\nabla u|$.

Условие вида (2.19) вызвано, как показывает следующий ниже пример, существом дела (см. также [99]). Рассмотрим в шаре $\{|x|\leqslant 1\}$ уравнение вида

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\left(n\lambda+\lambda^2\frac{r^2}{\rho^2}\right)u=0, \tag{2.20}$$

где $\rho=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2+\varepsilon^2}$, $\varepsilon\in(0, 1)$, $\lambda\in(0, 1)$. Недивергентная форма этого уравнения имеет вид

$$\rho^2\Delta u+2x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-\left(n\lambda+\lambda^2\frac{r^2}{\rho^2}\right)u=0.$$

Легко убедиться, что для такого уравнения условие вида (2.19) не выполнено во всем шаре $\{|x|\leqslant 1\}$ равномерно по $\varepsilon\in(0, 1)$, поскольку здесь левая часть неравенства (2.19) равна

$$-n\frac{|x|^2}{|x|^2+\varepsilon^2}-2+n\lambda+\lambda^2\frac{r^2}{\rho^2},$$

так что при $\forall x\neq 0$ найдется такое $\varepsilon\in(0, 1)$, при котором это выражение строго меньше 0. В то же время функция $u=\rho^\lambda$ удовлетворяет уравнению (2.20) во всех точках шара $\{|x|\leqslant 1\}$ и равна $(1+\varepsilon)^\lambda$ на его границе $\{|x|=1\}$, а $|\nabla u|=\lambda\rho^{\lambda-1}[|x|/(|x|^2+\varepsilon^2)^{1/2}]$ неограничен в этом шаре равномерно по $\varepsilon\in(0, 1)$. Таким образом, для уравнения (2.20) невозможно получить оценку $\max\limits_{|x|\leqslant 1}|\nabla u|$ через $\max\limits_{|x|=1}|\nabla u|$, не зависящую от ε. Заметим, однако, что решение $u=\rho^\lambda$ уравнения (2.20) имеет ограниченные в шаре $\{|x|\leqslant 1\}$

A-производные (всех порядков) относительно матрицы $A=|x|I$, где $I\equiv\|\delta_i^j\|$, определяющей для уравнения (2.20) структуру $(A, 0)$-эллиптического уравнения вида (1.2). В гл. 7 будет выделен такой класс $(A, 0)$-эллиптических уравнений вида (1.2) (содержащий, в частности, уравнение (2.20)), для решений которых будут установлены оценки A-производных.

Установленные выше априорные оценки (2.6) и (2.16) для $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений недивергентного вида мы используем теперь для доказательства существования обобщенного решения задачи (1.1). С этой целью произведем регуляризацию уравнения (1.2), порожденного $(A, \mathbf{b})$-эллиптическим уравнением дивергентного вида (5.1.35), а именно, в качестве регуляризованного уравнения рассмотрим $(B, \mathbf{b})$-эллиптическое уравнение

$$-\frac{d}{dx_i}\bar{l}^i(x, u, \nabla u)+\bar{l}_0(x, u, \nabla u)=f(x),$$

причем $B\equiv\|b^{ij}(x)\|$, $b^{ij}(x)=a^{ij}(x)+\varepsilon\delta_i^j$ (т. е. $B=A+\varepsilon I$, где I — единичная матрица), $\varepsilon>0$, $\mathbf{b}=(b^1(x), \ldots, b^n(x))$ — тот же самый вектор, который определяет исходное $(A, \mathbf{b})$-эллиптическое уравнение вида (5.1.35), предполагая, что приведенные коэффициенты нового уравнения имеют вид

$$\bar{l}'^i(x, u, q)=\varepsilon q_i+l'^i(x, u, q), \quad i=1, \ldots, n, \quad \bar{l}'_0(x, u, q)=l'_0(x, u, q),$$

где $l'^i(x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, и $l'_0(x, u, q)$ — приведенные коэффициенты исходного $(A, \mathbf{b})$-эллиптического уравнения. Недивергентная форма такого уравнения имеет вид

$$\hat{\beta}^{ij}(x, u, \hat{\nabla}u)u_{\hat{j}\hat{i}}-\hat{\beta}(x, u, \hat{\nabla}u)-b^iu_{x_i}=0, \tag{2.21}$$

где $\hat{\beta}^{ij}(x, u, q)=\varepsilon\delta_i^j+\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)$, $\hat{\beta}(x, u, q)=\hat{\alpha}(x, u, q)-\varepsilon\frac{\partial a^{ki}}{\partial x_i}q_k$, а функции $\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)$, $i, j=1, \ldots, n$, и $\hat{\alpha}(x, u, q)$ выражаются через приведенные коэффициенты исходного уравнения (5.1.35) по формуле (1.4) с заменой, однако, в (1.4) элементов матрицы A на элементы матрицы $B=A+\varepsilon I$. В уравнении (2.21) производные $u_{\hat{i}}$, $u_{\hat{j}\hat{i}}$ и градиент $\hat{\nabla}u$ соответствуют регуляризованной матрице $B=A+\varepsilon I$. Уравнение (2.21) можно переписать также в виде уравнения, выраженного только через обычные производные

$$\beta^{ij}(x, u, \nabla u)u_{ij}-\beta(x, u, \nabla u)=0, \tag{2.22}$$

где

$$\beta^{ij}(x, u, p)=\frac{\partial\bar{l}^i(x, u, p)}{\partial p_j}, \quad i, j=1, \ldots, n, \quad \beta(x, u, p)=$$
$$=-\frac{\partial\bar{l}^i}{\partial u}p_i-\frac{\partial\bar{l}^i}{\partial x_i}-f(x)+\bar{l}_0(x, u, p) \tag{2.22'}$$

(ср. с формулами (1.7)). Заметим, что коэффициенты уравнения (2.22) можно также выразить в виде:

$$\beta^{ij}=b^{ki}\hat{\beta}^{ks}b^{sj}, \quad \beta=-b^{ki}\hat{\beta}^{ks}\frac{\partial b^{sj}}{\partial x_i}p_j+\hat{\beta}+b^ip_i,$$

где $\hat{\beta}^{ks}=\hat{\beta}^{ks}(x, u, q)$, $\hat{\beta}=\hat{\beta}(x, u, q)$, $q=B(x)p$ (ср. (1.6)).

Для построенных регуляризованных уравнений (2.22) рассмотрим вспомогательные задачи Дирихле

$$\beta^{ij}u_{ij}-\beta=0 \text{ в } \Omega, \quad u=0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{2.23}$$

отвечающие значениям $\varepsilon\in(0, 1)$.

Лемма 2.3. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant2$, — ограниченная область класса C^3,* *и пусть для* $(A,\ \mathbf{b})$*-эллиптического уравнения вида* (1.2), *где* $a^{ij}\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $i,\ j=1,\ldots,n$, $b^i\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $i=1,\ldots,n$, $\hat{\alpha}^{ij}(x,\ u,\ q)\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\hat{\alpha}(x,\ u,\ q)\in\tilde{C}^1$, *выполнены условия* (2.2), (2.8), (2.9), (2.14), *а для уравнений* (2.22) — *условие* (2.15). *Тогда для любого решения* $u\in C^3(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ *задачи* (2.23) *для регуляризованного* $(B,\ \mathbf{b})$*-эллиптического уравнения* (2.21), *где* $B=A+\varepsilon I$, $\hat{\beta}^{ij}=\varepsilon\delta_i^j+\hat{\alpha}^{ij}$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, $\hat{\beta}=\hat{\alpha}$, *справедливы оценки*

$$\max_{\bar{\Omega}}|u|\leqslant m,\quad \max_{\bar{\Omega}}|\nabla u|\leqslant\bar{M}_1,\tag{2.24}$$

причем константы m *и* $\bar{M}_1$ *зависят лишь от структурных условий* (2.2), (2.8), (2.9), (2.14) *и* (2.15) *для исходного уравнения* (1.2) *и от области* Ω.

Доказательство. Очевидно, что для регуляризованного уравнения (2.21) условия вида (2.1) (с заменой $\hat{\alpha}^{ij}$ на $\hat{\beta}^{ij}$ и a^{ij} на b^{ij}, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$) выполнены. Справедливость перечисленных в лемме структурных условий для исходного уравнения (1.2) приводит, как легко видеть, к справедливости соответствующих условий для регуляризованного уравнения (2.21), причем последние выполняются с константами, не зависящими от $\varepsilon\in(0,\ 1)$. Применяя тогда последовательно лемму 2.1 и теоремы 2.1 и 2.2, получаем оценки (2.24), где константы m и $\bar{M}_1$ не зависят от ε. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Пусть* $\Omega\in C^2$, *и пусть* $a^{ij}\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $b^i\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $i,\ j=1,\ldots,n$, $\hat{\alpha}^{ij}(x,\ u,\ q)\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, $\hat{\alpha}(x,\ u,\ q)\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, *где* $\hat{\alpha}^{ij}$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, *и* $\hat{\alpha}$ — *коэффициенты уравнения* (1.2), *соответствующего исходному* $(A,\ \mathbf{b})$*-эллиптическому уравнению вида* (5.1.35), *где* $A\equiv\|a^{ij}(x)\|$, $\mathbf{b}=(b^1(x),\ \ldots,\ b^n(x))$ (*см. формулу* (1.4), *в которой* $l'^i(x,\ u,\ q)$, $i=1,\ \ldots,\ n$, *и* $l'_0(x,\ u,\ q)$ *суть приведенные коэффициенты уравнения* (5.1.35)). *Предположим, что для упомянутого уравнения* (1.2) *выполнены условия, перечисленные в лемме* 2.3. *Тогда при любом* $\varepsilon\in(0,\ 1)$ *задача* (2.23) *имеет классическое решение* $u_\varepsilon\in C^2(\bar{\Omega})$, *причем для такого решения справедливы неравенства* (2.24), *где константы* m *и* $\bar{M}_1$ *не зависят от* $\varepsilon\in(0,\ 1)$.

Доказательство. Из условий леммы 2.4 вытекает, что если уравнение (1.2), о котором говорится в формулировке леммы, переписать в виде (1.5), (1.6), то функции $\alpha^{ij}(x,\ u,\ p)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, и $\alpha(x,\ u,\ p)$ будут принадлежать классу $\tilde{C}^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Предположим сначала, что $\Omega\in C^3$, а функции $\alpha^{ij}(x,\ u,\ p)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, и $\alpha(x,\ u,\ p)$ принадлежат классу $C^2(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Тогда при помощи теоремы Шаудера легко доказать, что всякое решение уравнения (2.23), принадлежащее классу $C^2(\bar{\Omega})$, на самом деле принадлежит и $C^3(\Omega)$ (см. доказательство теоремы 1.9.1). Следовательно, ввиду леммы 2.3 для такого решения справедливы оценки вида (2.24), так что уравнение (2.23) можно считать ограниченно нелинейным и равномерно эллиптическим. Применяя известные результаты О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой по разрешимости краевых задач для квазилинейных равномерно эллиптических уравнений (см. теорему Ладыженской и Уральцевой в § 1.2), устанавливаем существование решения u_ε задачи (2.23), принадлежащего классу $C^2(\bar{\Omega})$. Нетрудно устранить излишние предположения гладкости Ω и функций a^{ij} и a, воспользовавшись стандартным методом аппроксимации Ω, a^{ij} и a соответствующими объектами, имеющими ту степень гладкости, которая указана в начале доказательства (см. доказательство теоремы 1.9.1). Лемма 2.4 доказана.

Теорема 2.3. *Пусть уравнение вида* (5.1.35) *имеет структуру* $(A, \mathbf{b})$*-эллиптического уравнения в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *класса* C^2, *причем* $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ — *симметричная неотрицательно определенная в* $\bar{\Omega}$ *матрица,* $a^{ij} \in \bar{C}^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\mathbf{b} \equiv (b^1(x), \ldots, b^n(x))$, $b^i \in \bar{C}^1(\bar{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$. *Предположим, что функции* $\hat{a}^{ij}(x, u, q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\hat{a}(x, u, q)$, *определенные по формуле* (1.4), *в которой* $l'^i(x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, *и* $l'_0(x, u, q)$ *суть приведенные коэффициенты упомянутого уравнения* (5.1.35), *принадлежат классу* $\bar{C}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. *Пусть для уравнений* (1.2) *и* (2.22), *порожденных уравнением* (5.1.35) *посредством равенств вида* (1.4) *и* (2.22′), *выполнены структурные условия* (2.2) (2.8), (2.9) *и* (2.15). *Предположим, наконец, что при любых* $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqslant 2m$, $q = Bp$, $p \in \mathbb{R}^n$, $|q| \leqslant 2\bar{M}_1$, *где* m *и* $\bar{M}_1$ — *константы, определяемые условиями* (2.2), (2.8), (2.9) *и* (2.15) (*см. лемму* 2.3), *для приведенных коэффициентов уравнения* (5.1.35) *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial l'^i}{\partial q_j}\xi_i\xi_j + \frac{\partial l'^i}{\partial u}\xi_0\xi_i + \frac{\partial l'_0}{\partial q_j}\xi_j\xi_0 + \frac{\partial l'_0}{\partial u}\xi_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial b^i}{\partial x_i}\xi_0^2 \geqslant 0, \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}, \quad \xi = B\eta, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{2.25}$$

Тогда задача Дирихле вида (1.1) *для уравнения* (5.1.35) *имеет хотя бы одно регулярное обобщенное решение* u, *т. е. существует функция* $u \in L^\infty(\Omega) \cap \cap \mathring{H}_m(\Omega)$, $\forall m > 1$, *такая, что* $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$ *и*

$$\int_\Omega [\mathbf{l}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\eta + l_0(x, u, \nabla u)\eta]\, dx = \int_\Omega f\eta\, dx, \quad \forall \eta \in C_0^1(\Omega). \tag{2.26}$$

Если вместо (2.25) *выполнено условие: при всех* $x \in \Omega$ *и любых* $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial l'^i}{\partial q_j}\xi_i\xi_j + \frac{\partial l'^i}{\partial u}\xi_0\xi_i + \frac{\partial l'_0}{\partial q_j}\xi_j\xi_0 + \frac{\partial l'_0}{\partial u}\xi_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial b^i}{\partial x_i}\xi_0^2 > 0 \quad \text{при всех } (\xi, \xi_0) \neq (0, 0), \quad \xi_0 \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.25′}$$

то задача (1.1) *имеет точно одно регулярное обобщенное решение.*

Доказательство. Пусть u_ε — решение задачи (2.23) для регуляризованного уравнения (2.21) (см. также (2.22)), соответствующего уравнению (1.2), (1.4). Для таких решений ввиду леммы 2.3 справедлива оценка (2.24). Перепишем регуляризованное уравнение (2.22) в дивергентном виде

$$-\frac{d}{dx_i}\tilde{l}^i(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) + \tilde{l}_0(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = f(x), \tag{2.27}$$

где $\tilde{\mathbf{l}}(x, u, p) = \varepsilon B^* Bp + B^*\mathbf{l}'(x, u, Bp)$, $\tilde{l}_0(x, u, p) = l'_0(x, u, Bp) + b^i(x)p_i$, $B = A + \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$.

Соответствующее интегральное тождество для функции u_ε имеет вид

$$\varepsilon\int_\Omega B\nabla u_\varepsilon \cdot B\nabla\eta\, dx + \int_\Omega [\mathbf{l}'(x, u_\varepsilon, B\nabla u_\varepsilon) \cdot B\nabla\eta + l'_0(x, u_\varepsilon, B\nabla u_\varepsilon)\eta + b^i u_{\varepsilon x_i}\eta]\, dx = \int_\Omega f\eta\, dx, \quad \eta \in C_0^1(\Omega). \tag{2.28}$$

Ввиду оценки (2.24) можно считать, что для функций $\mathbf{l}'(x, u, q)$ и $l'_0(x, u, q)$ выполнены неравенства вида (5.1.3) при каких-нибудь показателях m, $\mathbf{m}$, $m > 1$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, можно считать, что последовательность $\{u_\varepsilon\}$ сходится слабо в $L^m(\Omega)$ к некоторой функции

$u \in L^m(\Omega)$, а $\{\nabla u_\varepsilon\}$ — слабо в $\mathbf{L}^m(\Omega)$ к $\nabla u \in \mathbf{L}^m(\Omega)$. Ввиду условия (2.25) справедливо неравенство

$$\varepsilon \int_\Omega B\nabla(u_\varepsilon - \xi) \cdot B\nabla(u_\varepsilon - \xi)\, dx + \int_\Omega \{[\mathbf{l}'(x, u_\varepsilon, B\nabla u_\varepsilon) - \mathbf{l}'(x, \xi, B\nabla\xi)] \times$$
$$\times B\nabla(u_\varepsilon - \xi) + [l_0'(x, u_\varepsilon, B\nabla u_\varepsilon) - l_0'(x, \xi, B\nabla\xi)](u_\varepsilon - \xi) +$$
$$+ b^i(u_\varepsilon - \xi)_{x_i}(u_\varepsilon - \xi)\}\, dx \geqslant 0, \tag{2.29}$$
$$\forall \xi \in C_0^1(\Omega).$$

Вычитая из (2.29) равенство (2.28) при $\eta = u_\varepsilon - \xi$, найдем

$$-\varepsilon \int_\Omega B\nabla\xi \cdot B\nabla(u_\varepsilon - \xi)\, dx - \int_\Omega [\mathbf{l}'(x, \xi, B\nabla\xi) \cdot B\nabla(u_\varepsilon - \xi) +$$
$$+ l_0'(x, \xi, B\nabla\xi)(u_\varepsilon - \xi) + b^i\xi_{x_i}(u_\varepsilon - \xi)]\, dx \geqslant -\int_\Omega f(u_\varepsilon - \xi)\, dx, \tag{2.30}$$

где $\xi \in C_0^1(\Omega)$. Устремляя в (2.30) ε к 0, получим, с учетом того, что $B\nabla u_\varepsilon \to A\nabla u$ слабо в $\mathbf{L}^m(\Omega)$ и $B\nabla\xi \to A\nabla\xi$ равномерно в $\overline{\Omega}$, неравенство

$$-\int_\Omega [\mathbf{l}'(x, \xi, A\nabla\xi) \cdot A\nabla(u - \xi) + l_0'(x, \xi, A\nabla\xi)(u - \xi) + b^i\xi_{x_i}(u - \xi)]\, dx \geqslant$$
$$\geqslant -\int_\Omega f(u - \xi)\, dx, \quad \xi \in C_0^1(\Omega). \tag{2.31}$$

Очевидно, что неравенство (2.31) справедливо и при $\forall \xi \in \mathring{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega) \cap \mathring{H}_2^1(\Omega)$. Полагая тогда в (2.31) $\xi = u + \varepsilon\eta$, $\eta \in \mathring{C}_1(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, деля получившееся неравенство на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, устанавливаем, что

$$\int_\Omega [\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l_0'(x, u, A\nabla u)\eta + b^i u_{x_i}\eta]\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega f\eta\, dx, \quad \eta \in C_0^1(\Omega). \tag{2.32}$$

Ввиду произвола η в (2.32) из этого неравенства немедленно следует тождество

$$\int_\Omega [\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l_0'(x, u, A\nabla u)\eta + b^i u_{x_i}\eta]\, dx = \int_\Omega f\eta\, dx, \quad \eta \in C_0^1(\Omega),$$

которое можно переписать и в виде (2.26). Таким образом, функция u есть обобщенное решение задачи (1.1). Очевидно, что для функции u справедливы неравенства $|u| \leqslant m$, $|\nabla u| \leqslant \bar{M}_1$ в Ω. Итак, существование регулярного обобщенного решения задачи (1.1) доказано. Пусть теперь условие (2.25) заменено условием (2.25′). Для доказательства единственности регулярного обобщенного решения задачи (1.1) воспользуемся равенством вида (5.4.13). Пусть u и v — два регулярных обобщенных решения задачи (1.1). Легко видеть, что для них справедливо равенство (ср. (5.4.13)),

$$0 = \langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v, u - v \rangle = \int_\Omega \int_0^1 \Big[\frac{\partial l'^i(x, v + \tau(u - v), A\nabla v + \tau A\nabla(u - v))}{\partial p_j} \times$$
$$\times A_j\nabla(u - v) A_i\nabla(u - v) + \frac{\partial l'^i}{\partial u}(u - v) A_i\nabla(u - v) +$$
$$+ \frac{\partial l_0'}{\partial p_j} A_j\nabla(u - v)(u - v) + \frac{\partial l_0'}{\partial u}(u - v)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial b^i}{\partial x_i}(u - v)^2\Big]\, d\tau\, dx. \tag{2.33}$$

Предположим, что $u \not\equiv v$ в Ω. Тогда существует подмножество $\Omega' \subset \Omega$, $\operatorname{mes} \Omega' > 0$, где $u \neq v$. Ввиду условия (2.25′) правая часть в (2.33) оказывается тогда строго положительной, что противоречит равенству (2.33). Теорема 2.3 доказана.

Замечание 2.4. Результат теоремы 2.3 остается справедливым, если условия принадлежности функций $\hat{a}^{ij}(x, u, q)$, $i, j=1, \ldots, n$, и $\hat{a}(x, u, q)$ классу $C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ заменить требованием, чтобы эти функции обладали только такими дифференциальными свойствами, которые необходимы, чтобы структурные условия (2.2), (2.8), (2.9), (2.15) и (2.25) имели смысл. Действительно, усредняя коэффициенты $l^i(x, u, p)$, $i=1, \ldots, n$, $l_0(x, u, p)$ и $f(x)$ по переменным x, u, p, рассмотрим задачу вида (1.1) для уравнений

$$-\frac{d}{dx_i} l_\varepsilon^i(x, u, \nabla u) + l_{0\varepsilon}(x, u, \nabla u) = f_\varepsilon(x),$$

где через l_ε^i, $l_{0\varepsilon}$ и f_ε обозначены указанные усреднения функций l^i, l_0, f. Для таких аппроксимирующих уравнений структурные условия (2.2), (2.8), (2.9), (2.15) и (2.25) выполняются равномерно по ε. Поэтому для решений указанных аппроксимирующих задач (существующих в силу теоремы 2.3) справедливы равномерные по ε оценки

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_\varepsilon| \leqslant c_0, \quad \max_{\bar{\Omega}} |\nabla u_\varepsilon| \leqslant c_1. \tag{2.34}$$

Тогда в интегральных тождествах вида

$$\int_\Omega [l'_\varepsilon(x, u_\varepsilon, A\nabla u_\varepsilon) \cdot A\nabla\eta + l'_{0\varepsilon}(x, u_\varepsilon, A\nabla u_\varepsilon)\eta + b_\varepsilon^i u_{\varepsilon x_i}\eta]\, dx =$$
$$= \int_\Omega f_\varepsilon \eta\, dx, \quad \eta \in C_0^1(\Omega),$$

можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \to 0$, рассуждая точно так же, как при доказательстве теоремы 2.3. Дополнительным моментом в этих рассуждениях является соображение о том, что функции $l'^i_\varepsilon(x, \xi, \nabla\xi)$, $i=1, \ldots, n$, и $l'_{0\varepsilon}(x, \xi, \nabla\xi)$, где $\xi \in C_0^1(\Omega)$, стремятся при $\varepsilon \to 0$ равномерно в каждой компактной части Ω к $l'^i(x, \xi, \nabla\xi)$, $i=1, \ldots, n$, $l'_0(x, \xi, \nabla\xi)$ соответственно, причем мы считаем, что приведенные коэффициенты l'^i и l'_0 непрерывны в $\bar{\Omega}$. Предельная функция u будет удовлетворять тождеству вида (2.26) и обладать свойствами: $u \in L^\infty(\Omega) \cap \mathring{H}_m(\Omega)$, $\forall m > 1$ (ввиду равномерности оценок (2.34)).

Рассмотрим теперь нерегулярную вариационную задачу на минимум интеграла вида

$$\int_\Omega [\mathscr{F}(x, u, A\nabla u) - f(x)u]\, dx, \quad u=0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{2.35}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ класса C^2, а функция $\mathscr{F}(x, u, q)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 \mathscr{F}(x, u, q)}{\partial q_i \partial q_j} \eta_i \eta_j \geqslant 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad q = Ap, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \eta = A\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.36}$$

Уравнение Эйлера для задачи (2.35) имеет вид

$$-\frac{d}{dx_i}\left[a^{ki}(x) \frac{\partial \mathscr{F}(x, u, A\nabla u)}{\partial q_k}\right] + \frac{\partial \mathscr{F}(x, u, A\nabla u)}{\partial u} = f(x), \tag{2.37}$$

где a^{ij}, i, $j=1, \ldots, n$ — элементы матрицы A. Очевидно, что уравнение (2.37) имеет структуру (A, $\mathbf{0}$)-эллиптического в Ω уравнения относительно матрицы A, участвующей при построении интеграла (2.35), причем приведенные коэффициенты такого уравнения имеют вид

$$l^{i}=\frac{\partial \mathscr{F}(x, u, q)}{\partial q_{i}}, \quad i=1, \ldots, n, \; l_{0}^{\prime}=\frac{\partial \mathscr{F}(x, u, q)}{\partial u}. \tag{2.38}$$

Поэтому из теоремы 2.3 с учетом замечания 2.4 вытекает следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть интеграл* (2.35) *рассматривается в предположении, что область* Ω *ограничена в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *и принадлежит классу* C^2, *матрица* $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ *симметрична и неотрицательно определена в* Ω, *причем* $a^{ij} \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, i, $j=1, \ldots, n$, *а функция* $\mathscr{F}(x, u, q)$ *удовлетворяет условию* (2.36). *Предположим, что функции* l'^{i}, l_0', *определенные по формуле* (2.38), *функция* $f(x)$ *из* (2.35) *и функции* $\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)$, i, $j=1, \ldots, n$, $\hat{\alpha}(x, u, q)$, *определенные по формулам* (1.4), (2.38), *обеспечивают справедливость условий* (2.2), (2.8), (2.9), (2.15) *и* (2.25) [(2.25′)]. *Тогда существует хотя бы одна* [*точно одна*] *экстремаль задачи* (2. 35), *т. е. существует* [*единственная*] *функция* $u \in L^\infty(\Omega) \cap \mathring{H}_m(\Omega)$, $\forall m>1$, *такая, что* $\nabla u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, *для которой справедливо тождество* (2.26) (*при* l'^{i}, $i=1, \ldots, n$, l_0', *определенных по формуле* (2.38)).

Легко видеть, что при сделанных в теореме 2.4 предположениях об области Ω и матрице A (в частности, при выполнении условия (2.9)) все остальные условия этой теоремы будут выполнены в случае, когда $\mathscr{F}(x, u, q)$ имеет вид

$$\mathscr{F}(x, u, q)=|q|^4+\varkappa u^2|q|^2+\varkappa_1 u^2, \quad \varkappa, \; \varkappa_1=\mathrm{const}>0, \tag{2.39}$$

если только функция $f(x) \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, а константы $\varkappa$ и $\varkappa_1$ достаточно велики. В этом случае уравнение (2.37) имеет вид

$$-\operatorname{div}\{A(4|A\nabla u|^2+2\varkappa u^2) A\nabla u\}+2\varkappa|A\nabla u|^2 u+2\varkappa_1 u=f(x). \tag{2.40}$$

Еще более простым примером допустимого функционала (2.35) является случай квадратичного функционала, отвечающего функции $\mathscr{F}(x, u, q)= =|q|^2+\varkappa u^2$ при достаточно большой константе $\varkappa>0$ и произвольной функции $f(x) \in \tilde{C}_1(\bar{\Omega})$. В этом случае уравнение (2.27) линейно и имеет вид

$$-\operatorname{div}\{A^2\nabla u\}+2\varkappa u=f(x). \tag{2.41}$$

§ 3. Существование регулярных обобщенных решений первой краевой задачи, ограниченных в Ω вместе со своими частными производными второго порядка.

В этом параграфе устанавливается существование обобщенных решений задачи (1.1), обладающих регулярностью, указанной в заголовке. Такие решения, как будет показано, удовлетворяют уравнению (5.1.35) п. в. в Ω. От функций, определяющих структуру (A, $\mathbf{b}$)-эллиптического в Ω уравнения (1.1) (в частности, от элементов матрицы A и компонент вектора $\mathbf{b}$), здесь требуется гладкость, на один порядок большая той, которая предполагалась в § 2. Кроме того, для получения указанного результата потребовалось наложить дальнейшие довольно сильные ограничения на структуру уравнения (5.1.35), приводящие, в частности, к условию линейности этого уравнения по первым производным. Нам кажется, что даже при таких сильных ограничениях на нелинейности уравнения (5.1.35) полученные в этом параграфе результаты никем ранее не устанавливались. В случае линейных уравнений с неотрицательной характеристической формой аналогичные результаты получены в работе [99].

Теорема 3.1. *Пусть функции* $a^{ij}(x, u, p)$, $i, j=1, \ldots, n$, *и* $a(x, u, p)$, *определенные по формуле* (1.6), *дважды дифференцируемы по* x, u, p *в* $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *и удовлетворяют на множестве* $\bar{\Omega}\times[-m, m]\times\times\{|p|\leqslant \bar{M}_1\}\times\{|D^2u|>L\}$, $m=\mathrm{const}>0$, $\bar{M}_1=\mathrm{const}>0$, $L=\mathrm{const}>0$, *условию* (2.14) *и условию*

$$-n\sup_{\substack{l=1,\ldots,n\\|\tau|=1}}\frac{|\delta_l\mathfrak{A}^\tau|^2}{\mathfrak{A}^\tau}+\frac{\partial a}{\partial u}-\frac{\partial a^{ij}}{\partial u}u_{ij}+\frac{u_{kl}}{|D^2u|^2}[\delta_{kl}a-(\delta_{kl}a^{ij})u_{ij}]>0, \quad (3.1)$$

где

$$\mathfrak{A}^\tau\equiv a^{ij}(x, u, p)\tau_i\tau_j,\ \tau\in\mathbb{R}^n,\ |\tau|=1,\ \delta_k\equiv\frac{\partial}{\partial p_s}u_{sk}+\frac{\partial}{\partial u}u_k+\frac{\partial}{\partial x_k},\ k=1,$$

$$\ldots, n,\ \delta_{kl}\equiv\frac{\partial^2}{\partial p_s\partial p_t}u_{sk}u_{tl}+\frac{\partial^2}{\partial p_s\partial u}u_{sk}u_l+\frac{\partial^2}{\partial p_s\partial x_l}u_{sk}+\frac{\partial^2}{\partial u\partial p_t}u_ku_{tl}+\frac{\partial^2}{\partial u^2}u_ku_l+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial u\partial x_l}u_k+\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial p_t}u_{tl}+\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial u}u_l+\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l},\ |D^2u|=$$

$$=\sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2,\ u_k=\frac{\partial u}{\partial x_k},\ u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},$$

причем в условии (3.1) x, u, p_k *и* u_{ij} $(u_{ij}=u_{ji},\ i, j=1, \ldots, n)$ *рассматриваются как независимые переменные. Тогда для любой функции* $u\in C^4(\Omega)\cap C^2(\bar{\Omega})$, *удовлетворяющей в* Ω *уравнению* (1.5) *и неравенствам* $|u|\leqslant m$, $|\nabla u|\leqslant \bar{M}_1$, *справедлива оценка*

$$\max_{\bar{\Omega}}|D^2u|\leqslant\max\left\{\max_{\partial\Omega}|D^2u|,\ L\right\}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Применяя к уравнению (1.5) оператор $u_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}$ и обозначая $v=\sum_{k,l=1}^n u_{kl}^2$, получим равенство

$$\frac{1}{2}a^{ij}v_{ij}=a^{ij}u_{kli}u_{klj}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial p_s}-\frac{\partial a^{ij}}{\partial p_s}u_{ij}\right)v_s+\left(\frac{\partial a}{\partial u}-\frac{\partial a^{ij}}{\partial u}u_{ij}\right)v-$$

$$-(\delta_la^{ij})u_{ijk}u_{kl}-(\delta_ka^{ij})u_{ijl}u_{kl}+[\delta_{kl}a-(\delta_{kl}a^{ij})u_{ij}]u_{kl}=0, \quad (3.3)$$

справедливое в любой точке $x\in\Omega$. Учитывая, что из условия (3.1) следует, в частности, конечность величины $|\delta_l\mathfrak{A}^\tau|^2(\mathfrak{A}^\tau)^{-1}$ (при любом $\tau\in\mathbb{R}^n$, $|\tau|=1$), оценим (см. вывод неравенств (1.6.13))

$$\begin{aligned}|(\delta_la^{ij})u_{ijk}u_{kl}|&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\tilde{a}_k^{ii}\tilde{u}_{kii}^2+\frac{n}{2}\sup_{i,k,l=1,\ldots,n}\frac{|\delta_l\tilde{a}_k^{ii}|^2}{\tilde{a}_k^{ii}}v,\\|(\delta_ka^{ij})u_{ijl}u_{kl}|&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\tilde{a}_l^{ii}\tilde{u}_{lii}^2+\frac{n}{2}\sup_{i,k,l=1,\ldots,n}\frac{|\delta_k\tilde{a}_l^{ii}|^2}{\tilde{a}_l^{ii}}v,\end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\tilde{a}_k^{ij}=\mathfrak{K}_i^{\tau^k}\equiv\mathfrak{A}\tau_i^k\cdot\tau_i^k$, τ_i^k — i-й столбец ортогональной матрицы T_k, преобразующий гессиан функции $u_k\equiv\frac{\partial u}{\partial x_k}$ к диагональному виду в рассматриваемой точке $x\in\Omega$. Поскольку $\tilde{a}_k^{ii}\tilde{u}_{kii}^2=a^{ij}u_{kli}\cdot u_{klj}$, то сумма левых частей в (3.4) оценивается на множестве $\Omega_L\equiv\{x\in\Omega\colon\ |D^2u|>L\}$ сверху через $a^{ij}u_{kli}u_{klj}+n\sup\limits_{l=1,\ldots,n,\ |\tau|=1}\frac{|\delta\mathfrak{A}^\tau|^2}{\mathfrak{A}^\tau}v$. Учитывая (3.3), (3.4) и условие (3.1), заключаем, что в точках $x\in\Omega_L$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}a^{ij}v_{ij}>0,$$

которое показывает, что функция v не может достигать максимума в точках $x\in\Omega_L$. Следовательно,

$$\max_{\bar{\Omega}} v\leqslant\max\left\{\max_{\partial\Omega}|D^2u|^2,\ L^2\right\},$$

откуда и следует оценка (3.2). Теорема 3.1 доказана.

Заметим, что в случае линейного уравнения вида (2.18) условие (3.1) переходит, как легко видеть, в условие

$$c+\min_{s=1,\ldots,n}\frac{\partial b^s}{\partial x_s}-\sum_{t\neq s}\left|\frac{\partial b^s}{\partial x_t}\right|+\max_{i,j=1,\ldots,n}\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_i\partial x_j}-$$
$$-\sum_{(k,l)\neq(i,j)}\left|\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial x_k\partial x_l}\right|-n\sup_{l=1,\ldots,n,\ |\tau|=1}\frac{\left|\frac{\partial\mathfrak{A}^\tau}{\partial x_l}\right|^2}{\mathfrak{A}^\tau}>0, \qquad (3.5)$$

где $\mathfrak{A}^\tau\equiv a^{ij}(x)\tau_i\tau_j$, $|\tau|=1$. Условие (3.5) очень близко к одному из условий, при которых в работе [99] была установлена априорная оценка $|D^2u$ в случае линейного уравнения вида (2.17).

Условие (3.1) теоремы 3.1, как будет показано ниже, является существенным. Легко понять, что для справедливости (3.1) прежде всего необходимо, чтобы на множестве $\bar{\Omega}\times[-m,\ m]\times\{|p|\leqslant\bar{M}_1\}\times\{|D^2u|>L\}$ было выполнено условие

$$-\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial p_s\partial p_t}\frac{u_{lk}u_{sk}u_{tl}u_{ij}}{|D^2u|^2}\geqslant 0. \qquad (3.6)$$

Условие (3.6) вносит весьма жесткие условия на вхождение аргумента p в a^{ij}. Действительно, рассмотрим в круге $\Omega\equiv\{x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^2$ уравнение

$$-\frac{d}{dx_1}\left(x_1^2\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\sqrt{1+(x_1u_{x_1})^2}\right)^{m-2}\right)-$$
$$-\frac{d}{dx_2}\left(x_1^2\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\sqrt{1+(x_1u_{x_2})^2}\right)^{m-2}\right)+l_0(x,\ u,\ \nabla u)=0. \qquad (3.7)$$

Выполняя в первых двух членах дифференцирование, получим уравнение вида (1.6) при $n=2$ с коэффициентами $a^{11}(x,\ u,\ p)$ и $a^{22}(x,\ u,\ p)$ вида

$$a^{ii}(x,\ u,\ p)=x_1^2\left(\sqrt{1+(x_1p_i)^2}\right)^{m-2}\left[1+(m-2)\frac{x_1p_i^2+x_1^2p_i}{1+(x_1p_i)^2}\right],\quad i=1,\ 2. \qquad (3.8)$$

Из условия (3.6) применительно к уравнению (3.7) вытекают, в частности, неравенства $\frac{\partial^2a^{11}}{\partial p_1^2}\leqslant 0$, $\frac{\partial^2a^{22}}{\partial p_2^2}\leqslant 0$, которые должны выполняться при всех

$x \in \Omega$ и $|p| \leqslant \bar{M}_1$. Тогда двукратное дифференцирование (3.8) по p_i ($i = 1, 2$) при $p = 0$ приводит к неравенству

$$2x_1^2(m-2)(x_1^2+x_1) \leqslant 0.$$

Поскольку x_1 может принимать в круге $\Omega = \{x_1^2+x_2^2 \leqslant 1\}$ как угодно малые значения любого знака, отсюда следует, что для уравнения (3.7) условие (3.6) может быть справедливо только в случае $m=2$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$-\frac{d}{dx_1}\left(x_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\sqrt{1+(x_1 u_{x_1})^2}\right)^{m-2}\right) - \frac{d}{dx_2}\left(x_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\sqrt{1+(x_1 u_{x_2})^2}\right)^{m-2}\right) +$$

$$+\frac{d}{dx_1}\left(x_1\lambda(u-\xi(x_2))\left(\sqrt{1+[\lambda(u-\xi(x_2))]^2}\right)^{m-2}\right) = f(x_1, x_2), \qquad (3.9)$$

где

$$f(x_1, x_2) = \frac{d}{dx_2}\left(x_1^2(x_1^\lambda+1)\xi'(x_2)\left(\sqrt{1+x_1^2(x_1^\lambda+1)^2[\xi'(x_2)]^2}\right)^{m-2}\right),$$

$\xi(x_2)$ — как угодно гладкая функция, такая, что $\xi(x_2)=1$ при $|x_2| \leqslant 1/2$, $\xi(x_2)=0$ при $|x_2| \geqslant 3/4$, $\lambda = [2(k+1)+l]/(2k+1)$, $l = 1, \ldots, 2k-1$, $l = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что уравнению (3.9) в круге $\{x_1^2+x_2^2 \leqslant 1\}$ удовлетворяет функция $u = (x_1^\lambda+1)\xi(x_2)$. На границе $\{x_1^2+x_2^2=1\}$ такая функция принимает бесконечно дифференцируемое граничное значение. Функции, образующие недивергентное уравнение (1.6), соответствующее уравнению (3.9), удовлетворяют в отношении гладкости всем требованиям теоремы 3.1. Однако при $\lambda \in (1, 2)$ такое решение не имеет ограниченной при $x_1 \to 0$ второй производной $\partial^2 u/\partial x_1^2$. Это связано с тем, что условие вида (3.1) для рассматриваемого уравнения нарушено. Действительно, при $m \neq 2$ это было показано выше, а при $m=2$ несправедливость условия (3.1) легко проверяется непосредственно. Приведенный пример доказывает существенность условия (3.1), и в частности условия независимости a^{ij} от p, $i, j = 1, \ldots, n$. В определенной мере существенность последнего условия подтверждается известным примером Ю. Г. Колесова (см. [21], с. 41). Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, уравнение вида

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{m-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \lambda(\nabla u) = f(x),$$

где $m \geqslant 2$, $\lambda = \lambda(p_1 \ldots, p_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(0, \ldots, 0) = 0$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f(x) > 0$ в Ω при граничном условии $u=0$ на $\partial\Omega$. Такая задача не может иметь дважды дифференцируемого в Ω и непрерывного в $\bar{\Omega}$ решения, поскольку внутри Ω должна существовать хотя бы одна экстремальная точка, в которой левая часть уравнения обращается в 0, в то время как правая часть $f(x)$ строго больше нуля в этой точке.

Обращаясь снова к условию (3.1), замечаем, что ввиду нечетности члена $\frac{\partial^2 a}{\partial p_s \partial p_t}\frac{u_{kl}u_{sk}u_{tl}}{|D^2 u|}$ по переменным u_{ij} из условия (3.1) следует невозможность нелинейного вхождения p в младший член $a(x, u, p)$ или, точнее, необходимость, чтобы $a(x, u, p)$ имел вид $a(x, u, p) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)p_k + a_0(x, u)$. Пусть выполнено и это условие. Но тогда член $\frac{\partial a^{ij}}{\partial u}u_{ij}$ невозможно забить никакими остальными членами левой части (3.1), что водит к условию независимости a^{ij} от u, i, $j=1, \ldots, n$.

Следовательно, если иметь в виду применение теоремы 3.1 к (эллиптическому уравнению (5.1.35), то следует предположить, что веденные коэффициенты этого уравнения имеют вид:

$$l'^i(x, u, q)=\sum_{j=1}^n l'^{ij}(x) q_j, \quad i=1, \ldots, n,$$

$$l'_0(x, u, q)=\sum_{k=1}^n l_0'^k(x) q_k+\bar{l}'_0(x, u).$$

В случае справедливости условий (3.10) уравнение вида (1.5), поро ное соответствующим уравнением (5.1.35), имеет вид (см. (1.6), (3.10))

$$a^{ij}(x) u_{x_i x_j}-\beta^s(x) u_{x_s}-c(x, u)-g(x)=0,$$

где

$$a^{ij}=a^{ki} l'^{ks} a^{sj}, \ i, \ j=1, \ldots, n, \ b^s=\frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ki} l'^{ks} a^{js})+l'_{0k} a^{ks}, \ c=\bar{l}'_0(x,$$

$$g=f(x).$$

Для уравнения вида (3.11) условие (3.1) принимает вид: при всех $u \in[-m, m]$

$$\frac{\partial c(x, u)}{\partial u}+\min_{s=1, \ldots, n} \frac{\partial \beta^s}{\partial x_s}-\sum_{t \neq s}\left|\frac{\partial \beta^s}{\partial x_t}\right|+\max_{i, j=1, \ldots, n} \frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial x_i \partial x_j}-$$

$$-\sum_{\substack{(k, l) \neq(i, j) \\ i, j=1, \ldots, n}}\left|\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial x_k \partial x_l}\right|-n \sup_{l=1, \ldots, n, |\tau|=1} \frac{\left|\frac{\partial \mathfrak{A}^\tau}{\partial x_l}\right|^2}{\mathfrak{A}^\tau}>0,$$

где $\mathfrak{A}^\tau \equiv a^{ij}(x) \tau_i \tau_j$, $|\tau|=1$.

Ниже для решений уравнения вида (5.1.35) устанавливается ган ная оценка $\max_{\partial\Omega}|D^2 u|$ в предположении, что уже известна оценка $\max_{\Omega}|D^2 u| \leqslant \max\left\{\max_{\partial \Omega}|D^2 u|, L\right\}$, где $L=\mathrm{const}>0$. На этом этапе стимы более широкие классы квазилинейных уравнений вида (5.1 чем в теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $\Omega \in C^3$, *и пусть приведенные коэффици дивергентного* $(A, \mathbf{b})$*-эллиптического в* Ω *уравнения* (5.1.35) *имеют*

$$l'^i(x, u, q)=\sum_{j=1}^n l'^j(x, u) q_j, \ i=1, \ldots, n; \ l'_0=l'_0(x, u, q); \quad ($$

матрица $A=\|a^{ij}(x)\|$ *симметрична и неотрицательно определена* $a^{ij} \in \bar{C}^2(\bar{\Omega})$, i, $j=1, \ldots, n$, $\mathbf{b} \equiv(b^1(x), \ldots, b^n(x))$, $b^i(x) \in \bar{C}^2(\bar{\Omega})$, $t=1, .$ *Предположим, что коэффициенты уравнения* (1.2), *порожденные ук ным уравнением* (5.1.35), *т. е. функции* $\hat{a}^{ij}(x, u)$, i, $j=1, \ldots,$ $\hat{a}(x, u, q)$, *определяемые формулой* (1.4) *по функциям* (3.12), *прин жат классу* $C^{(2)}(\bar{D}_\delta \times[-m, m] \times\{|p| \leqslant \bar{M}_1\})$, *где область* D_δ *опред по формуле* (2.3), $m=\mathrm{const} \geqslant 0$, $\bar{M}_1=\mathrm{const} \geqslant 0$, *т. е. имеют огран ные в* $\bar{D}_\delta \times[-m, m] \times\{|p| \leqslant \bar{M}_1\}$ *частные производные второго по по всем своим аргументам. Пусть для функций* $\hat{a}^{ij}$ *и* a^{ij}, $i, j=1, .$

выполнено условие (2. 1) (*с заменой* Ω *на* D_δ), *причем, более того, при всех* $x \in \bar{D}_\delta$, $u \in [-m, m]$ *и* $\xi = A\eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$, *справедливо неравенство*

$$\hat{a}^{ij}(x, u)\xi_i\xi_j \geqslant \nu_0 |\xi|^2, \quad \nu_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{3.13}$$

Предположим далее, что при всех $y \in \partial\Omega$ *справедливо неравенство* (2. 9). *Пусть, наконец, функция* $u \in C^3(D_\delta) \cap C^2(\bar{D}_\delta)$ *удовлетворяет в* D_δ *уравнению* (5. 1. 35), *причем* $u = 0$ *на* $\partial\Omega$, $\max\limits_{\Omega} |u| \leqslant m$, $\max\limits_{\Omega} |\nabla u| \leqslant \bar{M}_1$, $\max\limits_{\Omega} |D^2 u| \leqslant \max \left\{ \max\limits_{\partial\Omega} |D^2 u|, L \right\}$, *где* $L = \mathrm{const} \geqslant 0$. *Тогда*

$$\max_{\partial\Omega} |D^2 u| \leqslant M_2, \tag{3.14}$$

где $|D^2 u|^2 = \sum\limits_{i, j=1}^{n} u^2_{x_i x_j}$, *а* M_2 *зависит лишь от* n, ν_0, *константы* γ *из* (2. 9), m, $\bar{M}_1$, L, *границ модулей функций* a^{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, a, *их частных производных первого порядка на* $\bar{D}_\delta \times \{|u| \leqslant m\} \times \{|p| \leqslant \bar{M}_1\}$ *и* C^2*-норм функций, описывающих границу* $\partial\Omega$.

Доказательство. Пусть u — указанное в формулировке теоремы решение уравнения (5. 1. 35) в D_0. Зафиксируем какую-нибудь точку $x_0 \in \partial\Omega$. Ввиду леммы 1. 1 можно считать, что некоторая часть $\Gamma \subset \partial\Omega$, содержащая внутри себя точку x_0, является плоской. Действительно, для нового $(\tilde{A}, \tilde{b})$-эллиптического уравнения вида (1. 1), получившегося в результате распрямления границы $\partial\Omega$ в окрестности точки $x_0 \in \partial\Omega$, по-прежнему будет выполнено условие (3. 13), поскольку функции $\hat{a}^{ij}$ инвариантны относительно невырожденного гладкого преобразования координат (см. лемму 1. 1), а условие вида (2. 9) также будет выполнено, поскольку $|A\nu| = |\tilde{A}\tilde{\nu}|$. Более того, можно считать, что оси $Ox_1, \ldots, Ox_{n-1}$ расположены в плоскости, содержащей Γ, а ось Ox_n направлена по внутренней нормали к Γ в точке x_0. Очевидно, существует такое число $r > 0$, не зависящее от $x_0 \in \partial\Omega$, что пересечение $\Omega_r \equiv K_r(x_0) \cap \Omega$ содержится в D_0, а $S_r \equiv K_r(x_0) \cap \partial\Omega$ содержится в Γ. Продифференцируем уравнение, записанное в форме (1. 5) (определяемое по формулам (1. 6), (1. 2), (1. 4), (3. 12) или по формулам (1. 7), (5. 1. 2), (3. 12)), по какой-нибудь переменной x_τ, $\tau = 1, \ldots, n-1$. Тогда функция $u^\tau \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_\tau}$ удовлетворяет в Ω_r уравнению вида

$$a^{ij}u^\tau_{ij} - \frac{\partial a^{ij}}{\partial u} u^\tau u_{ij} - \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_\tau} u_{ij} - \frac{\partial a}{\partial p_m} u^\tau_m - \frac{\partial a}{\partial u} u^\tau - \frac{\partial a}{\partial x_\tau} = 0. \tag{3.15}$$

Для функции $u^\tau \in C^2(\Omega_r) \cap C^1(\bar{\Omega}_r)$, удовлетворяющей в Ω_r уравнению (3. 15) и условию $u^\tau|_{S_r} = 0$, известны производные $u^\tau_{x_s}$ по касательным направлениям x_s, $s = 1, \ldots, n-1$, поскольку $u^\tau_{x_s} = 0$, τ, $s = 1, \ldots, n-1$. Для оценки $u^\tau_{x_n}$ воспользуемся теоремой 1. 5. 1'. Очевидно, что условие (1. 5. 7) этой теоремы выполнено в точке x_0. Проверим справедливость условий (1. 5. 23) и (1. 5. 24). Ввиду того что S_r является частью плоскости, $\nabla\rho(x) = \nu(y(x))$, где $y(x)$ — проекция точки $x \in \Omega_r$ на S_r. Поэтому $\mu\nabla\rho + t\nu = (\mu + t)\nu$. Напомним, что μ — положительная константа, определяемая в данном случае по формуле $\mu = \bar{M}_1 + 2/r$, а t — положительный параметр, удовлетворяющий условию $t \geqslant l = \mathrm{const} > 0$. Далее будем считать, не ограничивая общности, что $l \geqslant \mu$. Уравнение (3. 15) мы рассматриваем как уравнение вида $\tilde{a}^{ij}(x) u^\tau_{ij} = \tilde{a}(x, \nabla u^\tau)$, причем

$$\tilde{a}^{ij} = a^{ij}, \quad \tilde{a}(x, \tilde{p}) = \frac{\partial a^{ij}}{\partial u} u_{x_\tau} + \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_\tau} u_{ij} + \frac{\partial a}{\partial p_m} \tilde{p}_m + \frac{\partial a}{\partial u} u_{x_\tau} + \frac{\partial a}{\partial x_\tau},$$

где

$$a^{ij},\ \frac{\partial a^{ij}}{\partial p_m},\ \frac{\partial a^{ij}}{\partial u}u_{x_\tau},\ \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_\tau}u_{ij},\ \frac{\partial a}{\partial p_m},\ \frac{\partial a}{\partial u},\ \frac{\partial a}{\partial x_\tau}$$

рассматриваются как функции от x. Поэтому в данном случае $\mathscr{E}_1(x,$ $\mu\nabla\rho+t\nu)$ не зависит от u и имеет вид $\mathscr{E}_1=(\mu+t)^2\mathfrak{A}\nu\cdot\nu$, где $\mathfrak{A}\equiv\|a^{ij}$ ν — единичный вектор внутренней нормали к Γ. Поскольку $\mathfrak{A}\nu\cdot\nu=$ $=\hat{\mathfrak{A}}A\nu\cdot A\nu$, где $A=\|a^{ij}(x)\|$, то ввиду условия (3.13) и неравенств

$$\gamma^{-1}\leqslant|A(x)\nu(y(x))|\leqslant\gamma,\quad x\in\Omega_r, \tag{3.16}$$

вытекающего из условия (2.1) за счет достаточной малости числа r (приче эта малость зависит только от модуля непрерывности элементов матрицы вблизи $\partial\Omega$), при всех $x\in\Omega_r$ и $t\geqslant l\geqslant\mu$, где μ зависит лишь от r и $\bar{M}$ выполняется неравенство

$$\mathscr{E}_1\geqslant\nu_0\gamma^2t^2. \tag{3.17}$$

Вспоминая, что в Ω_r: $|u|\leqslant m$, $|\nabla u|\leqslant\bar{M}_1$, $|D^2u|\leqslant\max(M_2, L)$, $M_2\equiv$ $\equiv\sup\limits_{\partial\Omega}|D^2u|$, и учитывая вид правой части уравнения (3. 15), заключаем, чт условие (1.5.23) выполнено с функцией $\psi(t)$, имеющей вид $\psi(t)=c_1t^{-1}+$ $+c_2M_2t^{-2}$, где c_1, c_2 зависят только от известных величин, причем м считаем, что $M_2\geqslant1$. Очевидно, что условие (1.5.24) также выполнен с такой же функцией $\psi(t)$. Применяя тогда теорему 1.5.1′, получаем оценк

$$\left|\frac{\partial u^\tau(x_0)}{\partial\nu}\right|\leqslant\beta+c_3, \tag{3.18}$$

причем c_3 — известная константа, а β определяется из равенства (см. (1.3.7)

$$\int\limits_{\bar{\alpha}}^{\beta}\frac{\rho\omega\rho}{(K+c_1)\rho+c_2M_2}=M_1, \tag{3.19}$$

где $\bar{\alpha}$ — некоторая известная величина (см. доказательство теоремы 1.5.1) Из условия (3.19) следует, что $\beta\leqslant c_4+c_5\sqrt{M_2}$, откуда и из (3.18) следует оценка

$$\left|\frac{\partial^2u(x_0)}{\partial x_\tau\partial x_n}\right|\leqslant c_6\left(1+\sqrt{M_2}\right),\quad\tau=1,\ldots,n-1, \tag{3.20}$$

где c_6 определяется лишь известными величинами. Для завершения доказательства теоремы заметим, что величина $\left|\frac{\partial^2u(x_0)}{\partial x_n\partial x_n}\right|$ оценивается чере остальные производные второго порядка в силу самого уравнения (1.6) Действительно, ввиду условия (3.13) $\alpha^{nn}\equiv\hat{a}^{ks}a^{kn}a^{sn}\geqslant\nu_0|\mathbf{a}^n|^2\equiv\nu_0\sum\limits_{i=1}^{n}(a^{in})^2$ но в рассматриваемой нами системе координат $\sum\limits_{i=1}^{n}(a^{in})^2\equiv|A\nu|^2\geqslant\gamma^{-2}>0$ Поэтому коэффициент при u_{nn} отграничен от 0 известной величиной, откуд и следует сделанное выше утверждение об оценке $\left|\frac{\partial^2u}{\partial x_n^2}\right|$ через остальны (уже оцененные) вторые производные. Тогда ввиду произвола точки x из (3.20) следует

$$\max_{\partial\Omega}|D^2u|\leqslant c_7\left(1+\sqrt{\max_{\partial\Omega}|D^2u|}\right),$$

из которой и вытекает, очевидно, оценка (3.14). Теорема 3.2 доказана.

Теорема 3.3. *Пусть уравнение вида* (5.1.35) *имеет структуру* $(A, \mathbf{b})$-*эллиптического уравнения в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *класса* C^2, *причем* $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ — *симметричная неотрицательно определенная в* $\bar{\Omega}$ *матрица*, $a^{ij} \in \bar{C}^2(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\mathbf{b} \equiv (b^1(x), \ldots, b^n(x))$, $b^i \in \bar{C}^2(\bar{\Omega})$. *Предположим, что функции* $\hat{a}^{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $\hat{a}(x, u, q)$, *определенные по формулам* (1.4), (3.10), *принадлежат* $\bar{C}^2(\Omega)$ *и* $\bar{C}^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *соответственно. Пусть для уравнений* (2.21) *и* (2.22), *порожденных уравнением* (5.1.35) *посредством соответственно равенств* (1.4) *и* (1.7), *выполнены равномерно по* ε *условия* (2.2), (2.8), (2.9), (2.15), (3.5), (3.13), *и пусть для приведенных коэффициентов уравнения* (5.1.35) *справедливо условие* (2.25) (*с учетом условия* (3.10)). *Тогда задача* (1.1) *имеет хотя бы одно обобщенное решение* u, *ограниченное в* $\bar{\Omega}$ *вместе со всеми своими производными первого и второго порядков, т. е. существует функция* $u \in L^\infty(\Omega) \cap \mathring{H}_m(\Omega)$, $\forall m > 1$, *с* $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$, $D^2u \in L^\infty(\Omega)$, *для которой справедливо тождество вида* (2.26), *причем функция* u *удовлетворяет уравнению* (5.1.35) *п. в. в* Ω.

Доказательство. Поскольку условия теоремы 3.3 включают как частный случай условия теоремы 2.3, то, по теореме 2.3, существует функция $u \in L^\infty(\Omega) \cap \mathring{H}_m(\Omega)$, такая, что $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$ и справедливо тождество (2.26). Ввиду того что из условий теоремы 3.3 вытекает справедливость для регуляризованных задач вида (2.23) всех условий теорем 3.1 и 3.2, можно считать, что для решений u_ε задач (2.23) справедлива оценка

$$\max_{\bar{\Omega}} |D^2u_\varepsilon| \leqslant \bar{M}_2 \tag{3.21}$$

с константой $\bar{M}_2$, не зависящей от ε. Отсюда следует, очевидно, что для предельной функции u также справедлива оценка $|D^2u| \leqslant \bar{M}_2$ п. в. в Ω. Таким образом, обобщенное решение задачи (1.1) является функцией, имеющей липшицевы в $\bar{\Omega}$ первые производные. Тогда стандартным образом доказывается, что функция u удовлетворяет уравнению (5.1.35) п. в. в Ω. Теорема 3.3 доказана.

В качестве примера в связи с теоремой 3.3 рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, недивергентное уравнение вида

$$\alpha^{ij}(x) u_{x_i x_j} - \beta^i(x) u_{x_i} - c(x, u) = g(x), \tag{3.22}$$

где $\mathfrak{A} \equiv \|\alpha^{ij}(x)\|$ — симметричная неотрицательно определенная в $\bar{\Omega}$ матрица, α^{ij}, β^i, c, g — достаточно гладкие функции своих аргументов. Уравнение (3.22) можно переписать в виде

$$-\mathrm{div}_A(A\nabla u) + l_0(x, u, \nabla u) = f(x), \tag{3.23}$$

где $\mathrm{div}_A(A\nabla u) \equiv \mathrm{div}(A^*A\nabla u) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha^{ij} u_{x_j})$, $A = \sqrt{\mathfrak{A}}$, $l_0 = c + b^i p_i$, $b^i = \frac{\partial \alpha^{ki}}{\partial x_k} + \beta_i$, т. е. в виде дивергентного $(A, \mathbf{b})$-эллиптического уравнения относительно матрицы $A = \sqrt{\mathfrak{A}}$, $\mathbf{b} \equiv (b^1(x), \ldots, b^n(x))$, приведенные коэффициенты которого суть

$$l'^i(x, u, q) = q_i, \quad l'_0(x, u, q) = c(x, u), \tag{3.24}$$

так что для них выполнены условия (3.10). Поэтому при условиях, определенных теоремой 3.3, задача

$$\alpha^{ij} u_{ij} - \beta^i u_i - c(x, u) = g \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \tag{3.25}$$

будет иметь хотя бы одно обобщенное решение u, ограниченное в Ω вмест со всеми своими производными до второго порядка включительно, приче такое решение удовлетворяет уравнению н. в. в Ω и обращается в 0 на ∂! как элемент пространства $\mathring{H}^2_p(\Omega)$ при $\forall p>1$.

Приведем условия справедливости этого результата в терминах исхо; ного уравнения (3.22). Легко видеть, что все условия теоремы 3.3 дл уравнения (3.23), порожденного уравнением (3.22), будут выполнены, если 1) существует $m_0 = \mathrm{const} > 0$, такая, что при всех $x \in \bar{\Omega}$ и $|u| \leqslant m_0$ вы полнено неравенство $c(x, u)u - g(x)u \geqslant 0$; 2) $\alpha^{ij}\nu_i\nu_j > 0$ на $\partial\Omega$, где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$; 3) при все $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqslant m_0$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial c(x, u)}{\partial u} + \min_{i=1, \ldots, n} \frac{\partial\beta^i}{\partial x_i} - \sum_{\substack{i \neq k \\ k=1, \ldots, n}} \left|\frac{\partial\beta^i}{\partial x_k}\right| - \frac{n}{4} \sup_{|\tau|=1} \frac{|\nabla \mathfrak{A}^\tau|^2}{\mathfrak{A}^\tau} > 0, \qquad (3.26$$

где $\mathfrak{A}^\tau \equiv \alpha^{ij}(x)\tau_i\tau_j$; 4) при всех $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqslant m_0$ справедливо неравен ство (3.5′); 5) при всех $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqslant m_0$: $\frac{\partial c(x, u)}{\partial u} \geqslant 0$. Приведенный выш результат содержит как частный случай соответствующий результа О. А. Олейник для линейных уравнений вида (3.22) (т. е. для случа: $c(x, u) = c(x)u$) (см. [99]). В работе М. И. Фрейдлина [122] доказано суще ствование аналогичного обобщенного решения (т. е. решения, имеющег липшицевы в $\bar{\Omega}$ вторые производные) задачи

$$\begin{gathered} \alpha^{ij}(x, u)u_{x_ix_j} + b^i(x, u)u_{x_i} - cu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi(x) \text{ на } \partial\Omega, \\ \alpha^{ij}(x, u)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \alpha^{ij}\nu_i\nu_j > 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad c = \mathrm{const} > 0, \end{gathered} \qquad (3.27$$

при достаточно большой константе $c > 0$. Однако в работе [122] предпола галось, что функция $\varphi(x)$ достаточно мала вместе со своими производным первого и второго порядков.

В заключение заметим, что для уравнений, имеющих структуру, ана логичную той, которая предполагалась в теореме 3.3, подобным образо устанавливается существование решения задачи (1.1), обладающего липши цевыми производными до порядка k включительно при любом $k = 3, 4, \ldots$

ЧАСТЬ III

$(A, 0)$-ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И $(A, 0)$-ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$(A, 0)$-эллиптические и $(A, 0)$-параболические уравнения вида

$$\mathscr{L}u \equiv -\frac{d}{dx_i} l^i(x, u, \nabla u) + l_0(x, u, \nabla u) = f(x) \tag{1}$$

являются более непосредственными обобщениями классических эллиптических и параболических уравнений, чем общие $(A, \mathbf{b})$-эллиптические и $(A, \mathbf{b})$-параболические уравнения вида (1) (см. введение к ч. II монографии). В гл. 7 изучаются $(A, 0)$-эллиптические уравнения. В начале этой главы приводятся результаты о существовании и единственности обобщенного решения из энергетического класса общей краевой задачи для $(A, 0, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений в предположении достаточной гладкости матрицы A. В частности, первая краевая задача для таких уравнений имеет вид

$$\mathscr{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{2}$$

где Σ — правильная часть $\partial\Omega$ (см. § 4.3 и 7.1). Условия существования и единственности указанного обобщенного решения задачи (2), помимо требований об определенной гладкости области Ω и матрицы A, содержат некоторые просто проверяемые условия на приведенные коэффициенты уравнения (1), имеющие вид алгебраических неравенств (см. теоремы 7.1.1, 7.1.2), гарантирующие коэрцитивность и монотонность оператора $\mathscr{L}$, соответствующего задаче (2).

Приводится следствие этих результатов применительно к случаю линейных $(A, 0)$-эллиптических уравнений (см. теорему 7.1.3). В гл. 7 рассматривается также случай $(A, 0)$-эллиптических уравнений со слабым вырождением, под которыми понимаются $(A, 0)$-эллиптические уравнения, отвечающие слабо вырожденным в Ω матрицам A. Матрица A называется слабо вырожденной в области Ω, если для нее справедливо непрерывное вложение энергетического пространства $H_{m, \mathbf{m}}(A, \Omega)$ в соболевское пространство $H_{m, \mathbf{q}}(\Omega)$ (при $\forall m > 1$) с каким-нибудь $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, а следовательно, и в некоторое пространство $L^l(\Omega)$. Для $(A, 0, m, \mathbf{m})$-эллиптических слабо вырожденных уравнений правильная часть Σ совпадает со всей границей $\partial\Omega$, так что в этом случае краевое условие задается на всей границе. В случае слабо вырожденных $(A, 0, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений мы устанавливаем теорему существования обобщенного решения из энергетического класса общей краевой задачи при более слабых ограничениях на структуру уравнений, чем в предыдущем случае (см. теоремы 3.2 и 3.3).

Детально изучен случай так называемых $(A, 0, \bar{m}, \bar{m})$-эллиптических уравнений, представляющий собой некоторый специальный подкласс $(A, 0, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений со слабым вырождением. Последний содержит, в частности (при $\bar{m}=2$), линейные эллиптические уравнения вида

$$-\frac{d}{dx_i}(\alpha^{ij}u_{x_j}+\alpha^i u)+\beta^i u_{x_i}+cu=f(x), \tag{3}$$

где $\mathfrak{A}\equiv\|\alpha^{ij}\|$ — симметричная неотрицательно определенная в Ω матрица, такая, что матрица $A=\mathfrak{A}^{1/2}$ является слабо вырожденной в Ω, причем коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют некоторым условиям суммируемости (см. (7.2.32)). Для линейных уравнений вида (3) доказана фредгольмовская разрешимость общей краевой задачи. Рассмотрим в качестве примера уравнение Эйлера нерегулярной вариационной задачи на минимум интеграла

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{\bar{m}}|A\nabla u|^{\bar{m}}+\frac{1}{m}|u|^{m}-f(x)u\right]dx,\ \ u|_{\Sigma}=0, \tag{4}$$

имеющее вид

$$-\operatorname{div}\{A^*|A\nabla u|^{\bar{m}-2}A\nabla u\}+|u|^{m-2}u=f(x), \tag{5}$$

где $\bar{m}>1$, $m>1$, $f\in L^{m'}(\Omega)$, $1/m+1/m'=1$. Уравнение (5) имеет структуру $(A, 0, m, \mathbf{m})$-эллиптического в области Ω уравнения при $\mathbf{m}=(\bar{m}, \ldots, \bar{m})$, приведенные коэффициенты которого равны $l'^i(x, u, q)=|q|^{\bar{m}-2}q_i$, $i=1, \ldots, n$, $l'_0(x, u, q)=|u|^{m-2}u$. Из полученных в гл. 7 результатов следует, что при условиях достаточной гладкости матрицы A или ее слабой вырожденности в Ω общая краевая задача для уравнения (5) имеет точно одно обобщенное решение энергетического типа, непрерывно зависящее от правой части уравнения.

Заметим, что в частном случае $A=aI$, где I — единичная матрица, вопрос о существовании обобщенного решения первой краевой задачи при достаточной гладкости функции $a(x)$ рассматривался в работе [62]. Первая краевая задача для слабо вырожденных $(A, 0, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений была изучена в статье [47]. Теоремы существования обобщенных решений первой краевой задачи для слабо вырожденных эллиптических уравнений высокого порядка установлены в статье [92]. Фредгольмовская разрешимость первой, второй и третьей краевых задач для линейных слабо вырожденных эллиптических уравнений доказана в работах [69, **31**, **55**]. Изложение перечисленных выше результатов гл. 7 отражает результаты работ автора [44—47, 49, 51, 52].

В гл. 7 установлены также результаты о разрешимости задачи (2) для $(A, 0)$-эллиптических уравнений в классе A-регулярных обобщенных решений (см. введение к ч. II монографии). Анализ условий теорем 7.3.2, 7.3.2′, 7.3.3 и 7.3.4, в которых формулируются такие результаты, показывает, что условия, налагаемые на поведение приведенных коэффициентов, носят естественный характер, но возникают существенные ограничения на характер вырождения матрицы A (см. условия (7.3.3), (7.3.4)). Заведомо допустимы так называемые равномерно вырожденные матрицы A, характеризуемые условием

$$\Lambda_A\leqslant\mathrm{const}\,\lambda_A\ \text{ в }\ \Omega, \tag{6}$$

где λ_A и Λ_A — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы A. Основой получения указанных результатов является возможность установить для решений невырожденных недивергентных $(A, 0)$-эллиптических уравнений вида

$$\hat{a}^{ij}(x, u, \hat{\nabla}u)u_{\hat{i}\hat{j}} - \hat{a}(x, u, \hat{\nabla}u) = 0 \tag{7}$$

(см. введение к ч. II монографии) априорные оценки

$$\max_{\Omega}(|u| + |\hat{\nabla}u|) \leqslant \hat{M}, \tag{8}$$

где $\hat{\nabla}u \equiv A\nabla u$, с константой $\hat{M}$, не зависящей от константы эллиптичности уравнения (7). При установлении такой оценки (8) мы развиваем те методы, при помощи которых в гл. 1 устанавливались оценки градиентов неравномерно эллиптических уравнений вида (1.1.1). Справедливость указанной оценки вида (8) позволяет доказать существование решений задач Дирихле для регуляризованных уравнений (см. (6.2.21)) и осуществить предельный переход в интегральных тождествах, соответствующих таким задачам. Результаты теорем 7.3.2 и 7.3.2′ связаны с использованием условия: $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ на $\partial\Omega$. Отказ от такого условия приводит к более жесткому условию (7.3.4) вместо (7.3.3). В этом случае полученные результаты представляются теоремами 7.3.3 и 7.3.4. Следует заметить, что на одном из этапов доказательства последних теорем полезную роль играет одна специальная срезающая функция, аналогичная той, которая была использована в работе [117], посвященной доказательству разрешимости первой краевой задачи для линейного вырождающегося эллиптического уравнения в весовом пространстве $W_p^2(a, \Omega)$, где $a(x) \geqslant 0$ в Ω, $1 < p < +\infty$.

Из теоремы 7.3.4, в частности, следует, что при достаточной гладкости области Ω и функции $a(x) \geqslant 0$ уравнение (5) при $A = a(x)I$, рассматриваемое при условии $u = 0$ на $\{x \in \partial\Omega : a(x) > 0\}$, имеет точно одно A-регулярное обобщенное решение. Аналогичным методом можно установить существование A-регулярных обобщенных решений задачи (2), обладающих ограниченными A-производными второго и более высоких порядков. В связи с обсуждаемыми результатами рассмотрим в качестве примера простейшее уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + (n\lambda + \lambda^2)u = 0, \tag{9}$$

где $\lambda = \text{const} \in (0, 1)$, $x \in \Omega = \{|x| \leqslant 1\}$. Уравнение (9), имеющее структуру $(A, 0)$-эллиптического в Ω уравнения относительно матрицы $A = |x| I$, обладает решением $u = |x|^\lambda$, которое ограничено в Ω, равно 1 на $\partial\Omega$, но не имеет ограниченного градиента ∇u в Ω (при этом условие $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ на $\partial\Omega$ для уравнения (9) выполнено). В то же время указанное решение имеет ограниченные в Ω A-производные всех порядков. Приведенный пример показывает, что для уравнений рассматриваемой структуры переход от исследования гладкости к исследованию A-гладкости их решений естествен.

В гл. 8, завершающей ч. III, изучаются $(A, 0)$-параболические уравнения, рассматриваемые в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$. В начале этой главы изучаются параболические аналоги основных функциональных пространств, связанных с изучением общей краевой задачи для $(A, \mathbf{b}, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений, и параболический аналог оператора $\mathscr{L}$, соответствующего такой задаче. Здесь же устанавливаются легко проверяемые условия, обеспечивающие согласованность операторов A и B, составляющих оператор $\mathscr{L}$ (см. введение к ч. II монографии). Одним из таких условий является условие независимости матрицы A от t (хотя приведенные коэффициенты $l'^i(t, x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, и $l'_0(t, x, u, q)$ могут зависеть от всех своих аргументов). Предполагая, что такие условия выполнены, мы устанавливаем теоремы существования и единственности обобщенных решений энергетического типа общей краевой задачи для $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболических уравнений. Как и в случае $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-эллиптических уравнений, условия этих теорем выражаются в требованиях достаточной гладкости области Ω, матрицы $A(x)$ и некоторых алгебраических неравенствах для приведенных коэффициентов этих уравнений (см. теоремы 8.2.1—8.2.5). Заметим, что интегральное тождество, определяющее обобщенное решение энергетического типа, приобретает в случае $(A, \mathbf{0})$-параболических уравнений некоторую специфику, связанную с наличием у такого решения производной по t (понимаемой в смысле обобщенных функций), принадлежащей пространству $\mathscr{H}^*$ (см. (8.2.8)). Отметим также, что по сравнению с общим случаем здесь несколько ослабляются условия единственности обобщенного решения (см. лемму 8.2.2). В случае $m=2$ указанные выше алгебраические условия на приведенные коэффициенты приобретают более свободный характер (см. теоремы 8.2.3—8.2.5).

Большую часть гл. 8 занимает изучение $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболических уравнений со слабым вырождением, т. е. $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболических уравнений, отвечающих матрицам A, слабо вырожденным в цилиндре Q. Матрица A называется слабо вырожденной в цилиндре Q, если для нее справедливо непрерывное вложение энергетического пространства $\mathscr{H}_{m,\mathbf{m}} \times \times (A, Q)$ в пространство $\mathscr{H}_{m,\mathbf{q}}(Q)$ с каким-нибудь $\mathbf{q}=(q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \geqslant 1$, $i=1, \ldots, n$, и $\forall m > 1$ (см. начало § 8.3, где указанное определение слабой вырожденности матрицы A дается в несколько более общей ситуации, связанной с использованием традиционных для параболического случая «двойных» норм). Ясно, что такое вложение влечет и непрерывное вложение пространства $\mathscr{H}_{m,\mathbf{m}}(A, Q)$ в некоторое пространство $L^{\bar{l}, \bar{l}_0}(Q)$. Заметим, что в случае слабо вырожденных в цилиндре Q матриц A несущей частью границы этого цилиндра (т. е. множеством, где надо задавать значения искомого решения) является традиционная параболическая граница Γ-цилиндра Q, т. е. $\Gamma = (\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup (\Omega \times \{t=T_1\})$. Для слабо вырожденных $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболических в цилиндре Q уравнений устанавливаются результаты о существовании и единственности обобщенных решений энергетического типа, аналогичные тем, которые были установлены для $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболических уравнений при условиях достаточной гладкости матрицы A (см. теорему 8.3.1).

Далее рассматриваются слабо вырожденные $(A, \mathbf{0})$-параболические уравнения специального вида. Класс таких уравнений обозначается как класс $\widetilde{(A, \mathbf{0}, 2, \mathbf{m})}$-параболических уравнений (см. условия (8.3.20), (8.3.21)). Этот класс не является формально подклассом $(A, \mathbf{0}, 2, \mathbf{m})$-параболических уравнений в связи с тем, что с ним связано рассмотрение «двойных» норм. Однако он сохраняет основные черты $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболических уравнений со слабым вырождением и является нелинейным аналогом класса линейных параболических уравнений с суммируемыми коэффициентами. Для такого класса устанавливаются теоремы существования и единственности обобщенных решений энергетического типа общей краевой задачи при менее жестких ограничениях на структуру уравнений, чем в предыдущих случаях (см. теоремы 8.3.3, 8.3.4). Для доказательства этих результатов применяется метод эллиптической регуляризации. В случае невырожденных параболических уравнений аналогичный метод применялся, в частности, в работе [20]. Установленные в теоремах 8.3.3, 8.3.4 результаты позволяют получить теорему существования и единственности обобщенного решения общей краевой задачи для линейных вырождающихся параболических уравнений с суммируемыми коэффициентами. Случай первой краевой задачи для последних уравнений был изучен ранее другим методом в работах автора [28, 43]. Перечисленные выше результаты гл. 8 отражают исследования автора [44—46, 50, 51]. Проиллюстрируем некоторые из полученных в гл. 8 результатов на примере простейшего уравнения

$$u_t - \operatorname{div}\{A^* |A\nabla u|^{\bar{m}-2} A\nabla u\} + |u|^{m-2} u = f(x, t), \tag{10}$$

где $\bar{m} = \text{const} > 1$, $m = \text{const} > 1$, $A = A(x)$. Если матрица $A(x)$ — достаточно гладкая в $\bar{\Omega}$ или слабо вырождена в Ω, а $f \in L^{m'}(Q)$, то общая краевая задача для уравнения (10) имеет точно одно обобщенное решение (энергетического типа), непрерывно зависящее от правой части уравнения.

Заметим, наконец, что для $(A, 0)$-параболических уравнений в цилиндре Q в случае $A = A(x)$ точно так же, как в случае $(A, 0)$-эллиптических уравнений, устанавливаются результаты о существовании и единственности A-регулярных обобщенных решений первой краевой задачи. Однако эти результаты не излагаются в данной монографии.

ГЛАВА 7

$(A,0)$-ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Общая краевая задача для $(A, 0, m, \mathfrak{m})$-эллиптических уравнений

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, уравнение вида (5.1.35), предполагая, что оно имеет $(A, 0, m, \mathfrak{m})$-структуру в Ω, т. е. условия, перечисленные в определении 5.1.2, выполнены в случае $\mathbf{b} \equiv 0$ в Ω. Предположим также, что справедливость условия (4.1.3) обеспечивается условиями (4.1.1) и (4.1.4) при $m_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $m > 1$. Пусть $\widetilde{\partial\Omega} = \Sigma \cup \Sigma'$, причем для Σ выполнено условие (4.2.5), а для Σ' — условие (4.3.2). Тогда Σ — правильная, а Σ' — особая части $\partial\Omega$. Разобьем, как обычно, Σ на части Σ_1, Σ_2, Σ_3, и пусть λ — функция на Σ_3, обладающая такими же свойствами, что и в общем случае. Учитывая, что $\mathbf{b} \equiv 0$ в Ω, имеем здесь

$$(\Sigma_i)_+ = (\Sigma_i)_- = \varnothing, \quad i = 1, 2, 3; \quad \Sigma'_+ = \Sigma'_- = \varnothing. \tag{1.1}$$

Ввиду (1.1) остальные условия, к которым мы прибегали в общем случае при постановке общей краевой задачи (см. § 5.3), выполнены автоматически. Общая краевая задача для уравнения (5.1.35) принимает здесь следующий вид:

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx_i} l^i + l_0 = F \text{ в } \Omega; \; u = 0 \text{ на } \Sigma_1; \\ \mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} = 0 \text{ на } \Sigma_2; \; \mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} - \lambda u = 0 \text{ на } \Sigma_3; \end{gathered} \tag{1.2}$$

а интегральное тождество (5.3.3́) — вид

$$\int\limits_{\Omega}[\mathbf{l}'(x,\ u,\ A\nabla u)\cdot A\nabla\eta+l_0'(x,\ u,\ A\nabla u)\eta]\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_3}\lambda u|_{\Sigma}\eta ds=\langle F,\ \eta\rangle,\quad \eta\in H_\lambda,\tag{1.3}$$

где $\tilde{\Sigma}=\Sigma_1\cup\Sigma_3$, $H_\lambda\equiv H_{m,\,\mathbf{m}}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$. Мы видим, что в данном случае $X\equiv Y\equiv H_\lambda$, $\mathscr{L}\equiv\mathscr{A}$, $\mathscr{B}\equiv 0$, где 0 — нулевой оператор. Обобщенное решение задачи (1.2) можно определить здесь как всякую функцию $u\in H_\lambda$, удовлетворяющую тождеству (1.3). Из результатов общего случая (см. теоремы 5.4.1—5.4.4 и предложения 5.4.3—5.4.6) вытекают, в частности, следующие результаты.

Теорема 1.1. *Пусть при п. в.* $x\in\Omega$ *и любых* $u\in\mathbb{R}$, $q=Ap$, $p\in\mathbb{R}^n$, $\xi_0\in\mathbb{R}$, $\eta=A\xi$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ *справедливы неравенства*

$$l'^i(x,\ u,\ q)\,q_i+l_0'(x,\ u,\ q)\,u\geqslant\nu_1\sum_{i=1}^{n}|q_i|^{m_i}+\nu_2|u|^m+\varphi(x),\tag{1.4}$$

где $\nu_1,\ \nu_2=\mathrm{const}>0$, $\varphi\in L^1(\Omega)$ *и*

$$\frac{\partial l'^i(x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j+\frac{\partial l'^i(x,\ u,\ q)}{\partial u}\xi_0\eta_i+$$

$$+\frac{\partial l_0'(x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_j\xi_0+\frac{\partial l_0'(x,\ u,\ q)}{\partial u}\xi_0^2\geqslant 0.\tag{1.5}$$

Тогда при любом $F\in H_\lambda^*$ *задача* (1.2) *имеет хотя бы одно обобщенное решение. Если оператор* $\mathscr{L}:H_\lambda\to H_\lambda^*$, *соответствующий задаче* (1.2) (*определенный левой частью тождества* (1.3)), *строго монотонен, то задача* (1.2) *при* $\forall F\in H_\lambda^*$ *имеет не более одного обобщенного решения.*

Теорема 1.1 непосредственно вытекает из теорем 5.4.1, 5.4.2 и предложений 5.4.4 и 5.4.5.

Теорема 1.2. *Пусть при п. в.* $x\in\Omega$ *и любых* $u\in\mathbb{R}$, $q=Ap$, $p\in\mathbb{R}^n$, $\xi_0\in\mathbb{R}$, $\eta=A\xi$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial l'^i(x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j+\frac{\partial l'^i(x,\ u,\ q)}{\partial u}\xi_0\eta_i+\frac{\partial l_0'(x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_j\xi_0+\frac{\partial l_0'(x,\ u,\ q)}{\partial u}\xi_0^2\geqslant$$

$$\geqslant\alpha_0\left(\sum_{i=1}^{n}|q_i|^{m_i-2}\eta_i^2+|u|^{m-2}\xi_0^2\right),\quad \alpha_0=\mathrm{const}>0,\tag{1.6}$$

и пусть $m_i\geqslant 2$, $i=1,\ldots,n$, $m\geqslant 2$. *Тогда при любом* $F\in H_\lambda^*$ *задача* (1.2) *имеет точно одно обобщенное решение. Более того, оператор* $\mathscr{L}:H_\lambda\to H_\lambda^*$, *соответствующий задаче* (1.2), *есть гомеоморфизм.*

Теорема 1.2 непосредственно вытекает из теоремы 5.4.4. Заметим, что все условия в теоремах 1.1 и 1.2 имеют легко проверяемый характер. Формулировки других теорем, вытекающих из результатов общего случая, мы опускаем.

Рассмотрим, в частности, линейное уравнение вида (5.5.1) при условиях (5.5.2) (в случае $\mathbf{b}\equiv\mathbf{0}$ в Ω), (5.5.3) и в предположении, что для матрицы A из (5.5.2) справедливы условия (4.1.4) при $m=2$, $\mathbf{m}=\mathbf{2}$. Такое уравнение, как было показано в § 5 гл. 5, имеет (A, $\mathbf{0}$, 2, $\mathbf{2}$)-структуру в области Ω.

Теорема 1.3. *Предположим, что при п. в. $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$
\begin{gathered}
Q(x)\xi\cdot\xi \geqslant c_1|\xi|^2, \ c_1=\text{const}>0, \\
a_0(x)-\frac{1}{2\varepsilon_1}|\mathbf{a}(x)|^2-\frac{1}{2\varepsilon_2}|\gamma(x)|^2 \geqslant c_2, \ c_2=\text{const}>0,
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

где $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2<c_1$. Тогда при любом $F \in H_\lambda^*$ общая краевая задача вида (5.5.4) (при $\mathbf{b}\equiv 0$) имеет точно одно обобщенное решение $u \in H_\lambda$, причем это решение непрерывно в H_λ зависит от F в H_λ^*.

Доказательство. Поскольку в рассматриваемом случае левая часть неравенства (1.6) (при $m=2$, $\mathbf{m}=2$) имеет вид

$$
q^{ij}\eta_i\eta_j+a^i\xi_0\eta_i+\gamma^j\eta_j\xi_0+a_0\xi_0^2,
$$

то ввиду условий (1.7) получаем неравенство вида (1.6) с некоторой константой $\alpha_0=\min(c_1-\varepsilon_1/2-\varepsilon_2/2, \ c_2)$. Тогда из теоремы 1.2 и следует результат теоремы 1.3. Теорема 1.3 доказана.

В качестве простейшего примера в связи с установленными выше результатами рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, класса $\tilde{C}^{(1)}$ уравнение

$$
-\operatorname{div}\{A^*|A\nabla u|^{\bar{m}-2}A\nabla u\}+|u|^{m-2}u=f(x),
$$

являющееся уравнением Эйлера вариационной задачи на минимум интеграла $\int\limits_\Omega (\bar{m}^{-1}|A\nabla u|^{\bar{m}}+m^{-1}|u|^m-f(x)u)\,dx$, предполагая, что матрица $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ удовлетворяет при некоторых $m>1$ и $\mathbf{m}=(\bar{m},\ldots,\bar{m})$, $\bar{m}>1$, условиям (4.1.1) и (4.1.4) и что граница $\partial\Omega$ разбита на части Σ и Σ', причем для Σ выполнено условие (4.2.5), а для Σ' — условие (4.3.2) относительно $\mathbf{m}=(\bar{m},\ldots,\bar{m})$. Такое уравнение имеет структуру $(A, 0$ m, $\mathbf{m})$-эллиптического в Ω уравнения, приведенные коэффициенты которого имеют вид: $l'^i=|q|^{\bar{m}-2}q_i$, $i=1,\ldots,n$, $l'_0=|u|^{m-2}u$, причем для них выполнено условие (1.6) при $\alpha_0=1$, $m_i=\bar{m}$, $i=1,\ldots,n$. Тогда из теоремы 1.2 следует, что при $\forall f \in L^{m'}(\Omega)$ общая краевая задача вида (1.2) для рассмотренного уравнения имеет точно одно обобщенное решение, причем это решение непрерывно зависит от правой части $f(x)$.

§ 2. $(A, 0)$-эллиптические уравнения со слабым вырождением

1. $(A, 0, m, \mathbf{m})$-эллиптические уравнения со слабым вырождением. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — ограниченная строго липшицева область, а $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ — квадратная матрица порядка n, причем

$$
a^{ij} \in L^{m_i}(\Omega), \ m_i>1, \ i, \ j=1,\ldots,n. \tag{2.1}
$$

Определение 2.1. Матрицу A будем называть слабо вырожденной в Ω, если $\det A \neq 0$ при п. в. $x \in \Omega$ и существует такой показатель $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)$, $q_i \geqslant 1$, $i=1,\ldots,n$, что

$$
\|\nabla u\|_{\mathbf{q},\hat{\Omega}} \leqslant c\|A\nabla u\|_{\mathbf{m},\hat{\Omega}}, \ \forall u \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega}), \tag{2.2}
$$

где $\hat{\Omega}$ — произвольное измеримое подмножество в Ω, $\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_n)$, а константа c зависит только от n, $\mathbf{m}$, $\mathbf{q}$ и Ω.

Лемма 2.1. *Пусть матрица A (удовлетворяющая условию (2.1)) при п. в. $x \in \Omega$ имеет обратную матрицу $A^{-1} \equiv B \equiv \|b^{ij}(x)\|$, причем*

$$b^{ij} \in L^{r_{ij}}(\Omega),\ r_{ij} \geqslant 1,\ i,\ j=1,\ldots,n;$$
$$\max_{k=1,\ldots,n}\left(\frac{1}{m_k}+\frac{1}{r_{ik}}\right) \leqslant 1;\ i=1,\ldots,n. \tag{2.3}$$

Тогда матрица A слабо вырождена в Ω, причем неравенство (2.2) выполняется для показателя $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)$, такого, что

$$\frac{1}{q_i}=\max_{k=1,\ldots,n}\left(\frac{1}{m_k}+\frac{1}{r_{ik}}\right),\ i=1,\ldots,n, \tag{2.4}$$

а константа c в (2.2) зависит лишь от n, m_k, r_{ik}, Ω и $\|b^{ik}\|_{r_{ik},\Omega}$, $i,\ k=1,\ldots,n$.

Доказательство. Оценим норму $\|u_{x_i}\|_{q_i,\Omega}$ при каком-нибудь $i \in \{1,\ldots,n\}$. Учитывая, что $u_{x_i}=(BA)_i\nabla u=B_iA\nabla u=B(A\nabla u)\cdot\mathbf{e}_i=A\nabla u\cdot B^*\mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, и применяя неравенство Гельдера, оценим для любой подобласти $\hat\Omega \subset \Omega$

$$\|u_{x_i}\|_{q_i,\hat\Omega}=\left(\int_{\hat\Omega}|A\nabla u\cdot B^*\mathbf{e}_i|^{q_i}\ dx\right)^{1/q_i} \leqslant c\sum_{k=1}^{n}\|A_k\nabla u\|_{m_k,\hat\Omega}\|B_k^*\mathbf{e}_i\|_{r_{ik},\hat\Omega}, \tag{2.5}$$

причем мы учли, что $q_i \leqslant m_k$ и $q_im_k/(m_k-q_i) \leqslant r_{ik}$, $i,k=1,\ldots,n$ (см. (2.4)). Очевидно, что константа c в (2.5) зависит только от q_i, m_k и $\operatorname{mes}\Omega$. Учитывая, что $B_k^*\mathbf{e}_i=b^{ik}$, заключаем, что из (2.5) и следует результат леммы 2.1.

Таким образом, лемма 2.1 выявляет достаточные условия слабого вырождения матрицы A.

Лемма 2.2. *Если матрица A слабо вырождена в Ω, то для нее справедливо условие* (4.1.3).

Доказательство. Если $u_n \to 0$ слабо в $L^m(\Omega')$, $A\nabla u_n \to \mathbf{v}$ слабо в $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega')$, где $u_n \in \tilde C^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $n=1,2,\ldots$, а Ω' — любая фиксированная строго внутренняя подобласть Ω, то, применяя теорему Банаха—Сакса, легко доказать существование такой последовательности $\{\hat u_n\}$, элементы которой являются средними арифметическими элементов некоторой подпоследовательности, извлеченной из исходной последовательности $\{u_n\}$, что $\hat u_n \to 0$ в $L^m(\Omega')$, $A\nabla\hat u_n \to \mathbf{v}$ в $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega')$ (сильно). Но тогда $A\nabla\hat u_n \to \mathbf{v}$ п. н. в Ω', а следовательно, и $\nabla\hat u_n \to A^{-1}\mathbf{v}$ п. в. в Ω'. С другой стороны, используя (2.2), заключаем, что $\nabla(\hat u_n-\hat u_m) \to 0$ в $\mathbf{L}^{\mathbf{q}}(\Omega')$ при $n,\ m \to \infty$. Тогда $\nabla\hat u_n \to \mathbf{w}$ в $\mathbf{L}^{\mathbf{q}}(\Omega')$, где $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^q(\Omega')$, причем очевидно, что $\mathbf{w}=A^{-1}\mathbf{v}$ п. в. в Ω'. Вспоминая, что при этом $\hat u_n \to 0$ в $L^m(\Omega')$, заключаем, что $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ п. в. в Ω, а следовательно, и $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ п. в. в Ω. Лемма 2.2 доказана.

Аналогичным образом доказывается и следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть матрица A слабо вырождена в Ω. Тогда если функция $u \in L^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $[u \in L^m(\Omega)]$ имеет обобщенный A-градиент $A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $[A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}}(\Omega)]$, то она имеет и (обычный) обобщенный градиент $\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $[\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{q}}(\Omega)]$, причем обобщенный A-градиент $A\nabla u$ равен вектору, получающемуся действием матрицы на вектор ∇u.*

Учитывая известную теорему С. Л. Соболева о непрерывном вложении пространства $H_{\mathbf{q}}(\Omega)$ в $L^1(\partial\Omega)$, устанавливаем следующий результат.

Лемма 2.4. *Пусть матрица A слабо вырождена в Ω. Тогда вся граница $\partial\Omega$ является правильным относительно матрицы A и показателей*

m, $\mathbf{m}$ множеством (см. определение 4. 3. 1). Всякая функция $u \in H_{m, \mathbf{m}}(A, \Omega)$ имеет обобщенное предельное значение на $\partial\Omega$, совпадающее со следом на $\partial\Omega$ этой функции, рассматриваемой как элемент пространства $H_{m, \mathbf{q}}(\Omega)$ при $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, опредвленном по формуле (2. 4).

Рассмотрим в области Ω уравнение (5. 1. 35), предполагая, что оно имеет $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-структуру в Ω относительно слабо вырожденной матрицы A. Ввиду леммы 2. 4 общая краевая задача для такого уравнения имеет вид

$$\mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega;\ u = 0 \text{ на } \Sigma_1;\ \mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} = 0 \text{ на } \Sigma_2;\ \mathbf{l}' \cdot A\mathbf{v} - \lambda u = 0 \text{ на } \Sigma_3, \quad (2.6)$$

где $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = \partial\Omega$, $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Обобщенное решение задачи (2. 6) при $\forall f \equiv F \in H^*$ можно здесь определить как при помощи тождества вида (1. 3), так и (учитывая лемму 2. 3) как всякую функцию $u \in \overset{0, \Sigma_1}{H}_{m, \mathbf{m}}(A, \Omega) \cap \overset{0, \Sigma_1}{H}_{m, \mathbf{q}}(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int_{\Omega} [\mathbf{l}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\eta + l_0(x, u, \nabla u)\eta]\, dx = \langle F, \eta\rangle, \quad \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega}), \quad (2.7)$$

поскольку в рассматриваемом случае тождество (2. 7) также имеет смысл. Из результатов общего случая (см. 5. 4. 1—5. 4. 4 и предложения 5. 4. 3— 5. 4. 6) с учетом (1. 1) и того, что оператор $\mathscr{B} \equiv 0$, вытекает, в частности, следующая теорема.

Теорема 2. 1. *Пусть приведенные коэффициенты уравнения вида (5. 1. 35), имеющего $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-структуру в ограниченной строго липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, относительно слабо вырожденной матрицы A и каких-нибудь показателей $m > 1$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям (1. 4) и (1. 5). Тогда при $\forall F \in H^*$ задача (2. 6) имеет хотя бы одно обобщенное решение. Если же вместо условий (1. 4), (1. 5) для приведенных коэффициентов выполнено условие (1. 6), то при $\forall F \in H^*$ задача (2. 6) имеет точно одно обобщенное решение, причем оператор $\mathscr{L}: H \to H^*$, соответствующий этой задаче, есть гомеоморфизм.*

В случае слабо вырожденных $(A, \mathbf{0})$-эллиптических уравнений можно получить ряд дополнительных результатов, к изложению которых мы и переходим. Введем некоторые новые функциональные пространства. Обозначим через $\tilde{H} \equiv \overset{0, \Sigma_1}{\widetilde{H}}_{\mathbf{m}}(A, \Omega)$ пополнение множества $\tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$ по норме $\|u\|_{\tilde{H}} \equiv \equiv \|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \Omega} + \delta(\Sigma_1)\|u\|_{1, \Omega}$, где

$$\delta(\Sigma_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Sigma_i \neq \varnothing,\ i = 1, 2, 3, \\ 1, & \text{если } \Sigma_i = \varnothing, \end{cases}$$

причем, рассматривая разбиение границы $\partial\Omega$ на части Σ_1, Σ_2, Σ_3, мы всегда предполагаем, что $\operatorname{mes}_{n-1}\Sigma_i > 0$, если $\Sigma_i \neq \varnothing$. Через $\tilde{H}_\lambda \equiv \overset{0, \Sigma_1}{\widetilde{H}}_{\mathbf{m}}(A; \Omega; \Sigma_3, \lambda)$ обозначим выполнение множества $\tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{\tilde{H}_\lambda} = \|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \Omega} + \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\|u\|_{1, \Omega} + [1 - \delta(\Sigma_3)]\|u\|_{L^1(\lambda, \Sigma_3)}, \quad (2.8)$$

где λ — заданная положительная на Σ_3 функция, причем $\lambda \in L^1(\Sigma_3)$. Заметим, что ввиду условия (2. 2) и леммы 4. 4. 1 выражения $\|\cdot\|_{\tilde{H}}$ и $\|\cdot\|_{\tilde{H}_\lambda}$

действительно являются нормами, так что $\tilde{H}$ и $\tilde{H}_\lambda$ — банаховы пространства. Если $\lambda \in L^{\varkappa}(\Sigma_3)$, где

$$\varkappa > \frac{r}{r-2} \geqslant 1, \ \frac{n-1}{r} = \frac{n}{q^*} - 1 \text{ при } q_* = \min(q_1, \ldots, q_n) < r, \quad r \in [2, +\infty) \text{ при } q_* \geqslant n, \tag{2.9}$$

а показатели $q_1, \ldots, q_n$ связаны с показателем $\mathbf{m}$ условием (2.2), то можно не требовать положительности функции λ, поскольку при помощи известной теоремы вложения С. Л. Соболева и условия (2.2) для $\forall u \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega})$, легко устанавливается оценка

$$\left(\int_{\Sigma_3} \lambda u^2 ds\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\tilde{H}} + c(\varepsilon)\|u\|_{1,\Omega}, \ \forall \varepsilon > 0,$$

ввиду которой знак λ не играет никакой роли. В этом случае последний член в определении нормы (2.8) следует опустить.

Лемма 2.5. *Пусть матрица A слабо вырождена в Ω, и пусть показатель $\hat{l} > 1$ удовлетворяет условиям*

$$\frac{1}{\hat{l}} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} - 1\right) \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} > 1, \quad \hat{l} \in (2, +\infty) \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} \leqslant 1, \tag{2.10}$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ — показатель из условия слабой вырожденности матрицы A (см. (2.2)). Тогда справедливы вложения $\tilde{H}_\lambda \to \tilde{H} \to \overset{0,\widetilde{\Sigma_1}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega) \to L^{\hat{l}}(\Omega)$. В частности, при любой функции $u \in \tilde{H}$ справедлива оценка

$$\|u\|_{\hat{l},\Omega} \leqslant c_0 \|u\|_{\tilde{H}}, \tag{2.11}$$

где константа c_0 зависит только от n, q, Ω и константы c из (2.2). Если выполнено условие

$$\frac{1}{l} > \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} - 1\right) \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} > 1, \ l \in (1 + \infty) \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} \leqslant 1, \tag{2.12}$$

то вложение $\tilde{H} \to L^l(\Omega)$ компактно. При этом для любой функции $u \in \tilde{H}$ при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{l,\Omega} \leqslant \varepsilon \|A\nabla u\|_{\mathbf{m},\Omega} + c_1 \varepsilon^{-\theta} \|u\|_{1,\Omega}, \tag{2.13}$$

где c_1 зависит только от n, l, $\mathbf{q}$, Ω и константы c из (2.2), а $\theta > 0$ — только от n, l и $\mathbf{q}$. В случае $\Sigma_1 \equiv \partial\Omega$ константы c_0 и c_1 в (2.12) и (2.13) не зависят от Ω.

Доказательство. Из условий (2.2) и (2.10) и леммы 4.4.1 вытекают неравенства

$$\|u\|_{\hat{l},\Omega} \leqslant c_1 \|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)} \leqslant c_2 \|u\|_{\tilde{H}_{\mathbf{m}}(A,\Omega)}, \ \forall u \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}), \tag{2.14}$$

где $c_1 = c_1(n, m, \mathbf{q}, \Omega)$, $c_2 = c_2(n, m, \mathbf{q}, \Omega, c)$, причем c — константа из (2.2). Отсюда легко следует, что $\tilde{H} \equiv \overset{\widetilde{0,\Sigma_1}}{H}_{\mathbf{m}}(A, \Omega)$ можно отождествить с некоторым подпространством в $\overset{\widetilde{0,\Sigma_1}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$, а $\overset{\widetilde{0,\Sigma_1}}{H}_{\mathbf{q}}(\Omega)$ — с некоторым подпространством в $L^{\hat{l}}(\Omega)$, причем неравенства (2.14) сохраняются и для $\forall u \in \tilde{H}$.

В случае условий (2.12) компактность вложения $\tilde{H} \to L^l(\Omega)$ вытекает из компактности вложения $\overset{0,\Sigma_1}{\widetilde{H}_{\mathbf{q}}}(\Omega) \to L^l(\Omega)$ (см. лемму 4.4.1), а неравенство (2.12) — из неравенства (4.4.6) при $s=1$ и неравенства (2.2). Лемма 2.5 доказана.

Таким образом, при условии (2.10) пространства $\overset{0,\Sigma_1}{H}_{\hat{l},\mathbf{m}}(A,\ \Omega)$ и $\overset{0,\Sigma_1}{\widetilde{H}_{\mathbf{m}}}(A,\ \Omega)\ [\overset{0,\Sigma_1}{H}_{\hat{l},\mathbf{m}}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ и $\overset{0,\Sigma_1}{\widetilde{H}_{\mathbf{m}}}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)]$ изоморфны.

2. $(A,\ 0,\ \hat{l},\ \mathbf{m})$-эллиптические уравнения со слабым вырождением. Далее мы рассматриваем задачу вида (2.6) для уравнений, имеющих $(A,\ \mathbf{0},\ \hat{l},\ \mathbf{m})$-структуру в Ω, где показатель $\hat{l}$ удовлетворяет условиям (2.10), считая, что функция λ, заданная на Σ_3, положительна и принадлежит $L^1(\Omega)$. Если же $\lambda \in L^{\varkappa}(\Sigma_3)$ при показателе $\varkappa$, удовлетворяющем условию (2.9), то условие положительности λ снимается. Продвижение в результатах по исследованию разрешимости задачи (2.6) для таких уравнений связано с возможностью дать для них новые алгебраические критерии коэрцитивности и сильной монотонности, а также полуограниченности вариации оператора $\mathscr{L}$, соответствующего указанной задаче. Заметим, что поэтому такой оператор можно обозначать в виде $\mathscr{L}\colon \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}^*_\lambda$, где $\tilde{H}_\lambda := \overset{0,\Sigma_1}{\widetilde{H}_{\mathbf{m}}}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ изоморфно пространству $\overset{0,\Sigma_1}{H}_{\hat{l},\mathbf{m}}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$.

Предложение 2.1. *Пусть при п. в. $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $q = Ap$, $p \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$l'^{i}(x,\ u,\ q)\,q_i + l'_0(x,\ u,\ q)\,u \geqslant$$
$$\geqslant \nu_1 \left[\sum_{i=1}^{n} |q_i|^{m_i} + \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\,|u|^{\varkappa}\right] - \nu_2 |u|^m - \varphi(x), \tag{2.15}$$

где $\nu_1 = \mathrm{const} > 0$, $\nu_2 = \mathrm{const} > 0$, $\varkappa > 1$, $\varphi \in L^1(\Omega)$, $m > 1$, причем справедливы условия

$$\begin{gathered} m < m_* = \min(m_1,\ \ldots,\ m_n),\ \ \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\,m < \varkappa, \\ [1 - \delta(\Sigma_3)]\,m < 2,\ \ m \leqslant \hat{l}, \end{gathered} \tag{2.16}$$

или условия

$$\begin{gathered} m \leqslant m_*,\quad \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\,m < \varkappa,\quad [1 - \delta(\Sigma_3)]\,m < 2,\ \ m \leqslant \hat{l}, \\ \hat{\nu}_1 \Delta^{-m_*} > c_0 |\nu_2| (\mathrm{mes}\,\Omega)^{(\hat{l}-m)/\hat{l}},\quad \hat{\nu}_1 \Delta^{-\varkappa} > \delta(\Sigma_1)\, c_{0}^{m} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{(\hat{l}-m)/\hat{l}}, \\ \hat{\nu}_1 \Delta^{-2} > [1 - \delta(\Sigma_3)]\, c_0^m |\nu_2| (\mathrm{mes}\,\Omega)^{(\hat{l}-m)/\hat{l}}, \\ \Delta := n + \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3) + 1 - \delta(\Sigma_3), \\ \hat{\nu}_1 := \min(1,\ \nu) \cdot \min\left(1,\ (\mathrm{mes}\,\Omega)^{-\varkappa/\varkappa'}\right),\quad \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\varkappa'} = 1. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Тогда оператор $\mathscr{L}\colon \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}^*_\lambda$ коэрцитивен.

Доказательство. Пусть сначала выполнены условия (2.15), (2.16). Ввиду (2.15) для $\forall u \in \tilde{H}_\lambda$: $\langle \mathscr{L}u,\ u\rangle \geqslant \hat{\nu}_1 \left[\sum_{i=1}^{n} \|A_i \nabla u\|^{m_i}_{m_i,\Omega} + \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\,\|u\|^{\varkappa}_{\varkappa,\Omega} + \right.$ $\left. + \|u\|^2_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}\right] - |\nu_2|\,\|u\|^m_{m,\Omega} - \int\limits_{\Omega} \varphi\,dx$. Учитывая, что $\|u\|^{\varkappa}_{1,\Omega} \leqslant \|u\|^{\varkappa}_{\varkappa,\Omega} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\varkappa/\varkappa'}$, и используя оценку (2.11), выведем отсюда неравенство $\langle \mathscr{L}u,\ u\rangle \geqslant$ $\geqslant \hat{\nu}_1 \left[\sum_{i=1}^{n} \|A_i \nabla u\|^{m_i}_{m_i,\Omega} + \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\,\|u\|^{\varkappa}_{1,\Omega} + \|u\|^2_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}\right] - |\nu_2|\, c_0^m (\mathrm{mes}\,\Omega)^{(\hat{l}-m)/\hat{l}} \times$

$\times \|u\|^m_{\tilde H_\lambda} - \int\limits_\Omega \varphi(x)\,dx$. Пусть $\|u\|_{\tilde H_\lambda} = \rho \geqslant \Delta \equiv n + \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3) + 1 - \delta(\Sigma_3)$.

Тогда из последнего неравенства вытекает неравенство

$$\langle \mathscr{L}u,\ u\rangle \geqslant \hat\nu_1 \rho^q \Delta^{-q} - |\nu_2|\, c_0^m\,(\operatorname{mes}\Omega)^{(\hat l - m)/\hat l}\,\rho^m - \int\limits_\Omega \varphi(x)\,dx, \tag{2.18}$$

где q — одно из чисел совокупности $\{m_1, \ldots, m_n,\ \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\,\varkappa,\ 2(1-\delta(\Sigma_3))\}$, причем ввиду (2.16) $q > m > 1$. Но тогда из (2.18) легко следует условие вида (4.5.1) (в случае $X \equiv \tilde H_\lambda$), т. е. коэрцитивность оператора $\mathscr{L}$: $\tilde H_\lambda \to \tilde H_\lambda^*$. В случае условий (2.15), (2.17) снова получаем неравенство (2.18), но теперь уже с $q \geqslant m$. Учитывая (2.17), выведем из (2.18) неравенство

$$\langle \mathscr{L}u,\ u\rangle \geqslant c\rho^m - \int\limits_\Omega \varphi(x)\,dx,\quad \forall u \in \tilde H_\lambda,\quad \|u\|_{\tilde H_\lambda} = \rho > \Delta, \tag{2.19}$$

где $c = c(c_0,\ \nu_2,\ \operatorname{mes}\Omega,\ m,\ \hat l)$. Поскольку $m > 1$, из (2.19) немедленно вытекает коэрцитивность оператора $\mathscr{L}: \tilde H_\lambda \to \tilde H_\lambda^*$. Предложение 2.1 доказано.

Предложение 2.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *приведенные коэффициенты уравнения* (5.1.35) *имеют вид*

$$\begin{gathered} l'^i = \bar l'^i(x,\ u,\ q) + \bar{\bar l}'^i(x,\ u),\quad i = 1, \ldots, n,\\ l'_0 = \bar l'_0(x,\ u,\ q) + \bar{\bar l}'_0(x,\ u,\ q); \end{gathered} \tag{2.20}$$

2) *оператор* $\bar{\mathscr{L}}: \tilde H_\lambda \to \tilde H_\lambda^*$, *определенный по формуле*

$$\langle \bar{\mathscr{L}}u,\ \eta\rangle = \int\limits_\Omega (\bar{\mathrm{l}}' \cdot A\nabla\eta + \bar l'_0\eta)\,dx + \int\limits_{\Sigma_3} \lambda u|_\Sigma\,ds,\quad u,\ \eta \in \tilde H_\lambda, \tag{2.21}$$

удовлетворяет условию сильной монотонности вида

$$\begin{gathered} \langle \bar{\mathscr{L}}u - \bar{\mathscr{L}}v,\ u - v\rangle \geqslant \nu_0 \Bigg[\sum_{i=1}^n \|A_i\nabla(u-v)\|^{m_i}_{m_i,\Omega} + \\ + \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\,\|u - v\|^\varkappa_{\varkappa,\Omega} + \|u - v\|^2_{L^2(\lambda,\Sigma_3)} \Bigg]; \end{gathered} \tag{2.22}$$

3) *при п. в.* $x \in \Omega$ *и любых* $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial \bar{\bar l}'^i}{\partial u}\right| \leqslant \mu_1 |u|^{l/m'_i - 1} + \varphi_i;\quad \left|\frac{\partial \bar{\bar l}'_0}{\partial q_j}\right| \leqslant \mu_2\left(\sum_{k=1}^n |q_k|^{m_k(1/m'_i - 1/l)} + |u|^{l/m'_i - 1} + \tilde\varphi_i\right),\\ i = 1, \ldots, n;\quad \left|\frac{\partial \bar{\bar l}'_0}{\partial u}\right| \leqslant \mu_3\left(\sum_{k=1}^n |q_k|^{m_k(1 - 2/l)} + |u|^{l-2} + \varphi_0\right), \end{gathered} \tag{2.23}$$

где $\mu_i = \mathrm{const} \geqslant 0$, $i = 1,\ 2,\ 3$; $\varphi_i,\ \tilde\varphi_i \in L^{(1/m'_i - 1/l)^{-1}}(\Omega)$, $1/m_i + 1/m'_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\varphi_0 \in L^{l/(l-2)}(\Omega)$, *причем* $l \geqslant 2$, $\max(m'_1, \ldots, m'_n) \leqslant l < \hat l$. *Тогда оператор* $\mathscr{L}: \tilde H_\lambda \to \tilde H^*_\lambda$ *имеет полуограниченную вариацию.*

Доказательство. Обозначим через $\bar{\bar{\mathscr{L}}}: \tilde H_\lambda \to \tilde H^*_\lambda$ оператор, определенный по формуле: $\langle \bar{\bar{\mathscr{L}}}u,\ \eta\rangle = \int\limits_\Omega (\bar{\bar l}' \cdot A\nabla\eta + \bar{\bar l}'_0\eta)\,dx$, $u,\ \eta \in \tilde H_\lambda$. Используя условия 1) и 2) данного предложения и рассуждая так же, как при доказательстве предложения 5.4.5, оценим

$$\begin{gathered} \langle \mathscr{L}u - \mathscr{L}v,\ u - v\rangle = \langle \bar{\mathscr{L}}u - \bar{\mathscr{L}}v,\ u - v\rangle + \langle \bar{\bar{\mathscr{L}}}u - \bar{\bar{\mathscr{L}}}v,\ u - v\rangle \geqslant \\ \geqslant \tilde\nu_0 \left[\sum_{i=1}^n \|A_i\nabla(u-v)\|^{m_i}_{m_i,\Omega} + \delta(\Sigma_1)\,\delta(\Sigma_3)\,\|u - v\|^\varkappa_{\varkappa,\Omega} \right] + I_1 + I_2 + I_3, \end{gathered} \tag{2.24}$$

где

$$\nu_0=\min(\nu,\ 1),\quad I_1=\int\limits_\Omega\int\limits_0^1 \frac{\partial l'^i(x,\ v+\tau(u-v))}{\partial u}(u-v)A_i\nabla(u-v)\,d\tau dx,$$

$$I_2=\int\limits_\Omega\int\limits_0^1 \frac{\partial l'_0(x,\ v+\tau(u-v),\ A\nabla v+\tau A\nabla(u-v))}{\partial u}(u-v)^2\,d\tau dx,$$

$$I_3=\int\limits_\Omega\int\limits_0^1 \frac{\partial l'_0(\ldots)}{\partial q_j}A_j\nabla(u-v)(u-v)\,d\tau dx.$$

Пусть $\|u\|_{\tilde H_\lambda}\leqslant\rho$, $\|v\|_{\tilde H_\lambda}\leqslant\rho$. Учитывая условия 3) настоящего предложения, применяя неравенство Гельдера и лемму 2.5, оценим

$$\begin{gathered}|I_1|\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^n\|A_i\nabla(u-v)\|^{m_i}_{m_i,\Omega}-\sum_{i=1}^n\beta_i\|u-v\|^{m'_i}_{l,\Omega}+\beta_0\|u-v\|^l_{l,\Omega},\\ |I_2|\leqslant\beta\left(\|u-v\|^2_{l,\Omega}+\|u-v\|^l_{l,\Omega}\right),\\ |I_3|\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^n\|A_i\nabla(u-v)\|^{m_i}_{m_i,\Omega}+\sum_{i=1}^n\gamma_i\|u-v\|^{m'_i}_{l,\Omega}+\gamma\|u-v\|^l_{l,\Omega},\end{gathered}\tag{2.25}$$

где $\varepsilon>0$, $\beta_i=\beta_i(\varepsilon,\rho)>0$, $\beta_0=\beta_0(\varepsilon,\rho)>0$, $\beta=\beta(\varepsilon,\rho)>0$, $\gamma_i=\gamma_i(\varepsilon,\rho)>0$, $\gamma=\gamma(\varepsilon,\rho)>0$, причем эти функции непрерывно зависят от $\varepsilon>0$ и $\rho>0$. Из (2.24), (2.25) очевидным образом вытекает оценка

$$\begin{gathered}\langle\mathscr{L}u-\mathscr{L}v,\ u-v\rangle\geqslant\frac{\nu_0}{2}\left[\sum_{i=1}^n\|A_i\nabla(u-v)\|^{m_i}_{m_i,\Omega}+\right.\\ \left.+\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)\|u-v\|^{\varkappa}_{\varkappa,\Omega}+\|u-v\|^2_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}\right]-\gamma\left(\rho,\ \|u-v\|_{l,\Omega}\right),\end{gathered}\tag{2.26}$$

где $\gamma(\rho,\tau)$ имеет вид $\gamma(\rho,\tau)=\sum\limits_{i=1}^n d_i(\rho)\tau^{m'_i}+d_0(\rho)\tau^l$, причем $d_i(\rho)$, $i=1,\ldots,n$, и $d_0(\rho)$ суть непрерывные неотрицательные функции от $\rho>0$. Поскольку $m'_i>1$, $i=1,\ldots,n$, $l>1$, отсюда следует, что $\gamma(\rho,\tau)\tau^{-1}\to0$ при $\tau\to+0$. Ввиду леммы 2.5 норма $\|\cdot\|_{l,\Omega}$ компактна относительно нормы $\|\cdot\|_{\tilde H_\lambda}$. Тогда из (2.26) следует, что оператор $\mathscr{L}:\tilde H_\lambda\to\tilde H^*_\lambda$ имеет полуограниченную вариацию. Предложение 2.2 доказано.

Предложение 2.3. *Пусть при п. в.* $x\in\Omega$ *и любых* $u\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$, $\xi_0\in\mathbb{R}$, $\eta\in\mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\frac{\partial l'^i(x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j+\frac{\partial l'^i(x,\ u,\ q)}{\partial u}\eta_i\xi_0+\frac{\partial l'_0(x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_j\xi_0+\\ +\frac{\partial l'_0(x,\ u,\ q)}{\partial u}\xi_0^2\geqslant c\left[\sum_{i=1}^n|q_i|^{m_i-2}\eta_i^2+\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)|u|^{\varkappa-2}\xi_0^2\right],\end{gathered}\tag{2.27}$$

где $c=\mathrm{const}>0$, *а показатели* $\varkappa$, $m_1,\ldots,m_n$ *удовлетворяют условию* $\varkappa\geqslant2$, $m_i\geqslant2$, $i=1,\ldots,n$. *Тогда оператор* $\mathscr{L}:\tilde H_\lambda\to\tilde H^*_\lambda$ *сильно монотонен.*

Доказательство. Справедливость предложения 2.3 устанавливается точно так же, как было доказано предложение 5.4.6 при дополнительном учете того, что нормы пространств $\tilde H_\lambda\equiv\overset{\widetilde{0,\Sigma_1}}{H}_{\mathrm{m}}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ и $\overset{0,\Sigma_1}{H}_{l,\mathrm{m}}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ эквивалентны. Предложение 2.3 доказано.

Из теорем 5.4.1—5.4.4 и предложений 5.4.4—5.4.6 непосредственно вытекают следующие результаты по разрешимости общей краевой задачи вида (2.6) для слабо вырожденных $(A,\ \mathbf{0},\ \hat{l},\ \mathbf{m})$-эллиптических уравнений.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.15), (2.16) *или* (2.15), (2.17) *и условия* 1)—3) *предложения* 2.2. *Тогда при* $\forall F \in \tilde{H}_\lambda^*$ *задача* (2.6) *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Теорема 2.3. *Пусть выполнено условие* (2.27). *Тогда при любом* $F \in \tilde{H}_\lambda^*$ *задача* (2.6) *имеет точно одно обобщенное решение. При этом оператор* $\mathcal{L}: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$, *соответствующий задаче* (2.6), *есть гомеоморфизм.*

3. $\widetilde{(A,\ 0,\ \bar{m},\ \bar{m})}$-эллиптические уравнения со слабым вырождением. Предположим, что для уравнения вида (5.1.35) выполнены условия (5.1.2) относительно слабо вырожденной в Ω матрицы A и вектора $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{m} = (\bar{m}_1, \ldots, \bar{m})$, где $\bar{m} > 1$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ — показатель, связанный с таким $\mathbf{m}$ условием (2.2) (существование таких $\mathbf{q}$ вытекает из леммы 2.1), и пусть показатель $\hat{l}$ определяется по $\mathbf{q}$ условием (2.10). Предположим, что $\bar{m} < \hat{l}$. Пусть для функций l' и l_0' из (5.1.2) выполнены неравенства

$$\begin{gathered} |l'^i(x,\ u,\ q)| \leqslant \tilde{\mu}_1 |q|^{\bar{m}-1} + \tilde{a}_1(x)|u|^{\bar{m}-1} + \psi_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \\ |l_0'(x,\ u,\ q)| \leqslant \tilde{a}_2(x)|q|^{\bar{m}-1} + \tilde{a}_3(x)|u|^{\bar{m}-1} + \psi_0(x), \end{gathered} \tag{2.28}$$

где $\tilde{\mu}_1 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\tilde{a}_i(x) \geqslant 0$, $a_1^{\bar{m}'}$, $a_2^{\bar{m}} \in L^{\hat{s}}(\Omega)$, $a_3 \in L^{\hat{s}}(\Omega)$, $1/\hat{s} + \bar{m}/\hat{l} = 1$, $\psi_i \in L^{\bar{m}'}(\Omega)$, $1/\bar{m} + 1/\bar{m}' = 1$, $\psi_0 \in L^{\hat{l}'}(\Omega)$, $1/\hat{l} + 1/\hat{l}' = 1$. При помощи неравенства Юнга легко убедиться, что из условий (2.28) вытекает справедливость неравенств (5.1.3) при $m_1 = \ldots = m_n = \bar{m}$, $m = \hat{l}$, выражающих тот факт, что рассматриваемое уравнение имеет изотропную $(A,\ \mathbf{0},\ \hat{l},\ \mathbf{m})$-структуру при $\mathbf{m} = (\bar{m}_1, \ldots, \bar{m})$. Уравнения вида (5.1.35), обладающие перечисленными свойствами, будем называть уравнениями, имеющими $\widetilde{(A,\ 0,\ \bar{m},\ \bar{m})}$-структуру в области Ω. Для уравнений такой структуры справедливы следующие утверждения.

Предложение 2.4. *Пусть выполнены указанные выше условия, и пусть при п. в.* $x \in \Omega$ *и любых* $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$l'^i q_i + l_0' u \geqslant \nu [|q|^m + \delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)|u|^\varkappa] - a_4(x)|u|^{\bar{m}} - \psi(x), \tag{2.29}$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0$, $\varkappa > 1$, $a_4 \in L^{\hat{s}}(\Omega)$, $\bar{m}/\hat{l} + 1/\hat{s} = 1$, $\psi \in L^1(\Omega)$, *причем*

$$\begin{gathered} \delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)\bar{m} \leqslant \varkappa, \quad [1 - \delta(\Sigma_3)]\bar{m} \leqslant 2, \quad \hat{\nu}\Delta^{-\bar{m}} - c_0^{\bar{m}} \|(a_4)_+\|_{\hat{s},\Omega} > 0, \\ \Delta \equiv n + \delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3) + 1 - \delta(\Sigma_3), \quad \hat{\nu} \equiv \min(1,\ \nu)\min\left(1,\ (\operatorname{mes}\Omega)^{-\varkappa/\varkappa'}\right), \end{gathered} \tag{2.30}$$

где c_0 — *константа из неравенства* (2.11), *а символ* f_+ *означает положительную часть функции* f, *т. е.* $f_+(x) = \max(0,\ f(x))$. *Тогда оператор* $\mathcal{L}: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$, *соответствующий задаче* (2.6), *коэрцитивен.*

Доказательство. Очевидно, что для $\forall u \in \tilde{H}_\lambda$ справедливо неравенство (см. доказательство предложения 2.1): $\langle \mathcal{L}u,\ u \rangle \geqslant \hat{\nu}[\|A\nabla u\|_{\bar{m},\Omega}^{\bar{m}} + \delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)\|u\|_{\varkappa,\Omega}^{\varkappa} + \|u\|_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}^2] - \int\limits_\Omega (a_4)_+ |u|^{\bar{m}} dx - \int\limits_\Omega \psi(x)\,dx$. Применяя неравенство Гельдера и используя оценку вида (2.11) и условие (2.29), получим для $\forall u \in \tilde{H}_\lambda$, такой, что $\|u\|_{\tilde{H}_\lambda} \equiv \rho > n + \delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3) + 1 - \delta(\Sigma_3) \equiv \Delta$, неравенство $\langle \mathcal{L}u,\ u \rangle \geqslant \left[\nu\Delta^{-\bar{m}} - c_0^{\bar{m}} \|(a_4)_+\|_{\hat{s},\Omega}\right]\rho^{\bar{m}} - \left|\int\limits_\Omega \psi(x)\,dx\right|$, из которого ввиду (2.30) и следует, очевидно, коэрцитивность оператора $\mathcal{L}: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$. Предложение 2.4 доказано.

Предложение 2.5. *Пусть для уравнения* (5.1.35), *имеющего* $\widetilde{(A,\ \mathbf{0},\ \bar m,\ \bar m)}$*-структуру в* Ω, *выполнены условия:*

1) *приведенные коэффициенты* $\bar l'^i$, $i=1,\ldots,n$, *и* $\bar l_0'$ *имеют вид* (2.20);

2) *оператор* $\bar{\mathscr{L}}:\tilde H_\lambda\to\tilde H_\lambda^*$, *определенный по формуле* (2.21), *удовлетворяет условию вида* (2.22) *при* $m_1=\ldots=m_n=\bar m$;

3) *при п. в.* $x\in\Omega$ *и любых* $u\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$ *справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial\bar l'^i}{\partial u}\right|\leqslant a_5|u|^{\bar m-2}+\psi_i;\quad \left|\frac{\partial\bar l_0'}{\partial q_i}\right|\leqslant a_6|q|^{\bar m-2}+a_7|u|^{\bar m-2}+\tilde\psi_i,$$
$$i=1,\ldots,n;\ \left|\frac{\partial\bar l_0'}{\partial u}\right|\leqslant a_8|q|^{\bar m-2}+a_9|u|^{\bar m-2}+\psi_0,\tag{2.31}$$

где $a_i=a_i(x)\geqslant0$, $i=5,\ldots,9$; $\psi_i=\psi_i(x)\geqslant0$, $\tilde\psi_i=\tilde\psi_i(x)\geqslant0$, $i=1,\ldots,n$, $\psi_0=\psi_0(x)\geqslant0$; $a_5^{\bar m'}$, $a_6^{\bar m}$, $a_7^{\bar m'}$, $a_8^{\bar m/2}$, $a_9\in L^s(\Omega)$, $1/s+\bar m/l=1$, $2\leqslant\bar m\leqslant l<\hat l$, ψ_i, $\tilde\psi_i\in L^{(1/\bar m'-1/l)^{-1}}(\Omega)$, $\psi_0\in L^{l/(l-2)}(\Omega)$.

Тогда оператор $\mathscr{L}:\tilde H_\lambda\to\tilde H_\lambda^*$, *соответствующий задаче* (2.6), *имеет полуограниченную вариацию.*

Доказательство. Предложение 2.5 есть частный случай предложения 2.2, поскольку из условий (2.31) при помощи неравенства Юнга легко выводятся условия вида (2.23) при $m_1=\ldots=m_n=\bar m$, $\varphi_i=\psi_i+a_5^{(l-\bar m')/(l-\bar m)}$, $\tilde\varphi_i=\psi_i+a_6^{(l\bar m-l-\bar m)/(l-\bar m)}+a_7^{(l-\bar m')/(l-\bar m)}$, $\varphi_0=\psi_0+a_8^{\bar m(l-2)/2(l-\bar m)}+a_9^{(l-2)/(l-\bar m)}$, причем функции φ_i, $\tilde\varphi_i$, φ_0 удовлетворяют тем условиям, которые требуются в предложении 2.2. Предложение 2.5 доказано.

Из теоремы 5.4.1 и предложений 2.4 и 2.5 вытекает, очевидно, следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия* (2.28)—(2.30) *и условия* 1)—3) *предложения* 2.5. *Тогда при любом* $F\in\tilde H_\lambda^*$ *задача* (2.6) *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

4. Линейные эллиптические уравнения со слабым вырождением. Рассмотрим в ограниченной строго липшицевой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant2$, линейное уравнение вида (5.5.1), где (вообще говоря, несимметричная) матрица $\mathfrak{A}\equiv\|\alpha^{ij}(x)\|$ положительно определена при п. в. $x\in\Omega$. Будем далее всегда предполагать, что существует такая константа $k_0>0$, что при п. в. $x\in\Omega$ и любых ξ, $\eta\in\mathbb{R}^n$: $|\alpha^{ij}(x)\xi_i\eta_j|\leqslant k_0(\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j)^{1/2}(\alpha^{ij}(x)\eta_i\eta_j)^{1/2}$. (Очевидно, что в случае симметричной матрицы $\mathfrak{A}$ это условие выполнено при $k_0=1$). Обозначим $A\equiv\|a^{ij}(x)\|\equiv[{}^1/_2(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^*)]^{1/2}$. Очевидно, что $\alpha^{ij}\xi_i\xi_j=|A\xi|^2$. Предположим, что матрица A слабо вырождена в Ω (см. определение 2.1). Пусть показатель $\hat l$ удовлетворяет условию (2.10), где $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)$ связан с показателем $\mathbf{m}=\mathbf{2}=(2,\ldots,2)$ условием (2.2), причем предположим, что при этом $\hat l>2$. Легко видеть, что при указанных условиях и условиях

$$a^{ij}\in L^2(\Omega),\ \ i,\ j=1,\ldots,n;\ A^{-1}\boldsymbol{\alpha},\ A^{-1}\beta\in\mathbf{L}^{2\hat l/(\hat l-2)}(\Omega);\ A^{-1}\mathbf{g}\in\mathbf{L}^2(\Omega);$$
$$\beta_0\in L^{\hat l/(\hat l-2)}(\Omega),\ g_0\in L^{\hat l'}(\Omega),\ \frac{1}{\hat l}+\frac{1}{\hat l'}=1,\tag{2.32}$$

уравнение (5.5.1) имеет $\widetilde{(A,\ \mathbf{0},\ 2,\ 2)}$-структуру в Ω. Действительно, для функций $\mathbf{l}\equiv\mathfrak{A}p+\alpha\mathbf{u}+\mathbf{g}$, $l_0\equiv\boldsymbol{\beta}\cdot p+\beta u+g_0$ справедливы равенства вида (5.1.2) с $\mathbf{l}'\equiv Qq+\mathbf{a}u+\mathbf{f}$, $l_0'\equiv\boldsymbol{\gamma}\cdot q+a_0u+f_0$ при $A=((\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^*)/2)^{1/2}$, $Q=A^{-1}\mathfrak{A}A^{-1}$, $\mathbf{a}=A^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{f}=A^{-1}\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\gamma}=A^{-1}\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{b}=0$, $a_0=\beta_0$, $f_0=g_0$ (причем мы учли, что матрица A симметрична). Для таких функций l'^i, $i=1,\ldots,$

n, l'_0 справедливы неравенства вида (2.28) при $\bar{m}=2$, $\tilde{a}_1=|A^{-1}\boldsymbol{\alpha}|$, $\psi_i=|A^{-1}\mathbf{g}|$, $i=1,\ldots,n$, $\tilde{a}_2=|A^{-1}\boldsymbol{\beta}|$, $\tilde{a}_3=|\beta_0|$, $\psi_0=|g_0|$ с некоторой константой $\tilde{\mu}_1$, зависящей от k_0, поскольку, как легко видеть, $\|A^{-1}\mathfrak{A}A^{-1}\|\leqslant\mathrm{const}$ в Ω. Справедливость последнего неравенства вытекает из оценки $|A^{-1}\mathfrak{A}A^{-1}p\xi|=|\mathfrak{A}q\cdot\eta|\leqslant k_0|Aq||A\eta|=k_0|p||\xi|$, где $p=Aq$, $\xi=A\eta$, q, $\eta\in\mathbb{R}^n$, и совпадения $\mathbb{R}^n$ с множеством $\{p=A(x)q,\ q\in\mathbb{R}^n\}$ при п. в. $x\in\Omega$. Таким образом, уравнение (5.5.1) действительно имеет $\widetilde{(A,\ 0,\ 2,\ 2)}$-структуру в Ω.

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* (2.32), *и пусть существуют такие числа* $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, $\varepsilon_3>0$, $\varepsilon_4>0$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)/2<1$, *и* $\theta>0$, *что* $\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)\theta\beta_0(x)\geqslant c_1=\mathrm{const}>0$ *при п. в.* $x\in\Omega$;

$$\hat{\nu}\Delta^{-2}-c_0^2\left\|\left[(\theta-1)\beta_0+\frac{|A^{-1}\boldsymbol{\alpha}|^2}{2\varepsilon_1}+\frac{|A^{-1}\boldsymbol{\beta}|^2}{2\varepsilon_3}+\frac{\varepsilon_4}{2}|f_0|^{(l-2)/(l-1)}\right]_+\right\|_{\hat{s},\Omega}\geqslant c_2=$$
$$=\mathrm{const}>0,\quad \frac{1}{\hat{s}}+\frac{2}{\hat{l}}=1, \qquad (2.33)$$

где $\hat{\nu}=\min(1,\nu)(\min(1,\ \mathrm{mes}^{-1}\Omega))$, $\nu=\min(1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)/2,\ c_1)$, $\Delta=$ $=n+\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)+1-\delta(\Sigma_3)$, *а* c_0 — *константа из оценки* (2.11). *Тогда при* $\forall f\equiv F\in\tilde{H}_\lambda\equiv\overset{\widetilde{0,\Sigma_1}}{H_2}(A;\ \Omega;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ *общая краевая задача вида* (5.5.4) (*в случае* $\Sigma=\partial\Omega$, $\Sigma'=\varnothing$) *имеет точно одно обобщенное решение, причем оператор* $\mathscr{L}:\tilde{H}_\lambda\to\tilde{H}^*_\lambda$, *соответствующий этой задаче, есть гомеоморфизм.*

Доказательство. Применяя неравенство Коши и Юнга, получим, что при п. в. $x\in\Omega$ и любых $u\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$

$$l^i q_i+l'_0u=Qq\cdot q+\mathbf{a}u\cdot q+\mathbf{f}\cdot q+\boldsymbol{\gamma}\cdot qu+a_0u^2+f_0u\geqslant$$
$$\geqslant\left(1-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{2}\right)|q|^2+\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)\theta a_0u^2+c_0^2\Big[(1-\theta)a_0-$$
$$-\frac{1}{2\varepsilon_1}|\mathbf{a}|^2-\frac{1}{2\varepsilon_3}|\boldsymbol{\gamma}|^2-\frac{\varepsilon_4}{2}|f_0|^{(l-2)/(l-1)}\Big]u^2-\frac{1}{2\varepsilon_2}|\mathbf{f}|^2-\frac{1}{2\varepsilon_4}|f_0|^{l/(l-1)}.$$

Ввиду (2.33) отсюда следует, что выполнены условия предложения 2.4 при

$$\bar{m}=2,\ \varkappa=2,\ \psi=-\frac{1}{2\varepsilon_2}|\mathbf{f}|^2-\frac{1}{2\varepsilon_4}|f_0|^{l/(l-1)}.$$

Из доказательства предложения 2.4 следует, что в случае, когда в условии (2.29) $\psi\equiv0$ в Ω, справедлива оценка $\langle\mathscr{L}u,\ u\rangle\geqslant c_2\|u\|^2_{\tilde{H}_\lambda}$ для $\forall u\in\tilde{H}_\lambda$. Ввиду линейности оператора $\mathscr{L}:\tilde{H}_\lambda\to\tilde{H}^*_\lambda$ отсюда сразу вытекает его сильная монотонность, так как при оценке снизу выражения $\langle\mathscr{L}(u-v),\ u-v\rangle$ можно считать, что $|\mathbf{f}|\equiv|f_0|\equiv0$ в Ω, поэтому условие (2.29) выполнено с $\psi\equiv0$ в Ω. Тогда результат теоремы 2.5 вытекает из теоремы 5.4.4. Теорема 2.5 доказана.

Замечание 2.1. Условие (2.33) будет заведомо выполнено, если при п. в. $x\in\Omega$

$$\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)\beta_0(x)\geqslant\hat{c}_1=\mathrm{const}>0;\quad \beta_0(x)\geqslant|A^{-1}\boldsymbol{\alpha}|^2+|A^{-1}\boldsymbol{\beta}|^2. \qquad (2.34)$$

Действительно, полагая $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2(1-\theta)$, $\theta=1/4$, $\varepsilon_3=1/3$ и учитывая, что $(a+b)_+ \leqslant a_+ + b_+$, замечаем, что условие (2.33) будет выполнено, если выбрать $\varepsilon_4 > 0$ столь малым, что

$$\frac{1}{2}\tilde{\nu} \geqslant c_0 \frac{\varepsilon_4}{2} \| |g_0|^{(\hat{l}-2)/(\hat{l}-1)} \|_{\hat{s}, \Omega},$$

где c_0 — константа из (2.11).

Предположим теперь, что в условии (2.32) предельный показатель $\hat{l}$ заменен на любой показатель $l \in [2, \hat{l})$, а под $\mathscr{L}: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ далее будем понимать оператор, определенный по формуле

$$\langle \mathscr{L}u, \eta \rangle = \int_\Omega [(\mathfrak{A}\nabla u + u\boldsymbol{\alpha}) \cdot \nabla\eta + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \beta_0 u)\eta]\, dx + \int_{\Sigma_3} \lambda u\eta\, ds, \qquad u,\ \eta \in \tilde{H}_\lambda, \tag{2.35}$$

и пусть $\mathscr{L}_{\tau, h} u \equiv \mathscr{L}u + \tau R_h u$, $\tau \in \mathbb{R}$, где $h = |A^{-1}\boldsymbol{\alpha}|^2 + |A^{-1}\boldsymbol{\beta}|^2 + |\beta_0| + \delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)$, а $R_h: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ определяется по формуле:

$$R_h u = \int_\Omega hu\eta\, dx, \quad u,\ \eta \in \tilde{H}_\lambda.$$

Заметим, что оператор R_h в самом деле действует из $\tilde{H}_\lambda$ в $\tilde{H}_\lambda^*$, что следует из неравевства

$$\left| \int_\Omega hu\eta\, dx \right| \leqslant \|h\|_{s, \Omega} \|u\|_{l, \Omega} \|\eta\|_{l, \Omega},$$

где u, $\eta \in \tilde{H}_\lambda$, $1/s + 2/l = 1$, и вложений $\tilde{H}_\lambda \to L^l(\Omega) \to L^2(\Omega) \to \tilde{H}_\lambda^*$, вытекающих из леммы 2.5. Более того, из сказанного следует, что оператор R_h компактен, поскольку в случае непредельного показателя l вложение $\tilde{H}_\lambda \to L^l(\Omega)$ компактно. Ввиду теоремы 2.5 и замечания 2.1 оператор $\mathscr{L}_{1, h}: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ есть гомеоморфизм. Рассмотрим однопараметрическое семейство уравнений

$$\mathscr{L}_{\tau, h} u \equiv \mathscr{L}u + \tau R_h u = F, \quad F \in \tilde{H}_\lambda^*. \tag{2.36}$$

Уравнение (2.36) эквивалентно уравнению

$$u + (\tau - 1)\mathscr{L}_{1, h}^{-1} R_h u = \mathscr{L}_{1, h}^{-1} F, \tag{2.37}$$

имеющему вид уравнения $u + (\tau - 1) Tu = \Phi$ с компактным оператором $T \equiv \mathscr{L}_{1, h}^{-1} \circ R_h$, действующим в гильбертовом пространстве $\tilde{H}_\lambda \equiv \widetilde{\overset{0, \Sigma_1}{H}}{}_2(A; \Omega; \Sigma_3, \lambda)$. Обозначим через $\mathscr{L}_{\tau, h}^*: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ оператор, формально сопряженный с $\mathscr{L}_{\tau, h}$. Таким образом, операторы $\mathscr{L}_{\tau, h}$ и $\mathscr{L}_{\tau, h}^*$ определяются формулами

$$\langle \mathscr{L}_{\tau, h} u, \eta \rangle = \int_\Omega [\mathfrak{A}\nabla u \cdot \nabla\eta + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\eta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u\eta + (\beta_0 + \tau h) u\eta]\, dx + \int_{\Sigma_3} \lambda u\eta\, ds \tag{2.38}$$

и

$$\langle \mathscr{L}_{\tau, h}^* u, \eta \rangle = \int_\Omega [\mathfrak{A}^*\nabla u \cdot \nabla\eta + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla\eta u + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla u\eta + (\beta_0 + \tau h) u\eta]\, dx + \int_{\Sigma_3} \lambda u\eta\, ds, \tag{2.39}$$

где u, $\eta \in \tilde{H}_\lambda$. Применяя хорошо известные результаты теории Риса—Шаудера, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть выполнено условие* (2.32) (*с заменой $\hat{l}$ на $l \in [2, \hat{l})$*). *Тогда существует такое счетное изолированное множество $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}$,* *что при* $\forall\tau \bar{\in} \mathfrak{M}$ *оператор* $\mathscr{L}_{\tau, h}: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ *есть биекция. При* $\forall\tau \in \mathfrak{M}$ *ядра операторов* $\mathscr{L}_{\tau, h}$ *и* $\mathscr{L}_{\tau, h}^*$ *имеют положительную конечную размерность. Множество значений оператора* $\mathscr{L}_{\tau, h}$ *в* $\tilde{H}_\lambda^*$ *является ортогональным дополнением ядра оператора* $\mathscr{L}_{\tau, h}^*$.

Рассмотрим в случае $\Sigma_2 = \varnothing$ или в случае любого множества Σ_2, но при дополнительном условии, что функция β_0 ограничена сверху в Ω, также традиционное однопараметрическое семейство $\mathscr{L}_\tau u \equiv \mathscr{L}u + \tau R u$, где оператор $\mathscr{L}_\tau: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\tau^*$ определяется по формуле $\langle \mathscr{L}_\tau u, \eta\rangle = \langle \mathscr{L}u, \eta\rangle + \tau\langle Ru, \eta\rangle$, причем $\langle \mathscr{L}u, \eta\rangle$ имеет вид (2.35), а $\langle Ru, \eta\rangle = \int\limits_\Omega u\eta dx$. Легко видеть, что оператор $\mathscr{L}_\tau$ действует из $\tilde{H}_\lambda$ в $\tilde{H}_\lambda^*$ и компактен. Очевидно также, что существует такое число $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$, для которого величина $\|[-\tau_0 + \beta_0 + |A^{-1}\boldsymbol{\alpha}|^2 + |A^{-1}\boldsymbol{\beta}|^2]_+\|_{s, \Omega}$ достаточно мала, а в случае, когда функция β_0 ограничена сверху в Ω, справедливо еще и неравенство $\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3)(\tau_0 - \beta_0(x)) \geqslant c_1 = \mathrm{const} > 0$ п. в. в Ω. Далее мы предполагаем, что либо $\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_3) = 0$, либо β_0 ограничена сверху в Ω. Тогда из теоремы 2.5 следует, что оператор $\mathscr{L}_{\tau_0}: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ есть гомеоморфизм, а оператор $\mathscr{L}_{\tau_0}^{-1} \circ R: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ компактен. Рассмотрим семейство уравнений $\mathscr{L}u + \tau R u = F$, $F \in \tilde{H}_\lambda^*$, которые можно переписать также в виде $u + (\tau - \tau_0)\mathscr{L}_{\tau_0}^{-1} R u = \mathscr{L}_{\tau_0}^{-1} F$. Тогда справедлив следующий аналог теоремы 2.6.

Теорема 2.7. *При указанных выше условиях существует такое счетное изолированное множество* $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}$, *что для каждого* $\tau \bar{\in} \mathfrak{N}$ *оператор* $\mathscr{L}_\tau: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ *есть биекция. Для* $\forall\tau \in \mathfrak{N}$ *ядра оператора* $\mathscr{L}_\tau: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$ *и формально сопряженного к нему оператора* $\mathscr{L}_\tau^*: \tilde{H}_\lambda \to \tilde{H}_\lambda^*$, *определенных по формулам* (2.38), (2.39) *в случае* $h \equiv 1$ *в* Ω, *имеют положительную конечную размерность. Множество значений оператора* $\mathscr{L}_\tau$ *в* $\tilde{H}_\lambda^*$ *является ортогональным дополнением ядра оператора* $\mathscr{L}_\tau^*$.

§ 3. Существование и единственность A-регулярных обобщенных решений первой краевой задачи для $(A, 0)$-эллиптических уравнений

Рассмотрим сначала в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, произвольное $(A, 0)$-эллиптическое уравнение недивергентного вида

$$\hat{a}^{ij}(x, u, \hat{\nabla} u) u_{\hat{j}\hat{i}} - \hat{a}(x, u, \hat{\nabla} u) = 0, \tag{3.1}$$

где $u_{\hat{i}}$, $u_{\hat{i}\hat{j}}$ — производные соответственно первого и второго порядков (см. § 6.1) относительно симметричной и неотрицательно определенной в Ω матрицы $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$, $\hat{\nabla} u \equiv (u_{\hat{1}}, \ldots, u_{\hat{n}})$.

Теорема 3.1. *Пусть* $a^{ij} \in \bar{C}^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \ldots, n$, *и пусть функции* $\hat{a}^{ij}(x, u, q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\hat{a}(x, u, q)$ *непрерывны, дифференцируемы по переменным* u *и* q *и имеют частные* A-*производные* $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}\hat{a}^{ij}$, $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}\hat{a}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, в $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (*см.* § 6.1). *Пусть на множестве* $\bar{\Omega} \times [-m, m] \times \{|q| > \hat{L}\}$, *где* m, $\hat{L} = \mathrm{const} \geqslant 0$, *выполнены неравенства*

$$\begin{gathered}\hat{\mathscr{E}}_1 > 0; \quad \Lambda \leqslant \sqrt{\sigma_0 \lambda \hat{\mathscr{E}}_1}; \quad \max_{i, j = 1, \ldots, n} |\hat{a}^{ij}| \leqslant \mu_0 \Lambda; \quad \left(\sum_{i, j=1}^n (q\hat{a}_q^{ij})^2\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\mu_1 \lambda \hat{\mathscr{E}}_1}\, |q|^{-1}; \quad \left(\sum_{i, j=1}^n (\hat{\delta}\hat{a}^{ij})^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\sigma_1 \lambda \hat{\mathscr{E}}_1}; \\ |\hat{a} - q\hat{a}_q| \leqslant \mu_2 \hat{\mathscr{E}}_1; \quad \hat{\delta}\hat{a} \geqslant -\sigma_2 \hat{\mathscr{E}}_1 |q|;\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\hat{\mathscr{E}}_1 \equiv \hat{a}^{ij}(x, u, q) q_i q_j$, $\hat{\delta} \equiv |q| \frac{\partial}{\partial u} + \frac{q_k}{|q|} \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\lambda = \lambda(x, u, q)$ *и* $\Lambda = \Lambda(x, u, q)$ — *соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы* $1/2(\hat{\mathfrak{A}} + \hat{\mathfrak{A}}^*)$, $\hat{\mathfrak{A}} \equiv \|\hat{a}^{ij}(x, u, q)\|$, $\mu_0, \mu_1, \mu_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ — *неотрицательные постоянные, достаточно малые в зависимости от* n, μ_1, μ_2 *и* m. *Пусть для матрицы* A *выполнено условие: при всех* $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$|\Gamma^r_{ik} \xi_r \eta_k| + |a^{jt} (\Gamma^r_{ik})_t \xi_r \eta_k| + \left| \Gamma^r_{ik} \frac{\partial a^{jt}}{\partial x_r} \xi_t \eta_k \right| \leqslant \mu_3 |A\xi| |\eta|, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

где $\Gamma^r_{ij} = \frac{\partial a^{ir}}{\partial x_s} a^{js} - a^{is} \frac{\partial a^{jr}}{\partial x_s}$, $\mu_3 = \mathrm{const} \geqslant 0$. *Тогда для любого решения* $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *уравнения* (3.1), *такого, что* $|u| \leqslant m$ *в* Ω, *справедлива оценка* $\max\limits_{\Omega} |\hat{\nabla} u| \leqslant \hat{M}_1$, *где* $\hat{M}_1$ *зависит лишь от* m, $\hat{M}_1 \equiv \max\limits_{\partial\Omega} |\hat{\nabla} u|$, L, n, μ_0, μ_1, μ_2, μ_3.

Замечание 3.1. Условие (3.3) будет, в частности, выполнено, если матрица A удовлетворяет условию: $a^{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \ldots, n$, и

$$\Lambda_A \leqslant \mu_4 \lambda_A, \tag{3.4}$$

где $\lambda_A \equiv \lambda_A(x)$ и $\Lambda_A \equiv \Lambda_A(x)$ — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы A, $\mu_4 = \mathrm{const} \geqslant 1$.

Действительно, учитывая, что $|a^{ij}| \leqslant c\Lambda_A \leqslant c\mu_4\lambda_A$, $c = \mathrm{const} \geqslant 1$, получаем неравенства: $|a^{ij}\xi_k| \leqslant c\mu\lambda_A|\xi| \leqslant c\mu|A\xi|$, $i, j, k = 1, \ldots, n$. Тогда, учитывая ограниченность в Ω функций a^{ij}, $\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$, $i, j, k, l = 1, \ldots, n$, и вид левых частей неравенств (3.3), легко устанавливаем справедливость неравенств (3.3). При выполнении условия (3.4) будем говорить, что матрица A равномерно вырождена в Ω. Отметим еще, что условие (3.3) содержит в себе условие дифференцируемости Γ^r_{ik}, $i, k, r = 1, \ldots, n$.

Доказательство теоремы 3.1. Применяя к уравнению (3.1) оператор $u_{\hat{k}} \frac{\partial}{\partial x_k}$ (см. § 6.1), получим тождество

$$\hat{a}^{ij} u_{\hat{j}\hat{i}\hat{k}} u_{\hat{k}} = \left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial q_l} - \frac{\partial \hat{a}^{ij}}{\partial q_l} u_{\hat{j}\hat{i}} \right) u_{\hat{l}\hat{k}} u_{\hat{k}} + \sqrt{\hat{v}} (\hat{\delta}\hat{a} - \hat{\delta}\hat{a}^{ij} u_{\hat{j}\hat{i}}), \tag{3.5}$$

где $\hat{v} \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} u_{\hat{k}}^2$. Преобразуем сначала левую часть в (3.5). Поскольку $u_{\hat{i}\hat{j}} = a^{jr} a^{is} u_{rs} + a^{js} \frac{\partial a^{ir}}{\partial x_s} u_r$, то

$$u_{\hat{i}\hat{j}} - u_{\hat{j}\hat{i}} = \Gamma^r_{ij} u_r, \quad \Gamma^r_{ij} \equiv \frac{\partial a^{ir}}{\partial x_s} a^{js} - a^{is} \frac{\partial a^{jr}}{\partial x_s}. \tag{3.6}$$

Учитывая (3.6) и равенство

$$u_{\hat{i}r} = u_{r\hat{i}} + \frac{\partial a^{it}}{\partial x_r} u_t, \tag{3.7}$$

получим, что

$$u_{\hat{j}\hat{i}\hat{k}} = u_{\hat{k}\hat{j}\hat{i}} + Y_{jik}, \quad Y_{jik} = \\ = \Gamma^r_{jk} u_{\hat{i}r} + \Gamma^r_{ik} u_{\hat{j}r} + \left[a^{it} (\Gamma^r_{jk})_t u_r - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial a^{it}}{\partial x_r} u_t \right]. \tag{3.8}$$

Учитывая далее, что $(u_k^2)_{ji}=2u_{ki}u_{kj}+2u_k u_{kji}$ и, следовательно, $u_{kji}u_k=$ $=1/2\left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right)_{ji}-u_{ki}u_{kj}=1/2\hat{v}_{ji}-u_{ki}u_{kj}$, получим, что $\hat{a}^{ij}u_{jik}u_k=$ $=1/2\hat{a}^{ij}\hat{v}_{ji}+\hat{a}^{ij}u_{kj}u_{ki}+\hat{a}^{ij}Y_{jik}u_k$. Тогда из (3.5) следует тождество

$$\frac{1}{2}\hat{a}^{ij}v_{ji}=\hat{a}^{ij}u_{ki}u_{kj}-\hat{a}^{ij}Y_{jik}u_k+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial q_l}-\frac{\partial\hat{a}^{ij}}{\partial q_l}u_{ji}\right)\hat{v}_l+\sqrt{\hat{v}}\,(\hat{\delta}\hat{a}-\hat{\delta}\hat{a}^{ij}u_{ji}), \tag{3.9}$$

причем при выводе (3.9) мы учли также, что $u_{lk}u_k=1/2\hat{v}_l$. Пусть $z=$ $=z(u)$ — некоторая положительная дважды дифференцируемая на промежутке $[-m, m]$ функция. Введем функцию w, определенную по формуле $\hat{v}=z(u)w$. Учитывая, что $\hat{v}_i=z'u_iw+zw_i$, $\hat{v}_{ji}=z''u_iu_jw+z'u_{ji}w+$ $+z'u_jw_i+z'u_iw_j+zw_{ji}$, выведем из (3.9) тождество

$$z\hat{a}^{ij}w_{ji}+b^kw_k=-z''\hat{\mathscr{E}}_1w+2a^{ij}u_{ki}u_{kj}-2\hat{a}^{ij}Y_{jik}u_k+$$
$$+z'(q_l\hat{a}_{q_l}-\hat{a})w+2\frac{\hat{\delta}\hat{a}}{|q|}\hat{v}-z'\hat{a}^{ij}_{q_l}q_lu_{ji}w-2\sqrt{\hat{v}}\,\hat{\delta}\hat{a}^{ij}u_{ji}, \tag{3.10}$$

где $|q|^2\equiv\hat{v}$, $q_l=u_l$, $l=1, \ldots, n$, причем вид функций b^k для дальнейших рассмотрений безразличен. Далее мы будем рассматривать и преобразовывать тождество (3.10) только на множестве $\hat{\Omega}_{\hat{L}}\equiv\{x\in\Omega:|\hat{\nabla}u|>\hat{L}\}$ что позволяет использовать условия (3.2). Учитывая условия на $q\hat{a}^{ij}_q$ и $\hat{\delta}\hat{a}^{ij}$ в (3.2), оценим

$$|q\hat{a}^{ij}_qz'u_{ji}w|\leqslant\frac{1}{2}\lambda\sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2+\frac{1}{2}\frac{z'^2}{z}\mu_1\hat{\mathscr{E}}_1w,$$
$$|2\sqrt{\hat{v}}\,\hat{\delta}\hat{a}^{ij}u_{ji}|\leqslant\frac{1}{2}\lambda\sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2+2\sigma_1z\hat{\mathscr{E}}_1w. \tag{3.11}$$

Учитывая условия на $\max\limits_{i,j=1,\ldots,n}\hat{a}^{ij}$ и Λ в (3.2) и условие (3.3), оценим (считая, что $\hat{L}\geqslant 1$)

$$|2a^{ij}Y_{jik}u_k|\leqslant 2\mu_0\Lambda\left[2n\mu_3\left(\sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2\right)^{1/2}\hat{v}^{1/2}+2n^2\mu_3\hat{v}\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\lambda\sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2+8n^2\mu_0^2\mu_3^2z\hat{\mathscr{E}}_1w+\sqrt{\sigma_0}\,L^{-1}2n^2\mu_3z\hat{\mathscr{E}}_1w, \tag{3.12}$$

причем при выводе (3.12) мы учли также, что $\lambda\leqslant\hat{\mathscr{E}}_1|q|^{-2}$ на $\hat{\Omega}_{\hat{L}}$.

Ввиду (3.10)—(3.12) и условий на $\hat{a}-q\hat{a}_q$ и $\hat{\delta}\hat{a}$ в (3.2) справедливо неравенство

$$z\hat{a}^{ij}w_{ji}+b^kw_k\geqslant\left[-z''-\frac{\mu_1}{2}\frac{z'^2}{z}-\mu_2|z'|-\nu z\right]\hat{\mathscr{E}}_1w, \quad x\in\hat{\Omega}_{\hat{L}}, \tag{3.13}$$

где $\nu=8n^2\mu_0^2\mu_3^2\sigma_0+4\mu_0n^2\sqrt{\sigma_0}\,L^{-1}\mu_3+2(\sigma_1+\sigma_2)$. Пусть в качестве $z(u)$ выбрана функция $z(u)=(\gamma+1)e^{\varkappa m}-e^{\varkappa u}$, где $\gamma=\mathrm{const}$, $\varkappa=\mathrm{const}>0$. Учитывая, что $z'=-\varkappa e^{\varkappa u}$, $z''=-\varkappa^2e^{\varkappa u}$, $z'^2/z\leqslant\varkappa^2e^{\varkappa u}/\gamma$, заметим, что квадратная скобка в (3.13) оценивается снизу выражением

$$s\equiv\left(\varkappa^2-\frac{\mu_1}{2\gamma}\varkappa^2-\mu_2\varkappa\right)e^{-\varkappa m}-\nu(\gamma+1)e^{\varkappa m}.$$

Выбирая сначала $\gamma=\mu_1$, затем $\varkappa=4\mu_2$ и требуя далее, чтобы константы σ_0, σ_1, σ_2 обеспечивали для ν неравенство $\nu(\gamma+1)e^{\varkappa m}<1/4\varkappa^2 e^{-\varkappa m}$, замечаем, что при таком выборе: $s>0$. Тогда вместо (3.13) справедливо неравенство $z\hat{a}^{ij}w_{\hat{j}\hat{i}}+b^k w_{\hat{k}}>0$ на $\hat{\Omega}_{\hat{L}}$, из которого, очевидно, следует, что функция w не принимает своего максимума в $\bar{\Omega}$ на $\hat{\Omega}_{\hat{L}}$. Следовательно, $\max\limits_{\bar{\Omega}} w\leqslant$
$\leqslant\max\left\{\max\limits_{\partial\Omega}\frac{\hat{v}}{z},\ \frac{\hat{L}^2}{z}\right\}$, откуда следует, очевидно, что

$$\max_{\bar{\Omega}}\hat{v}\leqslant\frac{\max z}{\min z}\max\left\{\max_{\partial\Omega}\hat{v},\ \hat{L}^2\right\}\leqslant\frac{\gamma+1}{\gamma}\left\{\max_{\partial\Omega}\hat{v},\ \hat{L}^2\right\}.$$

Следовательно,

$$\max_{\bar{\Omega}}|\hat{\nabla}u|\leqslant\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{1/2}\max(\hat{M}_1,\ \hat{L});\quad \hat{M}_1\equiv\max_{\partial\Omega}|\hat{\nabla}u|. \tag{3.14}$$

Теорема 3.1 доказана.

Легко видеть, что если, например, на множестве $\bar{\Omega}\times\{|u|\leqslant m\}\times\times\{|q|>\hat{L}\}$ выполнены условия

$$\begin{gathered}\hat{a}^{ij}=\hat{a}^{ji},\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n;\quad \hat{\nu}|q|^{m-2}\xi^2\leqslant\hat{a}^{ij}(x,\ u,\ q)\xi_i\xi_j\leqslant\\ \leqslant\hat{\mu}|q|^{m-2}\xi^2,\quad \hat{\nu},\ \hat{\mu}=\mathrm{const}>0,\quad m>1;\quad |q\hat{a}^{ij}_q|\leqslant\tilde{\mu}_1|q|^{m-2},\\ |\hat{\delta}\hat{a}^{ij}|\leqslant\tilde{\sigma}_1|q|^{m-1},\quad |\hat{a}-q\hat{a}_q|\leqslant\mu_2|q|^m,\quad \hat{\delta}\hat{a}\geqslant-\tilde{\sigma}_2|q|^{m+1},\end{gathered}$$

где $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ — произвольные, а $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ — достаточно малые константы, то условия (3.2) выполнены.

Рассмотрим в связи с теоремой 3.1 в качестве примера уравнение (6.2.17). Это уравнение, как было показано в § 6.2, имеет решение $u=r^\lambda$, $\lambda\in(0,1)$, не имеющее ограниченного градиента в области $\{|x|\leqslant 1\}$. Уравнение (6.2.17) имеет, как легко видеть, структуру $(A,\ \mathbf{0})$-эллиптического уравнения относительно матрицы $A=rI$, где I — единичная матрица. В терминах A-производных недивергентная форма этого уравнения имеет вид

$$\begin{gathered}|\hat{\nabla}u|^{m-2}\left(\hat{\Delta}u+\frac{x_i}{r}u_{\hat{i}}\right)-(m-2)\lambda^{m-3}|u|^{m-3}|\hat{\nabla}u|^2-\\ -(n\lambda+\lambda^2)u|\hat{\nabla}u|^{m-2}=0,\quad \hat{\Delta}u\equiv\sum_{i=1}^{n}u_{\hat{i}\hat{i}}.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Очевидно, что решение $u=r^\lambda$, $\lambda\in(0,\ 1)$ этого уравнения имеет ограниченный A-градиент $A\nabla u$ относительно матрицы $A=rI$, что находится в согласии с теоремой 3.1.

Выделим частный случай теоремы 3.1, относящийся к линейному $(A,\ \mathbf{0})$-эллиптическому уравнению.

Теорема 3.1$'$. *Пусть коэффициенты линейного $(A,\ \mathbf{0})$-эллиптического уравнения*

$$\hat{a}^{ij}(x)u_{\hat{j}\hat{i}}-\hat{\beta}^i(x)u_{\hat{i}}-c(x)u-f(x)=0 \tag{3.16}$$

непрерывны в $\bar{\Omega}$ и имеют ограниченные в Ω A-производные $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}\hat{a}^{ij}$, $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}\hat{\beta}^i$, $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}c$ и $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}f$, $i,\ j,\ k=1,\ \ldots,\ n$. Пусть $\nu\leqslant\lambda(x)<\Lambda(x)\leqslant\mu$, где $\lambda(x)$ и $\Lambda(x)$ — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы $1/2(\hat{\mathfrak{A}}+\hat{\mathfrak{A}}^*)$, $\hat{\mathfrak{A}}\equiv\|\hat{a}^{ij}(x)\|$, ν, $\mu=\mathrm{const}>0$. Пусть для матрицы $A\equiv\|a^{ij}(x)\|$, относительно которой производятся дифференцирования в (3.16), выполнено условие (3.3). Тогда для любого решения $u\in C^3(\Omega)\cap\cap C^1(\bar{\Omega})$ уравнения (3.16), такого, что $|u|\leqslant m$ в Ω, справедлива оценка

$\max_{\bar\Omega}|\hat\nabla u|\leqslant\hat M_1$ *с константой* $\hat M_1$, *зависящей лишь от* n, m, $\hat M_1\equiv\max_{\partial\Omega}|\hat\nabla$ ν, μ, μ_3, *верхних границ в* Ω *абсолютных величин коэффициентов урав-ния* (3.16) *и их* A-*производных первого порядка.*

Доказательство. Легко видеть, что при условиях теоремы 3 условия (3.2) теоремы 3.1 выполнены на множестве $\bar\Omega\times\{|u|\leqslant m\}\times\{|q|>\hat L\}$ при достаточно большом $\hat L>0$, зависящем только от ν, μ границ в Ω абсолютных величин коэффициентов уравнения (3.16) и A-производных первого порядка. Поэтому результат теоремы 3.1′ вытек из теоремы 3.1. Теорема 3.1′ доказана.

Рассмотрим, например, уравнение (6.2.20), которое можно перепис также в виде

$$\hat\Delta u+\frac{x_i}{\rho}u_i-\left(n\lambda+\lambda^2\frac{|x|^2}{\rho^2}\right)u=0,\quad \hat\Delta u\equiv\sum_{i=1}^n u_{ii},\quad \lambda\in(0,\ 1),\qquad (3.$$

причем $\rho=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2+\varepsilon^2}$, $\varepsilon\in(0,\ 1)$, а производные в (3.17) соотв ствуют матрице $A=\rho I$. В § 6.2 было отмечено, что решения $u=\rho^\lambda$ ур нений (3.17) не имеют равномерной по $\varepsilon\in(0,\ 1)$ оценки $|\nabla u|$ в об сти $\{|x|\leqslant1\}$. Как легко видеть, эти решения имеют равномерную по ε $\in(0,\ 1)$ оценку A-градиента $A\nabla u$ (относительно матрицы $A=\rho I$), что на дится в полном согласии с теоремой 3.1, все условия которой выполне для уравнения (3.17) и его решения $u=\rho^\lambda$.

Установим теперь теорему существования решения задачи (6.1.1) д $(A,\ 0)$-эллиптических уравнений вида (5.1.35), опираясь на теоремы 6.2 и 3.1, которые будут применяться к регуляризованным уравнени вида (6.2.21). Доказательство такой теоремы существования проводит аналогично доказательству теоремы 6.2.3. Действительно, рассмотр вспомогательные дивергентные $(B,\ 0)$-эллиптические уравнения вида (6.2.2 где $B=A+\varepsilon I$, $\varepsilon\in(0,\ 1)$, I — единичная матрица, приведенные коэфф циенты которых имеют вид

$$\bar l'^i(x,\ u,\ q)=\varepsilon q_i+l'^i(x,\ u,\ q),\ \bar l'_0(x,\ u,\ q)=l'_0(x,\ u,\ q)+\varepsilon\frac{\partial l'^i}{\partial x_i}.\qquad (3.1$$

Недивергентная форма уравнения (6.2.27) имеет вид (6.2.21), где

$$\hat\beta^{ij}=\varepsilon\delta_i^j+\hat\alpha^{ij},\quad \hat\alpha^{ij}=\frac{\partial l'^i}{\partial q_j},\quad \hat\beta=\hat\alpha-\varepsilon\frac{\partial a^{ki}}{\partial x_i}q_k,\qquad (3.1$$

$$\hat\alpha=-\frac{\partial l'^k}{\partial u}q_k-a^{ki}\frac{\partial l'^k}{\partial x_i}-\frac{\partial a^{ki}}{\partial x_i}l'^k-f+l'_0.$$

Уравнения (6.2.27) можно записать также в виде (6.2.22), где

$$\beta^{ij}=\frac{\partial\bar l^i(x,\ u,\ p)}{\partial p_j},\quad \beta=-\frac{\partial\bar l^i}{\partial u}p_i-\frac{\partial\bar l^i}{\partial x_i}-f(x)+\bar l_0(x,\ u,\ p).$$

Рассмотрим для таких уравнений вида (6.2.22) задачи Дирихле (6.2.2 отвечающие значениям $\varepsilon\in(0,\ 1)$.

Лемма 3.1. *Пусть* $\Omega\in C^2$, *и пусть* $a^{ij}\in\bar C^1(\bar\Omega)$, $i,\ j=1,\ \ldots,$ $\hat\alpha^{ij}(x,\ u,\ q)$, $\hat\alpha(x,\ u,\ q)\in C^{(1)}(\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, *где* $\hat\alpha^{ij}$, $i,\ j=$ $=1,\ \ldots,\ n$, $\hat\alpha$ — *коэффициенты уравнения вида* (3.1), *соответствующе исходному* $(A,\ 0)$-*эллиптическому уравнению вида* (5.1.35) *относитель матрицы* $A\equiv\|a^{ij}(x)\|$ (*см. формулу* (6.1.4)). *Предположим, что для т* кого уравнения (3.1) выполнены условия (6.2.2), (6.2.8), (6.2.9), (3.2) и (3.3). *Тогда при любом* $\varepsilon \in (0, 1)$ *задача* (6.2.23) *имеет классическое решение* $u_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$, *причем для такого решения справедливо неравенство*

$$\max_{\Omega} |u_\varepsilon| \leqslant m, \quad \max_{\Omega} |A\nabla u_\varepsilon| \leqslant \tilde{M}_1, \tag{3.20}$$

где константы m *и* $\tilde{M}_1$ *не зависят от* $\varepsilon \in (0, 1)$.

Доказательство. Лемма 3.1 доказывается точно таким же образом, каким были доказаны леммы 6.2.3 и 6.2.4. Сначала предполагаем, что $\Omega \in C^3$, а коэффициенты уравнения (3.1) настолько гладкие, что всякое решение уравнения (6.2.22), принадлежащее классу $C^2(\bar{\Omega})$, автоматически принадлежит и $C^3(\Omega)$. Поскольку из условий (6.2.2), (6.2.8), (6.2.9), (3.2) и (3.3) легко следует справедливость аналогичных условий для регуляризованных уравнений (причем эти условия выполняются равномерно по $\varepsilon \in (0, 1)$), то для решений $u_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$ задач (6.2.23) справедливы равномерные априорные оценки вида (3.20). Но тогда, учитывая структуру уравнений (6.2.22), можно считать, что эти уравнения являются равномерно эллиптическими и ограниченно нелинейными. Применяя теорему Ладыженской и Уральцевой из § 1.2, получаем существование требуемых решений задачи (6.2.22) при $\forall \varepsilon \in (0, 1)$. Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Пусть уравнение вида* (5.1.35) [*имеет структуру* $(A, 0)$-*эллиптического уравнения в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *класса* C^2, *причем* $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ — *симметричная неотрицательно определенная в* Ω *матрица с элементами* $a^{ij} \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Предположим, что приведенные коэффициенты* $l'^i(x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, $l'_0(x, u, q)$ *и правая часть* $f(x)$ *уравнения* (5.1.35), *непрерывные в* $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *и функции* $\hat{a}^{ij}(x, u, q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\hat{a}(x, u, q)$, *определенные по формуле* (6.1.4), *обеспечивают справедливость условий* (6.2.2), (6.2.8), (6.2.9), (3.2), (3.3) *и* (6.2.25) [(6.2.25')]. *Тогда задача Дирихле вида* (6.1.1) *для уравнения* (5.1.35) *имеет хотя бы одно* [*точно одно*] A-*регулярное обобщенное решение* u, *т. е. существует* [*единственная*] *функция* $u \in L^\infty(\Omega) \cap \mathring{H}_m(A, \Omega)$, $\forall m > 1$, *имеющая* A-*градиент* $A\nabla u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ *и удовлетворяющая тождеству*

$$\int_\Omega [\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l'_0(x, u, A\nabla u)\eta]\, dx = \int_\Omega f\eta\, dx, \quad \forall \eta \in \bar{C}_0^1(\Omega). \tag{3.21}$$

Доказательство. Теорема 3.2 доказывается точно так же, как теорема 6.2.3, с учетом замечания 6.2.2.

Выделим особо случай линейных недивергентных $(A, \mathbf{0})$-эллиптических уравнений, приводящихся к уравнению вида (5.1.35) при условиях достаточной гладкости матрицы при старших коэффициентах. Рассмотрим общее линейное уравнение вида (6.2.18) с неотрицательной в Ω характеристической формой $\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j$, причем будем считать, что $\alpha^{ij} = \alpha^{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$ и $\alpha^{ij} \in \tilde{C}^1(\bar{\Omega})$. Очевидно, что такое уравнение автоматически имеет структуру недивергентного $(A, \mathbf{b})$-эллиптического уравнения относительно $\|a^{ij}\| \equiv A = \mathfrak{A}^{1/2}$, $\mathbf{b} = (b^1, \ldots, b^n)$, где $b^i = \dfrac{\partial a^{ij}}{\partial x_j} + \beta^i$, $i = 1, \ldots, n$, причем в данном случае $\hat{a}^{ij} = \delta_i^j$, $\hat{a} = -\dfrac{\partial a^{ik}}{\partial x_i} q_k + cu + f$. В терминах A-производных такое уравнение имеет вид

$$\hat{\Delta} u + \frac{\partial a^{ik}}{\partial x_i} u_k - cu - f - b^i u_{x_i} = 0, \tag{3.22}$$

где $\hat{\Delta} u \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{\hat{i}\hat{i}}$. Уравнение (3.22) можно переписать в виде дивергентно $(A,\ \mathbf{b})$-эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div}(A^*A\nabla u)+cu+f+b^iu_{x_i}=0. \qquad (3.2$$

Для того чтобы уравнение (3.22), а следовательно, и уравнение (6.2.1ะ было $(A,\ \mathbf{0})$-эллиптическим (относительно $A=\mathfrak{A}^{1/2}$) уравнением вида (3.1 необходимо и достаточно, очевидно, чтобы вектор $\mathbf{b}$, определенный выш $\left(\text{т. е. } \mathbf{b}=(b^1,\ \ldots,\ b^n),\ b^i=\frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x_j}+\beta^i,\ i=1,\ \ldots,\ n\right)$, был A-вектором, т. существовал такой вектор $\gamma=\gamma(x)$, что $\mathbf{b}=A\gamma\equiv A^*\gamma$ в Ω. Это услов: можно записать в виде: существует вектор $\gamma=(\gamma^1(x),\ \ldots,\ \gamma^n(x))$, тако: что

$$\beta^i+\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}=a^{ik}\gamma_k,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (3.2$$

где $\|\alpha^{ij}\|\equiv\mathfrak{A}$, $\|a^{ij}\|\equiv A\equiv\mathfrak{A}^{1/2}$. Отметим, что условие (3.24) тривиалы выполнено в случае линейного уравнения вида

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+cu+f=0;\quad \alpha^{ij}=\alpha^{ji},\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n, \qquad (3.2$$

где $\alpha^{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0$ в Ω. Если условие (3.24) выполнено, то уравнение (3.2 принимает вид

$$-\operatorname{div}(A^*A\nabla u)+\gamma A\nabla u+cu+f=0. \qquad (3.2$$

Недивергентная форма уравнения (3.26) имеет вид

$$\hat{\Delta}u+\hat{\beta}^iu_{\hat{i}}-cu-f=0, \qquad (3.2$$

где $\hat{\beta}^i=-\gamma^i+\frac{\partial a^{ik}}{\partial x_k}$, $i=1,\ \ldots,\ n$. При выполнении условия (3.24) исхо, ное линейное уравнение вида (6.2.18) будем называть $(A,\ \mathbf{0})$-эллиптич ским (относительно $A=\mathfrak{A}^{1/2}$). Из теоремы 3.2 с учетом теорем 3.1 и 6.2. вытекает следующий результат.

Теорема 3.2′. *Пусть линейное уравнение вида* (6.2.18) *являетс $(A,\ 0)$-эллиптическим (в указанном выше смысле) относительно матриц $A=\mathfrak{A}^{1/2}$, где $\mathfrak{A}\equiv\|\alpha^{ij}(x)\|$ симметрична и неотрицательно определена в и $\alpha^{ij}\in\bar{C}^1(\bar{\Omega})$, $i,\ j=1,\ldots,\ n$. Пусть выполнены условие $c(x)\geqslant c_0$ в Ω, г $c_0=\mathrm{const}>0$, и условие* (6.2.9) *для матрицы $A\equiv\mathfrak{A}^{1/2}$ и $\partial\Omega$. Предп ложим, что коэффициенты уравнений* (3.26) *и* (3.27), *порожденных ура нением* (6.2.18), *непрерывны в $\bar{\Omega}$ и имеют ограниченные в Ω A-произво ные $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}\beta^i$, $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}c$, $\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}f$, $i,\ j,\ k=1,\ldots,n$. Предположим, что для матрицы . выполнено условие* (3.3). *Тогда задача Дирихле вида* (6.1.1) *для уравн ния* (6.2.18) *имеет хотя бы одно A-регулярное обобщенное решени т. е. существует функция $u\in L^\infty(\Omega)\cap\mathring{H}_m(A,\ \Omega)$, $\forall m>1$, такая, чт $A\nabla u\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ и*

$$\int_\Omega[A\nabla u\cdot A\nabla\eta+(\gamma\cdot A\nabla u+cu+f)\eta]\,dx=0,\quad \forall\eta\in C_0^1(\Omega). \qquad (3.2\!\!$$

При выполнении при всех $x\in\Omega$, $\eta=A\xi$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\xi_0\in\mathbb{R}$, $(\xi_0,\ \eta)\neq(0,\ 0)$, не равенства

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2+\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_j\eta_i\xi_0+c\xi_0^2>0 \qquad (3.2$$

задача (6.1.1) *для уравнения* (6.2.18) *имеет точно одно A-регулярное обобщенное решение.*

Доказательство. Теорема 3.2′ доказывается точно так же, как теорема 3.2 с учетом того, что условия вида (6.2.8) для уравнения (3.27) заведомо выполнены и что для осуществления предельных переходов в интегральных тождествах (6.2.29)—(6.2.31) ввиду линейности уравнения не требуется предполагать выполнения условия монотонности вида (6.2.25). Теорема 3.2′ доказана.

Рассмотрим вариационную задачу на минимум интеграла вида (6.2.35), рассматриваемого при условии (6.2.36). Уравнение Эйлера для такой задачи, имеющее вид (6.2.37), является $(A, 0)$-эллиптическим уравнением в Ω (см. также (6.2.38)). Из теоремы 3.2 вытекает, очевидно, следующий результат.

Теорема 3.2″. *Пусть интеграл* (6.2.35) *рассматривается в предположении, что область* Ω *ограничена в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *и принадлежит классу* C^2, *матрица* $A\equiv\|a^{ij}(x)\|$ *симметрична и неотрицательно определена в* Ω, *причем* $a^{ij}\in\bar{C}^1(\bar{\Omega})$, $i, j=1, \ldots, n$, *а функция* $F(x, u, q)$ *удовлетворяет условию* (6.2.36). *Предположим, что функции* l'^i, $i=1, \ldots, n$, l'_0, *определенные по формуле* (6.2.38), *функция* $f(x)$ *из* (6.2.35) *и функции* $\hat{a}^{ij}$, $i, j=1, \ldots, n$, $\hat{a}$, *определенные по формулам* (6.1.4), (6.2.38), *обеспечивают справедливость условий* (6.2.2), (6.2.8), (6.2.9), (3.2), (3.3) *и* (6.2.25) [(6.2.25′)]. *Тогда существует хотя бы одна* [*точно одна*] *экстремаль задачи* (6.2.35), *т. е. существует* [*единственная*] *функция* $u\in L^\infty(\Omega)\cap\mathring{H}_m(A, \Omega)$, $\forall m>1$, *такая, что* $A\nabla u\in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, *для которой справедливо тождество* (3.21) (*при* l'^i, $i=1, \ldots, n$, l'_0, *определенных по формуле* (6.2.38)).

Примеры более конкретных функционалов вида (6.2.35), для которых справедлив результат теоремы 3.2, будут приведены ниже.

При установлении существования A-регулярного обобщенного решения первой краевой задачи для $(A, 0)$-эллиптических уравнений можно отказаться от условия (6.2.9). Отказ от этого условия приводит к рассмотрению первой краевой задачи вида

$$\mathscr{L}u=f(x) \text{ в } \Omega,\ u=0 \text{ на } \sum\equiv\{x\in\partial\Omega: A\nu\neq 0\}. \qquad (3.30)$$

Рассматривая задачу вида (3.30), мы предполагаем, что уравнение (5.1.35) имеет структуру $(A, 0)$-эллиптического уравнения относительно матрицы A, удовлетворяющей условию (3.4). Условие (3.4) позволяет свести рассмотрение задачи (3.30) к случаю уравнения (5.1.35), имеющего структуру $(aI, 0)$-эллиптического в Ω уравнения, где $a=a(x)=(1/n)\,\mathrm{Sp}\,A$. Действительно, всякое уравнение вида (5.1.35), имеющее структуру $(A, 0)$-эллиптического уравнения с приведенными коэффициентами $l'^i(x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, и $l'_0(x, u, q)$, имеет и структуру $(aI, 0)$-эллиптического уравнения с приведенными коэффициентами

$$\tilde{\mathbf{l}}'(x, u, \mathbf{q})=\frac{A^*}{a}\mathbf{l}'\left(x, u, \frac{A}{a}\tilde{q}\right), \quad \tilde{l}'_0(x, u, q)=l'_0\left(x, u, \frac{A}{a}\tilde{q}\right). \qquad (3.31)$$

Ввиду неравенства (3.4) условия на приведенные коэффициенты $\tilde{\mathbf{l}}'(x, u, \tilde{q})$ и $\tilde{l}'_0(x, u, \tilde{q})$, которые налагаются ниже для обеспечения разрешимости задачи (3.30) в классе (aI)-регулярных обобщенных решений, легко переписать и в терминах исходных приведенных коэффициентов $\mathbf{l}'(x, u, q)$,

$l_0'(x, u, q)$, а полученное решение задачи (3.30) можно интерпретироват как A-регулярное обобщенное решение относительно исходной матрицы A В связи со сказанным будем далее ради краткости изложения просто считать, что $A = a(x)I$, где $a(x) \geqslant 0$ в Ω. Заметим, что для матрицы $A = a(x)I$ условие (3.3) тривиально выполнено, поскольку в этом случае $\lambda_A \equiv \Lambda_A \equiv a(x)$ в Ω.

Теорема 3.3. *Пусть уравнение* (5.1.35) *имеет структуру* $(aI, \mathbf{0})$ *эллиптического уравнения, где* $a \in \bar{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$, *причем* $\inf_{\mathbb{R}^n} a(x) > 0$ *Пусть функции* $\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)$, $i, j = 1, \ldots, n$, *и* $\hat{\alpha}(x, u, q)$, *определенны по формуле* (6.1.4), *принадлежат классу* $C^{(1)}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. *Пусть дл. уравнения* (3.1), *порожденного указанным уравнением* (5.1.35) *посредством равенств* (6.1.4), *выполнены условия* (3.2) *и условие:*

на множестве $D_\delta \times \{|u| \leqslant m\} \times \mathbb{R}^n$ (*см.* (6.2.3)) *справедливы неравенства*

$$|\hat{\alpha}^{ij}| \leqslant \mu_5 \lambda (\varepsilon_0 |q| + 1), \quad i, j = 1, \ldots, n; \quad |\hat{\alpha}| \leqslant \mu_6 \lambda (\varepsilon_0 |q|^2 + 1), \tag{3.32}$$

где $\lambda = \lambda(x, u, q) > 0$ — *наименьшее собственное число матрицы* $1/2(\hat{\mathfrak{A}} + \hat{\mathfrak{A}}^*)$ $\hat{\mathfrak{A}} \equiv \|\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)\|$, $\mu_5, \mu_6 = \mathrm{const} \geqslant 0$, ε_0 — *достаточно малая константа.* * *Тогда для любой функции* $u \in C^2(D_\delta) \cap C^1(\bar{D}_\delta)$, *такой, что* $u = 0$ *на* $\sum$ *и* $|u| \leqslant m$ *в* D_δ, *справедлива оценка*

$$\max_{\partial\Omega} |A\nabla u| \leqslant \hat{M}_1 \tag{3.33}$$

с константой $\hat{M}_1$, *зависящей лишь от* n, $m \equiv \max_{\bar{\Omega}} |u|$ *и известных величин, определяемых условиями* (3.2), (3.32), *а также от* C^2-*норм функций, описывающих границу области* Ω.

Доказательство. Функция u удовлетворяет уравнениям (3.1) и (6.1.5), коэффициенты которых в рассматриваемом здесь случае связаны соотношениями

$$\begin{gathered}\alpha^{ij}(x, u, p) = a^2(x)\hat{\alpha}^{ij}(x, u, q), \; i, j = 1, \ldots, n, \\ \alpha(x, u, p) = \hat{\alpha}(x, u, q) - \hat{\alpha}^{ij}(x, u, q)\frac{\partial a(x)}{\partial x_i} q_j, \quad q = a(x)p.\end{gathered} \tag{3.34}$$

Заметим, что из условия (3.32) следует, в частности, что матрица $\hat{\mathfrak{A}}(x, u, q)$ не вырождена на множестве $D_\delta \times \{|u| \leqslant m\} \times \mathbb{R}^n$. Пусть $x_0 \in \partial\Omega$ — точка, в которой реализуется максимум $a\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|$ на $\partial\Omega$, причем ν — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$. Обозначим $a_0 = a(x_0)$. Введем в рассмотрение следующие множества:

$$F_i \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2^{i+1}} a_0 \leqslant a(x) \leqslant 2^{i+1}\right\}, \quad i = 0, 1, 2. \tag{3.35}$$

Обозначим через $\zeta = \zeta(x)$ усреднение с фиксированным гладким ядром характеристической функции множества F_1, считая, что радиус h усреднения

$$h = \min\{\mathrm{dist}(F_0, \mathbb{R}^n \setminus F_1), \mathrm{dist}(F_1, \mathbb{R}^n \setminus F_2)\}. \tag{3.36}$$

*) Уточнение характера малости константы ε_0 будет дано при доказательстве теоремы 3.3.

гко видеть (см. также [117]), что

$$h^{-1} \leqslant cKa_0^{-1}, \tag{3.37}$$

е K — константа Липшица функции $a(x)$ в $\mathbb{R}^n$, $c > 0$ — абсолютная кон- ита. Действительно, пусть $x_1 \in F_0$, $x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus F_1$. Тогда

$$\frac{1}{4} a_0 \leqslant |a(x_2) - a(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$

куда $\operatorname{dist}(F_0, \mathbb{R}^n \setminus F_1) = \min\limits_{x_1 \in F_0,\, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus F_1} |x_2 - x_1| \geqslant (1/4K) a_0$. Совершенно алогичным образом устанавливаем, что $\operatorname{dist}(F_1, \mathbb{R}^n \setminus F_2) \geqslant (1/8K) a_0$. доказанного следует неравенство (3.37) при $c = 8$. Ввиду (3.36), (3.37) $\zeta) = 1$ на множестве F_0, $\zeta(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus F_2$ и существует такая кон- нта c_0, зависящая лишь от K, что

$$|\nabla\zeta| \leqslant c_0 a_0^{-1}, \quad |D^2\zeta| \leqslant c_0 a_0^{-2}. \tag{3.38}$$

Обозначим $v = u\zeta$. Учитывая, что функция u удовлетворяет уравнению да (6.1.5), получаем для функции v тождество

$$\alpha^{ij} v_{ij} - 2\alpha^{ij} u_i \zeta_j - \alpha^{ij} u \zeta_{ij} - \alpha\zeta = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.39}$$

полняя замену переменных $\tilde{x} = a_0^{-1} x$ и учитывая (3.34), сведем (3.39) тождеству

$$\hat{\alpha}^{ij} v_{\tilde{i}\tilde{j}} - 2\hat{\alpha}^{ij} \frac{a_0}{a} (a u_i)(a_0 \zeta_j) - \hat{\alpha}^{ij} u (a_0^2 \zeta_{ij}) - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \alpha\zeta = 0, \quad \tilde{x} \in \tilde{\Omega}, \tag{3.40}$$

е $\tilde{\Omega}$ — образ Ω при указанном преобразовании координат. Заметим, что кдество (3.40) не является тривиальным лишь на множестве $\tilde{F}_2 \equiv \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : 1/8 \leqslant a(x)/a_0 \leqslant 8\} \cap \tilde{\Omega}$. Учитывая условия теоремы 3.3 и оценки 38), а также результат теоремы 3.1, заключаем, что для функции v и авнения (3.40), рассматриваемого как уравнение вида $A^{ij}(\tilde{x}) v_{\tilde{x}_i \tilde{x}_j} - A(\tilde{x}) = 0$, $\tilde{\Omega}$, где $A^{ij}(\tilde{x}) = \alpha^{ij}(x, (\tilde{x}), u, A\nabla u)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $A(\tilde{x}) = 2\hat{\alpha}^{ij}(a_0/a) \times A_i \nabla u (a_0 \zeta_j) + \hat{\alpha}^{ij} u (a_0^2 \zeta_{ij}) + (a_0/a)^2 \alpha\zeta$, выполнены все условия теоремы 1.4.1, ичем неравенство вида (1.4.1) выполнено при $l = 0$, $\delta(t) \equiv 0$ и при $) \equiv c_1 (1 + \varepsilon_0 \hat{M}_1^2) t^{-2}$, где c_1 зависит только от m и известных величин, еделяемых условиями (3.1), (3.32) и оценкой (3.14), а $\hat{M}_1 \equiv \max\limits_{\partial\Omega} a|\nabla u|$.

да из теоремы 1.4.1 (с учетом замечания 1.5.1) получаем оценку $\left|\frac{(\tilde{x}_0)}{\partial\nu}\right| \leqslant \beta$, или

$$\left| a_0 \frac{\partial v(x_0)}{\partial\nu} \right| \leqslant \beta, \tag{3.41}$$

β определяется из формулы (1.3.7) при

$$\Phi(t) = \frac{K}{t^2} + \frac{2\psi(t)}{t}$$

екотором числе $\bar{\alpha}$, зависящим только от известных величин. Из (3.41) 3.32) с учетом того, что $\zeta(x_0) = 1$, следует оценка

$$\left| a_0 \frac{\partial u(x_0)}{\partial\nu} \right| \leqslant \beta + c_2 m.$$

колько производные по касательным направлениям в точке $x_0 \in \partial\Omega$ ы 0, то отсюда следует, что

$$\hat{M}_1 \equiv \max_{\partial\Omega} |a\nabla u| \leqslant \beta + c_2 m. \tag{3.42}$$

Из равенства (1.3.7) и вида функции $\psi(t)$ легко выводится оц
$\leqslant c_3\sqrt{\varepsilon_0}\,\hat{M}_1+c_4$, где константы c_3, c_4 зависят только от известных
Пусть ε_0 выбрано так, что $1-c_3\sqrt{\varepsilon_0}=1/2$. Тогда из (3.42) и
оценка (3.33). Теорема 3.3 доказана.

Формулируя далее теорему о разрешимости задачи (3.30) для (
липтического уравнения вида (5.1.35) при выполнении условия (3.
мерной вырожденности матрицы A, мы учитываем возможность
цировать такое уравнение и как $(aI, 0)$-эллиптическое уравнение
тельно $a=(1/n)\operatorname{Sp}A$ (см. (3.31)).

Теорема 3.4. *Пусть уравнение вида* (5.1.35) *имеет ст*
$(A, 0)$*-эллиптического уравнения в ограниченной области* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$
класса C^2 *относительно матрицы* $A=a(x)I$, $a(x)\geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^n$, $a\in$
$\cap\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n)$. *Пусть приведенные коэффициенты* $l'^{i}(x, u, q)$, $i=$
$l'_0(x, u, q)$ *и правая часть* $f(x)$ *уравнения* (5.1.35), *непрерывные в* $\bar{\Omega}\times$
и функции $\hat{a}^{ij}(x, u, q)$, $i, j=1, \ldots, n$, *и* $\hat{a}(x, u, q)$, *определенные*
муле (6.1.4), *обеспечивают справедливость условий* (6.2.2), (3.2
и (6.2.25) [(6.2.25′)]. *Тогда задача вида* (3.30) *имеет хотя*
[*точно одно*] *A-регулярное обобщенное решение, т. е. существует*

$u\in L^\infty(\Omega)\cap\overset{0,\Sigma}{H}_m(A, \Omega)$, $\forall m>1$, *такая, что* $A\nabla u\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ *и*

$$\int\limits_\Omega[\mathbf{l}'(x, u, A\nabla u)\cdot A\nabla\eta+l'_0(x, u, A\nabla u)\eta]\,dx=\int\limits_\Omega f\eta\,dx,$$

$$\forall\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{\Omega}).$$

Доказательство. Теорема 3.4 доказывается при помощи те
и 3.3 точно так же, как теорема 6.2.3 была доказана при пом
рем 6.2.1 и 6.2.2 (см. также замечание 6.2.2). Теорема 3.4 д

Рассмотрим в качестве примера в связи с теоремами 3.2 и 3.
нение вида (1.7) при $\bar{m}\geqslant 2$, $m\geqslant 2$. Из результатов теорем 3.2
следует, в частности, следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть матрица* $A\equiv\|a^{ij}(x)\|$ *симметрична и*
цательно определена в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *кл*
причем $a^{ij}\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})$, $i, j=1, \ldots, n$, *а функция* $f(x)$ *ограничена и*
ограниченные в Ω *A-производные* $\frac{\delta}{\partial x_k}f(x)$, $k=1, \ldots, n$. *Тогда при*
нении условий (3.3) *и* (6.2.9) *задача вида* (6.1.1) *для уравнен*
имеет точно одно A-регулярное обобщенное решение, т. е. сущ
единственная функция $u\in L^\infty(\Omega)\cap\mathring{H}_m(A, \Omega)$, $\forall m>1$, *такая, что*
$\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ *и*

$$\int\limits_\Omega[|A\nabla u|^{\bar{m}-2}A\nabla u\cdot A\nabla\eta+|u|^{m-2}u\eta]\,dx=\int\limits_\Omega f\eta\,dx,\quad\forall\eta\in\tilde{C}^1_0(\Omega).$$

При выполнении условия $A=a(x)I$, $a(x)\in\tilde{C}^1(\bar{\Omega})\cap\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n)$, $a(x)\geqslant$
и таких же предположениях о правой части $f(x)$, *как в первой*
теоремы, задача вида (3.30) *имеет точно одно A-регулярное обо*
решение, т. е. существует единственная функция $u\in L^\infty(\Omega)\cap\mathring{H}_m$
$\forall m>1$, *такая, что* $A\nabla u\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ *и справедливо тождество* (3.
всех $\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma}(\bar{\Omega})$, *где* $\Sigma\equiv\{x\in\partial\Omega: A\nu\neq 0\}$.

Доказательство. Теорема 3.5 вытекает непосредственно из
3.2 и 3.4 с учетом того, что условие (6.2.25′) выполнено, а также
соображений, что результаты теорем 3.2 и 3.4 сохраняются, оч

если правая часть $f(x)$ ограничена в Ω вместе со своими A-производными $\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)$, $k=1, \ldots, n$. Теорема 3.5 доказана.

Аналогичным образом устанавливается существование A-регулярных обобщенных решений задачи (3.30), обладающих ограниченными в Ω A-производными второго порядка. Ради краткости будем сразу считать, что $A=a(x)I$, где $a(x)\geqslant 0$ в Ω, поскольку более общий случай, определяемый условием (3.4), легко свести к этому. Кроме того, следует отметить, что на этапе получения априорной оценки $\max\limits_{\Omega}|D^2u|$ через $\max\limits_{\partial\Omega}|D^2u|$ допустим более широкий класс матриц (здесь на матрицу A возникают условия примерно такого же характера, как условие (3.3)).

Теорема 3.6. *Пусть уравнение* (5.1.35) *имеет структуру* $(A, 0)$-*эллиптического уравнения в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *класса* C^2, *относительно матрицы* $A=a(x)I$, *где*

$$a(x)\in C^2(\bar{\Omega})\cap \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\mathbb{R}^n} a(x)\geqslant 0. \tag{3.45}$$

Пусть приведенные коэффициенты $l'^i(x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, $l'_0(x, u, q)$ *и правая часть* $f(x)$ *уравнения* (5.1.35), *непрерывные в* $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, *и функции* $\hat{a}^{ij}(x, u, q)$, $i, j=1, \ldots, n$, *и* $\hat{a}(x, u, q)$, *определенные по формуле* (6.1.4), *обеспечивают выполнимость условий* (6.2.2), (3.2), (3.32) *и условия: на множестве* $\bar{\Omega}\times[-m, m]\times\{|q|\leqslant\tilde{M}_1\}$, *где константы* m *и* $\tilde{M}_1$ *определяются соответственно условиями* (6.2.2) *и* (3.2), (3.32), *выполнены неравенства*

$$\begin{gathered}\hat{a}^{ij}(x, u, q)\eta_i\eta_j\geqslant\nu|\eta|^2, \quad \eta=A\xi, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad \nu=\text{const}>0,\\ \left|\frac{\partial\hat{a}^{ij}(x, u, q)}{\partial q_s}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2\hat{a}^{ij}(x, u, q)}{\partial q_s\partial q_t}\right|\leqslant\sigma_1, \quad i, j, s, t=1, \ldots, n,\end{gathered} \tag{3.46}$$

где σ_1 — *достаточно малая в зависимости от* $\tilde{M}_1$ *и* ν *неотрицательная постоянная. Предположим также, что при всех* $x\in\bar{\Omega}$, $u\in[-2m, m]$, $q\in\mathbb{R}^n$, $|q|\leqslant 2\tilde{M}_1$, $\eta\in\mathbb{R}^n$, $\xi_0\in\mathbb{R}$, *где* m *и* $\tilde{M}_1$ — *такие же константы, что и выше, справедливо неравенство* (6.2.25) [(6.2.25′)]. *Тогда задача* (3.30) *имеет хотя бы одно* [*точно одно*] A-*регулярное обобщенное решение, обладающее ограниченными в* Ω A-*производными второго порядка. Такое решение удовлетворяет соответствующему уравнению* (3.1) *п. в. в* Ω.

Доказательство. Сначала устанавливается оценка $\max\limits_{\bar{\Omega}}|D^2u|$ через $\max\limits_{\partial\Omega}|D^2u|$. Применяя к уравнению (3.1), соответствующему рассматриваемому $(A, 0)$-эллиптическому уравнению (5.1.35), оператор $u_{\hat{k}\hat{l}}\frac{\hat{\partial}^2}{\partial x_k\partial x_l}\equiv$

$\equiv\sum\limits_{k, l=1}^{n} u_{\hat{k}\hat{l}}\frac{\hat{\partial}}{\partial x_l}\left(\frac{\hat{\partial}}{\partial x_k}\right)$, вводя обозначения $v=\sum\limits_{k, l=1}^{n} u^2_{\hat{k}\hat{l}}$ и применяя соображения, аналогичные тем, которые употреблялись при доказательстве теорем 6.3.1 и 3.3, устанавливаем оценку

$$\frac{1}{2}\hat{a}^{ij}v_{\hat{j}\hat{i}}\geqslant\frac{\nu}{2}|\hat{D}^3u|^2-c_1\sigma_1\left(v^2+\sqrt{v}\,|\hat{\nabla}v|\right)-c_2\left(v^{3/2}+|\hat{\nabla}v|\right), \quad x\in\Omega_L, \tag{3.47}$$

где $\Omega_L\equiv\{x\in\Omega:|\hat{D}^2u|>L\}$, а c_1, c_2 — константы, зависящие лишь от известных величин. Производя в (3.47) замену $v=zw\equiv\left(1+\tilde{M}_1^2-\sum\limits_{k=1}^{n}u^2_{\hat{k}}\right)w$, где $\hat{M}_1 \equiv \max_{\Omega} |\hat{\nabla} u|$, устанавливаем, что функция w не может свое макмальное в $\bar{\Omega}$ значение принимать в области $\hat{\Omega}_L$, откуда легко след оценка

$$\max_{\bar{\Omega}} |\hat{D}^2 u| \leqslant (1+\hat{M}_1^2)^{1/2} \max \{\max_{\partial\Omega_l} |\hat{D}^2 u|,\ L\}, \qquad (3.$$

где $L = L(n,\ \hat{M}_1,\ \nu,\ c_1,\ c_2)$. Получив квалифицированную оценку (3. можно перейти к установлению оценки $\max_{\partial\Omega} |\hat{D}^2 u|$. Такая оценка получае при помощи тех же соображений, которые использовались при доказате стве теорем 6. 3. 2 и 3. 3. Таким образом устанавливается априорная оце $\max_{\bar{\Omega}} |D^2 u| \leqslant c$ с константой c, зависящей лишь от известных велич Дальнейшее доказательство теоремы 3. 6 совершенно аналогично доказате ству теорем 3. 2 и 6. 3. 3.

Проиллюстрируем результаты теорем 3. 4 и 3. 6 на примере линейн уравнения вида (6. 2. 18) с неотрицательной в Ω характеристической ф мой $\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j$. Пусть уравнение (6. 2. 18) является $(A,\ 0)$-эллиптическим в относительно матрицы $A = \mathfrak{A}^{1/2}$, т. е. для него выполнено условие (3. 2 Предположим, что матрица A равномерно вырождена в Ω, т. е. справ ливо условие (3. 4). Тогда уравнение (6. 2. 18) можно квалифицирова как (aI)-эллиптическое в Ω относительно $a = (\mathrm{Sp}\, A)/n$, а его факторизац можно осуществить несколько иначе, чем в общей ситуации, описан выше (см. (3. 26), (3. 27)). Очевидно, что при сделанных предположени уравнение (6. 2. 18) всегда можно записать в виде

$$a^2 \hat{\alpha}^{ij}(x) u_{ij} - a\hat{\gamma}^i(x) u_i - c(x) u - f(x) = 0 \qquad (3.$$

где

$$\hat{\alpha}^{ij} = \frac{\alpha^{ij}}{a^2},\quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n,\quad \hat{\gamma}^i = \frac{a^{ik}\gamma^k}{a} - 2\,\frac{\alpha^{ij}\dfrac{\partial a}{\partial x_j}}{a^2},\quad i = 1,\ \ldots,\ n,$$

$$a = \frac{\mathrm{Sp}\, A}{n} \geqslant 0 \ \text{ в } \Omega,$$

а коэффициенты γ^k, $k = 1, \ldots, n$, определяются условием (3. 24). Очевидн что $\hat{\alpha}^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c_0\xi^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, причем константа $c_0 > 0$ зависит лишь от n константы μ_4 из условия равномерной вырожденности матрицы A. В те минах (aI)-производных уравнение (6. 2. 18) имеет вид

$$\hat{\alpha}^{ij} u_{\hat{j}\hat{i}} - \hat{\beta}^i u_{\hat{i}} - cu - f = 0, \qquad (3. 5$$

где $\hat{\beta}^i = -\hat{\alpha}^{ij} \dfrac{\partial a}{\partial x_j} + \hat{\gamma}^i$, $i = 1, \ldots, n$, а его дивергентная форма — вид

$$-\mathrm{div}\,\{(aI)\,\hat{\mathfrak{A}}\,(a\nabla u)\} + \hat{a}^i u_{\hat{i}} + cu + f = 0, \qquad (3. 5$$

где $\hat{a}^i = \hat{\beta}^i + a\,\dfrac{\partial \hat{\alpha}^{ij}}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, n$. Из теорем 3. 4 и 3. 6 с учетом линей ности уравнения (3. 51) вытекает, очевидно, следующий результат.

Теорема 3. 7. *Пусть Ω — ограниченная в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, область класса C и пусть выполнено условие (3. 45). Предположим, что функции $\hat{\alpha}^{ij}(x$ $\hat{\beta}^i(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и имеют ограниченные в Ω (aI)-прои водные первого [и второго] порядков. Предположим, что при всех $x \in \bar{\Omega}$*

$\eta=(aI)\xi$, $\xi\in\mathbb{R}^n: \nu\eta^2\leqslant\hat{a}^{ij}(x)\eta_i\eta_j\leqslant\mu\eta^2$, *где* ν, $\mu=\text{const}>0$, *и пусть* $c(x)\geqslant c_0=\text{const}>0$ *в* Ω. *Тогда задача*

$$\hat{\alpha}^{ij}u_{\hat{j}t}-\hat{\beta}^i u_t-cu-f=0 \text{ в } \Omega,\quad u=0 \text{ на } \Sigma\equiv\{x\in\partial\Omega: a(x)>0\}, \tag{3.52}$$

где u_t, $u_{\hat{j}t}$ — *A-производные относительно матрицы* $A=a(x)I$, *имеет хотя бы одно* (aI)*-регулярное обобщенное решение и* [*обладающее ограниченными в* Ω (aI)*-производными второго порядка*], *т. е. существует функция* $u\in L^\infty(\Omega)\cap\mathring{H}_m(aI,\ \Omega)$, $\forall m>1$, *такая, что* $a\nabla u\in L^\infty(\Omega)$, [$a^2\mathscr{D}^2u\in L^\infty(\Omega)$] *и*

$$\int\limits_\Omega[\hat{\mathfrak{A}}\hat{\nabla}u\cdot\hat{\nabla}\eta+\hat{\alpha}\hat{\nabla}u\eta+cu\eta+f\eta]\,dx=0,\quad \forall\eta\in\tilde{C}^1_{0,\Sigma}(\bar{\Omega}), \tag{3.53}$$

где $\hat{\mathfrak{A}}\equiv\|\hat{a}^{ij}(x)\|$, $\alpha\equiv(\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$ [*причем функция* u *удовлетворяет уравнению* (3.50) *п. в. в* Ω]. *Если дополнительно выполнено условие*

$$\begin{gathered}\hat{a}^{ij}\eta_i\eta_j+\hat{\alpha}^j\eta_i\xi_0+c\xi_0^2>0,\\ x\in\bar{\Omega},\quad \eta=(aI)\xi,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \xi_0\in\mathbb{R},\quad (\xi_0,\ \eta)\neq(0,\ 0),\end{gathered} \tag{3.54}$$

то задача (3.52) *имеет точно одно* (aI)*-регулярное обобщенное решение.*

Отметим, что разрешимость первой краевой задачи для линейного вырождающегося уравнения вида (3.49) в весовом пространстве $W^2_p(a(x),\ \Omega)$, где $a(x)\geqslant 0$ в Ω, $1<p<+\infty$, была установлена в работе [117]. Этот результат не вытекает из доказанной нами теоремы 3.7, точно так же как и теорема 3.7 не вытекает из результатов работы [117].

ГЛАВА 8

(A,0)-ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные функциональные пространства, связанные с общей краевой задачей для (A, 0,m,m)-параболических уравнений

В этой главе областью, в которой рассматриваются краевые задачи, всегда является цилиндр $Q\equiv\Omega\times(T_1,\ T_2)$, где Ω — некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, а T_1 и T_2 — фиксированные числа. В случае $T_1=0$, $T_2=T$ соответствующий цилиндр обозначается через $Q_T\equiv\Omega\times(0,\ T)$. Переменные $x_1,\ldots,x_n$ называются пространственными, переменная t — временем.

Пусть $A=\|a^{ij}(t,x)\|$ — квадратная матрица порядка n, удовлетворяющая условию

$$a^{ij}\in L^{m_i,\,m_{0i}}(Q),\ i,\ j=1,\ldots,n,\quad m_i\geqslant 1,\quad m_{0i}\geqslant 1,\quad i=1,\ldots,n. \tag{1.1}$$

Сопоставим каждой функции $u\in\tilde{C}^1_{\text{loc}}(Q)\subset L^{m,\,m_0}_{\text{loc}}(Q)$ вектор $A\nabla u\equiv(A_1\nabla u,\ldots,A_n\nabla u)$, где $A_i\nabla u\equiv a^{ij}(t,\ x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $i=1,\ \ldots,\ n$, рассматриваемый как элемент $\mathbf{L}^{\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}_{\text{loc}}(Q)$. Такое отображение будем называть оператором взятия пространственного A-градиента в Q. Предположим, что выполнено условие:

$$\text{оператор взятия пространственного } A\text{-градиента допускает слабое замыкание.} \tag{1.2}$$

При выполнении условия (1.2) будем говорить, что функция $u \in L^{m, m_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$ имеет в Q обобщенный пространственный A-градиент $A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$, если функция u принадлежит области определения слабого замыкания оператора взятия пространственного A-градиента, а векторная функция $A\nabla u$ есть значение этого оператора на функции u. Компоненты $A_1\nabla u, \ldots, A_n\nabla u$ вектора $A\nabla u$ будем называть обобщенными пространственными A-производными функции u в цилиндре Q; при этом $A_i\nabla u \in L^{m_i, m_{0i}}(Q)$, $i = 1, \ldots, n$.

Поскольку обобщенные пространственные A-производные функции u являются обобщенными $\tilde{A}$-производными этой функции в области $\tilde{\Omega} \equiv Q \subset \subset \mathbb{R}^{n+1}$ относительно матрицы $\tilde{A}$ порядка $n+1$, имеющей вид $\tilde{A} = \left\| \begin{matrix} 0 \ldots 0 \\ \vdots \quad A \\ 0 \end{matrix} \right\|$, то приводимые ниже факты устанавливаются точно так же, как и соответствующие предложения, доказанные в § 4.1.

Лемма 1.1. *При условиях* (1.1) *и*

$$a^{ij}, \ \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j} \in L^{m', m_0'}_{\mathrm{loc}}(Q), \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1, \ \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_0'} = 1, \tag{1.3}$$

оператор взятия пространственного A-градиента допускает слабое замыкание (*т. е. выполнено условие* (1.2)).

В дальнейшем будет показано, что выполнение условия (1.3) обеспечивается также условием достаточной слабости вырождения матрицы A в Q.

Лемма 1.2. *При условиях* (1.1), (1.3) *для всякой функции $u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$, имеющей обобщенный пространственный A-градиент $A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$, справедливы тождества*

$$\iint\limits_Q u\left(A_i\nabla\eta + \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}\eta\right)dtdx = -\iint\limits_Q A_i\nabla u\eta dtdx, \tag{1.4}$$
$$\forall \eta \in \tilde{C}^1_{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}(Q), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 1.3. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.3), *и пусть для любой компактной в Ω подобласти Ω'*

$$|a^{ij}(t, x) - a^{ij}(t, y)| \leqslant K|x - y|, \quad x, y \in \Omega', \ t \in [T_1, T_2], \tag{1.5}$$
$$i, j = 1, \ldots, n,$$

где K зависит лишь от Ω'. Предположим, что для функций $u \in L^{m, m_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$ справедливы тождества

$$\iint\limits_Q u\left(A_i\nabla\eta + \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}\eta\right)dtdx = -\iint\limits_Q v_i\eta dtdx, \tag{1.6}$$
$$\eta \in \tilde{C}^1_{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}(Q), \ i, \ j = 1, \ldots, n.$$

Тогда функция $u \in L^{m, m_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$ имеет обобщенный пространственный A-градиент $A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$, причем $A\nabla u = \mathbf{v}$.

Пусть выполнены условия (1.1), (1.2), и пусть Γ — произвольная часть границы ∂Q цилиндра Q. Обозначим через $\mathscr{H} \equiv \overset{0,\Gamma}{\mathscr{H}}_{m, m_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q)$ пополнение множества $\tilde{C}^1_{0,\Gamma}(Q)$ по норме

$$\|u\|_{\mathscr{H}} \equiv \|u\|_{m, m_0, Q} + \|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, Q}, \tag{1.7}$$

где $\|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, Q} \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \|A_i\nabla u\|_{m_i, m_{0i}, Q}$. В случае $\Gamma = \varnothing$ верхние индексы в обозначении этого пространства будем опускать.

Сопоставим каждой функции $u \in \tilde{C}^1(Q)$ ее значение $u|_\Pi$ на множестве $\Pi \subset \partial Q$. Рассмотрим это отображение как линейный оператор, действующий из $\tilde{C}^1(Q) \subset \mathscr{H}_{m,\, m_0;\, \mathbf{m},\, \mathbf{m}_0}(A,\ Q)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$. Такой оператор будем называть оператором принятия предельного значения на множестве Π.

Предположим, что для некоторого множества $\Pi \subset \partial Q$ выполнено условие:

$$\text{оператор принятия предельного значения на множестве } \Pi \text{ допускает замыкание.} \tag{1.8}$$

При выполнении условия (1.8) будем говорить, что функция $u \in \mathscr{H} \equiv \equiv \mathscr{H}_{m,\, m_0;\, \mathbf{m},\, \mathbf{m}_0}(A,\ Q)$ имеет обобщенное предельное значение $u|_\Pi$ на множестве Π, если u принадлежит области определения замыкания оператора принятия предельного значения на Π, а $u|_\Pi$ есть значение этого оператора на данной функции u.

Достаточные условия выполнимости условия (1.8), связанные с предположением достаточной регулярности поверхности Π, гладкости элементов матрицы A в некоторой окрестности множества Π и некасательности вектора $A^*A\nu$ к поверхности Π, определяются доказательствами лемм 4.2.1—4.2.3. В частности, из указанных предложений и вида нормы (1.7) очевидным образом вытекают следующие утверждения.

Лемма 1.4. *Пусть $\Pi = \pi \times (T_1,\ T_2)$, где $\pi \subset \partial\Omega$, и пусть $A = A(x)$ (т. е. элементы матрицы A не зависят от t). Предположим, что для множества π и матрицы A выполнены условия (4.1.1), (4.1.3) и (4.2.5). Тогда при любых $m \geqslant 1$, $m_0 \geqslant 1$, $\mathbf{m} = (m_1,\ \ldots,\ m_n)$, $\mathbf{m}_0 = (m_{01},\ \ldots,\ m_{0n})$, $m_i \geqslant 1$, $m_{0i} \geqslant 1$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, оператор принятия предельного значения на множестве Π допускает замыкание. Всякая функция $u \in \mathscr{H}$ имеет обобщенное предельное значение $u|_\Pi$ на Π, причем $u|_\Pi \in L^{m_*}_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, где $m_* = \min(m,\ m_0,\ m_1,\ \ldots,\ m_n,\ m_{01},\ \ldots,\ m_{0n})$. Для любой $x_0 \in \operatorname{int} \pi$ существует такая окрестность $\hat{p}_{x_0} \subset \pi$, что*

$$\lim_{h \to 0} \int_{T_1}^{T_2} \int_{\hat{p}_{x_0}} |u((t,\ y) + hA^*(y)\, A(y)\, \nu(t,\ y)) - u|_\Pi(t,\ y)|^{m_*}\, dt\, ds = 0, \tag{1.9}$$

где $\nu(t,\ y)$ — единичный вектор внутренней нормали к Π в точке $(t,\ y) \in \in \hat{p}_{x_0} \times (T_1,\ T_2)$, а ds — элемент площади на $\hat{p}_{x_0}$. Кроме того,

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_{\hat{p}_{x_0}} |u|^{m_*}\, dt\, ds \leqslant c \int_{T_1}^{T_2} \int_{\hat{\omega}_{x_0}} (|u|^{m_*} + |A\nabla u|^{m_*})\, dt\, dx, \tag{1.10}$$

где $\hat{\omega}$ — некоторая часть области Ω, примыкающая к $\hat{p}_{x_0}$, а константа c не зависит от функции u.

Лемма 1.5. *Пусть для некоторого множества $\Pi = \pi \times (T_1,\ T_2)$ и матрицы $A = A(x)$ выполнено условие (4.2.25). Тогда оператор принятия предельного значения на множестве Π допускает замыкание. Всякая функция $u \in \mathscr{H}$ имеет обобщенное предельное значение $u|_\Pi \in L^{m_*}(\Pi)$, где $m_* = \min(m,\ m_0,\ m_1,\ m_{01},\ \ldots,\ m_n,\ m_{0n})$, причем*

$$\lim_{h \to 0} \int_\Pi |u((t,\ y) + hA^*(y)\, A(y)\, \nu(t,\ y)) - u|_\Pi(t,\ y)|^{m_*}\, dt\, ds = 0 \tag{1.11}$$

и

$$\int_\Pi |u|^{m_*}\, dt\, ds \leqslant c \int_{T_1}^{T_2} \int_\Pi (|u|^{m_*} + |A\nabla u|^{m_*})\, dt\, dx, \tag{1.12}$$

где c не зависит от функции u.

Достаточные условия справедливости (1.8) для всей боковой поверхности цилиндра Q, связанные с предположениями другого рода (слабая вырожденность матрицы $A(t, x)$ в Q) будут даны в § 3. Заметим, что (как мы увидим ниже) условие (1.8) заведомо не выполнено для верхнего и нижнего оснований цилиндра Q.

Далее в этом параграфе всегда предполагается, что выполнены условия (1.1), (1.2). Аналогично определению 4.3.1 введем понятия правильной и особой частей границы ∂Q относительно матрицы A (порядка n) и показателей m, m_0, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_0$. Множество $\mathscr{P} \subset \partial Q$ называется правильным, если оператор принятия предельного значения на Π допускает замыкание (т. е. для Π выполнено условие (1.8)). Множество $\mathscr{P} \subset \partial Q$ называется особой частью ∂Q, если для $\mathscr{P}$ выполнено условие

$$\text{множество } \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar{Q}) \text{ плотно в } \mathscr{H}_{m, m_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q). \tag{1.13}$$

Достаточные условия правильности множеств вида $\Pi = \pi \times (T_1, T_2)$, $\pi \subset \subset \partial\Omega$ указаны выше. Приведем условия, гарантирующие особость некоторых множеств $\mathscr{P} \subset \partial Q$. Из доказательства общей леммы 4.3.1 легко вытекает справедливость следующих фактов.

Лемма 1.6. *Множества* $\tilde{C}^1_{0,\Omega_{T_1}}(\bar{Q})$, $\tilde{C}^1_{0,\Omega_{T_2}}(\bar{Q})$, $\tilde{C}^1_{0,\Omega_{T_1}\cup\Omega_{T_2}}(\bar{Q})$ *плотны в* $\mathscr{H}$, *так что нижнее основание* Ω_{T_1} *и верхнее основание* Ω_{T_2} *являются особыми частями границы* ∂Q (*при любых показателях* m, m_0, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_0$).

Доказательство. Ввиду независимости от x функции $\zeta_\delta(t, x)$, построенной по аналогии с формулой (4.3.4) для множества $\mathscr{P} = \Omega_{T_1}$ или $\mathscr{P} = \Omega_{T_2}$, аналог третьего члена правой части неравенства (4.3.6) равен 0, откуда и следует утверждение леммы 1.6.

Лемма 1.7. *Пусть* $\mathscr{P} = p \times (T_1, T_2)$, *где* $p \subset \partial\Omega$, *и пусть* $A = A(x)$. *Предположим, что для множества* p *и матрицы* A *выполнено условие* (4.3.2). *Тогда* $\mathscr{P}$ — *особая часть границы* ∂Q.

Доказательство. Пусть $u_\delta = u\zeta_\delta$, где срезающая функция ζ_δ построена по формуле вида (4.3.3), так что $u_\delta \in \tilde{C}^1_{0,\mathscr{P}}(\bar{Q})$. Тогда (ср. (4.3.5))

$$\|u - u_\delta\|_{\mathscr{H}} \leqslant \|u(1-\zeta_\delta)\|_{m, m_0, Q} + \sum_{i=1}^{n} \|A_i \nabla u (1 - \zeta_\delta)\|_{m_i, m_{0i}, Q} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \|u A_i \nabla\zeta_\delta\|_{m_i, m_{0i}, q_{\delta/2, \delta}}, \tag{1.14}$$

где $q_{\delta/2,\delta} = \omega_{\delta/2,\delta} \times (T_1, T_2)$, причем множество $\omega_{\delta/2,\delta}$ определено так же, как в (4.3.3). Поскольку

$$\|u A_i \nabla\zeta_\delta\|_{m_i, m_{0i}, q_{\delta/2,\delta}} = \left(\int_{T_1}^{T_2} \|u A_i \nabla\zeta_\delta\|^{m_{0i}/m_i}_{m_i, \omega_{\delta/2,\delta}} dt\right)^{1/m_{0i}}, \tag{1.15}$$

то из формул вида (4.3.6)—(4.3.7) следует оценка

$$\|u A_i \nabla\zeta_\delta\|_{m_i, m_{0i}, q_{\delta.2,\delta}} \leqslant c\delta^{\varepsilon_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.16}$$

где константа c не зависит от δ, а $\varepsilon_i = \alpha_i - 1/m_i' > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Из (1.14) и (1.16) легко следует, что $\lim_{\delta\to 0} \|u - u_\delta\|_{\mathscr{H}} = 0$. Лемма 1.7 доказана.

Далее в этой главе мы всегда предполагаем, что выполнено условие: $\partial Q = \Sigma \cup \Sigma'$, $\Sigma = \sigma \times (T_1, T_2)$, $\Sigma' = (\sigma' \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}$, причем

Σ — правильная, а Σ' — особая части ∂Q относительно заданных матриц A и показателей m, m_0, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_0$, причем $m>1$, $m_0>1$, $m_i>1$, $m_{0i}>1$, $i=$

$$=1, \ldots, n. \tag{1.17}$$

Напомним, что для матрицы A выполнены условия (1.1), (1.2), а множества Ω_{T_1} и Ω_{T_2} суть заведомо особые части границы ∂Q. Пусть множество Σ разбито на части $\Sigma_1 \equiv \sigma_1 \times (T_1, T_2)$, $\Sigma_2 \equiv \sigma_2 \times (T_1, T_2)$, $\Sigma_3 \equiv \sigma_3 \times (T_1, T_2)$, так что $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = \Sigma$, $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, причем предположим, что $\operatorname{mes}_n \partial\Sigma_i = 0$, $i=1, 2, 3$. Пусть на Σ_3 задана кусочно-непрерывная положительная ограниченная функция λ.

Пополнение множества $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$ по норме

$$\|u\|_{\mathscr{H}_\lambda} \equiv \|u\|_{m, m_0, Q} + \|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, Q} + \|u\|_{L^2(\lambda, \Sigma_3)}, \tag{1.18}$$

где $\|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, Q} \equiv \sum_{i=1}^{n} \|A_i \nabla u\|_{m_i, m_{0i}, Q}$, $A_i\nabla u \equiv a^{ij} u_{x_j}$, $i=1, \ldots, n$, обозначим через $\mathscr{H}_\lambda \equiv \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{m, m_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A;\ Q;\ \Sigma_3,\ \lambda)$. В случае $\Sigma_3 = \varnothing$ пространство $\mathscr{H}_\lambda$ совпадает с пространством $\mathscr{H} \equiv \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{m, m_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A,\ Q)$, введенным выше.

Точно так же, как и леммы 5.2.1—5.2.3, доказываются следующие утверждения.

Лемма 1.8. *Пространство $\mathscr{H}_\lambda$ сепарабельно и рефлексивно. Всякий линейный функционал $\mathscr{F}$ в пространстве $\mathscr{H}_\lambda$ можно задать равенством*

$$\langle \mathscr{F}, \eta \rangle = \iint_Q (f_0 \eta + \mathbf{f} \cdot A\nabla\eta)\, dt dx + \int_{\Sigma_3} \lambda \psi \eta\, ds, \quad \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q), \tag{1.19}$$

где $f_0 \in L^{m', m'_0}(Q)$, $1/m + 1/m' = 1$, $1/m_0 + 1/m'_0 = 1$, $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^n)$, $f^i \in L^{m'_i, m'_{0i}}(Q)$, $1/m_i + 1/m'_i = 1$, $1/m_{0i} + 1/m'_{0i} = 1, i, \ldots, n$, $\psi \in L^2(\lambda, \Sigma_3)$, причем f_0, f и ψ можно выбрать так, что

$$\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{H}^*_\lambda} = \sup\left(\|f_0\|_{m', m'_0, Q}, \|f^1\|_{m'_1, m'_{01}, Q}, \ldots, \|f^n\|_{m'_n, m'_{0n}, Q}, \|\psi\|_{L^2(\lambda, \Sigma_3)}\right). \tag{1.20}$$

Всякое выражение вида (1.19), *рассматриваемое при указанных выше условиях на f_0, $\mathbf{f}$ и ψ, определяет некоторый линейный в пространстве $\mathscr{H}_\lambda$ функционал $\mathscr{F}$ с нормой $\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{H}^*_\lambda}$, не превосходящей величины, стоящей в правой части формулы* (1.20).

Лемма 1.9. *Справедливо плотное выражение $\mathscr{H}_\lambda \to \mathscr{H}$. Если $A = A(x)$, $m \geqslant 2$, $m_0 \geqslant 2$, $m_i \geqslant 2$, $m_{0i} \geqslant 2$, $i=1, \ldots, n$, и для множества σ_3 и матрицы A выполнено условие* (4.2.25), *то пространства $\mathscr{H}_\lambda$ и $\mathscr{H}$ изоморфны.*

Лемма 1.10. *Множества $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}}(\bar{Q})$, $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Omega_{T_1}}(\bar{Q})$, $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Omega_{T_2}}(\bar{Q})$ плотны в $\mathscr{H}_\lambda$.*

Введем теперь аналоги пространств X и Y (см. (5.2.10) и (5.2.11)). Учитывая, что рассматриваемые далее уравнения будут иметь $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}})$-структуру в цилиндре Q относительно матрицы $\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 0 \ldots 0 \\ \vdots \quad A \\ 0 \end{Vmatrix}$ и вектора $\tilde{\mathbf{b}} = (1, 0, \ldots, 0)$, рассмотрим следующие пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$.

Пополнение множества $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$ по норме

$$\|u\|_{\mathscr{X}} = \|u\|_{\mathscr{H}_\lambda} + \|u\|_{2, Q} + \|u\|_{2, Q_{T_2}} \tag{1.21}$$

обозначим через $\mathscr{X} \equiv \overset{0,\,\Sigma_1}{\mathscr{X}}_{m,\,m_0;\,\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}(A;\ Q;\ \Sigma_3,\ \lambda)$.

Пополнение множества $\overset{\circ}{C}{}^1_{0,\,\Sigma_1}(Q)$ по норме

$$\|u\|_{\mathscr{Y}} = \|u\|_{\mathscr{X}} + \|u_t\|_{2,\,Q} \tag{1.22}$$

обозначим через $\mathscr{Y} \equiv \overset{0,\,\Sigma_1}{\mathscr{Y}}_{m,\,m_0;\,\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}(A;\ Q;\ \Sigma_3,\ \lambda)$.

Точно так же как были доказаны леммы 5.2.4—5.2.6, устанавливаем следующие результаты.

Лемма 1.11. *Пространство $\mathscr{X}$ сепарабельно и рефлексивно. Всякий линейный функционал $\mathscr{F}$ в пространстве $\mathscr{X}$ можно задать по формуле*

$$\langle \mathscr{F},\ \eta \rangle = \iint\limits_Q (f_0\eta + \mathbf{f}\cdot A\nabla\eta + g_0\eta)\,dt\,dx + \int\limits_{\Omega_{T_2}} q\eta\,dx + \\ + \int\limits_{\Sigma_3} \lambda\psi\eta\,ds, \quad \eta \in \overset{\circ}{C}{}^1_{0,\,\Sigma_1}(Q), \tag{1.23}$$

где f_0, $\mathbf{f}$ и ψ — такие же функции, как в (1.19), $g_0 \in L^2(Q)$, $q \in L^2(\Omega)$, *причем эти функции можно выбрать так, что*

$$\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{X}^*} = \sup\left\{\|f_0\|_{m',\,m_0',\,Q},\ \ldots,\ \|f^n\|_{m_n',\,m_{0n}',\,Q},\ \|g_0\|_{2,\,Q},\ \|q\|_{2,\,\Omega_{T_2}},\ \|\psi\|_{L^2(\lambda,\,\Sigma_3)}\right\}. \tag{1.24}$$

Всякое выражение вида (1.24), *рассматриваемое при указанных выше условиях на f_0, $\mathbf{f}$, ψ, g_0, q, определяет некоторый линейный в пространстве $\mathscr{X}$ функционал $\mathscr{F}$ с нормой $\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{X}^*}$, не превосходящей величины, стоящей в правой части формулы* (1.24).

Лемма 1.12. *Пространство $\mathscr{Y}$ сепарабельно и рефлексивно. Всякий линейный функционал $\mathscr{F}$ в пространстве $\mathscr{Y}$ можно задать по формуле*

$$\langle \mathscr{F},\ \eta \rangle = \iint\limits_Q (f_0\eta + \mathbf{f}\cdot A\nabla\eta + g_0\eta + h_0\eta_t)\,dt\,dx + \int\limits_{\Omega_{T_2}} q\eta\,dx + \\ + \int\limits_{\Sigma_3} \lambda\psi\eta\,ds, \quad \eta \in \overset{\circ}{C}{}^1_{0,\,\Sigma_1}(Q), \tag{1.25}$$

где f_0, $\mathbf{f}$, g_0, q, ψ — такие же функции, как и в (1.23), $h_0 \in L^2(Q)$, *причем эти функции можно выбрать так, что*

$$\|F\|_{\mathscr{Y}^*} = \sup\left\{\|f_0\|_{m',\,m_0',\,Q},\ \ldots,\right. \\ \left.\|f^n\|_{m_n',\,m_{0n}',\,Q},\ \|g_0\|_{2,\,Q},\ \|h_0\|_{2,\,Q},\ \|q\|_{2,\,\Omega_{T_2}},\ \|\psi\|_{L^2(\lambda,\,\Sigma_3)}\right\}. \tag{1.26}$$

Всякое выражение вида (1.25), *рассматриваемое при указанных выше условиях на f_0, $\mathbf{f}$, ψ, g_0, q, h_0, определяет некоторый линейный в пространстве $\mathscr{Y}$ функционал $\mathscr{F}$ с нормой $\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{Y}^*}$, не превосходящей величины, стоящей в правой части формулы* (1.26).

Обозначим через $\hat{\mathscr{H}}_\lambda$ пополнение множества $\overset{\circ}{C}{}^1_{0,\,\Sigma_1}(Q)$ по норме $\|u\|_{\mathscr{H}_\lambda} + \|u\|_{2,\,Q}$. Очевидно, что $\hat{\mathscr{H}}_\lambda \to \mathscr{H}_\lambda$.

Лемма 1.13. *Пространство $\mathscr{X}$ можно отождествить с некоторым подпространством в $\hat{\mathscr{H}}_\lambda \times L^2(\Omega_{T_2})$.*

Замечание 1.2. Пространство $\mathscr{X}$ нельзя отождествить с некоторым подпространством в $\hat{\mathscr{H}}_\lambda$ (см. доказательство замечания 5.2.1).

Лемма 1.14. *Пространство $\mathscr{Y}$ можно отождествить как с некоторым подпространством в $\hat{\mathscr{H}}_\lambda$, так и с некоторым подпространством в $\mathscr{X}$.*

Ввиду леммы 1.13 элементы $\mathbf{u} \in \mathscr{X}$ можно записывать в виде пар $\mathbf{u} = (u,\ \varphi)$, где $u \in \hat{\mathscr{H}}_\lambda$, а $\varphi \in L^2(\Omega)$. Ввиду леммы 1.14 элементы $\mathbf{u} \in \mathscr{Y}$ можно также записывать в виде пар $\mathbf{u}=(u, \varphi)$, $u \in \mathscr{H}_\lambda$, $\psi \in L^2(\Omega)$, однако в этом случае вторая компонента φ однозначно определяется первой компонентой u по формуле

$$\int\limits_{\Omega_{T_2}} \varphi\eta dx = -\iint\limits_{Q} (u_t\eta + u\eta_t)\, dt\, dx, \quad \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Omega_{T_1}}(Q), \tag{1.27}$$

которая выводится точно так же, как формула (5.2.20). Поэтому условимся в дальнейшем обозначать компоненту φ элемента $\mathbf{u}=(u, \varphi) \in \mathscr{Y}$ через $[u]_{\Omega_{T_2}}$. Тогда элементы $\mathbf{u} \in \mathscr{Y}$ можно записывать либо в виде $\mathbf{u}=(u, [u]_{\Omega_{T_2}})$, либо просто в виде функции $u \in \hat{\mathscr{H}}_\lambda$.

Очевидно, что из лемм 1.8, 1.11 и 1.12 вытекают следующие вложения:

$$\mathscr{X} \to \hat{\mathscr{H}}_\lambda \times L^2(\Omega_{T_2}), \quad \mathscr{Y} \to \mathscr{X}, \quad \mathscr{Y} \to \hat{\mathscr{H}}_\lambda \tag{1.28}$$

и

$$L^{m', m'_0}(Q) \to \mathscr{H}^*_\lambda \to \mathscr{X}^* \to \mathscr{Y}^*. \tag{1.29}$$

Ввиду (1.29) и существования общего плотного множества $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q})$ в $\mathscr{H}_\lambda$, $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и возможно одинаковое обозначение $\langle . , . \rangle$ для сопряжений между $\mathscr{H}_\lambda$ и $\mathscr{H}^*_\lambda$, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}^*$, $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Y}^*$.

Справедливо замечание, аналогичное замечанию 5.2.2, явную формулировку которого мы здесь опускаем.

Сформулируем, наконец, следующее очевидное утверждение.

Лемма 1.15. *Всякая функция $u \in \mathscr{Y}$ принадлежит пространству $C([T_1, T_2]; L^2(\Omega))$, причем*

$$\|u\|_{C([T_1, T_2]; L^2(\Omega))} \leqslant c\left(\|u\|_{2, Q} + \|u_t\|_{2, Q}\right), \tag{1.30}$$

где константа c не зависит от $u \in \mathscr{Y}$; для $\forall u \in \mathscr{Y}$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\iint\limits_{Q} u_t\eta dt dx = -\iint\limits_{Q} u\eta_t dt dx + \int\limits_{\Omega_{T_2}} u\eta dx - \int\limits_{\Omega_{T_1}} u\eta dx, \quad \forall \eta \in \tilde{C}^1(Q),$$

так что для $\forall u \in \mathscr{Y}$ значение $[u]_{\Omega_{T_2}}$, определенное по формуле (1.27), *совпадает со значением $u(x, T_2) \in L^2(\Omega)$.*

Рассмотрим линейный оператор $\mathscr{B} : \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q}) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*$, определенный по формуле

$$\langle \mathscr{B}u, \eta \rangle = -\iint\limits_{Q} u\eta_t dt dx + \int\limits_{\Omega_{T_2}} u\eta dx, \quad u, \ \eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q}). \tag{1.31}$$

По аналогии с результатами общего случая (см. § 2.2) устанавливаем следующие предложения.

Лемма 1.16. *При любых u, $\eta \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q})$ справедливо неравенство*

$$|\langle \mathscr{B}u, \eta \rangle| \leqslant \|u\|_{\mathscr{X}} \|\eta\|_{\mathscr{Y}}, \tag{1.32}$$

так что оператор $\mathscr{B} : \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q}) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*$ можно расширить по непрерывности на все пространство $\mathscr{X}$. Сужение расширенного оператора $\mathscr{B} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*$ на множество $\mathscr{Y}$ является линейным ограниченным оператором, действующим из $\mathscr{Y}$ в $\mathscr{X}^*$.

При доказательстве леммы 1.16 учитывается, что множество $\tilde{C}^1_{0,\Sigma\cup\Omega_{T_1}}(\bar{Q})$ плотно в $\mathscr{X}$, причем это утверждение доказывается точно так же, как утверждения леммы 1.10 (см. также доказательство леммы 5.2.3). С учетом леммы 1.10 доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.17. *Подпространство* $V \equiv \{\mathbf{u} \in \mathscr{X} : \mathscr{B}\mathbf{u} \in \mathscr{H}^*\}$ *можно отождествить с некоторым подпространством в* $\mathscr{H}_\lambda$.

При доказательстве леммы 1.17 (которое проводится вполне аналогично доказательству леммы 5.2.7) устанавливается, что вторая компонента $\varphi \in L^2(\Omega)$ элемента $\mathbf{u} = (u, \varphi) \in \mathscr{V}$ однозначно определяется его первой компонентой $u \in \hat{\mathscr{H}}_\lambda$ по формуле

$$\int\limits_{\Omega_{T_2}} \varphi\eta dx = - \lim_{\eta_n \to \eta \text{ в } \mathscr{H}_\lambda} \iint\limits_Q u(\eta_n - \eta)_t \, dtdx, \tag{1.33}$$

где η — произвольная функция из $\bar{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$, а $\{\eta_n\}$ — произвольная последовательность, составленная из функций $\eta_n \in \bar{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Omega_{T_2}}(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к η в $\mathscr{H}_\lambda$. Значение φ для элементов $(u, \varphi) \in \mathscr{V}$, определяемое формулой (1.33), условимся обозначать через $(u)_{T_2}$. Лемма 1.17 устанавливает отождествление записи $\left(u, (u)_{T_2}\right)$ с u для элементов из $\mathscr{V}$. При доказательстве леммы 1.17 устанавливается также, что сужение оператора $\mathscr{B} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*$ на множество $\mathscr{V}$ вполне определяется из формулы

$$\langle \mathscr{B}u, \eta \rangle = - \iint\limits_Q u\eta_t dtdx, \quad u \in \mathscr{V}, \quad \eta \in \bar{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Omega_{T_2}}(Q). \tag{1.34}$$

Аналогами лемм 5.2.8, 5.4.2 являются следующие леммы.

Лемма 1.18. *Функция* $u \in \hat{\mathscr{H}}_\lambda$ *принадлежит подпространству* $\mathscr{V}$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие:*

$$\begin{aligned} &1) \text{ существует такая последовательность } \{u_k\},\ u_k \in \bar{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q),\ k = \\ &= 1, 2, \ldots, \text{ что } \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{\mathscr{H}_\lambda} = 0, \quad \lim_{k,s\to\infty} \|u_k - u_s\|_{\mathscr{X}} = 0; \\ &2) \text{ для любой } \eta \in \bar{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Omega_{T_2}}(Q) \text{ и любой последовательности} \\ &\{\eta_k\},\ \eta_k \in \bar{C}^1_{0,\Sigma_1 \cup \Omega_{T_2}}(Q),\ k = 1, 2, \ldots, \text{ сходящейся к } \eta \text{ в } \mathscr{H}_\lambda, \\ &\text{справедливо равенство} \\ &\lim_{k\to\infty} \iint\limits_Q u(\eta_k - \eta)_t \, dtdx = 0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Лемма 1.19. *Для принадлежности функции* $u \in \bar{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$ *к подпространству* $\mathscr{V}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $u = 0$ *на* Ω_{T_1}.

Учитывая лемму 1.15, аналогичным образом устанавливаем следующее обобщение леммы 1.19.

Лемма 1.20. *Для принадлежности функции* $u \in \mathscr{Y}$ *к подпространству* $\mathscr{V}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $u = 0$ *на* Ω_{T_1}.

Далее в этом параграфе мы предполагаем, что выполнено условие:

$$\begin{aligned} &\text{матрица } A \text{ не зависит от } t, \text{ причем для матрицы } A \equiv A(x) \text{ в области } \Omega \\ &\text{выполнено условие (4.1.3); } m \geqslant 2,\ m_0 \geqslant 2,\ m_i \geqslant 2,\ m_{0i} \geqslant 2,\ i = 1, \ldots, n; \\ &\text{пространства } \mathscr{H}_\lambda \text{ и } \mathscr{H} \text{ изоморфны.} \end{aligned} \tag{1.36}$$

Заметим, что последнее условие в (1.36) об изоморфности $\mathscr{H}_\lambda$ и $\mathscr{H}$ заведомо выполнено, если для множества $\sigma_3 \subset \partial\Omega$ (напомним, что $\Sigma_3 = \sigma_3 \times \times (T_1, T_2)$) матрицы A и показателей m и $\mathbf{m}$ выполнено условие (4.2.25). Рассмотрим реализацию пространства U, определенного в § 7 гл. 4, получающуюся при следующем выборе пространств $B_0, B_1, \ldots, B_n$ $(N = n)$, множества G, операторов $l_k : G \subset B_0' \to B_k$, $k=1, \ldots, n$, и показателей $p_0, p_1, \ldots, p_k : B_0 = L^m(\Omega)$, $B_k = L^{m_k}(\Omega)$, $k=1, \ldots, n$, $G = \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\Omega) \subset \subset L^m(\Omega)$, а операторы $l_k : \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\Omega) \subset L^m(\Omega) \to L^{m_k}(\Omega)$, $k=1, \ldots, n$, определяются по формуле: $l_k u = A_k \nabla u$, $u \in \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\Omega)$, $p_0 = m_0$, $p_1 = m_1, \ldots, p_n = m_n$, причем ввиду (1.36) операторы l_k, $k=1, \ldots, n$, допускают замыкание. Обозначим через $\hat{B}$ (см. § 7 гл. 4) замыкание $\tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\bar{\Omega})$ по норме $\|u\|_{\hat{B}} \equiv \|u\|_H + \sum_{k=1}^{n} \|u\|_{m_k, \Omega}$, где $H \equiv \overset{0,\sigma_1}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$. Легко видеть, что все условия, необходимые для построения пространства U, выполнены. Таким образом, в данном случае пространство U есть банахово пространство функций из $([T_1, T_2] \to H)$, наделенное нормой $\|u\|_U = \|u\|_{m, m_0, Q} + \|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, Q}$.

Лемма 1.21. $U \equiv \mathscr{H}$.

Доказательство. Множество $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q})$ плотно в $\mathscr{H}$. Докажем, что $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q})$ плотно и в U. Из следствия 4.7.1 вытекает, что множество $C^\infty([T_1, T_2], H)$, где $H \equiv \overset{0,\sigma_1}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$, плотно в U. Но всякую функцию $u \in C^\infty([T_1, T_2], H)$ можно, как легко видеть, аппроксимировать многочленами вида $u_N = \sum_{k=0}^{m_N} v_{N,k} t^k$, где $v_{N,k} \in \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\bar{\Omega})$, по норме пространства U. Поскольку $u_N \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q})$, из доказанного следует, что $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q})$ плотно в U. Таким образом, пространства $\mathscr{H}$ и U совпадают, так как они имеют одинаковые нормы и общее плотное множество. Лемма 1.21 доказана.

Таким образом, $U = \mathscr{H}$, $U^* = \mathscr{H}^*$. Ввиду леммы 1.8 (в случае $\mathscr{H}_\lambda \equiv \mathscr{H}$) всякий элемент $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ определяется функцией $F(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{n} D_k^* F_k(t)$, где $F_0(t) \in L^{m_0'}([T_1, T_2]; L^{m'}(\Omega)) \to L^{m_0'}([T_1, T_2]; H^*)$, $F_k(t) \in L^{m_{0k}'}([T_1, T_2]; L^{m_k'}(\Omega))$, $D_k^* F_k(t) \in L^{m_{0k}'}([T_1, T_2]; H^*)$, $k=1, \ldots, n$, причем

$$\langle \mathscr{F}, \eta \rangle = \int_{T_1}^{T_2} (F(t), \eta(t))\, dt, \quad \eta \in \mathscr{H},$$

$$(f(t), \psi) = (F_0(t), \psi) + \sum_{k=1}^{n} (D_k^* F_k(t), \psi), \ (F_0(t), \psi) \equiv \int_\Omega F_0(t, x) \psi(x)\, dx, \quad (1.37)$$

$$(D_k^* F_k(t), \psi) = \int_\Omega F_k(t, x) A_k \nabla \psi\, dx, \quad k=1, \ldots, n, \quad \psi \in H.$$

Обозначим (в соответствии с (4.7.22)) через $\mathscr{W}$ следующее подпространство в $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{W} = \{u \in \mathscr{H} : u' \in \mathscr{H}^*\}, \tag{1.38}$$

где через u' обозначена производная от u в смысле распределений на $[T_1, T_2]$ со значением в банаховом пространстве H^*, где $H \equiv \overset{0,\sigma_1}{H}_{m,\mathbf{m}}(A, \Omega)$, т. е. отображение $\varphi(t) \to -\int_{T_1}^{T_2} u(t) \varphi'(t)\, dt$, $\varphi \in D([T_1, T_2])$.

Лемма 1.22. $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathscr{V}$. Учитывая лемму 1.17, заключаем, что $u \in \mathscr{H}$. Тогда функцию u можно рассматривать как элемент пространства $D^*([T_1, T_2]; H^*)$. Пусть u' — производная этого элемента. Для доказательства леммы достаточно установить существование функции $F(t) \in$ $\in ([T_1\ T_2] \to H^*)$ вида (1.37), такой, что

$$-\int_{T_1}^{T_2} u(t)\varphi'(t)\,dt = \int_{T_1}^{T_2} F(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in D([T_1,\ T_2]), \tag{1.39}$$

где интегралы понимаются как интегралы Бохнера от функций на $[T_1,\ T_2]$ со значениями в H. Тождество (1.39) равносильно тождеству

$$-\int_{T_1}^{T_2} (u(t),\ \varphi'(t)\psi)\,dt = \int_{T_1}^{T_2} (F(t),\ \varphi(t)\psi)\,dt,\ \varphi \in D([T_1,\ T_2]),\ \psi \in \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\bar{\Omega}), \tag{1.40}$$

поскольку $\tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\Omega)$ плотно в H. Но из определения подпространства $\mathscr{V}$ и леммы 1.17 следует, что существуют $f_0 \in L^{m',m_0'}(Q)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{m',m_0'}(Q)$, такие, что при любых $\eta = \varphi(t)\psi(x)$, $\psi \in \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\Omega)$, $\varphi \in D([T_1,\ T_2])$ (см. (1.37))

$$-\iint_Q u\eta_t\,dtdx = \iint_Q (f_0\eta + \mathbf{f}\cdot A\nabla\eta)\,dtdx, \tag{1.41}$$

т. е. (1.40) выполнено при $F(t) = f_0(t) + D_k^* f_k(t)$. Лемма 1.22 доказана.

Из перечисленных выше свойств элементов пространства $\mathscr{Y}$ вытекает также утверждение.

Лемма 1.23. $\mathscr{Y} \subset \mathscr{W}$.

Из лемм 1.22 и 1.23 и равенства (4.7.29) вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Для любых $u,\ v \in \mathscr{V} \cup \mathscr{Y}$ справедлива формула*

$$(u,\ v)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} [(u',\ v) + (u,\ v')]\,dt, \quad t_1,\ t_2 \in [T_1,\ T_2], \tag{1.42}$$

где $(.,.)$ — сопряжение между H и H^* и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, а u', v' — производные (в смысле распределений на $[T_1,\ T_2]$ со значениями в H^*) функций u и v.

Лемма 1.24. *Для любой функции $u \in \mathscr{V}$ справедливы равенства*

$$u(x,\ T_2) = (u)_{T_2}(x), \quad u(x,\ T_1) = 0 \ \text{п. в. в } \Omega, \tag{1.43}$$

где функция $\varphi = (u)_{T_2}$ определена по формуле (1.33).

Доказательство. Из формулы (1.33) вытекает, что

$$\int_{\Omega_{T_2}} (u)_{T_2}\eta\,dx = -\lim_{\eta_n \to \eta \text{ в } \mathscr{H}} \iint_Q u(\eta_n - \eta)_t\,dtdx, \quad \eta \in \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(Q), \tag{1.44}$$

где $\{\eta_n\}$, $\eta_n \in \tilde{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Omega_{T_2}}(Q)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, — последовательность, сходящаяся к η в $\mathscr{H}$. Используя лемму 1.22 и формулу (1.42), перепишем (1.44) в виде:

$$((u)_{T_2},\ \eta(T_2)) = \lim_{\eta_n \to \eta} \Bigg[\int_{T_1}^{T_2} (u',\ \eta_n - \eta)\,dt - (u(T_2),\ (\eta - \eta_n)(T_2)) - \\ - (u(T_1),\ (\eta - \eta_n)(T_1))\Bigg]. \tag{1.45}$$

Учитывая, что $\int\limits_{T_1}^{T_2}(u', \eta_n-\eta)\,dt=\langle u', \eta_n-\eta\rangle$, где $u'\in\mathscr{H}^*$ и $\eta_n\to\eta$ в $\mathscr{H}$, а также что $\eta_n(T_2)=0$, $n=1, 2, \ldots$, выведем из (1.45) равенство

$$((u)_{T_2}, \eta(T_2))=(u(T_2), \eta(T_2))-\lim_{\eta_n\to\eta \text{ в } \mathscr{H}}(u(T_1), (\eta-\eta_n)(T_1)). \quad (1.46)$$

Ввиду произвола η и $\{\eta_n\}$ из (1.46) следует, что $(u)_{T_2}=u(T_2, x)$ при п. в. $x\in\Omega$. Но тогда из (1.46) вытекает, что

$$\lim_{\eta_n\to\eta \text{ в } \mathscr{H}}(u(T_1), (\eta-\eta_n)(T_1))=0. \quad (1.47)$$

Снова используя произвол выбора η и $\{\eta_n\}$, выведем из (1.47), что $u(x, T_1)=0$ п. в. в Ω. Лемма 1.24 доказана.

Лемма 1.25. *Для любых функций $u\in\mathscr{V}$, $\eta\in\mathscr{V}\cup\mathscr{Y}$ справедливы равенства*

$$\langle\mathscr{B}u, \eta\rangle=-\int\limits_{T_1}^{T_2}(u, \eta')\,dt+(u(T_2), \eta(T_2))=\int\limits_{T_1}^{T_2}(u', \eta)\,dt, \quad (1.48)$$

где $u'\in\mathscr{H}^*$ есть производная от функции u, рассматриваемой как элемент пространства $\mathscr{D}^*([T_1, T_2]; H^*)$.

Доказательство. Пусть $u\in\mathscr{V}$, $\eta\in\mathring{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$. Из определения оператора $\mathscr{B}:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}^*$ и леммы 1.24 легко следует, что

$$\langle\mathscr{B}u, \eta\rangle=-\iint\limits_{Q}u\eta_t\,dt\,dx+\int\limits_{\Omega_{T_2}}(u)_{T_2}\eta\,dx=$$

$$=-\int\limits_{T_1}^{T_2}(u, \eta')\,dt+(u(T_2), \eta(T_2)). \quad (1.49)$$

Ввиду леммы 1.23 формула (1.49) верна и для $\forall u\in\mathscr{Y}$, $u(T_1)=0$. Используя формулу (1.42) при $u=v$, $t_1=T_1$, $t_2=T_2$ и учитывая (1.43), замечаем, что правую часть в (1.43) можно переписать в виде $\int\limits_{T_1}^{T_2}(u', \eta)\,dt$. Таким образом, равенства (1.48) установлены для любых $u\in\mathscr{V}$, $\eta\in\mathring{C}_{0,\Sigma_1}(Q)$. Пусть теперь $u\in\mathscr{V}$, $\eta\in\mathscr{V}\cup\mathscr{Y}$. Поскольку $\mathscr{V}\cup\mathscr{Y}\subset\mathscr{H}$, существует последовательность $\{\eta_n\}$, $\eta_n\in\mathring{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$, $n=1, 2\ldots$, сходящаяся к η в $\mathscr{H}$. Переходя тогда к пределу в равенствах

$$\langle\mathscr{B}u, \eta_n\rangle=\int\limits_{T_1}^{T_2}(u', \eta_n)\,dt,\ n=1, 2, \ldots, \quad (1.50)$$

с учетом того, что $\mathscr{B}u\in\mathscr{H}^*$ и $u'\in\mathscr{H}^*$, получим:

$$\langle\mathscr{B}u, \eta\rangle=\int\limits_{T_1}^{T_2}(u', \eta)\,dt. \quad (1.51)$$

Применяя формулу (1.42) с учетом (1.43), можно переписать правую часть в (1.51) и в виде $-\int\limits_{T_1}^{T_2}(u, \eta')\,dt+(u(T_2), \eta(T_2))$. Лемма 1.25 доказана.

Лемма 1.26. *Для любой функции $u\in\mathscr{V}$ справедливо равенство*

$$\langle\mathscr{B}u, u\rangle=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}u^2(x, T_2)\,dx. \quad (1.52)$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathscr{V}$. Из леммы 1.25 вытекает, что

$$\langle \mathscr{B}u, u \rangle = \int_{T_1}^{T_2} (u', u)\, dt, \tag{1.53}$$

а из формул (1.42) и (1.43) —

$$\int_{T_1}^{T_2} (u', u)\, dt = \frac{1}{2} (u(T_2), u(T_2)). \tag{1.54}$$

Тогда (1.52) вытекает из (1.53) и (1.54). Лемма 1.26 доказана.

Следствие 1.2. *Для оператора $\mathscr{B}: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*$ справедливо условие вида* (4.6.11), *т. е. функция $v \to \langle \mathscr{B}v, v \rangle$, $v \in \mathscr{V}$, непрерывна относительно нормы пространства $\mathscr{X}$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что для функции $v \in \mathscr{V}$

$$\| v \|_{\mathscr{X}} = \| v \|_{m, m_0, Q} + \| A \nabla v \|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, Q} + \| v(x, T_2) \|_{2, \Omega}. \tag{1.55}$$

Действительно, пусть $v \in \mathscr{V}$ и последовательность $\{v_n\}$, $v_n \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в себе в $\mathscr{X}$ и к v в $\mathscr{H}$. Тогда

$$\| v \|_{\mathscr{X}} = \lim_{n \to \infty} \| v_n \|_{\mathscr{X}} = \| v \|_{m, m_0, Q} + \| A \nabla v \|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, Q} + \| (v)_{T_2} \|_{2, \Omega}. \tag{1.56}$$

Но ввиду (1.43) $(v)_{T_2} = v(x, T_2)$ п. в. в Ω, откуда и следует (1.55). Из (1.52) и (1.55) немедленно следует справедливость условия вида (1.6.22). Следствие 1.2 доказано.

В дальнейшем мы будем использовать также следующее предположение.

Лемма 1.27. *Усреднение u_h произвольной функции $u \in \mathscr{W}$, определенное по формуле*

$$u_h(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(t - \tau)\, \hat{u}(\tau, x)\, d\tau, \tag{1.57}$$

где ядро $\omega_h(\eta)$ определено по формуле (4.7.4), *а функция $\hat{u}(t, x)$ — по формуле*

$$\hat{u}(t, x) = \begin{cases} u(T_1 + \tau, x) & \text{при } t = T_1 - \tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T,\ x \in \Omega, \\ u(t, x) & \text{при } t \in [T_1, T_2],\ x \in \Omega, \\ u(T_2 - \tau, x) & \text{при } t = T_2 + \tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T,\ x \in \Omega, \\ 0 & \text{при } t \bar{\in} [T_1 - T, T_2 + T], \end{cases} \tag{1.58}$$

где $T = T_2 - T_1$, принадлежит пространству $\mathscr{Y} \subset \mathscr{W}$ и сходится к u в $\mathscr{W}$ и в $C([T_1, T_2]; L^2(\Omega))$, т. е.

$$\lim_{h \to 0} \| u_h - u \|_{\mathscr{H}} = \lim_{h \to 0} \| u'_h - u' \|_{\mathscr{H}^*} = \lim_{h \to 0} \| u_h - u \|_{C([T_1, T_2]; L^2(\Omega))} = 0. \tag{1.59}$$

Доказательство. Ввиду леммы 4.7.5 и следствия 4.7.2 достаточно убедиться в том, что $u_h \in \mathscr{Y}$. Для доказательства этого рассмотрим последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к u в $\mathscr{X}$, и убедимся, что последовательность $\{u_{nh}\}$, где u_{nk} принадлежит, очевидно, к $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$, сходится при $n \to \infty$ к u_h в $\mathscr{Y}$ (при любом фиксированном $h \in (0, T)$). Учитывая, что матрица A не зависит от t, получим неравенства

$$\|A_i \nabla (u_{nh} - u_h)\|^{m_i}_{m_i, Q} \leqslant$$
$$\leqslant c \sup_{\substack{\tau' \in [-h, h] \\ i=1, \ldots, n}} \iint_Q |A_i \nabla (\hat{u}_n(t-\tau', x) - \hat{u}(t-\tau', x))| \, dtdx, \qquad (1.60)$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от n. Ввиду сходимости u_n к u в $\mathscr{H}$ из (1.60) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_i \nabla (u_{nh} - u_h)\|_{m_i, m_{0i}, Q} = 0$. Совершенно аналогичным образом доказывается равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_{nh} - u_h\|_{m, m_0, Q} = 0$.

Докажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{nht} - u_{ht}\|_{2, Q} = 0. \qquad (1.61)$$

Оценим

$$\|u_{nht} - u_{ht}\|^2_{2, Q} = \iint_Q dtdx \left| \int_{-h}^{h} \omega_h(\tau') [\hat{u}_h(t-\tau', x) - \hat{u}(t-\tau', x)] \, d\tau' \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-h}^{h} d\tau' \iint_Q [\hat{u}_h(t-\tau', x) - \hat{u}(t-\tau', x)]^2 \, dtdx \leqslant$$
$$\leqslant c(h) \sup_{\tau' \in [-h, h]} \iint_Q [\hat{u}_n(t-\tau', x) - \hat{u}(t-\tau', x)]^2 \, dtdx. \qquad (1.62)$$

Из (1.62) ввиду сходимости u_n к u в $L^2(Q)$, вытекающей из сходимости u_n к u в $\mathscr{X}$, и следует (1.61). Докажем, наконец, равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{nh} - u_h\|_{2, \Omega_{T_2}} = 0. \qquad (1.63)$$

Это равенство легко следует из оценки

$$\|u_{nh} - u_h\|_{C([T_1, T_2])} \leqslant c \left(\|u_{nh} - u_h\|_{2, Q} + \|u_{nht} - u_{ht}\|_{2, Q} \right), \qquad (1.64)$$

где c не зависит от u_{nh} и u_h, и доказанных выше фактов (в частности, учитывается, что $m \geqslant 2$, $m_0 \geqslant 2$). Отсюда, очевидно, и следует, что $u_h \in \mathscr{Y}$ при любом $h \in (0, T)$. Лемма 1.27 доказана.

Следствие 1.3. *Множество $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$ плотно в $\mathscr{W}$.*

Доказательство. Из леммы 1.27 вытекает, что множество $\mathscr{Y}$ плотно в $\mathscr{W}$. Но из определения пространства $\mathscr{Y}$ следует, что множество $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$ плотно в $\mathscr{Y} \subset \mathscr{W}$. Тем более $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$ плотно в $\mathscr{Y}$ по норме пространства $\mathscr{W}$. Следовательно, $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q})$ и плотно в $\mathscr{W}$. Следствие 1.3 доказано.

В частности, из следствия 1.3 вытекает, очевидно, следующее утверждение.

Следствие 1.4. *Множество $\tilde{C}^1_{0,\Sigma_1}(\bar{Q})$ плотно в множестве $\mathscr{W} \supset \mathscr{V}$ относительно нормы $\|u\| \equiv \|u\|_{C([T_1, T_2]; L^2(\Omega))} + \|u\|_{\mathscr{H}}$.*

§ 2. Общая краевая задача для $(A, 0, m, \mathrm{m})$-параболических уравнений

Рассмотрим в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$, где Ω — ограниченная область класса $\tilde{C}^{(1)}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, уравнение

$$u_t - \frac{d}{dx_i} l^i(t, x, u, \nabla u) + l_0(t, x, u, \nabla u) = f(t, x). \qquad (2.1)$$

Будем говорить, что уравнение вида (2.1) имеет пространственную $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-структуру в Q, если существуют такие квадратная матрица $A \equiv \equiv \| a^{ij}(t, x) \|$ порядка n, удовлетворяющая условиям (1.1), (1.2) при $m > 1$, $m_0 = m$, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, и функции $l'^i(t, x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, $l'_0(t, x, u, q)$, удовлетворяющие в $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условию Каратеодори, что при п. в. $(t, x) \in Q$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\mathbf{l}(t, x, u, p) = A^* \mathbf{l}'(t, x, u, Ap), \quad l_0(t, x, u, p) = l'_0(t, x, u, Ap), \quad (2.2)$$

где A^* — матрица, сопряженная с A, $\mathbf{l} \equiv (l', \ldots, l^n)$, $\mathbf{l}' \equiv (l'^1, \ldots, l'^n)$, и неравенства

$$\begin{gathered} |l'^i(t, x, u, q)| \leqslant \mu_1 \left(\sum_{k=1}^n |q_k|^{m_k/m'_i} + |u|^{m/m'_i} + \varphi_i(t, x) \right), \ i = 1, \ldots, n, \\ |l'_0(t, x, u, q)| \leqslant \mu_2 \left(\sum_{k=1}^n |q_k|^{m_k/m'} + |u|^{m/m'} + \varphi_0(t, x) \right), \end{gathered} \quad (2.3)$$

причем $\mu_1, \mu_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\varphi_i \in L^{m'_i}(Q)$, $1/m_i + 1/m'_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\varphi_0 \in \in L^{m'}(Q)$, $1/m + 1/m' = 1$.

Уравнение вида (2.1), имеющее пространственную $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-структуру в Q, будем называть $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболическим в Q, если при п. в. $(t, x) \in Q$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $q = Ap$, $p \in \mathbb{R}^n$ выполнено условие

$$\frac{\partial l'^i(t, x, u, q)}{\partial q_j} \xi_i \xi_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^n |q_i|^{m_i - 2} \xi_i^2, \quad \nu = \mathrm{const} > 0, \quad (2.4)$$

причем показатели $m_1, \ldots, m_n$ в (2.3) и (2.4) совпадают.

Очевидно, что всякое уравнение вида (2.1), имеющее в цилиндре $Q \subset \subset \mathbb{R}^{n+1}$ пространственную $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-структуру [являющееся $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-параболическим в Q уравнением], имеет и $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{m}, \tilde{\mathbf{m}})$-структуру в области $\tilde{\Omega} \equiv Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ [является и $(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{m}, \tilde{\mathbf{m}})$-эллиптическим в $\tilde{\Omega} \equiv Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ уравнением] относительно матрицы $\tilde{A} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \ldots 0 \\ \hline \vdots & A \\ 0 & \end{array} \right\|$ порядка $n+1$, $(n+1)$-мерного вектора $\tilde{\mathbf{b}} = (1, 0, \ldots, 0)$, показателей $\tilde{m} = m$, $\tilde{\mathbf{m}} = (m_0, m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 = 2$ и приведенных коэффициентов $\tilde{l}'^i(\tilde{x}, u, \tilde{q})$, $i = 1, \ldots, n+1$, $\tilde{l}'_0(\tilde{x}, u, \tilde{q})$, где $\tilde{x} = (t, x)$, $\tilde{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$, $\tilde{l}'^1 = q_0$, $\tilde{l}'^i = l'^{(i-1)}(t, x, u, q)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\tilde{l}'_0 = l'_0(t, x, u, q)$.

Рассмотрим для уравнения (2.1), имеющего пространственную $(A, \mathbf{0}, m, \mathbf{m})$-структуру в Q, общую краевую задачу вида (5.3.1), которая принимает здесь следующий вид:

$$\begin{gathered} u_t - \frac{d}{dx_i} l^i(t, x, u, \nabla u) + l_0(t, x, u, \nabla u) = \mathcal{F} \text{ в } Q, \\ u = 0 \text{ на } \Sigma_1 \cup \Omega_{T_1}, \ \mathbf{l}' \cdot A\nu = 0 \text{ на } \Sigma_2, \ \mathbf{l}' \cdot A\nu - \lambda u = 0 \text{ на } \Sigma_3, \end{gathered} \quad (2.5)$$

где $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, — правильная часть границы ∂Q цилиндра Q (см. (1.17) при $m = m_0$, $m_i = m_{0i}$, $i = 1, \ldots, n$). Часть $\Sigma'_{0,-} \equiv \equiv (\sigma' \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_2}$ остается свободной от задания на ней граничных условий. Далее под $\mathcal{H}_\lambda$, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ понимаем пространства (см. § 1), построенные по матрице A, показателям m, m_0, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_0$ (при $m_0 = m$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}$), характеризующим структуру уравнения (2.5), и множествам Σ_1, Σ_3, а также по функции λ, заданной на Σ_3. Предполагается, что функция λ кусочно-непрерывна, ограничена и положительна на Σ_3. Напомним еще, что множества Σ_i имеют вид $\Sigma_i = \sigma_i \times (T_1, T_2)$, $i = 1, 2, 3$. В соответствии с общим случаем (см. § 5.2) оператор $\mathscr{L}: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*$, соответствующий задаче (2.5), имеет вид

$$
\begin{gathered}
\mathscr{L} = \mathscr{A} + \mathscr{B}, \quad \mathscr{A}: \mathscr{X} \to \mathscr{H}_\lambda^* \subset \mathscr{Y}^*, \quad \mathscr{B}: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*, \\
\langle \mathscr{A} u, \eta \rangle = \iint\limits_Q [\mathbf{l}'(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + \\
+ l_0'(t, x, u, A\nabla u)\eta]\, dtdx + \int\limits_{\Sigma_3} \lambda u \eta ds, \qquad (2.6)\\
\langle \mathscr{B} u, \eta \rangle = -\iint\limits_Q u\eta_t dtdx + \int\limits_{\Omega_{T_2}} u\eta dx,
\end{gathered}
$$

причем в формулах (2.6) $u \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(Q)$, $\eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(Q)$ (очевидно, что значениями $\langle \mathscr{L} u, \eta \rangle$ при таких u, η оператор $\mathscr{L}: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*$ определяется вполне). Далее мы будем в этом параграфе всегда предполагать, что выполнено условие (1.36) в случае $m_0 = m$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}$. В этом случае оператор $\mathscr{L}: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}^*$ можно определить в виде (см. леммы 1.17 и 1.25)

$$
\begin{gathered}
\langle \mathscr{L} u, \eta \rangle = \int\limits_{T_1}^{T_2} (u', \eta)\, dt + \iint\limits_Q (\mathbf{l}'(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + \\
+ l_0'(t, x, u, A\nabla u)\eta)\, dtdx + \int\limits_{\Sigma_3} \lambda u\eta ds, \quad u \in V, \quad \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(Q), \qquad (2.7)
\end{gathered}
$$

где $(.,.)$ — сопряжение между $H \equiv H_{m, \mathbf{m}}(A, \Omega)$ и H^*, а u' — производная от функции u как элемента пространства $\mathscr{D}^*([T_1, T_2]; H^*)$.

Обобщенное решение задачи (2.5) можно определить тогда (см. § 5.3, и в частности предложение 5.3.1) как всякую функцию $u \in \mathscr{W}_0$, где $\mathscr{W}_0 \equiv \{u \in \mathscr{H}: u' \in \mathscr{H}^*, u(T_1) = 0\}$, удовлетворяющую тождеству

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{T_1}^{T_2} (u', \eta)\, dt + \iint\limits_Q (\mathbf{l}' \cdot A\nabla\eta + l_0'\eta)\, dtdx + \int\limits_{\Sigma_3} \lambda u|_{\tilde{\Sigma}} \eta ds = \langle \mathscr{F}, \eta \rangle, \\
\forall \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(Q),
\end{gathered} \qquad (2.8)
$$

причем $\tilde{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_3$, а $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$. Заметим, что ввиду вложения $\mathscr{W} \subset \mathscr{H}$ и изоморфности $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_\lambda$ функции $u \in \mathscr{W}_0$ автоматически имеют обобщенные предельные значения на множестве $\tilde{\Sigma} \equiv \Sigma_1 \cup \Sigma_3$ (см. § 5.3), причем $u|_{\tilde{\Sigma}} \in L^1_{\text{loc}}(\tilde{\Sigma}) \cap L^2(\lambda, \Sigma_3)$. Заметим, что определение обобщенного решения задачи (2.5), данное выше, эквивалентно определению, вытекающему из общего определения, данного в § 3 гл. 5, поскольку справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. $\mathscr{W}_0 = \mathscr{V}$.

Доказательство. Ввиду лемм 1.22 и 1.24 $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}_0$. Докажем обратное включение $\mathscr{W}_0 \subset \mathscr{V}$. Пусть $u \in \mathscr{W}_0 \subset \mathscr{H}$. Ввиду следствия 1.3 существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к u в $\mathscr{W}$, а следовательно, и в $\mathscr{X}$. С другой стороны, ввиду равенства вида (4.7.29) для элементов пространства $\mathcal{W}$ при любых $\eta\in\bar{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Omega_{T_2}}(Q)$ и $\{\eta_k\}$, $\eta_k\in\bar{C}^1_{0,\Sigma_1\cup\Omega_{T_2}}(Q)$, $k=1, 2, \ldots$, таких, что $\eta_k\to\eta$ в $\mathcal{H}$, справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty}\iint_Q u(\eta_k-\eta)_t\,dtdx=\lim_{k\to\infty}\int_{T_1}^{T_2}(u',\ \eta_k-\eta)\,dt=0.$$

Но тогда из леммы 1.18 следует, что $u\in\mathcal{V}$. Предложение 2.1 доказано.

В дальнейшем вместо $u|_\Sigma$ в интеграле по Σ_3 будем писать просто u.

Лемма 2.1. *Пусть $u\in\mathcal{W}_0$ — некоторое обобщенное решение задачи* (2.5). *Тогда при любых значениях τ_1, $\tau_2\in[T_1,\ T_2]$ справедливо тождество*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}(u',\ \eta)\,dt+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega(\mathbf{l}'\cdot A\nabla\eta+l_0'\eta)\,dtdx+\int_{\sigma_3\times(\tau_1,\tau_2)}\lambda u\eta ds=\int_{\tau_1}^{\tau_2}(F(t),\ \eta)\,dt, \tag{2.9}$$

$$\forall\eta\in\overset{0,\Sigma_1}{\mathcal{H}}_{m,m}(A,\ Q),$$

где $F(t)\equiv\mathcal{F}\in\mathcal{H}^*$.

Доказательство. Пусть $u\in\mathcal{V}$ — некоторое решение задачи (2.5) при $\mathcal{F}\in\mathcal{H}^*$. Для такой функции тождество вида (2.9) справедливо при $\tau_1=T_1$, $\tau_2=T_2$. Положим в (2.9) $\eta=\Phi(t,\ x)\zeta_k(t)$, где $\Phi(t,\ x)\in\bar{C}^1_{0,\sigma_1\times(T_1,T_2)}(\bar{Q})$, а $\zeta_k\in C^1_0(T_1,\ T_2)$, $k=1, 2, \ldots$, причем последовательность $\{\zeta_k\}$ сходится на $[T_1,\ T_2]$ к непрерывной на $[T_1,\ T_2]$ функции $\zeta(t)=\zeta_{\varepsilon,\tau_1,\tau_2}(t)$, равной 1 в $(\tau_1+\varepsilon/2,\ \tau_2-\varepsilon/2)$, линейной в $(\tau_1-\varepsilon/2,\ \tau_1+\varepsilon/2)$ и $(\tau_2-\varepsilon/2,\ \tau_2+\varepsilon/2)$ и равной 0 в $(T_1,\ \tau_1-\varepsilon/2)$ и $(\tau_2+\varepsilon/2,\ T_2)$, где $T_1<\tau_1-\varepsilon/2<\tau_1+\varepsilon/2<\tau_2-\varepsilon/2<\tau_2<\tau_2+\varepsilon/2<T_2$, $\varepsilon>0$. Кроме того, предположим, что $\partial\zeta_k/\partial t$ стремится к $\partial\zeta/\partial t$ в $L^{m'}([T_1,\ T_2])$. (В качестве ζ_k можно взять, например, усреднения функции ζ с шагом $h=c/k$, $c=\text{const}$). Тогда из (2.9) следует тождество

$$\begin{gathered}\iint_Q(\mathbf{l}'\cdot A\nabla\Phi+l_0'\Phi)\zeta_k dtdx+\int_{\sigma_3\times(T_1,T_2)}\lambda u\Phi\zeta_k ds-\\ -\iint_Q(u\Phi_t\zeta_k+u\Phi\zeta'_{kt})\,dtdx=\langle\mathcal{F},\ \Phi\zeta_k\rangle,\quad k=1, 2, \ldots\end{gathered} \tag{2.10}$$

Устремляя k к ∞ и применяя теорему Лебега, получим тождество

$$\begin{gathered}\iint_Q(\mathbf{l}'\cdot A\nabla\Phi+l_0'\Phi)\zeta dtdx+\int_{\Sigma_3}\lambda u\Phi\zeta ds-\iint_Q(u\Phi_t\zeta+u\Phi\zeta')\,dtdx=\\ =\int_{T_1}^{T_2}(F,\ \Phi\zeta)\,dt,\quad \Phi\in\bar{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q).\end{gathered} \tag{2.11}$$

Устремляя в таком тождестве ε к 0 и снова используя теорему Лебега, а также учитывая, что ввиду непрерывности функции u в $L^2(\Omega)$ на $[T_1,\ T_2]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}1/\varepsilon\int_{\tau-\varepsilon/2}^{t+\varepsilon/2}u\Phi dtdx=\int_\Omega u\Phi dx\,\Big|^{t=\tau},\quad \tau\in[T_1,\ T_2],$$

получим справедливость (2.9) при $\forall\eta\in\bar{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$. Учитывая плотность $\bar{C}^1_{0,\Sigma_1}(Q)$ в $\mathcal{H}$ и линейность выражения (2.9) по η, выводим отсюда справедливость (2.9) и при $\forall\eta\in\mathcal{H}$. Лемма 2.1 доказана.

Результаты по разрешимости общей краевой задачи вида (2.5) определяются теоремами 5.4.1—5.4.5 общего случая; леммой 1.20 и следствием 1.2, приводящим к выполнимости условий вида (4.6.10) и (4.6.11); леммами 1.10 и 1.25, гарантирующими справедливость условий (5.2.25) и (5.4.1); а также алгебраическими критериями коэрцитивности, монотонности оператора $\mathscr{L}:\mathscr{X}\to\mathscr{J}^*$, вытекающими из предположений 5.4.3—5.4.6. Кроме того, мы будем использовать следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Предположим, что при всех* $t\in[T_1, T_2]$ *оператор* $A_t: H\to H^*$, *где* $H=\overset{0,\sigma_1}{H}_{m,\mathrm{m}}(A;\ \Omega,\ \Sigma_3,\ \lambda)$, *определенный по формуле*

$$\langle A_t u,\ \eta\rangle=\int\limits_{\Omega}[\mathbf{l}'(t,\ x,\ u,\ A\nabla u)\cdot A\nabla\eta+l_0'(t,\ x,\ u,\ A\nabla u)\eta]\,dx+$$

$$+\int\limits_{\sigma_3}\lambda u\eta ds,\quad \eta\in H, \tag{2.12}$$

монотонен. Тогда при $\forall\mathscr{F}\in\mathscr{H}^*$ *задача* (2.5) *имеет не более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Пусть $u_1,\ u_2\in\mathscr{W}$ — какие-нибудь два обобщенных решения задачи (2.5). Для каждой из функций u_1, u_2 справедливо тождество вида (2.9) при $\tau_1=T_1$, $\tau_2=t$, $t\in(T_1,\ T_2]$. Полагая в тождестве для функции u_i $\eta=u_i\,(i=1,\ 2)$ и вычитая из получившегося для u_1 равенства аналогичное равенство для u_2, получим с учетом лемм 2.1 и 1.25 равенство

$$\int\limits_0^t\langle A_\tau u_1-A_\tau u_2,\ u_1-u_2\rangle d\tau+\|u_1-u_2\|_{L^2(\lambda,\ (\Sigma_3)_t)}+\frac{1}{2}\|u_1-u_2\|_{2,\ \Omega_t}=0, \tag{2.13}$$

где $(\Sigma_3)_t=\sigma_3\times(T_1,\ t)$. Из (2.13) ввиду монотонности операторов A_τ, $\tau\in[T_1,\ T_2]$, следует, что $\|u_1-u_2\|_{2,\Omega_t}=0$, $t\in[T_1,\ T_2]$, т. е. $u_1=u_2$ п. в. в Q. Лемма 2.2 доказана. Это позволяет сформулировать, в частности, следующие результаты.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2), (1.17), (1.36), *и пусть при п. в.* $(t,\ x)\in Q$ *и любых* $u\in\mathbb{R}$, $\xi_0\in\mathbb{R}$, $q=Ap$, $p\in\mathbb{R}^n$, $\eta=A\xi$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ *справедливы неравенства*

$$l'^i(t,\ x,\ u,\ q)q_i+l_0'(t,\ x,\ u,\ q)u\geqslant\nu_1\sum_{i=1}^n|q_i|^{m_i}+\nu_2|u|^m-\varphi(t,\ x), \tag{2.14}$$

где $\nu_1,\ \nu_2=\mathrm{const}>0$, $\varphi\in L^1(Q)$ *и*

$$\frac{\partial l'^i(t,\ x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j+\frac{\partial l'^i(t,\ x,\ u,\ q)}{\partial u}\xi_0\eta_i+$$

$$+\frac{\partial l_0'(t,\ x,\ u,\ q)}{\partial q_j}\eta_j\xi_0+\frac{\partial l_0'(t,\ x,\ u,\ q)}{\partial u}\xi_0^2\geqslant 0. \tag{2.15}$$

Тогда при $\forall\mathscr{F}\in\mathscr{H}^*$ *задача* (2.5) *имеет точно одно обобщенное решение.*

Доказательство. Поскольку, как уже отмечалось, в рассматриваемом здесь случае условия вида (4.6.9), (4.6.10) и (4.6.11) выполнены и учитывая, что из неравенства (2.15) следует (см. предложение 5.4.5) монотонность операторов вида (2.12), а из неравенства (2.14) — коэрцитивность оператора $\mathscr{L}:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}^*$ (см. предложение 5.4.4), то из теоремы 5.4.1 и леммы 2.2 и следует результат теоремы 2.1. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2). (1.17), (1.36), *и пусть при п. в.* $(t, x) \in Q$ *и любых* $u \in \mathbb{R}$, $\eta = A\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $q = Ap$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial l'^i(t, x, u, q)}{\partial q_j}\eta_i\eta_j + \frac{\partial l'^i(t, x, u, q)}{\partial u}\xi_0\eta_i + \frac{\partial l'_0(t, x, u, q)}{\partial q_j}\eta_j\xi_0 +$$
$$+\frac{\partial l'_0(t, x, u, q)}{\partial u}\xi_0^2 \geqslant \alpha_0\left[\sum_{i=1}^n |q_i|^{m_i-2}\eta_i^2 + (|u|^{m-2}+1)\xi_0^2\right],$$
$$\alpha_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{2.16}$$

Тогда при $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{H}^*$ *задача* (2.5) *имеет точно одно обобщенное решение. Более того, сужение* $\mathcal{L}|: \mathcal{V}| \subset \mathcal{X} \to \mathcal{H}^* \subset \mathcal{Y}^*$ *оператора* $\mathcal{L}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^*$ *на множество* $\mathcal{V}$ *есть гомеоморфизм.*

Доказательство. Результат теоремы 2.2 непосредственно вытекает из теоремы 5.4.4 и аналога предложения 5.4.6.

Теорема 2.3. *При* $m = 2$ *результат теоремы* 2.1 *сохранится и при замене положительной константы* ν_2 *в* (2.14) *на любую отрицательную константу.*

Теорема 2.4. *При* $m = 2$ *результат теоремы* 2.2 *сохранится, если неравенство* (2.16) *заменить неравенством*

$$\frac{\partial l'^i}{\partial q_j}\eta_i\eta_j + \frac{\partial l'^i}{\partial u}\eta_i\xi_0 + \frac{\partial l'^i}{\partial q_j}\eta_j\xi_0 + \frac{\partial l'_0}{\partial u}\xi_0^2 \geqslant \alpha_0\sum_{i=1}^n |q_i|^{m_i-2}\eta_i^2 - \beta_0\xi_0^2, \tag{2.17}$$

где $\alpha_0 = \mathrm{const} > 0$, $\beta_0 = \mathrm{const} > 0$.

Результаты теорем 2.3 и 2.4 вытекают из теорем 2.1 и 2.2 ввиду того, что условия теорем 2.3 и 2.4 сводятся к условиям теорем 2.1 и 2.2 путем введения новой неизвестной функции по формуле $u = e^{\gamma t}\bar{u}$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$.

В теоремах 2.1—2.4 постулировались допустимость матрицы A, правильность части $\Sigma = \sigma \times (T_1, T_2)$ и особость части $\Sigma' = \sigma' \times (T_1, T_2)$. В § 1 были приведены достаточные условия выполнимости этих предположений. Для удобства читателей мы с учетом таких условий приводим здесь следующий вариант результатов теорем 2.1—2.4.

Теорема 2.5. *Пусть уравнение* (2.1) *имеет пространственную* $(A, 0, m, \mathbf{m})$*-структуру в цилиндре* Q, *причем для матрицы* $A = A(x)$ *выполнены условия*

$$a^{ij} \in L^{m_i}(\Omega),\ i, j = 1, \ldots, n;\ a^{ij}, \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j} \in L^{m'}(\Omega),\ \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1. \tag{2.18}$$

Предположим также, что выполнено условие (1.36). *Пусть* $\partial\widetilde{\Omega} = \sigma \cup \sigma'$, *причем для множества* σ *выполнено условие* (4.2.5), *а для* σ' — *условие* (4.3.2) (*относительно матрицы* $A = A(x)$, m *и* $\mathbf{m}$). *Пусть, наконец, выполнены условия* (2.14), (2.15). *Тогда при* $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{H}^*$ *задача* (2.5) (*при* $\Sigma = \sigma \times (T_1, T_2)$, $\Sigma' = (\sigma' \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}$) *имеет точно одно обобщенное решение. Если вместо* (2.14), (2.15) *выполнено неравенство* (2.16), *то такое решение непрерывно в* $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ *зависит от* $\mathcal{F} \in \mathcal{H}^* \subset \mathcal{Y}^*$. *При* $m = 2$ *в условии* (2.14) *можно считать, что* ν_2 — *любая константа, а условие* (2.16) *заменить менее жестким условием* (2.17).

§ 3. $(A, 0)$-параболические уравнения со слабым вырождением

1. $(\mathrm{A}, 0, m, \mathbf{m})$-параболические уравнения со слабым вырождением. Пусть квадратная матрица $A = \|a^{ij}(t, x)\|$ порядка n определена в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$, где Ω — ограниченная строго липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, и удовлетворяет условию

$$a^{ij} \in L^{m_i, m_{0i}}(Q), \ m_i > 1, \ m_{0i} > 1, \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Такую матрицу A будем называть слабо вырожденной в цилиндре Q, если $\det A \neq 0$ в Q и существуют такие показатели $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ и $\mathbf{q}_0 = (q_{01}, \ldots, q_{0n})$, $q_i \geqslant 1$, $q_{0i} \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, что

$$\|\nabla u\|_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, \hat{Q}} \leqslant c \|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, \hat{Q}}, \ \forall u \in \overset{\circ}{C}{}^1(Q), \tag{3.2}$$

где $\hat{Q} = \hat{\Omega} \times (T_1, T_2)$, $\hat{\Omega} \subseteq \Omega$, причем константа c в (3.2) зависит только от n, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_0$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ и Q.

Лемма 3.1. *Пусть матрица A (удовлетворяющая условию (3.1)) имеет при п. в. $(t, x) \in Q$ обратную матрицу $A^{-1} \equiv B \equiv \|b^{ij}\|$, причем*

$$\begin{gathered} b^{ij} \in L^{r_{ij}, r^0_{ij}}(Q), \ r_{ij} \geqslant 1, \ r^0_{ij} \geqslant 1, \ i, j = 1, \ldots, n; \\ \max_{k=1,\ldots,n}\left(\frac{1}{m_k} + \frac{1}{r_{ik}}\right) \leqslant 1, \ \max_{k=1,\ldots,n}\left(\frac{1}{m_{0k}} + \frac{1}{r^0_{ik}}\right) \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Тогда матрица A слабо вырождена в цилиндре Q, причем неравенство (3.2) выполняется при показателях $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\mathbf{q}_0 = (q_{01}, \ldots, q_{0n})$, где

$$\frac{1}{q_i} = \max_{k=1,\ldots,n}\left(\frac{1}{m_k} + \frac{1}{r_{ik}}\right), \ \frac{1}{q_{0i}} = \max_{k=1,\ldots,n}\left(\frac{1}{m_{0k}} + \frac{1}{r^0_{ik}}\right), \ i = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Доказательство. Лемма 3.1 доказывается точно так же, как лемма 7.2.1.

В том случае, когда матрица A зависит только от x, она заведомо будет слабо вырожденной в цилиндре Q, если она слабо вырождена в Ω в смысле определения 7.2.1.

Лемма 3.2. *Пусть матрица $A \equiv \|a^{ij}(t, x)\|$ слабо вырождена в цилиндре Q. Тогда для нее выполнено условие* (1.2). *Если функция $u \in L^{m, m_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$ $[u \in L^{m, m_0}(Q)]$, $m \geqslant 1$, $m_0 \geqslant 1$, имеет обобщенный пространственный A-градиент $A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$ $[A\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(Q)]$, $\mathbf{m} \geqslant \mathbf{1}$, $\mathbf{m}_0 \geqslant \mathbf{1}$, то она имеет и обычный (соболевский) обобщенный пространственный градиент $\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0}_{\mathrm{loc}}(Q)$ $[\nabla u \in \mathbf{L}^{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(Q)]$* (см. 3.2), *причем вектор $A\nabla u$ равен вектору, получающемуся действием матрицы A на вектор ∇u.*

Доказательство. Лемма 3.2 доказывается точно так же, как леммы 7.2.2 и 7.2.3.

Лемма 3.3. *Пусть матрица $A \equiv \|a^{ij}(t, x)\|$ слабо вырождена в цилиндре Q. Тогда справедливо компактное вложение $\mathcal{H}_{m, m_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q) \to L^1(\partial\Omega \times (T_1, T_2))$, так что вся боковая поверхность является правильной частью ∂Q относительно матрицы A и показателей m, m_0, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_0$* (см. § 1). *Всякая функция $u \in \mathcal{H}_{m, m_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q)$ имеет обобщенное предельное значение $u|_{\partial\Omega \times (T_1, T_2)}$, совпадающее со следом на $\partial\Omega \times (T_1, T_2)$ этой функции, рассматриваемой как элемент пространства $\mathcal{H}_{m, m_0; \mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(Q)$.*

Доказательство. Лемма 3.3 очевидным образом вытекает из определения пространства $\mathscr{H}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q)$, условия (3.2) и известной теоремы вложения С. Л. Соболева.*)

Рассмотрим в цилиндре Q уравнение вида (2.1). Предположим сначала, что это уравнение имеет пространственную $(A, 0, m, \mathbf{m})$-структуру в Q относительно матрицы A и показателей $m > 1$, $\mathbf{m} > 1$. Пусть матрица A — слабо вырождена в Q, причем для нее условие (3.1) выполнено при $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}$, а условие (3.2) — при $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}$ и некоторых $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$. Рассмотрим общую краевую задачу вида (2.5). В предположениях данного параграфа $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = \partial\Omega \times (T_1, T_2)$, поскольку вся боковая поверхность цилиндра Q является правильной частью ∂Q. Пусть выполнено условие вида (1.36) в случае $m_0 = m$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}$. Как и в § 2, обобщенным решением задачи (2.5) называется всякая функция $u \in \mathscr{W}_0$, удовлетворяющая тождеству (2.8) при $\Sigma = \partial\Omega \times (T_1, T_2)$. Очевидно, что результаты о разрешимости задачи (2.5), полученные в § 2 (см. теоремы 2.1—2.4), применимы и к случаю уравнений, рассматриваемых в этом параграфе, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (2.1) *имеет пространственную* $(A, 0, m, \mathbf{m})$*-структуру в цилиндре* Q, *причем выполнены условия* (3.1), (3.2) *и* (1.36) *при* $m_0 = m$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}$, *а также условия* (2.14), (2.15). *Тогда при* $\forall \mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ *задача* (2.5) (*где* $\Sigma = \partial\Omega \times (T_1, T_2)$, $\Sigma' = \Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}$) *имеет точно одно обобщенное решение. Если вместо* (2.14), (2.15) *выполнено условие* (2.16), *то такое решение непрерывно в* $\mathscr{V} \subset \mathscr{X}$ *зависит от* $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^* \subset \mathscr{Y}^*$. *При* $m = 2$ *в условии вида* (2.14) *можно считать, что* ν_2 — *любая константа, а условие* (2.16) *заменить менее жестким условием* (2.17).

Доказательство. Теорема 3.1 непосредственно вытекает из теорем 2.1—2.4, поскольку из слабой вырожденности в Q матрицы A следует справедливость условия (1.2), а также правильность $\partial\Omega \times (T_1, T_2)$.

2. Пространство $\mathscr{H}$. Далее мы установим теоремы разрешимости задачи вида (2.5) для несколько других классов $(A, 0)$-параболических уравнений со слабым вырождением в Q. В связи с этим мы сначала рассмотрим некоторые теоретико-функциональные вопросы. Пусть $\Gamma = \gamma \times \times (T_1, T_2)$, $\gamma \subset \partial\Omega$, причем будем считать, что $\operatorname{mes}_{n-1}\gamma > 0$, если $\gamma \neq \varnothing$. Пусть матрица A слабо вырождена в Q в том общем смысле, который указан в начале этого параграфа. Обозначим через $\mathscr{H} \equiv \overset{\widetilde{0, \Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q)$ пополнение $\overset{\circ}{C}{}^1_{0, \Gamma}(Q)$ по норме

$$\|u\|_{\mathscr{H}} \equiv \|u\|_{2, \infty, Q} + \|A\nabla u\|_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0, Q}. \tag{3.5}$$

В случае $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ такое пространство будем обозначать через $\mathscr{H} \equiv \overset{\widetilde{0, \Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m}}(A, Q)$. Если $\gamma = \varnothing$, то верхние индексы в обозначении этого пространства не выписываются.

Лемма 3.4. *Справедливы вложения*

$$\overset{\widetilde{0, \Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q) \to \overset{\widetilde{0, \Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(Q) \to L^{l, l_0}(Q), \tag{3.6}$$

---

*) На самом деле можно доказать вложение $\mathscr{H} \to L^r(\partial\Omega \times (T_1, T_2))$ при некотором r, зависящим от показателей $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ из (3.2). Однако для дальнейшего достаточно иметь вложение $\mathscr{H} \to L^1(\partial\Omega \times (T_1, T_2))$.

где показатели $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ *связаны с показателями* $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_0$ *условием* (3.2), $\overset{\widetilde{0,\,\Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q)$ — *пространство, определенное в* § 5 *гл.* 4, *а показатели* $\hat{l}$, $\hat{l}_0$ *определены по формулам* (4.5.11), (4.5.6) *относительно показателей* $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ *из условия* (3.2). *В частности, при любой* $u \in \overset{\widetilde{0,\,\Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}(A,\ Q)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{\hat{l},\,\hat{l}_0,\,Q} \leqslant c_0 \|u\|_{\mathscr{H}}, \tag{3.7}$$

где константа c_0 *зависит только от* n, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, α, Ω *и константы из условия* (3.2). *Если показатели* l, l_0 *удовлетворяют при каких-нибудь* $\alpha \in (0,\ 1)$, $\beta \in (0,\ 1)$ *условиям* (4.5.13), *то при любом* $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{l,\,l_0,\,Q} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\mathscr{H}} + c_1 \varepsilon^{-\lambda} \|u\|_{2,\,1,\,Q}. \tag{3.8}$$

Если же вместо условий (4.5.13) *для показателей* l, l_0 *при каких-нибудь* $\alpha \in (0,\ 1)$, $\beta \in (0,\ 1)$ *выполнены условия* (4.5.15), *то*

$$\|u\|_{l,\,l_0,\,Q} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\mathscr{H}} + c_2 \varepsilon^{-\lambda} \|u\|_{2,\,Q}. \tag{3.9}$$

Константы c_1 *и* c_2 *в* (3.8) *и* (3.9) *зависят лишь от* n, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, α, β *и* Ω, *а* $\lambda > 0$ — *только от* α *и* β. *В случае* $\Gamma = \partial\Omega \times (T_1,\ T_2)$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} 1/q_i > 1$ *константы* c_0, c_1, c_2 в (3.7)—(3.9) *не зависят от* Ω.

Доказательство. Лемма 3.4 непосредственно вытекает из леммы 4.5.3 и условия (3.2).

Замечание 3.1. Из леммы 3.4 вытекают, в частности, следующие результаты:

1) справедливо вложение $\overset{\widetilde{0,\,\Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}(A,\ Q) \to L^{\bar{l}}(Q)$, где $\bar{l} = 2 + \hat{l}_0 - 2\hat{l}_0/\hat{l}$, причем $\hat{l}$ и $\hat{l}_0$ определены в (4.5.6) по показателям $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ из (3.2); в частности, для $\forall u \in \overset{\widetilde{0,\,\Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}(A,\ Q)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{\bar{l},\,Q} \leqslant c_0 \|u\|_{\mathscr{H}}; \tag{3.10}$$

2) при любом l, удовлетворяющем (при каком-нибудь $\beta \in (0,\ 1)$) условию (4.5.28), и любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{l,\,Q} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\mathscr{H}} + c_1 \varepsilon^{-\lambda} \|u\|_{1,\,Q},\ \forall u \in \mathscr{H}; \tag{3.11}$$

3) при любом l, удовлетворяющем (при каком-нибудь $\beta \in (0,\ 1)$) условию (4.5.30), и любом $\varepsilon > 0$ справедливо нераненство

$$\|u\|_{l,\,Q} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\mathscr{H}} + c_2 \varepsilon^{-\lambda} \|u\|_{2,\,Q},\ \forall u \in \mathscr{H}. \tag{3.12}$$

Далее в этом параграфе пространство $\overset{\widetilde{0,\,\Gamma}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}(A,\ Q)$ рассматривается при $\Gamma = \Sigma_1$, где Σ_1 — та часть $\partial\Omega \times (T_1,\ T_2)$, на которой задается первое краевое условие (однородное). Введем еще пространство $\mathscr{H}_\lambda \equiv \overset{\widetilde{0,\,\Sigma_1}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}(A,\ Q;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ как пополнение множества $\tilde{C}^1_{0,\,\Sigma_1}(Q)$ по норме

$$\|u\|_{\mathscr{H}_\lambda} \equiv \|u\|_{\mathscr{H}} + \|u\|_{L^2(\lambda,\,\Sigma_3)}, \tag{3.13}$$

где $\lambda \in L^1(\Sigma_3)$ — положительная на Σ_3 функция. Поскольку $\tilde{\mathscr{H}}_\lambda \to \mathscr{H}$, то результаты леммы 3.4 имеют прямое отношение и к пространству $\tilde{\mathscr{H}}_\lambda$.

Рассмотрим пространство

$$\mathscr{W} \equiv \{u \in \mathscr{H} : u' \in \mathscr{H}^*\}, \tag{3.14}$$

где $\mathscr{H} \equiv \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{l,\,l_0;\,\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0}(A,\ Q)$.

Предложение 3.1. *При выполнении условия* (1.36) $\mathscr{W} \subset \tilde{\mathscr{H}}$.

Доказательство. Ввиду следствия 1.4 множество $\tilde{C}^1_{0,\,\Sigma_1}(Q)$ плотно в множестве $\mathscr{V}$ относительно нормы $\|u\| = \|u\|_{C([T_1,\,T_2];\,L^2(\Omega))} + \|u\|_{\bar{l},\,\bar{l}_0,\,Q} + \|A\nabla u\|_{\mathbf{m},\,\mathbf{m}_0,\,Q}$, откуда с учетом следствия 1.3 и вытекает вложение $\mathscr{W} \subset \tilde{\mathscr{H}}$.

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия*

$$\frac{1}{l} = \frac{\alpha}{\hat{l}} + \frac{1-\alpha}{2};\ \frac{1}{l_0} = \frac{\alpha}{\hat{l}_0} + \frac{(1-\alpha)\beta}{2};\ \alpha,\ \beta \in (0,\ 1);\ \hat{l} > 2, \tag{3.15}$$

где $\hat{l}$, $\hat{l}_0$ *определены в зависимости от* $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ *из* (3.2) *по формуле* (4.5.6). *Тогда справедливо компактное вложение* $\mathscr{W}_0 \to L^{l,\,l_0}(Q)$.

Доказательство. Ввиду предложения 3.1 и леммы 3.4 (см. оценку (3.9)) достаточно доказать компактность вложения $\mathscr{W}_0 \to L^2(Q)$. Докажем сначала компактность вложения $\mathscr{W}_0 \to L^{2,\,1}(Q)$. Для этого воспользуемся леммой 4.4.6. Пусть $\{u_n\}$ — некоторая последовательность, слабо сходящаяся в $\mathscr{W}$ к u, где u_n, $u \in \mathscr{W}_0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда можно считать, что $\{u_n\}$ сходится к u слабо в $\mathscr{H}$ и $L^2(Q)$, а $\{u'_n\}$ — к u' слабо в $\mathscr{H}^*$. Докажем, что некоторая подпоследовательность $\{u_\nu\}$ сходится к u сильно в $L^{2,\,1}(Q)$. Пусть $\{\psi_k(x)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$, причем $\psi_k \in \widetilde{\overset{0,\Sigma_1}{H}}_{\mathbf{m}}(A,\ \Omega)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ Ввиду предложения 3.2 и условия (3.2) функции u_n и u при п. в. $t \in [T_1,\ T_2]$ принадлежат пространству $\widetilde{\overset{0,\sigma_1}{H}}_{\mathbf{q}}(\Omega)$, где $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ связаны с $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}$ условием (3.2). Учитывая условие $\hat{l} > 2$ (см. (3.15)), заключаем, что при указанных выше значениях t для разностей $u_n - u$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, выполняются неравенства вида (4.4.22). Интегрируя такие неравенства по t от T_1 до T_2, получим оценку

$$\begin{gathered}\|u_n - u\|_{1,Q} \leqslant c\|u_n - u\|_{2,\,1,\,Q} \leqslant c(T_2 - T_1) \times \\ \times \sum_{k=1}^{N} \max_{t \in [T_1,\,T_2]} |(u_n - u,\ \psi_k)| + c\varepsilon,\end{gathered} \tag{3.16}$$

поскольку $\int\limits_{T_1}^{T_2} \|u_n - u\|_{\mathscr{K}_{\mathbf{q}}(\Omega)}\,dt$ оценивается, очевидно, через $\|u_n - u\|_{\mathscr{K}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q)}$, а $\|u_n - u\|_{\mathscr{K}_{\mathbf{q},\,\mathbf{q}_0}(Q)}$ ввиду условия (3.2) — через $\|u_n - u\|_{\mathscr{K}_{\mathbf{m}}(A,\,Q)}$, причем последние нормы равномерно ограничены в силу слабой сходимости $\{u_n\}$ в $\mathscr{H}$.

Как следует из (3.16), для доказательства сильной сходимости $\{u_n\}$ к u в $L^{2,1}(Q)$ достаточно доказать, что последовательность $\{(u_n - u,\ \psi_k)\}$ стремится к 0 равномерно по $t \in [T_1,\ T_2]$ при всех $k = 1,\ 2,\ \ldots$ Заметим, что ввиду вложения $\mathscr{W} \to C([T_1,\ T_2];\ L^2(\Omega))$ функции $l_{n,\,k}(t) = (u_n - u,\ \psi_k)$ непрерывны по t на $[T_1,\ T_2]$. В силу слабой сходимости $\{u_n\}$ к u в $L^2(Q)$ фувкции $l_{n,\,k}(t)$ при $n \to \infty$ стремятся к 0 при п. в. $t \in [T_1,\ T_2]$ (при каждом фиксированном $k = 1,\ 2,\ \ldots$). Очевидно поэтому, что для доказательства равномерной сходимости некоторой подпоследовательности последовательности $\{l_{n,k}(t)\}$ к 0 на $[T_1, T_2]$ достаточно доказать, что функции $l_{n,k}(t)$ равностепенно по $n=1, 2, \ldots$ непрерывны на $[T_1, T_2]$ и равномерно по $n=1, 2, \ldots$ ограничены на $[T_1, T_2]$ (при любом $k=1, 2, \ldots$).

Применяя формулу (1.42), получим для любых $t, t+\Delta t \in [T_1, T_2]$,

$$|l_{n,k}(t+\Delta t)-l_{n,k}(t)| = \left|\int\limits_t^{t+\Delta t} (u_n'-u', \psi_k)\,dt\right|, \quad k=1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

Учитывая, что разность $u_n'-u' \in \mathcal{H}^*$ представляет собой функцию из $([T_1, T_2]\to H^*)$ вида $F(t)=F_0(t)+\sum\limits_{k=1}^n D_k^* F_k(t)$, действие которой при п. в. $t\in[T_1, T_2]$ на элементы пространства H осуществляется по формулам вида (1.37), в которых $F_0 \in L^{l', l_0'}(Q)$, $F_i \in L^{m_i', m_{0i}'}(Q)$, $i=1, \ldots, n$, так что при п. в. $t\in[T_1, T_2]$ $F_0(t)\in L^{\hat{l}'}(\Omega)$, $F_i(t)\in L^{m_i'}(\Omega)$, $i=1, \ldots, n$. Напомним, что функции F_0, F_i, $i=1, \ldots, n$, можно выбрать так, что $\|u_n'-u'\|_{\mathcal{W}} = \sup\{\|F_0\|_{l', l_0', Q}, \|F_1\|_{m_1', m_{01}', Q}, \ldots, \|F_n\|_{m_n', m_{0n}', Q}\}$. Тогда, применяя неравенство Гельдера, оценим

$$\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}(u_n'-u', \psi_k)\,dt\right| = \left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_\Omega\left(F_0(t, x)\psi_k+\sum_{s=1}^n F_s(t, x)A_s\nabla\psi_k\right)dt\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|u_n'-u'\|_{\mathcal{W}}\left(\mathrm{mes}^{1/l}\,\Omega\,|\Delta t|^{1/l_0}\|\psi_k\|_{l,\Omega}+\sum_{s=1}^n \mathrm{mes}^{1/m_s}\,\Omega\,|\Delta t|^{1/m_{0s}}\|A_s\nabla\psi_k\|_{m_s,\Omega}\right),$$
$$k=1, 2, \ldots$$

Ввиду ограниченности $\|u_n'-u'\|_{\mathcal{W}}$ отсюда и из (3.17) вытекает равностепенная непрерывность на $[T_1, T_2]$ функций $l_{n,k}(t)$ при всех $k=1, 2, \ldots$ Учитывая, что $l_{n,k}(T_1)=0$ (поскольку $u_n(T_1)=u(T_1)=0$), аналогичным образом получаем оценку

$$|l_{n,k}(t)| \leqslant \|u_n'-u'\|_{\mathcal{W}}\left(\mathrm{mes}^{1/l}(t-T_1)^{1/l_0}\|\psi_k\|_{l,\Omega}+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^n \mathrm{mes}^{1/m_s}\,\Omega\,(t-T_1)^{1/m_{0s}}\|A_s\nabla\psi_k\|_{m_s,\Omega}\right),$$

из которой и следует равномерная по $n=1, 2, \ldots$ на $[T_1, T_2]$ ограниченность функций $l_{n,k}(t)$.

Таким образом, компактность вложения $\mathcal{W}_0 \to L^{2,1}(Q)$ доказана. В силу оценки (3.8) имеет место компактное вложение $W \to L^{l, l_0}(Q)$ при любых l, l_0, удовлетворяющих условиям (4.5.13) при каких-нибудь $\alpha\in(0, 1)$, $\beta\in(0, 1)$. Выберем столь малые значения $\alpha>0$, $\beta>0$, при которых показатели l, l_0 в условиях (4.5.13) удовлетворяют неравенствам $l>2$, $l_0>2$ (это возможно ввиду условия $\hat{l}>2$). Тогда будет компактным и вложение $\mathcal{W}\to L^2(Q)$. Используя, наконец, оценку (3.9) с учетом компактности вложения $\mathcal{W}\to L^2(Q)$, устанавливаем справедливость результата леммы 3.5.

3. $(\widetilde{\mathbf{A}, 0, 2, \bar{m}})$-параболические уравнения со слабым вырождением. Рассмотрим в этой части данного параграфа уравнение (2.1) в цилиндре Q, предполагая, что для этого уравнения справедливы тождества (2.2) относительно матрицы $A\equiv A(x)$, удовлетворяющей условиям (7.2.1), (7.2.2

при $\mathbf{m}=(\bar{m}, \ldots, \bar{m})$, $\bar{m}\geqslant 2$. Тогда для матрицы A справедливо и условие (3.2) при $\mathbf{q}$, $\mathbf{m}=(\bar{m}, \ldots, \bar{m})$ из (7.2.2) и $\mathbf{q}_0=\mathbf{m}_0=(\bar{m}, \ldots, \bar{m})$. Напомним, что условие (7.2.2) будет, в частности, выполнено, если (см. лемму 7.2.1) для элементов b^{ij} обратной к A матрице $B=A^{-1}$ выполнены условия:

$$b^{ij}\in L^{r_i}(\Omega),\ r_i>1,\ i=1, \ldots, n;\ \frac{1}{\bar{m}}+\frac{1}{r_i}\leqslant 1,\ i=1, \ldots, n.$$

В этом случае условие (3.2) выполнено при показателях $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, определяемых равенствами

$$\frac{1}{q_i}=\frac{1}{\bar{m}}+\frac{1}{r_i},\quad \frac{1}{q_{0i}}=\frac{1}{\bar{m}},\quad i=1, \ldots, n. \tag{3.18}$$

Далее в этой части параграфа всегда предполагается, что выполнено условие (1.36) при $m=\bar{l}$, $m_0=\bar{l}_0$ (см. (3.21)), $\mathbf{m}=\mathbf{m}_0=(\bar{m}, \ldots, \bar{m})$. При сделанных выше предположениях такое условие будет заведомо выполнено, если справедлива оценка

$$\left(\int\limits_{T_1}^{T_2}\int\limits_{\Sigma_3}\lambda u^2 ds\right)^{1/2}\leqslant c\|u\|_{\tilde{\mathscr{H}}(A,\,Q)},\quad \forall u\in\tilde{C}^1(Q),$$

с константой c, не зависящей от функций $u\in\tilde{C}^1(Q)$. Через $\tilde{\mathscr{H}}\equiv\overset{\widetilde{0,\,\Sigma_1}}{\mathscr{H}}_{\bar{m}}(A, Q)$ здесь далее обозначается пространство $\overset{\widetilde{0,\,\Sigma_1}}{\mathscr{H}}_{\mathbf{m}}(A, Q)$ при $\mathbf{m}=(\bar{m}, \ldots, \bar{m})$. Такая оценка будет заведомо справедливой, если предположить, например, что $\lambda\in L^{\varkappa,\varkappa_0}(\Sigma_3)$ $\left(\text{т. е. } \left[\int\limits_{T_1}^{T_2}\left(\int\limits_{\sigma_3}|\lambda|^{\varkappa}ds\right)^{\varkappa_0/\varkappa}dt\right]^{1/\varkappa_0}<+\infty\right)$, где показатели $\varkappa$, $\varkappa_0$ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\varkappa=\frac{r}{r-2},\quad \varkappa_0=\frac{\bar{m}}{\bar{m}-2},\quad \frac{n-1}{r}=\frac{n}{q_*}-1\ \text{ при } q_*=\min(q_1, \ldots, q_n)<n,\\ r\in[2, +\infty)\ \text{ при } q_*\geqslant n,\end{gathered} \tag{3.19}$$

причем предполагается, что $q_*\geqslant 2n/(n+1)$ (так что $r\geqslant 2$) и что показатели $q_1, \ldots, q_n$ в (3.19) определены по формуле (3.18). Действительно, применяя неравенство Гельдера и известную теорему вложения С. Л. Соболева, получим для любой функции $u\in\tilde{C}^1(Q)$ оценку

$$\left(\int\limits_{T_1}^{T_2}\int\limits_{\sigma_3}\lambda u^2 ds\right)^{1/2}\leqslant c_1\|\lambda\|^{1/2}_{\varkappa,\,\varkappa_0,\,\Sigma_3}\|u\|_{\overset{\widetilde{0,\,\Sigma_1}}{\mathscr{H}}_{\bar{m}}(A,\,Q)},$$

где c_1 не зависит от $u\in\tilde{C}^1(Q)$.

Предположим далее, что для функций $l'^i(x, u, q)$, $i=1, \ldots, n$, и $l'_0(x, u, q)$ из (2.2) при п. в. $(t, x)\in Q$ и любых $u\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}|l'^i(t, x, u, q)|\leqslant\mu_1|q|^{\bar{m}/\bar{m}'}+a_1(t, x)|u|^{2/\bar{m}'}+\psi(t, x),\ i=1, \ldots, n,\\ |l'_0(t, x, u, q)|\leqslant a_2(t, x)|q|^{\bar{m}/2}+a_3(t, x)|u|+\psi_0(t, x),\end{gathered} \tag{3.20}$$

где $\bar{m}\geqslant 2$, $1/\bar{m}+1/\bar{m}'=1$, μ_1, $\mu_2=\mathrm{const}\geqslant 0$, a_1, a_2, $a_3\geqslant 0$, ψ, $\psi_0\geqslant 0$, $a_1^{\bar{m}'}$, a_2^2, $a_3\in L^{\bar{s},\bar{s}_0}(Q)$, $1/\bar{s}+2/\bar{l}=1$, $1/\bar{s}_0+2/\bar{l}_0=1$, $\psi\in L^{\bar{m}'}(Q)$, $\psi_0\in L^{\bar{l}',\bar{l}'_0}(Q)$, а показатели $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ определены условиями

$$\frac{1}{\bar{l}}=\frac{\alpha}{\hat{l}}+\frac{(1-\alpha)}{2};\quad \frac{1}{\bar{l}_0}=\frac{\alpha}{\hat{l}_0}<\frac{1}{2};\quad \hat{l}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}1/q_i-1}>2$$

при $\sum_{i=1}^{n} 1/q_i > 1,\ n \geqslant 2;\ \hat{l} \in (2, +\infty)$ при $\sum_{i=1}^{n} 1/q_i = 1,\ n \geqslant 2;$

$$\hat{l} \in (2, +\infty] \text{ при } \sum_{i=1}^{n} 1/q_i < 1,\ n \geqslant 2 \text{ и при } n = 1;\ \hat{l}_0 = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/q_{0i}\right)^{-1}, \tag{3.21}$$

причем $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ — показатели из условия (3.2). Заметим, что из (3.21) следуют неравенства $\hat{l} > 2$, $\hat{l}_0 > 2$. Уравнения вида (2.1), обладающие перечисленными выше свойствами, будем называть уравнениями, имеющими $\widetilde{(A, 0, 2, \bar{m})}$-структуру в цилиндре Q.

Рассмотрим для уравнения (2.1), имеющего $\widetilde{(A, 0, 2, \bar{m})}$-структуру в цилиндре Q, задачу вида (2.5) в случае $\Sigma = \partial\Omega \times (T_1, T_2)$, $\Sigma' = \Omega_{T_1} \cup \Omega_{T_2}$. Пусть на части $\Sigma_3 \subset \Sigma$ задана положительная функция $\lambda \in L^1(\Sigma_3)$. (Если $\lambda \in L^{\varkappa, \varkappa_0}(Q)$, где $\varkappa > r/(r-2)$, $\varkappa_0 = \bar{m}/(\bar{m}-2)$ с таким же r, как в (3.19), то можно, как легко видеть, отказаться от условия положительности функции λ на Σ_3, причем в этом случае при определении нормы пространства $\mathscr{H}_\lambda$ следует отбросить член $\|u\|_{L^2(\lambda, \Sigma_3)}$ (см. (3.13)). Обозначим через $\mathscr{H} \equiv \equiv \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{\hat{l}, \hat{l}_0; \bar{m}}(A, Q)$ и $\mathscr{Y} \equiv \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{Y}}_{\hat{l}, \hat{l}_0; \bar{m}}(A; Q; \Sigma_3, \lambda)$ соответственно пространства $\overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{\hat{l}, \hat{l}_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q)$ и $\overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{\hat{l}, \hat{l}_0; \mathbf{m}, \mathbf{m}_0}(A, Q; \Sigma_3, \lambda)$ при $\mathbf{m} = (\bar{m}, \ldots, \bar{m})$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}$.

В соответствии с определением, данным в общей ситуации, обобщенным решением задачи (2.5) называем всякую функцию $u \in \mathscr{W}_0$, где $\mathscr{W}_0 \equiv \equiv \{u \in \mathscr{H} : u' \in \mathscr{H}^*,\ u(T_1) = 0\}$, удовлетворяющую тождеству вида (2.8). Заметим, что ввиду предложения 3.1 $\mathscr{W}_0 \subset \mathscr{W} \subset \widetilde{\mathscr{H}}$, так что для функций из $\mathscr{W}_0$ справедливы оценки (3.7)—(3.9).

Левая часть тождества (2.8) определяет оператор $\mathscr{L} : \mathscr{W}_0 \to \mathscr{H}^*$. Действительно, запишем $\mathscr{L}$ в виде суммы $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, где оператор $\mathscr{A} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$ (напомним, что пространства $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_\lambda$ изоморфны) определен по формуле

$$\langle \mathscr{A}u, \eta \rangle = \iint_Q [\mathbf{l}'(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l_0'(t, x, u, A\nabla u)\eta]\, dtdx + \\ + \int_{\Sigma_3} \lambda u\eta ds,\quad u, \eta \in \mathscr{H}, \tag{3.22}$$

а линейный оператор $\mathscr{B} : \mathscr{W}_0 \to \mathscr{H}^*$ — по формуле

$$\langle \mathscr{B}u, \eta \rangle = \int_{T_1}^{T_2} (u', \eta)\, dt,\quad u \in \mathscr{W}_0,\ \eta \in \mathscr{H}, \tag{3.23}$$

причем $(.,.)$ — сопряжение между $H \equiv \overset{0,\sigma_1}{H}_{\hat{l}, \bar{m}}(A, \Omega)$ и H^*, $\langle .,. \rangle$ — между $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}^*$. Учитывая неравенства

$$|\langle \mathscr{A}u, \eta \rangle| \leqslant (\mu_1 \|A\nabla u\|_{\bar{m}, Q} + \|a_1\|_{\bar{m}'\bar{s}, \bar{m}'\bar{s}_0, Q} \|u\|^{2/\bar{m}'}_{\hat{l}, \hat{l}_0, Q} + \|\varphi\|_{\bar{m}', Q}) \|A\nabla\eta\|_{\bar{m}, Q} + \\ + (\|a_2\|_{2\bar{s}, 2\bar{s}_0, Q} \|A\nabla u\|^{\bar{m}/2}_{\bar{m}, Q} + \|a_3\|_{\bar{s}, \bar{s}_0, Q} \|u\|_{\hat{l}, \hat{l}_0, Q} + \|\varphi_0\|_{\hat{l}', \hat{l}_0', Q}) \times \\ \times (\|\eta\|_{\hat{l}, \hat{l}_0, Q} + \|u\|_{L^2(\lambda, \Sigma_3)} \|\eta\|_{L^2(\lambda, \Sigma_3)}),\quad u, \eta \in \mathscr{H}, \tag{3.24}$$

$$|\langle \mathscr{B}u, \eta \rangle| \leqslant \|u\|_{\mathscr{W}} \|\eta\|_{\mathscr{W}},\quad u \in \mathscr{W}_0,\ \eta \in \mathscr{H}, \tag{3.25}$$

заключаем, что действительно $\mathscr{L}u \in \mathscr{H}^*$. Из (3.24) и (3.25) вытекает также, что оператор $\mathscr{L} : \mathscr{W}_0 \to \mathscr{H}^*$ ограничен. Докажем, что этот оператор деминепрерывен. Ввиду линейности и ограниченности оператора $\mathscr{B}$ достаточно доказать, что оператор $\mathscr{A}$ деминепрерывен. Пусть последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \mathscr{W}_0$, $n=1, 2, \ldots$, сходится в $\mathscr{H}$ к некоторой функции $u \in \mathscr{H}$. Для доказательства деминепрерывности $\mathscr{A}$ достаточно тогда доказать, что $\{\langle \mathscr{A}u_n, \eta\rangle\}$ сходится к $\langle \mathscr{A}u, \eta\rangle$ при $\forall \eta \in \mathscr{H}$. Сходимость линейного члена $\int\limits_{\Sigma_3} \lambda u_n \eta ds$ к $\int\limits_{\Sigma_3} \lambda u \eta ds$ очевидна. Очевидно также ввиду (3.24), что для некоторой подпоследовательности $\{u_\nu\}$ из $\{u_n\}$ имеет место сходимость $\varphi_\nu(t, x) \to \varphi(t, x)$ п. в. в Q, где $\varphi_\nu = \mathbf{l}'(t, x, u_\nu, A\nabla u_\nu) \cdot A\nabla\eta + l_0'(t, x, u_\nu, A\nabla u_\nu)\eta$, $\varphi = \mathbf{l}'(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l_0'(t, x, u, A\nabla u)\eta$, а η — фиксированная функция из $\mathscr{H}$. Легко убедиться, что последовательность $\{\varphi_\nu\}$ имеет равностепенно по ν абсолютно непрерывные интегралы Лебега в Q. Для этого надо воспользоваться неравенством, получающимся из (3.24) отбрасыванием интегралов по Σ_3 и заменой цилиндра Q на произвольное измеримое по Лебегу подмножество в Q, а также учесть равномерную по ν ограниченность круглых скобок в (3.24). Тогда из теории интеграла Лебега вытекает, что $\iint\limits_Q \varphi_\nu(t, x)\, dtdx \to \iint\limits_Q \varphi(t, x)\, dtdx$. Отсюда легко следует, что на самом деле такая сходимость имеет место для всей последовательности $\{\varphi_n\}$. Итак, $\langle \mathscr{A}u_n, \eta\rangle \to \langle \mathscr{A}u, \eta\rangle$. Доказанное свойство оператора $\mathscr{A}$ зафиксируем в виде следующего предложения.

Лемма 3.6. *Оператор $\mathscr{A}: \mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$, а следовательно, и оператор $\mathscr{L}: \mathscr{W}_0 \to \mathscr{H}^*$, деминепрерывны.*

Лемма 3.7. *Пусть выполнены условия* (3.20) *и условие: при п. в. $(t, x) \in Q$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$l^{i}(t, x, u, q)\, q_i + l_0'(t, x, u, q)\, u \geqslant \nu |q|^{\bar m} - \hat a_4(t, x)\, u^2 - \hat\varphi(t, x), \quad (3.26)$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0$, $\hat a_4 \in L^{s, s_0}(Q)$, $1/s + 2/l = 1$, $1/s_0 + 2/l_0 = 1$, $\hat\varphi \in L^1(Q)$, *причем показатели l, l_0 определены условиями*

$$\frac{1}{l} = \frac{\alpha}{\hat l} + \frac{(1-\alpha)}{2}, \quad \frac{1}{l_0} = \frac{\alpha}{\hat l_0} + \frac{(1-\alpha)\beta}{2} < \frac{1}{2}, \quad \alpha \in (0, 1), \ \beta \in (0, 1), \quad (3.27)$$

в которых $\hat l$ и $\hat l_0$ определяются относительно показателей $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ *из* (3.2), *так же как в* (3.21). *Тогда при $\forall t \in [T_1, T_2)$ и $\forall \varepsilon > 0$ для всякой функции $u \in \tilde{\mathscr{H}}$ справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{Q_t} [\mathbf{l}'(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla u + l_0'(t, x, u, A\nabla u)\, u]\, d\tau dx \geqslant (\nu - \varepsilon_1)\| A\nabla u\|^{\bar m}_{\bar m, Q_t} -$$
$$- \varepsilon_1 \|u\|^2_{2, \infty, Q_t} - c_1 \varepsilon_1^{-\lambda} \|u\|^2_{2, Q_t} - c_2, \quad (3.28)$$

где $\varepsilon_1 > 0$, c_1 *зависит от* n, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, α, β, Ω, $\|\hat a_4\|^{\lambda}_{s, s_0, Q}$, λ — *число из оценки* (3.9), $c_2 = \|\hat\varphi\|_{1, Q}$ *и* $Q_t = \Omega \times (T_1, t)$.

Доказательство. Результат леммы 3.7 очевидным образом вытекает из неравенства (3.26) и оценки (3.9).

Приступим теперь к непосредственному доказательству разрешимости задачи вида (2.5). Рассмотрим регуляризованный оператор $\mathscr{L}_\varepsilon: \mathscr{Y}_0 \to \mathscr{Y}_0^*$, где $\mathscr{Y}_0$ — подпространство в $\mathscr{Y}$, состоящее из всех $u \in \mathscr{Y}$, для которых $u(T_1) = 0$, определяемый по формуле

$$\langle \mathscr{L}_\varepsilon u, \eta\rangle = \varepsilon \int\limits_{T_1}^{T_2} (u', \eta')\, dt + \langle \hat{\mathscr{L}} u, \eta\rangle, \quad u, \eta \in \mathscr{Y}_0, \quad (3.29)$$

причем $\hat{\mathscr{L}}$ — сужение оператора $\mathscr{L}: \mathscr{W}_0 \to \mathscr{H}^* \subset \mathscr{Y}_0^*$ (очевидно, что $\mathscr{Y}_0$ плотно в $\mathscr{H}$) на множество $\mathscr{Y}_0 \subset \mathscr{W}_0$.

Лемма 3.8. *Пусть выполнены условия* (3.20) *и* (3.26). *Тогда при любых* $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ *и* $\varepsilon > 0$ *для всякой функции* $u \in \mathscr{Y}_0$, *удовлетворяющей тождеству*

$$\langle \mathscr{L}_\varepsilon u, \eta\rangle - \varepsilon \int_{T_1}^{T_2} (u', \eta')\,dt + \int_{T_1}^{T_2} (u', \eta)\,dt + \langle \mathscr{A}u, \eta\rangle = \langle \mathscr{F}, \eta\rangle, \quad \eta \in \mathscr{Y}_0, \tag{3.30}$$

справедливо неравенство

$$\sqrt{\varepsilon}\,\|u'\|_{2,Q} + \|u\|_{2,\infty,Q} + \|A\nabla u\|_{\bar{m},Q} + \|u\|_{L^2(\lambda,\Sigma_3)} \leqslant c, \tag{3.31}$$

где константа c не зависит ни от ε, *ни от* $u \in \mathscr{Y}_0$. *При любом* $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ *для всякой функции* $u \in \mathscr{W}_0$, *удовлетворяющей тождеству* (3.30) *при* $\varepsilon = 0$, *справедливо неравенство вида* (3.31) *при* $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon = 0$. Ввиду леммы 2.1 при любом $t \in (T_1, T_2]$ справедливо тождество

$$\int_{T_1}^{t} (u', \eta)\,dt + \iint_{Q_t} (\mathbf{l}' \cdot A\nabla\eta + l_0'\eta)\,dt\,dx + \int_{\sigma_3 \times (T_1, t)} \lambda u\eta\,ds = \int_{T_1}^{t} (F, \eta)\,dt, \quad \eta \in \mathscr{W}_0. \tag{3.32}$$

Положим в (3.32) $\eta = u \in \mathscr{W}_0$ и воспользуемся неравенством (3.28) при $\varepsilon = \min(1/8, \nu/2)$. Тогда при любом $t \in [T_1, \tau)$, $T_1 < \tau \leqslant t \leqslant T_2$,

$$\frac{1}{2}(u(t), u(t)) + \frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{n} \|A_i\nabla u\|_{\bar{m}, Q_t}^{\bar{m}} + \int_{\sigma_3\times(T_1, t)} \lambda u^2\,ds \leqslant \frac{1}{8}\|u\|_{2,\infty,Q_\tau}^2 + \|\mathscr{F}\|_{\mathscr{H}^*}\|u\|_{\mathscr{H}} + c_1 4^{\nu}\|u\|_{2,Q_\tau}^2 + c_2. \tag{3.33}$$

Из (3.33) легко следует неравенство

$$\|u\|_{2,\infty,Q_\tau}^2 + \sum_{i=1}^{n}\|A_i\nabla u\|_{\bar{m},Q_\tau}^{\bar{m}} + \int_{\sigma_3\times(T_1,\tau)} \lambda u^2\,ds \leqslant c_3\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{H}^*}\|u\|_{\mathscr{H}} + c_4\|u\|_{2,Q_\tau}^2 + c_5, \quad T_1 < \tau \leqslant T_2, \tag{3.34}$$

где $c_3 = 2\max(4, 2\nu^{-1})$, $c_4 = 2\max(4, 2\nu^{-1})4^{\lambda}c_1$, $c_5 = 2c_2\max(4, 2\nu^{-1})$. Применяя лемму Гронуола, выведем из (3.34) оценку

$$\|u\|_{2,\infty,Q}^2 + \|A\nabla u\|_{\bar{m},Q}^{\bar{m}} + \|u\|_{L^2(\Sigma_3)}^2 \leqslant \left(c_6\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{H}^*}\|u\|_{\mathscr{H}} + c_7\right)e^{c_4(T_2-T_1)}, \tag{3.35}$$

где $c_6 = n^{\bar{m}-1}c_3$, $c_7 = n^{\bar{m}-1}c_4$. Учитывая, что $\|A\nabla u\|_{\bar{m},Q}^{\bar{m}} \geqslant \|A\nabla u\|_{\bar{m},Q}^2 - c_8$, где $c_8 = c_8(\bar{m})$, и применяя оценку вида (3.7), выведем из (3.35) неравенство

$$\|u\|_{2,\infty,Q}^2 + \|A\nabla u\|_{\bar{m},Q}^2 + \|u\|_{L^2(\lambda,\Sigma_3)}^2 \leqslant c_8\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{H}^*}^2 + c_9, \tag{3.36}$$

где $c_8 = c_6^2c_0^2$, $c_9 = 2c_7e^{c_4(T_2-T_1)} + c_8$, c_0 — константа из (3.7). Таким образом, в случае $\varepsilon = 0$ оценка вида (3.31) доказана. В случае $\varepsilon > 0$ оценка (3.31) доказывается совершенно аналогично. Лемма 3.8 доказана.

Замечание 3.2. Пусть условия леммы 3.8 выполнены в случае $\bar{m} = 2$ и при $\psi \equiv 0$ в (3.26). Тогда константа c в неравенстве (3.31) имеет, как легко следует из доказательства леммы 3.8, вид $c = c_1\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{H}^*}$, где c_1 зависит лишь от n, ν, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, α, β, Ω, $\|\hat{a}_4\|_{s,s_0,Q}$. Следовательно, в этом случае может существовать лишь единственная функция $u \in \mathscr{Y}_0 [u \in \mathscr{W}_0]$, удовлетворяющая тождеству (3.29) при $\varepsilon > 0$ [тождеству (3.29) при $\varepsilon = 0$].

Лемма 3.9. *Пусть выполнены условия* (3.20) *и* (3.26). *Предположим также, что сужение оператора* $\mathscr{A} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$ (см. (3.22)) *на множество* $\mathscr{Y}_0$ *удовлетворяет условию полуограниченности вариации*

$$\langle \mathscr{A}u - \mathscr{A}v,\ u - v \rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u - v\|'_{\mathscr{Y}}),\ u, v \in \mathscr{Y}_0,\ \|u\|_{\mathscr{Y}} \leqslant \rho,\ \|v\|_{\mathscr{Y}} \leqslant \rho, \quad (3.37)$$

где функция $\gamma(\rho, \tau)$ *удовлетворяет условию* (4.6.2), *а* $\|\cdot\|'_{\mathscr{Y}}$ — *норма, компактная по сравнению с* $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *и любом* $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ *существует хотя бы одна функция* $u_\varepsilon \in \mathscr{Y}_0$, *такая, что*

$$\langle \mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon,\ \eta \rangle = \langle \mathscr{F},\ \eta \rangle,\ \forall \eta \in \mathscr{Y}_0. \quad (3.38)$$

При этом $u'_\varepsilon \in C([T_1, T_2];\ H^*)$, $u'_\varepsilon(T_2) = 0$ *и*

$$\|u'_\varepsilon\|_{\mathscr{H}^*} \leqslant K, \quad (3.39)$$

где K *не зависит от* ε.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Ввиду неравенства (3.28) оператор $\mathscr{L}_\varepsilon : \mathscr{Y}_0 \to \mathscr{Y}_0^*$ можно считать коэрцитивным. Действительно, полагая в (3.30) $\eta = u \in \mathscr{Y}_0$, учитывая (1.42) и (3.28) при подходящем $\varepsilon_1 > 0$ и применяя неравенство Коши, получим:

$$\langle \mathscr{L}_\varepsilon u,\ u \rangle \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \|u'\|^2_{2,Q} + \frac{\nu}{2} \|A\nabla u\|^{\overline{m}}_{\overline{m},Q} + \frac{1}{2} \|u\|^2_{2,\Omega_T} - c_1 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\lambda} \|u\|^2_{2,Q} - c_2. \quad (3.40)$$

Поскольку замена неизвестной функции $u = e^{\gamma t}\bar{u}$, $\gamma = \text{const} > 0$, сводит уравнение (2.1) к уравнению

$$\bar{u}_t - \frac{d}{dx_i} \bar{l}^i(t, x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) + \bar{l}_0(t, x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) = \mathscr{F}, \quad (3.41)$$

где $\bar{l}^i(t, x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) \equiv l^i(t, x, e^{\gamma t}u, e^{\gamma t}\nabla u)$, $i = 1, \ldots, n$, $\bar{l}_0(t, x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) \equiv \equiv l_0(t, x, ue^{\gamma t}, \nabla ue^{\gamma t}) + \gamma\bar{u}$, для которого условия вида (3.20), (3.26), (3.28) также выполнены, причем для уравнения (3.41) коэффициент при $\|\bar{u}\|^2_{2,Q_t}$ в неравенстве (3.28) равен $\gamma - c_1\varepsilon_1^{-\lambda}$, то, считая γ достаточно большим, получим для уравнения (3.41) неравенство вида (3.40) без члена, содержащего $\|\bar{u}\|_{2,Q}$. Поскольку разрешимость общей краевой задачи для уравнения (3.41) равносильна разрешимости такой же задачи для исходного уравнения (2.1), то можно просто считать, что имеет место оценка

$$\langle \mathscr{L}_\varepsilon u,\ u \rangle \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \|u'\|^2_{2,Q} + \frac{\nu}{2} \|A\nabla u\|^{\overline{m}}_{\overline{m},Q} + \frac{1}{2} \|u\|_{2,\Omega_{T_2}} - c_2, \quad (3.42)$$

из которой и следует, очевидно, коэрцитивность оператора $\mathscr{L}_\varepsilon : \mathscr{Y}_0 \to \mathscr{Y}_0^*$. Но тогда из теоремы 4.6.1 (случай $H = X = Y = \mathscr{Y}_0$, $\mathscr{L} = \mathscr{A} + \mathscr{B}$, $\mathscr{A} = \mathscr{L}_\varepsilon$, $\mathscr{B} = 0$) ввиду условия (3.37) следует существование функции $u_\varepsilon \in \mathscr{Y}_0$, удовлетворяющей (3.38) даже при $\forall \mathscr{F} \in \mathscr{Y}_0^*$, а не только при $\forall \mathscr{F} \in \mathscr{H}^* \subset \mathscr{Y}_0^*$. Кроме того, из доказательства теоремы 4.6.1 следует оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathscr{H}} \leqslant \|u_\varepsilon\|_{\mathscr{Y}_0} \leqslant c, \quad (3.43)$$

где c не зависит от ε; докажем, что $u'_\varepsilon \in C([T_1, T_2];\ H^*)$.

Полагая в (3.29) $\eta = \psi\varphi$, $\psi \in \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\Omega)$, $\psi \in \mathscr{D}([T_1, T_2])$, получим тождество

$$\varepsilon \int_{T_1}^{T_2} (u'_\varepsilon(t),\ \psi)\, \varphi'(t)\, dt + \int_{T_1}^{T_2} (u'_\varepsilon(t),\ \psi)\, \varphi(t)\, dt =$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} (F_\varepsilon(t),\ \psi)\, \varphi(t)\, dt, \quad \psi \in \tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\Omega),\ \varphi \in \mathscr{D}([T_1, T_2]), \quad (3.44)$$

[гд]е $F_\varepsilon(t) \in ([T_1, T_2] \to H^*)$ определяется элементом $\mathcal{F}^* - \mathcal{A}u_\varepsilon \in \mathcal{H}^*$ и имеет, [со]гласно (1.37), вид $F_\varepsilon(t) = F_{\varepsilon,0}(t) + \sum_{k=1}^{n} l_k^* F_{\varepsilon,k}(t)$, причем $F_{\varepsilon,0} \in L^{\bar{l}', \bar{l}'_0}(Q)$, $[F_{\varepsilon}]_{,k} \in L^{\bar{m}'}(Q)$, $k = 1, \ldots, n$, $\int_{T_1}^{T_2} (l_k^* F_{\varepsilon,k}, \eta)\, dt = \int_{T_1}^{T_2} (F_{\varepsilon,k}(t), A_k \nabla \eta)\, dt$. Из [о]ценки (3.43) и ограниченности оператора $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ следует, что нормы $\|\mathcal{F} - \mathcal{A}u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}^*} = \sup\left(\|F_{\varepsilon,0}\|_{\bar{l}', \bar{l}'_0, Q}, \ldots, \|F_{\varepsilon,n}\|_{\bar{m}', Q}\right)$ ограничены равномерно по [$\varepsilon \in$] $(0, 1]$. Ввиду плотности $\tilde{C}^1_{0,\sigma_1}(\Omega)$ в H и $L^2(\Omega)$ из (3.44) следует то[ж]дество

$$\varepsilon \int_{T_1}^{T_2} u'_\varepsilon \varphi'\, dt + \int_{T_1}^{T_2} u'_\varepsilon \varphi\, dt = \int_{T_1}^{T_2} F_\varepsilon(t) \varphi\, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([T_1, T_2]), \tag{3.45}$$

[гд]е интегралы понимаются как интегралы Бохнера от функций из $([T_1, T_2] \to H^*)$.

Тождество (3.45) можно записать в виде равенства

$$-\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon = F_\varepsilon(t), \tag{3.46}$$

[гд]е u'_ε и u''_ε — первая и вторая производные от функции u_ε, рассматриваемой [ка]к элемент пространства $\mathcal{D}^*([T_1, T_2]; H^*)$. Из вида $F_\varepsilon(t)$ и условия [u'_ε] $\in L^2(Q) \subset L^2([T_1, T_2]; H^*)$ следует, что $u''_\varepsilon \in L^{\bar{m}'_*}([T_1, T_2]; H^*)$, $\bar{m}'_* =$ $\min(\bar{l}'_0, \bar{m}')$, так что во всяком случае $u''_\varepsilon \in L^1([T_1, T_2]; H^*)$. Таким обра[зо]м, $u'_\varepsilon \in \mathcal{W}_{1,1}$, где $\mathcal{W}_{1,1} =: \{v \in L^1([T_1, T_2]; H^*) : v' \in L^1([T_1, T_2]; H^*)\}$, [пр]ичем в $\mathcal{W}_{1,1}$ введена норма $\|v\|_{\mathcal{W}_{1,1}} := \|u\|_{L^1([T_1, T_2]; H^*)} + \|u'\|_{L^1([T_1, T_2]; H^*)}$. [Точ]но так же как при доказательстве вложения $\mathcal{W} \to C(I, B^*)$ (см. дока[за]тельство леммы 4.7.6), устанавливается и вложение $\mathcal{W}_{1,1} \to C([T_1, T_2];$ [H^*]), так что

$$\|u\|_{C([T_1, T_2]; H^*)} \leqslant c \|u\|_{\mathcal{W}_{1,1}}. \tag{3.47}$$

[В] частности, из (3.47) следует, что $u'_\varepsilon \in C([T_1, T_2]; H^*)$. Используя [ле]мму 4.7.2 и оценку (3.47), легко установить плотность $C^\infty([T_1, T_2]; H^*)$ [в] $\mathcal{W}_{1,1}$. Поэтому для любой $u \in \mathcal{W}_{1,1}$, $u' \in \mathcal{W}_{1,1}$, существует последова[те]льность $\{u_n\}$, $u_n \in C^\infty([T_1, T_2]; H^*)$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $u_n \to u$ [в] $L^1([T_1, T_2]; H^*)$, $u'_n \to u'$ в $L^1([T_1, T_2]; H^*)$.

Докажем теперь, что $u'_\varepsilon(T_2) = 0$. Переходя к пределу в тождестве

$$\int_{T_1}^{T_2} u'_n \varphi\, dt = -\int_{T_1}^{T_2} u_n \varphi'\, dt + u_n(T_2) \varphi(T_2), \quad \forall \varphi \in C^1([T_1, T_2]), \quad \varphi(T_1) = 0, \tag{3.48}$$

[гд]е $u_n \in C^\infty([T_1, T_2]; H^*)$, $n = 1, 2, \ldots$, $u_n \to u'_\varepsilon$ в $L^1([T_1, T_2]; H^*)$, $u'_n \to u''_\varepsilon$ [в] $L^1([T_1, T_2]; H^*)$, получим с учетом неравенства вида (3.47):

$$\int_{T_1}^{T_2} u''_\varepsilon \varphi\, dt = -\int_{T_1}^{T_2} u'_\varepsilon \varphi'\, dt + u'_\varepsilon(T_2) \varphi(T_2), \quad \varphi \in C^1([T_1, T_2]), \quad \varphi(T_1) = 0. \tag{3.49}$$

Из (3.46) и (3.49) следует тогда равенство:

$$-\varepsilon \int_{T_1}^{T_2} u''_\varepsilon \varphi\, dt + \varepsilon u'_\varepsilon(T_2) \varphi(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} u'_\varepsilon \varphi\, dt = \int_{T_1}^{T_2} F_\varepsilon(t)\, dt, \tag{3.50}$$
$$\forall \varphi \in C^1([T_1, T_2]), \quad \varphi(T_1) = 0.$$

Умножая (3.46) на $\varphi \in C^1([T_1, T_2])$, $\varphi(T_1)=0$, интегрируя по $[T_1, T_2$ вычитая получившееся равенство из (3.50), получим ввиду произвола $\varphi($ что $u'_\varepsilon(T_2)=0$ как элемент H^*. Таким образом, найденную функцию u можно рассматривать как решение задачи

$$-\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon = F_\varepsilon \text{ в } [T_1, T_2]; \; u'_\varepsilon(T_2)=0, \qquad (3.$$

где все члены являются функциями из $([T_1, T_2] \to H^*)$. Но единственн решением задачи (3.51) является функция

$$u'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T_2-t} F_\varepsilon(T_2-\eta)\, e^{-(T_2-t-\eta)/\varepsilon} d\eta. \qquad (3.$$

Формула (3.52) показывает, что действие элемента $u'_\varepsilon \in \mathscr{H}^*$ на элем $\eta \in \mathscr{H}$ осуществляется по формуле

$$\langle u'_\varepsilon, \eta\rangle = \int_{T_1}^{T_2} (\{F_\varepsilon\}(t), \eta(t))\, dt, \quad \eta \in \mathscr{H}, \qquad (3.$$

где через $\{F\}$ для какой-нибудь $F \in ([T_1, T_2] \to H^*)$ обозначается функц

$$\{F\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T_2-t} F(T_2-\eta)\, e^{-(T_2-t-\eta)/\varepsilon} d\eta. \qquad (3.$$

Учитывая вид F_ε, получаем

$$u'_\varepsilon = \{F_{\varepsilon, 0}\} + \sum_{k=1}^{n} l_k^* \{F_{\varepsilon, k}\}, \qquad (3.$$

причем легко видеть, что $\{F_{\varepsilon, 0}\} \in L^{l', l'_0}(Q)$, $\{F_{\varepsilon, k}\} \in L^{m'}(Q)$, $k=1, \ldots,$ Действительно, используя хорошо известную оценку для свертки $\|f * g\|_{p, Q}$ $\leqslant \|f\|_{p, Q} \|g\|_{1, Q}$ и раненство $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-\eta/\varepsilon} d\eta = 1$, получим оценки

$$\|\{F_{\varepsilon, 0}\}\|_{l', l'_0, Q} \leqslant \|F_{\varepsilon, 0}\|_{l', l'_0, Q}, \quad \|\{F_{\varepsilon, k}\}\|_{m', Q} \leqslant \|F_{\varepsilon, k}\|_{m', Q}, \; k=1, \ldots, n, \quad (3.$$

откуда и следует сделанное утверждение. Поскольку, как было отмече выше, нормы в правых частях (3.56) ограничены равномерно по $\varepsilon \in (0,$ из (3.55) и (3.56) следует оценка (3.39) с константой K, не зависящ от ε. Лемма 3.9 доказана.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.20) *и* (3.26). *Предп ложим также, что сужение оператора* $\mathscr{A} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$ (*см.* (3.22)) *на мн жество* $\mathscr{W}_0$ *удовлетворяет условию*

$$\langle \mathscr{A}u - \mathscr{A}v, u - v\rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u-v\|'_{\mathscr{W}}), \; u, v \in \mathscr{W}_0, \qquad (3.5$$
$$\|u\|_{\mathscr{W}} \leqslant \rho, \; \|v\|_{\mathscr{W}} \leqslant \rho,$$

где $\|\cdot\|'_{\mathscr{W}}$ — *норма, компактная по сравнению с* $\|\cdot\|_{\mathscr{W}}$, *а* $\gamma(\rho, \tau)$ *удовлетв ряет условию* (4.6.2). *Тогда при любом* $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ *задача* (2.5) *имеет хотя б одно обобщенное решение.*

Доказательство. Ввиду лемм 3.8 и 3.9 при $\forall \varepsilon > 0$ существуе функция $u_\varepsilon \in \mathscr{Y}_0 \subset W_0$, удовлетворяющая тождеству (3.38) и нерав ствам (3.31) и (3.39). Из этих неравенств легко вытекает существование такой последовательности значений ε, стремящейся к 0, для которой

$$u_\varepsilon \to u \text{ слабо в } \mathcal{H}, \quad u'_\varepsilon \to u' \text{ слабо в } \mathcal{H}^*, \tag{3.58}$$

где u — некоторая функция из $\mathcal{W}$. Ввиду оценки

$$\|u\|_{C([T_1, T_2], L^2(\Omega))} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}}, \quad \forall u \in \mathcal{W}, \tag{3.59}$$

из (3.58) следует, что $u(T_1)=0$, так что $u \in \mathcal{W}_0$. Докажем, что u есть искомое обобщенное решение задачи (2.5). Поскольку из (3.39) следует, что

$$\varepsilon\left|\int_{T_1}^{T_2}(u'_\varepsilon, \eta')\,dt\right| \leqslant \varepsilon\|u'_\varepsilon\|_{2, Q}\|\eta'\|_{2, Q} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,\|\eta'\|_{2, Q} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{3.60}$$

то, переходя к пределу в тождестве (3.38), получим при $\forall \eta \in \mathcal{Y}_0$ равенство

$$\int_{T_1}^{T_2}(u', \eta)\,dt + \langle f, \eta\rangle = \langle \mathcal{F}, \eta\rangle, \tag{3.61}$$

где f есть слабый предел $\mathcal{A}u_\varepsilon$ в $\mathcal{H}$ при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $\mathcal{Y}_0$ плотно в $\mathcal{H}$, то (3.61) справедливо и при $\forall \eta \in \mathcal{H}$, в частности, при $\forall \eta \in \mathcal{W}_0$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что $f = \mathcal{A}u$. Воспользуемся для этого условием (3.57). Из (3.57) следует, что при $\forall \xi \in \mathcal{Y}_0$

$$\varepsilon\int_{T_1}^{T_2}(u'_\varepsilon - \xi', u'_\varepsilon - \xi')\,dt + \int_{T_1}^{T_2}(u'_\varepsilon - \xi', u_\varepsilon - \xi)\,dt + \\ + \langle \mathcal{A}u_\varepsilon - \mathcal{A}\xi, u_\varepsilon - \xi\rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u_\varepsilon - \xi\|'_{\mathcal{W}}), \tag{3.62}$$

где $\rho = \sup\limits_\varepsilon \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{W}} + \|\xi\|_{\mathcal{W}}$, причем при выводе (3.62) были использованы леммы (1.25) и (1.26), а также неотрицательность первого слагаемого в (3.62). Вычитая из (3.62) равенство (3.29) с заменой в последнем u на u_ε и η на $u_\varepsilon - \xi$, получим:

$$-\varepsilon\int_{T_1}^{T_2}(\xi', u'_\varepsilon - \xi')\,dt - \int_{T_1}^{T_2}(\xi', u_\varepsilon - \xi)\,dt - \langle \mathcal{A}\xi, u_\varepsilon - \xi\rangle \geqslant \\ \geqslant -\langle \mathcal{F}, u_\varepsilon - \xi\rangle - \gamma(\rho, \|u_\varepsilon - \xi\|'_{\mathcal{W}}), \quad \xi \in \mathcal{Y}_0. \tag{3.63}$$

Устремляя в (3.63) ε к 0 и учитывая (3.58), свойства функции $\gamma(\cdot,\cdot)$ и компактность нормы $\|\cdot\|'_{\mathcal{W}}$ относительно $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, выведем из (3.63) неравенство

$$-\int_{T_1}^{T_2}(\xi', u - \xi)\,dt - \langle \mathcal{A}\xi, u - \xi\rangle \geqslant -\langle \mathcal{F}, u - \xi\rangle - \\ - \gamma(\rho, \|u - \xi\|'_W), \quad \forall \xi \in \mathcal{Y}_0. \tag{3.64}$$

Складывая (3.64) и (3.61) при $\eta = u - \xi \in \mathcal{W}_0$, находим:

$$\int_{T_1}^{T_2}(u' - \xi', u - \xi)\,dt + \langle f - \mathcal{A}\xi, u - \xi\rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u - \xi\|'_{\mathcal{W}}), \quad \forall \xi \in \mathcal{Y}_0. \tag{3.65}$$

Поскольку $\mathscr{Y}_0$ плотно в $\mathscr{W}_0$, то неравенство (3.65) справедливо и при $\forall \xi \in \mathscr{W}_0$. Полагая тогда в (3.65) $\xi = u - \delta\eta$, $\delta > 0$, $\eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Omega_{T_1}}(Q) \subset \mathscr{W}_0$, получим:

$$\delta^2 \int_{T_1}^{T_2} (\eta', \eta)\, dt + \delta \langle f - \mathscr{A}(u - \delta\eta), \eta \rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|\delta\eta\|_{\mathscr{W}}'), \quad \forall \eta \in \mathscr{W}_0. \quad (3.66)$$

Деля обе части (3.66) на δ и устремляя δ к 0, получим, учитывая свойства функции γ и непрерывность оператора $\mathscr{A}: \mathscr{X} \to \mathscr{H}^*$, неравенство

$$\langle f - \mathscr{A}u, \eta \rangle \geqslant 0, \quad \forall \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Omega_{T_1}}(Q). \quad (3.67)$$

Ввиду плотности $\tilde{C}^1_{0, \Sigma_1 \cup \Omega_{T_1}}(Q)$ в $\mathscr{H}$ из (3.67) немедленно следует, что $\mathscr{A}u = f$. Теорема 3.2 доказана.

В силу леммы 3.5 из теоремы 3.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (3.20) *и* (3.26). *Предположим также, что сужение оператора* $\mathscr{A}: \mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$ *на множество* $\mathscr{W}_0$ *удовлетворяет условию*

$$\begin{gathered} \langle \mathscr{A}u - \mathscr{A}v, u - v \rangle \geqslant -\gamma(\rho, \|u - v\|_{l, l_0, Q}), \quad u, v \in \mathscr{W}_0, \\ \|u\|_{\mathscr{W}} \leqslant \rho, \quad \|v\|_{\mathscr{W}} \leqslant \rho, \end{gathered} \quad (3.68)$$

где показатели l, l_0 *удовлетворяют условиям* (3.15). *Тогда при любом* $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ *задача* (2.5) *имеет хотя бы одно обобщенное решение.*

Рассмотрим теперь вопрос о единственности обобщенного решения задачи (2.5). Очевидно, что леммы 2.1, 2.2 сохраняются и для уравнений, имеющих $(A, 0, 2, \overline{m})$-структуру в Q. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.10. *Пусть выполнены условия* (3.20), *и пусть операторы* $A_t: H \to H^*$, *где* $H \equiv \overset{0, \sigma_1}{H}_{l, \overline{m}}(A; \Omega; \sigma_1, \lambda)$, *определенные по формуле* (2.12) *при* $t \in [T_1, T_2]$, *монотонны. В частности, указанные операторы будут монотонны, если при п. в.* $(t, x) \in Q$ *и любых* u, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, q, $\xi \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial l'^i}{\partial q_j} \xi_i \xi_j + \frac{\partial l'^i}{\partial u} \xi_0 \xi_i + \frac{\partial l_0'}{\partial q_j} \xi_j \xi_0 + \frac{\partial l_0'}{\partial u} \xi_0^2 \geqslant 0. \quad (3.69)$$

Тогда при $\forall \mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ *задача* (2.5) *имеет не более одного обобщенного решения.*

Из замечания 3.2 вытекает следующая теорема единственности, относящаяся к случаю $\overline{m} = 2$.

Лемма 3.11. *Пусть условия* (3.26) *выполнены при* $\overline{m} = 2$ *и* $\hat{\varphi} \equiv 0$ *в* Q. *Тогда при любом* $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$ *задача* (2.5) *имеет не более одного обобщенного решения.*

В заключение этого параграфа приведем простой критерий выполнимости условия (3.68).

Лемма 3.12. *Пусть выполнены условия* (3.20) *и следующие условия:*

1) *функции* $l'^i(t, x, u, q)$, $i = 1, \ldots, n$, $l_0'(t, x, u, q)$ *имеют вид*

$$\begin{aligned} l'^i(t, x, u, q) &= \overline{l}'^i(t, x, u, q) + \overline{\overline{l}}'^i(t, x, u), \quad l_0'(t, x, u, q) = \\ &= \overline{l}_0'(t, x, u, q) + \overline{\overline{l}}_0'(t, x, u, q); \end{aligned} \quad (3.70)$$

2) *оператор* $\mathscr{A}:\mathscr{H}\to\mathscr{H}^*$, *определенный по формуле*

$$\langle\mathscr{A}u,\ \eta\rangle=\iint\limits_Q(\bar{\mathbf{l}}'\cdot A\nabla\eta+\bar{l}_0'\eta)\,dtdx+\int\limits_{\Sigma_3}\lambda u\eta ds,\ u,\ \eta\in\mathscr{H},\tag{3.71}$$

удовлетворяет условию

$$\langle\mathscr{A}u-\mathscr{A}v,\ u-v\rangle\geqslant\alpha_0\|A\nabla u\|^{\bar{m}}_{\bar{m},Q},\quad u,\ v\in\mathscr{H},\ \alpha_0=\mathrm{const}>0;\tag{3.72}$$

3) *при п. в.* $(t,\ x)\in Q$ *и любых* $u\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$ *справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial\bar{l}'^i}{\partial u}\right|\leqslant a_5|u|^{2/\bar{m}'-1}+\psi_i;\quad\left|\frac{\partial\bar{l}_0'}{\partial q_i}\right|\leqslant a_6|q|^{\bar{m}/2-1}+\tilde{\psi}_i;$$
$$\left|\frac{\partial\bar{l}_0'}{\partial u}\right|\leqslant\psi_0,\quad i=1,\ \ldots,\ n,\tag{3.73}$$

где $a_5^{\bar{m}'}$, a_6^2, ψ_i, $\tilde{\psi}_i\in L^{q,q_0}(Q)$, $\psi_0\in L^{s,s_0}(Q)$, $1/q=1/\bar{m}'-1/l$, $1/q_0=1/\bar{m}'-1/l_0$, $2\leqslant\bar{m}$, $2\leqslant l\leqslant\bar{l}$, $2\leqslant l_0\leqslant\bar{l}_0$, *причем* $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ — *такие же показатели, как в* (3.21). *Тогда справедливо условие* (3.68).

Доказательство. Обозначим через $\bar{\bar{\mathscr{A}}}:\mathscr{H}\to\mathscr{H}^*$ оператор, определенный по формуле

$$\langle\bar{\bar{\mathscr{A}}}u,\ \eta\rangle=\iint\limits_Q[\bar{\bar{\mathbf{l}}}'(t,\ x,\ u)\cdot A\nabla\eta+\bar{\bar{l}}_0'(t,\ x,\ u,\ A\nabla u)\,\eta]\,dtdx,\quad u,\ \eta\in\mathscr{H}.\tag{3.74}$$

Учитывая условия 1) и 2), оценим при любых $u,\ v\in\mathscr{H}$:

$$\langle\mathscr{A}u-\mathscr{A}v,\ u-v\rangle=\langle\bar{\mathscr{A}}u-\bar{\mathscr{A}}v,\ u-v\rangle+\langle\bar{\bar{\mathscr{A}}}u-\bar{\bar{\mathscr{A}}}v,\ u-v\rangle\geqslant$$
$$\geqslant\alpha_0\|A\nabla(u-v)\|^{\bar{m}}_{\bar{m},Q}+\iint\limits_Q\{[\bar{\bar{l}}'^i(t,\ x,\ u)-\bar{\bar{l}}'^i(t,\ x,\ v)]\,A_i\nabla(u-v)+$$
$$+[\bar{\bar{l}}_0'(t,\ x,\ u,\ A\nabla u)-\bar{\bar{l}}_0'(t,\ x,\ v,\ A\nabla v)](u-v)\}\,dtdx+\int\limits_{\Sigma_3}\lambda(u-v)^2ds\geqslant$$
$$\geqslant\alpha_0\|A\nabla(u-v)\|^{\bar{m}}_{\bar{m},Q}+\iint\limits_Q\int\limits_0^1\left\{\frac{\partial\bar{\bar{l}}'^i(t,\ x,\ v+\tau(u-v))}{\partial u}(u-v)\,A_i\nabla(u-v)+\right.$$
$$+\frac{\partial\bar{\bar{l}}_0'(t,\ x,\ v+\tau(u-v),\ A\nabla v+\tau A\nabla(u-v))}{\partial u}(u-v)^2+$$
$$\left.+\frac{\partial\bar{\bar{l}}_0'(t,\ x,\ v+\tau(u-v),\ A\nabla v+\tau A\nabla(u-v))}{\partial q_j}A_j\nabla(u-v)(u-v)\right\}d\tau dtdx\equiv$$
$$\equiv:\alpha_0\|A\nabla(u-v)\|^{\bar{m}}_{\bar{m},Q}+I_1+I_2+I_3.\tag{3.75}$$

Учитывая условие 3) и применяя неравенство Гельдера, оценим

$$|I_1|\leqslant\frac{\alpha_0}{4}\|A\nabla u\|^{\bar{m}}_{\bar{m},Q}+c_1\|a_5\|^{\bar{m}}_{\bar{m}s,\ \bar{m}s_0,\ Q}\|u-v\|^2_{l,\ l_0,\ Q},$$
$$|I_3|\leqslant\frac{\alpha_0}{4}\|A\nabla u\|^{\bar{m}}_{\bar{m},Q}+c_2\left(\|a_6\|^2_{2s,\ 2s_0,\ Q}\|u-v\|^2_{l,\ l_0,\ Q}+\|\psi\|^{\bar{m}'}_{q,\ q_0,\ Q}\|u-v\|^{\bar{m}'}_{l,\ l_0,\ Q}\right),\tag{3.76}$$
$$|I_2|\leqslant\|\psi_0\|_{s,\ s_0,\ Q}\|u-v\|^2_{l,\ l_0,\ Q},$$

где $c_1=c_1(\alpha_0)$, $c_2=c_2(\alpha_0)$. Из (3.75), (3.76) следует, что при любых $u,\ v\in\mathscr{W}_0$, $\|u\|_{\mathscr{W}}\leqslant\rho$, $\|v\|_{\mathscr{W}}\leqslant\rho$,

$$\langle\mathscr{L}u-\mathscr{L}v,\ u-v\rangle\geqslant\frac{\alpha_0}{2}\|A\nabla(u-v)\|^{\bar{m}}_{\bar{m},Q}-$$
$$-c_3\left(\|u-v\|^2_{l,\ l_0,\ Q}+\|u-v\|^{\bar{m}'}_{l,\ l_0,\ Q}\right).\tag{3.77}$$

Очевидно, что из (3.77) и леммы 3.5 и следует справедливость условия (3.68). Лемма 3.12 доказана.

Из теоремы 3.3 и лемм 3.12 и 3.11 вытекает, в частности, следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* (3.20), (3.26), (3.70)—(3.73). *Тогда при* $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{H}^*$ *задача* (2.5) *имеет хотя бы одно обобщенное решение. В случае* $\bar{m}=2$ *и* $\hat{\psi}\equiv 0$ *в* (3.26) *задача* (2.5) *имеет точно одно обобщенное решение.*

§ 4. Линейные A-параболические уравнения со слабым вырождением

Рассмотрим в цилиндре $Q=\Omega\times(T_1, T_2)$, где Ω — ограниченная строго липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha^{ij}u_{x_j}+\alpha^i u+g^i)+\beta^i u_{x_i}+\beta_0 u+g_0=f, \tag{4.1}$$

где, вообще говоря, несимметричная матрица $\mathfrak{A}\equiv\|\alpha^{ij}(t, x)\|$ положительно определена при п. в. $(t, x)\in Q$, а функции $\alpha^{ij}(t, x)$, $\alpha^i(t, x)$, $g^i(t, x)$, $\beta^i(t, x)$, $\beta_0(t, x)$, $g_0(t, x)$, $i, j=1, \ldots, n$, определены и измеримы в Q. Пусть существует такая константа $k_0>0$, что при п. в. $(t, x)\in Q$ и любых ξ, $\eta\in\mathbb{R}^n$

$$|\alpha^{ij}(t, x)\xi_i\eta_j|\leqslant k_0\sqrt{\alpha^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j}\,\sqrt{\alpha^{ij}(t, x)\eta_i\eta_j}, \tag{4.2}$$

и такие константы $k_1>0$ и $k_2>0$, что при п. в. $(t, x)\in Q$ и любых $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$k_1\hat{\alpha}^{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\alpha^{ij}(t, x)\xi_i\xi_j\leqslant k_2\hat{\alpha}^{ij}(x)\xi_i\xi_j, \tag{4.3}$$

где $\hat{\alpha}^{ij}(x)=(T_2-T_1)^{-1}\int\limits_{T_1}^{T_2}\alpha^{ij}(t, x)\,dt$, $i, j=1,\ldots, n$. Обозначим

$$A(x)=\left(\frac{\hat{\mathfrak{A}}+\hat{\mathfrak{A}}^*}{2}\right)^{1/2},$$

где $\hat{\mathfrak{A}}\equiv\hat{\mathfrak{A}}(x)\equiv\|\hat{\alpha}^{ij}(x)\|$. Очевидно, что

$$\mathfrak{A}\xi\cdot\xi\geqslant k_1\hat{\mathfrak{A}}\xi \tag{4.4}$$

и

$$\hat{\mathfrak{A}}\xi\cdot\xi=|A\xi|^2. \tag{4.5}$$

Предположим, что матрица $A=A(x)$ является слабо вырожденной в Ω относительно $\mathbf{m}=2$ (см. лемму 7.2.1 при $\mathbf{m}=2$), и пусть пространства $\mathcal{H}_\lambda\equiv\overset{0,\Sigma_1}{\mathcal{H}}_{l,l_0;2}(A; Q; \Sigma_3, \lambda)$ и $\mathcal{H}\equiv\overset{0,\Sigma_1}{\mathcal{H}}_{l,l_0;2}(A; Q)$ (см. (3.21)), где $\Sigma_1=\sigma_1\times(T_1, T_2)$, $\Sigma_2=\sigma_2\times(T_1, T_2)$, $\Sigma_3=\sigma_3\times(T_1, T_2)$, $\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3=\partial\Omega$, $\sigma_i\cup\sigma_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $i, j=1, 2, 3$, изоморфны. Из последних предположений вытекает справедливость условия вида (1.36).

Обозначая $\mathbf{l}(t, x, u, p)\equiv\mathfrak{A}p+\alpha u+\mathbf{g}$, $l_0(t, x, u, p)\equiv\beta\cdot p+\beta_0 u+g_0$, и учитывая, что $\mathbf{l}(t, x, u, p)=A^*(SAp+\mathbf{a}u+\mathbf{f})$, $l_0(t, x, u, p)=\boldsymbol{\gamma}\cdot Ap+a_0 u+f_0$, где $S=A^{-1}\mathfrak{A}A^{-1}$, $\mathbf{a}=A^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{f}=A^{-1}\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\gamma}=A^{-1}\boldsymbol{\beta}$, $a_0=\beta_0$, $f_0=g_0$ (при этом $A^*=A$), замечаем, что условие (2.2) выполнено при $\mathbf{l}'(t, x, u, q)=Sq+\mathbf{a}u+\mathbf{f}$ и $l_0'(t, x, u, q)=\boldsymbol{\gamma}\cdot q+a_0 u+f_0$. Пусть выполнены условия

$$\begin{gathered}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{L}^{2s, 2s_0}(Q),\quad A^{-1}\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{L}^{2s, 2s_0}(Q),\ \beta_0\in L^{s, s_0}(Q),\\ A^{-1}\mathbf{g}\in\mathbf{L}^2(Q),\quad g_0\in L^{l', l_0'}(Q),\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $1/s+2/l=1$, $1/s_0+2/l_0=1$, а показатели l, l_0 удовлетворяют условиям (3.27), в которых $\hat{l}$ и $\hat{l}_0$ определяются, так же как в (3.21), относительно показателей $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$, при которых неравенство (3.2) справедливо в случае $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0=2$. Пусть, например, для матрицы $B=\|b^{ij}(x)\|$, где $B=A^{-1}$, выполнены условия

$$b^{ij}\in L^{r_i}(\Omega),\ i,\ j=1,\ldots,n;\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{r_i}\leqslant 1,\quad i=1,\ldots,n, \tag{4.7}$$

и пусть числа r_{0i} удовлетворяют неравенствам $1/2+1/r_{0i}\leqslant 1$, $i=1,\ldots,n$. Тогда показатели $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_0$, при которых в силу леммы 3.1 будет верна оценка (3.2), имеют вид:

$$\frac{1}{q_i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{r_i},\quad \frac{1}{q_{0i}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{r_{0i}},\quad i=1,\ldots,n. \tag{4.8}$$

Находя по таким $\mathfrak{q}=(q_1,\ldots,q_n)$ и $\mathfrak{q}_0=(q_{01},\ldots,q_{0n})$ значения $\hat{l}$ и $\hat{l}_0$ (см. (3.21)), а по найденным значениям $\hat{l}$ и $\hat{l}_0$ — показатели l, l_0 (см. (3.27)), можно найти и требуемые в (4.6) значения s, s_0.

Покажем, что при сделанных предположениях уравнение (4.1) имеет $\widetilde{(A,\ 0,\ 2,\ 2)}$-структуру в цилиндре Q. Заметим прежде всего, что $\|S\|=\|A^{-1}\mathfrak{A}A^{-1}\|=\mu=\mathrm{const}$ при п. в. $(t,\ x)\in Q$. Действительно, пусть $p=Aq$, $\xi=A\eta$, $q\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Учитывая (4.2), (4.3), (4.5), оценим

$$\begin{aligned}|A^{-1}\mathfrak{A}A^{-1}p\cdot\xi|&=|\mathfrak{A}q\cdot\eta|\leqslant k_0(\mathfrak{A}q\cdot q)^{1/2}(\mathfrak{A}\eta\cdot\eta)^{1/2}\leqslant\\ &\leqslant k_0k_2(\hat{\mathfrak{A}}q\cdot q)^{1/2}(\hat{\mathfrak{A}}\eta\cdot\eta)^{1/2}=k_0k_2|Aq||A\eta|=k_0k_2|p||\xi|.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Учитывая невырожденность матрицы A при п. в. $x\in\Omega$, заключаем, что из (4.9) следует: $\|S\|\leqslant k_0k_2$ при п. в. $(t,\ x)\in Q$. Из доказанного неравенства и условий (4.6) очевидным образом вытекает справедливость условий (3.20) при $\bar{m}=2$, $\mu_1=k_0k_2$, $a_1=|A^{-1}\boldsymbol{\alpha}|$, $\psi=|A^{-1}\mathbf{g}|$, $a_2=|A^{-1}\boldsymbol{\beta}|$, $a_3=|\beta_0|$, $\psi_0=|g_0|$, причем перечисленные функции суммируются по Q даже с несколько большими показателями, чем требуется в (3.20). Итак, уравнение 4.1 имеет $\widetilde{(A,\ 0,\ 2,\ 2)}$-структуру в Q. Легко видеть также, что в рассматриваемом случае условие (3.26) также выполнено (при $\bar{m}=2$). Действительно, учитывая, что здесь

$$l^{i}q_i+l_0'u=Sq\cdot q+\mathbf{a}\cdot qu+\mathbf{f}\cdot q+\boldsymbol{\gamma}\cdot qu+a_0u^2+f_0u, \tag{4.10}$$

где $Sq\cdot q=\mathfrak{A}(A^{-1}q)\cdot A^{-1}q\geqslant k_1|A(A^{-1}q)|^2=k_1|q|^2$ (см. (4.4) и (4.5)), и оценивая

$$\begin{gathered}|\mathbf{a}\cdot qu|\leqslant\frac{k_1}{6}|q|^2+\frac{3}{2k_1}|\mathbf{a}|^2u^2,\quad |\boldsymbol{\gamma}\cdot q|u\leqslant\frac{k_1}{6}|q|^2+\frac{3}{2k_1}|\boldsymbol{\gamma}|^2u^2,\\ |f\cdot q|\leqslant\frac{k_1}{6}|q|^2+\frac{3}{2k_1}|\mathbf{f}|^2,\quad |f_0u|\leqslant\frac{1}{2}|f_0|^{2-\varkappa}+\frac{1}{2}|f_0|^{\varkappa}u^2,\\ |a_0u^2|\leqslant|a_0|u^2,\end{gathered} \tag{4.11}$$

причем $\varkappa=\min(l'/s,\ l_0'/s_0)\in(0,\ 1)$, заключаем, что неравенство (3.26) справедливо при $\bar{m}=2$, $\nu=k_1/2$, $\hat{a}=3/2k_1(|\mathbf{a}|^2+|\boldsymbol{\gamma}|^2)+|a_0|+1/2|f_0|^{\varkappa}\in L^{s,s_0}(Q)$, $\hat{\varphi}=(3/2k_1)|\mathbf{f}|^2+(1/2)|f_0|^{2-\varkappa}\in L^1(Q)$ (при этом мы учитываем, что

$$\||f_0|^{\varkappa}\|_{s,s_0,Q}=\|f_0\|^{\varkappa}_{\varkappa s,\varkappa s_0,Q}\leqslant c\|f_0\|^{\varkappa}_{l',l_0',Q}$$

и

$$\||f_0|^{2-\varkappa}\|_{1,Q}=\|f_0\|^{2-\varkappa}_{2-\varkappa,Q}=\|f_0\|^{2-\varkappa}_{\min(l',l_0'),Q}\leqslant c\|f_0\|^{2-\varkappa}_{l',l_0',Q}.$$

Таким образом, условие вида (3.26) выполнено.

Рассмотрим для уравнения (4.1) общую краевую задачу (2.5), которая приобретает здесь вид

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha^{ij}u_{x_j} + \alpha^i u + g^i) + \beta^i u_{x_i} + \beta_0 u + g_0 = f \text{ в } Q,$$

$$u = 0 \text{ на } (\sigma_1 \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial N} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu} u + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ на } \sigma_2 \times (T_1, T_2), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu} - \lambda)u + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ на } \sigma_3 \times (T_1, T_2),$$

где λ — заданная на $\sigma_3 \times (T_1, T_2)$ функция, $\frac{\partial u}{\partial N} \equiv \alpha^{ij}u_{x_j}\nu_i \equiv A\nabla u \cdot A\boldsymbol{\nu}$, $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 = \partial\Omega$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. Обобщенное решение задачи (4.12) можно определить как всякую функцию $u \in \mathscr{W}_0$ (где $\mathscr{W}_0 \equiv \equiv \{u \in \mathscr{H} \equiv \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{l, l_0; 2}(A, Q) : u' \in \mathscr{H}^*, u(T_1) = 0\}$, причем l, l_0 определяются условиями (3.21) для $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ из (3.2) при $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = 2$), удовлетворяющую тождеству

$$\iint_Q [\mathfrak{A} \cdot \nabla u + \boldsymbol{\alpha} u + \mathbf{g}) \cdot \nabla\eta + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \beta_0 u + g_0)\eta dt dx + \int_{T_1}^{T_2} (u', \eta)\, dt + $$
$$+ \int_{\Sigma_3} \lambda u \eta ds = \iint_Q f\eta dt dx, \quad \forall \eta \in \tilde{C}^1_{0, \Sigma_1}(Q). \quad (4.13)$$

Вместо f в (4.12) можно брать произвольный элемент $\mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$. Тогда в правой части (4.13) вместо интеграла $\iint_Q f\eta dt dx$ будет стоять $\langle \mathscr{F}, \eta \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — сопряжение между $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}^*$.

Теорема 4.1. *При условиях, перечисленных в этом параграфе (в частности, при условиях* (4.2), (4.3), (4.6)) *задача* (4.12) *имеет при* $\forall f \equiv \equiv \mathscr{F} \in \mathscr{H}^*$, *где* $\mathscr{H} \equiv \overset{0,\Sigma}{\mathscr{H}}_{l, l_0; 2}(A, Q)$, *точно одно обобщенное решение.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.4 и установленной выше справедливости условий вида (3.20), (3.26) (при $\bar{m} = 2$) для доказательства существования обобщенного решения задачи (4.12) достаточно убедиться в справедливости условий вида (3.70)—(3.73) (при $\bar{m} = 2$). Положим:

$$\begin{aligned} &\bar{\mathrm{l}}'(t, x, u, q) \equiv Sq \equiv A^{-1}\mathfrak{A}A^{-1}q, \quad \bar{l}_0'(t, x, u, q) \equiv 0, \\ &\bar{\bar{\mathrm{l}}}'(t, x, u, q) \equiv \mathbf{a}u + f, \quad \bar{\bar{l}}_0'(t, x, u, q) = \gamma \cdot q + a_0 u + f_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Очевидно, что при таких $\bar{\mathrm{l}}'$, $\bar{l}_0'$, $\bar{\bar{\mathrm{l}}}'$, $\bar{\bar{l}}_0'$ справедливо условие (3.70), а для оператора $\mathscr{A} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}^*$, определенного по формуле (3.71), справедливо неравенство вида (3.72) при $\bar{m} = 2$, $\alpha_0 = k_1$. Учитывая, что $\frac{\partial \bar{\bar{l}}'^i}{\partial u} = a^i$, $\frac{\partial \bar{\bar{l}}_0'}{\partial q_j} = \gamma^j$, $\frac{\partial \bar{\bar{l}}_0'}{\partial u} = a_0$, $i, j = 1, \ldots, n$, заключаем ввиду (4.6), что условия (3.73) выполнены при $\bar{m} = 2$, $\psi_1 = |\mathbf{a}| = |A^{-1}\boldsymbol{\alpha}|$, $\psi_2 = |\boldsymbol{\gamma}| \equiv |A^{-1}\boldsymbol{\beta}|$, $\psi_3 = |a_0| \equiv |\beta_0|$. Таким образом, существование обобщенного решения задачи (4.12) установлено.

Докажем теперь единственность такого решения. Очевидно, что разность $u \equiv u^1 - u^2$ двух обобщенных решений задачи (4.12) является обобщенным решением соответствующей однородной задачи, которая характеризуется условиями $\mathbf{g} \equiv \mathbf{0}$, $g_0 \equiv 0$, $f \equiv 0$ в (4.1). В этом случае неравенство вида (3.36) выполняется при $\psi \equiv 0$ (и $\bar{m} = 2$). Тогда из той же теоремы 3.4

(или леммы 3.11) вытекает единственность обобщенного решения задачи (4.12). *Теорема 4.1 доказана.*

Замечание 4.1. Аналогичный результат можно доказать и при замене в условиях (4.6) показателей l, l_0 на предельные показатели $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ (такие же, как в условиях (3.21) при $m=2$, $m_0=2$) путем склеивания обобщенных решений задач вида (4.12), соответствующих частичным промежуткам $[T_1, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2], \ldots, [\tau_{N-1}, T_2]$, длины которых не превосходят достаточно малого (фиксированного) числа $\delta > 0$. Однако этот случай требует изменения схемы доказательства, использованной выше. Поэтому мы ограничимся здесь ссылкой на работу автора [43], в которой изложен способ доказательства теоремы существования и единственности в случае первой краевой задачи при указанных предельных условиях на показатели пространства $\mathscr{H}$.

ЧАСТЬ IV

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Теория зависимости дифференциальных свойств обобщенных решений квазилинейных невырожденных эллиптических и параболических уравнений дивергентного вида от свойств функций, образующих эти уравнения, изложена в монографиях О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой [80, 83]. В этой части изучаются вопросы регулярности и некоторые качественные вопросы для обобщенных решений квазилинейных (A, $\mathbf{0}$)-параболических уравнений со слабым пространственным вырождением, содержащих невырожденные параболические уравнения как частный случай. Мы рассматриваем здесь вопросы регулярности как обобщенных решений общей краевой задачи вида (8. 2. 5), так и просто обобщенных решений (A, $\mathbf{0}$)-параболических уравнений вида

$$u_t - \frac{d}{dx_i} l^i(t, x, u, \nabla u) + l_0(t, x, u, \nabla u) = 0, \tag{1}$$

имеющих $\widetrightarrow{(A, \mathbf{0}, 2, 2)}$-структуру относительно слабо вырожденной в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$ матрицы $A \equiv \|a^{ij}(x)\|$ (см. § 8. 3). Из полученных результатов видно, как с улучшением регулярности функций, образующих уравнение, улучшаются и свойства их обобщенных решений. Это улучшение, однако, не беспредельно, как в случае невырожденных параболических уравнений, поскольку наличие слабого вырождения ставит преграду на пути улучшения дифференциальных свойств функций, определяющих структуру рассматриваемых уравнений.

При самых исходных предположениях о структуре уравнений устанавливаются интегральная гельдеровость обобщенных решений по переменной t с показателем $1/2$, а также энергетическое неравенство для обобщенных решений краевой задачи (8. 2. 5). Дальнейшее улучшение свойств обобщенных решений зависит от степени вырождения матрицы A. Продвижение в этом направлении возможно лишь после разработки специальной техники, устанавливающей возможность производить подстановки вида $\eta = f(u(t, x)) \times \times \psi(t, x)$, где $f(u)$ имеет равномерно липшицеву на $\mathbb{R}$ производную $f'(u)$, а $\psi(t, x)$ — гладкая функция, в интегральном тождестве, определяющем обобщенное решение задачи (8. 2. 5), или в интегральном тождестве

$$\int_{T_1}^{T_2} (u', \eta)\, dt + \iint_Q [\mathbf{l}'(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla u + l_0'(t, x, u, A\nabla u)\eta]\, dt dx = 0, \quad \eta \in C_0^1(Q), \tag{2}$$

определяющем обобщенное решение $u \in \mathcal{W} \equiv \{u \in \mathcal{H}_{2,(l,l_0)}(A, Q) : u' \in \in (\mathcal{H}_{2,(l,l_0)}(A, Q))^*\}$ (см. § 8.3) уравнения (1) в цилиндре Q. При решении этого вопроса мы существенно используем доказанный в 8.1 факт сильной сходимости усреднений по переменной t от функции из $\mathcal{W}$ к самой этой функции в норме пространства $\mathcal{W}$. Подставляя в качестве пробной функции η в указанных выше интегральных тождествах срезки степеней обобщенных решений, пользуясь вложением $\mathcal{W} \to L^{l,l_0}(Q)$ при подходящих l, l_0 и осуществляя некоторые предельные переходы, устанавливаем оценки обобщенных решений в нормах L^{p,p_0} и L^{∞} и одновременно доказываем принадлежность этих решений к пространствам L^{p,p_0} и L^{∞}. Промежуточным случаем указанных выше свойств оказывается экспоненциальная суммируемость обобщенных решений и соответствующая оценка интегралов $\int\int \exp\{c|u(t,x)|\}\times \times dtdx$. Таким образом, при доказательстве перечисленных результатов автор шел по пути развития известной итерационной техники Ю. Мозера [**26**, **27**]. Первоначально он, находясь в рамках невырожденных эллиптических и параболических уравнений, устанавливал подобные результаты, используя подходы О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой к получению оценок максимума модуля обобщенных решений [80, 77, 22—24]. Однако автор не пользуется последним способом в этой монографии.

При исследовании вопроса об ограниченности обобщенных решений установлена квалифицированная оценка вида

$$m - c_1 k_1 \leqslant u(t, x) \leqslant M + c_2 k_2, \tag{3}$$

где k_1 и k_2 зависят от структуры уравнения, m и M — в определенном смысле нижняя и верхняя границы решения $u(t, x)$ на параболической границе цилиндра Q, c_1, c_2 — константы, а само неравенство справедливо при п. в. $(t, x) \in Q$. Из неравенств (3) следует, в частности, что при более жестких ограничениях на структуру уравнения ($k_1 = k_2 = 0$) обобщенное решение $u(t, x)$ обязательно принимает наименьшее и наибольшее (в существенном смысле) значения в $\bar{Q}$ на параболической границе цилиндра Q. Частные случаи результатов по принадлежности обобщенных решений уравнений вида (1) к пространствам $L^{p,p_0}(Q)$ и их экспоненциальной суммируемости были получены в работах [22—24, **16**] (линейные невырожденные уравнения), [25] (квазилинейные невырожденные уравнения), [32, 33] (линейные слабо вырожденные уравнения) и [43] (квазилинейные слабо вырожденные уравнения).

Частные случаи результатов по локальной и глобальной ограниченности обобщенных решений уравнений вида (1) установлены в работах [80, 98, **27**, **16**, 67, 68, 22—24] (линейные невырожденные уравнения), [25, 77, **2**, **3**] (квазилинейные невырожденные уравнения), [33] (линейные слабо вырожденные уравнения), [70] (квазилинейные (A, **0**)-параболические слабо вырожденные уравнения в случае диагональной матрицы A при дополнительном предположении о существовании обобщенной производной $u_t \in L^2(Q)$ для обобщенного решения) и др. Результаты об ограниченности обобщенных решений квазилинейных (A, **0**)-параболических слабо вырожденных уравнений в случае полной матрицы A установлены в работе автора [43].

Отметим, что условие независимости от t матрицы A, предполагаемое во всей гл. 9, вызвано желанием работать с естественным классом обобщенных решений. Дополнительное предположение о существовании для обобщенного решения производной $u_t \in L^2(Q)$ приводит автоматически к сохранению всех доказанных здесь результатов при замене $A = \|a^{ij}(x)\|$ на $A = \|a^{ij}(t, x)\|$ (без какого бы то ни было изменения остальных условий, гарантирующих эти результаты). Заметим, однако, что в случае матриц $A = \|a^{ij}(t, x)\|$ отсутствуют результаты о существовании обобщенных решений краевых задач.

Ограниченность объема данной монографии не позволила включить в нее результаты автора, связанные с неравенством Гарнака для обобщенных решений уравнений вида (1) (см. [**28**, 25, **2**, **48**]), являющегося источником многочисленных применений качественного и количественного характера. В частности, важным следствием неравенства Гарнака является оценка константы Гельдера для обобщенных решений (1) (см. [**32**, 80, 98, 67, 24, 78, **2**, 70] и др.).

ГЛАВА 9

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

§ 1. Структура уравнений и их обобщенные решения

Рассмотрим в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$, где Ω — ограниченная строго липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, уравнение вида

$$u_t - \frac{d}{dx_i} l^i(t, x, u, \nabla u) + l_0(t, x, u, \nabla u) = 0, \tag{1.1}$$

предполагая, что оно имеет $\widetilde{(A, \mathbf{0}, 2, 2)}$-структуру (см. § 8. 3). Ниже мы выпишем в явном виде условия, выражающие высказанное выше предположение о структуре уравнения (1. 1) (допуская здесь несколько большую, чем в § 8. 3, конкретизацию этих условий). Пусть при п. в. $(t, x) \in Q$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\mathbf{l}(t, x, u, p) = A^* \mathbf{l}'(t, x, u, Ap), \quad l_0(t, x, u, p) = l_0'(t, x, u, Ap), \tag{1.2}$$

где функции $l'^i(t, x, u, p)$, $i = 1, \ldots, n$, $l_0'(t, x, u, p)$ удовлетворяют в $Q \times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условию Каратеодори, а для матрицы $A = \|a^{ij}(x)\|$ выполнены следующие условия:

1) $\det A \neq 0$ при п. в. $x \in \Omega$;

2) $a^{ij} \in L^2(\Omega)$, $\quad i, j = 1, \ldots, n$;

3) для элементов обратной к A матрицы $A^{-1} \equiv B \equiv \|b^{ij}(x)\|$ (1. 3)
справедливы условия $b^{ij} \in L^{r_i}(\Omega)$, $r_i \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} 1/r_i < 1.$$

Из леммы 8. 3. 4 вытекает, в частности, следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть выполнено условие* (1. 3), *и пусть числа* r_{0i}, $i = 1, \ldots, n$, *удовлетворяют условию*

$$r_{0i} \geqslant 2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Тогда справедливы вложения

$$\overset{\widetilde{0,\, \Gamma}}{\mathcal{H}}_2(A, Q) \to \overset{\widetilde{0,\, \Gamma}}{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}, q_0}(Q) \to L^{\mathbf{l}, l_0}(Q), \tag{1.5}$$

где Γ — *любое множество вида* $\Gamma = \gamma \times (T_1, T_2)$, $\gamma \subset \partial\Omega$ *(в частности, множество* γ *может быть пустым),* $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\mathbf{q}_0 = (q_{01}, \ldots, q_{0n})$,

$$1/q_i = 1/2 + 1/r_i, \quad 1/q_{0i} = 1/2 + 1/r_{0i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

а показатели $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ *определяются через указанные показатели* $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_0$ *условиями:*

$$1/\bar{l} = \bar{\alpha}/\hat{l} + \frac{1-\bar{\alpha}}{2}, \quad 1/\bar{l}_0 = \bar{\alpha}/\hat{l}_0, \quad \bar{\alpha} \in (0, \hat{l}_0/2),$$

$$1/\hat{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1/q_i - 1}{n} \text{ при } \sum_{i=1}^{n} 1/q_i > 1, \ n \geqslant 2, \tag{1.7}$$

$$\hat{l} \in (2, +\infty) \text{ при } \sum_{i=1}^{n} 1/q_i = 1, \ n = 2, \ \hat{l} \in (2, +\infty] \text{ при } n = 1, \ \hat{l}_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/q_{0i}}.$$

В частности, для любой функции $u \in \mathscr{H} \equiv \overset{\widetilde{0,\Gamma}}{\mathscr{H}_2}(A, Q)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{\bar{l}, \bar{l}_0, Q} \leqslant c_0 b \|u\|_{\mathscr{H}} \equiv c_0 b (\|u\|_{2, \infty, Q} + \|A\nabla u\|_{2, Q}), \tag{1.8}$$

где c_0 *зависит только от* n, r_i, r_{0i}, α, Ω, $T_2 - T_1$, *а* $b \equiv b(Q) \equiv \equiv \sup\limits_{i, j=1, \ldots, n} \|b^{ij}\|_{r_i, r_{0i}, Q}$. *Если вместо показателей* $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ *рассматриваются показатели, удовлетворяющие условиям*

$$1/l = \alpha/\hat{l} + \frac{1-\alpha}{2}; \quad 1/l_0 = \alpha/\hat{l}_0 + \frac{(1-\alpha)\beta}{2} < 1/2, \ \alpha \in (0, 1), \ \beta \in (0, 1);$$

$$\begin{gathered} 1/\hat{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1/q_i - 1}{n} \text{ при } \sum_{i=1}^{n} 1/q_i > 1, \ n \geqslant 2; \\ \hat{l} \in (2, +\infty) \text{ при } \sum_{i=1}^{n} 1/q_i = 1, \ n = 2; \ \hat{l} \in (2, +\infty] \text{ при } n = 1; \\ \hat{l}_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/q_{0i}}; \quad \mathbf{q}, \mathbf{q}_0 \text{ удовлетворяют условиям (1.6),} \end{gathered} \tag{1.9}$$

то при любом $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{l, l_0 Q} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\mathscr{H}} + c_1 \varepsilon^{-\lambda} \|u\|_{2, Q}, \tag{1.10}$$

где c_1 *зависит от тех же величин, что и* c_0, *а также от* β, *а* $\lambda > 0$ — *только от* α *и* β.

Из (1.3), (1.6), (1.7) следует, в частности, что $\bar{l} > 2$, $\bar{l}_0 > 2$, а из (1.3), (1.6) (1.9) — что $l > 2$, $l_0 > 2$.

Пусть при п. в. $(t, x) \in Q$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \mathbf{l}'(t, x, u, p) \cdot p \geqslant \nu |p|^2 - a_4(t, x) u^2 - h(t, x), \\ |l_0'(t, x, u, p)| \leqslant a_2(t, x) \sum_{i=1}^{n} |p_i| + a_3(t, x)|u| + g(t, x), \end{gathered} \tag{1.11}$$

$$|\mathbf{l}'(t, x, u, p)| \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} |p_i| + a_1(t, x)|u| + f(t, x), \tag{1.12}$$

где $\mu = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\nu = \mathrm{const} \geqslant 0$, $a_i(t, x) \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $f(t, x) \geqslant 0$, $g(t, x) \geqslant 0$, $h(t, k) \geqslant 0$, причем

$$\begin{aligned} &a_1^2,\ a_2^2,\ a_3,\ a_4 \in L^{\bar{s}, \bar{s}_0}(Q),\ 1/\bar{s} + 2/\bar{l} = 1,\ 1/\bar{s}_0 + 2/\bar{l}_0 = 1, \\ &f^2,\ h \in L^1(Q),\ g \in L^{\bar{l}', \bar{l}'_0}(Q),\ 1/\bar{l} + 1/\bar{l}' = 1,\ 1/\bar{l}_0 + 1/\bar{l}'_0 = 1, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$\bar{l}$, $\bar{l}_0$ — такие же показатели, как в (1.7).

Из условий (1.12) следует, в частности, что $\bar{s} \in (1, +\infty)$, $\bar{s}_0 \in (1, +\infty)$.

Замечание 1.1. Очевидно, что условия (1.11) и (1.12) будут выполнены, если функции $l_i(t, x, u, p)$, $i = 1, \ldots, n$, $l_0(t, x, u, p)$, образующие уравнение (1.1), удовлетворяют в $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условию Каратеодори и следующему условию: при п. в. $(t, x) \in Q$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\mathbf{l}(t, x, u, p) \cdot p \geqslant \nu |\tilde{A}p|^2 - a_4(t, x) u^2 - h(t, x), \\ &|l_0(t, x, u, p)| \leqslant a_2(t, x) \sum_{i=1}^{h} |\tilde{A}_i p| + a_3(t, x)|u| + g(t, x), \end{aligned} \tag{1.11'}$$

$$|(\tilde{A}^*)^{-1} \mathbf{l}(t, x, u, p)| \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} |\tilde{A}_i p| + a_1(t, x)|u| + f(t, x), \tag{1.12'}$$

где квадратная матрица $\tilde{A} = \tilde{A}(t, x)$ порядка n удовлетворяет следующему условию: существуют такие константы $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, что при п. в. $x \in \Omega$, п. в. $t \in [T_1, T_2]$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$k_1 |A\xi| \leqslant |\hat{A}\xi| \leqslant k_2 |A\xi|, \tag{1.14}$$

причем матрица $\hat{A} \equiv \|\hat{a}^{ij}(x)\|$ определяется из формулы

$$\hat{a}^{ij}(x) = (T_2 - T_1)^{-1} \int_{T_1}^{T_2} \tilde{a}^{ij}(t, x)\, dt, \quad i, j = 1, \ldots n, \tag{1.15}$$

и предполагается, что для такой матрицы A выполнено условие (1.3), а для функций a_1, a_2, a_3, a_4, f, g, h — условия вида (1.12) (относительно матрицы (1.15)). В частности, в случае, когда матрица $\tilde{A} = \|a^{ij}(t, x)\|$ в (1.13) диагональная, т. е.

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \tilde{\lambda}_1(t, x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_n(t, x) \end{Vmatrix}, \tag{1.16}$$

условия (1.11′), (1.12′) можно заменить эквивалентными условиями

$$\begin{aligned} &|l^i(t, x, u, p)| \leqslant \mu \tilde{\lambda}_i \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j |p_j| + a_1(t, x)|u| + f(t, x) \right), \\ &|l_0(t, x, u, p)| \leqslant a_2(t, x) \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j |p_j| + a_3(t, x)|u| + g(t, x), \\ &\mathbf{l}(t, x, u, p) \cdot p \geqslant \nu \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j p_j^2 - a_4(t, x) u^2 - h(t, x), \end{aligned} \tag{1.17}$$

причем предполагается, конечно, что для функций $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n$ выполнены условия, вытекающие из условий (1.14), (1.15) для матрицы (1.16), а остальные функции в (1.17) удовлетворяют условиям, соответствующим условию (1.13).

В тех случаях, когда речь будет идти о свойствах обобщенных решений краевой задачи для уравнения (1.1), мы всегда будем предполагать, что пространства $\overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,(l,l_0)}(A;\ Q;\ \sum_3,\ \lambda)$ и $\overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q)$ изоморфны, а это равносильно справедливости неравенства

$$\|u\|_{L^2(\lambda,\,\Sigma_3)} \leqslant c\|u\|_{\mathscr{H}_{2,(l,l_0)}}(A,\ Q), \quad \forall u \in \tilde{C}^1_{0,\,\Sigma_1}(\bar{Q}). \tag{1.18}$$

Вместе с предыдущими условиями условие (1.18) гарантирует справедливость условия (8.1.8).

При изучении локальных свойств обобщенных решений уравнения (1.1) (*точное определение обобщенного решения уравнения* (1.1) будет дано *ниже*) мы всегда будем предполагать, что выполнено условие:

$$\begin{gathered} a^{ij} \in L^{2s,\,2s_0}(Q), \quad i, j = 1, \ldots, n, \ \frac{1}{s}+\frac{2}{l}=1, \quad \frac{1}{s_0}+\frac{2}{l_0}=1, \\ l,\ l_0 \text{ — такие же, как в (1.7).} \end{gathered} \tag{1.19}$$

Напомним (см. § 8.2), что обобщенное решение задачи (8.2.5) определяется как всякая функция u, принадлежащая пространству $\mathscr{V} \equiv \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{W}}_0 \equiv$ $\equiv \left\{u \in \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q) : u' \in (\overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q))^*,\ u(0)=0\right\}$ и удовлетворяющая тождеству вида

$$\begin{gathered} \int\limits_{T_1}^{T_2}(u',\ \eta)\,dt + \iint\limits_{Q}(\mathbf{l}'\cdot A\nabla\eta + l_0'\eta)\,dtdx + \int\limits_{\Sigma_3}\lambda u|_{\Sigma_3}\eta\,ds = \langle\mathscr{F},\ \eta\rangle, \\ \forall\eta \in \tilde{C}^1_{0,\,\Sigma_1}(\bar{Q}), \end{gathered} \tag{1.20}$$

где u' — производная от функции u, рассматриваемой как элемент пространства $\mathscr{D}^*([T_1,\ T_2];\ (\overset{0,\Sigma_1}{H}_{2,l}(A,\ \Omega))^*)$. Ввиду предположения 8.3.1 обобщенное решение u задачи (8.2.5) принадлежит $\widetilde{\overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}}_2(A,\ Q) \subset C([T_1,\ T_2];\ L^2(\Omega))$. В дальнейшем целесообразно рассматривать общую краевую задачу для уравнения (1.1) с неоднородным начальным условием. Наоборот, ввиду леммы 8.1.8 при рассмотрении задачи (8.2.5) всегда можно считать, что $\mathscr{F}=0$, видоизменив подходящим образом функции $l^i(t,\ x,\ u,\ p)$, $i=1,\ldots,n$, и $l_0(t,\ x,\ u,\ p)$. Поэтому далее будет рассматриваться краевая задача следующего вида,

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx_i}\,l^i(t,\ x,\ u,\ \nabla u) + l_0(t,\ x,\ u,\ \nabla u) = 0 \ \text{ в } Q, \\ u=0 \ \text{ на } \textstyle\sum_1,\ \mathbf{l}'\cdot A\nu = 0 \ \text{ на } \sum_2,\ \mathbf{l}\cdot A\nu - \lambda u = 0 \ \text{ на } \sum_3, \\ u = u_0 \ \text{ на } \Omega_{T_1}, \end{gathered} \tag{1.21}$$

где $u_0 \in L^2(\Omega)$. Обобщенным решением задачи (1.21) называется всякая функция $u \in \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{W}} \equiv \left\{u \in \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q) : u' \in (\overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q))^*\right\}$, равная u_0 при $t=T_1$ и удовлетворяющая тождеству

$$\begin{gathered} \int\limits_{T_1}^{T_2}(u',\ \eta)\,dt + \iint\limits_{Q}(\mathbf{l}'\cdot A\nabla\eta + l_0'\eta)\,dtdx + \int\limits_{\Sigma_3}\lambda u|_{\Sigma_3}\eta\,ds = 0, \\ \forall\eta \in \tilde{C}^1_{0,\,\Sigma_1}(Q). \end{gathered} \tag{1.22}$$

Точно так же, как при доказательстве леммы 8.2.1, устанавливается, что тождество (1.22) влечет справедливость при всех $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ тождеств

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (u', \eta)\, dt + \iint_{Q_{\tau_1, \tau_2}} (\mathbf{l}' \cdot A\nabla\eta + l_0'\eta)\, dtdx + \int_{\Sigma_3} \lambda u|_{\Sigma_3} \eta ds = 0, \tag{1.23}$$

$$\forall \eta \in \overset{0, \Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2, (\bar{l}, \bar{l}_0)}(A, Q).$$

Введем теперь понятие обобщенного решения уравнения (1.1) в цилиндре Q. Таким решением будем называть всякую функцию $u \in \mathscr{W}$, где $\mathscr{W} \equiv \{u \in \mathscr{H}_{2, (\bar{l}, l_0)}(A, Q) : u' \in (\mathscr{H}_{2, (\bar{l}, l_0)}(A, Q))^*\}$, удовлетворяющую тождеству

$$\int_{T_1}^{T_2} (u', \eta)\, dt + \iint_{Q} (\mathbf{l}' \cdot A\nabla\eta + l_0'\eta)\, dtdx = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{C}_0^1(Q). \tag{1.24}$$

Ввиду леммы 8.1.6 тождество (1.24) справедливо и при любой функции $\eta \in \tilde{C}^1_{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}(Q)$, а следовательно, ввиду плотности $\tilde{C}^1_{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}(Q)$ в $\mathscr{H}_{2, (\bar{l}, l_0)}(A, Q)$ и при любой $\eta \in \overset{(0)}{\mathscr{H}} \equiv \overset{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}{\mathscr{H}}_{2, (\bar{l}, l_0)}(A, Q)$. Учитывая еще лемму 8.2.1, заключаем, что тождество (1.24) равносильно тому, что при любых $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ справедливы тождества

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (u', \eta)\, dt + \iint_{Q_{\tau_1, \tau_2}} (\mathbf{l}' \cdot A\nabla\eta + l_0'\eta)\, dtdx = 0, \tag{1.25}$$

$$\forall \eta \in \overset{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}{\mathscr{H}}.$$

Прежде чем ввести понятие локального обобщенного решения уравнения (1.1) в цилиндре Q, докажем следующую лемму.

Лемма 1.2. *При любых $u \in \mathscr{W}$, $\xi \in \tilde{C}^1_{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}(\bar{Q})$ функция $u\xi$ принадлежит $\overset{(0)}{\mathscr{W}} \equiv \overset{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}{\mathscr{W}}$.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathscr{W}$. Ввиду следствия 8.1.3 существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к функции u в $\mathscr{W}$. Докажем сначала, что последовательность $\{u_n\xi\}$, $u_n\xi \in \tilde{C}^1_{0, \partial\Omega\times(T_1, T_2)}(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к $u\xi$ по норме пространства $\mathscr{H}$. Действительно, учитывая условие (1.19), получим:

$$\|u_n\xi - u_m\xi\|_{\mathscr{H}} \leqslant \|(u_n - u_m)\xi\|_{\bar{l}, l_0, Q} + \|\xi A\nabla(u_n - u_m)\|_{2, Q} + \|A\nabla\xi(u_n - u_m)\|_{2, Q} \leqslant$$
$$\leqslant c\|u_n - u_m\|_{\bar{l}, l_0, Q} + c\|A\nabla(u_n - u_m)\|_{2, Q} + \|A\nabla\xi\|_{2\bar{s}, 2s_0, Q}\|u_n - u_m\|_{\bar{l}, l_0, Q}. \tag{1.26}$$

Из (1.26) вытекает, что последовательность $\{u_n\xi\}$ сходится в себе в $\mathscr{H}$. Очевидно, что $\{u_n\xi\}$ сходится к $u\xi$ в $L^{\bar{l}, l_0}(Q)$. Но тогда из доказанного следует, что $\{u_n\xi\}$ сходится к $u\xi$ и в $\mathscr{H}$, откуда $u\xi \in \overset{(0)}{\mathscr{H}}$. Для завершения доказательства леммы 1.2 достаточно теперь установить, что $(u\xi)' \in (\overset{(0)}{\mathscr{H}})^*$. Учитывая, что $u' \in \mathscr{H}^*$, имеем ввиду (8.1.19), (1.18) тождество

$$\langle u', \eta \rangle = \iint_{Q} (f_0\eta + f^k A_k\nabla\eta)\, dtdx, \quad \forall \eta \in \overset{(0)}{\mathscr{H}}, \tag{1.27}$$

где $f_0 \in L^{\bar{l}, l_0}(Q)$, $f^k \in L^2(Q)$, $k = 1, \ldots, n$. Полагая в (1.27) $\eta = \xi\tilde{\eta}$, $\forall \tilde{\eta} \in \tilde{C}^1(Q)$, получим

$$\langle u', \xi\eta \rangle = \iint_{Q} (g_0\tilde{\eta} + g^k A_k\nabla\tilde{\eta})\, dtdx, \quad \forall \tilde{\eta} \in \mathscr{H}, \tag{1.28}$$

где $g_0=f_0\xi+g^kA_k\nabla\xi$, $g_k=f_k\xi$, $k=1,\ldots,n$, причем $g_k\in L^2(Q)$, $k=1,\ldots,n$, $g_0\in L^{l',l'_0}(Q)$, поскольку ввиду условия (1.19) $\|g^kA_k\nabla\xi\|_{l',l_0,Q}\leqslant\|g^k\|_{2,Q}\times$ $\times\|A_k\nabla\xi\|_{2s,2s_0,Q}\leqslant\text{const}$, $k=1,\ldots,n$. Из (1.28) следует, в частности, тождество

$$\left.\begin{aligned}-\int_{T_1}^{T_2}(u\xi,\ \psi)\varphi'\,dt=\int_{T_1}^{T_2}(u\xi_t,\ \psi)\varphi dt+\int_{T_1}^{T_2}(u',\ \xi\psi)\varphi dt,\ \varphi\in\mathscr{D}([T_1,\ T_2]),\\ \psi\in\overset{0,\,\partial\Omega}{H},\end{aligned}\right\}\qquad(1.29)$$

где $(.,.)$ — сопряжение между H и H^*. Обозначим через $u'\xi$ тот элемент в $\mathscr{H}^*$, который определяется формулой (1.28), т. е. формулой

$$\langle u'\xi,\ \eta\rangle\overset{\text{def}}{=}\langle u',\ \xi\eta\rangle,\ \ \forall\eta\in\overset{(0)}{\mathscr{H}}.\qquad(1.30)$$

Тогда из (1.29), (1.30) вытекает равенство

$$(u\xi)'=u\xi'+u'\xi,\qquad(1.31)$$

где $u\xi'\equiv u\xi_t\in\overset{(0)}{\mathscr{H}}\subset(\overset{(0)}{\mathscr{H}})^*$, доказывающее, что $(u\xi)'\in(\overset{(0)}{\mathscr{H}})^*$. Лемма 1.2 доказана.

Обозначим:

$$\mathscr{W}_{\text{loc}}\equiv\left\{u\in L^2_{\text{loc}}(Q):\xi u\in\overset{(0)}{\mathscr{W}},\ \ \forall\xi\in\tilde{C}^1_{0,\,\partial\Omega\times(T_1,\,T_2)}(\bar{Q})\right\}.\qquad(1.32)$$

Из леммы 1.2 следует, что $\mathscr{W}\subset\mathscr{W}_{\text{loc}}$.

Локальным обобщенным решением уравнения (1.1) в цилиндре Q называется всякая функция $u\in\mathscr{W}_{\text{loc}}$, являющаяся обобщенным решением уравнения (1.1) в каждом цилиндре $\hat{Q}=\hat{\Omega}\times(\tau_1,\ \tau_2)$, $\hat{\Omega}\subset\Omega$, $T_1<\tau_1<\tau_2<T_2$. Очевидно, что для локального обобщенного решения уравнения (1.1) в цилиндре Q справедливо тождество (1.25) при любых τ_1, $\tau_2\in(T_1,\ T_2)$.

Из леммы 1.2 очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Каждое обобщенное решение уравнения* (1.1) *в цилиндре Q является и локальным обобщенным решением этого уравнения в цилиндре Q.*

§ 2. О регулярности обобщенных решений по переменной t

Здесь мы докажем, что обобщенные решения уравнения (1.1), рассматриваемого при условиях, указанных в предыдущем параграфе, удовлетворяют интегральному условию Гельдера с показателем 1/2. Аналогичный результат устанавливается и для обобщенных решений задачи (1.21).

Теорема 2.1. *Пусть u — обобщенное решение в цилиндре Q уравнения* (1.1), *рассматриваемого при условиях* (1.2)—(1.4), (1.11)—(1.13), (1.19). *Тогда для любого цилиндра $Q'=\Omega'\times(T_1,\ T_2)$, $\bar{\Omega}'\subset\Omega$, справедливо равенство*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|u(t,\ x)-u(t-h,\ x)\|^2_{2,Q'}}{h}=0,\qquad(2.1)$$

причем функция u считается продолженной вне отрезка $[T_1,\ T_2]$ по формуле (ii) *в* (4.7.2).

Доказательство. Положим в тождестве (1.25) (при $\tau_1=T_1$, $\tau_2=T_2$)

$$\eta=\xi^2(x)\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}[u(x,\ \eta+h)-u(x,\ \eta)]\,d\eta,\qquad(2.2)$$

где $\xi(x)$ — гладкая неотрицательная функция, равная 1 в Ω' и 0 вне некоторой подобласти Ω'', причем $\overline{\Omega'} \subset \Omega''$, $\overline{\Omega''} \subset \Omega$. Точно так же как в лемме 8.1.27 было доказано, что $u_h \in \overset{0,\,\partial\Omega\times(T_1,\,T_2)}{\mathcal{J}}$, устанавливается, что функция (2.2) принадлежит пространству $\overset{0,\,\partial\Omega\times(T_1,\,T_2)}{\mathcal{J}}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q)$. Обозначим:

$$\tilde{u} = \xi^2 u. \tag{2.3}$$

Точно так же как при доказательстве леммы 1.2, устанавливается, что $\tilde{u} \in \overset{(0)}{\mathcal{W}}$. Тогда из (1.25) вытекает, очевидно, следующее равенство,

$$\int_{T_1}^{T_2}\left(u',\ \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}[\tilde{u}(\eta+h,\ x)-\tilde{u}(\eta,\ x)]\,d\eta\right)dt = \langle Lu,\ \xi^2 v_h\rangle, \tag{2.4}$$

где

$$v_h = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}[u(\eta+h,\ x)-u(\eta,\ x)]\,d\eta$$

и

$$\langle Lu,\ \xi^2 v_h\rangle = -\iint_Q [\mathbf{l}'\cdot A\nabla(\xi^2 v_h) + l_0'\xi^2 v_h]\,dt\,dx. \tag{2.5}$$

Легко убедиться, что $\xi^2 v_h \to 0$ в $\mathcal{H}$ (в частности, здесь существенно используется условие $A = A(x)$). Тогда

$$\lim_{h\to 0}\langle Lu,\ \xi^2 v_h\rangle = 0. \tag{2.6}$$

Преобразуя (с учетом формулы (8.1.42)) левую часть равенства (2.4), получим

$$\int_{T_1}^{T_2}\left(u',\ h^{-1}\int_{t-h}^{t}[\tilde{u}(\eta+h,\ x)-\tilde{u}(\eta,\ x)]\,d\eta\right)dt = \int_\Omega \tilde{u}v_h dx\,\Big|_{T_1}^{T_2} -$$

$$-\frac{1}{h}\iint_Q \{\tilde{u}(t)[\tilde{u}(t+h)-\tilde{u}(t)] - \tilde{u}(t)[\tilde{u}(t)-\tilde{u}(t-h)]\}\,dt\,dx, \tag{2.7}$$

где $v_h = h^{-1}\int_{t-h}^{t}[u(\eta+h,\ x)-u(\eta,\ x)]\,d\eta$. Справедливо равенство

$$\frac{1}{h}\iint_Q \tilde{u}(t)[\tilde{u}(t)-\tilde{u}(t-h)]\,dt\,dx = \frac{1}{h}\iint_Q \tilde{u}(t-h)[\tilde{u}(t)-\tilde{u}(t-h)]\,dt\,dx +$$

$$+\frac{1}{h}\iint_Q [\tilde{u}(t)-\tilde{u}(t-h)]^2\,dt\,dx. \tag{2.8}$$

Из (2.8), (2.5), (2.4) следует:

$$\frac{1}{h}\iint_Q [\tilde{u}(t)-\tilde{u}(t-h)]^2\,dt\,dx = \langle Lu,\ \xi^2 v_h\rangle - \int_\Omega \tilde{u}v_h dx\,|_{T_1}^{T_2} +$$

$$+\frac{1}{h}\left\{\iint_Q \tilde{u}(t)[\tilde{u}(t+h)-\tilde{u}(t)]\,dt\,dx -\right.$$

$$\left.-\iint_Q \tilde{u}(t-h)[\tilde{u}(t)-\tilde{u}(t-h)]\,dt\,dx\right\}. \tag{2.9}$$

Очевидно, что выражение, стоящее в фигурных скобках в (2.9), равно

$$\int\limits_{T_2-h}^{T_2}\int\limits_{\Omega}\tilde{u}(t)[\tilde{u}(t+h)-\tilde{u}(t)]\,dtdx-\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{\Omega}\tilde{u}(t)[\tilde{u}(t+h)-\tilde{u}(t)]\,dtdx. \quad (2.10)$$

Учитывая, что $\tilde{u}\in C([T_1-T,\ T_2+T];\ L^2(\Omega))$, где $T=T_2-T_1$, легко убедиться, что выражение (2.10) стремится к 0 при $h\to 0$. По этой же причине

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\Omega}\tilde{u}v_h dx\,\Big|_{T_1}^{T_2}=0. \quad (2.11)$$

Тогда из (2.9), (2.6), (2.11) следует равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\iint\limits_{Q}[\tilde{u}(t)-\tilde{u}(t-h)]^2\,dtdx=0, \quad (2.12)$$

из которого и вытекает условие (2.1). Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11), (1.13), (1.18), *и пусть* u — *обобщенное решение задачи* (1.21). *Тогда*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|u(t,\ x)-u(t-h,\ x)\|^2_{2,\,Q}}{h}=0, \quad (2.13)$$

где функция u *считается продолженной вне отрезка* $[T_1,\ T_2]$ *по формуле* (ii) *в* (4.7.2).

Доказательство. Положим в тождестве (1.23) (при $\tau_1=T_1$, $\tau_2=T_2$)

$$\eta=v_h\equiv\frac{1}{h}\int\limits_{t-h}^{t}[u(\eta+h,\ x)-u(\eta,\ x)]\,d\eta. \quad (2.14)$$

Очевидно, что так определенная функция принадлежит пространству $\mathscr{Y}\equiv\equiv\overset{0,\,\Sigma_1}{\mathscr{Y}}_{2,\,(\bar{l},\,l_0)}(A,\ Q)$. Очевидно также, что $v_h\to 0$ в $\overset{0,\,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,\,(l,\,l_0)}(A,\ Q)\equiv\mathscr{H}$, а следовательно, ввиду изоморфности $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{H}_\lambda\equiv\overset{0,\,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,\,(\bar{l},\,l_0)}(A;\ Q;\ \Sigma_3,\ \lambda)$ $v_h\to 0$ в $\mathscr{H}$. Точно так же как и при доказательстве теоремы 2.1, устанавливаем равенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\iint\limits_{Q}[u(t)-u(t-h)]^2\,dtdx&=\langle Lu,\ v_h\rangle-\int\limits_{\Omega}uv_h dx\,\Big|_{T_1}^{T_2}-\\&-\int\limits_{\Sigma_3}\lambda u\,|_{\Sigma_3}v_h\,|_{\Sigma}\,ds+\frac{1}{h}\left\{\iint\limits_{Q}u(t)[u(t+h)-u(t)]\,dtdx-\right.\\&\left.-\iint\limits_{Q}u(t-h)[u(t)-u(t-h)]\,dtdx\right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\langle Lu,\ v_h\rangle$ определено по формуле (2.5) при $\xi\equiv 1$ в Ω. Переходя в (2.15) к пределу при $h\to 0$ и рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.1, получим равенство (2.13). Теорема 2.2 доказана.

§ 3. Энергетическое неравенство

Из неравенства (8.3.33) (в случае $\bar{m}=2$) и доказательства леммы 8.3.8 следует, что для любого обобщенного решения задачи (1.21), рассматриваемой при условиях (8.3.26)—(8.3.27), справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathscr{H}_\lambda}\equiv\|u\|_{2,\,\infty,\,Q}+\|A\nabla u\|_{2,\,Q}+\|u_0\|_{L^2(\lambda,\,\Sigma_3)}\leqslant c\,(\|\mathscr{F}\|_{(\mathscr{H}_\lambda)^*}+\|\tilde{\varphi}\|_{1,\,Q}), \quad (3.1)$$

где $c=c(\nu_0,\ \|\hat{a}\|_{s,\,s_0,\,Q})$, причем нетрудно заметить, что константа c зависит от нормы $\|\hat{a}\|_{s,\,s_0,\,Q}$ экспоненциальным образом. Заметим, что в условиях

(8.3.27), которые существенно использовались при выводе оценки (3.1), показатели s, s_0 не являлись предельными. Ниже мы устанавливаем энергетическое неравенство в случае предельных показателей.

Рассмотрим при условиях (1.2)—(1.4), (1.11), (1.13), (1.18) задачу вида (1.21). Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Для любой функции* $u \in \overset{0,\Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2,(l,\bar{l}_0)}(A, Q)$ *при любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t_1, t_2 \in [T_1, T_2]$ *справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} [l'(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta + l'_0(t, x, u, A\nabla u)\eta]\, dtdx \geqslant$$

$$\geqslant \nu \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} |A\nabla u|^2\, dtdx - e(\varepsilon, Q_{t_1,t_2})\left(\|u\|^2_{2,\infty,Q_{t_1,t_2}} + \right.$$

$$\left. + \|A\nabla u\|^2_{2,Q_{t_1,t_2}}\right) - E(\varepsilon, Q_{t_1,t_2}), \tag{3.2}$$

где

$$\begin{gathered} e(\varepsilon, Q_{t_1,t_2}) = c_0^2(Q)\, b^2(Q)\Big(\|a_2\|_{2\bar{s},2\bar{s}_0,Q_{t_1,t_2}} + \\ + \|a_3\|_{2\bar{s},2\bar{s}_0,Q_{t_1,t_2}} + \|a_4\|_{2\bar{s},2\bar{s}_0,\partial t_1,t_2} + \frac{\varepsilon}{2}\Big), \\ E(\varepsilon, Q_{t_1,t_2}) = \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|^2_{\bar{l}_0,\bar{l}'_0,Q_{t_1,t_2}} + \|h\|_{1,Q_{t_1,t_2}}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

причем $c_0(Q)$ — *константа из неравенства* (1.8) (*для всего цилиндра* Q), $b(Q) \equiv \sup\limits_{i,j=1,\dots,n} \|b^{ij}\|_{r_i,r_{0i},Q}$.

Доказательство. Неравенство (3.2) получается при помощи неравенства Гельдера с учетом условий (1.11) и того, что $b(Q)$ возрастает с ростом высоты цилиндра Q.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11), (1.13), (1.18). *Тогда для любого обобщенного решения задачи* (1.21) *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{\tilde{\mathscr{X}}_\lambda} \leqslant c\left(\|u_0\|_{2,\Omega} + \|g\|_{\bar{l}',\bar{l}'_0,Q} + \sqrt{\|h\|_{1,Q}}\right), \tag{3.4}$$

где c *зависит лишь от* n, ν, $\|a_2\|_{2s,2s,Q}$, $\|a_3\|_{s,s_0,Q}$, $\|a_4\|_{s,s_0,Q}$, $\bar{l}_0$, *константы* $c_0(Q)$ *из* (1.8) *и* $b(Q)$.

Доказательство. Полагая в тождестве (1.23) $\eta = u$, получим, учитывая формулу (8.1.42), равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2 dx\,\Big|_{t_1}^{t_2} + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} (\mathbf{l}' \cdot A\nabla u + l'_0 u)\, dtdx + \int\limits_{\sigma_3\times(t_1,t_2)} \lambda\left(u\,|_{\Sigma_3}\right)^2 ds = 0. \tag{3.5}$$

Применяя для среднего интеграла в (3.5) оценку (3.2), получим

$$\bar{\nu}\left[\int\limits_\Omega u^2 dx\,\Big|_{t_1}^{t_2} + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} |A\nabla u|^2\, dtdx + \int\limits_{\sigma_3\times(t_1,t_2)} \lambda\left(u\,|_{\Sigma_3}\right)^2 ds\right] \leqslant e\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_{Q_{t_1,t_2}} + E, \tag{3.6}$$

$$\bar{\nu} = \min(\nu, 1),$$

где $e_{t_1,t_2} = e(\varepsilon, Q_{t_1,t_2})$, $E_{t_1,t_2} = E(\varepsilon, Q_{t_1,t_2})$ определены по формулам (3.3), а через $\langle\!\langle u\rangle\!\rangle_{Q_{t_1,t_2}}$ обозначено выражение

$$\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_{Q_{t_1,t_2}} \equiv \|u\|^2_{2,\infty,Q_{t_1,t_2}} + \|A\nabla u\|^2_{2,Q_{t_1,t_2}} + \int\limits_{\sigma_3\times(t_1,t_2)} \lambda u^2_{\Sigma_3} ds. \tag{3.7}$$

Разобьем промежуток $[T_1, T_2]$ на части точками $T_1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k < \tau_{k+1} < \dots < \tau_N = T_2$ и обозначим $Q_k = \Omega \times (\tau_{k-1}, \tau_k)$.

Положим в (3.6) $t_1=\tau_{k-1}$, $t_2=\tau_{k-1}+\theta$, $k=1,\ldots,N$, где $\theta\in[0, \tau_k-\tau_{k-1}]$. Тогда при любом $k=1,\ldots,N$

$$\int\limits_\Omega u^2(x, \tau_{k-1}+\theta)\,dx+\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k-1}+\theta}\int\limits_\Omega |A\nabla u|^2\,dt\,dx+\int\limits_{\sigma_3\times(\tau_{k-1},\,\tau_{k-1}+\theta)}\lambda u^2_{\Sigma_3}ds\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\nu}[e_k\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_{Q_k}+E]+\int\limits_\Omega u^2(x, \tau_{k-1})\,dx, \tag{3.8}$$

где $e_k=e(\varepsilon, Q_k)$, $E=E(\varepsilon, Q)$. Из (3.8) легко следует неравенство

$$\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_{Q_k}\leqslant\frac{4}{\nu}e_k\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_{Q_k}+\frac{4}{\nu}E+2\int\limits_\Omega u^2(x, \tau_{k-1})\,dx,\ k=1,\ldots,N. \tag{3.9}$$

Пусть длины промежутков $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ и число ε настолько малы, что

$$\frac{4}{\nu}e_k\leqslant\frac{1}{2},\quad k=1, 2,\ldots, N. \tag{3.10}$$

Для выполнимости неравенства (3.10) достаточно положить $\varepsilon=\nu/8c_0^2b^2$, где c_0 и b — константы из (1.8) для всего цилиндра Q, и потребовать,*) чтобы

$$\|a_2\|_{2s,\,2s_0,\,Q_k}\leqslant\frac{\nu}{48c_0^2b^2},\quad \|a_3\|_{s,\,s_0,\,Q_k}\leqslant\frac{\nu}{48c_0^2b^2},\quad \|a_4\|_{s,\,s_0,\,Q_k}\leqslant\frac{\nu}{48c_0^2b^2},$$
$$k=1,\ldots,N. \tag{3.11}$$

Нетрудно убедиться, что при условии (3.11) число N точек деления отрезка $[T_1, T_2]$ можно взять не большим, чем

$$\left(\frac{\nu}{48c_0^2b^2}\right)^{-2s_0}\|a_2\|^{2s_0}_{2s,\,2s_0,\,Q}+\frac{\nu}{48c_0^2b^2}\|a_3\|^{s_0}_{s,\,s_0,\,Q}+\frac{\nu}{48c_0^2b^2}\|a_4\|^{s_0}_{s,\,s_0,\,Q}+1$$

(см. [24]). Из (3.9), (3.10) следуют неравенства

$$z_k\leqslant 4z_{k-1}+\frac{8}{\nu}E,\quad k=1,\ldots,N, \tag{3.12}$$

где $z_k\equiv\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_{Q_k}$, $k=1,\ldots,n$, $z_0=\|u(T_1, x)\|^2_{2,\Omega}=\|u_0\|^2_{2,\Omega}$. Из (3.10) легко следуют неравенства

$$z_k\leqslant 4^k\left(z_0+\frac{8}{\nu}E\right),\quad k=1,\ldots,N. \tag{3.13}$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^N z_k=\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_Q$, получаем неравенство

$$\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_Q\leqslant 4^{N+1}\|u_0\|_{2,\Omega}+\frac{32c_0^2b^2}{\nu^2}4^{N+1}\left(\|g\|^2_{l,\,l_0',\,Q}+\|h\|_{1,\,Q}\right). \tag{3.14}$$

Заменяя N на указанное выше выражение, завершим доказательство теоремы 3.1.

§ 4. Функции от обобщенных решений

В этом параграфе рассматриваются функции $f(u(t, x))$, где $u(t, x)$ — обобщенное решение уравнения (1.1) или задачи (1.21), и устанавливаются некоторые свойства таких функций, а также функций вида $f(u(t, x))\eta(t, x)$. Далее всегда предполагается, что для матрицы $A\equiv A(x)$ выполнены условия (1.3), (1.4).

---

*) Мы воспользовались, в частности, тем, что константы c_0 и b из (1.8) возрастают с увеличением временного промежутка.

Лемма 4.1. *Пусть функция $u(x_0, x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, определена на некотором множестве $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, принадлежит $L^1(Q)$ и имеет обобщенную производную $u_{x_i} \in L^1(Q)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Пусть функция $\omega(u)$ равномерно липшицева на $\mathbb{R}$ и непрерывно дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$, за исключением точек $u, \ldots, u_k$, которые являются ее угловыми точками. Тогда сложная функция $\omega \circ u$ имеет обобщенную производную $\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega \circ u) \in$ $\in L^1(Q)$, причем*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega \circ u) = \begin{cases} \omega'(u) u_{x_i}, & (x_0, x) \in Q, \ u(x_0, x) \notin \{u_1, \ldots, u_k\}, \\ 0, & (x_0, x) \in Q, \ u(x_0, x) \in \{u_1, \ldots, u_k\}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Доказательство леммы 4.1 см., например, в работах [2, 25].

Следствие 4.1. *Пусть функция $u \in L^1(Q)$ имеет обобщенную производную u_{x_i}, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, причем $u_{x_i} \in L^1(Q)$. Тогда при любом $c \in \mathbb{R}$, таком, что $\operatorname{mes}_{n+1}\{u(x_0, x)=c\} > 0$, функция u_{x_i} эквивалентна 0.*

Доказательство. Пусть $c=0$ и $\operatorname{mes}_{n+1}\{(x_0, x) : u(x_0, x)=0\} > 0$. Пусть $\omega_1(u)=\max(0, u)$, $\omega_2(u)=\min(0, u)$. Очевидно, что функции $\omega_1(u)$ и $\omega_2(u)$ удовлетворяют условиям леммы 4.1 на функцию ω, причем единственной угловой точкой функций ω_1 и ω_2 является точка $u=0$. Тогда из (4.1) и равенства $u=\omega_1(u)+\omega_2(u)$ и следует утверждение следствия 4.1.

Лемма 4.2. *Пусть функция $\omega(u)$ равномерно липшицева на $\mathbb{R}$ и имеет не более конечного числа угловых точек на $\mathbb{R}$. Тогда при любой функции $u \in \mathcal{H}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$ сложная функция $\omega \circ u$ также принадлежит пространству $\mathcal{H}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$. Если функция ω удовлетворяет условию $\omega(0)=0$, то $\omega(u) \in \overset{0, \Gamma}{\mathcal{H}}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$ при любой $u \in \overset{0, \Gamma}{\mathcal{H}}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$, где $\Gamma=\gamma \times \partial\Omega$, $\gamma \subset \partial\Omega$.*

Доказательство. Пусть сначала $\omega \in C^1(\mathbb{R}) \cap \operatorname{Lip}(\mathbb{R})$. Рассмотрим последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1(Q)$, $n=1, 2, \ldots$, такую, что $u_n \to u$ в $\mathcal{H}$. Очевидно, что

$$\|\omega(u_n)\|_{\mathcal{H}} = \|\omega(u_n)\|_{l, l_0, Q} + \left(\iint_Q |\omega'(u_n)|^2 |A \nabla u_n|^2 \, dt dx\right)^{1/2}. \tag{4.2}$$

Учитывая, что $|\omega(u_n)-\omega(u)| \leqslant K|u_n-u|$, где $K=\sup\limits_{u \in \mathbb{R}}|\omega'(u)| < +\infty$, легко устанавливаем:

$$\lim_{n \to \infty}\|\omega(u_n)-\omega(u)\|_{l, l_0, Q}=0. \tag{4.3}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\|\omega(u_n)\|_{\mathcal{H}} \leqslant K_1, \tag{4.4}$$

где K_1 зависит от K и от $\sup\limits_{n=1, 2, \ldots}\|u_n\|_{\mathcal{H}}$. Выделим ввиду слабой компактности пространства $\mathcal{H}$ из последовательности $\{\omega(u_n)\}$ подпоследовательность $\{\omega(u_\nu)\}$, которая сходится к некоторой функции v слабо в $\mathcal{H}$ и в $L^{l, l_0}(Q)$. Очевидно, что эта же подпоследовательность сходится к $\omega(u)$ сильно в $L^{l, l_0}(Q)$. Поэтому $\omega(u)=v$, так что $\omega(u) \in \mathcal{H}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$. Если $\omega(0)=0$, $u \in \overset{0, \Gamma}{\mathcal{H}}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$, то аналогичным образом устанавливается, что $\omega(u) \in$ $\in \overset{0, \Gamma}{\mathcal{H}}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$. Устраним теперь предположение $\omega \in C^1(\mathbb{R})$. Пусть $\{u_1, \ldots, u_k\}$ — множество всех угловых точек функции ω. Аппроксимируем функцию ω функциями ω_δ, где $\delta\in(0,\ \bar\delta)$, $\bar\delta=(1/2)\min\limits_{i,\, j=1,\dots,K}\operatorname{dist}(u_i,\ u_j)$, такими, что:

1) $\omega_\delta\in C^1(\mathbb{R})\cap\operatorname{Lip}(\mathbb{R})$;

2) $\omega_\delta(u)=\omega(u)$ в $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{s=1}^{k}\theta_\delta(u_s)$, где $\theta_\delta(u_s)\equiv\{u\in\mathbb{R}:|u-u_s|<\delta\}$;

3) $\max\limits_{\substack{u\in\mathbb{R}\\ 0<\delta<\bar\delta}}|\omega_\delta'(u)|\leqslant c=\mathrm{const}>0$;

4) $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(u_s)=\omega(u_s)$, $s=1,\dots,k$.

По доказанному выше, $\omega_\delta(u)\in\mathscr{H}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q)$ $[\omega_\delta(u)\in\overset{0,\,\Gamma}{\mathscr{H}}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q)$, если $\omega(0)=0]$, причем из леммы 4.1 следует, что $\dfrac{\partial\omega_\delta}{\partial x_i}=\omega_\delta'(u)u_{x_i}$ в тех точках Q, где $u\notin\{u_1,\dots,u_k\}$, и $\partial\omega_\delta/\partial x_i=0$ на множестве $\bigcup\limits_{s=1}^{k}\{(t,\ x)\in Q:u(t,\ x)=u_s\}$. Тогда для произвольной последовательности $\{\delta_m\}$, $\delta_m\to 0$ при $m\to\infty$, $\delta_m>0$, $m=1,\ 2,\dots$, имеем

$$\begin{aligned}\|\omega_{\delta_m}-\omega_{\delta_n}\|_{\mathscr{H}}=\|\omega_{\delta_m}-\omega_{\delta_n}\|_{l,\,l_0,\,Q}+\|A\nabla(\omega_{\delta_n}-\omega_\delta)\|_{2,\,Q}\leqslant\\ \leqslant 2c\big(\|u\|_{l,\,l_0,\,q_{n,m}}+\|A\nabla u\|_{2,\,q_{n,m}}\big),\end{aligned}\tag{4.5}$$

где $q_{n,m}\equiv\{(t,\ x)\in Q:0<|u-u_s|<\max(\delta_n,\ \delta_m),\ s\in\{1,\dots,k\}\}$. Поскольку правая часть в (4.5) стремится к 0 при $n,\ m\to\infty$, то последовательность $\{\omega_{\delta_n}\}$ стремится к некоторой функции w в $\mathscr{H}$. Но тогда некоторая подпоследовательность указанной последовательности стремится к w п. в. в Q. Поскольку из построения ω_δ вытекает, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(u(t,\ x))=\omega(u(t,\ x))$ в любой точке $(t,\ x)\in Q$, где определена функция u (т. е. при п. в. $(t,\ x)\in Q$), получаем равенство: $w=\omega(u)$ п. в. в Q. Отсюда следует, что $\omega(u)\in\mathscr{H}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q)$ $[\omega(u)\in\overset{0,\,\Gamma}{\mathscr{H}}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q)]$. Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Пусть функция $\omega(u)$ имеет производную $\omega'(u)$, удовлетворяющую равномерно на $\mathbb{R}$ условию Липшица, а ее вторая производная $\omega''(u)$ непрерывна всюду на $\mathbb{R}$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $\omega''(u)$ терпит разрыв первого рода. Предположим, что выполнено условие* (1.19). *Тогда при любых $u\in\mathscr{W}\equiv\{u\in\mathscr{H}_{2,(l,l_0)}\times(A,\ Q):u'\in(\mathscr{H}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q))^*\}$, $\eta\in\bar C^1_{0,\,\partial\Omega\times(T_1,\,T_2)}(\bar Q)$ функция $\omega'(u)\eta$ принадлежит пространству $\overset{(0)}{\mathscr{H}}$, функция $\omega(u)$ принадлежит $C([T_1,\ T_2];\ L^1(\Omega))$ и при любых $\tau_1,\ \tau_2\in[T_1,\ T_2]$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}(u',\ \omega'(u)\eta)\,dt=\int\limits_{\Omega}\omega(u)\,\eta dx\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}(\omega(u),\ \eta')\,dt.\tag{4.6}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что ввиду леммы 4.2 $\omega'(u)\in\mathscr{H}_{2,(l,l_0)}(A,\ Q)$. Тогда из леммы 1.2 следует, что $\omega'(u)\eta\in\overset{(0)}{\mathscr{H}}$. Далее, учитывая, что $u\in C([T_1,\ T_2];\ L^2(\Omega))$, и используя неравенство

$$|\omega(u(t))-\omega(u(t'))|\leqslant K_1|u(t)-u(t')|(|u(t)|+|u(t')|+K_2),\tag{4.7}$$

вытекающее из условий, наложенных на функцию ω, заключаем, что $\varphi(u(t,\ x))\in C([T_1,\ T_2];\ L^1(\Omega))$. Докажем теперь справедливость равенства

(4.6). Поскольку $u \in W$, то ввиду следствия 4.7.2 существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1(Q)$, $n=1, 2, \ldots$, такая, что

$$u_n \to u \text{ в } \mathscr{H}, \; u'_n \to u' \text{ в } \mathscr{H}^* \text{ при } n \to \infty. \tag{4.8}$$

Очевидно, что при любой $\eta \in \tilde{C}^1(Q)$ и любых $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ справедливы равенства

$$-\iint\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \omega(u_n)\eta_t\,dt\,dx = \iint\limits_{Q_{\tau_1,\tau_2}} \omega'(u_n)u_{nt}\eta\,dt\,dx - \int\limits_{\Omega} \omega(u_n)\eta\,dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \tag{4.9}$$

где $Q_{\tau_1,\tau_2} \equiv \Omega \times (\tau_1, \tau_2)$. Перепишем равенства (4.9) в виде

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (u'_n, \; \omega'(u_n)\eta)\,dt = \int\limits_{\Omega} \omega(u_n)\eta\,dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (\omega(u_n), \; \eta')\,dt. \tag{4.10}$$

Из оценки

$$|\omega(u_n) - \omega(u)| \leqslant K_1|u_n - u|(|u_n| + |u| + K_2), \tag{4.11}$$

которая доказывается точно так же, как оценка (4.7), легко следует ввиду сходимости $u_n \to u$ в $\mathscr{W}$, что $\omega(u_n) \to \omega(u)$ в $C([T_1, T_2]; L^1(\Omega))$ и, тем более, $\omega(u_n) \to \omega(u)$ в $L^1(Q)$. Отсюда, в частности, следует, что при $n \to \infty$ правая часть (4.10) стремится к правой части (4.6). Докажем, что левая часть (4.10) стремится к левой части (4.6). Ввиду сходимости $u'_n \to u'$ в $\mathscr{H}^*$ для этого достаточно доказать, что $\omega'(u_n)\eta \to \omega'(u)\eta$ слабо в $\mathscr{H}$. Из доказательства леммы 4.2 следует, что $\omega'(u_n) \to \omega'(u)$ слабо в $\mathscr{H}$. Тогда первое слагаемое правой части равенства

$$\begin{aligned} A\nabla\{[\omega'(u_n) - \omega'(u)]\eta\} = \{A\nabla[\omega'(u_n) - \omega'(u)]\}\eta + \\ + \{A\nabla\eta\}[\omega'(u_n) - \omega'(u)] \end{aligned} \tag{4.12}$$

стремится при $n \to \infty$ к 0 слабо в $L^2(Q)$. Поскольку сходимость $\omega'(u_n)\eta \to$ $\to \omega'(u)\eta$ в $L^{l, l_0}(Q)$ очевидна, то для завершения доказательства слабой сходимости $\omega'(u_n)\eta$ к $\omega'(u)\eta$ в $\mathscr{H}$ достаточно доказать, что второе слагаемое правой части (4.12) стремится к 0 сильно в $L^2(Q)$. Учитывая условие (1.19), оценим

$$\|A\nabla\eta[\omega'(u_n) - \omega'(u)]\eta\|_{2, Q} \leqslant \|A\nabla\eta\|_{2\bar{s}\, 2\bar{s}_0, Q}\|\omega'(u_n) - \omega'(u)\|_{l, l_0, Q}. \tag{4.13}$$

Учитывая, что $\omega'(u_n) \to \omega'(u)$ в $L^{l, l_0}(Q)$, заключаем, что левая часть неравенства (4.13) стремится к 0 при $n \to \infty$. Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. *Пусть функция $\omega(u)$ — такая же, как в лемме 4.3, и пусть, кроме того, $\omega'(0) = 0$. Тогда при любой $u \in \overset{0, \Sigma_1}{\mathscr{W}} \equiv \{u \in \mathscr{H} : u' \in \mathscr{H}^*\}$, где $\mathscr{H} \equiv \overset{0, \Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$, функция $\omega'(u)$ принадлежит $\overset{0, \Sigma_1}{\mathscr{H}}_{2, (l, l_0)}(A, Q) \cap$ $\cap C([T_1, T_2]; L^1(\Omega))$ и при любых $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (u', \; \omega'(u))\,dt = \int\limits_{\Omega} \omega(u)\,dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Лемма 4.4 доказывается точно так же, как лемма 4.3, причем ввиду того что здесь $\eta \equiv 1$, это доказательство даже упрощается.

Лемма 4.5. *Пусть функция $\omega(u)$ — такая же, как в лемме 4.3, и пусть для функции $u \in \mathscr{W} \equiv \{u \in \mathscr{H} : u' \in \mathscr{H}^*\}$, где $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}_{2, (l, l_0)}(A, Q)$,* *существует последовательность* $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходящаяся к* u *в* W, *такая, что* $\omega'(u_n) = 0$ *в некоторой окрестности боковой поверхности* $\partial\Omega \times (T_1, T_2)$. *Тогда* $\omega'(u) \in \overset{(0)}{\mathcal{H}}$, $\omega(u) \in C([T_1, T_2]; L^1(\Omega))$ *и при всех* $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ *имеет место равенство* (4.14).

Доказательство. Лемма 4.5 доказывается точно так же, как лемма 4.4.

Лемма 4.6. *Пусть функция* $\omega(u)$ — *такая же, как в лемме* 4.3, *и пусть для функции* $u \in \mathcal{W} \equiv \{u \in \mathcal{H} : u' \in \mathcal{H}^*\}$, *где* $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_{2,(l,l_0)}(A, Q)$, *существует последовательность* $\{u_n\}$, $u_n \in \tilde{C}^1(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходящаяся к* u *в* W, *такая, что* $\omega'(u_n) = 0$ *в некоторой* $(n+1)$*-мерной окрестности множества* $S \subset (\partial\Omega \times (T_1, T_2))$. *Пусть* $\eta \in \tilde{C}^1_{0,(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \setminus S}(Q.)$ *Тогда* $\omega'(u)\eta \in \overset{(0)}{\mathcal{H}}$, $\omega(u) \in C([T_1, T_2]; L^1(\Omega))$ *и при любых* $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ *имеет место равенство* (4.6).

Доказательство. Лемма 4.6 доказывается точно так же, как лемма 4.3.

Из лемм 4.3—4.6 вытекают, очевидно, следующие утверждения.

Лемма 4.7. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11)—(1.13), (1.19), *и пусть функция* $\omega(u)$ — *такая же, как в лемме* 4.3. *Тогда для любого обобщенного решения [локального обобщенного решения] уравнения* (1.21) *в цилиндре* Q *при любых* $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ [*любых* $\tau_1, \tau_2 \in (T_1, T_2)$] *справедливо тождество*

$$\int_\Omega \omega(u)\eta dx\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\omega(u), \eta')\,dt + \iint_{Q_{\tau_1,\tau_2}} [\mathbf{l}'(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla u\omega''(u)\eta + \\ + \mathbf{l}(t, x, u, A\nabla u) \cdot A\nabla\eta\omega'(u) + l_0'(t, x, u, A\nabla u)\omega'(u)\eta]\,dtdx = 0, \\ \forall \eta \in \tilde{C}^1_{0,\,\partial\Omega \times (T_1, T_2)}(Q). \qquad (4.15)$$

Лемма 4.8. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11), (1.13), (1.18), *и пусть функция* $\omega(u)$ — *такая же, как в лемме* 4.4. *Тогда для любого обобщенного решения* u *задачи* (1.21) *при любых* $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ *справедливо равенство*

$$\int_\Omega \omega(u)\,dx\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \iint_{Q_{\tau_1,\tau_2}} [\mathbf{l} \cdot A\nabla u\omega''(u) + l_0'\omega'(u)]\,dtdx + \int_{\Sigma_3} \sigma u|_{\Sigma_3}\omega'(u|_{\Sigma_3})\,ds = 0, \quad (4.16)$$

причем $\omega'(u|_{\Sigma_3}) = \omega'(u)|_{\Sigma_3}$.

Лемма 4.9. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11), (1.13), *и пусть* u — *обобщенное решение уравнения* (1.1) *в цилиндре* Q. *Предположим, что для функций* $u(t, x)$ *и* $\omega(u)$ *выполнены все условия леммы* 4.5. *Тогда при всех* $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ *справедливо равенство*

$$\int_\Omega \omega(u)\,dx\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \iint_{Q_{\tau_1,\tau_2}} [\mathbf{l}' \cdot A\nabla u\omega''(u) + l_0'\omega'(u)]\,dtdx = 0. \qquad (4.17)$$

Лемма 4.10. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11)—(1.13) (1.19), *и пусть* $u(t, x)$ — *обобщенное решение уравнения* (1.1) *в цилиндре* Q. *Предположим, что для функций* $u(t, x)$, $\omega(u)$ *и* $\eta(t, x)$ *выполнены все условия леммы* 4.6. *Тогда при всех* $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ *справедливо равенство* (4.15).

Замечание 4.1. В тождествах (4.15)—(4.17) участвует функция $\omega''(u)$, которая не определена, очевидно, на множестве $\bigcup_{k=1}^{N} \{(t, x) : u(t, x) = u_k\}$, где u_k, $k = 1, \ldots, N$, — угловые точки функции $\omega'(u)$. Из приведенных выше доказательств (см. леммы 4.1—4.6) следует, однако, что в указанных выше тождествах под $\omega''(u)|_{u=u_k}$, $k = 1, \ldots, N$, понимается нулевое значение $\left(\text{поскольку } \frac{\partial}{\partial x_i} \omega'(u(t, x)) = 0 \text{ на множествах } \{(t, x) : u(t, x) = u_k\},\ k = 1, \ldots, N\right)$. В дальнейшем это всегда следует иметь в виду.

Введем теперь стандартные срезающие функции, используемые ниже. Пусть числа h, h', θ, θ' таковы, что $0 < h' < h \leqslant 1$, $0 < \theta' < \theta \leqslant 1$. Пусть фиксированы $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ и числа $\rho > 0$ и $r > 0$. Обозначим:

$$\xi = \xi(|x - x_0|, h', h, \rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x - x_0| \leqslant \rho h', \\ \dfrac{\rho h - |x - x_0|}{\rho h - \rho h'} & \text{при } \rho h' \leqslant |x - x_0| \leqslant \rho h, \\ 0 & \text{при } |x - x_0| \geqslant \rho h; \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\eta = \eta(t, t_0, \theta', \theta, r) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_0 - (r\theta')^2 \leqslant t, \\ \dfrac{(r\theta)^2 - (t_0 - t)}{(r\theta)^2 - (r\theta')^2} & \text{при } t_0 - (r\theta)^2 \leqslant t < t_0 - (r\theta')^2, \\ 0 & \text{при } t \leqslant t_0 - (r\theta)^2; \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}(t, t_0, \theta', \theta, r) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < t_0 + (r\theta')^2, \\ \dfrac{(r\theta)^2 + (t_0 - t)}{(r\theta)^2 - (r\theta')^2}, & \text{при } t_0 + (r\theta')^2 \leqslant t \leqslant t_0 + (r\theta)^2, \\ 0 & \text{при } t \geqslant t_0 + (r\theta)^2. \end{cases} \tag{4.20}$$

Очевидно, что $\xi \in \tilde{C}^1(\mathbb{R}^n)$, η, $\bar{\eta} \in \tilde{C}^1(\mathbb{R})$, причем $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^n$, $\xi = 0$ вне шара $|x - x_0| \leqslant rh$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ в $\mathbb{R}$, $\eta = 0$ при $t \leqslant t_0 - (r\theta)^2$, $0 \leqslant \bar{\eta} \leqslant 1$ в $\mathbb{R}$, $\bar{\eta} = 0$ при $t \geqslant t_0 + (r\theta)^2$.

Таким образом, если $Q_{(\rho, r)} \equiv K_\rho(x_0) \times [t_0 - r^2, t_0]$ содержится вместе со своим замыканием в цилиндре Q, то функция $\Phi \equiv \xi^2 \eta$ принадлежит классу $\tilde{C}^1_{0, (\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}}(Q)$. Аналогичным образом при условии, что $\bar{Q}_{(\rho, r)} \equiv K_\varrho(x_0) \times [t_0, t_0 + r^2]$ содержится вместе со своим замыканием в Q, функция $\bar{\Phi} \equiv \xi^2 \bar{\eta} \in \tilde{C}^1_{0, (\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_2}}(Q)$. Очевидно также, что для функций (4.18)—(4.20) справедливы неравенства

$$|\nabla \xi| \leqslant \frac{1}{\rho (h - h')}, \quad |\eta'| \leqslant \frac{1}{r^2 (\theta^2 - \theta'^2)}, \quad |\bar{\eta}'| \leqslant \frac{1}{r^2 (\theta^2 - \theta'^2)}. \tag{4.21}$$

В связи с использованием буквы η для обозначения срезающих функций будем в дальнейшем пробную функцию в тождествах вида (4.15) и (4.16) обозначать через Φ. Ввиду леммы 4.7 при выполнении условий этой леммы для всякого обобщенного решения уравнения (1.1) справедливо тождество

$$\begin{gathered} \int_\Omega \omega(u) \Phi dx \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\omega(u), \Phi') dt + \iint_{Q_{\tau_1, \tau_2}} [\mathbf{l}' \cdot A \nabla u \omega''(u) \Phi + \\ + \mathbf{l}' \cdot A \nabla \Phi \omega'(u) + l_0' \omega'(u) \Phi] \, dt dx = 0, \\ \Phi \in \tilde{C}^1_{0, \partial\Omega \times (T_1, T_2)}(Q), \ \tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Полагая в (4.22) $\Phi=\xi^2\eta$ или $\Phi=\overline{\Phi}=\xi^2\overline{\eta}$, получим тождества

$$\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} \omega(u)\,\xi^2\eta dx\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} \omega(u)\,\xi^2\eta_t dtdx+$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} [\mathbf{l}'\cdot A\nabla u\omega''\xi^2\eta+\mathbf{l}'\cdot A\nabla\xi 2\xi\eta\omega'+l_0'\omega'\xi^2\eta]\,dtdx=0, \qquad (4.23)$$

где $\tau_1,\ \tau_2\in[t_0-r^2,\ t_0]$, и

$$\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} \omega(u)\,\xi^2\overline{\eta} dx\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} \omega(u)\,\xi^2\overline{\eta}_t dtdx+$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} [\mathbf{l}'\cdot A\nabla u\omega''\xi^2\overline{\eta}+\mathbf{l}'\cdot A\nabla\xi 2\xi\overline{\eta}\omega'+l_0'\omega'\xi^2\overline{\eta}]\,dtdx=0, \qquad (4.24)$$

где $\tau_1,\ \tau_2\in[t_0,\ t_0+r^2]$. Для дальнейшего удобно переопределить функцию η при $t>t_0$, а функцию $\overline{\eta}$ при $t<t_0$, считая, что при таких значениях t указанные функции равны 0. Тогда, понимая под $\hat{\eta}$ любую из функций η и $\overline{\eta}$, можно каждое из этих равенств записывать единой формулой

$$\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} \omega(u)\,\xi^2\hat{\eta} dx\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} \omega(u)\,\xi^2\hat{\eta}_t dtdx+$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_{\rho h}(x_0)} [\mathbf{l}'\cdot A\nabla u\omega''\xi^2\hat{\eta}+\mathbf{l}'\cdot A\nabla\eta 2\xi\hat{\eta}\omega'+l_0'\omega'\xi^2\hat{\eta}]\,dtdx=0, \qquad (4.25)$$

где $\tau_1,\ \tau_2\in[t_0-r^2,\ t_0+r^2]$. Очевидно, что в случае $\hat{\eta}=\eta$ равенство (4.25) дает (4.23), а в случае $\hat{\eta}=\overline{\eta}$ оно дает (4.24). Очевидно также, что равенство (4.25) справедливо и при $\hat{\eta}\equiv 1$ в $[t_0-r^2,\ t_0+r^2]$.

Лемма 4.11. *Пусть для функции $u\in\mathscr{W}(A,\ Q)\equiv\{u\in\mathscr{H}_{2,\,(l,\,l_0)}(A,\ Q): : u'\in(\mathscr{H}_{2,\,(l,\,l_0)}(A,\ Q))^*\}$ справедливо тождество* (4.22). *Тогда при любом $\alpha>0$ преобразование*

$$\tilde{x}=\frac{x-x_0}{\alpha},\quad \tilde{t}=\frac{t-t_0}{\alpha^2} \qquad (4.26)$$

переводит функцию $u(t,\ x)$ в функцию $\tilde{u}(\tilde{t},\ \tilde{x})\equiv u(t_0+\alpha^2\tilde{t},\ x_0+\tilde{\alpha}x)$, которая принадлежит пространству $\mathscr{W}(\tilde{A},\tilde{Q})$, где $\tilde{A}\equiv\tilde{A}(x)\equiv A(x_0+\alpha x)$, $\tilde{Q}$ — образ Q при отображении (4.26), *и удовлетворяет тождеству*

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}} \omega(\tilde{u})\,\Phi d\tilde{x}\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\tilde{\Omega}}\omega(\tilde{u})\,\Phi_{\tilde{t}}d\tilde{t}d\tilde{x}+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\tilde{\Omega}}[\tilde{\mathbf{l}}'\cdot\tilde{A}\tilde{\nabla}\tilde{u}\omega''(\tilde{u})\,\Phi+$$

$$+\tilde{\mathbf{l}}'\cdot\tilde{A}\tilde{\nabla}\Phi\omega'(\tilde{u})+l_0'\Phi\omega'(\tilde{u})]\,dtdx=0,\quad \Phi\in\tilde{C}^1_{0,\,\partial\tilde{\Omega}\times(\tilde{T}_1,\,\tilde{T}_2)}(Q), \qquad (4.27)$$

где $\tilde{\Omega}$ — образ Ω при отображении (4.26), $\tilde{T}_1=T_1\alpha^2+t_0$, $\tilde{T}_2=T_2\alpha^2+t_0$, $\tilde{\mathbf{l}}'(\tilde{t},\ \tilde{x},\ \tilde{u},\ \tilde{p})=\alpha\mathbf{l}'(t_0+\alpha^2\tilde{t},\ x_0+\alpha\tilde{x},\ \tilde{u},\ \alpha^{-1}\tilde{p})$, $\tilde{l}_0'(\tilde{t},\ \tilde{x},\ \tilde{u},\ \tilde{p})=\alpha^2 l_0'(t_0+\alpha^2\tilde{t},\ x_0+\alpha\tilde{x},\ \tilde{u},\ \alpha^{-1}\tilde{p})$, *причем для функций $\tilde{\mathbf{l}}'$ и $\tilde{l}_0'$ справедливы условия*

$$|\tilde{l}'^{i}(\tilde{t},\ \tilde{x},\ \tilde{u},\ \tilde{p})|\leqslant\tilde{\mu}\sum_{i=1}^{n}|\tilde{p}_i|+\tilde{a}_1(\tilde{t},\ \tilde{x})\,|\tilde{u}|+\tilde{f}(\tilde{t},\ \tilde{x}),$$

$$|\tilde{l}_0'(\tilde{t},\ \tilde{x},\ \tilde{u},\ \tilde{p})|\leqslant\tilde{a}_2(t,\ x)\sum_{i=1}^{n}|\tilde{p}_i|+\tilde{a}_3(t,\ x)\,|\tilde{u}|+\tilde{g}(t,\ x), \qquad (4.28)$$

$$\tilde{\mathbf{l}}(\tilde{t},\ \tilde{x},\ \tilde{u},\ \tilde{p})\cdot\tilde{p}\geqslant\tilde{\nu}\,|\tilde{p}|^2-\tilde{a}_4(t,\ x)\,\tilde{u}^2-\tilde{h}(t,\ x),$$

где $\tilde{\mu}=\mu$, $\tilde{\nu}=\nu$, $\tilde{a}_1(\tilde{t}, \tilde{x})=\alpha a_1(t_0+\alpha^2\tilde{t}, x_0+\alpha\tilde{x})$, $\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x})=\alpha f(t_0+\alpha^2\tilde{t}, x_0+\alpha\tilde{x})$, $\tilde{a}_2(\tilde{t}, \tilde{x})=\alpha a_2(t_0+\alpha^2\tilde{t}, x_0+\alpha\tilde{x})$, $\tilde{a}_3(\tilde{t}, \tilde{x})=\alpha^2 a_3(t_0+\alpha^2\tilde{t}, x_0+\alpha\tilde{x})$, $\tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x})=\alpha^2 g(t_0+\alpha^2\tilde{t}, x_0+\alpha\tilde{x})$, $\tilde{a}_4(\tilde{t}, \tilde{x})=\alpha^2 a_4(t_0+\alpha^2\tilde{t}, x_0+\alpha\tilde{x})$, $\tilde{h}(\tilde{t}, \tilde{x})=$
$$=\alpha^2 h(t_0+\alpha^2\tilde{t}, x_0+\alpha\tilde{x}).$$

При любых $p\geqslant 1$, $p_0\geqslant 1$, $D\subset Q$
$$\|\tilde{a}_1^2, \tilde{a}_2^2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4, \tilde{f}^2, \tilde{g}, \tilde{h}\|_{p, p_0, \tilde{D}}=\alpha^{2-n/p-2/p_0}\|a_1^2, a_2^2, a_3, a_4, f^2, g, h\|_{p, p_0, D};$$
$$\|\tilde{a}^{ij}\|_{2s, 2s_0, \tilde{D}}=\alpha^{-(n/2s+2/s_0)}\|a^{ij}\|_{2s, 2s_0, D}, \quad \|\tilde{b}^{ij}\|_{r_i, r_{0i}, \tilde{D}}=$$
$$=\alpha^{-(n/r_i+2/r_{0i})}\|b^{ij}\|_{r_i, r_{0i}, D}, \tag{4.29}$$
где $\tilde{D}$ — *образ* D *при отображении* (4.26), $\tilde{a}^{ij}(\tilde{x})=a^{ij}(x_0+\alpha\tilde{x})$, $\tilde{b}^{ij}(\tilde{x})=b^{ij}(x_0+\alpha\tilde{x})$, $\|a^{ij}\|=A$, $\|b^{ij}\|\equiv B\equiv A^{-1}$.

Доказательство. Результаты леммы 4.11 устанавливаются очевидным образом путем замены переменных по формуле (4.26) в интегралах, входящих в (4.22) и нормы правых частей формул (4.29).

§ 5. Локальные оценки в L^{p,p_0}

Пусть выполнены условия (1.2)—(1.4) и (1.11), (1.12). В приводимой ниже теореме устанавливаются условия на коэффициенты в неравенствах (1.11), (1.12) и на элементы матрицы A, обеспечивающие принадлежность обобщенных решений уравнения (1.1) к пространству $L^{p,p_0}_{loc}(Q)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие**)
$$\begin{aligned} &a_1^2, a_2^2, a_3, a_4\in L^{s,s_0}(Q), && \frac{1}{s}+\frac{2}{\bar{l}}=1, && \frac{1}{s_0}+\frac{2}{\bar{l}_0}=1, \\ &f^2, h\in L^{d,d_0}(Q), && \frac{2-2\sigma}{\bar{l}}+\frac{1}{d}=1, && \frac{2-2\sigma}{\bar{l}_0}+\frac{1}{d_0}=1, \\ &g\in L^{m,m_0}(Q), && \frac{2-\sigma}{\bar{l}}+\frac{1}{m}=1, && \frac{2-\sigma}{\bar{l}_0}+\frac{1}{m_0}=1, \end{aligned} \tag{5.1}$$
где $\sigma\in(0, 1]$, *а* $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ — *такие же, как в* (1.7). *Предположим также, что***)
$$\begin{aligned} &a^{ij}\in L^{2s,2s_0}(Q), \quad i, j=1,\ldots,n; \quad \frac{1}{s}+\frac{2\varkappa}{\bar{l}}=1, \quad \frac{1}{s_0}+\frac{2\varkappa}{\bar{l}_0}=1, \\ &\varkappa\in\left(1, \min\left(\frac{\hat{l}}{2}, \frac{\hat{l}_0}{2\bar{a}}\right)\right), \text{ где } \bar{l}, \bar{l}_0, \hat{l}, \hat{l}_0, \bar{a} \text{ — такие же, как в (5.1).} \end{aligned} \tag{5.2}$$
Тогда всякое локальное обобщенное решение u *уравнения* (1.1) *в цилиндре* Q *принадлежит пространству* $L^{\bar{l}/\sigma, \bar{l}_0/\sigma}(Q')$, *где* Q' — *произвольная*

---

*) Заметим, что пары показателей $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ могут быть разными для различных отношений в (5.1) — важно лишь то, что каждая такая пара удовлетворяет ...м вида (1.7). Однако ради краткости мы будем считать, что пара $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ ...и та же во всех указанных соотношениях.

...я (5.2) вытекает, что показатели s, s_0 удовлетворяют условиям
$$\frac{1}{s}+\frac{2}{l}=1, \quad \frac{1}{s_0}+\frac{2}{l_0}=1,$$

(4.2...

это.

ливо

$$, \quad l_0=\frac{\bar{l}_0}{\varkappa}$$

ри

$$\beta=\frac{2}{\hat{l}_0}\,\frac{a[\varkappa-(1+(\varkappa-1)/(1-\hat{l}/2))]}{1-a(1+(\varkappa-1)/(1-\hat{l}/2))}.$$

...ачений a и β выполнены условия: $a\in(0, 1)$, $\beta\in(0, 1)$,

(4.28)

x),

подобласть цилиндра Q, такая, что $\bar{Q}' \subset \Omega\times(T_1, T_2)$. Для любого цилиндра $Q^*_{(\rho)} \equiv Q_{(\rho, \rho^2)} = K_\rho(x_0)\times[t_0 - \rho^2, t_0]$, содержащегося вместе со своим замыканием в цилиндре Q, выполняется неравенство

$$\rho^{-(n\sigma/\tilde{l}+2\sigma/\tilde{l}_0)} \|u\|_{\tilde{l}/\sigma,\, \tilde{l}_0/\sigma,\, Q(\rho/2)} \leqslant c\left(\rho^{-(n/l+2/l_0)} \|u\|_{l,\, l_0,\, Q(\rho)} + 1\right), \tag{5.3}$$

где $l = \tilde{l}/\varkappa$, $l_0 = \tilde{l}_0/\varkappa$, $\tilde{l}$, $\tilde{l}_0$ удовлетворяют условию (1.7), а константа c зависит только от структуры уравнения и от ρ.

Доказательство. Пусть u — локальное обобщенное решение уравнения (4.1) в цилиндре Q. Пусть $\bar{Q}_{(\rho)} \subset Q$. Учитывая лемму 4.11, будем считать сначала, что $\rho = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Выберем в качестве функции ω из тождества (4.22) (при $\rho = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$) функцию

$$\omega(u) = \frac{1}{2}[\varphi(\bar{u})]^2,$$

$$\varphi(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^q, \quad 0 < \bar{u} \leqslant N, \\ qN^{q-1}\bar{u} - (q-1)N^q, \quad \bar{u} \geqslant N, \quad N > 1, \quad q \geqslant 1, \\ \bar{u} = (u^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, \end{cases} \tag{5.4}$$

где $\varepsilon > 0$. Очевидно, что

$$\frac{d\bar{u}}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}}, \quad \frac{d^2\bar{u}}{du^2} = \frac{\varepsilon}{(u^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}, \quad \left|\frac{d\bar{u}}{du}\right| \leqslant 1, \quad 0 < \frac{d^2\bar{u}}{du^2} < \frac{1}{\bar{u}}.$$

Очевидно также, что

$$\omega' = \varphi\varphi' \frac{d\bar{u}}{du}, \quad \omega'' = [\varphi\varphi'' + (\varphi')^2]\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)^2 + \varphi\varphi' \frac{d^2\bar{u}}{du^2}. \tag{5.5}$$

Учитывая, что функции $u \to \bar{u}(u)$, $\bar{u} \to \varphi(\bar{u})$, $\bar{u} \to \varphi'(\bar{u})$ непрерывно дифференцируемы и равномерно липшицевы, а функция $\bar{u} \to \varphi''(\bar{u})$ непрерывна всюду, кроме точки $\bar{u} = N$, в которой она имеет разрыв первого рода, заключаем, что для функции $\omega(u)$, определенной по формуле (5.4), выполнены все условия, налагаемые на функцию ω в лемме 4.3. Поэтому указанный выше выбор функции ω в (4.22) закончен. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{K_h} \varphi^2(\bar{u})\,\xi^2\eta\,dx\,\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_h} \varphi^2(\bar{u})\,\xi^2\eta_t\,dt\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_h} (\mathbf{l}' \cdot A\nabla u\omega''(u)\,\xi^2\eta + \mathbf{l}' \cdot A\nabla\xi 2\xi\eta\omega'(u) + l_0'\omega'(u)\,\xi^2\eta)\,dt\,dx = 0, \tag{5.6}$$

$$\tau_1, \tau_2 \in [-h^2, 0],$$

где ξ и η определены по формулам (4.18), (4.19), а $K_h \equiv K_h(0)$.

Очевидно, что справедливы следующие соотношения: $\omega'' > 0$,

$$\varphi'^2 + \varphi\varphi'' = \begin{cases} \dfrac{2q-1}{q}\varphi'^2 & \text{при } \bar{u} < N, \quad (5.7) \\ \varphi'^2 & \text{при } \bar{u} \geqslant N. \quad (5.8) \end{cases}$$

Используя условия **(1.11)**, формулы (5.7), (5.8) и неравенства

$$\left|\frac{d\bar{u}}{du}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{d^2\bar{u}}{du^2}\right| < \frac{1}{\bar{u}},$$

обозначая $v = \varphi(\bar{u})$ и учитывая, что

$$v_{x_i} = \varphi'(\bar{u})\frac{d\bar{u}}{du}u_{x_i},$$

выведем из (5.6) неравенство

$$\frac{1}{2}\int_{K_h} v^2\xi^2\eta dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}+\nu\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{K_h}|A\nabla v|^2\xi^2\eta dtdx\leqslant\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{K_h}v^2\xi^2|\eta_t|dtdx+$$
$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{K_h}\Big[(2q-1)qa_4v^2\xi^2\eta+\frac{2q-1}{q}h\varphi'^2\xi^2\eta+2\sqrt{n}\mu|A\nabla v||A\nabla\xi|v\xi\eta+$$
$$+2qa_1v^2|A\nabla\xi|\xi\eta+2fv|A\nabla\xi|\varphi'\xi\eta+\sqrt{n}a_2|A\nabla v|v\xi^2\eta+$$
$$+qa_3v^2\xi^2\eta+gv\varphi'\xi^2\eta\Big]dtdx. \tag{5.9}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\varphi'(\bar{u})\leqslant qv^{1-1/q}. \tag{5.10}$$

Тогда, учитывая (5.10) и применяя неравенство Коши, выведем из (5.9) неравенство

$$\frac{1}{2}\int_{K_h} v^2\xi^2\eta dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}+\frac{\nu}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{K_h}|A\nabla v|^2\xi^2\eta dtdx\leqslant\frac{1}{2}\iint_{Q_{(h)}}v^2\xi^2|\eta_t|dtdx+$$
$$+2\Big(\frac{n\mu^2}{\nu}+1\Big)\int_{-1}^{0}\int_{K_h}v^2|A\nabla\xi|^2\eta dtdx+$$
$$+\frac{(n+1)q^2}{\bar{\nu}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{K_h}(a_1^2+a_2^2+a_3+a_4)v^2\xi^2\eta dtdx+$$
$$+2q^2\iint_{Q_{(h)}}(f^2+h)v^{2-2/q}\xi^2\eta dtdx+q\iint_{Q_{(h)}}gv^{2-1/q}\xi^2\eta dtdx, \tag{5.11}$$

$\bar{\nu}=\min(\nu, 1)$, $\tau_1, \tau_2\in[-h^2, 0]$.

Разобьем отрезок $[-1, 0]$ на части точками $t_0\equiv-1<t_1<\ldots<t_{k-1}<<t_k<\ldots<t_m\equiv0$ и обозначим $Q^k=K_h(0)\times(\tau_{k-1}, \tau_k)$. Положим в (5.11) $\tau_1=t_{k-1}$, $\tau_2=t_{k-1}+\theta$, где $\theta\in[0, t_k-t_{k-1}]$. Тогда при любом $k=1,\ldots,m$

$$\int_{K_h}v^2\xi^2\eta dx\Big|^{t=t_{k-1}+\theta}+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{K_h}|A\nabla(v\xi\sqrt{\eta})|^2dtdx\leqslant$$
$$\leqslant\int_{K_h}(v\xi\sqrt{\eta})^2dx\Big|^{t=t_{k-1}}+\frac{2}{\bar{\nu}}(n+1)q^2\iint_{Q^k}a(v\xi\sqrt{\eta})^2dtdx+J, \tag{5.12}$$

где $a\equiv a_1^2+a_2^2+a_3+a_4$, а J определено по формуле

$$J=\frac{1}{\bar{\nu}}\iint_{Q_{(h)}}v^2\xi^2|\eta_t|dtdx+\Big[2\Big(\frac{n\mu^2}{\nu}+1\Big)\frac{2}{\bar{\nu}}+1\Big]\iint_{Q_{(h)}}v^2|A\nabla\xi|^2\eta dtdx+$$
$$+\frac{4q^2}{\bar{\nu}}\iint_{Q_{(h)}}(f^2+h)v^{2-2/q}\xi^2\eta dtdx+\frac{2q}{\bar{\nu}}\iint_{Q_{(h)}}gv^{2-1/q}\xi^2\eta dtdx. \tag{5.13}$$

Применяя неравенство Гельдера и неравенство (1.8), оценим

$$\iint_{Q^k}av^2dtdx\leqslant\|a\|_{s, s_0, Q^k}\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{l, l_0, Q^k}\leqslant c_0^2b^2\|a\|_{s, s_0, Q^k}\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{H}(Q^k)}, \tag{5.14}$$

где c_0 — константа из (1.8) для $Q\equiv Q^k$ — зависит лишь от n, r_i, r_{0i}, l, l_0; $b\equiv b(Q)\equiv\sup_{i, j=1,\ldots,n}\|b^{ij}\|_{r_i, r_{0i}, Q}$, а $\widetilde{\mathscr{H}}(Q^k)=\widetilde{\mathscr{H}}_2(A, Q^k)$ (так что

$\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{K}(Q^k)} = \|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{2,\infty,Q^k} + \|A\nabla(v\xi\sqrt{\eta})\|^2_{2,Q^k})$. Тогда из (5.12)—(5.14) легко вытекает неравенство

$$\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{K}(Q^k)} \leqslant 2\int_\Omega (v\xi\sqrt{\eta})^2\, dx\,|^{t=t_{k-1}} +$$
$$+\frac{4}{\nu}(n+1)q^2\|a\|_{s,s_0,Q^k}\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{Q^k} + 2J, \quad k=1,\ldots,m. \tag{5.15}$$

Пусть длины промежутков $[t_{k-1}, t_k]$ настолько малы, что (при фиксированном q)

$$\frac{4}{\nu}(n+1)q^2\|a\|_{s,s_0,Q^k} \leqslant \frac{1}{2}, \quad k=1,\ldots,m. \tag{5.16}$$

Для выполнимости (5.16) достаточно потребовать, чтобы $\|a\|^{s_0}_{s,s_0,Q^k} \leqslant \left(\frac{\nu}{8(n+1)q^2}\right)^{s_0}$. Легко видеть, что при этом условии число m точек деления промежутка $[-1, 0]$ можно взять не более чем

$$1+\left(\frac{8(n+1)q^2}{\nu}\right)^{s_0}\|a\|^{s_0}_{s,s_0\,Q(h)}.$$

Тогда из (5.15) и (5.16) следует неравенство

$$z_k \leqslant 4z_{k-1} + 4J, \quad k=1,\ldots,m, \tag{5.17}$$

где обозначено: $z_k = \|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{K}(Q^k)}$. Из неравенства (5.17) с учетом того, что $v\xi\sqrt{\eta}=0$ при $t=-1$, вытекает оценка

$$\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{K}(Q_h)} \leqslant 4^{m+1}J, \tag{5.18}$$

причем

$$m \leqslant 1+\left(\frac{8(n+1)q^2}{\nu}\right)^{s_0}\|a\|^{s_0}_{s,s_0,Q(h)}.$$

Оценим теперь интегралы, входящие в J. Применяя неравенство Гельдера и учитывая условие (5.2), оценим

$$\iint_{Q(h)} v^2|A\nabla\xi|^2\eta\, dt\, dx \leqslant \|A\nabla\xi\|^2_{2s,2s_0,Q(h)}\|v\|^2_{l,l_0,Q(h)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|A\|^2_{2s,2s_0,Q(h)}}{(h-h')^2}\|v\|^2_{l,l_0\,Q(h)}, \tag{5.19}$$
$$\iint_{Q(h)} v^2\xi^2|\eta_t|\, dt\, dx \frac{1}{h^2-h'^2}\|v\|^2_{l,l_0,Q(h)}\|\xi\|^2_{2s,2s_0,Q(h)},$$

где $A \equiv \left(\sum_{i,j=1}^n (a^{ij})^2\right)^{1/2}$, $l = \bar{l}/\varkappa$, $l_0 = \bar{l}_0/\varkappa$, $\bar{l}$, $\bar{l}_0$, $\varkappa$ — показатели из условия (5.2). Заметим, что $2 < l < \bar{l}$, $2 < l_0 < \bar{l}_0$ (см. сноску к условию (5.2)).

Применяя неравенство Гельдера, Коши, неравенство (1.8) и предполагая, что

$$f^2,\ h \in L^{(l/(2-2/q))^*,\,(l_0/(2-2/q))^*}(Q), \quad g \in L^{(l/(2-1/q))^*,\,(l_0/(2-1/q))^*}(Q), \tag{5.20}$$

где, как всегда, через p^* обозначается показатель, сопряженный к p, т. е. $1/p + 1/p^* = 1$, оценим

$$\frac{4q^2}{\nu}\iint_{Q(h)} (f^2+h)\,v^{2-2/q}\xi^2\eta\, dt\, dx \leqslant \frac{4q^2}{\nu}\|v\xi\sqrt{\eta}\|^{2-2/q}_{l,l_0,Q(h)} \times$$
$$\times\|f^2+h\|_{(l/(2-2/q))^*,\,(l_0/(2-2/q))^*,\,Q(h)} \leqslant \frac{1}{4}\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{K}(Q(h))} +$$
$$+ c\|f^2+h\|^q_{(l/(2-2/q))^*,\,(l_0/(2-2/q))^*,\,Q(h)}; \tag{5.21}$$

$$\frac{2q}{\bar\nu}\iint\limits_{Q_{(h)}} gv^{2-1/q}\xi^2\eta\,dt\,dx \leqslant \frac{2q}{\bar\nu}\|v\xi\sqrt{\eta}\|^{2-1/q}\|g\|_{(\bar l/(2-1/q))^*,\,(\bar l_0/(2-1/q))^*,\,Q_{(h)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{H}(Q_{(h)})} + c\|g\|^{2q}_{(\bar l/(2-1/q))^*,\,(\bar l_0/(2-1/q))^*,\,Q_{(h)}}, \qquad (5.22)$$

причем константы c в (5.21) зависят от n, $\bar\nu$, q, r_i, r_{0i}, $\bar l$, $\bar l_0$ и $b(Q)$. Из (5.18), (5.13), (5.19), (5.21) и (5.22) следует неравенство

$$\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{H}(Q_{(h)})} \leqslant \frac{c_1}{(h-h')^2}\|v\|^2_{l,\,l_0,\,Q_{(h)}} + c_2, \qquad (5.23)$$

где c_1 зависит от n, ν и $\|A\|_{2\varkappa,\,2\varkappa_0,\,Q_{(h)}}$, а c_2 — от n, ν, q, r_i, r_{0i}, $l(Q)$ и норм $\|f^2+h\|$ и $\|g\|$. Учитывая еще раз неравенство (1.8), получим оценку

$$\|v\|_{\bar l,\,\bar l_0,\,Q_{(h')}} \leqslant \frac{c_3}{h-h'}\|v\|_{l,\,l_0,\,Q_{(h)}} + c_4, \qquad (5.24)$$

где $c_3=\sqrt{c_1}\,c_0 b$, $c_4=\sqrt{c_2}\,c_0 b$, c_0 зависит от n, r_i, r_{0i}, $\bar l$, $\bar l_0$, b, а l, l_0 — любая пара показателей, удовлетворяющая условию (1.7) (с заменой l на $\bar l$ и l_0 на $\bar l_0$). Поскольку при п. в. $(t, x)\in Q_{(1)}$ $\lim\limits_{N\to\infty}\varphi(\bar u)=\bar u^q$, то ввиду теоремы Лебега

$$\lim_{N\to\infty}\|v\|_{l,\,l_0,\,Q_{(h)}} = \|\bar u^q\|_{l,\,l_0,\,Q_{(h)}}, \qquad (5.25)$$

если только выполнено условие

$$\bar u^q \in L^{l,\,l_0}(Q_{(h)}). \qquad (5.26)$$

В этом случае в силу леммы Фату из (5.24) следуют принадлежность $\bar u^q\in L^{\bar l,\,\bar l_0}(Q_{(h')})$ и оценка

$$\|\bar u\|_{q\bar l,\,q\bar l_0,\,Q_{(h')}} \leqslant \left(\frac{c_3}{h-h'}\right)^{1/q}\|\bar u\|_{ql,\,ql_0,\,Q_{(h)}} + c_4^{1/q}. \qquad (5.27)$$

Пусть M — наименьшее целое число, при котором

$$\sigma^{1/M} < \varkappa, \qquad (5.28)$$

где σ и $\varkappa$ — числа из условий (5.1) и (5.2). Положим в (5.24)

$$h=h_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k},\quad h'=h'_k=h_{k+1},\quad k=1,\ldots,M, \qquad (5.29)$$

где M — число из условия (5.28). Очевидно, $h_1=1$, $h'_M>1/2$. Мы докажем последовательно, что при значениях

$$q=q_k=\sigma^{-k/M},\quad k=1,\ldots,M, \qquad (5.30)$$

выполнены условия (5.20) и (5.26) при $h=h_k$ с соответствующими номерами $k=1,\ldots,M$. Действительно, поскольку $\sigma\in(0,1)$, то $\sigma^{k/M}\geqslant\sigma$, $k=1,\ldots,M$. Отсюда легко следует, что показатели, сопряженные к $\bar l/(2-2/q_k)$, $\bar l_0/(2-2/q_k)$, $k=1,\ldots,M$ (очевидно, что $2/q_k=2\sigma^{k/M}$), не превосходят показателей, сопряженных к $\bar l/(2-2\sigma)$, $\bar l_0/(2-2\sigma)$ соответственно, т. е. показателей $(\bar l/(2-2\sigma))^*$, $(\bar l_0/(2-2\sigma))^*$ из (5.1), а показатели, сопряженные к $\bar l/(2-1/q_k)$, $\bar l_0/(2-1/q_k)$, не превосходят $(\bar l/2-\sigma)^*$, $(\bar l_0/(2-\sigma))^*$, т. е. показателей m, m_0 из (5.1). Таким образом, при любом $k=1,\ldots,M$ условия (5.20) выполнены.

Далее, ввиду неравенства (1.8) функция $\bar u^{q_1}=u^{1/\sigma^{1/M}}$ принадлежит $L^{l,\,l_0}(Q_{h_1})$, поскольку $1/\sigma^{1/M}\leqslant\varkappa$ и $\bar u\in L^{\bar l,\,\bar l_0}(Q_1)$ при любых $\bar l$, $\bar l_0$, удовлетворяющих условию вида (1.7), и в частности при $\bar{l}=\bar{l}=l\varkappa$, $\bar{l}_0=\bar{l}_0=l_0\varkappa$, так что $\bar{u}^{\varkappa}\in L^{\bar{l},\bar{l}_0}(Q_{h_1})$. Таким образом, при $k=1$ условия (5.20) и (5.26) выполнены для $q=q_1=1/\sigma^{1/M}$. Из доказанного тогда следует, что $\bar{u}^{q_1}\in L^{\bar{l},\bar{l}_0}(Q_{h_2})$, т. е. $\bar{u}^{\varkappa q_1}\in L^{l,l_0}(Q_{h_2})$. Учитывая (5.28), заключаем тогда, что $\bar{u}^{q_2}=\bar{u}^{1/\sigma^{2/M}}\in L^{l,l_0}(Q_{h_2})$. Повторяя эти рассуждения, последовательно устанавливаем, что $\bar{u}^{1/\sigma^{3/M}}\in L^{l,l_0}(Q_{h_3}),\ldots,\ \bar{u}^{1/\sigma}\in L^{l,l_0}(Q_{h_M})$. Повторяя это рассуждение еще один раз (при $k=M$), заключаем, что $\bar{u}^{1/\sigma}\in L^{\bar{l},\bar{l}_0}(Q_{h_{M+1}})$, и в частности $\bar{u}^{1/\sigma}\in L^{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma}(Q_{1/2})$, поскольку $h_{M+1}=h'_M>1/2$. Итерируя оценку вида (5.27) при $q=q_k$, $h=h_k$, $h'=h'_k$, $k=1,\ldots,M$, получим оценку

$$\|\bar{u}\|_{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma,Q_{1/2}}\leqslant c\left(\|\bar{u}\|_{l,l_0,Q_1}+1\right). \tag{5.31}$$

Пусть теперь $\rho>0$ и $(t_0, x_0)\in Q$ произвольны, но таковы, что $\bar{Q}_\rho(t_0, x_0)\subset Q$. Применяя лемму 1.1, получаем на основании доказанного, что $\bar{u}\in L^{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma}(Q_{\rho/2})$, и оценку

$$\rho^{-(n\sigma/\bar{l}+2\sigma/\bar{l}_0)}\|\bar{u}\|_{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma,Q_{\rho/2}}\leqslant c\left(\rho^{-(n/l+2/l_0)}\|\bar{u}\|_{l,l_0,Q_\rho}+1\right). \tag{5.32}$$

Устремляя в (5.32) $\varepsilon\to 0$, получим оценку (5.3). Очевидно, что константа c в (5.32) зависит лишь от n, ν, σ, s_0, ρ, $\|A\|_{2s,2s_0,Q_\rho}$, $\|a\|_{s,s_0,Q_\rho}$, $b(Q_\rho)$ $\equiv\sup\limits_{i,j=1,\ldots,n}\|b^{ij}\|_{r_i,r_{0i},Q_\rho}$ и константы c_0 из неравенства (1.8) для цилиндров $Q_{(h)}$, $h\in[1/2, 1]$. Теорема 5.1 доказана.

В теореме 5.1 параметр σ подчинен условию $\sigma\in(0, 1]$. Рассмотрим теперь случай $\sigma=0$. Очевидно, что из теоремы 5.1 вытекает следующий результат для этого случая.

Теорема 5.2. *Пусть условия теоремы 5.1 выполнены в случае $\sigma=0$. Тогда всякое локальное обобщенное решение и уравнения (1.1) в цилиндре Q принадлежит $L^{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma}(Q')$ при любых $\bar{l}$, $\bar{l}_0$, удовлетворяющих условию (1.7), $\sigma>0$ и $\bar{Q}'\subset Q$. Для любого цилиндра Q_ρ, $\bar{Q}_\rho\subset Q$, справедливо неравенство*

$$\rho^{-(n\sigma/\bar{l}+2\sigma/\bar{l}_0)}\|u\|_{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma,Q_{\rho/2}}\leqslant c\left(\rho^{-(n/l+2/l_0)}\|u\|_{l,l_0,Q_\rho}+1\right), \tag{5.33}$$

где $l=\bar{l}/\varkappa$, $l_0=\bar{l}_0/\varkappa$, а константа c зависит только от структуры уравнения, $\bar{l}$, $\bar{l}_0$, σ и ρ.

§ 6. Глобальные оценки в $\mathbf{L}^{p,p_0}$

Пусть выполнены условия (1.2)—(1.4) и (1.11), причем на коэффициенты в неравенствах (1.11) будут далее наложены условия, более сильные, чем (1.13). Предположим также, что выполнено следующее (более сильное, чем (1.18)) условие:

при любых $u\in\overset{\widetilde{0,\Sigma_1}}{\mathscr{H}}_{l,\bar{l}_0;2}(A, Q)$ и $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\sigma_3\times(\tau_1,\tau_2)}\lambda u^2ds\leqslant\varepsilon\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}|A\nabla u|^2dtdx+c_\varepsilon\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}u^2dtdx, \tag{6.1}$$

где τ_1, $\tau_2\in[T_1, T_2]$, а c_ε — константа, не зависящая от u.
Применяя известные теоремы вложения С. Л. Соболева, легко доказать, что условие (6.1) будет заведомо выполнено, если $\lambda\in L^{\varkappa,\infty}(\sigma_3\times(T_1, T_2))$,

где $\varkappa > r/(r-2)$, а r определено соотношениями (7.2.9). Предположим еще, что начальная функция u_0 в (1.21) принадлежит пространству $L^{2/\sigma}(\Omega)$.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены указанные выше условия, а также условие* (6.1). *Тогда при любых* $\bar{l}$, $\bar{l}_0$, *удовлетворяющих условию* (1.7), *всякое обобщенное решение и задачи* (1.21) *принадлежит пространству* $L^{\bar{l}/\sigma, \bar{l}_0/\sigma}(Q)$, *причем норма* $\|u\|_{\bar{l}/\sigma, \bar{l}_0/\sigma, Q}$ *оценивается величиной, зависящей лишь от структуры уравнения и данных задачи* (1.21).

Доказательство. Ввиду леммы 4.8 при любой функции ω, удовлетворяющей условиям, приведенным в лемме 4.4, и любых $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ справедливо равенство (4.16). Выберем в качестве ω из (4.16) функцию, определенную формулой (5.4). При доказательстве теоремы 5.1 установлено, что такая функция удовлетворяет всем требованиям, которые предъявлялись к функции ω в лемме 4.3. Но тогда она удовлетворяет и всем требованиям леммы 4.4, поскольку условие $\omega'(0)=0$ очевидно выполнено. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\varphi^2(\bar{u})\,dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}(\mathbf{l}'\cdot A\nabla u\omega''(u)+l_0'\omega'(u))\,dtdx+\int\limits_{\Sigma_2}\lambda u\varphi\varphi'\,ds=0, \tag{6.2}$$

где $Q_{t_1,t_2}=\Omega\times(t_1, t_2)$. Используя условия (1.11), формулы (5.7), (5.8), (5.10), неравенства

$$\left|\frac{d\bar{u}}{du}\right|\leqslant 1,\ 0<\frac{d^2\bar{u}}{du^2}<\bar{u}^{-1},$$

условие (6.1) и обозначая $v=\varphi(\bar{u})$, выведем из (6.2) неравенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}v^2dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\nu\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}|A\nabla v|^2dtdx\leqslant\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}[q(2q-1)a_4v^2+q(2q-1)hv^{2-2/q}+\\+\sqrt{n}\,a_2|A\nabla v|\,v+qa_3v^2+qgv^{2-1/q}]\,dtdx+\\+\varepsilon\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}|A\nabla v|^2dtdx+c_\varepsilon\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}v^2dtdx.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Применяя неравенство Коши и выбирая подходящее ε, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}v^2dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\frac{\nu}{2}\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}|A\nabla v|^2dtdx\leqslant c_1\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}av^2dtdx+\\+2q^2\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}hv^{2-2/q}dtdx+q\iint\limits_{Q_{t_1,t_2}}gv^{2-1/q}dtdx,\end{aligned} \tag{6.4}$$

где $a=a_2^2+a_3+a_4+c_\varepsilon$.

Разбивая отрезок $[T_1, T_2]$ на достаточно малые части и рассуждая точно так же, как при выводе неравенства (5.18) при доказательстве теоремы 5.1, получим оценку

$$\|\bar{u}\|^2_{\tilde{\mathscr{H}}(Q)}\leqslant 4^mJ+\|u_0^q\|^2_{2,\Omega}, \tag{6.5}$$

где $\tilde{\mathscr{H}}(Q)\equiv\overset{0,\Sigma_1}{\widetilde{\mathscr{H}_2}}(A, Q)$, $m\leqslant c(n, q, \nu)(\|a\|_{\bar{s},\bar{s}_0,Q}^{\bar{s}_0}+1)$, $J=c(q)\left(\iint\limits_{Q}hv^{2-2/q}dtdx+\right.$ $\left.+\iint\limits_{Q}gv^{2-1/q}dtdx\right)$. Используя теперь оценки вида (5.21), (5.22) (с заменой $Q_{(h)}$ на Q) и неравенство (1.8), получим оценку

$$\|\bar{u}^q\|^2_{\bar{l},\bar{l}_0,Q} \leqslant c\left(\|h\|^{1/q}_{(\bar{l}/(2-2/q))^*,\,(\bar{l}_0/(2-2/q))^*,\,Q} + \right.$$
$$\left. + \|g\|^{2/q}_{(\bar{l}/(2-1/q))^*,\,(\bar{l}_0/(2-1/q))^*,\,Q}\right) + \|u_0^q\|^2_{2,\Omega}, \qquad (6.6)$$

где c зависит от n, q, ν, $\|a\|^{s_0}_{s,s_0,Q}$, $b = \sup\limits_{i,j=1,\ldots,n} \|b^{ij}\|_{r_i, r_{0i}, Q}$ и константы из неравенства (1.8), а $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ удовлетворяют условию (1.7). При выводе (6.6), конечно, предполагалось, что нормы функций h, g, и u_0^q, стоящие в правой части (6.6), имеют смысл. Ввиду условия (5.1) это заведомо так в случае $q = 1/\sigma$. Тогда, переходя в (6.6) к пределу при $N \to \infty$, заключаем, что $\bar{u}^{1/\sigma} \in L^{\bar{l},\bar{l}_0}(Q)$, т. е. $\bar{u} \in L^{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma}(Q)$, и получаем оценку:

$$\|\bar{u}\|_{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma,Q} \leqslant c\left(\|h\|^{\sigma/2}_{d,d_0,Q} + \|g\|^{\sigma}_{m,m_0,Q}\right) + \|u_0\|_{2/\sigma,\Omega}. \qquad (6.7)$$

Устремляя в (6.7) ε к 0, получаем результат теоремы 6.1.

Из теоремы 6.1 как следствие вытекает, очевидно, следующий результат.

Теорема 6.2. *Пусть условия теоремы 6.1 выполнены при $\sigma = 0$. Тогда всякое обобщенное решение задачи (1.21) принадлежит пространству $L^{\bar{l}/\sigma,\bar{l}_0/\sigma}(Q)$ при любых $\bar{l}$, $\bar{l}_0$, удовлетворяющих условию (1.7), и любом $\sigma > 0$.*

Замечание 6.1. Результаты, аналогичные теоремам 6.1 и 6.2, можно доказать и для обобщенных решений уравнения (1.1) (а не задачи (1.21), как в теоремах 6.1 и 6.2), предполагая, кроме условий этих теорем, что такие решения ограничены на $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$. В § 9 будет изложено доказательство оценки $\operatorname{supess}\limits_{Q} |u|$ для обобщенных решений уравнения (1.1), ограниченных на $\partial\Omega \times (T_1, T_2)$. Это доказательство и доказательство теорем 6.1 и 6.2 нетрудно видоизменить так, чтобы получить оценки указанных выше решений и в нормах $L^{p,p_0}(Q)$. Мы предоставляем это сделать читателю.

§ 7. Экспоненциальная суммируемость обобщенных решений

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11), (1.12) *и условие*

$$(a^{ij})^2,\ a_1^2,\ a_2^2,\ a_3,\ a_4 \in L^{s,s_0}(Q),\quad \frac{1}{s} + \frac{2\varkappa}{\bar{l}} = 1,\quad \frac{1}{s_0} + \frac{2\varkappa}{\bar{l}_0} = 1,$$
$$\varkappa \in \left(1, \min\left(\frac{\hat{l}}{2}, \frac{\hat{l}_0}{2\bar{a}}\right)\right);\ f^2,\ g,\ h \in L^{\hat{s},\hat{s}_0}(Q),\quad \frac{1}{\hat{s}} + \frac{2}{\hat{l}} = 1,\quad \frac{1}{\hat{s}_0} + \frac{2}{\hat{l}_0} = 1, \qquad (7.1)$$

где $\bar{l}$, $\bar{l}_0$, $\hat{l}$, $\hat{l}_0$, $\varkappa$ — такие же, как в (1.7).

Пусть u — локальное обобщенное решение уравнения (1.1) *в цилиндре Q. Тогда для любого цилиндра $Q_\rho \equiv K_\rho(x_0)\times[t_0 - \rho^2, t_0]$, $\bar{Q}_\rho \subset Q$, справедлива оценка*

$$\iint\limits_{Q_{\rho/2}} \exp\{\gamma\,|u(t,x)|\}\,dt\,dx \leqslant c_1 \exp\left(c_2 \rho^{-(n/l + 2/l_0)} \|u\|_{l,l_0,Q_\rho}\right), \qquad (7.2)$$

где $l = \dfrac{\bar{l}}{\varkappa}$, $l_0 = \dfrac{\bar{l}_0}{\varkappa}$, при некоторых γ, c_1, c_2, зависящих только от структуры уравнения и ρ.

Доказательство. Пусть сначала $\rho=1$, $t_0=0$, $x_0=0$. Обозначим через v такую же функцию, что и при доказательстве теоремы (5.1), т. е. $v=\varphi(\bar{u})$, где

$$\varphi(\bar{u})=\begin{cases}\bar{u}^q, \ 0<\bar{u}\leqslant N, \ N>1, \ q\geqslant 1, \ \bar{u}=(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon, \ \varepsilon>0,\\ qN^{q-1}\bar{u}-(q-1)N^q, \ \bar{u}\geqslant N.\end{cases} \quad (7.3)$$

Для функции v, как показано в § 5, справедливо неравенство (5.11). Интеграл $\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{K_h} av^2\xi^2\eta\,dt\,dx$ оценим здесь просто по неравенству Гельдера:

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K_h} av^2\xi^2\eta\,dt\,dx\leqslant\|a\|^2_{s,s_0,Q_h}\|v\|^2_{l,l_0,Q_h}. \quad (7.4)$$

Оценивая остальные члены правой части неравенства (5.11) точно так же, как при доказательстве теоремы 5.1, и применяя неравенства (1.8) и (1.21), получим оценку

$$\|v\xi\sqrt{\eta}\|^2_{\mathscr{V}(Q_h)}\leqslant\frac{c_1q^2}{(h-h')^2}\|v\|^2_{l,l_0,Q(h)}+c_2q^q, \quad (7.5)$$

причем константы c_1 и c_2 в (7.5) зависят от тех же величин, что и аналогичные константы в (5.23), за исключением показателя q, зависимость от которого явным образом указана в (7.5). Заметим, что ввиду (7.1) условие вида (5.20), которое используется при выводе (7.5), выполнено при всех $q\geqslant 1$. Используя оценку (1.8), выведем из (7.5) неравенство

$$\|v\|_{\bar{l},\bar{l}_0,Q_{h'}}\leqslant\frac{c_3q}{h-h'}\|v\|_{l,l_0,Q_h}+c_4q^q. \quad (7.6)$$

Применяя теорему Лебега и учитывая, что в силу теоремы 5.2 при любом $q\geqslant 1$ выполнено условие (5.26), получим, устремляя в (7.6) N к ∞, неравенство

$$\|\bar{u}\|_{q\bar{l},q\bar{l}_0,Q(h')}\leqslant\left(\frac{c_3q}{h-h'}\right)^{1/q}\|\bar{u}\|_{ql,ql_0,Q(h)}+c_4q. \quad (7.7)$$

Положим в (7.7)

$$q=q_s=\varkappa^s, \ h=h_s=\frac{1}{2}+2^{-(s+1)}, \ h'=h'_s=h_{s+1}, \ s=0, 1, \ldots, \quad (7.8)$$

и обозначим $p_{(s)}=l\varkappa^s$, $p_{0(s)}=l_0\varkappa^s$, $s=0, 1, \ldots$ Тогда из (7.7) следует

$$\|\bar{u}\|_{p_{(s+1)},p_{0(s+1)},Q_{h_{s+1}}}\leqslant(4c_3)^{1/\varkappa^s}(2\varkappa)^{s/\varkappa^s}\|\bar{u}\|_{p_{(s)},p_{0(s)},Q_{h_s}}+c_4\varkappa^s, \ s=0, 1, \ldots \quad (7.9)$$

Итерируя (7.9), получим

$$\|\bar{u}\|_{p_{(s+1)},p_{0(s+1)},Q_{h_{s+1}}}\leqslant c_5\|\bar{u}\|_{l,l_0,Q_1}+c_6\sum_{k=0}^{s}\varkappa^k, \ s=0, 1, \ldots, \quad (7.10)$$

где $c_5=(4c_3)^{\sum\limits_1^\infty\varkappa^{-k}}(2\varkappa)^{\sum\limits_1^\infty k\varkappa^{-k}}$, $c_6=c_4c_5$. Обозначим

$$\hat{p}_s=\min(p_{(s)}, p_{0(s)})=\varkappa^s\min(l, l_0). \quad (7.11)$$

Тогда из (7.11) следует оценка

$$\|\bar{u}\|_{\hat{p}_{s+1},Q_{h_{s+1}}}\leqslant c_7\|\bar{u}\|_{p_{(s+1)},p_{0(s+1)},Q_{h_{s+1}}}\leqslant c_8\|\bar{u}\|_{l,l_0,Q_1}+c_9\hat{p}_{s+1}, \quad (7.12)$$

где $c_7=c_7(l, l_0)$, $c_8=c_5c_7$, $c_9=c_6c_7/(\varkappa-1)\min(l, l_0)$. Для любого $p\geqslant\min(l, l_0)$ найдется такой номер s, что $\hat{p}_s\equiv\min(l, l_0)\varkappa^s\leqslant p<\min(l,$

$l_0)\varkappa^{s+1} \equiv \hat{p}_{s+1}$. Тогда из (7.12) легко следует, что для любого $p \geqslant \min(l, l_0)$ справедливо неравенство

$$\|\bar{u}\|_{p, Q_{1/2}} \leqslant c_8 \|u\|_{l, l_0, Q_1} + c_{10} \cdot p, \tag{7.13}$$

где $c_{10} = c_9 \varkappa$.

Устремляя в неравенстве (7.13) ε к 0, получим:

$$\|u\|_{p, Q_{1/2}} \leqslant c_8 \|u\|_{l, l_0, Q_1} + c_{10} p, \quad p \geqslant \min(l, l_0). \tag{7.14}$$

Из оценки (7.14) легко следует, что при достаточно малом $\gamma > 0$ сходится ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \iint_{Q_{1/2}} \frac{(\gamma |u^m|)^m}{m!} dt dx. \tag{7.15}$$

Действительно, применяя (7.14), оценим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m \|u\|^m_{m, Q_{1/2}}}{m!} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{11}^m (\|u\|_{l, l_0, Q_1} + m)^m \gamma^m}{m!}, \tag{7.16}$$

где c_{11} зависит от c_8 и c_{10}. Из (7.16) при помощи формулы Стирлинга легко выводится оценка

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m \|u\|^m_{m, Q_{1/2}}}{m!} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2c_{11}\gamma \|u\|_{l, l_0, Q_1})^m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} (2c_{11}\gamma e)^m. \tag{7.17}$$

Полагая $\gamma = (4c_{11}e)^{-1}$, получим оценку правой части в (7.17) через $\exp(2e)^{-1}\|u\|_{l, l_0, Q_1} + 2$. Таким образом, из (7.16), (7.17) следует оценка

$$\iint_{Q_{1/2}} \exp\{\gamma |u|\} dt dx = \sum_{m=0}^{\infty} \iint_{Q_{1/2}} \frac{\gamma |u|^m}{m!} dt dx \leqslant \exp(2e)^{-1} \|u\|_{l, l_0, Q_1} + 2. \tag{7.18}$$

Следовательно, оценка (7.2) установлена при $\rho = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Общий случай легко следует из доказанного ввиду леммы 4.11. Теорема 7.1. доказана.

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11), (7.1), (6.1), *и пусть* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Тогда для всякого обобщенного решения и задачи* (1.21) *справедлива оценка*

$$\iint_Q \exp\{\gamma |u(t, x)|\} dt dx \leqslant c, \tag{7.19}$$

где γ *и* c *зависят только от структуры уравнения* (1.1) *и данных задачи* (1.21).

Доказательство. Доказательство теоремы 7.2 проводится, так же как доказательство теоремы 7.1, на основании неравенства (6.3) с учетом оценок вида (6.5) и **(6.6)**, справедливых при всех $q \geqslant 1$.

Замечание 7.1. Оценку вида (7.19) можно установить при условии (7.1) и для обобщенных решений уравнения (1.1) в цилиндре Q, ограниченных на $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$ (см. доказательство теоремы 9.1).

§ 8. Локальная ограниченность обобщенных решений

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11), (1.12) *и условие*:

$$(a^{ij})^2,\ a_1^2,\ a_2^2,\ a_3,\ a_4,\ f^2,\ g,\ h \in L^{s, s_0}(Q),\ \frac{1}{s}+\frac{2\varkappa}{l}=1,\ \frac{1}{s_0}+\frac{2\varkappa}{l_0}=1, \quad (8.1)$$

где $\varkappa$, l *и* l_0 — *такие же показатели, что и в условии* (5.1).

Тогда всякое локальное обобщенное решение уравнения (1.1) *в цилиндре* Q *принадлежит пространству* $L^\infty(Q')$ (*т. е. имеет конечный* $\operatorname{supess}_{Q'}|u|$), *где* Q' — *произвольная подобласть цилиндра* Q, *такая, что* $\bar{Q}' \subset Q$. *Для любого цилиндра* $Q_\rho = K_\rho(x_0)\times[t_0-\rho^2, t_0]$, $\bar{Q}_\rho \subset Q$, *справедливо неравенство*

$$\operatorname*{supess}_{Q_{\rho/2}} |u| \leqslant c\left(\rho^{-(n/l+2/l_0)}\|u\|_{l, l_0, Q_\rho} + k_\rho\right), \quad (8.2)$$

где

$$k_\rho = \rho^{2-n/s-2/s_0}\|f^2+h\|_{s, s_0, Q_\rho} + \rho^{2-n/s-2/s_0}\|g\|_{s, s_0, Q_\rho}, \quad (8.3)$$

а константа c *зависит только от структуры уравнения* (8.1) *и от* ρ.

Доказательство. Пусть u — локальное обобщенное решение уравнения (1.1) в Q. Пусть Q_ρ — некоторый цилиндр, такой, что $\bar{Q}_\rho \subset Q$. Предположим сначала, что $\rho=1$, $t_0=0$, $x_0=0$. Рассмотрим функцию

$$\bar{u} = \sqrt{u^2+(k_1+\varepsilon)^2},\ \varepsilon>0, \quad (8.4)$$

где $k_1 = \|f^2+h\|^{1/2}_{s, s_0, Q_1} + \|g\|_{s, s_0, Q_1}$. Очевидно, что

$$\frac{d\bar{u}}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2+(k_1+\varepsilon)^2}},\quad \frac{d^2\bar{u}}{du^2} = \frac{(k_1+\varepsilon)^2}{\bar{u}\,[\bar{u}^2+(k_1+\varepsilon)^2]},\quad \left|\frac{d\bar{u}}{du}\right| \leqslant 1,\ 0<\frac{d^2\bar{u}}{du^2}<\frac{1}{\bar{u}}.$$

Из условий (8.1) легко следуют неравенства

$$|\mathrm{l}'(t, x, u, p)| \leqslant \mu\sum_{i=1}^n |p_i| + \hat{a}_1(t, x)\bar{u},$$

$$|l_0'(t, x, u, p)| \leqslant a_2(t, x)\sum_{i=1}^n |p_i| + \hat{a}_3(t, x)\bar{u}, \quad (8.5)$$

$$\mathrm{l}'(t, x, u, p)\cdot p \geqslant \nu|p|^2 - \hat{a}_4(t, x)\bar{u}^2,$$

где ν, μ, a_2 — такие же, как в (1.11), и где $\hat{a}_1 = a_1 + k_1^{-1}f$, $\hat{a}_3 = a_3 + k_1^{-1}g$, $\hat{a}_4 = a_4 + k_1^{-2}h$, причем $\hat{a}_1^2$, $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4 \in L^{s, s_0}(Q_1)$, поскольку $\|k_1^{-2}f^2\|_{s, s_0, Q_1} \leqslant 1$, $\|k_1^{-1}g\|_{s, s_0, Q_1} \leqslant 1$, $\|k_1^{-2}h\|_{s, s_0, Q_1} \leqslant 1$. Очевидно, что функция

$$\omega(u) = \frac{1}{2}[\varphi(\bar{u})]^2,\quad \varphi(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^q, & 0<\bar{u}\leqslant N, \\ qN^{q-1}-(q-1)N^q, & \bar{u}\geqslant N, \end{cases} \quad N>1,\ q\geqslant 1, \quad (8.6)$$

где $\bar{u}$ определена по формуле (8.4), удовлетворяет всем условиям леммы 4.3, предъявляемым к функции ω. Это доказывается точно так же, как при доказательстве теоремы 5.1 была доказана законность выбора функции ω по формуле (5.4). Тогда аналогично выводу неравенства (5.9) устанавливаем неравенство

$$\frac{1}{2}\int_{K_h}(v\xi\sqrt{\eta})^2\,dx\,\Big|^{t=\tau} + \nu\int_{-1}^{\tau}\int_{K_h}|A\nabla v|^2\xi^2\eta\,dt\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{-h^2}^{\tau}\int_{K_h}v^2\xi^2|\eta_t|\,dt\,dx +$$

$$+\int_{-h^2}^{\tau}\int_{K_h}\left(2\sqrt{n}\,\mu|A\nabla v||A\nabla\xi|v\xi\eta + 2q\hat{a}_1 v^2|A\nabla\xi|\xi\eta + \sqrt{n}\,a_2|A\nabla v|v\xi^2\eta +\right.$$

$$\left.+ q\hat{a}_3 v^2\xi^2\eta + 2q^2\hat{a}_4 v^2\xi^2\eta\right)dt\,dx,\quad \tau\in(-1, 0], \quad (8.7)$$

где $v=\varphi(\bar{u})$. Применяя неравенство Коши и неравенство (4.21), выведем из (8.7) следующее неравенство,

$$\frac{1}{2}\int_{K_h}(v\xi\sqrt{\eta})^2\,dx\,|^{t=\tau}+\frac{\nu}{2}\int_{-h^2}^{\tau}\int_{K_h}|A\nabla v|^2\xi^2\eta\,dt\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(h-h')^2}\int_{-h^2}^{0}\int_{K_h}\left[\left(\frac{4n\mu^2}{\nu}+1\right)\sum_{i,\,j=1}^{n}(a^{ij})^2+1\right]v^2dt\,dx+$$

$$+\frac{n+1}{\bar{\nu}}q^2\int_{-h^2}^{0}\int_{K_h}\hat{a}v^2dt\,dx, \tag{8.8}$$

где $\tau\in(-1,\,0)$, $\bar{\nu}=\min(1,\,\nu)$, $\hat{a}\equiv\hat{a}_1^2+a_2^2+a_3+\hat{a}_4$. Применяя к интегралам правой части (8.8) неравенство Гельдера, получим оценку

$$\frac{1}{2}\int_{K_h}(v\xi\sqrt{\eta})^2\,dx\,|^{t=\tau}+\frac{\nu}{2}\int_{-h^2}^{\tau}\int_{K_h}|A\nabla v|^2\xi^2\eta\,dt\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c(n,\,\nu,\,\mu)\frac{q^2}{(h-h')^2}\left(\|A\|^2_{2s,\,2s_0,\,Q_1}+\|\hat{a}\|_{s,\,s_0,\,Q_1}\right)\|v\|^2_{l,\,l_0,\,Q_h}, \tag{8.9}$$

где

$$A=\left(\sum_{i,\,j=1}^{n}(a^{ij})^2\right)^{1/2},\quad \frac{1}{l}=\frac{\varkappa}{\bar{l}},\quad \frac{1}{l_0}=\frac{\varkappa}{\bar{l}_0}.$$

Из (8.9) легко следует:

$$\|v\|^2_{2,\,\infty,\,Q_{h'}}+\|A\nabla v\|^2_{2,\,Q_{h'}}\leqslant\tilde{c}(n,\,\nu,\,\mu)\left(\|A\|^2_{2s,\,2s_0,\,Q_1}+\|\hat{a}\|_{s,\,s_0,\,Q_1}\right)\times$$

$$\times\frac{q^2}{(h-h')^2}\|v\|^2_{l,\,l_0,\,Q_h}. \tag{8.10}$$

Применяя неравенство (1.8), выведем из (8.10) оценку

$$\|v\|_{\bar{l},\,\bar{l}_0,\,Q_{h'}}\leqslant\mathscr{K}_1\frac{q}{h-h'}\|v\|_{l,\,l_0,\,Q_h}, \tag{8.11}$$

где l, l_0 — любая пара показателей, удовлетворяющая условиям (1.7), а

$$\mathscr{K}_1=c\left(\|A\|_{2s,\,2s_0,\,Q_1}+\|\hat{a}\|^{1/2}_{s,\,s_0,\,Q_1}\right)\sup_{i,\,j=1,\,\ldots,\,n}\|b^{ij}\|_{r_i,\,r_{0i},\,Q_1}, \tag{8.12}$$

причем константа c в (8.12) зависит лишь от n, ν, μ, r_i, r_{0i}, l и l_0. Поскольку из теоремы 5.2 следует, что $\bar{u}^q\in L^{l,\,l_0}(Q_h)$ при любом q, то, устремляя в (8.11) N к ∞, получаем оценку

$$\|\bar{u}\|_{q\bar{l},\,q\bar{l}_0,\,Q_{h'}}\leqslant\left(\frac{\mathscr{K}_1q}{h-h'}\right)^{1/q}\|\bar{u}\|_{ql,\,ql_0,\,Q_h}. \tag{8.13}$$

Положим

$$q=q_s=\varkappa^s,\quad p_{(s)}=l\varkappa^s,\quad p_{0(s)}=l_0\varkappa^s,\quad h=h_s=\frac{1}{2}+2^{-(s+1)},\quad h'=h'_s=h_{s+1},$$
$$s=0,\,1,\,\ldots. \tag{8.14}$$

Из (8.13) следует тогда

$$\|\bar{u}\|_{p(s+1),\,p_0(s+1),\,Q_{h_{s+1}}}\leqslant(\mathscr{K}_1\varkappa^s2^{s+2})^{1/\varkappa^s}\|\bar{u}\|_{p(s),\,p_0(s),\,Q_{h_s}}. \tag{8.15}$$

Итерируя (8.15), получим:

$$\|\bar{u}\|_{p(s+1),\,p_0(s+1),\,Q_{h_{s+1}}}\leqslant(4\mathscr{K}_1)^{\sum\limits_{k=0}^{s}\varkappa^{-k}}(2\varkappa)^{\sum\limits_{k=0}^{s}k\varkappa^{-k}}\|\bar{u}\|_{l,\,l_0,\,Q_1}. \tag{8.16}$$

Переходя в (8.16) к пределу при $s \to \infty$, заключаем, что $\operatorname*{supess}_{Q_{1/2}} \bar{u} < +\infty$, причем справедлива оценка

$$\operatorname*{supess}_{Q_{1/2}} \bar{u} \leqslant (4\mathcal{K}_1)^{\sum_{k=0}^{\infty} \varkappa^{-k}} (2\varkappa)^{\sum_{k=0}^{\infty} k\varkappa^{-k}} \|\bar{u}\|_{l, l_0, Q_1}. \tag{8.17}$$

Вспоминая, что $\bar{u} = (u^2 + (k_1 + \varepsilon)^2)^{1/2}$, легко выведем из (8.17):

$$\operatorname*{supess}_{Q_{1/2}} |u| \leqslant (4\mathcal{K}_1)^{\sum_0^{\infty} \varkappa^{-k}} (2\varkappa)^{\sum_0^{\infty} k\varkappa^{-k}} \left(\|u\|_{l, l_0, Q_1} + k_1\right). \tag{8.18}$$

Пусть теперь ρ, t_0, x_0 произвольны, но такие, что $\overline{Q_\rho(t_0, x_0)} \subset Q$. Ввиду леммы 4.11 из оценки (8.18) вытекает неравенство

$$\operatorname*{supess}_{Q_{\rho/2}} |u| \leqslant (4\mathcal{K}_\rho)^{\sum_0^{\infty} \varkappa^{-k}} (2\varkappa)^{\sum_0^{\infty} k\varkappa^{-k}} \left(\rho^{-n/l - 2/l_0} \|u\|_{l, l_0, Q_\rho} + k_\rho\right), \tag{8.19}$$

где k_ρ определено по формуле (8.3), а $\mathcal{K}_\rho$ имеет следующий вид,

$$\mathcal{K}_\rho = c(n, \nu, \mu, r_i, r_{0i}, l, l_0) \left(\frac{\|A\|_{2s, 2s_0, Q_\rho}}{\rho^{n/2s + 1/s_0}} + \frac{\|\hat{a}\|^{1/2}_{s, s_0, Q_\rho}}{\rho^{1 - n/2s - 1/s_0}} \right) \times \\ \times \left(\sup_{i, j = 1, \dots, n} \frac{\|b^{ij}\|_{r_i, r_{0i}, Q_\rho}}{\rho^{n/r_i + 2/r_{0i}}} \right), \tag{8.20}$$

причем из условия (8.1) следует, что $2 - n/s - 2/s_0 > 0$, так что $k_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Теорема 8.1 доказана.

§ 9. Ограниченность обобщенных решений краевой задачи

Теорема 9.1. *Пусть выполнены условия* (1.2)—(1.4), (1.11), (8.1), (1.6) *и условие*

$$a_2^2,\ a_3,\ a_4,\ g,\ h \in L^{s, s_0}(Q),\quad \frac{1}{s} + \frac{2\varkappa}{\bar{l}} = 1,\quad \frac{1}{s_0} + \frac{2\varkappa}{\bar{l}_0} = 1, \tag{9.1}$$

где $\varkappa$, $\bar{l}$, $\bar{l}_0$ *— такие же, как в условии* (5.1).

Тогда всякое обобщенное решение и задачи (1.21) *имеет конечный* $\operatorname*{supess}_{Q} |u|$, *причем* $\operatorname*{supess}_{Q} |u| \leqslant c$, *где с зависит только от структуры задачи* (1.21).

Доказательство. Пусть u — обобщенное решение задачи (1.21). Ввиду леммы 4.8 при любой функции ω, удовлетворяющей условиям, приведенным в лемме 4.4, и любых $\tau_1, \tau_2 \in [T_1, T_2]$ справедливо равенство (4.16). Выберем в качестве функции $\omega(u)$ из (4.16) функцию, определенную по формуле

$$\omega(u) = \frac{1}{2}[\varphi(\bar{u})]^2,\quad \bar{u} = (u^2 + (k + \varepsilon)^2)^{1/2} - k - \varepsilon, \\ \varphi(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^q, & k + \varepsilon \leqslant \bar{u} \leqslant N, \\ qN^{q-1}\bar{u} - (q-1)N^q, & \bar{u} \geqslant N, \end{cases} \quad N > (k + \varepsilon), \tag{9.2}$$

где $q \geqslant 1$ и

$$k = \|h\|^{1/2}_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q} + \|u_0\|_{\infty, \Omega},\quad \varepsilon > 0. \tag{9.3}$$

Учитывая, что

$$\omega'(u) = \varphi(\bar u)\varphi'(\bar u)\frac{d\bar u}{du},$$

$$\omega''(u) = \varphi(\bar u)\varphi'(\bar u)\frac{d^2\bar u}{du^2} + \{[\varphi'(\bar u)]^2 + \varphi(\bar u)\} \times \times \varphi''(\bar u)\left(\frac{d\bar u}{du}\right)^2, \tag{9.4}$$

точно так же, как при доказательстве теоремы 5.1, устанавливаем, что функция $\omega(u)$ удовлетворяет всем условиям леммы 4.3. Но тогда ввиду очевидного равенства $\omega'(0) = 0$ для этой функции выполнены все условия, предъявляемые в лемме 4.4. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [\varphi(\bar u)]^2 dx\,\Big|_{T_1}^{\tau} + \int_{T_1}^{\tau}\int_\Omega [\mathbf{l}' \cdot A\nabla u\omega'' + l_0'\omega']\,dtdx + \int_{\Sigma_3} \lambda u\varphi\varphi' ds = 0. \tag{9.5}$$

Учитывая неравенства вида (8.5), формулы (5.7), (5.8), (5.10), неравенства

$$\left|\frac{d\bar u}{du}\right| \leqslant 1,\quad 0 < \frac{d^2\bar u}{du^2} < \bar u^{-1},$$

условие (6.1) и обозначая $v = \varphi(\bar u)$, выведем из (9.5) неравенство

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^2 dx\,\Big|^{t=\tau} + \nu\int_{T_1}^{\tau}\int_\Omega |A\nabla v|^2 dtdx \leqslant \int_{T_1}^{\tau}\int_\Omega (2q^2\hat a_4 v^2 + + \sqrt{n}\, a_2 |A\nabla v|\, v + q\hat a_3 v^2)\,dtdx + \varepsilon_1\int_{T_1}^{\tau}\int_\Omega |A\nabla v|^2 dtdx + + c_{\varepsilon_1}\int_{T_1}^{\tau}\int_\Omega v^2 dtdx + \frac{1}{2}(k+\varepsilon)^{2q}\operatorname{mes}\Omega, \tag{9.6}$$

где $\varepsilon_1 > 0$, причем при выводе (9.6) мы учли, что при $t = T_1$ справедливо неравенство $v^2 \leqslant (k+\varepsilon)^{2q}$ (см. (9.3)). Применяя неравенство Коши и выбирая подходящее $\varepsilon_1 > 0$, выведем из (9.6) оценку

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^2 dx\,\Big|^{t=\tau} + \frac{\nu}{2}\int_{T_1}^{\tau}\int_\Omega |A\nabla v|^2 dtdx \leqslant \leqslant \int_{T_1}^{T}\int_\Omega \left(2q^2\hat a_4 + \frac{na_2^2}{\nu} + q\hat a_3 + c_{\nu/4}\right) v^2 dtdx + (k+\varepsilon)^{2q}\operatorname{mes}\Omega. \tag{9.7}$$

Из (9.7) легко следует неравенство

$$\|v\|^2_{2,\infty,Q} + \|A\nabla v\|^2_{2,Q} \leqslant \frac{2(n+1)q^2}{\bar\nu}\|\hat a\|_{s,s_0,Q}\|v\|^2_{l,l_0,Q} + (k+\varepsilon)^{2q}\operatorname{mes}\Omega, \tag{9.8}$$

где $\bar\nu = \min(\nu, 1)$, $a = \hat a_4 + \hat a_3 + a_2^2 + c_{\nu/4}$.

Применяя (1.8) и учитывая, что

$$(k+\varepsilon)^{2q}\operatorname{mes}\Omega = \frac{1}{T_2 - T_1}\iint_Q (k+\varepsilon)^{2q} dtdx \leqslant \leqslant \frac{1}{T_2 - T_1}\iint_Q \bar u^{2q} dtdx < (\operatorname{mes}^{1-2/l}\Omega)(T_2 - T_1)^{-2/l_0}\|\bar u^q\|^2, \tag{9.9}$$

выведем из (9.8) неравенство

$$\|v\|^2_{\bar{l}, \bar{l}_0, Q} \leqslant c_0^2 b^2 \left[\frac{2(n+1)q^2}{\nu}\|a\|_{s, s_0, Q}\|v\|^2_{l, l_0, Q} + (\mathrm{mes}^{1-2/l}\Omega) \times \right.$$
$$\left. \times (T_2 - T_1)^{-2/l_0}\|\bar{u}^q\|^2_{l, l_0, Q}\right], \tag{9.10}$$

где l, l_0 — любая пара показателей, удовлетворяющая условию (1.7) c_0 и b — константы из оценки (1.8). Заметим, что ввиду теоремы 6.2 интеграл $\iint\limits_Q \bar{u}^{2q} dt dx$ существует при любом $q > 1$. Следовательно, в (9.10) можно перейти к пределу при $N \to \infty$. Применяя теорему Лебега и лемму Фату, выведем из (9.10) неравенство

$$\|\bar{u}^q\|_{\bar{l}, \bar{l}_0, Q} \leqslant Kq\|\bar{u}^q\|_{l, l_0, Q}, \tag{9.11}$$

где $K = K(n, \nu, \mu, \ \mathrm{mes}\,\Omega, \ T_2 - T_1, \ r_i, \ r_{0i}, \ l, \ l_0)\left(\sup\limits_{i, j=1, \ldots, n}\|b^{ij}\|_{r_i, r_{0i}, Q}\right) \times$

$\times \|a\|_{s, s_0, Q}$. Очевидно, что из (9.11) следует оценка

$$\|\bar{u}\|_{\varkappa q l, \varkappa q l_0, Q} \leqslant K^{1/q} q^{1/q}\|\bar{u}\|_{l, l_0, Q}, \tag{9.12}$$

где $\varkappa > 1$ — число из условия (9.1). Полагая в (9.12) $q = q_\nu = \varkappa^\nu$, $\nu = 0$, 1, …, и обозначая $p_{(\nu)} = \varkappa^\nu l$, $p_{0(\nu)} = \varkappa^\nu l_0$, $\nu = 0$, 1, …, получим:

$$\|\bar{u}\|_{p(\nu+1), p_0(\nu+1), Q} \leqslant K^{1/\varkappa^\nu} \varkappa^{\nu/\varkappa^\nu}\|\bar{u}\|_{p(\nu), p_0(\nu), Q}, \quad \nu = 0, 1, \ldots \tag{9.13}$$

Итерируя (9.13) при $m \to \infty$, найдем:

$$\|\bar{u}\|_{p(m+1), p_0(m+1), Q} \leqslant K^{\sum\limits_0^m \varkappa^{-\nu}} \varkappa^{\sum\limits_0^{m} \nu\varkappa^{-\nu}}\|\bar{u}\|_{l, l_0, Q}. \tag{9.14}$$

Устремляя в (9.14) m к ∞, заключаем, что $\operatorname*{supess}\limits_Q \bar{u} < +\infty$, и получаем оценку

$$\operatorname*{supess}\limits_Q |u| \leqslant cK^{\sum\limits_0^\infty \varkappa^{-\nu}} \varkappa^{\sum\limits_0^\infty \nu\varkappa^{-\nu}} \left(\|u\|_{l, l_0, Q} + \|h\|^{1/2}_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q} + \|u_0\|_{\infty, \Omega}\right). \tag{9.15}$$

Устремляя в (9.15) ε к 0 и учитывая (6.7) при $\sigma = 1$, получим неравенство

$$\operatorname*{supess}\limits_Q |u| \leqslant c\left(\|h\|^{1/2}_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q} + \|u_0\|_{\infty, \Omega}\right), \tag{9.16}$$

где c зависит от константы в неравенствах (9.15) и (6.7), а также от $\mathrm{mes}\,\Omega$ и $T_2 - T_1$. Теорема 9.1 доказана.

§ 10. Принцип максимума

В этом параграфе предполагается, что выполнены все условия § 1, связанные с рассмотрением глобальных свойств обобщенных решений уравнения (1.1).

Определение 10.1. Будем говорить, что функция $u \in W \equiv \{u \in \mathscr{H}$: $u' \in \mathscr{H}^*$ не превосходит число M на $(\partial\Omega \times (T_1, \ T_2)) \cup \Omega_{T_1}$, если для каждого $s > 0$ существуют такая $(n+1)$-мерная окрестность $\mathfrak{N}_s$ множества $(\partial\Omega \times (T_1, \ T_2)) \cup \Omega_{T_1}$ и такая последовательность $\{u_s\}$, $u_s \in \overset{\circ}{C}{}^1(Q)$, $s = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к u в $\mathscr{W}$, что при п. в. $(t, x) \in \mathfrak{N}_s$ справедливы неравенства

$$u_s \leqslant M - 1/s, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Из определения 10.1 очевидно следует, что условие $u \leqslant M$ на $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$ для функции $u \in \mathcal{H}$ влечет неравенство $u \leqslant M + \varepsilon$ на $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$ для $\forall \varepsilon > 0$.

Теорема 10.1. *Пусть выполнены указанные выше условия, а также условие* (9.1). *Пусть u — обобщенное решение уравнения* (1.1), *такое, что $u \leqslant M$ на $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$. Тогда при п. в. $(t, x) \in Q$*

$$u(t, x) \leqslant M + ck, \tag{10.1}$$

где c зависит только от структуры уравнения, $T_2 - T_1$ и $\operatorname{mes}\Omega$, *а число k определено по формуле*

$$k = (\|a_3\|_{s, s_0, Q} + \|a_4\|_{s, s_0, Q})|M| + \|h\|^{1/2}_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q}. \tag{10.2}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $M = 0$. Рассмотрим функцию

$$\omega(u) = \frac{1}{2}[\varphi(\bar{u}) - k^q]^2,$$

$$\varphi(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^q, & k \leqslant \bar{u} \leqslant N, \\ qN^{q-1}\bar{u} - (q-1)N^q, & \bar{u} \geqslant N, \end{cases} \tag{10.3}$$
$$N > k, \quad q \geqslant 1, \quad \bar{u} = \max(0, u) + k,$$

где $k = \|h\|^{1/2}_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Очевидно, что функции $\bar{u} \to \varphi(\bar{u})$, $\bar{u} \to \varphi'(\bar{u})$ непрерывно дифференцируемы и равномерно липшицевы, а функция $\bar{u} \to \varphi''(\bar{u})$ непрерывна всюду, кроме точки $\bar{u} = N$, где она имеет разрыв первого рода. Очевидно также, что

$$\omega'(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ (\varphi(\bar{u}) - k^q)\varphi'(\bar{u}), & u \geqslant 0; \end{cases}$$
$$\omega''(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ (\varphi - k^q)\varphi'' + \varphi'^2, & u \geqslant 0, \ u \neq N, \end{cases} \tag{10.4}$$

причем $\omega'(u)$ непрерывна всюду, а $\omega''(u)$ — всюду, кроме точек $u = 0$, $u = N - k$. Кроме того, $\omega''(u)$ ограничена на $\mathbb{R}$. Тогда из сказанного следует, что функция ω удовлетворяет всем условиям леммы 4.3 (причем $\omega'(u)$ имеет две угловые точки, $u = 0$ и $u = N - k$). Пусть u — рассматриваемое в теореме 10.1 обобщенное решение уравнения (1.1), так что $u \leqslant 0$ на $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$. Из определения 10.1 и вида $\omega'(u)$ следует тогда, что существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in C^1(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к u в $\mathcal{W}$ и такая, что $\omega'(u_n) = 0$ в некоторой окрестности множества $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$. Тогда из доказанного, в частности, следует, что для функций $u(t, x)$ и $\omega(u)$ выполнены все условия леммы 4.5. Поэтому ввиду леммы 4.9 при $\forall \tau \in (T_1, T_2]$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \omega(u)\,dx\,|^{t=\tau} + \int_{T_1}^{\tau}\int_\Omega (\mathbf{l}' \cdot A\nabla u\omega'' + l_0'\omega')\,dtdx = 0, \quad \tau \in (T_1, T_2], \tag{10.5}$$

где $\omega(u)$ определена по формуле (10.3), причем при выводе (10.5) из равенства (4.17) мы учли также, что ввиду неравенства $u \leqslant 0$ на Ω_{T_1} из (10.3) следует равенство $\omega(u) = 0$ при $t = T_1$.

Заметим теперь, что из условий (1.11) вытекает справедливость на множестве $\{(t, x) \in Q, u > 0\}$ неравенств

$$
\begin{gathered}
|l_0'(t, x, u, p)| \leqslant a_2(t, x) \sum_{i=1}^{n} |p_i| + \hat{a}_3(t, x)\bar{u}, \\
\mathbf{l}'(t, x, u, p) \cdot p \geqslant \nu |p|^2 - \hat{a}_4(t, x)\bar{u}^2,
\end{gathered} \tag{10.6}
$$

где ν и a_2 — такие же, как в (1.11), и где $\hat{a}_3 = a_3 + k^{-1}g$, $\hat{a}_4 = a_4 + k^{-1}h$, причем $\hat{a}_3, \hat{a}_4 \in L^{s, s_0}(Q)$ и $\|k^{-1}g\|_{s, s_0, Q} \leqslant 1$, $\|k^{-2}h\|_{s, s_0, Q} \leqslant 1$. Учитывая условия (10.6), формулы (5.7), (5.8) и обозначая $v = \varphi(\bar{u})$, выведем из (10.5):

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2} \int_{\Omega} (v - k^q)^2 dx \Big|^{t=\tau} + \nu \int_{T_1}^{\tau} \int_{\Omega} |A\nabla v|^2 dtdx \leqslant \\
\leqslant \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \left(2q^2\hat{a}_4 v^2 + \sqrt{n}\, a_2 |A\nabla v| v + q\hat{a}_3 v^2\right) dxdx, \quad \tau \in (T_1, T_2).
\end{gathered} \tag{10.7}
$$

Из неравенства (10.7) точно так же, как при доказательстве теоремы 9.1 (см. доказательство теоремы 9.1 после формулы (9.6)), получим:

$$
\|\bar{u}\|_{p(m), p_0(m), Q} \leqslant \mathscr{K}^{\sum\limits_0^m \varkappa^{-\nu}} \varkappa^{\sum\limits_0^m \nu\varkappa^{-\nu}} \|\bar{u}\|_{l, l_0, Q}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{10.8}
$$

где $\mathscr{K}$ имеет такой же вид, как и в (9.11), а $\bar{u} = \max(0, u) + k$. Устремляя в (10.8) m к ∞, заключаем, что $\operatorname{supess} \bar{u} < \infty$ и имеет место оценка

$$
\operatorname*{supess}_{Q} \bar{u} \leqslant c\left(\|u_+\|_{l, l_0, Q} + \|h^{1/2}\|_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q}\right), \tag{10.9}
$$

где $u_+ = \max(0, u)$, $c = \mathscr{K}^{\sum\limits_0^\infty \varkappa^{-\nu}} \varkappa^{\sum\limits_0^\infty \nu\varkappa^{-\nu}}$.

Оценим норму $\|u_+\|_{l, l_0, Q}$. Из неравенства (10.7), так как теперь уже известно, что функция $\bar{u}(t, x)$ имеет конечный $\operatorname*{supess}_{Q} \bar{u}$ (так что в (10.3) в качестве $\varphi(\bar{u})$ можно взять $\varphi(\bar{u}) = \bar{u}^q$ при $\bar{u} \geqslant k$, $q = 1$), вытекает неравенство

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_+^2 dx \Big|^{t=\tau} + \nu \int_{T_1}^{\tau} \int_{\Omega} |A\nabla u_+|^2 dtdx \leqslant \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} (2\hat{a}_4 (u_+ + k)^2 + \\
+ \sqrt{n}\, a_2 |A\nabla u_+| |u_+ + k| + \hat{a}_3 (u_+ + k)^2) dtdx, \quad \tau \in (T_1, T_2].
\end{gathered} \tag{10.10}
$$

Из (10.10) легко следует оценка

$$
\|u_+\|_{2, \infty, Q_t} + \int_{T_1}^{t} \int_{\Omega} |A\nabla u_+|^2 dtdx \leqslant c_1\left(|\Omega| k^2 + \|\hat{a}\|_{s, s_0, Q} \|u_+ + k\|^2_{l, l_0, Q_t}\right), \tag{10.11}
$$

где $Q_t = \Omega \times (T_1, t)$, а c_1 зависит от n и ν. Применяя неравенство (1.10) с подходящим $\varepsilon > 0$, выведем из (10.11):

$$
\|u_+(t)\|_{2, \Omega} + \int_{T_1}^{t} \int_{\Omega} |A\nabla u_+|^2 dtdx \leqslant c_1\left(k^2 + \int_{T_1}^{t} \int_{\Omega} u_+^2 dtdx\right), \tag{10.12}
$$

где $c_2 = c_1 \operatorname{mes} \Omega$, c_2 зависит от c_1, $\|\hat{a}\|_{s, s_0, Q}$ и других величин, определяемых константами c_0 и b из неравенства (1.8). Применяя теперь неравенство Гронуола, получим оценку

$$\|u_+\|^2_{2, \infty, Q} + \|A\nabla u_+\|^2_{2, Q} \leqslant c_1 k^2 e^{c_2 (T_2 - T_1)}. \tag{10.13}$$

Тогда из оценки (1.8) находим

$$\|u\|_{l, l_0, Q} \leqslant ck, \tag{10.14}$$

где c зависит от c_1, c_2, $T_2 - T_1$, $\operatorname{mes} \Omega$ и показателей l, l_0. Из неравенств (10.9) и (10.14) получаем оценку

$$u(t, x) \leqslant c\left(\|h\|^{1/2}_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q}\right). \tag{10.15}$$

Таким образом, результат теоремы 10.1 установлен в случае $M = 0$. Устраним теперь предположение $M = 0$. Пусть $\hat{u} = u - M$, $M = \mathrm{const} \neq 0$. Очевидно, что $\hat{u} \leqslant 0$ на $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$. Легко видеть, что $\hat{u}$ есть обобщенное решение уравнения

$$\hat{u}_t - \frac{d}{dx_i} \hat{l}^i (t, x, \hat{u}, \nabla\hat{u}) + \hat{l}_0 (t, x, \hat{u}, \nabla\hat{u}) = 0, \tag{10.16}$$

где

$$\hat{\mathbf{l}}(t, x, \hat{u}, \hat{p}) = \mathbf{l}(t, x, \hat{u} + M, \hat{p}), \ \hat{l}_0(t, x, \hat{u}, \hat{p}) = l_0(t, x, \hat{u} + M, \hat{p}),$$

причем уравнение (10.16) имеет такую же структуру, что и уравнение (1.1), в частности, выполнены условия

$$\hat{\mathbf{l}}(t, x, \hat{u}, \hat{p}) = A^* \hat{\mathbf{l}}'(t, x, u, Ap), \quad \hat{l}_0(t, x, \hat{u}, \hat{p}) = \hat{l}_0'(t, x, \hat{u}, A\hat{p}), \tag{10.17}$$

причем $\hat{\mathbf{l}}'(t, x, \hat{u}, \hat{p}) = \mathbf{l}'(t, x, \hat{u} + M, \hat{p})$, $\hat{l}_0'(t, x, \hat{u}, \hat{p}) = l_0'(t, x, \hat{u} + M, \hat{p})$, и неравенства

$$\hat{l}'(t, x, \hat{u}, \hat{p}) \cdot \hat{p} \geqslant \nu\hat{p}^2 - 2a_4\hat{u}^2 - \hat{h}, \quad |\hat{l}_0(t, x, \hat{u}, \hat{p})| \leqslant a_2 \sum_{i=1}^{n} |\hat{p}_i| + a_3|\hat{u}| + \hat{g}, \tag{10.18}$$

где $\hat{h} = 2a_4 M^2 + h$, $\hat{g} = a_3|M| + g$. Тогда из доказанного следует оценка

$$\hat{u}(t, x) \leqslant c'k', \tag{10.19}$$

где $c' = \sqrt{2}\,c$, $k' = \left(\|a_3\|_{s, s_0, Q} + \|a_4\|_{s, s_0, Q}\right)|M| + \|h\|^{1/2}_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q}$. Возвращаясь в формуле (10.19) к старой переменной, получим оценку (10.1). Теорема 10.1 доказана.

Следствие 10.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 10.1, и пусть u — обобщенное решение уравнения (1.1), такое, что $m \leqslant u \leqslant M$ на $(\partial\Omega \times (T_1, T_2)) \cup \Omega_{T_1}$. Тогда при п. в. $(t, x) \in Q$*

$$m - c_1 k_1 \leqslant u(t, x) \leqslant M + c_2 k_2, \tag{10.20}$$

где c_1 и c_2 зависят только от структуры уравнения (1.1), $T_2 - T_1$ и $\operatorname{mes} \Omega$, а числа k_1 и k_2 определены по формулам:

$$\begin{gathered} k_1 = \left(\|a_3\|_{s, s_0, Q} + \|a_4\|_{s, s_0, Q}\right)|m| + \|h\|^{1/2}_{s, s_0, Q} + \|g\|_{s, s_0, Q}, \\ k_2 = (\|a_3\| + \|a_4\|)\,|M| + \|h\|^{1/2} + \|g\|. \end{gathered} \tag{10.21}$$

Доказательство. Поскольку функция $\tilde{u} = -u$, где u — обобщенное решение уравнения (1.1), является обобщенным решением совершенно аналогичного уравнения, для которого выполнены точно такие же условия, что и для уравнения (1.1), то наряду с оценкой $u(t, x) \leqslant M + c_1 k_1$, доказанной в теореме 10.1, справедлива и оценка $(-u(t, x)) \leqslant -m + c_2 k_2$. Из этих оценок и следуют, очевидно, неравенства (10.20). Следствие 10.1 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Исследования о принципе максимума. I—VI. — Изв. вузов. Математика, 1958, 5, с. 126—157; 1959, 3, с. 3—12; 5, с. 16—32; 1960, 3, с. 3—15; 5, с. 16—26; 1961, 1, с. 3—20.
2. Бабич В. М. К вопросу о распространении функций. — УМН, 1953, 8, 2 (54), с. 111—113.
3. Бабич В. М., Слободецкий Л. Н. Об ограниченности интеграла Дирихле. — ДАН СССР, 1956, 106, 4, с. 604—606.
4. Бакельман И. Я. Гиперповерхности с данной средней кривизной и квазилинейные эллиптические уравнения с сильными нелинейностями. — Мат. сборник, 1968, 75, 4, с. 604—638.
5. Бернштейн С. Н. Собр. соч. М., Изд-во АН СССР, 1960, 3. 439 с.
6. Бернштейн С. Н. Ограничение модулей последовательности производных решений уравнений параболического типа. — ДАН СССР, 1938, 18, 7, с. 385—388.
7. Бесов О. В., Ильин В. П., Кудрявцев Л. Д., Лизоркин П. И., Никольский С. М. Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных. — В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. М., Наука, 1970, с. 38—63.
8. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 1975. 478 с.
9. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
10. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956. 473 с.
11. Вентцель Т. Д. Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа. — Мат. сб., 1957, 41, 1, с. 105—128.
12. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. — Мат. сб., 1954, 35, 3, с. 513—568.
13. Вишик М. И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. — Мат. сборник, 1962, 59 (доп.), 2, с. 289—325.
14. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука, 1979. 318 с.
15. Вольперт А. И., Худяев С. И. О задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. — Мат. сборник, 1969, 78, 3, с. 374—396.
16. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1978. 336 с.
17. Глушко В. П. О классических решениях краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в произвольных гладких областях. — В кн.: Теория функций, функц. анализ и их прилож. Воронеж, 1967, 5, с. 157—176.
18. Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М., Наука, 1975. 295 с.
19. Дубинский Ю. А. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений. — Мат. сборник, 1964, 64, 3, с. 458—480.
20. Дубинский Ю. А. Квазилинейные эллиптико-параболические уравнения. — Мат. сборник, 1968, 77, 3, с. 354—389.
21. Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. — В кн.: Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. М., 1976, 9, с. 5—130.
22. Иванов А. В. Об одном классе функций. — Тр. МИАН СССР, 1964, 73, с. 159—171.
23. Иванов А. В. Априорные оценки для решений линейных уравнений второго порядка эллиптического и параболического типов. — ДАН СССР, 1965, 161, 6, с. 1270—1273.
24. Иванов А. В., Ладыженская О. А., Трескунов А. Л., Уральцева Н. Н. Некоторые свойства обобщенных решений параболических уравнений второго порядка. — ДАН СССР, 1966, 168, 1, с. 17—20; Тр. МИАН СССР, 1966, 92, с. 57—92.

25. И в а н о в А. В. Неравенство Гарнака для обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка. — ДАН СССР, 1967, **73**, 4, с. 752—754; Тр. МИАН СССР, 1967, **102**, с. 51—84.
26. И в а н о в А. В. Локальные оценки максимума модуля первых производных решений квазилинейных неравномерно эллиптических уравнений дивергентного вида. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1968, **7**, с. 87—125.
27. И в а н о в А. В. О внутренних оценках первых производных решений квазилинейных неравномерно эллиптических и неравномерно параболических уравнений общего вида. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1969, **14**, с. 24—47.
28. И в а н о в А. В. Краевая задача для вырождающихся параболических линейных уравнений второго порядка. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1969, **14**, с. 48—88.
29. И в а н о в А. В. Задача Дирихле для квазилинейных неравномерно эллиптических уравнений второго порядка. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1970, **19**, с. 79—94.
30. И в а н о в А. В. Локальные оценки максимума модуля первых производных решений квазилинейных неравномерно эллиптических и неравномерно параболических уравнений и систем общего вида. — Тр. МИАН СССР, 1970, **110**, с. 45—64.
31. И в а н о в А. В. О задаче Дирихле для квазилинейных неравномерно эллиптических уравнений второго порядка. — Тр. МИАН СССР, 1971, **116**, с. 34—54.
32. И в а н о в А. В. Глобальные априорные оценки обобщенных решений вырождающихся параболических уравнений второго порядка. — Вестн. Лен. ун-та. Сер. мат., 1971, 4, с. 13—22.
33. И в а н о в А. В. О гладкости обобщенных решений вырождающихся параболических уравнений второго порядка. — Тр. МИАН СССР, 1971, **116**, т. 55—70.
34. И в а н о в А. В. О структуре квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1971, **21**, с. 5—33.
35. И в а н о в А. В. О предельном росте коэффициентов квазилинейных эллиптических систем второго порядка. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1972, **27**, с. 73—90.
36. И в а н о в А. В. Локальные оценки первых производных решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка и их применение к теоремам лиувиллевского типа. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1972, **30**, с. 40—50.
37. И в а н о в А. В. Задача Дирихле для некоторых классов квазилинейных эллиптических систем второго порядка. — Тр. МИАН СССР, 1973, **125**, с. 56—87.
38. И в а н о в А. В. О первой краевой задаче для квазилинейных параболических уравнений второго порядка. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1973, **38**, с. 10—32.
39. И в а н о в А. В. Теоремы лиувиллевского типа для решений квазилинейных эллиптических систем. — Тр. МИАН СССР, 1975, **127**, с. 5—19.
40. И в а н о в А. В., И в о ч к и н а Н. М., Л а д ы ж е н с к а я О. А. Об одном усилении результатов по разрешимости задачи Дирихле для равномерно эллиптических квазилинейных уравнений второго порядка. — Вестн. Лен. ун-та. Сер. мат., 1975, 1, с. 61—72.
41. И в а н о в А. В. Априорные оценки для решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1976, **59**, с. 31—59.
42. И в а н о в А. В. Априорные оценки вторых производных решений нелинейных уравнений второго порядка на границе области. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1977, **69**, с. 65—76.
43. И в а н о в А. В. Свойства решений не строго и неравномерно параболических линейных и квазилинейных уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1977, **69**, с. 45—64.
44. И в а н о в А. В. Первая краевая задача для квазилинейных $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, **84**, с. 45—88.
45. И в а н о в А. В. Первая и вторая краевые задачи для квазилинейных $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, **92**, с. 171—181.
46. И в а н о в А. В. Общая краевая задача для квазилинейных $(A, \mathbf{b})$-эллиптических уравнений. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, **96**, с. 57—68.
47. И в а н о в А. В., М к р т ч я н П. З. О разрешимости первой краевой задачи для некоторых классов вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. — Тр. МИАН, 1980, **147**, с. 14—39.
48. И в а н о в А. В. Двусторонние и односторонние лиувиллевские теоремы для квазилинейных эллиптических уравнений недивергентного вида. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, **100**, с. 59—80.
49. И в а н о в А. В. $(A, 0)$-эллиптические уравнения со слабым вырождением. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1981, **112**, с. 75—84.
50. И в а н о в А. В. $(A, 0)$-параболические уравнения со слабым вырождением. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1981, **111**, с. 52—62.
51. И в а н о в А. В. Краевые задачи для квазилинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений второго порядка. — ДАН СССР, 1982, **262**, 1.
52. И в а н о в А. В. О регулярности обобщенных решений первой краевой задачи для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1981, **110**, с. 30—52.
53. И в а н о в А. В. Краевые задачи для квазилинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. — УМН, 1981, **36**, 4 (220), с. 232.

54. Ивочкина Н. М., Осколков А. П. Нелокальные оценки первых производных решений первой краевой задачи для неравномерно эллиптических и неравномерно параболических недивергентных уравнений. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1968, **11**, с. 6—72.
55. Ивочкина Н. М., Осколков А. П. Нелокальные оценки первых производных решений первой краевой задачи для некоторых классов неравномерно эллиптических и неравномерно параболических уравнений и систем. — Тр. МИАН СССР, 1970, **110**, с. 65—101.
56. Ильин А. М. Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения. — Мат. сборник, 1960, 50, 4, с. 443—498.
57. Ильин В. П. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных методов. — Тр. МИАН СССР, 1959, 53, с. 64—127.
58. Ильин В. П. Об аппроксимации функций из пространств $W_p^{(l)}(G)$ непрерывно дифференцируемыми функциями. — Тр. МИАН, 1961, **64**, с. 37—59.
59. Калашников А. С. Об одном нелинейном уравнении, возникающем в теории нестационарной фильтрации. — Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1978, **4**, с. 137—146.
60. Калашников А. С. О квазилинейных вырождающихся параболических уравнениях с конечной скоростью распространения возмущений. — Тр. конф. по дифференциальным уравнениям и вычисл. мат. Новосибирск, Наука, 1980, с. 80—83.
61. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области. — ДАН СССР, 1951, **77**, 2, с. 181—183.
62. Кожанов А. И. Первая краевая задача для некоторых классов квазилинейных эллиптических вырождающихся уравнений. — В кн.: Динамика сплошной среды: Быстропротекающие процессы. Новосибирск, 1974, **17**, с. 31—42.
63. Колодий И. М. Качественные свойства обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. — Укр. мат. журн., 1975, **27**, 3, с. 320—329.
64. Кондратьев В. А. Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях. — Тр. Моск. мат. об-ва, 1966, **15**, с. 400—451.
65. Кошелев А. И. Об ограниченности в L^p производных решений эллиптических дифференциальных уравнений. — Мат. сборник, 1956, **38 (80)**, 3, с. 278—312.
66. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956, 390 с.
67. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка. — ДАН СССР, 1963, **150**, 3, с. 470—473; Мат. сборник, 1964, **65 (107)**, 4, с. 522—570.
68. Кружков С. Н. Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка. — ДАН СССР, 1963, **150**, 4, с. 748—751.
69. Кружков С. Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. — Мат. сборник, 1968, **77**, 3, с. 299—334.
70. Кружков С. Н., Колодий И. М. Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. — Сибирский мат. журн., 1977, **18**, 3, с. 608—628.
71. Крылов Н. В. К теории нелинейных вырождающихся уравнений. — ДАН СССР, 1971, **201**, 6, с. 1279—1281.
72. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М., Наука, 1977, 398 с.
73. Кудрявцев Л. Д. О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. — ДАН СССР, 1956, **108**, 1, с. 16—19.
74. Кудрявцев Л. Д. Прямые и обратные теоремы вложения: Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений. — Тр. МИАН СССР, 1959, 55, с. 1—181.
75. Купцов Л. П. Об одном пространстве функций с интегрируемыми в p-й степени первыми производными, берущимися по переменным направлениям. — Тр. МИАН СССР, 1968, **103**, с. 96—116.
76. Купцов Л. П. Некоторые оценки для решений вырождающихся эллиптических уравнений. — Мат. заметки, 1970, **8**, 5, с. 625—634.
77. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными. — УМН, 1961, **16**, 1, с. 19—90.
78. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений. — ДАН СССР, 1961, **139**, 3, с. 544—547; Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, **26**, 1, с. 5—52.
79. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения. М., Наука, 1964, 538 с.
80. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., Наука, 1967, 736 с.

81. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. О тотальных оценках первых производных по x решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1969, 14, с. 127—155.
82. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., Наука, 1973. 407 с.
83. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., Наука, 1973. 576 с.
84. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Оценка гельдеровской нормы решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка общего вида. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, 96, с. 161—168.
85. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Об оценке константы Гельдера для решений квазилинейных параболических уравнений недивергентного вида. — УМН, 1961, 36, 4, с. 230.
86. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М., Наука, 1971. 287 с.
87. Лу Вень-Туан. К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными степенями. — Вестн. ЛГУ. Сер. мат., 1961, 2, с. 23—37.
88. Мазья В. Г. Некоторые оценки для решений эллиптических уравнений второго порядка. — ДАН СССР, 1961, 137, 5, с. 1057—1059.
89. Мазья В. Г. О вырождающейся задаче с косой производной. — УМН, 1970, 25, 2, с. 275—276.
90. Михайлов В. П. Первая краевая задача для квазиэллиптических и квазипараболических уравнений. — Тр. МИАН, 1967, т. 91, с. 81—100.
91. Михлин С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения. — Вестн. ЛГУ. Сер. мат., 1954, 2, с. 19—48.
92. Мкртычян П. З. О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся по независимым переменным. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, 96, с. 187—204.
93. Мкртычян П. З. Разрешимость задачи Дирихле для некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка, допускающих нефиксированное вырождение. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, 102, с. 181—189.
94. Мкртычян П. З. О свойствах обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений, вырождающихся по независимым переменным. — Докл. АН АрмССР, 1980, 70, 5, с. 292—296.
95. Никольский С. М. Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения. — ДАН СССР, 1962, 146, 4, с. 767—769.
96. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1969. 480 с.
97. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, 22, 5, с. 667—704.
98. Олейник О. А., Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения со многими независимыми переменными. — УМН, 1961, 16, 5, с. 115—155.
99. Олейник О. А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой. — Мат. сборник, 1966, 69, 1, с. 111—140.
100. Олейник О. А. Математические задачи теории пограничного слоя. — УМН, 1968, 23, 3, с. 37—65.
101. Олейник О. А. Образование пограничного слоя при постепенном разгоне. — Сибирский мат. журн., 1968, 9, 5, с. 1199—1219.
102. Олейник О. А., Радкевич Е. А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. — В кн.: Итоги науки: Математический анализ. М., 1971. 252 с.
103. Осколков А. П. О некоторых оценках для неравномерно эллиптических уравнений и систем. — Тр. МИАН СССР, 1966, 92, с. 203—232.
104. Осколков А. П. Априорные оценки первых производных решений задачи Дирихле для неравномерно эллиптических уравнений. — Тр. МИАН СССР, 1967, 102, с. 105—127.
105. Осколков А. П. Замечание об оценке постоянной Гельдера для некоторых неравномерно эллиптических уравнений. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1968, 8, с. 178—183.
106. Погорелов А. М. Многомерная проблема Минковского. М., Наука, 1975. 95 с.
107. Радкевич Е. В. Вторая краевая задача для уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., 1967, 4, с. 3—11.
108. Сабинина Е. С. О задаче Коши для уравнения нестационарной фильтрации газа со многими пространственными переменными. — ДАН СССР, 1961, 136, 5, с. 1034—1037.
109. Сабинина Е. С. Об одном классе нелинейных вырождающихся параболических уравнений. — ДАН СССР, 1962, 143, 4, с. 794—797.
110. Скрыпник И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев, Наукова думка, 1973. 217 с.

111. Скрыпник И. В. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений. — В кн.: Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. М., 1976, 9. с. 131—254.
112. Скрыпник И. В. Разрешимость граничных задач для недивергентных нелинейных эллиптических уравнений. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, 84, с. 243—251.
113. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., Наука. 1966. 292 с.
114. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950. 413 с.
115. Соломяк Т. Б. Задача Дирихле для квазилинейных неравномерно эллиптических уравнений. — В кн.: Проблемы математического анализа. Изд-во ЛГУ, 1966. с. 88—109.
116. Солонников В. А. Об априорных оценках для некоторых краевых задач. — ДАН СССР, 1961, 138, 4, с. 781—784.
117. Трескунов А. Л. Точные оценки в L_p для одного класса вырождающихся уравнений второго порядка эллиптического типа. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1967, 5, с. 232—249.
118. Уральцева Н. Н. Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1968, 7, с. 184—222.
119. Фатеева Г. М. О краевых задачах для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. — Мат. сборник, 1968, 76, 4, с. 537—565.
120. Фрейдлин М. И. Первая краевая задача для вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений. — УМН, 1960, 15, 2, с. 204—206.
121. Фрейдлин М. И. О гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, 32, 6, с. 1391—1413.
122. Фрейдлин М. И. О существовании в целом гладких решений вырождающихся квазилинейных уравнений. — Мат. сборник, 1969, 78, 3, с. 332—348.
123. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М., Мир, 1968. 428 с.

1. Aronson D. G. On the Green's function for second order parabolic differential equations with discontinuous coefficients, — Bul. AMS, 1963, 69, p. 841—847.
2. Aronson D. G., Serrin J. Local behaviour of solutions of quasilinear parabolic equations. — Arch. Rat. Mech., Anal., 1967, 25, p. 81—112.
3. Aronson D. G., Serrin J. A maximum principle for nonlinear parabolic equations. — Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. 3, 1967, 21, p. 291—305.
4. Bernstein S. N. Sur la généralisation du probléme de Dirichlet. II. — Math. Ann., 1910, 69, p. 82—136.
5. Bernstein S. N. Sur les équations des calcul des variations. — Ann. sci. Ecole norm. supp., 1912, 29, p. 431—485.
6. Bohn E., Jackson L. K. The Louville theorem for quasilinear elliptic partial differential equation. — Trans Amer. Math. Soc., 1962, 104, p. 392—397.
7. Bombieri E., De Giorgi E., Miranda M. Una maggiorazione a priori relative alle ipersuperfici minimali non parametriche.— Arch. Rat. Mech., Anal., 1969, 32, p. 255—269.
8. Browder F. E. Nonlinear elliptic boundary value problems. — Bul. AMS, 1963, 69, p. 862—874.
9. Cheng S.-Y., Yau S.-T. On the regularity of the solution of n-dimensional Minkowski problem. — Comm. Pure, Appl. Math., 1976, 29, p. 495—516.
10. Cheng S.-Y., Yau S.-T. On the regularity of the Monge — Ampere equation $\det\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\| = f(x, u)$. — Comm. Pure, Appl. Math., 1977, 30, p. 41—68.
11. De Giorgi E. Sulla differenziabilita el'anflitica delle estremali degli integrali multipli regolari. — Mem. Acad. Sci. Torino, 1957, 3, p. 1—19.
12. Douglas J. Jr, Dupont T., Serrin J. Uniqueness and comparison theorems for nonlinear elliptic equations in divergence form. — Arch. Rat. Mech., Anal., 1971, 42, p. 157—168.
13. Edmund D. E., Peletier L. A. Quasilinear parabolic equations. — Ann. Scuola norm. sup. Pisa. Ser. 3, 1971, 25, p. 397—421.
14. Fichera G. Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche def secondo ordine. — Atti. Acad. naz. Lincei. Mem. cl. sci., fis., mat. e natur., 1956, Sez. 1, 5, 1. 30 p.
15. Gilbarg D. Boundary-value problems for nonlinear elliptic equations in n variables. — Nonlinear problems. Madison, Wisc., 1963, p. 151—159.
16. Guglielmino Fr. Sulla regolarizazione delle soluzioni deboli problemi al contorno per operatori parabolici. — Rich. math., 1963, 12, p. 44—66.
17. Heinz E. Interior gradient estimates for surfaces with prescribed mean curvature. — J. Diff. Geometry, 1971, 5, p. 149—157.
18. Kohn J. J., Nirenberg L. Degenerate elliptic-parabolic equations of second order. — Comm. Pure, Appl. Math., 1960, 13, p. 551—585.
19. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations. — Comm. Pure, Appl. Math., 1970, 23, p. 677—703.

20. Leray J., Lions. J. Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty—Browder. — Bul. Soc. math. France, 1965, 93, 1, p. 97—107.
21. Lions J. Équations différentielles opérationelles et problèmes aux limites. Berlin, 1961. 586 p.
22. Lions J. L. Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris, 1969. 587 p.
23. Minty G. On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, 50, 6, p. 137—151.
24. Miranda M. Una maggicrazione integrale per le curveture delle ipersuperfici minimali. — Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 1967, 38, p. 91—102.
25. Morrey C. B. Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity. — Math. Z., 1959, 72, S. 146—164.
26. Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. — Comm. Pure, Appl. Math., 1960, 13, p. 457—468.
27. Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. — Comm. Pure, Appl. Math., 1961, 14, p. 577—591.
28. Moser J. A Harnack inequality for parabolic differential equations. — Comm. Pure, Appl. Math., 1964, 17, p. 101—134.
29. Moser J. On a pointwise estimate for parabolic differential equations. — Comm. Pure, Appl. Math., 1971, 24, p. 727—740.
30. Motteler Z. S. Existence theorems for certain quasilinear elliptic equations. — Pacific J. Math., 1966, 17, p. 279—300.
31. Murthy M. K. V., Stampacchia G. Boundary value problems for some degenerate-elliptic operators. — Ann. mat. pura, appl., 1968, 80, p. 1—122.
32. Nach T. Continuity of solutions of parabolic equations. — Amer. J. Math., 1958, 80, 4, p. 931—934.
33. Nirenberg L. On nonlinear elliptic partial differential equations and Holder continuity. — Comm. Pure, Appl. Math., 1953, 6, p. 103—156.
34. Peletier L. A., Serrin J. Gradient bounds and Liouville theorems for quasilinear elliptic equations. — Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. 4, 1978, 5, 1, p. 65—104.
35. Phillips R. S., Sarason L. Elliptic-parabolic equations of the second order. — J. Math. Mech., 1968, 17, p. 891—917.
36. Raviart P. A. Syr la résolution de certaines équations paraboliques non linéares. — J. Funct. Anal., 1970, 5, p. 299—328.
37. Redheffer R. H. On the inequality $\Delta u \geqslant f(u, \text{grad } u)$. — J. Math. Anal. Appl., 1960, 1, p. 277—299.
38. Schwartz L. Distributions á valeur vectorielles. I. — Ann. Inst. Fourier, 1957, 7, p. 1—141.
39. Serrin J. Local behaviour of solutions of quasilinear equations. — Acta Math., 1964, 3, p. 247—302.
40. Serrin J. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. — Philos. Trans Roy. Soc. London, 1969, 264, p. 413—496.
41. Serrin J. The Dirichlet problem for surfaces of constant mean curvature. — Proc. London Math. Soc. Sect. 3, 1970, 21, p. 361—384.
42. Serrin J. On the strong maximum principle for nonlinear second order differential inequalities. — J. Funct. Anal., 1970, 5, p. 184—193.
43. Serrin J. Entire solutions of nonlinear Poisson equations. — Proc. London Math. Soc. Sect. 3, 1972, 24, p. 348—366.
44. Serrin J. Liouville theorems and gradient bounds for quasilinear elliptic systems. — Arch. Rat. Mech. Anal., 1977, 66, p. 295—310.
45. Stampacchia G. Contributi alla reglarizzazione della soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellitiche. — Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. 3, 12, 1958, p. 223—245.
46. Stampacchia G. Some limitcases of L^p-estimates for solutions of second order elliptic equations. — Comm. Pure, Appl. Math., 1963, 4, p. 505—510.
47. Tomi F. Über semilineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Math. Z., 1969, 11, S. 350—366.
48. Trudinger N. S. Quasilinear elliptic partial differential equations in n variables. — Stanford University, 1966. 114 p.
49. Trudinger N. S. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations. — Comm. Pure, Appl. Math., 1967, 20, p. 721—747.
50. Trudinger N. S. Some existence theorems for quasilinear nonuniformly equations in divergence form. — J. Math. Mech., 1969, 18, p. 909—917.
51. Trudinger N. S. On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations. — Arch. Rat. Mech. Anal., 1971, 42, p. 50—62.
52. Trudinger N. S. Generalized solutions of quasilinear differential inequalities. — Bul. AMS, 1971, 77, p. 576—579.
53. Trudinger N. S. On the analyticity of generalized minimal surfaces. — Bul. Austral. Math. Soc., 1971, 5, p. 315—320.
54. Trudinger N. S. Gradient estimates and mean curvature. — Math. Z., 1973, 131, S. 165—175.

55. T r u d i n g e r N. S. Linear elliptic operators with measurable coefficients. — Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. 3, 1973, **27**, p. 265—308.
56. W a h l W. Einige neue innere Abschatzungen für nichtlineare elliptische Gleichungen und Systeme. — Math. Z., 1973, **134**, S. 119—128.
57. W a h l W. Über quasilineare elliptische Differentialgleichungen in der Ebene. — Manuscripta math., 1973, 8, S. 59—67.
58. W a h l W. Über die Holderstetigkeit der zweiten Ableitungen der Losungen nichtlinearer elliptischer Gleichungen. — Math. Z., 1974, **136**, S. 151—162.