

Задачи _____
по _____

Математическим
Методам
Физики

**И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов,
А. И. Мильштейн, Е. В. Подивиллов,
А. И. Черных, Д. А. Шапиро,
Е. Г. Шапиро**





Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-14121)

**Колоколов И. В., Кузнецов Е. А., Мильштейн А. И.,
Подivilов Е. В., Черных А. И., Шапиро Д. А., Шапиро Е. Г.**

Задачи по математическим методам физики

М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 288 с.

ISBN 5-8360-0105-7

Предлагаемый сборник задач — результат 15-летнего опыта преподавания по новой методике математических методов физики на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Сборник включает в себя более 350 задач по уравнениям в частных производных, специальным функциям, асимптотическим методам, методу функций Грина, интегральным уравнениям, теории конечных групп, групп Ли и их применениям в физике.

Книга рекомендована студентам, аспирантам и преподавателям физических и физико-технических специальностей. Все задачи снабжены ответами, а многие — подробными решениями. Сборник может быть полезным для самообразования.

ISBN 5-8360-0105-7



© Эдиториал УРСС, 2000

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Линейные операторы	7
1.1. Конечномерное пространство	7
1.2. Функционалы и обобщенные функции	9
1.3. Гильбертово пространство и полнота	10
1.4. Самосопряженные операторы	11
1.5. Кет- и бра-векторы	13
1.6. Примеры	14
1.7. Задачи	23
1.8. Ответы	26
Глава 2. Метод характеристик	29
2.1. Однородные и неоднородные линейные уравнения в частных производных	29
2.2. Квазилинейные уравнения в частных производных	31
2.3. Системы уравнений в частных производных	33
2.4. Примеры	35
2.5. Задачи	51
2.6. Ответы	52
Глава 3. Линейные уравнения в частных производных второго порядка	54
3.1. Канонический вид	54
3.2. Криволинейные системы координат	56
3.3. Разделение переменных	56
3.4. Простейшие уравнения, решаемые методом Фурье	57
3.5. Примеры	58
3.6. Задачи	78
3.7. Ответы	80
Глава 4. Автомодельность и нелинейные уравнения в частных производных ..	84
4.1. Автомодельность	84
4.2. Нелинейные уравнения в частных производных	84
4.3. Примеры	86
4.4. Задачи	105
4.5. Ответы	105
Глава 5. Специальные функции	106
5.1. Особые точки	106
5.2. Гипергеометрические функции	108
5.3. Ортогональные полиномы	109
5.4. Примеры	111
5.5. Задачи	136
5.6. Ответы	138
Глава 6. Асимптотические методы	141
6.1. Асимптотические ряды	141
6.2. Интеграл Лапласа	142
6.3. Метод стационарной фазы	143
6.4. Метод перевала	144
6.5. Метод усреднения	146
6.6. Примеры	148
6.7. Задачи	155
6.8. Ответы	158

Глава 7. Метод функций Грина	162
7.1. Функции Грина	162
7.2. Непрерывный спектр	167
7.3. Резольвента	169
7.4. Примеры	171
7.5. Задачи	190
7.6. Ответы	194
Глава 8. Интегральные уравнения	198
8.1. Уравнения Фредгольма	198
8.2. Вырожденные ядра	199
8.3. Теорема Гильберта—Шмидта	201
8.4. Обратная задача для оператора Шредингера	204
8.4.1. Прямая задача рассеяния	204
8.4.2. Уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко	205
8.5. Примеры	208
8.6. Задачи	216
8.7. Ответы	222
Глава 9. Группы и представления	226
9.1. Группы	226
9.2. Представления	227
9.3. Примеры	229
9.4. Задачи	233
9.5. Ответы	235
Глава 10. Непрерывные группы	237
10.1. Группы и алгебры Ли	237
10.2. Представления группы вращений	238
10.3. Примеры	242
10.4. Задачи	249
10.5. Ответы	251
Глава 11. Применения теории групп в физике	255
11.1. Гармонические колебания молекул	255
11.2. Расщепление уровней	259
11.3. Правила отбора	260
11.4. Примеры	263
11.5. Задачи	272
11.6. Ответы	272
Сводка формул по специальным функциям	273
П.1. Γ -функция Эйлера	273
П.2. Гипергеометрические функции	273
П.2.1. Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1$	273
П.2.2. Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$	273
П.3. Цилиндрические функции	274
П.3.1. Функции Бесселя J_ν и Неймана Y_ν	274
П.3.2. Функции Бесселя целого порядка J_n	276
П.3.3. Модифицированная функция Бесселя I_ν и функция Макдональда K_ν	276
П.4. Ортогональные полиномы	277
П.4.1. Полиномы Лежандра P_l и присоединенные функции Лежандра P_l^m	277
П.4.2. Полиномы Эрмита H_n	279
П.4.3. Полиномы Лагерра L_n^α	280
Литература	282

Предисловие

Предлагаемый сборник задач основан на 15-летнем опыте обучения студентов физического факультета Новосибирского государственного университета методам математической физики (ММФ). В виде эксперимента преподавание ММФ было поручено физикам-теоретикам. Была поставлена цель не только обучить студентов основам теории, но и применению математических методов для решения конкретных физических задач квантовой механики, классической электродинамики, оптики, физики плазмы, механики жидкости и газа. В результате заметно изменилась как программа курса, так и методика его преподавания. Упор был сделан на решение задач — от простых упражнений, иллюстрирующих основные понятия, до сравнительно сложных задач, например, квантовой механики. Сейчас мы можем с удовлетворением сказать, что новый подход к преподаванию ММФ полностью себя оправдал.

Обучение ММФ обычно завершает общее математическое образование студентов-физиков третьего–четвертого года обучения. Считается, что эти студенты уже знакомы с линейной алгеброй, аналитической геометрией, математическим анализом, обыкновенными дифференциальными уравнениями, теорией функций комплексной переменной в объеме университетского курса. Стандартный курс ММФ, через который прошли многие поколения студентов, включает в себя, как правило, теорию уравнений в частных производных. Элементы функционального анализа, теории специальных функций и теории групп в программах ММФ часто носят фрагментарный характер и не являются обязательными.

Методы математической физики как университетский курс является устоявшейся дисциплиной. Этому посвящены многие отечественные и переводные учебники по всем ее разделам. Но в них не содержится достаточного количества задач. Сборники задач по ММФ немногочисленны и неполны. Они не охватывают всех необходимых разделов математической физики и несколько оторваны от исходных физических задач, из которых возникают эти уравнения. Практически нет задач по уравнениям Шрёдингера, Дирака и даже Максвелла. Приложения к физике, как правило, ограничены механикой, теорией теплопроводности, электричеством и магнетизмом. Устранение всех этих недостатков является одной из целей предлагаемого задачника.

Программа курса и, соответственно, содержание данного задачника включает в себя следующие разделы: гильбертовы пространства, метод характеристик, уравнения второго порядка с частными производными, автомодельность и нелинейные уравнения, специальные функции, асимптотические методы, функции Грина, интегральные уравнения (включая

обратную задачу для оператора Шрёдингера), группы и представления, группы Ли и их применение в физике.

Каждый раздел содержит краткое изложение теории, иллюстрируемое решением типичных задач, а также краткий список рекомендуемой литературы по данному вопросу. Более полная библиография, в которой изложены разделы теории, включенные в данный сборник, приведена в конце книги. Почти все задачи (за исключением простейших) содержат подробные указания и решения. Порядок расположения задач помогает усвоению сложных математических понятий и выработке навыков решения физических задач. Поэтому сборник будет также весьма полезным для самообразования. Если читатель после работы с этим задачником сможет самостоятельно решать задачи математической физики и использовать полученные знания в дальнейшей работе, то мы сочтем свою миссию выполненной.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность всем тем, кто в разные годы либо читали курс лекций ММФ на физическом факультете НГУ, либо вели практические занятия, за вклад в создание курса и, в частности, этого задачника. Особую признательность мы выражаем Б. Г. Конопельченко, В. М. Малкину, А. М. Рубенчику, М. Д. Спектору, М. Г. Степанову, Б. И. Стурману, С. К. Турицыну. Мы также благодарны А. В. Тельнову, указавшему на ряд опечаток.

Август 1999 г.
Новосибирск

Линейные операторы

1.1. Конечномерное пространство

Линейным оператором, действующим в линейном пространстве X , называется такой оператор $\hat{A}$, для которого для любых двух векторов f и g из X и двух произвольных комплексных чисел α и β выполнено свойство линейности

$$\hat{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{A}f + \beta \hat{A}g.$$

Если X — n -мерное пространство, то линейные операторы, действующие в X , суть матрицы $n \times n$.

Пусть A — квадратная $n \times n$ матрица. Матрица $A^\dagger$, полученная транспонированием и комплексным сопряжением A , называется эрмитово сопряженной к A . Если $A = A^\dagger$, то такую матрицу называют эрмитовой. Матрица A называется унитарной, если $AA^\dagger = A^\dagger A = E$. След $\text{Tr } A$ матрицы A называется сумма ее диагональных элементов. Число λ называется собственным значением A , если найдется вектор $v \neq 0$ такой, что $Av = \lambda v$, причем v называется собственным вектором матрицы A , соответствующим значению λ . Многочлен $|\lambda E - A|$ называется характеристическим многочленом матрицы A .

Последовательность квадратных матриц

$$A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots$$

одного и того же порядка называется сходящейся к матрице A , если сходится последовательность соответствующих матричных элементов. Очевидно, что если матрицы A_m и B_m стремятся к A и B при возрастании m , то $A_m + B_m$ и $A_m B_m$ стремятся соответственно к $A + B$ и AB . В частности, если T — невырожденная матрица того же порядка n и матрицы A_m при возрастании m стремятся к A , то $T^{-1}A_m T$ стремится к $T^{-1}AT$.

Прямой суммой матриц называется блочно-диагональная матрица

$$A = A^{(1)} \oplus A^{(2)} \oplus \dots \oplus A^{(s)} = \begin{pmatrix} \boxed{A^{(1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A^{(2)}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{A^{(s)}} \end{pmatrix},$$

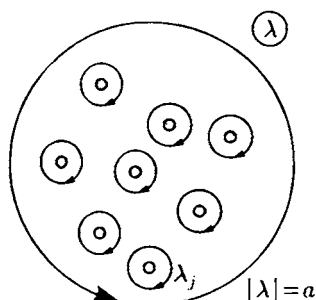
где $A^{(j)}$ — квадратные матрицы порядка $n^{(j)}$, стоящие вдоль диагонали A , а все прочие элементы A равны нулю. Пусть $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_m\lambda^m + \dots$ — формальный степенной ряд от комплексной переменной λ . Рассмотрим соответствующий степенной ряд от матрицы A :

$$a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m + \dots \quad (1.1)$$

Обозначим $f_n(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$. Ряд (1.1) называется сходящимся, если последовательность частичных сумм $f_1(A), \dots, f_n(A), \dots$ имеет предел. Этот предел называется суммой ряда.

Если λ не равно какому-либо собственному значению λ_i матрицы A , то матрица $A - \lambda E$ обратима. Обратная ей матрица $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ называется *резольвентой*. Под интегралом от матрицы понимается матрица, составленная из интегралов от матричных элементов. Пусть a — произвольная константа, которая больше всех $|\lambda_i|$. Тогда справедливы равенства

$$A^m = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=a} \lambda^m R_\lambda d\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$



следующие из разложения резольвенты в ряд при $|\lambda| \geq a$:

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \left(E + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \dots \right).$$

Из (1.2) следует, что для любой функции $f(\lambda)$, определенной степенным рядом при $|\lambda| \leq a$, выполняется равенство

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=a} f(\lambda) R_\lambda d\lambda.$$

Рис. 1.1. Контур интегрирования $|\lambda| = a$ в комплексной плоскости спектрального параметра λ

Эта формула является обобщением формулы Коши на случай функций от матриц.

Стянем теперь контур интегрирования так, чтобы он превратился в набор малых контуров, каждый из которых окружает только одно собственное значение (рис. 1.1). Тогда формула (1.2) при $m = 0$ дает

$$\sum_j P_j = E, \quad P_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\lambda_j-)} R_\lambda d\lambda,$$

где символ (λ_j-) обозначает контур интегрирования, охватывающий собственное значение λ_j в отрицательном направлении (по часовой стрелке), но не охватывающий при этом никаких других особых точек

подынтегральной функции. Матрица P_j является оператором *проектирования (проектором)* на подпространство, соответствующее собственному значению λ_j , т. е.

$$P_j^\dagger = P_j, \quad P_j^2 = P_j.$$

Любой линейный эрмитов оператор A можно разложить по проекторам: $A = \sum_j \lambda_j P_j$.

1.2. Функционалы и обобщенные функции

Функционалом, действующим на данном пространстве $\mathcal{M}$ функций n переменных, называется отображение этого пространства в комплексную плоскость

$$\Phi := \{f(x), x \in \mathbb{R}^n\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Обозначим значение функционала Φ на функции $f \in \mathcal{M}$ через $\Phi[f]$. Функционал называется *линейным*, если отображение линейно:

$$\Phi[\alpha f + \beta g] = \alpha \Phi[f] + \beta \Phi[g].$$

Здесь α, β — комплексные числа, f и g — функции. По заданной функции $F(x)$ всегда можно построить линейный функционал, действующий на некотором подмножестве функционального пространства

$$\Phi_F[g] = \int_{\mathbb{R}^n} dx F(x)g(x). \quad (1.3)$$

Однако не всякий линейный функционал можно записать в виде (1.3), применяя только гладкие функции $F(x)$. В общем случае можно по данному функционалу Φ определить *обобщенную функцию* $F(x)$, так что $\Phi[g]$ выражается в виде (1.3). Если Φ является пределом последовательности функционалов Φ_n , каждый из которых имеет вид (1.3) с гладкой функцией $F_n(x)$, то обобщенная функция $F(x)$ может рассматриваться как предел последовательности $\{F_n(x)\}$ и ей можно приписать некоторые поточечные свойства (как функции аргумента x).

Важным для приложений примером обобщенной функции является δ -функция Дирака, соответствующая линейному функционалу Φ_δ , действующему на гладких функциях $g(x)$. По определению,

$$\Phi_\delta[g] = \int_{\mathbb{R}^n} dx \delta(x)g(x) = g(0)$$

для любой гладкой функции g . Это равенство эквивалентно следующему определению δ -функции:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \quad \int_{\Omega_0} dx \delta(x) = 1,$$

где Ω_0 — любая область n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$, содержащая точку $x = 0$. Производные одномерной δ -функции определяются через функционалы

$$\int_{\Omega_0} dx \frac{d\delta(x)}{dx} g(x) = -g'(0), \quad \int_{\Omega_0} dx \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} g(x) = (-1)^n g^{(n)}(0),$$

где функция $g(x)$ подразумевается дифференцируемой достаточное количество раз.

Всегда следует помнить, что равенства, содержащие δ -функцию и ее производные, означают только равенства значений соответствующих функционалов на достаточно гладких функциях.

1.3. Гильбертово пространство и полнота

Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *гильбертовым*, если:

1. Для каждой пары f и g его элементов определено *скалярное произведение* (f, g) со значениями в $\mathbb{C}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- (а) линейности по второму аргументу

$$(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha (f, g_1) + \beta (f, g_2)$$

для любых $f, g_{1,2} \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

- (б) эрмитовости

$$(f, g) = (g, f)^*;$$

- (в) неотрицательности нормы $\|f\|^2 \equiv (f, f) \geq 0$,
причем из $(f, f) = 0$ следует $f = 0$.

2. В пространстве $\mathcal{L}$ имеется счетный бесконечномерный базис, т. е. счетное множество элементов

$$\{f_n, n = 1, \dots, \infty\},$$

такое, что любой элемент $g \in \mathcal{L}$ можно представить в виде линейной суперпозиции f_n : $g = \sum c_n f_n$.

Гильбертово пространство является линейным (векторным) пространством, поэтому его элементы можно называть векторами.

Любой базис можно превратить в *ортонормированный* относительно данного скалярного произведения, используя процедуру Грамма—Шмидта. Основным пример гильбертова пространства — пространство $L^2(\Omega)$ функций $f(x)$, заданных в области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ и интегрируемых с квадратом модуля. Скалярное произведение функций f и g

определено следующим образом:

$$(f, g) = \int_{\Omega} dx f^*(x) g(x)$$

и, очевидно, удовлетворяет условиям (1(a)–(в)). В курсе математического анализа доказывается существование счетного базиса в $L^2(\Omega)$.

Рассмотрим в $L^2(\Omega)$ фиксированную ортонормированную бесконечную последовательность функций

$$\{f_n, n = 1, \dots, \infty, (f_n, f_m) = \delta_{nm}\}.$$

Она является базисом в $L^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение полноты:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) f_n(y) = \delta(x - y). \quad (1.4)$$

Эту формулу нужно понимать как равенство обобщенных функций, либо как равенство интегралов от произведений обеих частей с гладкой функцией из $L^2(\Omega)$, либо как предел последовательности равенств с обеими частями, принадлежащими $L^2(\Omega)$. Последнее возможно потому, что хотя сама δ -функция $\delta(x) \notin L^2(\Omega)$, но в этом пространстве имеется последовательность элементов, имеющая своим пределом δ -функцию (см., например, задачи к этой главе).

1.4. Самосопряженные операторы

Под *линейностью* оператора $\hat{A}$ понимается свойство

$$\hat{A}(\lambda f + \mu g) = \lambda \hat{A} f + \mu \hat{A} g,$$

где f и g — векторы гильбертова пространства, а μ и λ — комплексные числа^{*)}.

Всякий линейный оператор, действующий в пространстве функций, можно записать как *интегральный* оператор, т. е.

$$\hat{A}f(x) = \int K(x, y) f(y) dy,$$

где $K(x, y)$ называется *ядром* интегрального оператора $\hat{A}$. Ядро $K(x, y)$ — обобщенная функция двух переменных. В частности, если $K(x, y)$ представляет собой линейную комбинацию δ -функции и ее производных $K(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \delta^{(k)}(x - y)$, то $\hat{A}$ называют *дифференциальным* оператором порядка n .

^{*)} *Антилинейным* называется оператор $\hat{A}$, для которого $\hat{A}(\lambda f + \mu g) = \lambda^* \hat{A} f + \mu^* \hat{A} g$.

Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, действующий в гильбертовом пространстве. Это значит, что заданы линейное правило соответствия $f \rightarrow \hat{A}f$ и область определения $\mathcal{D}$: $f \in \mathcal{D}$. Последняя может быть значительно меньше всего пространства L^2 . Например, в $L^2(0, 1)$ (пространство интегрируемых с квадратом функций на отрезке $[0, 1]$) оператор $\frac{d}{dx}$ может, очевидно, действовать только на те функции, у которых существует первая производная. Аналогичное утверждение можно сделать и про $\frac{d^2}{dx^2}$. Кроме того, для дифференциальных операторов подразумевается задание каких-либо граничных условий. В дальнейшем при указании области определения $\mathcal{D}$ будем явно приводить только граничные условия или же условия, им эквивалентные. Например, в $L^2(\mathbb{R})$ действует

$$\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R})\}. \quad (1.5)$$

Иначе говоря, для функций из L^2 , определенных на всей вещественной оси, граничным условием может служить квадратичная интегрируемость функции, в частности, это означает $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Оператор $\hat{A}^\dagger$, сопряженный данному оператору $\hat{A}$, определяется равенством

$$(v, \hat{A}u) = (\hat{A}^\dagger v, u). \quad (1.6)$$

Эта формула фиксирует также область определения $\mathcal{D}^*$ для оператора $\hat{A}^\dagger$. Она состоит из таких векторов v , что для любого u из области определения $\mathcal{D}$ оператора $\hat{A}$ скалярное произведение $(v, \hat{A}u)$ может быть переписано в виде (w, u) . (Значит, если такой w существует, то w и есть $\hat{A}^\dagger v$.) Область $\mathcal{D}^*$, вообще говоря, не совпадает с областью $\mathcal{D}$.

В качестве примера рассмотрим в $L^2(0, 1)$ линейный оператор $i\frac{d}{dx}$ с областью определения, состоящей из функций, обращающихся в нуль на концах отрезка:

$$\mathcal{D} = \{u(0) = u(1) = 0\}. \quad (1.7)$$

Скалярное произведение

$$(v, \hat{A}u) = \int_0^1 v^* i \frac{d}{dx} u \, dx = \int_0^1 \left(i \frac{d}{dx} v \right)^* u \, dx + i v^* u \Big|_0^1 = (\hat{A}v, u) \quad (1.8)$$

имеет вид $(w, u) = (\hat{A}v, u)$ для любых v . То есть

$$\hat{A}^\dagger = i \frac{d}{dx}, \quad \mathcal{D}^* = \text{граничных условий нет.}$$

Значит, в этом случае сопряженный оператор $\hat{A}^\dagger$ имеет то же правило соответствия, что и $\hat{A}$, но более широкую область определения.

Оператор $\hat{A}$ называется *самосопряженным* (эрмитовым), если $\hat{A}^\dagger$ совпадает с $\hat{A}$ вместе с областью определения. Примеры самосопряженных операторов:

$$i \frac{d}{dx}, \quad \mathcal{D} = \{f(0) = f(1)\}; \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D} = \{f(0) = f(1) = 0\}; \quad (1.10)$$

$$-\Delta + V(\mathbf{r}), \quad \mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}. \quad (1.11)$$

В последнем примере подразумевается, что рассматриваются такие функции, для которых интеграл

$$\int V(\mathbf{r}) |f(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$$

сходится.

Оператор U называется *унитарным*, если он сохраняет скалярное произведение: для любых u и v из области определения:

$$(Uu, Uv) = (u, v)$$

или

$$U^\dagger U = I,$$

где I — единичный оператор.

Следует заметить, что эрмитовость и унитарность определены по отношению к данному скалярному произведению и не обязательно сохраняются при другом определении последнего.

1.5. Кет- и бра-векторы

Понятие линейного функционала можно ввести не только в функциональном, но и в абстрактном гильбертовом пространстве: это отображение векторов гильбертового пространства в $\mathbb{C}$, удовлетворяющее обычным соотношениям линейности. Любому вектору v гильбертового пространства $\mathcal{H}$ можно сопоставить линейный функционал следующим образом: для любого $u \in \mathcal{H}$

$$\Phi_v[u] = (v, u).$$

Из определения $\Phi_v[u]$ следует, что эти функционалы сами образуют линейное пространство:

$$\Phi_{\alpha v + \beta w} = \alpha^* \Phi_v + \beta^* \Phi_w.$$

Иными словами, это пространство изоморфно $\mathcal{H}$. Это пространство $\mathcal{H}^*$ называется пространством элементов, сопряженных к элементам $\mathcal{H}$.

В физической литературе его элементы называют бра-векторами и обозначают Φ_v как $\langle v|$. Элементы $\mathcal{H}$ называются при этом кет-векторами $|u\rangle$, а скалярное произведение v и u — действие функционала Φ_v на вектор u — записывается как $\langle v|u\rangle$.

В терминах кет- и бра-векторов

1. Проектор на вектор v можно записать как $P_v = |v\rangle \langle v|$.
2. Соотношения полноты записываются как

$$\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| = I.$$

3. Разложение вектора $|v\rangle$ по полной ортонормированной системе $|u_n\rangle$ выглядит как

$$|v\rangle = \sum_n |u_n\rangle \langle u_n|v\rangle.$$

Детальное изложение теории гильбертовых пространств можно найти в учебниках [КГ51, КФ72]. Обобщенные функции рассмотрены, например, в книге [Вла88]. Самосопряженные операторы обсуждаются в монографии [Соб66].

1.6. Примеры

1. Доказать, что линейное преобразование U векторного пространства V унитарно тогда и только тогда, когда U не меняет длин векторов.

Решение. Пусть $a, b \in V$. Положим $Ua = a'$, $Ub = b'$. По условию для любого числа α имеем

$$(a + \alpha b, a + \alpha b) = (U(a + \alpha b), U(a + \alpha b)) = (a' + \alpha b', a' + \alpha b').$$

Выполняя умножение и используя $(a, a) = (a', a')$, $(b, b) = (b', b')$, получаем

$$\alpha^*(b, a) + \alpha(a, b) = \alpha^*(b', a') + \alpha(a', b').$$

При $\alpha = 1$

$$(b, a) + (a, b) = (b', a') + (a', b'), \quad (1.12)$$

полагая $\alpha = i$ и сокращая на i , получаем

$$-(b, a) + (a, b) = -(b', a') + (a', b').$$

Последнее равенство вместе с (1.12) дает $(a, b) = (a', b')$. ►

2. Пусть A, B, C, D — квадратные матрицы $n \times n$, $AC = CA$ и A, C — невырожденные матрицы. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & C \\ B & A \end{vmatrix} = |AD - CB|,$$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & B \\ C & A \end{vmatrix} = |DA - BC|.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= |AC|^{-1} \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AC|^{-1} \begin{vmatrix} CA & CB \\ AC & AD \end{vmatrix} = \\ &= |AC|^{-1} \begin{vmatrix} CA & CB \\ 0 & AD - CB \end{vmatrix} = |AD - CB|. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Другие равенства доказываются аналогично. ►

3. Доказать равенство:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \dots & a \\ a & a+x_2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a+x_n \end{vmatrix} = \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \left(1 + \frac{a}{x_1} + \dots + \frac{a}{x_n} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Решение. Введем диагональную матрицу

$$X = \text{diag} (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

и перепишем определитель искомой матрицы в виде $\det A = \det X \times \det (I + JX^{-1})$, где все матричные элементы матрицы J равны a , а I — единичная матрица. Ранг матрицы JX^{-1} равен единице, поэтому единственное отличное от нуля собственное значение этой матрицы равно ее следу (все остальные собственные значения равны нулю):

$$\lambda_1 = \text{Tr } JX^{-1} = \frac{a}{x_1} + \frac{a}{x_2} + \dots + \frac{a}{x_n}.$$

Откуда $\det (I + JX^{-1}) = 1 + \lambda_1$, а определитель

$$\det A = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \left(1 + \frac{a}{x_1} + \dots + \frac{a}{x_n} \right). \quad \blacktriangleright$$

4. Пусть H — эрмитова матрица. Доказать, что $U = \exp (iH)$ унитарна.

Решение. Нам нужно показать, что $UU^\dagger = E$. Нетрудно показать (см. задачу 19), что ряды

$$U = E + (iH) + \frac{1}{2!}(iH)^2 + \dots$$

и

$$U^\dagger = E + (-iH) + \frac{1}{2!}(-iH)^2 + \dots = \exp (-iH)$$

сходятся. Поэтому

$$UU^\dagger = \left[E + iH + \frac{1}{2!}(iH)^2 + \dots \right] \cdot \left[E + (-iH) + \frac{1}{2!}(-iH)^2 + \dots \right].$$

Меняя порядок суммирования, получаем требуемое равенство

$$UU^\dagger = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iH)^j}{j!} \sum_{m=0}^j (-1)^m C_j^m = E, \quad C_j^m = \frac{j!}{m!(j-m)!},$$

поскольку

$$\sum_{m=0}^j (-1)^m C_j^m = (1-1)^j = \delta_{j0}.$$

5. Доказать, что для произвольной матрицы A

$$\det e^A = \exp(\operatorname{Tr} A).$$

Решение. Сначала заметим, что равенство, которое требуется доказать, инвариантно относительно преобразований подобия: если

$$\det e^A = \exp(\operatorname{Tr} A),$$

то

$$\begin{aligned} \det(\exp(QAQ^{-1})) &= \det\left(E + QAQ^{-1} + \frac{1}{2!}(QAQ^{-1})^2 + \dots\right) = \\ &= \det\left(Q\left(E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots\right)Q^{-1}\right) = \\ &= \det e^A = \exp(\operatorname{Tr} A) = \exp(\operatorname{Tr}(QAQ^{-1})), \end{aligned}$$

где Q — произвольная невырожденная матрица. Значит, доказав утверждение в каком-нибудь фиксированном базисе, мы докажем его сразу для всех базисов. Если A диагонализуема, то пусть Q — матрица перехода к диагональному для A базису: $QAQ^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \det(\exp(QAQ^{-1})) = \det \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) = \\ &= \exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \exp(\operatorname{Tr}(QAQ^{-1})) = \exp(\operatorname{Tr} A). \end{aligned}$$

В общем случае Q можно выбрать так, что QAQ^{-1} будет прямой суммой жордановых клеток. Произвольная жорданова клетка J_m

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

может быть представлена в виде $J_m = \lambda I_m + \tilde{J}_m$, где I_m — единичная матрица, $\tilde{J}_m$ — верхнетреугольная нильпотентная (все собственные значения

равны нулю) матрица. Так как единичная матрица коммутирует с любой другой, то

$$\exp J_m = \exp(\lambda I_m) \exp(\tilde{J}_m).$$

Непосредственно убеждаемся, что $\exp(\tilde{J}_m)$ — верхнетреугольная матрица с единичными элементами на диагонали. Следовательно,

$$\det \exp J_m = \det \exp(\lambda I_m) \det \exp(\tilde{J}_m) = \det \exp(\lambda I_m) = \exp(\operatorname{Tr} J_m).$$

По свойству следа и детерминанта

$$\begin{aligned} \det \exp(J_{m_1} \oplus J_{m_2} \oplus \dots) &= \\ &= \det(\exp J_{m_1} \oplus \exp J_{m_2} \oplus \dots) = \det \exp J_{m_1} \det \exp J_{m_2} \dots = \\ &= \exp(\operatorname{Tr} J_{m_1} + \operatorname{Tr} J_{m_2} + \dots) = \exp(\operatorname{Tr}(J_{m_1} \oplus J_{m_2} \oplus \dots)), \end{aligned}$$

что доказывает равенство для любой матрицы A . ►

6. Доказать, что для любой матрицы A найдется такая унитарная матрица B , что матрица $A' = B^{-1}AB$ является верхнетреугольной (теорема Шура).

Решение. Пусть T — матрица, приводящая A к жордановой форме (т.е. $T^{-1}AT$ является прямой суммой жордановых клеток (1.15)). Ортогонализуем столбцы матрицы T , используя процедуру Грама—Шмидта. Попутно заметим, что процесс ортогонализации эквивалентен умножению матрицы T на некоторую невырожденную верхнетреугольную матрицу S справа. Например, для того, чтобы к j -му столбцу матрицы T прибавить ее i -й столбец, умноженный на α , достаточно матрицу T умножить справа на матрицу S' , у которой матричные элементы $S'_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$, $S'_{ij} = \alpha$, а остальные равны нулю. Если S — такая верхнетреугольная матрица, то столбцы TS являются ортонормированной системой n векторов. Следовательно, $U = TS$ унитарна. Матрица $S^{-1}(T^{-1}AT)S$ является произведением верхнетреугольных матриц S^{-1} , $T^{-1}AT$, S . Поэтому $U^\dagger AU = (S^{-1}T^{-1})A(TS)$ — верхнетреугольная. ►

7. Рассмотрим матрицу Ω вида

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^\dagger & C \end{pmatrix},$$

где A, B, C — матрицы $n \times n$, причем A и C эрмитовы. Поскольку

$$\Omega \neq \Omega^\dagger,$$

то ее собственные векторы уже не будут ортогональны относительно обычного скалярного произведения, а ее собственные значения могут не быть вещественными. Пусть матрица Σ имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix},$$

где I_n — единичная $n \times n$ матрица. Показать, что

(а) если собственный вектор $\mathbf{e}$ такой, что $(\mathbf{e}, \Sigma \mathbf{e}) \neq 0$, то соответствующее собственное значение вещественное;

(б) для любых двух собственных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ оператора Ω

$$\Omega \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad \Omega \mathbf{e}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

при $(\mathbf{e}_1, \Sigma \mathbf{e}_1) \neq 0$ и $(\mathbf{e}_2, \Sigma \mathbf{e}_2) \neq 0$ выполнено условие «обобщенной» ортогональности

$$(\mathbf{e}_1, \Sigma \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1)_k^* (\Sigma)_{kj} (\mathbf{e}_2)_j = 0,$$

Решение. (а) Явно проверяются соотношения

$$\Sigma^2 = I_{2n}, \quad \Omega^\dagger = \Sigma \Omega \Sigma, \quad \Omega^\dagger \Sigma = \Sigma \Omega.$$

Из $\Omega \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$ и эрмитовости Σ следует, что

$$(\Sigma \mathbf{e}, \Omega \mathbf{e}) = \lambda (\Sigma \mathbf{e}, \mathbf{e}), \quad (\Omega \mathbf{e}, \Sigma \mathbf{e}) = \lambda^* (\mathbf{e}, \Sigma \mathbf{e}).$$

С учетом $\Omega^\dagger \Sigma = \Sigma \Omega$ получаем:

$$(\lambda - \lambda^*)(\mathbf{e}, \Sigma \mathbf{e}) = 0,$$

откуда при $(\mathbf{e}, \Sigma \mathbf{e}) \neq 0$ имеем $\lambda = \lambda^*$.

Решение. (б) Используем равенства

$$(\mathbf{e}_1, \Sigma \Omega \mathbf{e}_2) = \lambda_2 (\mathbf{e}_1, \Sigma \mathbf{e}_2), \quad (\mathbf{e}_1, \Omega^\dagger \Sigma \mathbf{e}_2) = \lambda_1^* (\mathbf{e}_1, \Sigma \mathbf{e}_2).$$

Вычитая эти равенства одно из другого и используя $\Omega^\dagger \Sigma = \Sigma \Omega$, получаем:

$$(\lambda_2 - \lambda_1^*)(\mathbf{e}_1, \Sigma \mathbf{e}_2) = 0.$$

По условию задачи $(\mathbf{e}_i, \Sigma \mathbf{e}_i) \neq 0$, $i = 1, 2$. Поэтому λ_i — вещественны, и из $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует, что $(\mathbf{e}_1, \Sigma \mathbf{e}_2) = 0$. ►

8. Найти проектор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

на подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Решение. Найдём сначала резольвенту:

$$R_\lambda = \frac{1}{1 - \lambda^3} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда проектор дается интегралом

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(1-)} R_\lambda d\lambda = - \operatorname{Res}_{\lambda=1} R_\lambda = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

9. Доказать, что в любом гильбертовом пространстве выполняется неравенство «треугольника»:

$$\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|.$$

Решение. Если одна из норм равна нулю, то неравенство становится тождеством. Пусть $\|f\| > 0$, $\|g\| > 0$. Так как норма вектора $h = \|f\|g - \|g\|f$ неотрицательна, получаем

$$2\|f\| \cdot \|g\| \geq (f, g) + (g, f).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + (f, g) + (g, f) \leq \\ &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень, получаем требуемое неравенство. ►

10. Полиномы Чебышева определены следующим образом:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

Доказать, что семейство функций

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}} (1 - x^2)^{-1/4} T_n(x) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - x^2)^{-1/4} \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots, \infty, \end{aligned}$$

образует ортонормированный базис в $L^2(-1, 1)$.

Решение. Воспользуемся полнотой тригонометрического базиса (см. задачу (а)):

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx_1) \cos(nx_2) = \delta(x_1 - x_2), \quad 0 < x_{1,2} < \pi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) f_n(y) &= \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - x^2)^{-1/4} (1 - y^2)^{-1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n \arccos x) \cos(n \arccos y) = \\ &= (1 - x^2)^{-1/4} (1 - y^2)^{-1/4} \delta(\arccos x - \arccos y) = \delta(x - y). \end{aligned}$$

Последнее равенство получается с помощью формулы

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0),$$

где x_0 — единственное решение уравнения $f(x_0) = 0$ в рассматриваемом интервале (см. задачу (24)). Ортонормированность проверяется непосредственным вычислением интегралов. ►

11. Полиномы Эрмита определены следующим образом:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Доказать, что функции

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x)$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(-\infty, +\infty)$.

Решение. Заметим, что $H_n(x)$ — полином n -й степени по x со старшим членом $2^n x^n$. Скалярное произведение

$$\begin{aligned} N_{nm} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi_n(x) \phi_m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi 2^{n+m} n! m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx H_n(x) \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi 2^{n+m} n! m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \frac{d^m}{dx^m} H_n(x) \end{aligned}$$

при $m > n$ равно нулю, поскольку m -я производная от любого полинома степени, меньшей m , равна нулю. При $m = n$, учитывая, что

$$\frac{d^n}{dx^n} H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} 2^n x^n = 2^n n!,$$

и вычисляя интеграл Пуассона, получаем $N_{nn} = 1$. Так как m и n входят симметрично, то

$$N_{mn} = \delta_{mn},$$

т.е. ортонормированность доказана.

При проверке полноты (необходимой для базиса) воспользуемся следующим равенством:

$$\frac{d^n}{dx^n} x e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} (ip)^n \exp\left(-\frac{p^2}{4} + ipx\right),$$

которое можно получить прямым преобразованием Фурье левой части, n -кратным интегрированием по частям и взятием оставшегося гауссова

интеграла. Ряд

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \phi_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} = \\ &= \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp\left(-\frac{p^2}{4} + ipx\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ip)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}\end{aligned}$$

суммируется как ряд Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dy^n} f(y) = f(y + a).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \phi_n(y) &= \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp\left(-\frac{p^2}{4} + ipx - \left(y + \frac{ip}{2}\right)^2\right) = \\ &= \exp\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp(ip(x - y)) = \delta(x - y),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ►

12. Показать, что оператор

$$\hat{A} = \exp\left(a \frac{d}{dx}\right),$$

где a — вещественное число, унитарен в $L^2(-\infty, +\infty)$.

Решение. $\hat{A}$ действует на функцию $f(x)$ следующим образом:

$$\hat{A} f(x) = f(x + a).$$

В этом можно убедиться, разлагая в выражении $\hat{A} f(x)$ экспоненту в ряд и суммируя получившийся ряд Тейлора для $f(x)$. Таким образом,

$$(\hat{A} f, \hat{A} g) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x + a) g(x + a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy f^*(y) g(y) = (f, g). \quad \blacktriangleright$$

13. В $L^2(0, l)$ действует оператор

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + G\delta\left(x - \frac{l}{2}\right),$$

$$\mathcal{D} = \{f(0) = f(l) = 0, f \in L^2(0, l)\}.$$

Найти его спектр и собственные функции при различных значениях G .

Решение. Собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, обращающиеся в 0 в точке $x = \frac{l}{2}$, являются собственными и для $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}\psi_m = \frac{4m^2\pi^2}{l^2}\psi_m, \quad \psi_m = \sin \frac{2\pi m}{l}x, \quad m = 1, \dots$$

Другая серия собственных функций не обращается в 0 при $x = \frac{l}{2}$ и удовлетворяет условию сшивки:

$$\psi'\left(\frac{l}{2}+0\right) - \psi'\left(\frac{l}{2}-0\right) = G\psi\left(\frac{l}{2}\right),$$

получаемому из уравнения $\mathcal{H}\psi = \lambda\psi$ интегрированием по малому интервалу, включающему точку $x = \frac{l}{2}$. Если подставить

$$\psi_n = \sin k_n x, \quad x < \frac{l}{2}, \quad \psi_n = \sin k_n(l-x), \quad x > \frac{l}{2}, \quad \lambda = k_n^2,$$

то условие сшивки дает уравнение на набор k_n :

$$2k_n \operatorname{ctg} \frac{k_n l}{2} = -G.$$

Вещественному λ соответствуют как вещественные, так и чисто мнимые k_n . При $k_n \in \mathbb{R}$ существует бесконечное множество решений, определяющих вторую серию собственных значений. Для исследования чисто мнимых k_n сделаем подстановку

$$k_n = ix, \quad x \in \mathbb{R},$$

которая приводит к уравнению

$$\operatorname{cth} \left(\frac{x l}{2} \right) = -\frac{G}{2x}.$$

Это уравнение имеет решение лишь при $G < 0$ и начиная лишь с некоторого порогового значения $|G|$. Действительно, асимптотика левой части при $x \rightarrow +0$ равна $\frac{2}{xl}$ и при $|G| < \frac{4}{l}$ функция $\operatorname{cth} \left(\frac{x l}{2} \right)$ проходит везде выше, чем $\frac{|G|}{2x}$: точек пересечения нет, то есть нет решений. Если $|G| > \frac{4}{l}$, то правая часть уравнения при малых x больше, чем левая часть, а при больших x наоборот. Значит, имеется одна точка пересечения и, следовательно, одно отрицательное собственное значение λ оператора $\mathcal{H}$.

Заметим, что при $G < 0$, $|G| > \frac{4}{l}$ минимальное вещественное значение k_1 больше, чем $\frac{2\pi}{l}$ (нет пересечения гиперболы с первой котангенсой), поэтому соответствующая ему $\psi_1(x)$ имеет нули на интервале $(0, l)$. По осцилляционной теореме^{*)} ψ_1 не есть основное состояние, и $\lambda_1 = k_1^2$ не является наименьшим собственным значением. Основное состояние описывает решение с отрицательным λ . ►

^{*)} См., например, [ЛЛ74, § 21].

1.7. Задачи

14. Пусть $A_1, \dots, A_k$, — квадратные матрицы одинакового размера. Доказать, что

$$\operatorname{Tr}(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k) = \operatorname{Tr}(A_2 \cdot \dots \cdot A_k \cdot A_1).$$

15. Пусть собственные значения матрицы A размера $n \times n$ равны

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

а I — единичная матрица. Доказать, что

$$\det(I + A) = (1 + \lambda_1) \cdot (1 + \lambda_2) \cdot \dots \cdot (1 + \lambda_n).$$

16. Вычислить характеристический многочлен и собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

17. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

— клетка Жордана порядка n . Показать, что для всех натуральных m имеет место формула

$$A^m = \begin{pmatrix} \rho^m & C_m^1 \rho^{m-1} & C_m^2 \rho^{m-2} & \dots & C_m^{n-1} \rho^{m-n+1} \\ 0 & \rho^m & C_m^1 \rho^{m-1} & \dots & C_m^{n-2} \rho^{m-n+2} \\ 0 & 0 & \rho^m & \dots & C_m^{n-3} \rho^{m-n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho^m \end{pmatrix},$$

где биномиальные коэффициенты C_m^k , $k \leq m$ определяются формулой

$$C_m^k = \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!},$$

а при $k > m$, $C_m^k = 0$.

18. Пусть $f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_k \lambda^k$ — некоторый многочлен от λ . Доказать, что если A — жорданова клетка (1.15) порядка n , то

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\rho) & \frac{1}{1!} f'(\rho) & \frac{1}{2!} f''(\rho) & \dots & \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\rho) \\ 0 & f(\rho) & \frac{1}{1!} f'(\rho) & \dots & \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(\rho) \\ 0 & 0 & f(\rho) & \dots & \frac{1}{(n-3)!} f^{(n-3)}(\rho) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\rho) \end{pmatrix}.$$

19. Пусть $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m + \dots$ — формальный степенной ряд относительно переменной λ . Показать, что, для того чтобы степенной ряд от матрицы A сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы каждое собственное значение ρ_i матрицы A либо находилось внутри круга сходимости соответствующего степенного ряда $f(\lambda)$, либо лежало на границе круга сходимости. Если ρ_i лежит на границе круга сходимости, то требуется сходимость ряда, полученного $(n_i - 1)$ -кратным дифференцированием ряда $f(\lambda)$, где n_i — порядок жордановой клетки, отвечающей значению ρ_i .

20. Найти

$$\ln \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad |x| < 1.$$

21. Доказать равенства:

$$(a) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \delta(x);$$

$$(б) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \frac{x^2 \varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} = \delta(x);$$

$$(в) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \frac{x \varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} = -\frac{d\delta(x)}{dx};$$

$$(г) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon}\right) = \delta(x);$$

$$(д) x \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x);$$

$$(е) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nx)}{\pi n x^2} = \delta(x).$$

22. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp(ipx) = \delta(x).$$

23. Доказать, что для любой гладкой функции $f(x)$ имеет место

$$f(x) \frac{d\delta(x-a)}{dx} = f(a) \frac{d\delta(x-a)}{dx} - \delta(x-a) \frac{df(x)}{dx}.$$

24. Доказать, что если $f'(a_n) \neq 0$, где $\{a_n\}$ — множество нулей функции $f(x)$; $f(a_n) = 0$, то

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(a_n)|} \delta(x - a_n).$$

25. Доказать, что двумерную δ -функцию можно записать в полярных координатах на плоскости следующим образом:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\phi - \phi').$$

Здесь (r, ϕ) , (r', ϕ') — полярные координаты точек $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ соответственно.

26. Доказать, что в трехмерном случае

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

27. Проверить, образуют ли базис гильбертова пространства следующие последовательности функций:

(а) в пространстве $L^2(0, \pi)$ имеется ортонормированная последовательность функций

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx), \quad n = 1, \dots, \infty;$$

(б) в пространстве $L^2(0, 2\pi)$ имеется ортонормированная последовательность функций

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(nx), \quad n = 1, \dots, \infty.$$

28. Найти по оператору L сопряженный оператор $L^\dagger$, а также:

(а) определить, каким ограничениям должны удовлетворять функции p , q , r и коэффициенты α , β в краевой задаче с условиями типа Штурма:

$$Ly = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y, \quad x \in [0, 1],$$

$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0, \quad \alpha_1 y(1) + \beta_1 y'(1) = 0,$$

чтобы оператор L был самосопряжен;

(б) показать, что если граничные условия на замкнутой поверхности S имеют вид

$$u|_S = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, то оператор Лапласа $L = \Delta$ самосопряжен;

(в) выяснить, каким ограничениям должны удовлетворять a_{ij} , b_i , c оператора

$$L = a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

в краевой задаче $u|_S = 0$, чтобы оператор L был самосопряжен.

29. При каких ограничениях на коэффициенты оператор Штурма—Лиувилля

$$L = \frac{d}{dx} q(x) \frac{d}{dx} + r(x)$$

с линейно независимыми краевыми условиями

$$\alpha_\mu y(a) + \beta_\mu y'(a) = \gamma_\mu y(b) + \delta_\mu y'(b), \quad \mu = 1, 2,$$

является самосопряженным на отрезке $x \in [a, b]$?

30. Является ли эрмитовым оператор импульса $\hat{p} = -\frac{id}{dx}$ на отрезке $x \in [0, 2\pi]$ с граничными условиями:

(а) $u(0) = u(2\pi) = 0$;

(б) $u(0) = u(2\pi)$?

31. Показать, что для унитарности достаточно сохранения нормы: если для любого y : $(Uy, Uy) = (y, y)$, то U унитарен.

32. Показать, что унитарные операторы образуют группу, т. е. произведение унитарных операторов является унитарным оператором. Имеется ли аналогичное свойство для эрмитовых операторов?

33. Показать явно, что оператор

$$\exp \left(a \frac{d}{dx} \right) e^{ibx}$$

унитарен в $L^2(\mathbb{R})$ при $a, b \in \mathbb{R}$.

34. Доказать равенство

$$\exp \left(-a \frac{d}{dx} \right) e^{-ibx} \exp \left(a \frac{d}{dx} \right) e^{ibx} = e^{iab}.$$

35. Показать явно, что оператор

$$U = \exp \left(ia \frac{d^2}{dx^2} \right)$$

унитарен в $L^2(\mathbb{R})$ при $a \in \mathbb{R}$.

1.8. Ответы

14. *Указание:* Использовать определение следа матриц.

15. *Указание:* Собственные значения матрицы $I + A$ равны $(1 + \lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$.

16. $\lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1$.

17. *Указание:* Воспользоваться методом математической индукции.

18. **Указание:** Воспользоваться результатом предыдущей задачи.
19. **Указание:** Достаточно доказать теорему для жордановой клетки, так как $f(TAT^{-1}) = Tf(A)T^{-1}$. Для этого воспользуемся результатом задачи 17.
20. **Указание:** Вычислить сначала резольвенту R_λ

$$R_\lambda = \frac{1}{(\lambda - 1)^2 - x^2} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -x \\ -x & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

и воспользоваться обобщением формулы Коши для матриц. В результате приходим к ответу

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ln(1 - x^2) & \ln \frac{1+x}{1-x} \\ \ln \frac{1+x}{1-x} & \ln(1 - x^2) \end{pmatrix}.$$

21. **Указание:** Использовать определение δ -функции.
22. **Указание:** Рассмотреть интеграл в левой части как предел при $\alpha \rightarrow +0$ абсолютно сходящегося интеграла

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp(ipx - \alpha|p|) = \delta(x).$$

23. **Указание:** Использовать определение производной δ -функции.
24. **Указание:** Использовать определение δ -функции.
25. **Указание:** Рассмотреть интеграл $\int d\mathbf{r}$ от обеих частей равенства в полярных координатах.
26. **Указание:** Записать лапласиан в сферических координатах и взять интеграл $\int d\mathbf{r}$ от обеих частей равенства.
27. (а) **Указание:** Сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \cos(ny)$$

надо вычислять как предел при $\alpha \rightarrow +0$ абсолютно сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\alpha n) \cos(nx) \cos(ny).$$

Образуется.

(б) Не образует. Базис образует полный набор

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(nx), \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos(nx) \right\}.$$

Разложение по этому базису — ряд Фурье данной функции.

28. (в) $a_{ij} = a_{ji}, \quad b_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}.$

29. $q(a)(\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1) = q(b)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$

В частности, получаются краевые задачи I, II, III рода и периодическая краевая задача:

1° $y(a) = y(b) = 0,$

2° $y'(a) = y'(b) = 0,$

3° линейная комбинация 1° и 2°,

4° $y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b), \quad q(a) = q(b).$

30. (а) Нет.

(б) Да.

31. *Указание:* Для любых u и v по условию сохраняется норма линейной комбинации $\lambda u + \mu v$, где λ и μ — произвольные комплексные числа (см. задачу 1).

33. *Указание:* Подействовать оператором на произвольную функцию $f(x)$, проверить сохранение нормы, и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

34. *Указание:* Рассмотреть действие левой части на произвольную функцию $f(x)$.

35. *Указание:* Доказать равенство $(Uf, Uf) = (f, f)$, используя представление функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье.

Метод характеристик

2.1. Однородные и неоднородные линейные уравнения в частных производных

Уравнение

$$a \frac{\partial u}{\partial x} \equiv a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (2.1)$$

где вектор $a = (a_1, \dots, a_n)$ и неизвестная функция $u(x)$ зависят только от n переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, называется *однородным линейным уравнением в частных производных первого порядка*. Введем параметр t , зависимость от которого функций $x_j(t)$ задается системой n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Такая система называется *уравнениями характеристик*. Любой первый интеграл системы (2.2), т.е. функция $F(x)$, для которой

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

а также произвольная функция $g(F_1, \dots, F_k)$ от первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2) является решением уравнения в частных производных (2.1). Действительно, прямая подстановка $u = g$ в (2.1) приводит к цепочке равенств

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = a_i \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{dF_j}{dt} \frac{\partial g}{\partial F_j} = 0,$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Автономная система (2.2) имеет $n-1$ первый интеграл, не зависящий от t . Решение

$$u(x) = g(F_1(x), \dots, F_{n-1}(x)) \quad (2.3)$$

в виде произвольной функции от всех первых интегралов называется *общим решением (общим интегралом)* уравнения (2.1). Здесь функция g предполагается дважды непрерывно дифференцируемой. (Ниже мы для краткости не будем уточнять требования гладкости встречающихся функций.)

Уравнение (2.1) имеет простую геометрическую интерпретацию. Считая коэффициенты $a(x)$ компонентами вектора в n -мерном пространстве, уравнение (2.1) означает равенство нулю производной функции u вдоль направления вектора a . Таким образом, решение уравнения методом характеристик сводится к восстановлению интегральных кривых Γ по касательным к ним векторам a , заданным в каждой точке x . Вдоль таких кривых решение $u(x)$ постоянно. Если перейти в окрестности точки неособым преобразованием* к новой системе координат

$$\tau, F_1, F_2, \dots, F_{n-1},$$

где τ — параметр вдоль интегральной кривой (характеристики), то уравнение в этой системе приобретает вид $\frac{du}{d\tau} = 0$, а общим решением будет произвольная функция $n - 1$ координат $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ — первых интегралов уравнений характеристик (2.2).

Пример: Найдем характеристики однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Уравнения характеристик $\dot{x} = 1, \dot{y} = y$ имеют решение $(x(t) = t + C_1, y(t) = C_2 e^t)$ и один первый интеграл

$$F(x, y) = y e^{-x} = \text{const},$$

поэтому $u(x, y) = g(y e^{-x})$, где g — произвольная функция, есть общее решение. На рис. 2.1 изображены характеристики — линии уровня функции g . Стрелками обозначены направления касательных векторов $a = (1, y)$ к интегральным кривым. Сами интегральные кривые $y = \text{const} \cdot e^x$ показаны сплошными линиями. Решение однородного линейного уравнения постоянно вдоль характеристик.

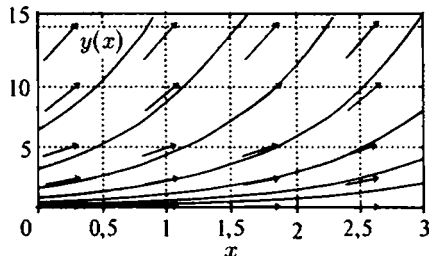


Рис. 2.1. Интегральные кривые и касательные векторы к ним для уравнения $\dot{y} = y$

Задача Коши ставится к уравнению (2.1) следующим образом: требуется найти решение $u(x)$ уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x)|_{x_0 \in S} = f(x_0), \quad (2.4)$$

где S — некоторая гиперповерхность (размерности $n - 1$), $f(x_0)$ — заданная функция «начальных» переменных x_0 . Задача Коши однозначно

* Особой точкой преобразования называется точка, в которой обращается в нуль якобиан $\frac{\partial(\tau, F_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

разрешима по крайней мере в некоторой окрестности начальной гиперповерхности S , если S не касается характеристик. Решение уравнений для характеристик (2.2) с начальными условиями (2.4) $x = x(x_0, t)$ представляет собой замену переменных. В этом смысле метод характеристик есть не что иное, как применение вполне определенной замены переменных.

В том случае, когда удастся получить общее решение (2.3), задачу Коши можно также решить, найдя функцию $g(F)$ из начального условия (2.4).

Неоднородное линейное уравнение

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = b, \quad (2.5)$$

где $b(x)$ — заданная функция, имеет, как обычно для линейных уравнений, решение в виде суммы общего решения (2.3) однородного уравнения (2.1) и частного решения неоднородного уравнения (2.5). Чтобы найти последнее, удобнее перейти на характеристики $x(t)$, тогда левая часть (2.5) переписывается в виде полной производной

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} = b(x(t)).$$

Значит, функция $b(x(t))$ есть производная по «времени» t при движении вдоль характеристики, откуда получаем искомое частное решение

$$u_{inh} = \int_{t_0}^t b(x(\tau)) d\tau.$$

В отличие от решения однородного уравнения, это решение уже не постоянно вдоль характеристики Γ .

2.2. Квазилинейные уравнения в частных производных

Если коэффициенты a и b уравнения (2.5) зависят не только от координат x , но и от искомой функции $u(x)$: $a = a(x, u)$, $b = b(x, u)$, то уравнение называется *квазилинейным*. К квазилинейному уравнению также применим метод характеристик. Однако его решение уже не есть сумма решений однородного и неоднородного уравнений. Единственная модификация метода характеристик для квазилинейного уравнения — расширение пространства, в котором ищутся интегральные кривые Γ . Кроме n координат x_i , $i = 1, \dots, n$ введем $n+1$ -ю координату u . В расширенном пространстве вдоль характеристик $\dot{x} = a(x, u)$ уравнение (2.5) сводится к обыкновенному. В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на функции x_i , u от параметра t :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = a_i(x, u), \\ \dot{u} = b(x, u). \end{cases} \quad (2.6)$$

Общее решение u квазилинейного уравнения дается неявно уравнением

$$g(F_1, F_2, \dots, F_n) = 0,$$

где g — произвольная функция n первых интегралов F_i уравнений (2.6).

Пример: Найдем решение уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

описывающего одномерное течение облака невзаимодействующих пылинок (u имеет смысл скорости пыли). Уравнение для характеристики имеет вид

$$\dot{x} = u,$$

а уравнение на характеристике

$$\dot{u} = 0$$

с начальными условиями

$$x|_{t=0} = x_0, \quad u|_{t=0} = u_0(x_0).$$

Отсюда находим, что функция $x = u_0(x_0)t + x_0$ задает неявно зависимость $x_0 = x_0(x, t)$, при подстановки которой в $u = u_0(x_0)$ дает искомое решение задачи Коши для уравнения Хопфа. В неявном виде

$$u = u_0(x - ut). \quad (2.7)$$

Пусть при $t = 0$ $u(x, 0) = u_0(1 - \text{th } x)$. Решение записывается в неявном виде: $u = u_0[1 - \text{th}(x - ut)]$. Отсюда частная производная решения по x равна:

$$u_x = \frac{-u_0}{\text{ch}^2 \xi - u_0 t}.$$

$u(x, t)$

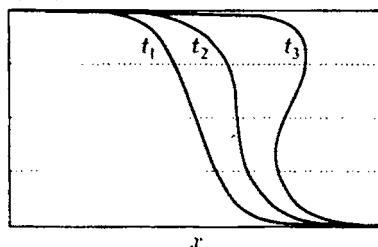


Рис. 2.2. «Опрокидывание» решения уравнения Хопфа ($t_3 > t_2 > t_1$)

Видно, что при $t < t^* = \frac{1}{u_0}$ решение однозначно. При $t \rightarrow t^*$ производная u_x стремится к бесконечности при $\xi = x - ut = 0$ — происходит *опрокидывание* волны. Решение становится неоднозначным при $t > t^*$. Причина опрокидывания состоит в том, что быстрые пылинки догоняют медленные, что приводит к укручению профиля волны. Плотность пылинок $n(x, t)$, определяемая из уравнения непрерывности $n_t + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0$, может

быть явно найдена через начальную плотность и якобиан преобразования $x = x(x_0, t)$:

$$n(x, t) = \frac{n_0(x_0)}{\left| \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|}.$$

В момент времени $t = t^*$ плотность обращается в бесконечность в точке опрокидывания $\xi = 0$.

Появление бесконечной производной в профиле скорости, а также обращение плотности в точке опрокидывания в бесконечность означает, что в окрестности $t = t^*$ физическая модель — уравнение Хопфа — теряет свою применимость.

2.3. Системы уравнений в частных производных

Метод характеристик в некоторых случаях можно обобщить на системы из m уравнений на m функций u_i . Если переменных всего две, x и t , то система линейных уравнений имеет вид

$$Au_t + Bu_x = f, \quad (2.8)$$

где $A(x, t)$, $B(x, t)$ — матрицы порядка m , $u(x, t)$ — вектор-столбец неизвестных функций, а $f(x, t)$ — вектор-столбец заданных правых частей размерности m . Если u — решение системы, то приращение функции u при смещении на бесконечно малый вектор (dt, dx) составляет

$$du = u_t dt + u_x dx. \quad (2.9)$$

Зная дифференциал du , мы можем найти производные u_t и u_x из системы $2m$ линейных уравнений (2.8), (2.9). Однако разрешить систему при произвольной правой части нельзя, если ее определитель обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ E dt & E dx \end{vmatrix} = 0, \quad (2.10)$$

где E — единичная матрица порядка m . Действительные решения $x(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения (2.10) называются характеристиками системы (2.8).

Уравнение (2.10) представляет собой полином степени m относительно производных $\frac{dx}{dt}$. Если $m = 2$, а полином имеет два действительных корня, то система (2.8) называется системой *гиперболического* типа. Если же действительных решений нет, система (2.8) относится к *эллиптическому* типу. Промежуточный случай, в котором (2.8) имеет вырожденный корень, относится к *параболическому* типу.

Для гиперболических систем с двумя переменными (x, t) можно использовать метод характеристик. Решение системы (2.8), (2.9) существует на характеристиках, только если ранг матрицы системы равен

рангу расширенной матрицы

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ E \, dt & E \, dx \end{pmatrix} = \text{rank} \left(\begin{array}{cc|c} A & B & f \\ E \, dt & E \, dx & du \end{array} \right). \quad (2.11)$$

Это равенство называется *соотношениями на характеристиках*. Оно должно выполняться при движении вдоль характеристик. Формулы (2.10), (2.11) могут быть применимы не только к линейным, но и квазилинейным гиперболическим системам.

Пример: Уравнения движения одномерного баротропного газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (2.12)$$

где $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ — скорость звука, p , ρ и v — давление, плотность и скорость газа. Для этой квазилинейной однородной системы

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & v \end{pmatrix}.$$

Формула (2.10) позволяет найти уравнения характеристик

$$\dot{x} = v \pm c, \quad (2.13)$$

а (2.11) — соотношения $dv \pm \frac{cd\rho}{\rho} = 0$. Интегралы соотношений на характеристиках, в данном примере

$$J_{\pm} = v \pm \int \frac{c \, d\rho}{\rho}, \quad (2.14)$$

называются *инвариантами Римана*. На инварианты $J_{\pm}$ из (2.12) следуют уравнения

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (v+c) \frac{\partial J_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J_-}{\partial t} + (v-c) \frac{\partial J_-}{\partial x} = 0.$$

Ноль в правой части означает сохранение инвариантов Римана вдоль характеристик. Найти общее решение этой системы не удастся, поскольку v и c выражаются как через J_+ , так и через J_- . Однако в частном случае, когда один из инвариантов (например, J_-) не зависит от координаты (например, в силу начальных условий), тогда он не зависит и от времени в силу второго уравнения. Остается одно квазилинейное уравнение для J_+ , решение которого можно найти. Такое решение называется *простой волной Римана*.

Понятие характеристик можно обобщить и на некоторые системы линейных уравнений в частных производных с числом переменных, большим двух. Характеристики таких систем суть поверхности или гиперповерхности, такие, что частные производные от решения в направлениях,

ортогональных этим поверхностям, не могут быть выражены через начальные данные Коши на них, а значит, не может быть найдено и само решение.

Рассмотрим систему m уравнений на функции от $n + 1$ переменных:

$$A u_t + B_1 u_{x_1} + \dots + B_n u_{x_n} = f, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

где A, B_i — матрицы порядка m . Пусть краевые условия задаются на гиперповерхности $\phi(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ в $n + 1$ -мерном пространстве. Введем в пространстве $(t, x_1, \dots, x_n)$ новые координаты. В качестве одной координаты возьмем функцию ϕ а остальные $\alpha_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \alpha_n(t, x_1, \dots, x_n)$ ограничены только условием неравенства нулю якобиана преобразования:

$$\frac{D(\phi, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{D(t, x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Система (2.15) запишется в новых переменных в виде

$$\left(A\phi_t + \sum_{i=1}^n B_i \phi_{x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial \phi} + \dots = f, \quad (2.16)$$

где точками обозначены слагаемые, не содержащие $\frac{\partial u}{\partial \phi}$. Систему (2.16) нельзя разрешить относительно $\frac{\partial u}{\partial \phi}$, если обращается в нуль определитель

$$|A\phi_t + B_1 \phi_{x_1} + \dots + B_n \phi_{x_n}| = 0. \quad (2.17)$$

Характеристики для (2.15) определяются как поверхности уровня решения нелинейного уравнения в частных производных (2.17). Вектор градиента этой функции $(\phi_t, \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n})$, ортогональный характеристическим поверхностям, называется *характеристической нормалью*.

Детальное изложение теории линейных и квазилинейных уравнений в частных производных можно найти в книгах [Арн97, Арн84, Арн78, Три57, Пет61, Кур64, КГ51].

2.4. Примеры

36. Найти и изобразить на плоскости (x, y) характеристики следующих однородных уравнений:

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(б) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(в) \quad y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Найти общие решения и проверить их прямой подстановкой.

Решение. (а) Введем параметр t и выпишем уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = -y^2.$$

Их решение

$$x(t) = t - t_1, \quad y(t) = \frac{1}{t - t_2}$$

задает параметрически семейство характеристик на плоскости (x, y) . Они изображены на рис. 2.3. Уравнения характеристик имеют один первый интеграл

$$F(x, y) = x - \frac{1}{y} = \text{const}.$$

Поэтому $u(x, y) = g(x - \frac{1}{y})$, где g — произвольная функция, есть общее решение. Действительно, вычисляя первые производные

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = g', \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{y^2} g',$$

видим, что уравнение превращается в тождество при любой функции g .

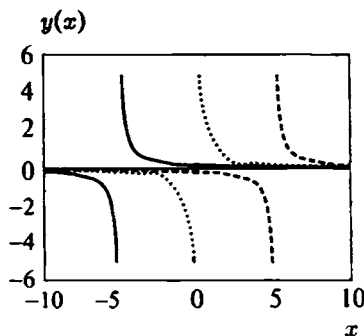


Рис. 2.3. Семейство характеристик в задаче 36 (а) (— const = -5; - - const = 0; ... const = 5)

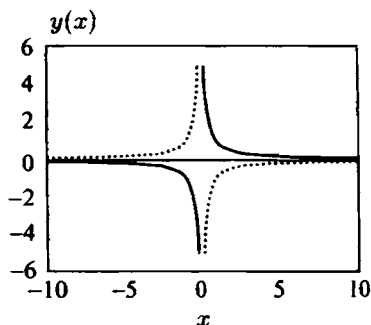


Рис. 2.4. Семейство характеристик в задаче 36 (б) (— const = 0; - - const = -1)

Решение. (б) Решение уравнений характеристик

$$x = C_1 e^t, \quad y = C_2 e^{-t}$$

задает параметрически семейство характеристик на плоскости (x, y) . Они изображены на рис. 2.4. Общее решение имеет вид

$$u(x, y) = g(xy).$$

Решение. (в) Введем параметр t и выпишем уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Их решение

$$x(t) = A \sin(t - t_1), \quad y(t) = A \cos(t - t_1)$$

задает параметрически семейство характеристик на плоскости (x, y) (окружности), которые изображены на рис. 2.5. Уравнения характеристик имеют один первый интеграл

$$F(x, y) = x^2 + y^2 = \text{const},$$

поэтому $u(x, y) = g(x^2 + y^2)$, где g — произвольная функция, есть общее решение. ►

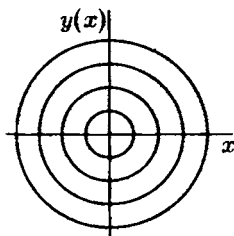


Рис. 2.5. Семейство характеристик в задаче 36 (в)

37. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u(0, y) = \cos y.$$

Решение. Уравнения характеристик $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = -y$ имеют решение $(x(t) = t - t_1, y(t) = \exp(-t + t_2))$ и один первый интеграл

$$F(x, y) = ye^x = \text{const}.$$

Поэтому

$$u(x, y) = g(y \exp(x)),$$

где g — произвольная функция, есть общее решение. Прямая $x = 0$, на которой заданы граничные условия, не касается характеристик ($y = \exp(-x + x_1)$). Поэтому, подставляя общее решение в граничные условия, найдем частный вид функции g для задачи Коши:

$$u(0, y) = g(y) = \cos(y).$$

Откуда $u(x, y) = \cos(y \exp(x))$. ►

38. Решить задачу Коши для уравнения 36 (в) при $u(1, y) = y^2$.

Решение. Прямая $x = 1$, на которой заданы граничные условия, касается в точке $(1, 0)$ характеристики, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 = 1$ (см. решение задачи 36 (в) и рис. 2.5). То есть, решения задачи Коши может не существовать. Однако, с нашими граничными условиями

решение задачи Коши существует. В этом нетрудно убедиться, подставив общее решение задачи 36 (в) в граничные условия.

$$u(1, y) = g(1 + y^2) = y^2, \quad \text{откуда} \quad g(z) = z - 1.$$

В результате $u(x, y) = g(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 - 1$. Это решение определено и единственно вне единичного круга $x^2 + y^2 > 1$. Внутри круга решением задачи является произвольная дифференцируемая функция переменной $\xi = x^2 + y^2$, равная нулю на окружности единичного радиуса.

Замечание. Решение задачи вне круга нашлось благодаря симметрии граничных условий относительно преобразования $y \rightarrow -y$. Так, задача Коши при $u(1, y) = y$ уже не имеет гладкого решения на всей плоскости. ►

39. Показать, что уравнения характеристик бесстолкновительного кинетического уравнения (уравнения Лиувилля)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

для функции распределения заряженных частиц $f = f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ в фазовом пространстве совпадают с уравнениями движения частиц в электрическом и магнитном полях.

Решение. Считая t параметром, получаем уравнения характеристик

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{p}} = e \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]}{c} \right),$$

которые совпадают с уравнениями движения частиц в скрещенных полях. ►

40. Показать, что для уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0,$$

где H — функция Гамильтона, а $\{, \}$ — скобки Пуассона, уравнениями характеристик являются уравнения Гамильтона.

Решение. Вспоминая определение скобок Пуассона, перепишем уравнение Лиувилля в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Поэтому уравнения характеристик

$$\dot{t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}$$

совпадают с уравнениями Гамильтона. ►

41. Решить задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = y, \quad u(0, y) = \sin y.$$

Решение. Общее решение однородного уравнения получено в задаче 37: $u(x, y) = g(ye^x)$. Частное решение неоднородного уравнения

$$\frac{du}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} = u_x - y u_y = y(t) = \exp(-t + t_2),$$

имеет вид

$$u = \int^t d\tau y(\tau) = \int^t d\tau \exp(-\tau + t_2) = -\exp(-t + t_2) + c_1 = c_1 - y,$$

где c_1 постоянно вдоль характеристик. Полное решение является их суммой: $u(x, y) = g(y \exp(x)) - y$. (Постоянная c_1 включена в функцию g .) Подставляя его в граничные условия, находим

$$u(0, y) = g(y) - y = \sin(y), \quad \text{откуда} \quad g(z) = \sin(z) + z,$$

$$\text{и } u(x, y) = \sin(y \exp(x)) + y \exp(x) - y. \quad \blacktriangleright$$

42. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + 2(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить задачу Коши при $u(x, y, z)|_{x^2+y^2=1} = 1 - z$ в области $x^2 + y^2 > 1$.

Решение. В силу симметрии задачи, преобразуем уравнение в цилиндрические координаты ρ, φ, z :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + 2\rho^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Отсутствие производной по φ означает, что коэффициент перед ней равен нулю. Уравнения характеристик $\dot{\rho} = \rho$, $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{z} = 2\rho^2$ решаются ($\varphi = \varphi_0$, $\rho = \rho_0 \exp(t)$, $z(t) = \rho^2 + z_0$) и имеют два интеграла движения: $F_1 = \varphi = \text{const}$ и $F_2 = \rho^2 - z = \text{const}$. Характеристиками являются полупараболы (пересечение параболоидов вращения $F_2 = \text{const}$ и полуплоскостей $F_1 = \text{const}$). Значит,

$$u(\rho, \varphi, z) = g(\varphi, \rho^2 - z),$$

где g — произвольная функция двух аргументов, есть общее решение. Цилиндр ($\rho^2 = 1$), на котором заданы граничные условия, не касается характеристик. Подставляя общее решение в граничные условия, находим конкретный вид функции g :

$$u(1, \varphi, z) = g(\varphi, 1 - z) = 1 - z, \quad \text{откуда} \quad g(F_1, F_2) = F_2$$

$$\text{и } u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \text{ при } x^2 + y^2 > 1.$$

Замечание. Общее решение может быть продолжено до всех точек, кроме точки $\rho = 0$, где уравнение вырождается. ►

43. Для уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(а) найти момент «прокидывания волны», после которого нарушаются условия применимости уравнения Хопфа для описания одномерного движения облака пылинок, если $u(x, 0) = \frac{\pi}{2} - \arctg x$;

(б) найти момент «прокидывания волны» при $u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} d\eta e^{-\eta^2}$.

Решение. (а) Согласно (2.7) общее решение уравнения Хопфа имеет вид $u(x, t) = g(\xi)$, $\xi = x - u(x, t)t$. Подставляя его в граничные условия, получаем решение в неявном виде

$$u(x, 0) = g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x,$$

$$u(x, t) = g(\xi) = \frac{\pi}{2} - \arctg(x - tu(x, t)).$$

Можно найти его частную производную по x :

$$u_x = \frac{-1}{1 + (x - tu)^2} (1 - tu_x) = \frac{-1}{1 - t + (x - tu)^2}.$$

Видно, что $u_x < \infty$ для всех x при $t < t^* = 1$ и решение однозначно. При $t \rightarrow t^*$ производная u_x стремится к бесконечности в точке $x^* = u(x^*, t^*)t^* = \frac{\pi}{2}$, и происходит *прокидывание* — формирование ударной волны.

Решение. (б) Общее решение уравнения Хопфа имеет вид (2.7): $u(x, t) = g(\xi)$, $\xi = x - u(x, t)t$. Подставляя его в граничные условия, получаем решение в неявном виде

$$u(x, 0) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} d\eta e^{-\eta^2}, \quad u(x, t) = g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} d\eta e^{-\eta^2}.$$

Можно найти его частную производную по x :

$$u_x = -\frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}} (1 - tu_x) = \frac{-1}{\sqrt{\pi} e^{\xi^2} - t}. \quad (2.18)$$

Видно, что $|u_x| < \infty$ и решение однозначно при $t < t^* = \sqrt{\pi}$. При $t \rightarrow t^*$ производная u_x стремится к бесконечности и происходит *прокидывание* при $\xi^* = 0$. Откуда $u^* = g(\xi^*) = \frac{1}{2}$, $x^* = u^*t^* = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ►

44. Найти решение уравнений одномерных колебаний холодного электронного газа относительно однородного неподвижного ионного фона плотности n_0 . При каких начальных значениях амплитуды скорости электронов V_0 происходит опрокидывание? Начальное распределение скорости u и плотности n электронов имеет вид

$$u(x, 0) = V_0 \cos kx, \quad n(x, 0) = n_0 \quad (k = \text{const}). \quad (2.19)$$

Одномерные колебания холодного электронного газа описываются уравнением непрерывности для плотности электронов $n(x, t)$,

$$n_t + (nu)_x = 0; \quad (2.20)$$

уравнением Эйлера для их скорости u ,

$$u_t + uu_x = -\frac{e}{m}E, \quad (2.21)$$

где e , m — заряд и масса электрона соответственно, E — электрическое поле, u уравнением Пуассона,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(n_0 - n). \quad (2.22)$$

Решение. Выражая n из уравнения (2.22), подставляя его в (2.20) и интегрируя по x от $-\infty$ до x получим:

$$E_t + uE_x = 4\pi n_0 u. \quad (2.23)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, поскольку на бесконечности электроны покоятся и поле равно нулю. Для решения квазилинейной системы (2.23), (2.21) воспользуемся методом характеристик.

Имеется двукратно вырожденное семейство характеристик, задаваемых уравнением

$$\dot{x} = u(x, t)$$

с начальным условием $x|_{t=0} = x_0^*)$. Соотношения на характеристиках запишутся в виде

$$u_t = -\frac{e}{m}E, \quad E_t = 4\pi n_0 u.$$

Подчеркнем, что производные по времени вычисляются при постоянной координате x_0 . Дифференцируя первое уравнение по t и выражая E_t из второго, сведем его к уравнению колебаний с плазменной частотой

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m}};$$

$$u_{tt} = -\omega_p^2 u.$$

Подставляя начальные данные, получим:

$$u = V_0 \cos(\omega_p t) \cos(kx_0).$$

^{*)} В гидродинамике замену переменных x, t к x_0, t' называют переходом от эйлерового описания к лагранжевому.

Интегрируя это выражение, найдем текущую координату x электрона, имевшего начальную координату x_0 :

$$x = x_0 + \frac{V_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \cos(kx_0). \quad (2.24)$$

При амплитуде $V_0 > V_{cr}$, где $V_{cr} = \frac{\omega_p}{k}$, всегда найдется такой момент времени $t = t_*$, когда производная $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ обратится в нуль в некоторой точке $x = x_*$, а значит произойдет опрокидывание волны. ►

45. Найти общие решения квазилинейных уравнений:

(а) $u_t + uu_x = -x$;

(б) $u_t + uu_r = -\frac{1}{r^2}$ при $r > 0$.

Решение. (а) Уравнения характеристик в расширенном пространстве $\dot{x} = u$, $\dot{u} = -x$ решаются ($x(t) = A \sin(t - \phi)$, $u(t) = A \cos(t - \phi)$). Видно, что амплитуда и фаза

$$A^2 = u^2 + x^2, \quad \phi = t - \arctg\left(\frac{x}{u}\right),$$

постоянны вдоль характеристик. Поэтому решение неявно задается уравнением

$$g\left(u^2 + x^2, t - \arctg\left(\frac{x}{u}\right)\right) = 0,$$

где $g(\xi, \eta)$ — произвольная функция. Общее решение можно переписать в ином виде ($f(\xi)$ — произвольная функция)

$$t - \arctg \frac{x}{u} = f(u^2 + x^2), \quad \text{или} \quad u = x \operatorname{ctg}(t - f(u^2 + x^2)).$$

Решение. (б) Уравнения характеристик $\dot{r} = u$, $\dot{u} = -\frac{1}{r^2}$ решаются в расширенном пространстве (вспомним задачу классической механики о свободном движении в сферических координатах с ненулевым моментом):

$$u^2 - \frac{1}{r^2} = E, \quad ur = E(t - t_0),$$

где E и t_0 постоянны вдоль характеристик. Общее решение можно выписать в неявном виде через произвольную функцию связи E и t_0 :

$$g\left(u^2 - \frac{1}{r^2}, t - \frac{ur^3}{r^2 u^2 - 1}\right) = 0. \quad \blacktriangleright$$

46. Решить задачу Коши для уравнения $u_t + uu_x = 1$ при $u(x, 0) = 1 - \operatorname{th} x$.

Решение. Уравнения характеристик в расширенном пространстве $\dot{x} = u$, $\dot{u} = 1$ имеют решение $(u(t) = t + u_0, x(t) = \frac{u^2(t)}{2} + x_0)$. Величины

$$x_0 = x - \frac{1}{2}u^2 = \text{const}, \quad u_0 = u - t = \text{const}$$

постоянны вдоль характеристик. Уравнение $g(u - t, u^2 - 2x) = 0$, где $g(\xi, \eta)$ — произвольная функция, неявно дает общее решение, которое можно переписать в более удобном виде

$$u^2(x, t) = 2x + f(u(x, t) - t),$$

где $f(\xi)$ — произвольная функция. Подставляя граничные условия в решение, получаем уравнение на функцию f :

$$u(x, 0) = \sqrt{2x + f(u)} = 1 - \text{th } x,$$

откуда

$$f(u) = u^2 - 2x = u^2 - 2 \operatorname{arth}(1 - u).$$

В результате решение задачи Коши получается неявным:

$$u^2(x, t) = 2x + (u(x, t) - t)^2 - 2 \operatorname{arth}(1 - u(x, t) + t).$$

Его можно переписать в более простом виде

$$u(x, t) = 1 + t - \text{th} \left(x - tu(x, t) + \frac{t^2}{2} \right). \quad \blacktriangleright$$

47. Найти характеристики системы, соотношения на них и выписать общее решение:

$$(a) \quad \begin{cases} u_x + v_x + u_y - 3v_y = 0, \\ u_x + v_x - 3u_y + v_y = 0. \end{cases}$$

$$(б) \quad \begin{cases} (x-1)u_t - (x+1)v_t + u_x = 0, \\ (x+1)u_t - (x-1)v_t - v_x = 0. \end{cases}$$

Решение. (а) Перепишем систему в матричном виде

$$A \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = 0,$$

где матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A вырождена, а матрица B — нет. Умножим систему слева на B^{-1} . Для этого умножим первое уравнение на 3 и прибавим ко вто-

рому, а также умножим второе уравнение на 3 и прибавим к первому. Получившиеся уравнения поделим на -8 :

$$E \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = 0, \quad C = B^{-1}A = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения на характеристики определяются из (2.10), которое перепишем в виде

$$|Edx - Cdy| = 0.$$

Откуда $\frac{dx}{dy} = \lambda_{\pm}$, где $\lambda_- = 0$, $\lambda_+ = -1$ — собственные числа матрицы C . Значит, семейства характеристик задаются уравнениями $x = c_1$ и $x + y = c_2$. Так как матрица C симметрична, не зависит от переменных, и ее собственные числа различны, ее можно диагонализировать $C \rightarrow T^{-1}CT$, сделав подстановку

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

где T — матрица составленная из собственных нормированных векторов матрицы C , записанных в виде столбцов. В результате система принимает канонический вид

$$\begin{cases} f_y = 0, \\ g_x - g_y = 0. \end{cases}$$

Уравнения на функции f и g расцепляются. Откуда $f = f(x)$, $g = g(x+y)$ есть общее решение, где $f(x)$, $g(z)$ — произвольные функции. (Фактически мы получили, что $f = \text{const}$ является соотношением на характеристике $x = c_1$, а $g = \text{const}$ на характеристике $x + y = c_2$.) Выражая u и v через f и g получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (f(x) + g(x + y)), \\ v(x, y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-f(x) + g(x + y)). \end{aligned}$$

Замечание. Этот способ — диагонализации — можно применять, даже если матрица C зависит от переменных, главное, чтобы от переменных не зависела диагонализующая матрица T .

Решение. (6) Перепишем систему в матричном виде

$$A \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} x-1 & -x-1 \\ x+1 & 1-x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения на характеристики определяются из (2.10), которое перепишем в виде

$$|Adx - Bdt| = 0.$$

Откуда $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$ для одного и $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x$ для другого семейства характеристик. Решая эти уравнения, получаем, что два семейства характеристик задаются уравнениями $2x + t = c_1$, $x^2 - t = c_2$. Формула (2.11) позволяет найти соотношения на характеристиках. Подставляя в нее $2dx + dt = 0$, получаем, что $dv + du = 0$ вдоль характеристик $2x + t = c_1$. Значит, $v + u = f_1(2x + t)$, где f_1 — произвольная функция. Аналогично вдоль второго семейства характеристик $x^2 - t = c_2$ остается константой выражение $u - v = f_2(x^2 - t)$, где f_2 — другая произвольная функция. Общее решение получается из соотношений на характеристиках:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(f_1(2x + t) + f_2(x^2 - t)), \\ v(x, t) &= \frac{1}{2}(f_1(2x + t) - f_2(x^2 - t)). \end{aligned}$$

48. Найти условие гиперболичности, характеристики и соотношения на характеристиках системы

$$\begin{cases} u_t + au_x + bv_x = 0, \\ v_t + cu_x + dv_x = 0, \end{cases}$$

где a, b, c, d — константы.

Решение. Перепишем систему в матричном виде

$$E \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Формула (2.10) позволяет найти уравнения характеристик

$$|Edx - Adt| = 0, \quad \dot{x} = \lambda_{\pm} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}.$$

Система является гиперболической, если подкоренное выражение больше нуля:

$$D = (a-d)^2 + 4bc > 0.$$

Если $D = 0$, то система параболического типа и два семейства характеристик вырождаются в одно, если же $D < 0$, то система имеет эллиптический тип и характеристик не существует. Соотношения на характеристиках в гиперболическом случае определяются формулой (2.11). Два из возможных представлений интегралов имеют вид

$$vb + u(a - \lambda_{\mp}) = \text{const} \quad \text{или} \quad uc + v(d - \lambda_{\mp}) = \text{const}.$$

49. Найти инварианты Римана (2.14) для политропного газа, у которого давление и плотность связаны степенной зависимостью $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$.

Решение. В политропном газе ($p\rho^{-\gamma} = \text{const}$) скорость звука не зависит от скорости среды

$$c(\rho)^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

Вычисляя интеграл в выражении (2.14), получаем для инвариантов Римана

$$J_{\pm} = v \pm \frac{2}{\gamma - 1} (c(\rho) - c_0), \quad \gamma > 1, \quad (2.25)$$

где c_0 — константа интегрирования, которую удобно положить равной скорости звука при $v = 0$, $\rho = \rho_0$ в покоящемся газе. ►

50. Найти условия, при которых решение уравнений одномерной газодинамики (2.12) оказывается таким, что скорость v зависит от x , t только в виде функции ρ : $v(x, t) = v(\rho(x, t))$. Такое решение называется простой волной Римана.

Решение. Выражая в уравнениях (2.12) частные производные от v как производные от сложной функции, получим систему из двух дифференциальных уравнений на одну функцию ρ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{c^2}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Она имеет нетривиальные решения, если матрица из коэффициентов при частных производных от ρ имеет нулевой определитель, что приводит к условию

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2 = \frac{c^2}{\rho^2}.$$

Извлекая квадратный корень и интегрируя, видим, что должно выполняться одно из равенств

$$v + \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \text{const}, \quad v - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \text{const}.$$

Таким образом, оказывается, что простая волна Римана возможна, только если в начальный момент времени $v(x, 0)$ и $\rho(x, 0)$ согласованы так, что один из инвариантов Римана имеет одинаковое значение для всех точек течения. ►

51. Пусть в газе задано начальное распределение плотности $\rho(x, 0) = R(x)$ и известно, что возникшее течение представляет собой простую волну Римана с заданным значением инварианта I_+ . Найти решение $\rho(x, t)$.

Решение. В случае простой волны Римана уравнения в системе (2.26) эквивалентны, и для описания течения можно выбрать любое из них. Учитывая, что

$$v = I_+ - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho,$$

преобразуем первое из них к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(I_+ - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho - c(\rho) \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Это квазилинейное уравнение решается методом характеристик. Его решение получается неявным:

$$\rho = R \left[x - \left(I_+ - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho - c(\rho) \right) t \right]. \quad \blacktriangleright$$

52. Справа от поршня при $x > 0$ находится политропный газ (рис. 2.6). Поршень движется с ускорением a . Найти скорость газа $v(x, t)$ до момента образования ударной волны при $a > 0$.

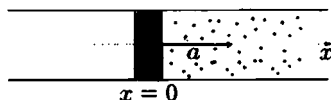


Рис. 2.6. Поршень в трубке с газом

Решение. Пусть $a > 0$. В этом случае на плоскости x, t (рис. 2.7) газ находится в области, ограниченной с одной стороны полуосью $t = 0, x > 0$, на которой граничные условия имеют вид

$$v(x, 0) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0.$$

Значит, вдоль характеристик, пересекающих эту границу, инварианты Римана (2.25) $J_{\pm} = 0$. Уравнения характеристик (2.13) в области, где оба инварианта равны нулю, становятся тривиальными и интегрируются

$$x_+ = c_0 t + x_0, \quad x_- = -c_0 t + x_1, \quad x_0, x_1 > 0.$$

Отсюда видно, что эта область ограничена прямой $x = c_0 t$, она обозначена на рис. 2.7 цифрой I, а решение в ней имеет вид

$$v(x, t) = 0, \quad \rho(x, t) = \rho_0.$$

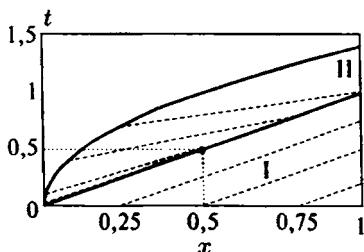


Рис. 2.7. Семейство характеристик $\dot{x} = c(\rho) + v$ (пунктир) для задачи о политропном газе перед равноускоренным поршнем: $\gamma = 3, a = 1, c_0 = 1$. I — покоящийся газ; II — движущийся газ. Слева область II ограничена положением поршня $x(t) = \frac{at^2}{2}$, а справа — фронтом возмущения $x(t) = c_0 t$ (сплошные линии). Точка $t^* = 0,5 \frac{a}{c_0}, x^* = 0,5$ — время и координата опрокидывания волны

Характеристики x_- пересекают прямую $x = c_0 t$ и переносят инвариант $J_-(x, t) = 0$ с границы ($t = 0$) в область $x < c_0 t$. Значит, во всей области II на рис. 2.7 выполняются соотношения

$$J_-(x, t) = v(x, t) - \frac{2}{\gamma - 1} (c(\rho(x, t)) - c_0) = 0,$$

$$c(\rho(x, t)) = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} v(x, t).$$

Откуда

$$J_+(x, t) = v(x, t) + \frac{2}{\gamma - 1} (c(\rho(x, t)) - c_0) = 2v(x, t),$$

а $v = \frac{J_+}{2}$ удовлетворяет квазилинейному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(v + c(\rho)) \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v(x, t)\right) \frac{\partial v}{\partial x},$$

общее решение которого имеет вид

$$f(v(x, t)) = x - \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v(x, t)\right) t, \quad (2.27)$$

где f — произвольная функция.

С другой стороны газ ограничен поршнем $x = \frac{at^2}{2}$, граничные условия на котором имеют вид $v(\frac{at^2}{2}, t) = at$, $x = \frac{v^2}{2a}$. Подставляя их в общее решение (2.27)

$$f(at) = \frac{at^2}{2} - \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} at\right) t, \quad f(v) = -\left(c_0 + \frac{\gamma v}{2}\right) \frac{v}{a},$$

получаем решение задачи Коши в области II

$$x = \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v(x, t)\right) t - \frac{\gamma v^2(x, t)}{2a} - \frac{c_0 v(x, t)}{a},$$

$$v(x, t) = \frac{(\gamma + 1)at - 2c_0}{2\gamma} + \sqrt{\left(\frac{(\gamma - 1)at + 2c_0}{2\gamma}\right)^2 - \frac{2a}{\gamma} \left(x - \frac{at^2}{2}\right)},$$

где знак плюс перед корнем выбран в силу граничного условия $v = at$ при $x = \frac{at^2}{2}$. Распределение плотности $\rho(x, t)$ находится из уравнения $J_- = 0$.

Момент образования ударной волны можно найти, дифференцируя полученное решение

$$\frac{dv}{dx} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad v^* = -\frac{c_0}{\gamma} + \frac{a(\gamma + 1)t}{2\gamma}.$$

Поскольку скорость газа в нашем случае положительна, а v^* становится больше нуля только при $t > t^* = \frac{2c_0(\gamma + 1)}{a}$, то t^* есть момент образования

ударной волны, при этом $v^* = 0$. Из решения видно, что ударная волна образуется в точке $x^* = c_0 t^*$, т. е. на фронте распространения возмущения.

При $a < 0$ характеристики на плоскости x, t выглядят по другому. Однако снова существует область невозмущенного газа, а в области, где газ движется, применимы полученные формулы, в которых a надо заменить на $-|a|$. Попробуйте сами нарисовать графики характеристик и решение $v(x)$ при фиксированном t . Покажите, что в момент времени $t^* = \frac{2c_0}{|a|(\gamma-1)}$ плотность газа вблизи поршня обращается в нуль, а при $t > t^*$ газ отсутствует в области $x < x^* = \frac{2c_0^2(\gamma-1)^2}{|a|} - \frac{2c_0 t}{(\gamma-1)}$ справа от поршня. ►

53. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} u_t - u_x = uv, \\ v_t + v_x = -uv. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену переменных $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, в которых система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} u_\eta = -\frac{uv}{2}, \\ v_\xi = -\frac{uv}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $u_\eta = v_\xi$, можно сделать подстановку $u = f_\xi$, $v = f_\eta$ и перейти от системы двух уравнений первого порядка к одному уравнению второго порядка:

$$f_{\eta\xi} = -\frac{f_\eta f_\xi}{2}.$$

Разделив это уравнение на f_ξ и интегрируя его по η , получаем

$$\ln(f_\xi) = -\frac{f}{2} + \ln\left(\frac{dG(\xi)}{d\xi}\right),$$

где $G(\xi)$ — произвольная функция. Интегрируя это уравнение по ξ , получаем

$$2 \exp\left(\frac{1}{2} f(\xi, \eta)\right) = G(\xi) + H(\eta),$$

где $H(\eta)$ — произвольная функция. Откуда

$$f = 2 \ln\left(\frac{G+H}{2}\right), \quad u(\xi, \eta) = 2 \frac{G'(\xi)}{G(\xi) + H(\eta)}, \quad v(\xi, \eta) = 2 \frac{H'(\eta)}{G(\xi) + H(\eta)}. \quad \blacktriangleright$$

54. Найти характеристические нормали для систем с четырьмя переменными:

(а) уравнений Дирака

$$\frac{1}{c} \hat{I} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \hat{\alpha}_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + i \hat{\beta} m \psi = 0,$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица,

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

(б) уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} - \frac{\partial H_3}{\partial y} + \frac{\partial H_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial z} + \frac{\partial H_3}{\partial x} = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_3}{\partial t} - \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Решение. (а) Характеристические нормали $\xi_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$ задаются формулой (2.17)

$$\left| \frac{1}{c} \hat{I} \phi_t + \hat{\alpha}_1 \phi_x + \hat{\alpha}_2 \phi_y + \hat{\alpha}_3 \phi_z \right| = \begin{vmatrix} \hat{I} \frac{\phi_t}{c} & \hat{Q} \\ \hat{Q} & \hat{I} \frac{\phi_t}{c} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.28)$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица, а

$$\hat{Q} = \sigma_1 \phi_x + \sigma_2 \phi_y + \sigma_3 \phi_z,$$

— матрицы Паули. Пользуясь равенством (1.13) из задачи 2, уравнение (2.28) можно упростить

$$\left| \hat{I} \frac{\phi_t^2}{c^2} - \hat{Q}^2 \right| = 0.$$

Поскольку $\hat{Q}^2 = \hat{I}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)$, получаем уравнение $(\frac{\phi_t^2}{c^2} - \phi_x^2 - \phi_y^2 - \phi_z^2)^2 = 0$, решая которые, получаем, что характеристические нормали для уравнения Дирака в четырехмерном пространстве имеют вид $(\phi_t, \phi_x, \phi_y, \phi_z)$, где $\phi_t = \pm c\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}$.

Решение. (6) Перепишем систему уравнений Максвелла в матричном виде

$$\frac{1}{c} \hat{I} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_t \\ \mathbf{E}_t \end{pmatrix} + \hat{A}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{E}_x \end{pmatrix} + \hat{A}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_y \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix} + \hat{A}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_z \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix} = 0,$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица, а

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{L}_i \\ -\hat{L}_i & 0 \end{pmatrix}, & \hat{L}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{L}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{L}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Характеристические нормали $\xi_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$ задаются формулой (2.17):

$$\left| \frac{1}{c} \hat{I} \phi_t + \hat{A}_1 \phi_x + \hat{A}_2 \phi_y + \hat{A}_3 \phi_z \right| = \begin{vmatrix} \hat{I} \frac{\phi_t}{c} & \hat{Q} \\ -\hat{Q} & \hat{I} \frac{\phi_t}{c} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.29)$$

где $\hat{Q} = \hat{L}_1 \phi_x + \hat{L}_2 \phi_y + \hat{L}_3 \phi_z$. Пользуясь формулой (1.13), перепишем этот определитель в виде

$$\left| \hat{I} \frac{\phi_t^2}{c^2} + \hat{Q}^2 \right| = 0.$$

Определитель полученной матрицы третьего порядка равен $(\frac{\phi_t^2}{c^2} - \phi_x^2 - \phi_y^2 - \phi_z^2)^2 \frac{\phi_t^2}{c^2} = 0$. Характеристические нормали определяются векторами $(0, \phi_x, \phi_y, \phi_z)$ и $(\pm c\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}, \phi_x, \phi_y, \phi_z)$.

2.5. Задачи

55. Для каких начальных условий $u(x, 0) = f(x)$ решение уравнения Хопфа остается гладким, т. е. $|u_x| < \infty$ при $t > 0$.

56. Найти общее решение уравнения:

$$u_t + u_x = u.$$

57. Найти характеристики системы, соотношения на них и выписать общее решение:

$$\begin{cases} u_t + v_t - \frac{x}{t} (u_x + v_x) = 0, \\ u_t - v_t + t (u_x - v_x) = 0. \end{cases}$$

58. Описать растекание тонкого слоя идеальной жидкости после поднятия заслонки. Процесс описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hv) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} (hv) = -g \frac{\partial h}{\partial x},$$

здесь h — толщина слоя, v — горизонтально направленная скорость жидкости, которая считается одинаковой по вертикальному сечению, g — ускорение свободного падения. Начальная толщина h_0 .

2.6. Ответы

55. При $\frac{df(x)}{dx} > 0$.

56. $u(x, t) = g(x - t) \cdot e^x$.

57. Уравнения на характеристики

$$\frac{dx}{dt} = t \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}.$$

Соотношения на них

$$d(u - v) = 0 \quad \text{и} \quad d(u + v) = 0.$$

Общее решение

$$\begin{cases} u = f(xt) - g\left(x - \frac{t^2}{2}\right), \\ v = f(xt) + g\left(x - \frac{t^2}{2}\right), \end{cases}$$

где f и g — произвольные функции.

$$58. \quad h(x, t) = \begin{cases} 0, & x < -2\sqrt{gh_0} t; \\ \frac{1}{9g} \left(\frac{x}{t} + 2\sqrt{gh_0} \right), & -2\sqrt{gh_0} t < x < \sqrt{gh_0} t; \\ h_0, & x > \sqrt{gh_0} t; \end{cases}$$
$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} - \sqrt{gh_0} \right), & -2\sqrt{gh_0} t < x < \sqrt{gh_0} t; \\ 0, & x > \sqrt{gh_0} t. \end{cases}$$

Линейные уравнения в частных производных второго порядка

3.1. Канонический вид

Наиболее общее линейное уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \quad (3.1)$$

Здесь все коэффициенты зависят только от x и y .

Обратимым преобразованием переменных уравнение может быть упрощено. Тип уравнения и его канонический вид определяются знаком дискриминанта

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}.$$

Замена переменных, приводящая к *каноническому виду*, выполняется с помощью решения уравнений на характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}}; \quad (3.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}}. \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) имеют в общем случае различающиеся интегралы

$$\psi_+(x, y) = \text{const}, \quad \psi_-(x, y) = \text{const}. \quad (3.4)$$

При $D > 0$ уравнение (3.1) называется *гиперболическим*. В новых переменных

$$\xi = \psi_+(x, y), \quad \eta = \psi_-(x, y)$$

оно приводится к первому каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0. \quad (3.5)$$

Обозначения коэффициентов в уравнении (3.5) оставлены те же, что и в уравнении (3.1), хотя сами коэффициенты могут измениться после замены переменных. Это замечание следует учитывать и далее. Для

уравнений гиперболического типа принят еще и второй канонический вид. Сделав в (3.5) замену

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

получим

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + b_1 u_\alpha + b_2 u_\beta + cu + f = 0. \quad (3.6)$$

При $D = 0$ уравнение называют *параболическим*. Уравнения (3.2), (3.3) и их интегралы ψ_+ и ψ_- в этом случае совпадают. Замена

$$\xi = \psi_-(x, y), \quad \eta = \varphi(x, y),$$

где φ — любая функция такая, что φ и ψ функционально независимы, приведет (3.1) к каноническому виду параболического типа

$$u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0.$$

При $D < 0$ уравнение относится к *эллиптическому* типу. Уравнения (3.2) и (3.3) в этом случае комплексно сопряжены, их интегралы ψ_+ и ψ_- тоже. Заменой переменных

$$\xi = \operatorname{Re} \psi_+(x, y), \quad \eta = \operatorname{Im} \psi_+(x, y)$$

уравнение приводится к каноническому виду эллиптического типа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0.$$

Для дальнейшего упрощения уравнения любого типа нужно искать решение в виде

$$u = F(\xi, \eta)v.$$

Такая замена не испортит канонического вида, но при этом позволит получить условия на функцию F , при которых уравнение на v не будет содержать одну или обе производные u_ξ и u_η .

Если коэффициенты в уравнении постоянны, то, подставляя

$$F = e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

и подбирая λ и μ , можно привести уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов соответственно к виду

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} + \gamma v + f &= 0, \\ v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f &= 0, \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f &= 0. \end{aligned}$$

Если коэффициенты γ и f уравнения гиперболического типа оказались равными нулю

$$v_{\xi\eta} = 0,$$

то его общее решение на всей плоскости (ξ, η) имеет вид

$$v(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Здесь f_1 и f_2 — произвольные функции. Возвращаясь к исходным переменным (x, y) и функции u , получаем

$$u(x, y) = [f_1(\xi(x, y)) + f_2(\eta(x, y))] F(x, y).$$

Частный вид функций f_1 и f_2 для задачи Коши может быть определен по начальным условиям, заданным на линии в плоскости (x, y) .

3.2. Криволинейные системы координат

В ортогональной криволинейной системе координат в трехмерном пространстве элемент длины может быть записан в виде

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2.$$

Величины

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

называются *коэффициентами Ламе*. Градиент, дивергенция и ротор выражаются в криволинейных координатах формулами

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= e_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + e_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + e_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}, \\ \text{div } a &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 a_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 a_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 a_3)}{\partial q_3} \right), \\ \text{rot } a &= \begin{vmatrix} \frac{e_1}{h_2 h_3} & \frac{e_2}{h_1 h_3} & \frac{e_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь e_1, e_2, e_3 — локальные орты заданной системы координат.

3.3. Разделение переменных

Метод *разделения переменных* состоит в том, что решение граничной задачи для уравнения в частных производных ищется в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной координаты^{*)}. В большом числе практически важных случаев это позволяет свести задачу к поиску решений нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений.

^{*)} В некоторых случаях решение ищут не в виде произведения. Например, в уравнении Гамильтона—Якоби переменные могут разделиться, если искать решение в виде суммы функций от отдельных координат.

Для конкретного уравнения переменные могут разделяться в одних системах координат и не разделяться в других. Например, в стационарном уравнении Шрёдингера

$$-\frac{1}{2} \Delta \psi + U\psi = E\psi$$

переменные разделяются в той системе координат, в которой потенциал U может быть записан в виде

$$U = \sum_{m=1}^3 \frac{U_m(q_m)}{h_m^2},$$

где h_m — коэффициенты Ламе.

3.4. Простейшие уравнения, решаемые методом Фурье

Простейшее уравнение гиперболического типа (так называемое одномерное волновое уравнение) имеет вид

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

В частности, оно описывает плоские свободные незатухающие колебания струны. Мы будем пользоваться этой наглядной интерпретацией. Тогда u — отклонение струны от равновесного положения, $c^2 = \frac{T}{\rho}$ — квадрат скорости волны, выраженный через натяжение струны T и ее линейную плотность ρ . Для этого уравнения мы будем использовать два типа граничных условий по координате. Граничное условие $u(a, t) = 0$ моделирует конец струны, зажатый в точке a . Граничное условие $u_x(a, t) = 0$ моделирует конец струны, закрепленный на невесомом кольце, которое без трения скользит по штанге, перпендикулярной равновесному положению струны. Начальное отклонение струны и ее начальная скорость задаются условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Простейшее уравнение параболического типа (уравнение диффузии или теплопроводности)

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

описывает, например, распространение тепла вдоль однородного прямого стержня, теплоизолированного по всей длине и обменивающегося теплом с окружающей средой только через его концы. В этом случае u соответствует отклонению температуры стержня от температуры окружающей среды. Граничное условие $u(a, t) = 0$ означает совпадение в точке a температуры стержня с температурой окружающей среды. Граничное условие $u_x(a, t) = 0$ моделирует конец стержня, на котором нет

теплообмена с окружающей средой. Начальное распределение температуры задается условием $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Простейшее уравнение эллиптического типа (двумерное уравнение Лапласа)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

описывает электростатический потенциал в области или стационарное распределение температуры. Мы будем рассматривать граничные задачи двух видов: задачу Дирихле, когда на границе области задано значение u , и задачу Неймана, когда на границе задано значение производной от u по внутренней нормали. Физически задача Дирихле ставится, когда на границе задан потенциал или температура, а задача Неймана, когда задана нормальная границе компонента напряженности электрического поля или плотность теплового потока.

Методы решения дифференциальных уравнений второго порядка, основанные на приведении к каноническому виду, изложены, например, в [ТС72, Год71]. Использование криволинейных координат описано в [МФ60]. Разделение переменных и метод Фурье рассмотрены [КГС62, Арс84, Сми81].

3.5. Примеры

59. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:

(а) $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0;$

(б) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0;$

(в) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - u = 0.$

Решение. (а) Уравнение везде имеет гиперболический тип, поскольку $D = \frac{9}{4} > 0$. Имеется два семейства характеристик, задаваемых уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = -1.$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$y = 2x + \xi \quad \text{и} \quad y = -x + \eta$$

соответственно. Здесь ξ, η — произвольные постоянные. Выражая их через x и y

$$\xi = y - 2x, \quad \eta = y + x,$$

видим, что они являются интегралами характеристических уравнений и их можно использовать в качестве характеристических переменных. Выражая производные от u по x и y через производные по ξ и η получаем канонический вид

$$u_{\xi\eta} + u_{\xi} + 2u_{\eta} + 3(\xi - \eta) = 0.$$

Решение. (б) Уравнение всюду имеет эллиптический тип, поскольку $D = -4 < 0$. Комплексное уравнение на характеристики

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2i$$

имеет решение

$$y = (1 + 2i)x + (\xi - i\eta).$$

Выбирая действительную $\xi = y - x$ и мнимую $\eta = 2x$ части интеграла в качестве новых переменных, получаем канонический вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 8u = 0.$$

Решение. (в) Уравнение параболического типа. Имеется одно семейство характеристик, которые задаются уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -1.$$

Одна из новых переменных является его интегралом $\xi = x + y$. В качестве второй можно взять любую независимую функцию, например $\eta = x$. При таком выборе получится канонический вид

$$u_{\eta\eta} + 2u_{\xi} + u_{\eta} - u = 0.$$

Напомним, что условие функциональной независимости состоит в неравенстве нулю якобиана перехода от переменных x, y к переменным ξ, η . При ином выборе переменной η канонический вид будет другим. ►

60. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности и привести в них к каноническому виду:

(а) Уравнение Трикоми $u_{xx} + y u_{yy} = 0$;

(б) $x u_{xx} + 2x u_{xy} + (x - 1) u_{yy} = 0$.

Решение. (а) В этом случае тип уравнения различен в разных областях плоскости. Вычисляя дискриминант и характеристики видим, что уравнение параболическое на оси x . Гиперболическое при $y < 0$ и имеет вид

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)} (u_{\xi} - u_{\eta}) = 0$$

в координатах $\xi = x + 2\sqrt{-y}$, $\eta = x - 2\sqrt{-y}$. Эллиптическое при $y > 0$ и имеет вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} u_{\eta} = 0$$

в координатах $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$.

Решение. (б) Уравнение гиперболическое при $x > 0$

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)} (u_{\xi} - u_{\eta}) = 0, \quad \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \quad \eta = y - x - 2\sqrt{x},$$

эллиптическое при $x < 0$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_{\eta} = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = 2\sqrt{-x},$$

параболическое при $x = 0$ и имеет канонический вид $u_{yy} = 0$. ►

61. Решить задачу Коши:

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad u(x, 0) = 3x^2, \quad u_y(x, 0) = 0.$$

Решение. Уравнение имеет гиперболический тип и в переменных $\xi = y - x$, $\eta = y + 3x$ приводится к каноническому виду $u_{\xi\eta} = 0$. Его общее решение имеет вид $u = f(\xi) + g(\eta)$, где f, g — произвольные функции. Чтобы определить их вид в частном случае, необходимо воспользоваться граничными условиями, которые удобно переписать в переменные ξ, η . В плоскости ξ, η граничные условия заданы на прямой $\eta = -3\xi$, получающейся из условия $y = 0$; x как функция ξ на этой прямой выражается формулой $x = \frac{\xi - \eta}{4} = \xi$. Отсюда получаем первое граничное условие в виде

$$u|_{y=0} = f(\xi) + g(-3\xi) = 3\xi^2. \quad (3.7)$$

Второе граничное условие имеет вид

$$u_y|_{y=0} = f'(\xi) + g'(-3\xi) = 0, \quad (3.8)$$

где штрих означает производную по аргументу функции, а в скобках стоит то его значение, при котором она вычисляется.

Дифференцируя условие (3.7) по ξ , имеем

$$f'(\xi) - 3g'(-3\xi) = 6\xi.$$

Из уравнений (3.7), (3.8) получим

$$f'(\xi) = \frac{3}{2}\xi \quad \text{и} \quad f(\xi) = \frac{3}{4}\xi^2.$$

Из уравнения (3.7) найдем

$$g(-3\xi) = \frac{9}{4}\xi^2.$$

Возвращаясь к переменной $\eta = -3\xi$, получаем

$$g(\eta) = \frac{\eta^2}{4}.$$

Искомое частное решение имеет вид

$$u(x, y) = \frac{3}{4}(y - x)^2 + \frac{1}{4}(y + 3x)^2 = y^2 + 3x^2. \quad \blacktriangleright$$

62. Показать, что в сферических координатах оператор Лапласа может быть записан в виде

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \hat{l}^2,$$

где $\hat{l}$ — оператор момента импульса:

$$\hat{l} = -i [\mathbf{r} \times \nabla], \quad \hat{l}^2 = -[\mathbf{r} \times \nabla][\mathbf{r} \times \nabla].$$

Решение. Запишем векторное произведение $[\mathbf{r} \times \nabla]$ в сферических координатах, используя его представление в форме определителя:

$$[\mathbf{r} \times \nabla] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \mathbf{e}_\theta &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}_\varphi &= (\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

— единичные взаимно-ортогональные векторы локального базиса, касательные линиям r, θ, φ . Раскрывая определитель, имеем

$$[\mathbf{r} \times \nabla]^2 = \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (3.10)$$

Здесь необходимо учесть, что дифференцирования левой скобки действуют и на единичные векторы $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ правой скобки. Из определений (3.9) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= \cos \theta \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \mathbf{e}_r, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} &= \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Раскрывая выражение (3.10) и учитывая формулы (3.11), получаем, что отличны от нуля только три слагаемых, дающих угловую часть оператора Лапласа:

$$[\mathbf{r} \times \nabla]^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad \blacktriangleright$$

63. Разделить переменные в уравнении Шрёдингера, если потенциал имеет вид

(а) в цилиндрических координатах

$$U = f(\rho) + \frac{g(\varphi)}{\rho^2} + h(z);$$

(б) в сферических координатах

$$U = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Решение. (а) Отыскивая решение в виде

$$\psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z),$$

делим уравнение Шрёдингера на $\psi(\rho, \varphi, z)$ и преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + f(\rho) \right) + \left(-\frac{1}{2\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{g(\varphi)}{\rho^2} \right) = \\ = \left(\frac{1}{2Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - h(z) \right) + E = c_1. \end{aligned}$$

Ясно, что равенство возможно, только если c_1 — постоянная величина. Аналогично, разделяя переменные ρ и φ , получаем уравнения на Φ и R :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + g(\varphi)\Phi = c_2 \Phi, \\ -\frac{1}{2} \rho \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR}{d\rho} + f(\rho)\rho^2 R - c_1 \rho^2 R = -c_2 R, \end{aligned}$$

где c_2 — тоже постоянная величина.

Решение. (б) Если искать решение в виде $\psi = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi)$, то на R , P и Φ получится система уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + h(\varphi)\Phi = c_1 \Phi, \\ -\frac{1}{2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + g(\theta)P + \frac{c_1 P}{\sin^2 \theta} = c_2 P, \\ -\frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{c_2 R}{r^2} = ER, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 — постоянные. ►

64. Разделить переменные в уравнении Шрёдингера для пространственного осциллятора с потенциалом вида

$$U = \frac{k r^2}{2}$$

(а) в декартовых координатах;

(б) в сферических координатах.

Решение. (а) Если искать решение в виде $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, то уравнение разделяется на три уравнения для одномерного гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} X + kx^2 X &= c_1 X, \\ \frac{d^2}{dy^2} Y + ky^2 Y &= c_2 Y, \\ \frac{d^2}{dz^2} Z + kz^2 Z &= (2E - c_1 - c_2) Z.\end{aligned}$$

Решение. (б) Если искать решение в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi),$$

то для R, P, Φ получим уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + c_2 \Phi &= 0, \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - (c_1 \sin^2 \theta + c_2) P &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (2Er^2 + c_1 - kr^4) R &= 0.\end{aligned}$$

►

65. Разделить переменные в уравнении Шрёдингера, используя параболические координаты, если поле представляет собой суперпозицию однородного и кулоновского полей:

$$U = -\frac{1}{r} + az.$$

Решение. Уравнение Шрёдингера в параболических координатах имеет вид (см. задачу (в))

$$\frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2 \left[E + \frac{2}{\xi + \eta} - \frac{a}{2} (\xi - \eta) \right] \psi = 0.$$

Отыскивая решение в виде

$$\psi = f_1(\xi) f_2(\eta) \Phi(\varphi),$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + c_1 \Phi &= 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{df_1}{d\xi} \right) + \left(\frac{E}{2} \xi - \frac{c_1}{4\xi} - a \frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{2} + c_2 \right) f_1 &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df_2}{d\eta} \right) + \left(\frac{E}{2} \eta - \frac{c_1}{4\eta} + a \frac{\eta^2}{4} + \frac{1}{2} - c_2 \right) f_2 &= 0.\end{aligned}$$

►

66. Найти выражение для оператора Лапласа в криволинейной неортогональной системе координат.

Решение. Задача на собственные значения оператора Лапласа $\Delta\psi = \lambda\psi$ с нулевыми граничными условиями на бесконечности эквивалентна вариационному принципу $S[\psi] = \min$ для функционала

$$S[\psi] = \int [(\nabla\psi)^2 + \lambda\psi^2] d^n x.$$

Произведем невырожденное преобразование координат, т. е. перейдем от переменных x к новым переменным y : $x_i = x_i(y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Под невырожденностью понимается отличие от нуля якобиана преобразования:

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0.$$

Квадрат длины интервала и квадрат градиента преобразуются следующим образом:

$$ds^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} dy_j dy_k, \quad (\nabla\psi)^2 = \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_l}.$$

Поскольку, с другой стороны, по определению метрического тензора $ds^2 = g_{jk} dy_j dy_k$, мы можем выразить метрический тензор g_{jk} через частные производные функций x_i ,

$$g_{jk} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}.$$

Значит, квадрат градиента функции ψ можно записать через тензор, обратный метрическому:

$$(\nabla\psi)^2 = g_{jl}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_l},$$

а определитель метрического тензора равен

$$g = \det(g_{jk}) = |J|^2.$$

В новой системе координат функционал запишется как

$$S = \int \left(g_{ik}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_k} + \lambda \psi^2 \right) \sqrt{g} d^n y.$$

Остается его проварьировать, считая, что вариация функции ψ обращается в нуль на бесконечности, и приравнять вариацию нулю:

$$\delta S = 2 \int \delta \psi \left[-\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(g_{ik}^{-1} \sqrt{g} \frac{\partial \psi}{\partial y_k} \right) + \lambda \psi \right] \sqrt{g} d^n y = 0.$$

При выводе последнего равенства мы проинтегрировали по частям, а внеинтегральный член обратился в нуль из-за граничных условий. В силу

произвольности вариации $\delta\psi(x)$ должно обращаться в нуль выражение в квадратных скобках. Отсюда получается формула для лапласиана

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_i} g_{ik}^{-1} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

67. Решить граничную задачу

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ 0 \leq x \leq L, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Рассмотреть частный случай

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

Решение. Решение задачи методом Фурье распадается на два этапа.

Вначале находим частные решения, для которых выполняются только граничные условия по координате x . Отыскивая $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

и разделяя переменные, имеем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda, \quad (3.12)$$

где λ — произвольная постоянная. Общее решение уравнения

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \lambda = 0 \quad (3.13)$$

при $\lambda > 0$ имеет вид

$$X = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Потребуем, чтобы для $X(x)$ выполнялись те же граничные условия, что и на решение задачи $u(x, t)$:

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (3.14)$$

Это возможно, если

$$A = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда получаем спектр допустимых значений λ и пространственную форму решения номер n :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Нарисуйте их графики при $n = 1, 2, 3$. Подставляя λ_n в уравнение (3.12), находим зависимость от времени решения номер n :

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L},$$

где A_n, B_n — произвольные постоянные.

Собственные решения $X_n(x)$ образуют полный базис. Общее решение задачи может быть записано как линейная комбинация базисных решений:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t). \quad (3.15)$$

На втором этапе амплитуды A_n, B_n выражаются через начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. При $t = 0$, используя представление решения (3.15), имеем

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad (3.16)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n X_n(x). \quad (3.17)$$

Собственные решения задачи (3.13), (3.14) взаимно ортогональны:

$$\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}. \quad (3.18)$$

Умножая равенства (3.16), (3.17) на $X_m(x)$, интегрируя от нуля до L и учитывая ортогональность собственных решений, имеем

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) X_m(x) dx, \quad B_m = \frac{2}{\lambda_m L} \int_0^L \psi(x) X_m(x) dx. \quad (3.19)$$

Частное решение равно

$$u(x, t) = \frac{L}{2\pi c} \sin \frac{2\pi ct}{L} \sin \frac{2\pi x}{L}. \quad \blacktriangleright$$

68. Решить задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\ 0 \leq x \leq L, \quad u(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \sin \frac{5\pi x}{2L}, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2L}. \end{aligned}$$

Попытайтесь решить эту задачу при условии $u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2L}$.

Решение. Решение задачи выполняется в той же последовательности, что и решение задачи 67. Отличие имеется только при решении спектральной задачи на функцию $X(x)$, изменившейся из-за граничных условий

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) &= X'(L) = 0. \end{aligned}$$

Из общего решения

$$X = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x,$$

используя граничные условия, получаем уравнение на λ :

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} L = 0.$$

Его решения равны

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$X_n(x) = \sin \frac{2n-1}{2L} \pi x.$$

Нарисуйте их графики при $n = 1, 2, 3$. Число $\lambda = 0$ не является собственным значением, поскольку ему соответствует нулевое решение X . Решение дается формулами (3.15)–(3.17). В частном случае, вычисляя коэффициенты, получаем

$$u(x, t) = \cos \frac{5\pi ct}{2L} \sin \frac{5\pi x}{2L} + \frac{2L}{\pi} \sin \frac{\pi ct}{2L} \sin \frac{\pi x}{2L}.$$

При $u_t(x, 0) = \cos(\pi x/(2L))$ задача не имеет решения. Причина в том, что такое начальное условие не согласовано с граничным условием $u(0, t) = 0$, из которого следует, что должно быть $u_t(0, t) = 0$ для любого момента времени. ►

69. Решить задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \\ 0 \leq x \leq L, \quad u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= x, \quad u_t(x, 0) = 1. \end{aligned}$$

Описать движение струны.

Решение. Спектральная задача

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

имеет нетривиальные решения

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L} x, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

В этом случае $\lambda = 0$ является собственным значением, которому соответствует собственная функция $X_0 = 1$. Зависимость этого собственного решения от времени носит неколебательный характер, так как из $T'' = 0$ следует $T = A_0 + B_0 t$. Общее решение задачи имеет вид

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right) \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Используя начальные условия, видим, что A_n, B_n являются коэффициентами разложения в ряд Фурье этих начальных условий. Вычисляя их, получаем

$$u(x, t) = t + \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi}{L} t \cos \frac{(2n+1)\pi}{L} x.$$

Струна колеблется относительно среднего положения, которое смещается с постоянной скоростью. Заметим, что начальное условие не удовлетворяет граничному условию: $u_x(0, 0) = u_x(L, 0) = 1 \neq 0$. Хотя ряд сходится к решению, для вычисления производной по x его нельзя дифференцировать почленно. Действительно, ряд, получающийся при почленном дифференцировании, расходится при $t = x = 0$. ►

70. Струна длины L с закрепленными концами в начальный момент времени имеет параболическую форму с максимальным отклонением в ее середине, равным h . Начальная скорость струны равна нулю. Найти зависимость отклонения от времени.

Решение. Краевая задача имеет вид

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \frac{4hx(L-x)}{L^2}, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение было получено в задаче 67. Из равенства нулю начальной скорости следует, что все B_n равны нулю. Коэффициенты A_n вычисляются разложением $u(x, 0)$ в ряд Фурье:

$$\frac{4hx(L-x)}{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Отсюда имеем

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi ct}{L} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L}. \quad \blacktriangleright$$

71. В начальный момент времени струну с закрепленными концами длины L отклонили на расстояние h в точке x_0 и отпустили. Сформулировать граничную задачу и решить ее.

Решение. Граничная задача отличается от предыдущей только начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x}{x_0} h, & x < x_0; \\ \frac{L-x}{L-x_0} h, & x > x_0. \end{cases}$$

Решение получается разложением начального отклонения в ряд Фурье

$$u(x, t) = \frac{2hL^2}{\pi^2 x_0(L-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \cos \frac{n\pi c}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (3.20)$$

Построим теперь качественную картину движения струны. Решение периодически по времени с периодом $\tau = \frac{2L}{c}$. При $t = \frac{\tau}{4}$ отклонение струны от равновесного положения равно нулю. Получим форму струны при $0 < t < \frac{\tau}{4}$. Выразим произведение тригонометрических функций через сумму

$$\cos \frac{n\pi c}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{n\pi}{L} (x - ct) + \sin \frac{n\pi}{L} (x + ct) \right). \quad (3.21)$$

Решение, задаваемое формулой (3.20), справедливо на всей прямой и периодически с периодом $2L$ по координате. Это, очевидно, относится и к начальному отклонению струны, хотя оно задано только на отрезке $0 < x < L$. Ясно, однако, что сумма ряда (3.20) нечетна относительно точки $x = 0$. При $t = 0$ этот ряд является разложением функции, полученной нечетным продолжением начального отклонения с отрезка $0 < x < L$ через точку $x = 0$ на отрезок $-L < x < 0$ и последующим периодическим повторением на всю прямую. Условимся далее называть начальным отклонением полученную функцию.

Если выражение (3.21) подставить в ряд (3.20) и собрать слагаемые, содержащие $x - ct$, то получившаяся сумма представляет собой разложение начального отклонения половинной амплитуды, сдвинутое вправо на расстояние ct . Оставшиеся слагаемые дают половину начального отклонения, сдвинутого влево на то же расстояние. Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u(x - ct, 0) + u(x + ct, 0)).$$

Например, для $x_0 = \frac{L}{2}$ начальное условие представляет собой пилообразную функцию. Графически, складывая две пилообразные слегка сдвинутые кривые, легко получить, что при $t < \frac{\tau}{4}$ струна имеет форму, изображенную на рис. 3.1. Горизонтальный участок струны, расширяясь, опускается со скоростью равной $\frac{4h}{\tau}$.

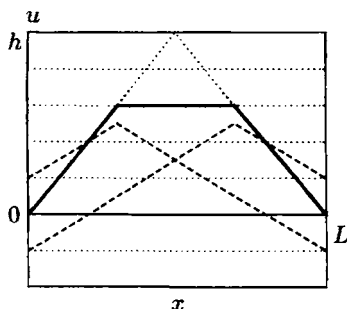


Рис. 3.1. Форма струны: — — начальное условие $u(x, 0)$; — — $u(x, \frac{L}{3})$; --- $\frac{1}{2} u(x \pm \frac{L}{3}, 0)$

72. Решить граничную задачу для неоднородного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = b \operatorname{sh} x, \\ 0 \leq x \leq L, \quad u(0, t) = u(L, t) = u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$$

Решение. Решение неоднородного уравнения, так же как и решение однородного уравнения, можно искать в виде разложения по базисным решениям граничной задачи, которые для данных граничных условий были получены в задаче 67. Решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.22)$$

удовлетворяет граничным условиям. Чтобы определить $A_n(t)$, разложим $b \operatorname{sh} x$ в ряд по базисным решениям:

$$b \operatorname{sh} x = -2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n\pi \operatorname{sh} L}{(n\pi)^2 + L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.23)$$

Подставляя выражения (3.22), (3.23) в уравнение и учитывая ортогональность функций $\sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 A_n = -2b \frac{(-1)^n n\pi \operatorname{sh} L}{(n\pi)^2 + L^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

с начальными условиями, следующими из начальных условий на $u(x, t)$:

$$A_n(0) = \left. \frac{dA_n}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

Решая задачу (3.24), (3.25) и подставляя $A_n(t)$ в (3.22), получаем

$$u(x, t) = 2bL^2 \operatorname{sh} L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi((n\pi)^2 + L^2)} \left(\cos \frac{n\pi t}{L} - 1 \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.26)$$

Иной способ решения задачи состоит в разбиении ее на две задачи. Вначале решим стационарную граничную задачу

$$-w_{xx} = b \operatorname{sh} x, \quad w(0) = w(L) = 0.$$

Затем методом Фурье найдем решение граничной задачи для однородного уравнения:

$$v_{tt} - v_{xx} = 0, \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad v(x, 0) = -w(x), \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Подстановкой убеждаемся, что $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ удовлетворяет как начальным, так и граничным условиям исходной задачи. Окончательно имеем

$$u(x, t) = b \left(\frac{x}{L} \operatorname{sh} L - \operatorname{sh} x \right) + \\ + 2bL^2 \operatorname{sh} L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi((n\pi)^2 + L^2)} \cos \frac{n\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.27)$$

С физической точки зрения это решение означает следующее: $w(x)$ задает стационарный прогиб струны под действием внешней силы $b \operatorname{sh} x$; $v(x, t)$ описывает колебания относительно стационарного прогиба. Заметим, что стационарный прогиб струны в (3.27) получен в явном виде, а в (3.26) в виде разложения в ряд. ►

73. Решить краевую задачу на отрезке $0 \leq x \leq L$:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} x, & x < \frac{L}{2}; \\ L - x, & x > \frac{L}{2}. \end{cases}$$

Сравнить решение этой задачи с задачей 71.

Решение. Разделяя переменные, видим, что спектральная задача получается такой же, как и в задаче 67. Зависимость от времени получается из уравнения

$$T'_n = -\lambda_n T_n$$

и теперь носит экспоненциально затухающий характер:

$$T_n = A_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a^2 t \right].$$

Разложение начальных условий в ряд Фурье совпадает с полученным в задаче 67. В результате имеем

$$u(x, t) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \exp \left[- \left(\frac{(2n+1)\pi}{L} \right)^2 a^2 t \right] \sin \frac{2n+1}{L} \pi x.$$

Заметим, что решение симметрично относительно середины отрезка: $u(x, t) = u(L - x, t)$ и это свойство есть следствие симметрии начальных условий. ►

74. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \\ 0 \leq x \leq L, \quad u(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2L}.$$

Решение. Задачу можно решать, так же как и задачу 72, разложением в ряд по базисным функциям. Другой способ состоит в том, чтобы сделать подстановку $u = e^{-\beta t} v$ и для v получить однородное уравнение диффузии с теми же граничными и начальными условиями, что и для u . Решая задачу для v методом Фурье, получаем

$$u(x, t) = \exp \left[-\beta t - \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 a^2 t \right] \sin \frac{\pi x}{2L}. \quad \blacktriangleright$$

75. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin \frac{\pi x}{L}, \\ 0 \leq x \leq L, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

Решение. Задачу можно решать, так же как и задачу 72, разложением в ряд по базисным функциям. Другой способ состоит в том, чтобы искать решение в виде

$$u = v(x, t) + w(x),$$

где $w(x)$ — решение задачи для стационарного уравнения теплопроводности:

$$a^2 w_{xx} - \beta w + \sin \frac{\pi x}{L} = 0, \quad w(0) = w(L) = 0.$$

$w(x)$ задает стационарное распределение температуры вдоль стержня. Частное решение линейного неоднородного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$w = \left(\left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 + \beta \right)^{-1} \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Подставляя $v + w$ в исходные уравнения и предельные условия, получаем для $v(x, t)$ задачу

$$v_t = a^2 v_{xx} - \beta v, \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad v(x, 0) = -w(x),$$

решая которую тем же способом, что и задачу 74, получаем

$$u = \left(\left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 + \beta \right)^{-1} \left[1 - \exp \left[- \left(\beta + \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 \right) t \right] \right] \sin \frac{\pi x}{L}. \quad \blacktriangleright$$

76. В начальный момент времени в шаре имеется сферически симметричное распределение температуры $u(r, 0) = f(r)$. Найти зависимость распределения температуры от времени, если температура поверхности шара равна нулю. Рассмотреть случай $f(r) = T_0$.

Решение. Уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u$$

в сферических координатах записывается в виде

$$u_t = \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (3.28)$$

В операторе Лапласа учтено отсутствие зависимости в задаче от угловых переменных. Граничные и начальные условия имеют вид

$$u(R, t) = 0, \quad u(r, 0) = f(r).$$

Вначале ищем базисные решения разделением переменных в виде

$$u(r, t) = P(t)Q(r). \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в уравнение (3.28), получаем

$$\frac{P'(t)}{a^2 P(t)} = \frac{1}{Q} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dQ}{dr} = -\lambda. \quad (3.30)$$

Для функции Q должны выполняться граничные условия. Одно из них следует непосредственно из граничного условия на функцию u на поверхности шара:

$$Q(R) = 0. \quad (3.31)$$

Второе граничное условие не столь очевидно и порождено тем, что уравнение на $Q(r)$

$$\frac{d^2 Q}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \frac{dQ}{dr} + \lambda Q = 0 \quad (3.32)$$

имеет особенность в точке $r = 0$, и поэтому его общее решение расходится в этой точке. Поскольку нас интересуют только ограниченные решения, потребуем выполнения второго граничного условия:

$$Q(0) < \infty. \quad (3.33)$$

Решение уравнения (3.32) может быть найдено следующим способом. Будем искать его в виде

$$Q(0) = p(r)q(r) \quad (3.34)$$

и постараемся подобрать $p(r)$ так, чтобы в уравнении на $q(r)$ не было первой производной. Подставляя (3.34) в (3.32), получаем условие на $p(r)$ и уравнение на q :

$$p' + \frac{1}{r} p = 0, \quad pq'' + \left(p'' + \frac{2}{r} p' \right) q + \lambda pq = 0.$$

Уравнение на p однородно и имеет решение $p = \frac{1}{r}$. Уравнение на q упрощается до элементарного:

$$q'' + \lambda q = 0.$$

Общее решение уравнения (3.32) при $\lambda > 0$ имеет вид

$$Q(r) = \frac{A \cos \sqrt{\lambda} r + B \sin \sqrt{\lambda} r}{r}.$$

Собственные решения, удовлетворяющие граничным условиям (3.31), (3.33), и соответствующие им собственные значения равны:

$$Q_n(r) = \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{R}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Собственные значения $\lambda < 0$ невозможны (почему?). Зависимость собственного решения от времени получается из уравнения (3.30):

$$T_n(t) = a_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi a}{R} \right)^2 t \right],$$

а общее решение имеет вид

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(t) Q_n(r).$$

Коэффициенты a_n определяются из начальных условий. Чтобы для их вычисления воспользоваться ортогональностью тригонометрических функций, умножим ряд на r и положим $t = 0$. Тогда

$$r f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi r}{R}, \quad \text{где} \quad a_n = \frac{2}{R} \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{n\pi \rho}{R} d\rho.$$

В частном случае $f(r) = T_0$ интеграл вычисляется и решение имеет вид

$$u(r, t) = \frac{2RT_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp \left[- \left(\frac{n\pi a}{R} \right)^2 t \right] \sin \frac{n\pi r}{R}. \quad \blacktriangleright$$

77. Найти распределение температуры в шаре, если в начальный момент времени в его центре включается точечный источник интенсивности Q . Начальная температура шара и температура его поверхности равны нулю.

Решение. Распространение тепла в пространстве с распределенными источниками описывается уравнением

$$u_t = \frac{\kappa}{c} \Delta u + \frac{F}{c}.$$

Здесь u — температура, κ — теплопроводность, c — теплоемкость единицы объема вещества, F — интенсивность тепловыделения в единице объема. В нашем частном случае получается граничная задача с плотностью тепловыделения, которая описывается δ -функцией Дирака:

$$u_t = \frac{\kappa}{c} \Delta u + \frac{Q\delta(r)}{c}, \quad u(r, 0) = 0, \quad u(R, t) = 0.$$

Разделим задачу на две: стационарную

$$\Delta w = -\frac{Q\delta(r)}{\kappa}, \quad w(R) = 0, \quad (3.35)$$

и нестационарную

$$v_t = \frac{\kappa}{c} \Delta v, \quad v(R, t) = 0, \quad v(r, 0) = -w(r).$$

Их сумма является решением исходной задачи. Решим стационарную задачу. При $r \neq 0$ уравнение на w однородно. Записывая радиальную часть оператора Лапласа, имеем

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dw}{dr} = 0.$$

Интегрируя дважды, получаем

$$w = \frac{c_1}{r} + c_2.$$

Константу c_1 определим, интегрируя уравнение (3.35) по шару радиуса $r < R$. Интеграл от его правой части равен $-\frac{Q}{\kappa}$, а интеграл от левой преобразуется в интеграл по сфере от $\text{grad } w$ использованием теоремы Гаусса—Остроградского, поскольку $\Delta = \text{div grad}$. Отсюда имеем

$$c_1 = \frac{Q}{4\pi\kappa}.$$

c_2 определяется из граничного условия $w(R) = 0$. Окончательно получаем

$$w(r) = \frac{Q}{4\pi\kappa} \frac{R-r}{Rr}.$$

Нестационарная часть задачи решается разделением переменных, как и в задаче 76. В результате получаем

$$u(r, t) = \frac{Q}{4\pi\kappa} \frac{R-r}{Rr} - \frac{Q}{2\pi^2\kappa r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left[-\left(\frac{n\pi a}{R} \right)^2 t \right] \sin \frac{n\pi r}{R}. \quad \blacktriangleright$$

78. Решить краевую задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(0, y) = u(L, y) = 0, \quad u(x, 0) = A \frac{(L-x)x}{L^2}, \quad u(x, \infty) = 0.$$

Сравнить с задачами 70 и 93.

Решение. Отыскивая частное решение в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$ и разделяя переменные, получаем

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Спектральная задача по координате x получается такой же, как и в задаче 67. Зависимость от y получается из уравнения

$$Y_n'' = \lambda_n Y_n,$$

решение которого представляется в виде суммы экспонент:

$$Y_n = A_n \exp \left[-\left(\frac{n\pi}{L} \right) x \right] + B_n \exp \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) x \right].$$

Записывая решение в виде суммы ряда, из граничного условия при $y \rightarrow \infty$ имеем $B_n = 0$ для всех n . Из граничного условия при $y = 0$ вычисляем A_n и окончательно имеем

$$u(x, t) = \frac{8A}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \exp \left[-\frac{(2n+1)\pi}{L} y \right] \sin \frac{2n+1}{L} \pi x. \quad \blacktriangleright$$

79. Найти распределение потенциала между соосными цилиндрами радиусов $a < b$ для задачи Дирихле:

$$u(a, \varphi) = c, \quad u(b, \varphi) = h \cos \varphi.$$

Решение. Задачи с цилиндрической симметрией удобно решать в цилиндрических координатах. Уравнение Лапласа имеет в них вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.36)$$

Здесь учтено отсутствие в задаче зависимости от координаты z . Ищем частные решения в виде

$$u = R(r)\Phi(\varphi). \quad (3.37)$$

Разделяя переменные, получаем уравнения на Φ и R :

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \lambda = 0. \quad (3.39)$$

Общее решение уравнения (3.38) имеет вид

$$\Phi = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi \quad \text{при } \lambda > 0,$$

$$\Phi = A e^{\sqrt{-\lambda} \varphi} + B e^{-\sqrt{-\lambda} \varphi} \quad \text{при } \lambda < 0.$$

Поскольку решение u должно быть однозначным, изменение φ на 2π не должно менять значения Φ . При $\lambda < 0$ периодически только нулевое

решение. При $\lambda > 0$ функция Φ периодична с периодом 2π , если $\lambda = m^2$ где $m = 0, 1, \dots$. Собственные решения имеют вид

$$\Phi_m = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi.$$

Уравнение (3.39) однородно. Отыскивая его решение при $\lambda = m^2$ в виде $R = r^\alpha$, получаем

$$\alpha = \pm m.$$

При $m \neq 0$ имеется два линейно независимых решения: r^m и r^{-m} . При $m = 0$ общее решение получается прямым интегрированием:

$$\Phi_0 = A_0 \ln r + B_0.$$

Таким образом, общее решение может быть записано в виде суммы

$$u(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(A_m r^m + \frac{A_{-m}}{r^m} \right) \cos m\varphi + \left(B_m r^m + \frac{B_{-m}}{r^m} \right) \sin m\varphi \right].$$

Коэффициенты A_m, B_m вычисляются разложением граничных условий в ряды Фурье.

Для заданных граничных условий ряд упрощается до вида

$$u(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \left(A_1 r + \frac{A_{-1}}{r} \right) \cos \varphi.$$

При $r = a$ имеем

$$A_0 \ln a + B_0 = c_1, \quad A_1 a + \frac{A_{-1}}{a} = 0.$$

При $r = b$ имеем

$$A_0 \ln b + B_0 = 0, \quad A_1 b + \frac{A_{-1}}{b} = h.$$

Вычисляя коэффициенты из получившейся системы уравнений, окончательно получаем

$$u(r, \varphi) = c \frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a} + h \frac{b(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)r} \cos \varphi. \quad \blacktriangleright$$

80. Найти стационарный прогиб прямоугольной мембраны размера $a \times b$ с закрепленной границей, если на мембрану действует однородное давление P , а ее натяжение равно T .

Решение. Уравнение равновесия мембраны имеет вид

$$-\Delta u = \frac{P}{T}. \quad (3.40)$$

Смещение u на границе прямоугольника равно нулю. Направим ось x вдоль стороны длины a , а ось y вдоль второй стороны.

Будем искать решение в виде разложения в ряд по собственным функциям оператора Лапласа для этой граничной задачи. Найдем собственные функции. Задача на собственные значения

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad (3.41)$$

решается разделением переменных. Собственные функции и собственные значения равны

$$u_{n,m} = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad \lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,$$

где n, m — целые положительные числа.

Раскладывая правую часть уравнения (3.40) в двойной ряд Фурье:

$$\frac{P}{T} = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} u_{n,m}, \quad (3.42)$$

получим ненулевые коэффициенты

$$c_{2k+1, 2l+1} = \frac{4}{\pi^2} \frac{P}{T} \frac{2}{(2k+1)} \frac{2}{(2l+1)}, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

Ищем решение уравнения (3.40) в виде такого же разложения

$$u = \sum_{n,m=1}^{\infty} d_{n,m} u_{n,m}. \quad (3.43)$$

Подставляя разложения (3.42) и (3.43) в уравнение и используя взаимную ортогональность функций $u_{n,m}$, получим $d_{n,m} = \frac{c_{n,m}}{\lambda_{n,m}}$. Окончательно имеем

$$u(x, y) = \frac{16}{\pi^2} \frac{P}{T} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{a} \sin \frac{(2l+1)\pi y}{b}}{(2k+1)(2l+1) \left[\left(\frac{(2k+1)\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2l+1)\pi}{b}\right)^2 \right]}. \quad \blacktriangleright$$

3.6. Задачи

81. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:

- (а) $u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0$;
- (б) $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$;
- (в) $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0$;
- (г) $\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;
- (д) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x + ye^{y/x} = 0$.

82. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

$$xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$$

и привести в них к каноническому виду.

83. Найти условие эллиптичности уравнения Чаплыгина

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\varphi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\varphi_y) = 0,$$

где $\rho = \rho(\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2})$.

84. Привести к каноническому виду и избавиться от первых производных:

(а) $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$;

(б) $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$.

85. Найти общее решение уравнения

$$(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0.$$

86. Решить задачу Коши:

$$4y^2u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x).$$

87. Написать выражение для оператора Лапласа в ортогональной системе координат.

88. Получить выражения для оператора Лапласа:

(а) в цилиндрических координатах (z, ρ, φ)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z;$$

(б) в сферических координатах (r, θ, φ)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

(в) в параболических координатах (ξ, η, φ) :

$$0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta);$$

(г) в эллипсоидальных координатах (ξ, η, φ) :

$$1 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi,$$

$$z = \frac{1}{2}\xi\eta.$$

89. Получить выражения для градиента, дивергенции, ротора

(а) в цилиндрических координатах;

(б) в сферических координатах.

90. Преобразовать в цилиндрические и сферические координаты оператор проекции момента импульса на ось z :

$$l_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

91. Разделить переменные и найти собственные решения уравнения Шрёдингера для свободного движения ($U = 0$) в прямоугольном параллелепипеде с размерами по декартовым координатам $a \times b \times c$ при условии равенства решения нулю на границе параллелепипеда.

92. Найти колебания струны, левый конец которой закреплен, а правый, свободно, без трения скользящий по штанге, в начальный момент отклонен по штанге на расстояние h .

93. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

$$0 \leq x \leq L, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{cx(L-x)}{L^2}.$$

Сравнить решение этой задачи с задачей 70.

94. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

$$0 \leq x \leq L, \quad u(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = Ax.$$

95. Найти распределение потенциала в полуполосе $0 < x < \infty$, $0 < y < L$.

$$u(x, 0) = u_y(x, L) = 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad u(\infty, y) = 0.$$

96. Найти распределение потенциала между соосными цилиндрами радиусов $a < b$ для задачи Дирихле:

$$u(a, \varphi) = 0, \quad u(b, \varphi) = Ab^2 \sin^2 \varphi.$$

3.7. Ответы

81. (а) Уравнение имеет гиперболический тип на всей плоскости и приводится к виду $u_{\xi\eta} = 0$ в переменных $\xi = x + \operatorname{arctg} y$, $\eta = x - \operatorname{arctg} y$.
 (б) Уравнение всюду имеет гиперболический тип и приводится к виду $u_{\xi\eta} = 0$ в координатах $\xi = x + y - \cos x$, $\eta = -x + y - \cos x$.

- (в) Уравнение имеет эллиптический тип и приводится к виду $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$ в переменных $\xi = y$, $\eta = \operatorname{arctg} x$.
 (г) Уравнение имеет эллиптический тип. Приводится к виду $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$ в координатах $\xi = y$, $\eta = \ln x$.
 (д) Уравнение параболическое всюду и приводится к виду

$$u_{\eta\eta} + 2 \frac{\xi^2}{\eta^2} u_{\xi} + \frac{1}{\eta} e^{\xi} = 0$$

в координатах $\xi = y/x$, $\eta = y$.

82. Уравнение гиперболическое во втором и четвертом квадрантах ($xy < 0$) и имеет там вид

$$u_{\xi\eta} - \frac{3}{\xi^2 - \eta^2} (\eta u_{\xi} - \xi u_{\eta}) = 0$$

в координатах

$$\xi = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}, \quad \eta = \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}.$$

Эллиптическое в первом и третьем квадрантах ($xy > 0$) и имеет там вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 3 \left(\frac{1}{\xi} u_{\xi} + \frac{1}{\eta} u_{\eta} \right) = 0$$

в координатах

$$\xi = \sqrt{|y|}, \quad \eta = \sqrt{|x|}.$$

На осях координат, разделяющих области параболического и гиперболического поведения, уравнение вырождается в параболическое. Канонический вид получается делением на ненулевую координату.

83. $\left(\rho + \rho' \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \right) \rho > 0$.

84. (а) Приводя к каноническому виду и отыскивая u переменных $\xi = 2x + y$, $\eta = x$ в виде

$$u = w(\xi, \eta) \exp \frac{5\xi + 3\eta}{2},$$

получаем

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} - \frac{15}{2} w = 0.$$

- (б) В переменных $\xi = x - y$, $\eta = x + y$ возможна замена

$$u = w(\xi, \eta) \exp \left(-\frac{\xi}{2} \right),$$

приводящая уравнение к виду

$$w_{\xi\eta} - w = 0.$$

85. Избавьтесь от первых производных.

$$u = \frac{f(x) + g(y)}{x - y}, \text{ где } f \text{ и } g - \text{произвольные функции.}$$

$$86. u(x, y) = \varphi\left(x - \frac{2y^3}{3}\right) + \frac{1}{2} \int_{x - \frac{2y^3}{3}}^{x+2y} \psi(x') dx'.$$

$$87. \Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right].$$

$$88. (a) \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$$(б) \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

$$(в) \Delta = \frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

$$(г) \Delta = \frac{4}{\xi^2 - \eta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{4}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

$$89. (a) \quad \begin{aligned} \operatorname{grad} U &= e_z \frac{\partial U}{\partial z} + e_\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + e_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= e_z \left(\frac{1}{\rho} A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) + \\ &\quad + e_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + e_\varphi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right), \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

$$(б) \quad \begin{aligned} \operatorname{grad} U &= e_r \frac{\partial U}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= e_r \left(\frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} A_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) + \\ &\quad + e_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} A_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) + \\ &\quad + e_\varphi \left(\frac{1}{r} A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{2}{r} A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} A_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

$$90. l_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

91. Ненормированные волновые функции имеют вид

$$\psi_{n,m,l} = \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{l\pi z}{c} \right).$$

Соответствующие им энергии равны

$$E_{n,m,l} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \right).$$

Числа n, m, l — целые положительные.

92. Задача может быть решена стандартной последовательностью действий — решением спектральной задачи, представлением решения в виде суммы собственных колебаний и вычислением коэффициентов разложения по начальным данным. Ответ получается из формулы (3.20) заменой вначале L на $2L$ а затем подстановкой $x_0 = L$. Почему?

$$93. u(x, t) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \exp \left[- \left(\frac{(2n+1)\pi}{L} \right)^2 a^2 t \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L}.$$

$$94. u(x, t) = \frac{8AL}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \exp \left[- \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} \right)^2 a^2 t \right] \sin \frac{2n+1}{2L} \pi x.$$

$$95. u(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp \left[- \frac{(2n+1)\pi}{2L} x \right] \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} y,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} y \right) dy.$$

$$96. u(r, \varphi) = \frac{Ab^2}{2} \frac{\ln r - \ln a}{\ln b - \ln a} - \frac{Ab^4(r^4 - a^4)}{2(b^4 - a^4)r^2} \cos 2\varphi.$$

Автомодельность и нелинейные уравнения в частных производных

4.1. Автомодельность

Говорят, что дифференциальное уравнение в частных производных для функции двух независимых переменных x, t имеет *автомодельное решение*, если существуют такие функции времени $A(t)$ и $l(t)$, что решение $u(x, t)$ может быть представлено в виде:

$$u(x, t) = A(t) f\left(\frac{x}{l(t)}\right).$$

Решение задачи сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для $f(\xi)$. В физических задачах обычно можно найти автомодельную подстановку, используя анализ размерностей.

Важным частным случаем автомодельных решений являются *бегущие волны*, т. е. решения вида

$$u(x, t) = f(x - Vt), \quad (4.1)$$

где f — функция одной переменной, а $V = \text{const}$. Действительно, подстановка $\zeta = e^x$, $\tau = e^t$ приводит (4.1) к виду $u(\zeta, \tau) = g(\zeta\tau^{-V})$, где $f(\xi) = g(e^\xi)$.

4.2. Нелинейные уравнения в частных производных

Помимо автомодельных решений, играющих важную роль в физике, для нелинейных уравнений в частных производных, вообще говоря, не существует общих методов решения. Однако иногда удается найти широкий класс решений или даже общее решение нелинейного уравнения, превратив его заменой переменных в линейное. Таких преобразований известно немного.

Для некоторых важных в физике эволюционных уравнений удастся определить зависимость от времени интегральных характеристик решений без явного их построения. Это, в свою очередь, позволяет увидеть существенные черты решений, такие, как образование особенности за конечное время.

Особое место занимают нелинейные уравнения в частных производных первого порядка. Оказывается, что решение задачи Коши для такого уравнения сводится к нахождению общего решения некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим для простоты случай двух переменных x и y . Уравнение рассматриваемого типа записывается в виде:

$$F(u, p, q, x, y) = 0, \quad (4.2)$$

где F — некоторая заданная функция, предполагаемая достаточно гладкой, $u = u(x, y)$ — искомое решение, и $p = u_x$, $q = u_y$.

Дифференцируя равенство (4.2) по x и y и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} q = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} p,$$

получим соотношения:

$$\begin{aligned} F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} &= -F_x - pF_u, \\ F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= -F_y - qF_u. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из них следует, что вдоль любой кривой $(x(\tau), y(\tau))$, удовлетворяющей уравнениям:

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{y} = F_q, \quad (4.4)$$

где точка обозначает производную по параметру τ , функции p и q изменяются так, что

$$\dot{p} = -F_x - pF_u, \quad \dot{q} = -F_y - qF_u. \quad (4.5)$$

Производная функции $u(x, y)$ вдоль кривой (4.4) также может быть выражена через u , p , q и x , y :

$$\dot{u} = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = pF_p + qF_q. \quad (4.6)$$

Уравнения (4.4)–(4.6) образуют уже замкнутую систему. Она определяет семейство кривых в пятимерном пространстве с координатами (u, p, q, x, y) . Эти кривые называются характеристиками уравнения (4.2). Общее решение системы (4.4)–(4.6) зависит от пяти произвольных постоянных. Одна соответствует произволу в выборе начала отсчета параметра τ и фиксируется из соображений удобства. Начальные данные для уравнения (4.2) задаются на какой-нибудь кривой Γ в плоскости (x, y) . При этом определено как значение самой функции $u(x, y)|_\Gamma$, так и производная вдоль этой кривой, то есть некоторая линейная комбинация p и q . Таким образом, начальные условия устраняют произвол еще в двух постоянных. Наконец, учет исходного соотношения (4.2) оставляет свободной только одну константу. Получившееся однопараметрическое семейство

кривых при проектировании на подпространство (u, x, y) образует график искомого решения, то есть поверхность $u = u(x, y)$. Аналитическое выражение может быть найдено исключением параметра τ и оставшейся произвольной постоянной.

Некоторые методы решения уравнений с помощью преобразований подобия описаны в [ЗР66] на примере задач газовой динамики. Начальные сведения по аналитической теории нелинейных волн можно найти в [Уиз77] и приведенной там библиографии.

4.3. Примеры

97. Требуется решить уравнение теплопроводности

$$u_t = \chi u_{xx} \quad (4.7)$$

на вещественной оси $(-\infty < x < \infty)$ при $t > 0$. Ищем решение, удовлетворяющее точечному начальному условию

$$u(x, 0) = Q\delta(x) \quad (4.8)$$

и убывающее на бесконечности

$$u(\pm\infty, t) \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Решение. Решение зависит от обеих независимых переменных x, t и от параметров задачи χ, Q . Размерности этих величин следующие: $[t] = T$, $[\chi] = L^2 T^{-1}$, $[Q] = [u] \cdot L$, $[x] = L$. Здесь $T, L, [u]$ — единицы размерности времени, длины и величины u соответственно. Найдем безразмерный параметр задачи $\xi = t^n x \chi^k$. На показатели степени имеем два уравнения: $n - k = 0$ и $1 + 2k = 0$. Для подстановки следует взять $n = k = -\frac{1}{2}$, откуда $\xi = \frac{x}{\sqrt{\chi t}}$. Тогда решение уравнения теплопроводности можно искать в виде

$$u(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{\chi t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{\chi t}}\right), \quad (4.10)$$

где $f(\xi)$ — безразмерная функция безразмерного аргумента. Подстановка (4.10) в уравнение (4.7) позволяет определить $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right).$$

Характерная ширина l энергосодержащей области (где u велико) растет со временем как $l(t) \sim \sqrt{\chi t}$, а максимальное значение величины u убывает как $A(t) \sim \frac{Q}{\sqrt{\chi t}}$.

Способ построения автомодельных решений можно сформулировать и в несколько более общем виде, чем анализ размерностей. Именно, автомодельная подстановка проходит через уравнение, если оно

инвариантно относительно согласованных масштабных преобразований пространственных переменных g и времени t . При этом автомодельной переменной ξ является инвариантная комбинация g и t . Закон же преобразования искомой функции может диктоваться как самим уравнением, так и требованием инвариантности начальных и граничных условий.

Начальное условие (4.8) задано в виде δ -функции. Если задать ненулевое начальное условие в области конечной ширины, например в виде гауссовой функции

$$u(x, 0) = \frac{Q}{\sqrt{\pi}a} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

в задаче появится второй масштаб a , и автомодельное решение (4.10) уже перестанет быть точным решением задачи Коши, но останется верным асимптотически на больших временах, когда

$$l(t) = \sqrt{\chi t} \gg a,$$

и конечностью a в сравнении с характерной шириной решения можно пренебречь. Вместо граничного условия (4.9) в задачах также может встретиться требование обращения решения в нуль на концах некоторого конечного интервала: $u(\pm L, t) = 0$. В задаче тоже появится второй масштаб, поэтому автомодельное решение перестанет удовлетворять граничным условиям. Однако автомодельное решение справедливо на малых временах до тех пор, пока

$$l(t) = \sqrt{\chi t} \ll L.$$

Таким образом, в задачах, где характерные масштабы начальных и граничных условий существенно различаются ($a \ll L$), автомодельное решение представляет собой *промежуточную асимптотику*. ►

98. Найти автомодельное решение одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

при условии, что в начальный момент времени

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = 1.$$

Решение. Изменение масштабов всех переменных

$$t \longrightarrow \mu t, \quad x \longrightarrow \lambda x, \quad u \longrightarrow \nu u$$

должно оставлять инвариантными уравнение и начальное условие, откуда

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\nu}{\lambda^2}, \tag{4.11}$$

$$\lambda \nu = 1. \tag{4.12}$$

Из (4.11), (4.12) получаем $\lambda = \mu^{1/2}$, $\nu = \mu^{-1/2}$. Поэтому можно искать неизвестную функцию в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Подставляя в уравнение теплопроводности, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции f :

$$f'' + \frac{1}{2} (\xi f)' = 0,$$

которое интегрируется $f' + \frac{\xi}{2} f = \text{const} = C$. Общее решение имеет вид

$$f(\xi) = e^{-\xi^2/4} \left(C_1 + C \int_0^\xi dy e^{y^2/4} \right).$$

Функция f интегрируема только при $C = 0$; постоянная C_1 находится из нормировки начального условия. Мы видим, что в этом случае условие автомодельности однозначно определяет решение $u(x, t)$, и, следовательно, оно совпадает с решением предыдущей задачи при $Q = 1$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \quad \blacktriangleright$$

99. Найти автомодельную подстановку для одномерного уравнения теплопроводности на полуоси $0 \leq x < \infty$ и решить задачу Коши, если

(а) $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 1$;

(б) $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = t$.

Решение. (а) Вместо (4.12) найдем второе уравнение для λ, μ, ν из условий задачи. Граничное условие фиксирует $\nu = 1$, тогда автомодельная подстановка

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

дает уравнение

$$f'' + \frac{1}{2} \xi f' = 0$$

с граничным условием $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$. Его интегрирование дает:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi.$$

Решение. (6) Граничное условие дает $\nu = \mu$, откуда получается автомодельная подстановка

$$u(x, t) = tf\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

после которой надо решить задачу

$$f'' + \frac{1}{2}\xi f' - f = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0.$$

Одно решение $f_1 = 1 + \frac{\xi^2}{2}$ легко угадать, но оно не удовлетворяет условию на бесконечности. Второе решение можно найти с помощью подстановки $f = f_1 f_2$, где f_2 — новая неизвестная функция. Таким образом,

$$u(x, t) = C(x^2 + t) \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{\exp(-\eta^2/4) d\eta}{(2 + \eta^2)^2}, \quad C^{-1} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\eta^2/4) d\eta}{(2 + \eta^2)^2}. \quad \blacktriangleright$$

100. Найти автомодельную подстановку и автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = 1, \quad u(-x, t) = u(x, t).$$

Решение. В нелинейном уравнении теплопроводности (или диффузии) вместо (4.11) из инвариантности уравнения относительно преобразований растяжения получится

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\nu^{n+1}}{\lambda^2}.$$

Отсюда и из (4.12)

$$\lambda = \mu^{1/(n+2)}, \quad \nu = \mu^{-1/(n+2)},$$

и, следовательно, автомодельная подстановка имеет вид

$$u(x, t) = t^{-1/(n+2)} \cdot f(xt^{-1/(n+2)}).$$

Уравнение приводится к обыкновенному дифференциальному

$$(f^n f')' + \frac{1}{n+2} (\xi f)' = 0,$$

которое можно проинтегрировать

$$f^n f' + \frac{1}{n+2} \xi f = C_1.$$

В силу граничных условий $f'(0) = 0$, поэтому $C_1 = 0$. Переменные разделяются, а вторая константа интегрирования находится из условия

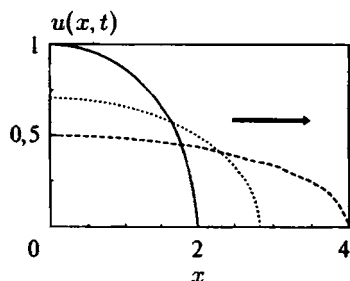


Рис. 4.1. Автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности при $n = 2$. Стрелкой показано направление распространения волны (— $t = 1$; - - $t = 2$; - · - $t = 4$)

нормировки. Получается решение типа тепловой ударной волны с резким передним фронтом (рис. 4.1).

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{n+2}} \left[C - \frac{x^2}{2(n+2)t^{2/(n+2)}} \right]^{1/n}, \quad \text{при } x^2 < 2(n+2)t^{2/(n+2)};$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при } x^2 > 2(n+2)t^{2/(n+2)}, \quad n \neq 0;$$

$$C = \left[\frac{n(n+2)}{8\pi} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)} \right]^{n/(n+2)}.$$

В частности, при $n = 2$: $C = \frac{1}{\pi}$. При $n = 0$ см. задачу 98. ►

101. В полупространстве $x > 0$ было задано постоянное поле температур $u(0, x) = u_0 > 0$. Начиная с момента времени $t = 0$ и далее температура на левой границе $x = 0$ поддерживается равной $u(t, 0) = -u_0$. Уравнение эволюции температурного поля $u(x, t)$ имеет вид

$$u_t - \chi u_{xx} = Q \frac{dy(t)}{dt} \delta(x - y(t)), \quad (4.13)$$

где функция времени $y(t)$ определяется условием: $u(y(t), t) = 0$. Найти $u(x, t)$ и $y(t)$ при всех $t > 0$. Рассмотреть, в частности, асимптотику $Q \rightarrow +\infty$ ^{*)}.

Решение. Левая часть уравнения (4.13) при преобразовании подобия $x \rightarrow \lambda x$, $t \rightarrow \lambda^2 t$ и $u \rightarrow u$, не меняющем граничных и начальных условий, приобретает общий множитель $\frac{1}{\lambda^2}$. Правая часть (4.13) будет преобразовываться по такому же закону, если мы положим

$$y(t) = 2a\sqrt{\chi t},$$

^{*)} Такая постановка является частным случаем задачи Стефана о движении фронта кристаллизации жидкости, охлаждаемой на поверхности $x = 0$. Функция $y(t)$ определяет положение поверхности раздела фаз, и величина Q пропорциональна удельной теплоте плавления.

где a — безразмерная постоянная, а множитель $2\sqrt{\chi}$ выделен для удобства. Это означает, что решение задачи имеет автомодельный вид:

$$u(x, t) = f(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{\chi t}}. \quad (4.14)$$

После подстановки (4.14) уравнение (4.13) сводится к обыкновенному:

$$f''(z) + \frac{z}{2}f' + aQ\delta(z - 2a) = 0. \quad (4.15)$$

Асимптотика функции $f(z)$ при $z \rightarrow +\infty$ следует из начального условия: $f(z \rightarrow +\infty) \rightarrow u_0$. Другим граничным условием для $f(z)$ является $f(0) = -u_0$. Общее решение уравнения (4.15) в областях $z < 2a$ и $z > 2a$ находится без труда:

$$f(z) = A_1 + B_1 \int_0^z ds e^{-s^2/4}, \quad z < 2a;$$

$$f(z) = A_2 + B_2 \int_z^\infty ds e^{-s^2/4}, \quad z > 2a.$$

Константы $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ и a определяются непрерывностью $f(z)$ при $z = 2a$, скачком производной $f'(2a + 0) - f'(2a - 0) = -aQ$ и требованием $u(y(t), t) = f(2a) = 0$. В результате получим

$$A_1 = -u_0, \quad A_2 = u_0, \quad B_1 = \frac{u_0}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf} a}, \quad B_2 = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}(1 - \operatorname{erf} a)},$$

где $\operatorname{erf} a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a ds e^{-s^2}$ — интеграл вероятности, и константа a находится из трансцендентного уравнения:

$$\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\operatorname{erf} a} - \frac{1}{1 - \operatorname{erf} a} \right) = aQe^{a^2}.$$

При $Q \rightarrow 0$ уравнение вырождается в $\operatorname{erf} a = \frac{1}{2}$, так что в этом пределе $a \approx 0,48$ и $y = 0,96\sqrt{\chi t}$. При $Q \rightarrow +\infty$ получим $a \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2u_0}{Q}}$, то есть

$$y(t) \approx \sqrt{\frac{2u_0\chi}{Q}} t.$$

Большое тепловыделение замедляет движение фронта кристаллизации. ►

102. Уравнение Бюргера

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.16)$$

описывает слабые ударные волны в среде с диссипацией энергии. Найти решение типа ударной волны, т. е. удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = u_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = u_2.$$

Решение. Подстановка (4.1) в уравнение Бюргерса приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\mu f'' = f'(f - V) \quad (4.17)$$

с граничными условиями $f(-\infty) = u_1$, $f(+\infty) = u_2$. Интегрируя (4.17) от $-\infty$ до $+\infty$, получаем

$$-V(u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) = 0,$$

откуда $V = \frac{u_1 + u_2}{2}$, поэтому скорость ударной волны зависит только от граничных значений и не зависит от параметра μ (вязкости среды).

Далее, интегрируя (4.17) один раз от $-\infty$ до ξ и учитывая явное выражение скорости фронта V через u_1 и u_2 , получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\mu f' = \frac{1}{2}(f - u_1)(f - u_2).$$

Его решение

$$f(\xi) = \frac{u_1 + u_2 \exp[(u_1 - u_2)\xi/2\mu]}{1 + \exp[(u_1 - u_2)\xi/2\mu]} = V - \frac{u_1 - u_2}{2} \operatorname{th}\left(\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}\right)$$

удовлетворяет граничным условиям только при $u_1 > u_2$ (в противном случае профиль скорости начал бы «распрямляться», и ударная волна исчезла). Оно изображено на рис. 4.2 при $u_2 = 0$. Ширина фронта ударной волны (*кинка*) увеличивается с ростом вязкости среды μ .

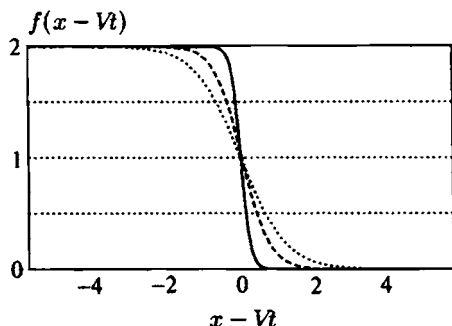


Рис. 4.2. Решение уравнения Бюргерса типа ударной волны: $u_1 = 2$, $u_2 = 0$. Значения вязкости μ : — 0,1; --- 0,3; - 0,5. С уменьшением μ фронт волны становится круче

103. Показать, что уравнение Кортевега—де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

имеет решение в виде бегущей волны. Найти частное решение, обращающееся на бесконечности в нуль вместе со своими первой и второй производными по x .

Решение. После подстановки $u(x, t) = f(x - Vt)$ для функции f получается уравнение третьего порядка $f''' + (6f - V)f' = 0$, которое можно два раза проинтегрировать:

$$f'' + 3f^2 - Vf + C_1 = 0, \quad \frac{1}{2} f'^2 + f^3 - \frac{1}{2} Vf^2 + C_1 f + C_2 = 0.$$

Чтобы при $x \rightarrow \infty$ функция f , ее первая и вторая производные обращались в нуль, следует выбрать $C_1 = C_2 = 0$. Тогда уравнение интегрируется в элементарных функциях. Решение

$$u(x, t) = \frac{V/2}{\operatorname{ch}^2 [\sqrt{V}/2 (x - Vt)]}$$

представляет собой уединенную волну (солитон — от англ. solitary wave), экспоненциально затухающую при $\xi = x - Vt \rightarrow \pm\infty$ (рис. 4.3). Характерная ширина солитона $\delta\xi \sim V^{-1/2}$ однозначно связана с его скоростью V и амплитудой $\frac{V}{2}$.

Уравнение Кортевега—де Фриза описывает волну в среде с дисперсией, где фазовая скорость зависит от длины волны. Для волны достаточно большой амплитуды расплывание волнового пакета из-за дисперсии может скомпенсироваться укручением волны за счет нелинейности. Солитон — это решение, в котором дисперсия и нелинейность взаимно скомпенсированы, потому он и распространяется без изменения формы.

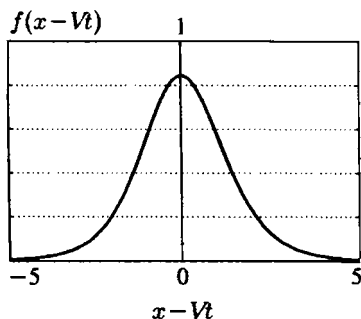


Рис. 4.3. Солитонное решение уравнения Кортевега—де Фриза при $V = 1,7$

104. Найти решение типа уединенной бегущей волны уравнения нелинейной струны

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0.$$

Решение. Подставив бегущую волну $u = f(x - Vt)$ в уравнение нелинейной струны, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f''(V^2 - 1) + (f^2)'' + f^{(IV)} = 0,$$

которое два раза интегрируется

$$f'' + f^2 + f(V^2 - 1) = C_1\xi + C_2.$$

Функция f обращается на бесконечности в нуль вместе со своими производными, поэтому $C_1 = C_2 = 0$. Тогда уравнение можно умножить на f' и еще раз проинтегрировать. Получится

$$\frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{3} f^3 + \frac{1}{2} f^2(V^2 - 1) = C_3.$$

Третья константа также равна нулю для уединенной волны. Получилось уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Его решение существует только при $|V| < 1$ (или в размерных единицах скорость волны должна быть меньше скорости звука):

$$f(\xi) = \frac{3}{2} \frac{1 - V^2}{\text{ch}^2 \frac{\sqrt{1 - V^2}(\xi - \xi_0)}{2}}.$$

105. Одномерное движение политропного газа описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ c^2(\rho) &= c_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Найти автомодельные решения для двух разных начальных условий:

(а) В начальный момент плотность имеет скачок при $x = 0$:

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_0, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

скорость равна нулю: $v(x, 0) = 0$.

(б) В начальный момент имеется порция газа, сосредоточенная в точке $x = 0$. Газ растекается без изменения полной массы.

Решение. Выполняя преобразование подобия

$$t \longrightarrow \mu t, \quad x \longrightarrow \lambda x, \quad u \longrightarrow \alpha u, \quad \rho \longrightarrow \nu \rho,$$

получаем, что уравнения не изменяются, если

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\nu \alpha}{\lambda}, \quad \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\alpha^2}{\lambda} = \frac{\nu^{\gamma-1}}{\lambda}. \quad (4.19)$$

В этой системе уравнений имеется два свободных параметра. Их число уменьшается до одного разными способами в зависимости от начальных условий.

(а) В этом случае нужно выбрать $\nu = 1$, поскольку на бесконечности $\rho = \rho_0$. Решая (4.19), получаем

$$\alpha = 1, \quad \lambda = \mu.$$

Ищем решение системы в виде

$$\rho = f(xt^{-1}), \quad v = g(xt^{-1}).$$

На f, g получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (g - \xi)f' + fg' &= 0, \\ \frac{c^2(f)}{f}f' + (g - \xi)g' &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $\xi = xt^{-1}$, а штрих означает производную по ξ .

Тривиальное автомодельное решение получается, если определитель линейной системы уравнений относительно f', g' не равен нулю. Тогда

$$f' = g' = 0, \quad (4.21)$$

т.е. f, g постоянны.

Условие равенства определителя нулю дает связь между f и g :

$$(g - \xi)^2 = c^2(f).$$

Отсюда получаем, что для нетривиальных решений

$$g = \xi \pm c(f). \quad (4.22)$$

Если условия (4.22) выполнены, то уравнения в системе (4.20) становятся эквивалентными. Найдем решение, соответствующее выбору знака «минус» в уравнении (4.22). Тогда

$$g = \xi - c_0 \left(\frac{f}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2}.$$

Подставляя выражение для g в уравнение (4.20), получаем уравнение

$$f - \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{f}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2} f' = 0,$$

интегрируя которое, имеем

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} c_0 \left(\frac{f}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c(f) = A + \xi, \quad (4.23)$$

где A — произвольная постоянная. Подставляя (4.23) в (4.22), получаем

$$g = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} A + \frac{2}{\gamma+1} \xi. \quad (4.24)$$

Решение, соответствующее выбору знака «плюс» в уравнении (4.22), получается изменением в формулах (4.23) и (4.24) знака перед ξ на обратный.

Сконструируем решение начальной задачи из автомодельных решений (4.23), (4.24) и (4.21). Предположим, что решение (4.23), (4.24) с ростом ξ справедливо до точки ξ_0 и потребуем, чтобы начиная с нее оно непрерывно переходило в решение (4.21) с $f = \rho_0$ и $g = 0$. Условие непрерывности дает систему уравнений на A, ξ_0 , решая которую, получаем

$$\xi_0 = c_0, \quad A = \frac{2}{\gamma - 1} c_0.$$

Интервал, на котором справедливо решение (4.23), (4.24), слева ограничен условием $f > 0$, которое выполняется при $\xi > \xi_1 = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}$. Окончательно имеем в момент времени $t > 0$:

- при $x < \xi_1 t$ находится вакуум; $v = 0, \rho = 0$;
- при $\xi_1 t < x < c_0 t$ скорость $v = -\frac{2}{\gamma - 1}(c_0 - \frac{x}{t})$, а плотность определяется из (4.23);
- при $x > c_0 t$ находится невозмущенный газ: $v = 0, \rho = \rho_0$ (рис. 4.4).

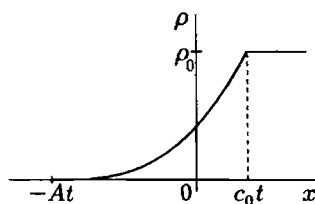


Рис. 4.4. Автомодельное решение задачи 105 (а) с начальным профилем плотности в виде ступенчатой функции

При $t \rightarrow +0$ это решение стремится к начальным условиям. Заметим, что полученное поле скорости разрывно на границе с вакуумом. Формально это не противоречит уравнениям (4.18), так как скорость вакуума не определена. Физически же это означает, что вблизи границы газ-вакуум становятся существенными диссипативные процессы, не учтенные в системе (4.18). Им соответствуют члены в уравнениях эволюции, содержащие пространственные производные второго порядка. Если их принять во внимание, то разрыв сгладится. Такая тонкая структура ударной волны для одномерных движений может быть определена в рамках уравнения Бюргерса с некоторыми эффективными параметрами. Это замечание относится ко всем задачам подобного типа.

(б) Из сохранения массы получаем

$$\nu \lambda = 1. \quad (4.25)$$

Выражая масштабные коэффициенты через μ , имеем

$$\alpha = \mu^{(1-\gamma)/(1+\gamma)}, \quad \nu = \mu^{-2/(1+\gamma)}, \quad \lambda = \mu^{2/(1+\gamma)}.$$

Отыскивая решение в виде

на функции f и g получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\gamma+1} (f\xi)' + (fg)' &= 0, \\ -\frac{1}{\gamma+1} [(\gamma-1)g + 2\xi g'] + gg' + f^{\gamma-2} f' &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Интегрируя первое уравнение, получаем, что при $f \neq 0$ значение $g(0)$ равно нулю, когда постоянная интегрирования равна нулю. Тогда имеем

$$g(\xi) = \frac{2}{\gamma+1} \xi.$$

Интегрируя второе уравнение, получаем

$$f = \left[C + \frac{(\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^2} \xi^2 \right]^{1/(\gamma-1)},$$

где C — произвольная постоянная. Второе решение системы (4.26) тривиально:

$$f = g = 0.$$

К сожалению, решения, полученные в предположении (4.25), выражающем сохранение массы газа, сами описывают движение бесконечной либо нулевой массы газа. ►

106. Построить автомодельное решение, описывающее растекание газа с «отрицательным давлением»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

если в начальный момент вся масса M газа находилась в точке $x = 0$.

Решение. Вначале решение точно повторяет решение задачи (б) для $\gamma = 2$. Вместо (4.26) получается система

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} (f\xi)' + (fg)' &= 0, \\ -\frac{1}{3} [(g + 2\xi g')] + gg' - f' &= 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

решая которую, имеем

$$g = \frac{2}{3} \xi, \quad f = C - \frac{1}{9} \xi^2.$$

Второе решение тривиально: $f = g = 0$.

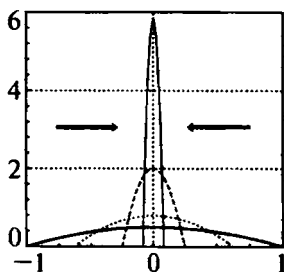


Рис. 4.5. Коллапс параболического профиля плотности, $t_0 = 2$ (— $t = 0$; - - $t = 1$; - · - $t = 1,75$; — $t = 1,95$)

Решение, описывающее расплывание конечной массы вещества, имеет вид

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{2x}{3t}, & |x| < 3\sqrt{C}t^{2/3}; \\ 0, & |x| > 3\sqrt{C}t^{2/3}, \end{cases}$$

$$\rho(x, t) = \begin{cases} t^{-2/3} \left(C - \frac{x^2}{9t^{4/3}} \right), & |x| < 3\sqrt{C}t^{2/3}; \\ 0, & |x| > 3\sqrt{C}t^{2/3}. \end{cases}$$

$$C = \left(\frac{M}{4} \right)^{2/3}.$$

Заметим, что заменой $t \rightarrow t_0 - t$ получается решение, в котором плотность обращается в бесконечность в момент $t = t_0$. Такое явление называется *коллапсом* (рис. 4.5). ▶

107. Найти асимптотику при $t \rightarrow +\infty$ решения $f(x, t)$ неоднородного уравнения эволюции:

$$\frac{\partial}{\partial t} f - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (1 + x^2) f = \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1 + x^2} \quad (4.28)$$

с нулевыми начальными условиями.

Решение. Оператор $\widehat{L} = \frac{d^2}{dx^2} (1 + x^2)$ эрмитов в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (1 + x^2) f^* g, \quad (4.29)$$

и его собственные значения отрицательны. Это значит, что если решение нашей задачи Коши принадлежит такому гильбертовому пространству, то в асимптотике $t \rightarrow +\infty$ оно не зависит от времени t . Предположим, что искомое f нормируемо относительно скалярного произведения (4.29). Тогда при $t \rightarrow +\infty$ оно удовлетворяет стационарному уравнению:

$$-\widehat{L}f = \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1 + x^2},$$

имеющему общее решение с двумя неопределенными константами:

$$f = -\frac{1}{(1 + x^2)^2} + \frac{C_1 x}{1 + x^2} + \frac{C}{1 + x^2}.$$

Они могут быть определены из начальных данных без решения полной эволюционной задачи, а с помощью соображений симметрии и закона

сохранения. Действительно, уравнение (4.28) и начальное условие инвариантны относительно отражения $x \rightarrow -x$. Такой же симметрией должно обладать и решение, что сразу фиксирует $C_1 = 0$. Далее, проинтегрировав обе части (4.28) по всей прямой x , мы получим, что интеграл

$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x, t)$ от t не зависит. Поскольку при $t = 0$ он был равен нулю, то

таким должен оставаться и при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда определяем, что $C = \frac{1}{2}$. Итак, искомая асимптотика имеет вид

$$f(x, t) \rightarrow f = -\frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Норма этой функции относительно (4.29), очевидно, конечна. ►

108. Эволюция поля $\psi(\mathbf{r}, t)$ в двумерном пространстве определяется нелинейным уравнением Шрёдингера

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0. \quad (4.30)$$

(а) Доказать, что функционалы

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi|^2, \quad H = \int d\mathbf{r} \left(|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2} |\psi|^4 \right)$$

являются интегралами движения.

(б) Доказать, что для локализованного в пространстве начального возмущения величина:

$$I = \int d\mathbf{r} r^2 |\psi|^2,$$

удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = -8H.$$

Используя это соотношение, показать, что при положительном значении H в решении $\psi(\mathbf{r}, t)$ за конечное время образуется сингулярность (критерий Таланова). Иными словами, существуют такой момент времени t^* и точка пространства $\mathbf{r}^*$, что при $t \rightarrow t^*$ и $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}^*$: $\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \infty$.

Решение. (а) Выпишем вместе с уравнением (4.30) комплексно сопряженное:

$$-i\psi_t^* + \Delta\psi^* + |\psi|^2\psi^* = 0, \quad (4.31)$$

умножим (4.30) на ψ^* и (4.31) на ψ , вычтем одно из другого и проинтегрируем по пространству. Для $\psi(\mathbf{r}, t)$, достаточно быстро убывающих при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, получим $\frac{dN}{dt} = 0$.

Далее, действуем оператором ∇ на уравнение (4.30), умножим результат на $\nabla\psi^*$, из полученного равенства вычтем комплексно сопряженное и проинтегрируем по пространству. Результатом этих преобразований будет соотношение:

$$i \frac{d}{dt} \int d\mathbf{r} |\nabla\psi|^2 = \int d\mathbf{r} (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi) |\psi|^2.$$

Умножение же (4.30) на $\psi^*|\psi|^2$, вычитание комплексно сопряженного и интегрирование по пространству даст

$$\frac{i}{2} \frac{d}{dt} \int d\mathbf{r} |\psi|^4 = \int d\mathbf{r} (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi) |\psi|^2,$$

что вместе с предыдущим равенством приводит к закону сохранения $\frac{dH}{dt} = 0$.

Решение. (6) Действие оператором $\frac{id}{dt}$ на I и использование уравнения эволюции (4.30) даст равенство:

$$i \frac{d}{dt} I = \int d\mathbf{r} \mathbf{r}^2 (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi) = 2 \int d\mathbf{r} (\psi (\mathbf{r} \nabla) \psi^* - \psi^* (\mathbf{r} \nabla) \psi). \quad (4.32)$$

Повторно дифференцируя по времени, действуем сначала оператором $\frac{id}{dt}$ на первое слагаемое в (4.32). Используя явно проверяемое перестановочное соотношение

$$\Delta(\mathbf{r} \nabla) = (\mathbf{r} \nabla) \Delta + 2\Delta,$$

получим

$$2i \frac{d}{dt} \int d\mathbf{r} \psi (\mathbf{r} \nabla) \psi^* = 2 \int d\mathbf{r} (|\psi|^2 (\mathbf{r} \nabla) |\psi|^2 - 2\psi^* \Delta \psi).$$

Если к этому выражению прибавить его комплексно сопряженное, то это и будет результат действия $\frac{id}{dt}$ на $\frac{id}{dt} I$, то есть:

$$-\frac{d^2}{dt^2} I = 8 \int d\mathbf{r} \left(|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{4} (\mathbf{r} \nabla) |\psi|^4 \right) = 8H.$$

Для перехода к последнему равенству нужно проинтегрировать по частям и учесть, что в двух измерениях $\text{div } \mathbf{r} = 2$.

Интеграл H имеет смысл гамильтониана нашей континуальной системы, N — числа возбужденных степеней свободы. Постоянство H приводит к тому, что уравнение эволюции функционала I легко решается:

$$I(t) = I(0) + Ct - 4Ht^2. \quad (4.33)$$

Здесь C — некоторая постоянная, определяемая начальной конфигурацией поля ψ . Предположим, что начальные условия таковы, что гамильтониан положителен: $H > 0$. Тогда при любом конечном значении C наступит момент, когда $I(t)$ обратится в нуль. Однако функционал $I(t)$ по построению положителен. Единственный выход из получившегося

противоречия — это непродолжимость решения неограниченно по времени, то есть образование сингулярности, называемое коллапсом. Для симметричного относительно вращений начального распределения поля обращение $I(t)$ в какой-то момент времени в нуль означает, что вся плотность $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ в этот момент сосредоточена в точке $\mathbf{r} = 0$, где она, в силу сохранения интеграла N , бесконечна.

Нелинейное уравнение Шрёдингера описывает, в частности, распространение света в нелинейной среде. Критерий Таланова дает условие самофокусировки светового пучка. Нелинейность увеличивает показатель преломления на оси пучка и действует как собирающая линза. Коллапс происходит, когда нелинейность пересиливает расплывание пучка из-за дифракции. ►

109. Уравнения (4.18), описывающие одномерное движение баротропного газа, квазилинейны. Каждое частное решение дается двумя функциями ρ, v двух переменных x, t :

$$\rho = \rho(x, t), \quad v = v(x, t). \quad (4.34)$$

Переменные ρ, v могут быть использованы вместо x, t как новые независимые координаты, если якобиан преобразования не равен нулю. Покажите, что в переменных ρ, v уравнения на функции x, t будут линейны*).

Решение. Дифференцируя уравнения (4.34) по ρ и v и предполагая, что x, t являются функциями ρ, v , получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \rho} &= 1, & \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \rho} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} &= 1. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно частных производных, входящих в уравнения (4.18), получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial t}{\partial v}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial t}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \rho},$$

где $J = \frac{\partial x}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial t}{\partial \rho}$ — якобиан преобразования. Подставляя эти выражения в уравнения (4.18), получаем систему линейных уравнений на функции t, x переменных ρ, v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} + \rho \frac{\partial t}{\partial \rho} - v \frac{\partial t}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} - v \frac{\partial t}{\partial \rho} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial t}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

если $J \neq 0, \infty$. Ясно, что таким способом любая квазилинейная система двух уравнений на функции от двух переменных может быть преобразована в линейную, если коэффициенты в исходной системе зависят только от решения. При физически важных значениях $\gamma = \frac{2n+3}{2n+1}$ общее решение этой линейной системы находится аналитически [ЛЛ88]. ►

110.

(а) Показать, что уравнение Бюргерса (4.16) подстановкой Коула—Хопфа

$$u = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(x, t)$$

преобразуется в линейное уравнение на θ .

(б) С помощью такой подстановки найти периодическое в пространстве решение уравнения Бюргерса.

Решение. (а) На θ получается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_t}{\theta} - \mu \frac{\theta_{xx}}{\theta} \right) = 0.$$

Интегрируя по x , имеем

$$\theta_t = \mu \theta_{xx} + f(t)\theta, \quad (4.35)$$

где $f(t)$ — произвольная функция. Ее можно положить равной нулю. Действительно, умножение $\theta(x, t)$ на любую не обращающуюся в нуль функцию только времени t не влияет на u . С другой стороны, легко убедиться, что, отыскивая решение уравнения (4.35) в виде $\theta = \varphi(t)\Phi(x, t)$ и выбирая в качестве φ решение уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t)\varphi,$$

на Φ получаем уравнение (4.35) с $f(t) = 0$.

Решение. (б) Одно из простейших периодических решений уравнения $\theta_t = \mu \theta_{xx}$ имеет вид $\theta(t, x) = A + e^{-\mu k^2 t} \sin kx$, где A — константа. Соответствующая функция

$$u(t, x) = -2\mu \theta_x \ln \theta(t, x) = -2\mu k \frac{e^{-\mu k^2 t} \cos kx}{A + e^{-\mu k^2 t} \sin kx} \quad (4.36)$$

не будет иметь особенностей при $A > 1$. Следовательно, (4.36) при $A > 1$ является периодическим решением уравнения Бюргерса при всех $t \geq 1$. ►

111. Свести квазилинейное уравнение

$$\Delta u - (\nabla u)^2 = 0$$

к линейному заменой неизвестной функции.

Решение. Подстановка $u = \omega(v)$ приводит к уравнению $(\omega'' - \omega'^2) \times (\nabla v)^2 + \omega' \Delta v = 0$. Выбирая функцию $\omega(v)$ как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega'' - (\omega')^2 = 0, \quad (4.37)$$

получаем для v уравнение Лапласа. Уравнение (4.37) имеет явное решение: $\omega = C_1 - \ln |x - C_2|$. ▶

112. Найти в системе квазилинейных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \Delta \theta - \sin \theta \cos \theta (\nabla \varphi)^2 &= 0, \\ \Delta \varphi + 2 \operatorname{ctg} \theta \nabla \theta \nabla \varphi &= 0 \end{aligned}$$

решение вида $\theta = f(v)$, $\varphi = g(v)$, где v — новая неизвестная функция. Показать, что при условии $\Delta v = 0$ система сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на f, g . Решив ее, найти θ, φ .

Решение. Замена неизвестных функций $\theta = \theta(v)$, $\varphi = \varphi(v)$ приводит к системе

$$\begin{aligned} \theta'' (\nabla v)^2 + \theta' \Delta v - \sin \theta \cos \theta \varphi'^2 (\nabla v)^2 &= 0, \\ \varphi'' (\nabla v)^2 + \varphi' \Delta v + 2 \operatorname{ctg} \theta \varphi' \theta' (\nabla v)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Если v — гармоническая функция, то получится система обыкновенных уравнений

$$\theta'' - \sin \theta \cos \theta \varphi'^2 = 0, \quad (4.38)$$

$$\varphi'' + 2 \operatorname{ctg} \theta \varphi' \theta' = 0. \quad (4.39)$$

Уравнение (4.39) после деления на φ' один раз интегрируется:

$$\varphi' = \frac{c_1}{\sin^2 \theta}.$$

Тогда можно проинтегрировать и уравнение (4.38):

$$\theta'^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2 \theta} = c_2,$$

где $c_1, c_2 > 0$ — константы. Полученное уравнение снова интегрируется. В результате имеем решение

$$\theta = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \beta^2 \operatorname{ctg}^2(c_1 \beta v)}{\beta^2 - 1}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(c_1 \beta v)}{\beta},$$

где $\beta = \frac{\sqrt{c_2}}{c_1} \geq 1$, а v — произвольная гармоническая функция. Эта система уравнений используется в теории ферромагнетика. ▶

113. Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$u_t u_x - u = 0, \quad (4.40)$$

удовлетворяющее условию $u(x, 0) = x^2$.

Решение. Переписывая (4.40) в виде: $F = pq - u = 0$, мы приходим к уравнениям для характеристик в пространстве (u, p, q, x, t) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p = q, & \dot{t} &= F_q = p, & \dot{p} &= -F_x - pF_u = p, \\ \dot{q} &= -F_t - qF_u = q, & \dot{u} &= pF_p + qF_q = 2pq. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Общее решение этой системы содержит пять произвольных констант C_j , $j = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} p &= C_1 e^\tau, & q &= C_2 e^\tau, & x &= C_2 e^\tau + C_3, \\ t &= C_1 e^\tau + C_4, & u &= C_1 C_2 e^{2\tau} + C_5. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Начало отсчета параметра τ зафиксируем условием $t(0) = 0$. Это даст связь $C_4 = -C_1$. Равенство $F = pq - u = 0$ определяет $C_5 = 0$. Далее, из начального условия следует, что при $\tau = 0$: $u = x^2$, $p = u_x = 2x$, что дает связи: $C_1 C_2 = (C_2 + C_3)^2$, $C_1 = 2(C_2 + C_3)$. Все это позволяет выразить постоянные (вдоль характеристик!) C_{2-4} через C_1 :

$$\begin{aligned} p &= C_1 e^\tau, & q &= \frac{1}{4} C_1 e^\tau, & x &= \frac{1}{4} C_1 e^\tau + \frac{1}{4} C_1, \\ t &= C_1 (e^\tau - 1), & u &= \frac{1}{4} C_1^2 e^{2\tau}. \end{aligned}$$

Выражения (4.43) для u, t, x — ни что иное, как параметрическое задание поверхности $u = u(x, t)$, где параметрами служат τ и C_1 . В нашем случае их можно исключить и получить явное выражение для $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \left(x + \frac{t}{4}\right)^2. \quad \blacktriangleright$$

114. Найти решение $\psi(x, y, t)$ уравнения типа Гамильтона—Якоби

$$\psi_t^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2 = 0, \quad (4.43)$$

удовлетворяющее условию

$$\psi(x, y, 0) = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.44)$$

Решение. Обозначая $p_0 = \psi_t$, $p_1 = \psi_x$ и $p_2 = \psi_y$, перепишем уравнение в виде $F \equiv p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 = 0$. Его характеристики — кривые в семимерном пространстве, определяемые уравнениями:

$$p_0 \dot{p}_1 = p_1 \dot{p}_2 = 0, \quad \dot{t} = 2p_0, \quad \dot{x} = -2p_1, \quad \dot{y} = -2p_2, \quad \dot{\psi} = 0.$$

Требуя, чтобы значению параметра $\tau = 0$ соответствовало $t = 0$, получим решение этой системы с шестью произвольными постоянными:

$$p_0 = C_0, \quad p_1 = C_1, \quad p_2 = C_2, \quad \psi = C_3, \\ t = 2C_0\tau, \quad x = -2C_1\tau + B_1, \quad y = -2C_2\tau + B_2.$$

При $t = 0$ мы знаем выражения ψ , $p_1 = \psi_x$ и $p_2 = \psi_y$ через x и y . Поскольку $t = 0$ при $\tau = 0$, то отсюда следуют связи между константами C_j и B_j :

$$C_3 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \quad C_1 = \frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}, \quad C_2 = \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}.$$

Условие $F = 0$ дает $C_0 = \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \pm 1$. Таким образом, решение нашей задачи Коши не единственно; имеются две функции $\psi_{\pm}(x, y, t)$, удовлетворяющие уравнению (4.43) и начальному условию (4.44). Поверхности $\psi = \psi_{\pm}(x, y, t)$ могут быть заданы в параметрическом виде с помощью двух параметров B_1 и B_2 . Если их исключить, то получится явное выражение:

$$\psi_{\pm} = \pm t + \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.45)$$

4.4. Задачи

115. Решить задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности на полуоси $0 \leq x < \infty$, если $u(x, 0) = x^3$, $u(0, t) = 0$.

116. Найти автомодельную подстановку для нелинейного уравнения Шрёдингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi.$$

117. Решить задачу Коши для нелинейного уравнения первого порядка:

$$u_t + \frac{1}{2} u_x^2 = 0, \quad u(x, 0) = x^2.$$

4.5. Ответы

115. $u(x, t) = t^{3/2} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = x^3 + 6tx.$

116. $\psi = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$

117. $u(x, t) = \frac{x^2}{1 + 2t}.$

Специальные функции

5.1. Особые точки

Любое линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка можно привести к виду

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p(z) \frac{dy}{dz} + q(z)y = 0. \quad (5.1)$$

Особыми точками этого уравнения называются точки, где $p(z)$ или $q(z)$ обращаются в бесконечность. Если $p(z), q(z)$ аналитичны в круге $|z - z_1| < R$ комплексной плоскости переменной z , то в окрестности z_1 существует два линейно независимых решения $y_1(z), y_2(z)$, образующих фундаментальную систему решений. Общее решение уравнения (5.1) выражается через их линейную комбинацию

$$y(z) = A y_1(z) + B y_2(z).$$

Из (5.1) следует, что вронскиан двух решений

$$W\{y_1(z), y_2(z)\} = y_1(z) \frac{dy_2(z)}{dz} - y_2(z) \frac{dy_1(z)}{dz} \quad (5.2)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW(z)}{dz} = -p(z)W(z), \quad (5.3)$$

которое имеет решение

$$W(z') = W(z) \exp \left(- \int_z^{z'} dt p(t) \right), \quad (5.4)$$

обращающееся в нуль только тогда, когда $y_1(z), y_2(z)$ линейно зависимы. Оба решения можно аналитически продолжить из z_1 вдоль контура C , не проходящего через особые точки. Причем из (5.3) следует, что линейная независимость решений сохраняется.

Пусть z_0 — изолированная особая точка. Рассмотрим два линейно независимых решения $y_1(z), y_2(z)$, заданных в окрестности неособой точки z , находящейся вблизи z_0 . Аналитически продолжим эти решения

из точки z в точку z , обойдя по замкнутому контуру вокруг z_0 (рис. 5.1). При этом решения $y_i(z)$ переходят в новые функции $y_i^+(z)$, которые являются линейными комбинациями решений $y_i(z)$:

$$y_i(z) \rightarrow y_i^+(z) = a_{ij} y_j(z).$$

Если функции $y_j(z)$ можно выбрать так, чтобы матрица a_{ij} была диагональной:

$$y_j^+(z) = \lambda_j y_j(z),$$

то асимптотика решений в точке $z = z_0$ имеет вид

$$y_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^i (z - z_0)^k. \quad (5.5)$$

Числа $\rho_j = \frac{1}{2\pi i} \ln(\lambda_j)$ называются характеристическими показателями. В невырожденном случае ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) разность $\rho_2 - \rho_1$ не является целым числом.

Если матрица a_{ij} не диагонализуется, приведем ее к жордановой форме, т. е. выберем решения, которые при обходе по замкнутому контуру (рис. 5.1) преобразуются по закону:

$$y_1^+(z) = \lambda y_1(z),$$

$$y_2^+(z) = \lambda y_2(z) + y_1(z).$$

Асимптотика решения y_1 в точке $z = z_0$ имеет вид (5.5) с $\rho_1 = \frac{\ln(\lambda)}{2\pi i}$. Чтобы найти асимптотику y_2 , заметим, что функция

$$W(z) = \frac{y_2(z)}{y_1(z)} - \frac{1}{2\pi i \lambda} \ln(z - z_0)$$

при аналитическом продолжении вдоль контура (рис. 5.1) переходит сама в себя: $W^+(z) = W(z)$, т. е. асимптотика $W(z)$ в точке $z = z_0$ имеет вид (5.5) с $\rho = 0$. Асимптотика $y_2(z)$ содержит логарифмические вклады.

Если ряд Лорана в выражении (5.5) обрывается снизу (т. е. $c_k \equiv 0$ при $k \leq k_0$), то z_0 называют *регулярной особой точкой*. Если же ряд не обрывается, то z_0 — *иррегулярная особая точка*. Уравнение называется уравнением класса Фукса, если оно имеет только регулярные особые точки. Особая точка $z_0 \neq \infty$ является регулярной в том и только в том случае, если коэффициенты уравнения (5.1) при $z \rightarrow z_0$ удовлетворяют условиям

$$|p(z)(z - z_0)| < \infty, \quad |q(z)(z - z_0)^2| < \infty.$$

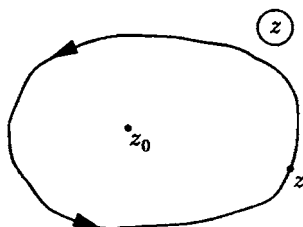


Рис. 5.1. Контур в плоскости комплексной переменной z

Пусть $z_0 = \infty$, конформная замена $z = \frac{1}{t}$, $\frac{d}{dz} = -t^2 \frac{d}{dt}$ приводит уравнение (5.1) к виду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \tilde{p}(t) \frac{dy}{dt} + \tilde{q}(t)y = 0,$$

где

$$\tilde{p}(t) = \frac{2t - p(1/t)}{t^2}, \quad \tilde{q}(t) = \frac{q(1/t)}{t^4}.$$

Откуда следует, что $z_0 = \infty$ является регулярной особой точкой, только если при $z \rightarrow \infty$

$$|p(z)z| < \infty, \quad |q(z)z^2| < \infty.$$

Точка $z_0 = \infty$ является неособой, только если при $z \rightarrow \infty$

$$|z[2 - p(z)z]| < \infty, \quad |z^4 q(z)| < \infty.$$

Следовательно, коэффициенты уравнения (5.1) класса Фукса с $n+1$ регулярными особыми точками (одна из которых на бесконечности) можно привести к виду

$$p(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(z - z_k)}, \quad q(z) = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{(z - z_k)},$$

где A_k, B_k, C_k — фиксированные комплексные числа, причем

$$\sum_{k=1}^n C_k = 0.$$

5.2. Гипергеометрические функции

Уравнение с тремя регулярными особыми точками называется *гипергеометрическим уравнением*. Пусть z_0, z_1, z_2 — особые точки. Замена переменной

$$t = \frac{(z - z_0)(z_1 - z_2)}{(z - z_2)(z_1 - z_0)},$$

конформно отображающая комплексную плоскость переменной на себя, переводит регулярные особые точки в $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = \infty$. При этом коэффициенты уравнения (5.1) должны принять вид

$$p(t) = \frac{A_0}{t} + \frac{A_1}{(t-1)}, \quad q(t) = \frac{C}{t(t-1)} + \frac{B_0}{t^2} + \frac{B_1}{(t-1)^2}.$$

Коэффициенты B_k при $\frac{1}{t^2}, \frac{1}{(t-1)^2}$ можно сделать равными нулю с помощью степенной замены $y = t^\nu(t-1)^\mu F$. В результате получим канонический вид гипергеометрического уравнения

$$t(t-1) \frac{d^2 F}{dt^2} + [(\alpha + \beta + 1)t - \gamma] \frac{dF}{dt} + \alpha\beta F = 0, \quad (5.6)$$

в котором α, β, γ связаны простыми соотношениями с A_k, B_k, C . Решением уравнения (5.6) служат *гипергеометрические функции Гаусса*. Во всех регулярных особых точках решения имеют степенные асимптотики. Их можно найти, подставляя в уравнение (5.6) функцию вблизи особой точки t' в виде $F \sim (t - t')^\nu (1 + O(t - t'))$ и отбрасывая малые по $t - t'$ члены:

$$\begin{aligned} F &\sim t^{\nu_0}, & \text{при } t \rightarrow 0: & \quad \nu_0 = 0, \quad 1 - \gamma; \\ F &\sim (t - 1)^{\nu_1}, & \text{при } t \rightarrow 1: & \quad \nu_1 = 0, \quad \gamma - \alpha - \beta; \\ F &\sim \frac{1}{t^{\nu_\infty}}, & \text{при } t \rightarrow \infty: & \quad \nu_\infty = \alpha, \quad \beta. \end{aligned}$$

Разложение в нуле решения с $\nu_0 = 0$ в ряд Тейлора имеет вид

$$F \equiv {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; t) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{t}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{t^2}{2!} + \dots$$

Из разложения видно, что если α или β — целое неположительное число, то ряд обрывается, а значит F превращается в полином.

Вырожденное гипергеометрическое уравнение получается из гипергеометрического в результате слияния двух регулярных особых точек. Сделаем в гипергеометрическом уравнении замену $t = \frac{x}{\beta}$ и устремим β к бесконечности, тогда $x_0 = t_0\beta = 0$, $x_1 = t_1\beta \rightarrow \infty$, $x_2 = t_2\beta = \infty$, так что две особые точки x_1, x_2 сливаются в одну. В результате получим вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + (\gamma - x) \frac{dF}{dx} - \alpha F = 0, \quad (5.7)$$

в котором точка $x = \infty$ является иррегулярной особой точкой. Асимптотика в нуле $x \rightarrow 0$ степенная: $F \sim x^{\nu_0}$, где $\nu_0 = 0$ или $\nu_0 = 1 - \gamma$, а при $x \rightarrow \infty$ — экспоненциальная: $F \sim e^x$ и степенная: $F \sim x^{-\alpha}$.

Разложение в нуле решения с $\nu_0 = 0$ этого уравнения в ряд Тейлора имеет вид

$$\begin{aligned} {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{\beta}\right) = \\ &= 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Из разложения видно, что если α — целое неположительное число, то ряд обрывается, а значит, ${}_1F_1$ становится полиномом.

5.3. Ортогональные полиномы

Полиномы, задаваемые обобщенной формулой Родрига

$$P_n(x) = \frac{A_n}{W(x)} \frac{d^n}{dx^n} W(x) [R(x)]^n, \quad (5.8)$$

где n — степень полинома $P_n(x)$, а $R(x)$ — полином, ортогональный с весом $W(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx W(x) P_n(x) P_m(x) = \delta_{nm} h_n, \quad W(x_1) R(x_1) = W(x_2) R(x_2) = 0 \quad (5.9)$$

на интервале (x_1, x_2) , ограниченном точками, в которых $W(x)R(x)$ обращается в нуль (см. задачу 124).

Существует три классических типа ортогональных полиномов (см. задачу 123), отличающихся областью определения.

1. Полиномы, заданные на всей числовой оси $(-\infty < x < \infty)$,

$$R(x) = 1, \quad W(x) = \exp(-b^2(x-a)^2). \quad (5.10)$$

Сдвигом и растяжением переменной такие полиномы сводятся к полиномам Эрмита:

$$H_n(x) = \frac{A_n}{\exp(-x^2)} \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2). \quad (5.11)$$

2. Полиномы, заданные на полуоси $(a \leq x < \infty)$,

$$R(x) = x - a, \quad W^\alpha(x) = e^{-b(x-a)}(x-a)^\alpha, \quad \alpha > -1. \quad (5.12)$$

Сдвигом и растяжением переменной такие полиномы сводятся к обобщенным полиномам Лагерра:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{A_n^\alpha}{x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} x^{\alpha+n} e^{-x}. \quad (5.13)$$

3. Полиномы, заданные на отрезке $(a_1 \leq x \leq a_2)$,

$$R(x) = (x - a_1)(a_2 - x), \quad W^{\alpha,\beta}(x) = (x - a_1)^\alpha (a_2 - x)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \quad (5.14)$$

Сдвигом и растяжением переменной такие полиномы сводятся к полиномам Якоби:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{A_n^{\alpha,\beta}}{(x+1)^\alpha (1-x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} (x+1)^{\alpha+n} (1-x)^{\beta+n}. \quad (5.15)$$

При $\alpha = \beta = \lambda$ полиномы Якоби сводятся к полиномам Гегенбауэра, а при $\lambda = 0$ — к полиномам Лежандра.

Полиномы всех трех типов являются собственными функциями оператора (задача 125)

$$\hat{L}P_n(x) = \frac{1}{W(x)} \frac{d}{dx} \left(W(x) R(x) \frac{d}{dx} P_n(x) \right) = -\lambda_n P_n(x), \quad (5.16)$$

$$x \in (x_1, x_2), \quad W(x_1)P_n(x_1) = W(x_2)P_n(x_2) = 0,$$

где весовая функция $W(x)$ и полином $R(x)$ имеют вид (5.10), (5.12) или (5.14). Оператор $\hat{L}$ является эрмитовым в гильбертовом пространстве со скалярным произведением, заданным формулой (5.9). Уравнение (5.16) для полиномов Якоби сводится к гипергеометрическому, а для полиномов Эрмита и Лагерра — к вырожденному гипергеометрическому уравнению (задача 154).

Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо изложена в книгах [Сми74б, МФ58, Кам76]. Читателям, интересующимся теорией специальных функций мы можем порекомендовать трехтомник [БЭ73, БЭ74, БЭ67, Олв90]. Таблицы и графики специальных функций можно найти в справочниках [АС79, ЯЭЛ77].

5.4. Примеры

118. Доказать, что если особая точка $x_0 \neq \infty$ уравнения (5.1) является регулярной, то коэффициенты (5.1) имеют вид

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{(x - x_0)}, \quad q(x) = \frac{q_1(x)}{(x - x_0)^2},$$

где $p_1(x)$ и $q_1(x)$ — аналитические в окрестности $x = x_0$ функции.

Решение. Не теряя общности, можно положить $x_0 = 0$. Если $x = 0$ регулярная особая точка уравнения, то асимптотика решений (5.5) и вронскиана (5.2) при $x \rightarrow 0$ в невырожденном случае имеет вид

$$y_j(x) \rightarrow x^{\rho_j}, \quad W(x) \rightarrow (\rho_2 - \rho_1)x^{\rho_1 + \rho_2 - 1}.$$

Выражая $p(x)$ и $q(x)$ через $y(x)$ и $W(x)$ с помощью уравнений (5.1) и (5.3), находим асимптотику при $x \rightarrow 0$:

$$p(x) = -\frac{dW(x)/dx}{W(x)} \rightarrow \frac{A}{x},$$

$$q(x) = -\frac{d^2 y_j(x)/dx^2}{y_j(x)} - p(x) \frac{dy_j(x)/dx}{y_j(x)} \rightarrow \frac{B}{x^2}.$$

119. Найти регулярные особые точки и характеристические показатели в уравнении Бесселя:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Решение. Переписывая уравнение в виде (5.1), находим $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$. Имеется одна регулярная особая точка $x = 0$ и одна иррегулярная $x = \infty$. Асимптотику в регулярной особой точке надо

искать в степенном виде. Подставляя $y(x) \sim x^\rho$ в уравнение и отбрасывая малые по x члены, получаем при $x \rightarrow 0$

$$(\rho(\rho-1) + \rho - \nu^2)x^\rho = 0,$$

значит, характеристические показатели равны

$$\rho_{\pm} = \pm \nu.$$

В вырожденном случае $(\rho_+ - \rho_- = 2\nu = n$, где n — целое) в асимптотике второго решения могут появляться логарифмические члены. Обозначим за $J_{n/2}(x) \sim x^{n/2}$ регулярное в нуле решение $n \geq 0$. Асимптотику второго решения найдем с помощью подстановки

$$y_2(x) = J_{n/2}(x) \int^x dt f(t).$$

На $f(x)$ получаем уравнение

$$J_{n/2}(x) \frac{df(x)}{dx} + \left(2 \frac{dJ_{n/2}(x)}{dx} + \frac{J_{n/2}(x)}{x} \right) f(x) = 0,$$

решение которого

$$f(x) = \frac{1}{x J_{n/2}^2(x)}$$

разложим в ряд по x вблизи $x = 0$

$$f(x) = x^{-n-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Интегрируя по x , находим асимптотику $y_2(x)$:

$$y_2(x) \rightarrow a_0 \ln(x) \quad \text{при } n = 0,$$

$$y_2(x) \rightarrow a_0 x^{-n/2} \quad \text{при } n > 0.$$

Если коэффициент $a_n \neq 0$, то в разложении $y_2(x)$ обязательно будут логарифмические члены, возникающие при интегрировании $f(x)$.

Асимптотику в иррегулярной особой точке будем искать в виде $y(x) \rightarrow \exp(\lambda x^\sigma)$ при $x \rightarrow \infty$. Подставляя ее в уравнение и отбрасывая малые по $\frac{1}{x}$ члены, получаем, что при $x \rightarrow \infty$ остается три члена.

$$\lambda^2 \sigma^2 x^{2\sigma} + \lambda \sigma^2 x^\sigma + x^2 = 0.$$

Предполагая, что лидирующими являются первые два члена, приравняем их друг другу и получаем $\sigma = 0$. Но поскольку последний член растет при $x \rightarrow \infty$ быстрее, мы заключаем, что предположение не верно. Предполагаем теперь, что лидирующими являются последние два члена, приравняв их друг другу, получаем $\sigma = 2$. Но поскольку в этом случае

первый член растет при $x \rightarrow \infty$ быстрее, мы заключаем, что предположение опять не верно. Наконец, рассмотрим последнюю возможность и приравняем первый и последний члены уравнения. Откуда получаем, что $\sigma = 1$, $\lambda = \pm i$, $y(x) \rightarrow \exp(\pm ix)$. ►

120. Выразить функции Бесселя $J_\nu(x)$ через вырожденную гипергеометрическую функцию.

Решение. Особые точки уравнения Бесселя (П.14) и вырожденного гипергеометрического уравнения (5.7) совпадают, а асимптотики в них отличаются. Решения уравнения Бесселя при $x \rightarrow 0$ стремятся к $x^{\pm\nu}$, а при $x \rightarrow \infty$ стремятся к $\exp(\pm ix)$ (задача 119). Выделив эти асимптотики

$$J_\nu(x) = x^\nu \exp(-ix) f(x),$$

на $f(x)$ получаем уравнение

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + [2\nu + 1 - 2ix] \frac{df}{dx} - i(2\nu + 1)f = 0.$$

Сравнивая с уравнением (5.7), получаем

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\exp(-ix)}{\Gamma(\nu + 1)} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2ix\right).$$

Коэффициент пропорциональности найден из сравнения разложений в ряд (5.7) и (П.15) при $x \rightarrow 0$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad {}_1F_1(\alpha; \gamma; 0) = 1. \quad \blacktriangleright$$

121. Найти характеристические показатели в регулярных особых точках уравнения Лежандра (уравнение на собственные функции угловой части оператора Лапласа в сферических координатах):

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) - \frac{m^2 y}{\sin^2 \theta} = -\lambda_m y. \quad (5.17)$$

Решение. После замены переменной $x = \cos \theta$ уравнение принимает, с точностью до переобозначения λ на $l(l+1)$, вид (П.36), в котором три регулярные особые точки $x = \pm 1$, $x = \infty$. Ищем асимптотики при $x \rightarrow \pm 1$ в степенном виде:

$$y(x) \sim (1-x)^{\rho_1}, \quad y(x) \sim (1+x)^{\rho_2}.$$

Подставляя их в уравнение (П.36) и отбрасывая малые по $1 \pm x$ члены, получаем

$$\rho_1 = \pm \frac{m}{2}, \quad \rho_2 = \pm \frac{m}{2}.$$

Асимптотику при $x \rightarrow \infty$ ищем также в степенном виде $x^{-\rho_x}$ и для характеристического показателя получаем квадратное уравнение

$$\rho_\infty(\rho_\infty + 1) = \lambda_m.$$

122. Выразить функции Лежандра $P_l^m(x)$ через гипергеометрическую функцию Гаусса.

Решение. Особые точки уравнения Лежандра (П.36) $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = \infty$ и гипергеометрического уравнения (5.6) отличаются. Сделаем конформную замену $t = \frac{1-x}{2}$, переводящую регулярные особые точки $1, -1, \infty$ в $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = \infty$. В новых переменных уравнение примет вид

$$t(t-1) \frac{d^2 F}{dt^2} + [2t-1] \frac{dF}{dt} - \left(\frac{m^2}{4t(t-1)} + l(l+1) \right) F = 0.$$

Выделяя асимптотики функции $F(t) \equiv P_l^m(1-2t)$ при $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow 1$ (см. задачу 121), получаем, что функция

$$f(t) = \frac{F(t)}{t^{m/2}(t-1)^{m/2}}$$

удовлетворяет гипергеометрическому уравнению (5.6):

$$t(t-1) \frac{d^2 f}{dt^2} + [2t-1](m+1) \frac{df}{dt} - (l(l+1) - m(m+1))f = 0,$$

$$f(t) = A {}_2F_1(m-l, m+l+1; m+1; t).$$

Осталось найти коэффициент пропорциональности A . Поскольку при $t \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 1$) гипергеометрическая функция ${}_2F_1$ стремится к 1, а функции Лежандра (П.37) стремятся к

$$\frac{P_l^m(x)}{(1-x^2)^{m/2}} \Big|_{x=1} \rightarrow \frac{(l+m)!}{2^m m! (l-m)!},$$

получаем

$$P_l^m(x) = \frac{(l+m)!}{2^m (l-m)! m!} (1-x^2)^{m/2} {}_2F_1 \left(m-l, m+l+1; m+1; \frac{1-x}{2} \right). \blacktriangleright$$

123. Найти, при каких $W(x)$ и $R(x)$ функции $P_n(x)$, задаваемые обобщенной формулой Родрига (5.8), являются полиномами n -й степени.

Решение. Выразим полином первой степени $P_1(x) = A_1 \nu(\mu-x)$ через $W(x)$ и $R(x)$ с помощью обобщенной формулы Родрига (5.8):

$$\nu(\mu-x) = \frac{P_1(x)}{A_1} = \frac{R(x)}{W(x)} \frac{dW}{dx} + \frac{dR}{dx}. \quad (5.18)$$

Рассмотрим (5.18) как дифференциальное уравнение для функции $W(x)$ при различных степенях k полинома $R(x)$: $k=0$, $k=1$ и $k \geq 2$. Решения этого уравнения имеют следующий вид:

1. При $R = 1$ весовая функция равна с точностью до постоянного множителя $W(x) = \exp\left(-\frac{\nu(x-\mu)^2}{2}\right)$. Подставляя ее в формулу Родрига, убеждаемся, что

$$P_n(x) = A_n \exp\left(\frac{\nu(x-\mu)^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{\nu(x-\mu)^2}{2}\right)$$

— полином n -й степени. Сдвигом и растяжением переменной такие полиномы сводятся к полиномам Эрмита.

2. При $R = x - a$ весовая функция $W^\alpha(x) = (x - a)^\alpha \exp(-\nu(x - a))$ зависит от параметра $\alpha = \nu(\mu - a) - 1$, который мы записали в виде верхнего индекса. Подставляя ее в формулу Родрига, убеждаемся, что

$$P_n^\alpha(x) = A_n^\alpha (x - a)^{-\alpha} \exp(\nu(x - a)) \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^{\alpha+n} \exp(-\nu(x - a))$$

— полином n -й степени. Сдвигом и растяжением переменной такие полиномы сводятся к обобщенным полиномам Лагерра.

3. При $R(x) = \prod_{r=1}^k (x - a_r)$, где $k \geq 2$, а все a_r предполагаются различными, уравнение (5.18) для $W(x)$ перепишем в виде

$$\frac{1}{W(x)} \frac{dW}{dx} = \frac{\nu(\mu - x)}{R(x)} - \frac{1}{R(x)} \frac{dR}{dx} = \sum_{r=1}^k \frac{\alpha_r}{x - a_r}.$$

Здесь α_r — коэффициенты разложения на простые дроби. Решение этого уравнения для весовой функции можно записать в виде $W(x) = \prod_{r=1}^k (x - a_r)^{\alpha_r}$. Прямой подстановкой весовой функции $W(x)$ и $R(x)$ в обобщенную формулу Родрига получаем, что степень полинома P_n равна $\deg P_n = n(k - 1)$. По условию задачи необходимо, чтобы $\deg P_n = n$, поэтому k может быть равно только 2. Обозначим $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ и будем указывать эти параметры в виде верхних индексов

$$W^{\alpha,\beta}(x) = (x - a_1)^\alpha (a_2 - x)^\beta,$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = A_n^{\alpha,\beta} (x - a_1)^{-\alpha} (a_2 - x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} (x - a_1)^{\alpha+n} (a_2 - x)^{\beta+n}.$$

Сдвигом и растяжением переменной такие полиномы сводятся к полиномам Якоби.

124. Доказать, что полиномы, задаваемые обобщенной формулой Родрига (5.8), ортогональны с весом $W(x)$ на интервале (x_1, x_2) , ограниченном точками, в которых $W(x)R(x)$ обращается в нуль: $W(x_1)R(x_1) = W(x_2)R(x_2) = 0$.

Решение. Выражение $W(x)R(x)$ для всех трех типов полиномов, найденных в задаче 123, обращается в нуль в точках:

- 1) для (5.10) $x_1 = -\infty, x_2 = \infty$;
- 2) для (5.12) $x_1 = a, x_2 = \infty$;
- 3) для (5.14) $x_1 = a_1, x_2 = a_2$.

Обозначая $W^{\alpha,\beta}(x)$ весовые функции всех трех типов (весовая функция может зависеть только от одного параметра (5.12) или не зависеть от параметров (5.10)), замечаем, что

$$W^{\alpha,\beta}(x)R(x) = W^{\alpha+1,\beta+1}(x). \quad (5.19)$$

Пусть $n > m$. Полагая для простоты нормировочные константы A_n равными единице, проинтегрируем по частям скалярное произведение

$$\begin{aligned} I_{nm}^{\alpha,\beta} &= \int_{x_1}^{x_2} dx W^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) = \\ &= W^{\alpha,\beta}(x) R(x) \left[(W^{\alpha+1,\beta+1}(x))^{-1} \frac{d^{n-1} W^{\alpha+1,\beta+1} R^{n-1}}{dx^{n-1}} \right] P_m^{\alpha,\beta}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \\ &- \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{d^{n-1} W^{\alpha,\beta} R^n}{dx^{n-1}} \right) \frac{dP_m^{\alpha,\beta}(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Выражение в квадратных скобках — полином $P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)$. Это, в частности, означает, что в точках x_1, x_2 , где $W^{\alpha,\beta}R = 0$, в нуль обращается также внеинтегральный член при $\alpha > -1, \beta > -1$. Повторяя интегрирование по частям $n-1$ раз (внеинтегральный член каждый раз будет обращаться в нуль, в силу того что $W^{\alpha,\beta}(x_1)R(x_1) = W^{\alpha,\beta}(x_2)R(x_2) = 0$), получаем

$$I_{nm}^{\alpha,\beta} = \int_{x_1}^{x_2} dx (-1)^n W^{\alpha,\beta}(x) R^n(x) \left[\frac{d^n P_m^{\alpha,\beta}(x)}{dx^n} \right] = 0 \quad \text{при } m < n. \quad (5.21)$$

Здесь мы учли, что производная n -го порядка от полинома степени m равна нулю при $m < n$. Если $m > n$, то для доказательства обращения интеграла в нуль надо поменять n и m местами. В результате $I_{nm}^{\alpha,\beta} = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm}$, и ортогональность полиномов доказана. ►

125. Доказать, что полиномы, задаваемые обобщенной формулой Родрига (5.8), являются собственными функциями оператора $\hat{L}$ (5.16), в котором функции $W(x)$ и $R(x)$ имеют вид (5.10), (5.12) или (5.14). Найти собственные значения λ_n оператора $\hat{L}$.

Решение. Воспользуемся тем, что умножение весовой функции на полином $R(x)$ увеличивает ее верхние индексы на единицу (5.19). Оператор

$$\hat{q}^{\alpha,\beta} = \frac{R(x)}{W^{\alpha,\beta}(x)} \frac{d}{dx} W^{\alpha,\beta}(x),$$

где оператор производной действует на все стоящие справа функции, увеличивает степень полинома $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ на единицу, переводя его в ортогональный набор полиномов с индексами α, β , уменьшенными на единицу:

$$\begin{aligned} \hat{q}^{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x) &= A_n^{\alpha,\beta} \frac{R(x)}{W^{\alpha,\beta}(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(\frac{W^{\alpha,\beta}(x)}{R(x)} R^{n+1}(x) \right) = \\ &= \frac{A_n^{\alpha,\beta}}{A_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}} P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}(x). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь $A_n^{\alpha,\beta}$ — нормировочная константа, а полиномы предполагаются нормированными на 1. Операторы, увеличивающие степень полинома на единицу, называются повышающими. Очевидно, что оператор $\frac{d}{dx}$ понижает степень полинома на единицу. Воспользуемся полнотой набора ортогональных полиномов $P_m^{\alpha,\beta}(x)$ и разложим по этому базису полином n -й степени $\frac{dP_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}}{dx}$:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx W^{\alpha,\beta}(x) \left(\frac{dP_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}}{dx} \right) P_m^{\alpha,\beta}(x) &= \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} dx P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}(x) W^{\alpha-1,\beta-1}(x) \hat{q}^{\alpha,\beta} P_m^{\alpha,\beta}(x) = -\delta_{nm} \frac{A_n^{\alpha,\beta}}{A_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}}. \end{aligned}$$

Здесь мы проинтегрировали по частям, и внеинтегральный член обратился в нуль. Полученное равенство означает, что

$$\frac{dP_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}}{dx} = -\frac{A_n^{\alpha,\beta}}{A_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}} P_n^{\alpha,\beta}(x).$$

Подставляя это выражение в (5.22), получаем, что полиномы удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^{\alpha,\beta}(x)} \frac{d}{dx} \left(W^{\alpha,\beta}(x) R(x) \frac{d}{dx} P_n^{\alpha,\beta}(x) \right) &= -\lambda_n P_n^{\alpha,\beta}(x), \\ \lambda_n^{\alpha,\beta} &= \left(\frac{A_{n+1}^{\alpha+1,\beta+1}}{A_n^{\alpha,\beta}} \right)^2. \end{aligned}$$

При выбранной нормировке полиномов собственные значения $\lambda_n^{\alpha,\beta}$ выражаются через нормировочные константы, которые, в свою очередь,

связаны с нормировочными интегралами $I_{nn}^{\alpha,\beta}$ (5.20). Найдем собственные значения для различных весовых функций $W^{\alpha,\beta}(x)$ во всех трех случаях (5.10), (5.12) и (5.14).

1. Для полиномов Эрмита (5.11)

$$\hat{q} = \exp(x^2) \frac{d}{dx} \exp(-x^2),$$

а нормировочные константы

$$(A_n)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (-1)^n \exp(-x^2) \frac{d^n}{dx^n} \left(\exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \right) = \frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}}.$$

Откуда $\lambda_n = 2n$.

2. Для полиномов Лагерра (5.13)

$$\hat{q}^\alpha = x^{-\alpha+1} e^x \frac{d}{dx} x^\alpha e^{-x},$$

а нормировочные константы

$$(A_n^\alpha)^{-2} = \int_0^\infty dx (-1)^n x^{\alpha+n} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} x^{\alpha+n} e^{-x} \right) = n! \Gamma(\alpha + n + 1).$$

Откуда $\lambda_n^\alpha = n$.

3. Для полиномов Якоби (5.15)

$$\hat{q}^{\alpha,\beta} = (x - a_1)^{1-\alpha} (a_2 - x)^{1-\beta} \frac{d}{dx} (x - a_1)^\alpha (a_2 - x)^\beta,$$

а нормировочные константы

$$\begin{aligned} (A_n^{\alpha,\beta})^{-2} &= \\ &= \int_{-1}^1 dx (-1)^n (x+1)^{\alpha+n} (1-x)^{\beta+n} \frac{d^n}{dx^n} \frac{\frac{d^n}{dx^n} (x+1)^{\alpha+n} (1-x)^{\beta+n}}{(x+1)^\alpha (1-x)^\beta} = \\ &= n! 2^{\alpha+\beta+2n+1} B(\alpha+n+1, \beta+n+1) \times \\ &\quad \times \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(l+\alpha+1) \Gamma(n-l+\beta+1)} \\ &= n! 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \end{aligned}$$

Откуда $\lambda_n^{\alpha,\beta} = n(\alpha + \beta + n + 1)$.

126. Выделив асимптотики в особых точках уравнения Лежандра

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) - \frac{m^2 y}{\sin^2 \theta} = -\lambda_m y, \quad (5.23)$$

найти коэффициенты разложения в ряд по $x = \cos \theta$. При каких λ_m ряд обрывается и имеется ограниченное решение?

Решение. Выделяя степенные асимптотики в точках $x = \pm 1$ (см. задачу (121))

$$f(x) = \frac{y(x)}{(1-x^2)^{m/2}},$$

получаем уравнение на функцию $f(x)$

$$(1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x(m+1) \frac{df}{dx} + (\lambda_m - m(m+1))f = 0. \quad (5.24)$$

Подставим $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в виде степенного ряда по x в уравнение и приравняем нулю сумму коэффициентов при одинаковых степенях x . На a_n получаем рекуррентные соотношения

$$a_{n+2} = a_n \frac{(n+m)(n+m+1) - \lambda_m}{(n+1)(n+2)}.$$

Коэффициент a_{k+2} обращается в нуль, а ряд обрывается, только если $\lambda_m = l(l+1)$, $l \geq m$, при этом $k = l - m$. ►

127. Получить из формулы Родрига (П.37) для полиномов Лежандра интегральное представление Шлефли (П.43).

Решение. По формуле для вычета в полюсе порядка $l+1$, вычет в точке x равен

$$\oint_{(x+)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-x)^{l+1}} = \frac{1}{l!} \frac{d^l f(x)}{dx^l}.$$

Подставляя сюда $f(x) = 2^{-l}(x^2-1)^l$, получаем интегральное представление полиномов Лежандра:

$$P_l(x) = \oint_{(x+)} \frac{dz}{2^{l+1}\pi i} \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}},$$

которое можно переписать в виде интеграла по отрезку, сделав замену переменной z на ϕ :

$$z = x + i \exp(i\phi) \sqrt{1-x^2}, \quad dz = (z-x)i d\phi,$$

$$z^2 - 1 = x^2 + 2x(z-x) + (z-x)^2 - 1 = 2(z-x)(x + i\sqrt{1-x^2} \cos(\phi)),$$

$$P_l(\cos \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^l. \quad \blacktriangleright$$

128. Найти производящую функцию (П.41) для полиномов Лежандра $P_l(x)$ с помощью интегрального представления (П.43).

Решение. Подставим в выражение для производящей функции интегральное представление для полиномов Лежандра

$$F(r, \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} r^l (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^l, \quad r < 1,$$

$$F(r, \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} r^{-l-1} P_l(\cos \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} r^{-l-1} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^l, \quad r > 1.$$

Просуммируем геометрическую прогрессию

$$F(r, \cos \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{1 - r \cos \theta - i r \sin \theta \cos \phi}, \quad r < 1,$$

$$F(r, \cos \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{r - \cos \theta - i \sin \theta \cos \phi}, \quad r > 1.$$

Сделаем замену переменной $y = i \exp(i\phi)$:

$$F(r, \cos \theta) = \oint_{|y|=1} \frac{dy}{2\pi i} \frac{-2}{r \sin \theta} \left(y^2 - 2 \frac{1 - r \cos \theta}{r \sin \theta} y - 1 \right)^{-1}, \quad r < 1,$$

$$F(r, \cos \theta) = \oint_{|y|=1} \frac{dy}{2\pi i} \frac{-2}{\sin \theta} \left(y^2 - 2 \frac{r - \cos \theta}{\sin \theta} y - 1 \right)^{-1}, \quad r > 1.$$

Вклад в интеграл дает вычет в том из двух полюсов подынтегрального выражения, который находится внутри окружности единичного радиуса:

$$y^{\pm} = \frac{1 - r \cos \theta \pm \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}{r \sin \theta}, \quad r < 1,$$

$$y^{\pm} = \frac{r - \cos \theta \pm \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}{\sin \theta}, \quad r > 1.$$

Используя равенство $y^+ y^- = 1$, находим, что $|y^-| < 1$, а $|y^+| > 1$. Поэтому вычет надо брать в точке $y = y^-$

$$F(r, x) = \frac{2}{r \sin \theta} \frac{1}{|y^+ - y^-|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}}, \quad r < 1,$$

$$F(r, x) = \frac{2}{\sin \theta} \frac{1}{|y^+ - y^-|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}}, \quad r > 1.$$

129. Получить рекуррентные соотношения (П.39) и формулы дифференцирования (П.40) с помощью производящей функции (П.41).

Решение. Дифференцируя производящую функцию, получаем

$$\frac{\partial F(r, x)}{\partial r} = \frac{x - r}{1 + r^2 - 2rx} F(r, x), \quad \frac{\partial F(r, x)}{\partial x} = \frac{r}{1 + r^2 - 2rx} F(r, x).$$

Умножим эти равенства на $1 + r^2 - 2rx$. Разлагая в ряд по степеням r и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях r , находим

$$(l+1)P_{l+1}(x) + (l-1)P_{l-1}(x) - 2x l P_l(x) = -P_{l-1}(x) + x P_l(x),$$

$$\frac{d}{dx} P_{l+1}(x) + \frac{d}{dx} P_{l-1}(x) - 2x \frac{d}{dx} P_l(x) = P_l(x).$$

Первое равенство перепишем в виде (П.39)

$$(l+1)P_{l+1}(x) + l P_{l-1}(x) = x(2l+1)P_l(x).$$

Дифференцируя его и вычитая из второго равенства, умноженного на $l + \frac{1}{2}$ или $l + 1$, получаем (П.40)

$$\frac{d}{dx} P_{l+1}(x) - \frac{d}{dx} P_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x),$$

$$x \frac{d}{dx} P_l(x) - \frac{d}{dx} P_{l-1}(x) = l P_l(x).$$

130. Доказать ортогональность и выразить нормированные сферические функции Y_{lm} через P_l^m .

Решение. Нормированные ортогональные сферические функции

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = A_l^m P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi)$$

должны удовлетворять соотношению

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = 2\pi \delta_{mm'} A_l^m A_{l'}^m \int_{-1}^1 dx P_l^{|m|}(x) P_{l'}^{|m|}(x) = \delta_{mm'} \delta_{ll'}.$$

Иначе говоря, присоединенные функции Лежандра должны быть ортогональны

$$F = \int_{-1}^1 dx P_l^{|m|}(x) P_{l'}^{|m|}(x) = \delta_{ll'} \frac{1}{2\pi(A_l^m)^2}.$$

Положим $l' > l$. Воспользуемся формулой Родрига для функций Лежандра. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} F &= \int_{-1}^1 dx \frac{(1-x^2)^{|m|}}{2^{l+l'} l! l'!} \left(\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (x^2-1)^l \right) \left(\frac{d^{l'+|m|}}{dx^{l'+|m|}} (x^2-1)^{l'} \right) = \\ &= \int_{-1}^1 dx \frac{(-1)^{l'+|m|} (x^2-1)^{l'}}{2^{l+l'} l! l'!} \left[\frac{d^{l'+|m|}}{dx^{l'+|m|}} \left((1-x^2)^{|m|} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (x^2-1)^l \right) \right]. \end{aligned}$$

Произведение в квадратных скобках отлично от нуля только при $l = l'$ и равно в этом случае $\frac{(-1)^m (2l)!(l+|m|)!}{(l-|m|)!}$. При $l' < l$ надо поменять l, l' местами, таким образом, ортогональность доказана. Вычисляя оставшийся интеграл F , получим выражение для коэффициентов A_l^m :

$$F = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}, \quad A_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}. \quad \blacktriangleright$$

131. Нарисовать график зависимости сферических гармоник

$$|Y_{lm}|(\cos \theta)$$

от угла θ при $m = l$ и при $m = 0$, $l \gg 1$ (в квазиклассическом приближении).

Решение. При $m = l$ из формулы Родрига находим $|Y_{ll}| \sim \sin^l \theta$. При $m = 0$ приведем уравнение (П.36) к стандартному виду оператора Штурма—Лиувилля с помощью подстановки, исключающей члены с первой производной:

$$\begin{aligned} Y_{l0}(\theta) &= \frac{f(\theta)}{\sqrt{\sin \theta}}, \\ \frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) + \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right] f(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

При $\sin \theta \gg \frac{1}{l}$ мы можем пренебречь вторым членом в квадратных скобках. Тогда, за исключением окрестностей $\theta \ll \frac{1}{l}$, $\pi - \theta \ll \frac{1}{l}$, функция имеет вид

$$Y_{l0} \sim \frac{\sin \left(\theta \left(l + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\sin \theta}}.$$

Фаза $\frac{\pi}{4}$ определяется из требования симметрии функции

$$Y_{l0}(\theta) = (-1)^l Y_{l0}(\pi - \theta).$$

При $\theta \rightarrow 0, \pi$ сферическая функция $Y_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta)$ стремится к конечной величине (рис. 5.2).

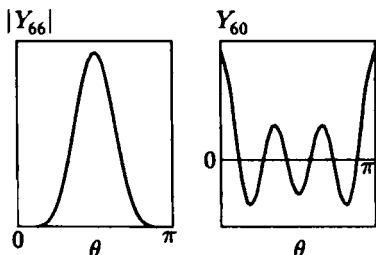


Рис. 5.2. Графики сферических гармоник с орбитальным моментом $l = 6$. На левом рисунке $m = l$, на правом — $m = 0$



132. Привести радиальную часть трехмерного уравнения Шрёдингера для частицы, находящейся в связанном состоянии ($E < 0$), в кулоновском поле $U = -\frac{1}{r}$ (атомные единицы):

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}) + 2 \left(E + \frac{1}{r} \right) \Psi(\mathbf{r}) = 0$$

к уравнению Лагерра (П.58), выделив асимптотики в особых точках.

Решение. После разделения переменных радиальная часть уравнения Шрёдингера принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \Psi(r) + \left(\frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2E \right) \Psi(r) = 0.$$

В этом уравнении особые точки — $r = 0$ регулярная и $r = \infty$ иррегулярная — совпадают с особыми точками вырожденного гипергеометрического уравнения (5.7), но асимптотики в них другие:

$$\begin{aligned} \text{при } r \rightarrow 0: \quad & \Psi(r) \sim r^l \text{ или } r^{-l-1}, \\ \text{при } r \rightarrow \infty: \quad & \Psi(r) \sim \exp(\pm r\sqrt{-2E}). \end{aligned}$$

Выделяя асимптотики $\Psi(r) = r^l \exp(-r\sqrt{-2E}) f(r)$, на $f(r)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{2(l+1)}{r} - 2\sqrt{-2E} \right) \frac{df}{dr} + \frac{2 - 2(l+1)\sqrt{-2E}}{r} f(r) = 0,$$

которое после перехода к новой переменной $\rho = 2r\sqrt{-2E}$, сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению (5.7) с $\gamma = 2(l+1)$ и $\alpha = l+1 - \frac{1}{\sqrt{-2E}}$:

$$\rho \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + (2(l+1) - \rho) \frac{df(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1}{\sqrt{-2E}} - l - 1 \right) f(\rho) = 0.$$

Требование убывания $\Psi(r)$ на бесконечности дает условие на

$$E = -\frac{1}{2} (-\alpha + l + 1)^2,$$

поскольку только при целых $\alpha \leq 0$ вырожденное гипергеометрическое уравнение сводится к уравнению Лагерра (П.58), которому удовлетворяет степенное решение (П.59): $f(\rho) = L_{-\alpha}^{2l+1}(\rho)$, растущее на бесконечности медленнее чем $\exp\left(\frac{\rho}{2}\right)$. Откуда

$$\Psi(r) = r^l \exp\left(-\frac{r}{n}\right) L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right), \quad n = \frac{1}{\sqrt{-2E}} \geq l+1. \quad \blacktriangleright$$

133. Найти нормировку радиальной волновой функции электрона в атоме водорода:

$$R_n^l(r) = A_n^l x^l \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_{n-l-1}^{2l+1}(x), \quad x = \frac{2r}{n}.$$

Решение. По определению нормированная волновая функция удовлетворяет уравнению (в атомных единицах),

$$1 = \int_0^\infty r^2 dr |R_n^l(r)|^2.$$

Заменим переменную интегрирования r на $x = \frac{2r}{n}$, где $n = \frac{1}{\sqrt{-2E}} \geq l+1$ целое, и, воспользовавшись формулой Родрига для полиномов Лагерра (П.59), перепишем в виде:

$$(A_n^l)^{-2} = \int_0^\infty \left(\frac{n}{2}\right)^3 x^2 dx x^{-2l-2} \exp(x) \left[\frac{1}{(n-l-1)!} \frac{d^{n-l-1}}{dx^{n-l-1}} [x^{n+l} \exp(-x)] \right]^2.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$(A_n^l)^{-2} = \left(\frac{n}{2}\right)^3 \int_0^\infty dx \frac{(-1)^{n-l-1} x^{n+l} e^{-x}}{(n-l-1)!^2} \left\{ \frac{d^{n-l-1}}{dx^{n-l-1}} x^{-2l} \left[e^x \frac{d^{n-l-1}}{dx^{n-l-1}} (x^{n+l} e^{-x}) \right] \right\}.$$

Выражение в фигурных скобках равно

$$(-1)^{n-l-1} (x(n-l)! - (n+l)(n-l-1)(n-l-1)!),$$

поэтому интеграл выражается через Γ -функции от целого аргумента:

$$\begin{aligned}(A_n^l)^{-2} &= \left(\frac{n}{2}\right)^3 \int_0^\infty dx \frac{\exp(-x)}{(n-l-1)!} [(n-l)x^{n+l+1} - (n+l)(n-l-1)x^{n+l}] = \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^3 \frac{(n-l)(n+l+1)! - (n+l)(n-l-1)(n+l)!}{(n-l-1)!}.\end{aligned}$$

Откуда получаем нормированную функцию

$$R_n^l(r) = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} \left(\frac{2r}{n}\right)^l \exp\left(-\frac{r}{n}\right) L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right). \quad \blacktriangleright$$

134. Найти собственные функции и энергию стационарных состояний уравнения Шрёдингера для осциллятора:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 \right) \Psi(x) = E \Psi(x).$$

Решение. Выделяя асимптотику при $x = \infty$, уравнение Шрёдингера для осциллятора можно свести к уравнению Эрмита. Мы поступим по-другому. Введя операторы

$$\hat{a} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} - x \right),$$

перепишем уравнение Шрёдингера,

$$\hat{H} \Psi(x) = \hat{a}^\dagger \hat{a} \Psi(x) = \left(E - \frac{1}{2} \right) \Psi(x).$$

Нетрудно видеть, что оператор $\hat{H}$ положительно определен для всех функций из L^2 :

$$\int dx \Psi^\dagger(x) \hat{H} \Psi(x) = \int dx \Psi^\dagger(x) \hat{a}^\dagger \hat{a} \Psi(x) = \int dx |\hat{a} \Psi(x)|^2 \geq 0.$$

Равенство нулю этого выражения достигается, только если

$$\hat{a} \Psi_0(x) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x \right) \Psi_0(x) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Psi_0(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

При этом $E_0 = \frac{1}{2}$. Для нахождения всего спектра энергий рассмотрим коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}\hat{a} \hat{a}^\dagger \Psi(x) &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \Psi(x) + \Psi(x), \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^n \Psi(x) &= (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \Psi(x) + (\hat{a}^\dagger)^n \Psi(x) = \\ &= n (\hat{a}^\dagger)^n \Psi(x) + (\hat{a}^\dagger)^{n+1} \hat{a} \Psi(x).\end{aligned}$$

Поскольку $\hat{a}\Psi_0 = 0$, из коммутационных соотношений следует, что функция $\Psi_n(x) = (\hat{a}^\dagger)^n \Psi_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(E - \frac{1}{2}\right) \Psi_n(x) = \hat{H} \Psi_n(x) = \hat{a}^\dagger \hat{a} \Psi_n(x) = n \Psi_n(x).$$

Откуда видим, что собственные функции $\Psi_n(x)$ состояния с энергией

$$E_n = n + \frac{1}{2}.$$

выражаются через полиномы Эрмита $H_n(x)$ (П.50):

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= A_n \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} - x \right) \right)^n \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) = \\ &= A_n \frac{i^n}{2^{(n/2)}} \exp \left(\frac{x^2}{2} \right) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), \end{aligned}$$

где мы воспользовались операторным тождеством $\left(\frac{d}{dx} - x\right)e^{x^2/2} = e^{x^2/2} \frac{d}{dx}$. Из соотношения ортогональности для полиномов Эрмита (П.52) получаем величину нормировочного коэффициента

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n!} \sqrt{\pi}}.$$

135. Найти собственные функции и энергию стационарных состояний уравнения Шрёдингера для двумерного (трехмерного) осциллятора в декартовых координатах:

$$-\frac{1}{2}(\Delta - r^2)\Psi(r) = E\Psi(r).$$

Найти кратности вырождения состояний.

Решение. В декартовых координатах переменные в этом уравнении разделяются. Для двумерного случая полагаем

$$\Psi(r) = \Psi^1(x_1)\Psi^2(x_2), \quad r = (x_1, x_2).$$

На $\Psi^j(x_j)$ получаем одинаковые уравнения

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx_j^2} - x_j^2 \right) \Psi^j(x_j) = E^j \Psi^j(x_j), \quad j = 1, 2, \quad E = E^1 + E^2.$$

Это уравнение Шрёдингера для одномерного осциллятора, собственные функции и спектр которого найдены в задаче 134. Таким образом, энергия стационарного состояния равна сумме энергий $E_n^j = n_j + \frac{1}{2}$ одномерных осцилляторов

а искомые собственные функции есть произведение функций $\Psi_{n_1}^1(x_1) \times \Psi_{n_2}^2(x_2)$, явный вид которых приведен в задаче 134. Кратность вырождения N -го уровня g_N есть число линейно независимых собственных функций с одинаковой энергией E_N , т. е. $n_1 + n_2 = N$. Так как каждому $n_{1,2}$ соответствует только одна собственная функция, находим, что

$$g_N = \sum_{n_1, n_2=0}^N \delta(n_1 + n_2 - N) = N + 1.$$

В трехмерном случае действуем аналогично. Поскольку энергия стационарного состояния определяется теперь суммой трех целых чисел

$$E_N = n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \equiv N + \frac{3}{2}, \quad N, n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots,$$

то кратность вырождения уже другая:

$$g_N = \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^N \delta(n_1 + n_2 + n_3 - N) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}. \quad \blacktriangleright$$

136. Найти собственные функции и энергию стационарных состояний уравнения Шрёдингера для трехмерного осциллятора в сферических координатах:

$$-\frac{1}{2}(\Delta - r^2)\Psi(r) = E\Psi(r).$$

Решение. В сферических координатах переменные в уравнении Шрёдингера для трехмерного осциллятора разделяются

$$\Psi(r) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Здесь $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферические функции, выражающиеся через решения уравнения Лежандра (задача 130). На радиальную функцию получается уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} R(r) + \left(2E - r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = 0.$$

Асимптотика решения в регулярной особой точке $r \rightarrow 0$ этого уравнения

$$R(r) \sim r^\rho, \quad \rho(\rho+1) - l(l+1) = 0, \quad \rho = l, \quad \rho = -l-1,$$

а в иррегулярной $r \rightarrow \infty$

$$R(r) \sim \exp\left(\pm \frac{r^2}{2}\right).$$

Выделяя асимптотики $R(r) = f(r)r^l \exp(-\frac{r^2}{2})$, для функции $f(r)$ получаем

Сделаем неконформную замену переменной $z = r^2$:

$$z \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \left(l + \frac{3}{2} - z\right) \frac{df(z)}{dz} + \frac{E - l - 3/2}{2} f(z) = 0.$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение (5.7) сводится к уравнению Лагерра (П.58) с индексами $\nu = l + \frac{1}{2}$, $2n = E - l - \frac{3}{2}$, если n — целое неотрицательное число. Из условия убывания $R(r)$ при $r \rightarrow \infty$ получаем, что $f(z)$ равна обобщенному полиному Лагерра $L_n^\nu(z)$, а собственные функции имеют вид

$$\Psi_{n,l,m}(r) = A_n^l r^l \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) L_n^{l+1/2}(r^2) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$E_N = \frac{3}{2} + l + 2n \equiv N + \frac{3}{2}.$$

Для вычисления кратности вырождения g_N уровня с энергией E_N вспомним, что при фиксированном l имеется $2l + 1$ линейно независимых функций Y_{lm} с различными m , поэтому

$$g_N = \sum_{n=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \sum_{l=0}^N (2l + 1) \delta(l + 2n - N) = \sum_{n=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} 2(N - 2n) + 1 = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2}.$$

Сравните с ответом к задаче 135 для трехмерного случая. Очевидно, что полученные собственные функции для N -го уровня энергии являются линейными комбинациями собственных функций с той же энергией из задачи 135. ►

137. Вывести интегральное представление (П.66) для полиномов Лагерра, используя преобразование Лапласа уравнения (П.58).

Решение. Подставляя обратное преобразование Лапласа

$$L_n^\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dt e^{tx} f(t)$$

в уравнение (П.58), получим

$$\int_C dt f(t) e^{tx} [xt^2 + (\nu + 1 - x)t + n] = 0.$$

Тождество $xe^{tx} \equiv \frac{de^{tx}}{dt}$ позволяет переписать полученное уравнение в виде

$$\int_C dt f(t) \left[\frac{d e^{tx}}{dt} (t^2 - t) + ((\nu + 1)t + n) e^{tx} \right] = 0.$$

Интегрируя по частям, находим, что

$$\int_C dt e^{tz} \left[-\frac{d(t^2 - t)f(t)}{dt} + ((\nu + 1)t + n)f(t) \right] = 0,$$

если контур интегрирования C выбран так, чтобы внеинтегральные члены обращались в нуль. Выражение в квадратных скобках дает дифференциальное уравнение первого порядка для $f(t)$:

$$\frac{d(t^2 - t)f(t)}{dt} = ((\nu + 1)t + n)f(t),$$

решение которого имеет вид

$$f(t) = A \frac{(1 - t)^{n+\nu}}{t^{n+1}}.$$

Эта функция имеет полюс при $t = 0$, поэтому контур интегрирования C можно выбрать в виде окружности радиуса $t < 1$, как указано в пояснении к формуле (П.66):

$$L_n^\nu(x) = \frac{A}{2\pi i} \int \frac{(1 - t)^{n+\nu}}{t^n} e^{tz} \frac{dt}{t}.$$

Нормировочная константа A не может быть определена из уравнения, а задается дополнительным условием нормировки $L_n^\nu(0) = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)n!}$, которое следует из формулы Родрига (П.59). Вычисляя интеграл при $x = 0$, получаем интегральное представление

$$L_n^\nu(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int \frac{(1 - t)^{n+\nu}}{t^n} e^{tz} \frac{dt}{t}.$$

138. Доказать, что функция Бесселя выражается через контурный интеграл (представление типа Шлефли)

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{dz}{z^{\nu+1}} \exp\left(\frac{xz}{2} - \frac{x}{2z}\right),$$

где интегрирование идет по контуру, начинающемуся и заканчивающемуся в $-\infty$, обходящему точку $z = 0$ в положительном направлении (рис. П.1).

Решение. Подставляя разложение функции

$$\exp\left(-\frac{x}{2z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x}{2z}\right)^n$$

в контурный интеграл, получим для n -го члена ряда при $\operatorname{Re}(n + \nu) < 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} dt \frac{\exp(t)}{t^{n+\nu+1}} = \\ & = \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{\pi n!} \sin(\pi(n + \nu + 1)) \Gamma(-n - \nu) = \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n + \nu + 1)}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из формулы (П.3). Аналитическое продолжение этого выражения по ν дает n -ый член разложения функции Бесселя в ряд по x (П.15). ►

139. Показать, что функции $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ линейно зависимы при целых n .

Решение. Воспользуемся разложением функций Бесселя в нуле (П.15) и тем, что $\Gamma(m) = \infty$ при целых $m \leq 0$ и $\Gamma(m+1) = m!$ при целых $m \geq 0$.

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{4}\right)^k \frac{1}{k! \Gamma(k - n + 1)} = \\ &= \left(-\frac{x}{2}\right)^n \sum_{l=-n}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{4}\right)^l \frac{1}{(l+n)! \Gamma(l+1)} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Здесь введено переобозначение $k = l + n$. ►

140. Показать, что функция Неймана Y_ν (П.21) остается линейно независимой к J_ν (П.15) при $\nu \rightarrow n$.

Решение. Надо вычислить вронскиан $W\{J_\nu(x), Y_\nu(x)\}$ (5.2) и устремить $\nu \rightarrow n$:

$$\begin{aligned} xW\{J_\nu(x), Y_\nu(x)\} &= -\frac{xW\{J_\nu, J_{-\nu}\}}{\sin(\pi\nu)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(\pi\nu)} \left(J_{-\nu}(x) \frac{dJ_\nu(x)}{dx} - J_\nu(x) \frac{dJ_{-\nu}(x)}{dx} \right) = \\ &= \frac{2\nu}{\Gamma(-\nu+1)\Gamma(\nu+1)\sin(\pi\nu)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу (5.4) вронскиан двух решений уравнения Бесселя имеет вид $W(x) = \frac{\text{const}}{x}$, а вычислять константу удобнее при $x = 0$. Поскольку получившаяся константа (см. (П.3))

$$\text{const} = \frac{2\nu}{\Gamma(-\nu+1)\Gamma(\nu+1)\sin(\pi\nu)} = \frac{2}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu)\sin(\pi\nu)} = \frac{2}{\pi}$$

не зависит от ν , то в пределе $\nu \rightarrow n$ вронскиан остается конечным, а значит $Y_n(x)$ и $J_n(x)$ линейно независимы. ►

141. Выразить функции Бесселя с полуцелым индексом $J_{m+\frac{1}{2}}$ через элементарные функции.

Решение. Для $J_{1/2}(x)$ имеем (П.15)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k! \Gamma(k+3/2)} = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k+1)! \Gamma(3/2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x),$$

где мы использовали соотношение (П.2)

$$\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = (2k+1)(2k-1) \dots 3 \cdot \frac{\Gamma(3/2)}{2^k}$$

и значение функции $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Для того, чтобы выразить $J_{m+1/2}(x)$ через элементарные функции, воспользуемся формулами дифференцирования (П.18)

$$\begin{aligned} J_{m+\frac{1}{2}}(x) &= -x^{m-1/2} \frac{d}{dx} \left(x^{-m+1/2} J_{m-1/2}(x) \right) = \\ &= (-1)^m x^{m+1/2} \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^m \frac{1}{\sqrt{x}} J_{\frac{1}{2}}(x). \end{aligned}$$

142. Исходя из дифференциального уравнения (П.14), получить с помощью преобразования Лапласа интегральное представление типа Пуассона (П.20) для функции Бесселя с целым индексом. Чему равен лапласовский образ $J_0(x)$?

Решение. Функция $f(x) = x^{-n} J_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{d^2}{dx^2} f(x) + (2n+1) \frac{d}{dx} f(x) + x f(x) = 0,$$

коэффициенты которого являются полиномами первой степени. Подставим в это уравнение обратное преобразование Лапласа

$$f(x) = \int_C \frac{dt}{2\pi i} \exp(xt) g(t).$$

После интегрирования по частям приравняем подынтегральное выражение нулю и получим

$$-\frac{d}{dt}(t^2+1)g(t) + (2n+1)tg(t) = 0.$$

Чтобы внеинтегральные члены не давали вклада при интегрировании по частям, должно выполняться равенство

$$\exp(xt_0)(t_0^2+1)g(t_0) = \exp(xt_k)(t_k^2+1)g(t_k),$$

где t_0, t_k — начальная и конечная точки контура C . Решая получившееся дифференциальное уравнение на $g(t)$, находим

$$g(t) = A (t^2 + 1)^{n-1/2}.$$

Контур C надо выбрать обходящим обе точки ветвления $t^* = \pm i$ функции $g(t)$, например, замкнутый контур, проходящий вдоль берегов разреза от $t = -i$ до $t = i$ в положительном направлении (рис. 8.1). В результате

$$J_n(x) = \frac{A_n x^n}{2\pi i} \int_C dt \exp(xt) (t^2 + 1)^{n-1/2},$$

где A_n — нормировочная константа. Полученное выражение переходит в интегральное представление (П.20) после замены переменной $t \rightarrow i\tau$. Так как $J_0(0) = 1$, то, вычисляя интеграл, находим $A_0 = 1$, а образ Лапласа функции $J_0(x)$

$$g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}. \quad \blacktriangleright$$

143. Используя формулы дифференцирования (П.18), показать, что производящая функция

$$F(z, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m J_m(x)$$

имеет вид (П.25).

Решение. Дифференцируя $F(z, x)$ по x и пользуясь формулами дифференцирования (П.18), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z, x)}{\partial x} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \frac{dJ_m(x)}{dx} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{z^m}{2} (J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)) = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) F(z, x). \end{aligned}$$

Решая это дифференциальное уравнение, найдем

$$F(z, x) = C(z) \exp \left(\frac{x}{2} \left[z - \frac{1}{z} \right] \right).$$

Константу $C(z)$ найдем из условия $J_n(0) = 0$ при $n \neq 0$

$$C(z) = F(z, 0) = J_0(0) = 1. \quad \blacktriangleright$$

144. Вывести интегральное представление Бесселя

$$J_n(x) = \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) \frac{d\theta}{\pi},$$

Решение. Сделаем замену переменной $z = \exp(i\theta)$ в контурном интеграле, выражающем функцию Бесселя через производящую функцию (П.25)

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \exp\left(\frac{x}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right) = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp(ix \sin(\theta) - in\theta) = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\pi} \cos(x \sin(\theta) - n\theta). \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались симметрией и периодичностью функций $\sin(\theta)$ и $\exp(in\theta)$. ►

145. Вывести формулу

$$J_0(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_1) J_n(r_2) \exp(in\theta),$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Решение. Подставив $z = i \exp(i\varphi)$ в выражение для производящей функции (П.25), получим равенство

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\varphi) J_m(q) &= \\ &= \exp(iq \cos \varphi) = \exp(iqn), \end{aligned}$$

где φ — угол между вектором $\mathbf{q}$ и единичным вектором $\mathbf{n}$, $n^2 = 1$. Положим $\mathbf{q} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, обозначив за θ угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, а за α — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$ (рис. 5.3). Проинтегрируем полученное равенство по $\mathbf{n}$, заданному на окружности единичного радиуса:

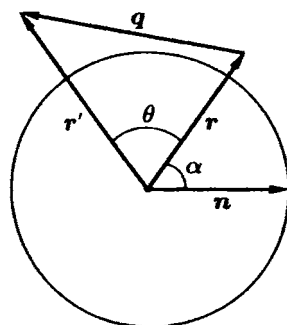


Рис. 5.3. Векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} J_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp(im\varphi) J_m(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \int \frac{dn}{2\pi} \exp[i(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{n}] = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^{-k} \exp(-ik\alpha) J_k(r) \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp[im(\alpha + \theta) J_m(r')] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\theta) J_m(r) J_m(r'). \end{aligned}$$

►

146. Найти свертку $F(y) = \int_0^y dx J_0(x) J_0(y-x)$.

Решение. Выполним преобразование Лапласа, чтобы превратить свертку в произведение:

$$\int_C \frac{dt}{2\pi i} g(t) \exp(xt) = f(x)\theta(x), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Контур C начинается и заканчивается в $-\infty$, обходя в положительном направлении все особенности в комплексной плоскости лапласовского образа $g(t)$ функции $f(x)$.

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^\infty dx J_0(x) J_0(y-x) \theta(y-x) = \\ &= \int_C \frac{dt}{2\pi i} e^{yt} g_0(t) \int_0^\infty dx J_0(x) e^{-xt} = \int_C \frac{dt}{2\pi i} g_0^2(t) e^{yt}. \end{aligned}$$

Образ Лапласа функции Бесселя $g_0(t)$ найден в задаче 142. Подставляя его, находим

$$F(y) = \int_C \frac{dt}{2\pi i} \frac{e^{yt}}{t^2 + 1} = \sin y,$$

где контурный интеграл дается вычетами в точках $t = \pm i$. ►

147. Доказать ортогональность функций Бесселя (П.26).

Решение. Запишем уравнение Бесселя на функцию $J_k(\lambda_m t)$ и умножим его на $J_k(\lambda_n t)$:

$$J_k(\lambda_n t) \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} J_k(\lambda_m t) + \left(\lambda_m^2 - \frac{k^2}{t^2} \right) J_k(\lambda_m t) \right) = 0.$$

Перепишем это равенство, переставив индексы n, m . Затем вычтем уравнения друг из друга и проинтегрируем результат от 0 до 1 по $t dt$:

$$\begin{aligned} (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^1 t dt J_k(\lambda_n t) J_k(\lambda_m t) = \\ = -t \left(J_k(\lambda_n t) \frac{d}{dt} J_k(\lambda_m t) - J_k(\lambda_m t) \frac{d}{dt} J_k(\lambda_n t) \right) \Big|_0^1. \end{aligned}$$

Если $\lambda_{n,m}$ являются нулями функции Бесселя $J_k(\lambda_{n,m}) = 0$, то интеграл обращается в нуль при $m \neq n$, поскольку правая часть равенства обращается в нуль. Интеграл обращается в нуль и в том случае, когда $\lambda_{n,m}$

являются нулями производной $\frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m} = 0$. Чтобы найти значение интеграла при $n = m$, необходимо раскрыть неопределенность:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \, dt J_k(\lambda_n t) J_k(\lambda_n t) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow m} \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} \left(\lambda_m J_k(\lambda_n) \frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m} - \lambda_n J_k(\lambda_m) \frac{dJ_k(\lambda_n)}{d\lambda_n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{k^2}{\lambda_m^2} \right) \frac{J_k^2(\lambda_m)}{2}. \end{aligned}$$

Откуда следует первая или вторая формула (П.26) в зависимости от того, являются ли λ_n нулями функции Бесселя или производной от функции Бесселя. ►

148. Найти решение уравнения теплопроводности в цилиндре единичного радиуса с теплоизолирующими стенками и начальным условием $U_{t=0} = (1-r)^2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, r, \varphi, z) = \Delta U(t, r, \varphi, z).$$

Решение. В цилиндрической системе координат граничные и начальные условия не зависят от φ и z , поэтому решение будем искать как функцию только от r и t . Применяя метод разделения переменных

$$U(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i R_i(r) T_i(t),$$

на функции $R_i(r)$ и $T_i(t)$, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dt} T_i(t) = -\lambda_i^2 T_i(t), \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R_i(r) = -\lambda_i^2 R_i(r).$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$T_i(t) = \exp(-\lambda_i^2 t), \quad R_i(r) = J_0(\lambda_i r),$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. Константы λ_i определяются из условия отсутствия потока тепла через стенки $\frac{\partial U}{\partial r}|_{r=1} = 0$:

$$0 = \frac{d}{dr} R_i(r) \Big|_{r=1} = \lambda_i \frac{d}{dx} J_0(x) \Big|_{x=\lambda_i} = -\lambda_i J_1(\lambda_i).$$

Иначе говоря, λ_i — нули функции $\frac{dJ_0(\lambda)}{d\lambda} = -J_1(\lambda)$. Коэффициенты A_i найдем из начального условия, воспользовавшись ортогональностью

функций Бесселя (П.26). Интегрируя $U(r, 0)$ с функцией $J_0(\lambda_j r)$, найдем

$$\int_0^1 r dr U(r, 0) J_0(\lambda_j r) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \int_0^1 r dr J_0(\lambda_i r) J_0(\lambda_j r) = A_j \frac{J_0^2(\lambda_j)}{2}.$$

Откуда

$$A_i = \frac{2}{J_0^2(\lambda_i)} \int_0^1 r dr (1-r)^2 J_0(\lambda_i r) = \frac{4}{\lambda_i J_0^2(\lambda_i)} \int_0^{\lambda_i} dx J_0(x).$$

Решение имеет вид

$$U(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \exp(-\lambda_i^2 t) J_0(\lambda_i r).$$

5.5. Задачи

149. Выразить ${}_1F_1(a; a; x)$ через элементарные функции.

150. Показать, что уравнение с двумя регулярными особыми точками можно привести к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{A}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{B}{x^2} y = 0.$$

Решить это уравнение.

151. Доказать формулу

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = e^x {}_1F_1(\gamma - \alpha; \gamma; -x).$$

152. Выразить полиномы Лагерра $L_n^m(x)$ через вырожденную гипергеометрическую функцию.

153. Выразить полиномы Эрмита $H_n(x)$ через вырожденную гипергеометрическую функцию. *Указание:* Сделать неконформную замену $x = \sqrt{t}$. В новых переменных в уравнении появляется регулярная особая точка $x = 0$. Отдельно рассмотреть полиномы четной и нечетной степени.

154. Привести к гипергеометрическому виду (5.6), (5.7) уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{r(x)}{s(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{\sigma(x)}{s^2(x)} y = 0,$$

где $r(x)$ — полином не старше первой степени, а $s(x)$ и $\sigma(x)$ — не старше второй степени.

155. Показать, что присоединенные функции Лежандра P_l^m , задаваемые формулой Родрига (П.37), удовлетворяют уравнению Лежандра (П.36).

156. Найти собственные функции и энергию стационарных состояний уравнения Шрёдингера для двумерного осциллятора в полярных координатах:

$$-\frac{1}{2}(\Delta - r^2)\Psi(r) = E\Psi(r).$$

Указание: Выделить асимптотики в особых точках радиального уравнения и, сделав замену $r^2 = x$, свести его к уравнению Лагерра.

157. Вывести рекуррентное соотношение (П.54) и формулу дифференцирования (П.55) для полиномов Эрмита (П.50).

158. Найти производящую функцию (П.56) для полиномов Эрмита, используя рекуррентные соотношения (П.54).

159. Найти производящую функцию (П.65) полиномов Лагерра с помощью интегрального представления (П.66).

160. Найти производящую функцию

$$F(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} L_n(x),$$

где $L_n(x) \equiv L_n^0(x)$ — полиномы Лагерра с $\nu = 0$.

161. Найти разложение вблизи $x = 0$ функций, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

для нецелых ν .

162. Вывести формулы дифференцирования для функций Бесселя (П.18):

$$\frac{d}{dx}(x^{\pm\nu} J_{\nu}) = \pm x^{\pm\nu} J_{\nu \mp 1}.$$

Показать, что функция Неймана (П.21)

$$Y_{\nu} = \frac{J_{\nu} \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}$$

удовлетворяет тем же соотношениям.

5.6. Ответы

149. ${}_1F_1(a; a; x) = \exp(x)$.

150. Уравнение имеет два линейно независимых решения $y_{1,2} = x^{\lambda_{\pm}}$, где $\lambda_{\pm} = \left(\frac{1}{2}\right)(1 - A \pm \sqrt{(1 - A)^2 - 4B})$.

151. Указание: Подставить равенство в уравнение (5.7). Воспользоваться тем, что правая и левая часть равенства являются регулярными в нуле функциями.

152. $L_n^m = \frac{(n+m)!}{m!n!} {}_1F_1(-n, m+1, x)$.

153. $H_n(x) = (-1)^k \frac{n!}{k!} {}_1F_1\left(-k, \frac{1}{2}, x^2\right)$ при $n = 2k$,

$H_n(x) = x(-1)^k \frac{(n+1)!}{(k+1)!} {}_1F_1\left(-k, \frac{3}{2}, x^2\right)$ при $n = 2k+1$.

154. Указание: Рассмотрим три случая.

1. Если $s(x) = 0$ имеет два различных корня (например, (П.36))

$$s(x) = a(x - s_1)(x - s_2),$$

то уравнение имеет три регулярных особых точки и приводится к виду (5.6) после замены переменных

$$t = \frac{(x - s_1)}{(s_2 - s_1)}$$

и подстановки

$$y(t) = t^{\nu}(t-1)^{\mu}F(t),$$

где ν и μ — характеристические показатели в регулярных особых точках $t = 0$, $t = 1$.

2. Если корни трехчлена $s(x)$ совпадают, т. е. произошло слияние двух особых точек $x = s_1 = s_2$, то надо перевести иррегулярную особую точку $x = s_1$ на бесконечность с помощью конформной замены переменных $x - s_1 = \frac{1}{z}$. В новых переменных уравнение сохраняет свой вид, однако $s(z) = z$ теперь полином первой степени.

3. Если $s(x)$ — полином первой степени, сделаем линейную замену переменных $z = s(x)$, тогда уравнение имеет одну регулярную особую точку $z = 0$ и одну иррегулярную особую точку $z = \infty$ (если $r(z)$ и $\sigma(z)$ — константы, то точка $z = \infty$

является регулярной, но в этом случае уравнение имеет степенные решения). С помощью подстановки $y(z) = z^\nu \exp(\mu z) F(z)$ уравнение приводится к виду

$$z \frac{d^2}{dz^2} F + [\gamma - bz] \frac{d}{dz} F - \alpha F = 0.$$

При $b \neq 0$ это вырожденное гипергеометрическое уравнение (5.7) в переменных $t = bz$. При $b = 0$ асимптотика на бесконечности $F \sim \exp(\pm 2\sqrt{\alpha z})$. Сравнивая с асимптотикой (5.7), видим, что в этом случае приведем уравнение к виду (5.7) можно с помощью замены $t = 4\sqrt{\alpha z}$ и подстановки $F(t) = f(t) \exp(-\frac{t}{2})$.

4. Если $s(x) = \text{const}$, то подстановкой

$$y(x) = f(x) \exp\left(-\int^x d\tau \frac{r(\tau)}{2s}\right)$$

коэффициенты уравнения приводятся к виду $r(x) = 0$, $s(x) = 1$.

Выделяя в $\sigma(x) = -(a(x - x_1))^2 + a\epsilon$ полный квадрат и делая его новой переменной $z = \sqrt{a}(x - x_1)$, получаем уравнение для квантового осциллятора

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + (\epsilon - z^2) f = 0,$$

у которого одна иррегулярная особая точка $z = \infty$ с асимптотикой $f \sim \exp(\pm \frac{z^2}{2})$. Чтобы свести его к уравнению (5.7), надо сделать неконформную замену $z^2 = t$, которая приводит к появлению регулярной особой точки $t = 0$ и подстановку $f(t) = F(t) \exp(-\frac{t}{2})$.

155. Указание: Подставьте формулу Родрига для присоединенных функций Лежандра (П.37) в уравнение (П.36) и получите уравнение (5.24) на функцию $f = \left(\frac{d}{dz}\right)^m P_l$. Покажите, что уравнение (5.24) получается из уравнения (П.35) на полиномы Лежандра после применения к (П.35) операции m -кратного дифференцирования.

$$156. \Psi(r) = \sqrt{\frac{n!}{\pi(n+m)!}} r^{|m|} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) L_n^{|m|}(r^2) \exp(im\varphi),$$

$E_N = 2n + |m| + 1 \equiv N + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, m — целое.

157. Указание: Выразить первую производную полинома Эрмита через линейную комбинацию полиномов с помощью (П.50). Точно так же выразить вторую производную полинома Эрмита через линейную комбинацию полиномов. Затем воспользоваться уравнением (П.49).

158. *Указание:* Выразить производную по z производящей функции

$$F(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right) H_n(x)$$

через $F(z, x)$ с помощью (П.54). Решить получившееся дифференциальное уравнение на $F(z, x)$ и воспользоваться нормировкой $F(0, x) = H_0(x) = 1$.

159. *Указание:* Подставить интегральное представление (П.66) в определение производящей функции $F(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^{\nu}(x)$, просуммировать ряд и взять интеграл.

160. $F(z, x) = \exp(z) J_0(2\sqrt{zx})$.

161. *Указание:* Выделить степенную асимптотику при $x = 0$ в виде $y(x) = x^{\rho} f(x)$. Подставить $y(x)$ в уравнение и разложить в ряд Тейлора аналитическую в нуле функцию f . Сравнивая члены при одинаковых степенях x , найти коэффициенты разложения $f(x)$ в ряд Тейлора. Функция $y(x)$ есть сумма двух линейно независимых решений $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, разложение которых вблизи $x = 0$ имеет вид (П.15).

162. *Указание:* Домножить разложение функций Бесселя в нуле (П.15) на $x^{\pm \nu}$ и продифференцировать.

Асимптотические методы

6.1. Асимптотические ряды

При решении различных задач возникает проблема приближенного вычисления интегралов, содержащих большие (или малые) параметры. При этом ответ представляется в виде так называемого *асимптотического разложения*. Формальный ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(z) \quad (6.1)$$

называется асимптотическим разложением функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если для каждого значения N

$$f(z) - \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(z) = o(\phi_N(z))$$

при $z \rightarrow z_0$. Здесь $\psi(z) = o(\phi_N(z))$ означает, что отношение $\frac{\psi(z)}{\phi_N(z)} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_0$. Отсюда следует, что

$$a_N = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)}{\phi_N(z)}. \quad (6.2)$$

Формальный ряд (6.1) может быть расходящимся. Асимптотическое разложение зависит от выбора асимптотической последовательности $\{\phi_n(z)\}$. Кроме того, две разные функции могут иметь одинаковые асимптотические разложения, если они различаются на такую функцию $\psi(z)$, что для любых n

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z)}{\phi_n(z)} = 0.$$

Точку z_0 можно считать бесконечно удаленной, так как для конечной z_0 можно перейти от переменной z к переменной $z' = \frac{1}{z-z_0}$, которая стремится к бесконечности при $z \rightarrow z_0$. Если $\phi_n(z) = \frac{1}{z^n}$, то такой асимптотический ряд называется *степенным*. Асимптотические степенные ряды допускают операции, аналогичные операциям с обычными степенными

рядами (сложение, умножение, почленное интегрирование) при выполнении определенных условий непрерывности и дифференцируемости соответствующей функции.

Очень часто для получения асимптотического разложения функции, представленной в виде определенного интеграла, удобно использовать интегрирование по частям. Иногда это эквивалентно почленному интегрированию разложения в ряд Тейлора.

Пример: Найдем асимптотическое разложение при $x \rightarrow \infty$ функции

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \Gamma(a, x) &\sim e^{-x} x^{a-1} \left(1 + \frac{a-1}{x} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^2} + \dots \right) \sim \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1-n)} e^{-x} x^{a-n}. \end{aligned}$$

Тот же ответ можно получить, сдвигая переменную интегрирования $t = \tau + x$ и разлагая функцию $(x + \tau)^{a-1}$ в ряд Тейлора по $\frac{\tau}{x}$:

$$\begin{aligned} \Gamma(a, x) &\sim e^{-x} x^{a-1} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau} \left(1 + \frac{(a-1)\tau}{x} + \frac{(a-1)(a-2)\tau^2}{2x^2} + \dots \right) \sim \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1-n)} e^{-x} x^{a-n}. \end{aligned}$$

6.2. Интеграл Лапласа

Рассмотрим интеграл вида

$$g(\nu) = \int_a^b e^{\nu f(x)} \phi(x) dx,$$

где $\phi(x)$ и $f(x)$ — действительные непрерывные функции, а ν — большой параметр. Если функция $f(x)$ принимает максимальное значение на границе области (например, в точке a) и $f'(a) \neq 0$, $\phi(a) \neq 0$, то

$$g(\nu) \sim -e^{\nu f(a)} \frac{\phi(a)}{\nu f'(a)} (1 + O(\nu^{-1})). \quad (6.3)$$

Если же максимальное значение достигается в точке $x = c$ внутри интервала $a < c < b$ и $\phi(c) \neq 0$, то

$$g(\nu) \sim \sqrt{\frac{-2\pi}{\nu f''(c)}} e^{i\nu f(c)} \phi(c) (1 + O(\nu^{-1})). \quad (6.4)$$

Если максимальное значение достигается на границе (например, в точке a) и $\phi(a) \neq 0$, $f'(a) = 0$, а $f''(a) < 0$, то

$$g(\nu) \sim \sqrt{\frac{-\pi}{2\nu f''(a)}} e^{i\nu f(a)} \phi(a). \quad (6.5)$$

Приведенные формулы получаются разложением $f(x)$ вблизи точки, в которой $f(x)$ принимает максимальное значение, и последующим интегрированием в бесконечных пределах или по частям. Тем же способом можно получить асимптотические формулы в случаях, когда $\phi(a) = 0$ или $\phi(c) = 0$.

6.3. Метод стационарной фазы

Рассмотрим интеграл вида

$$g(x) = \int_a^b e^{i\nu f(x)} \phi(x) dx,$$

где $f(x)$ — действительная функция, а $\nu \rightarrow +\infty$. Тогда основной вклад в интеграл дают либо окрестности точек, в которых $f'(x) = 0$ (точки *стационарной фазы*), либо окрестности точек a и b , если на отрезке интегрирования нет точек стационарной фазы. В последнем случае

$$g(\nu) \sim \frac{\phi(b)}{i\nu f'(b)} e^{i\nu f(b)} - \frac{\phi(a)}{i\nu f'(a)} e^{i\nu f(a)} + O(\nu^{-2}), \quad f'(b) \neq 0, f'(a) \neq 0.$$

Если внутри интервала $a < x < b$ есть только одна стационарная точка c , в которой $f''(c) \neq 0$ и $\phi(c) \neq 0$, то

$$g(\nu) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\nu |f''(c)|}} \phi(c) \exp \left(i\nu f(c) \pm \frac{i\pi}{4} \right) [1 + O(\nu^{-1})]. \quad (6.6)$$

Эта формула получается разложением $f(x)$ до квадратичных членов вблизи $x = c$ и вычислением интеграла Френеля. Знак при фазе $\frac{i\pi}{4}$ совпадает со знаком второй производной $\text{sign}(f''(c))$. Если внутри интервала интегрирования есть несколько стационарных точек, в которых $f''(c) \neq 0$ и $\phi(c) \neq 0$, то $g(\nu)$ дается суммой всех вкладов вида (6.6).

6.4. Метод перевала

Поставим задачу оценить интеграл вида

$$g(\nu) = \int_{\gamma} e^{\nu w(z)} \phi(z) dz, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (6.7)$$

где $w(z)$ и $\phi(z)$ — не зависящие от ν аналитические функции z в области Ω , содержащей контур интегрирования γ и стационарную точку z_0 , в которой $w'(z_0) = 0$. Точка z_0 может не принадлежать контуру интегрирования. Для простоты будем считать, что $w''(z_0) \neq 0$, а $\phi(z) = 1$. Тогда существует контур $\Gamma \in \Omega$, $z_0 \in \Gamma$, вдоль которого мнимая часть функции $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ постоянна:

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) = \text{const},$$

где $z = x + iy$. Функцию $w(z)$ вдоль контура Γ можно записать в виде $w(z^*) = w(z_0) - \tau(z^*)$, где $z^* \in \Gamma$, а $\tau(z^*)$ — действительная неотрицательная функция. ГрадIENTЫ функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ортогональны в силу соотношений Коши—Римана для аналитических функций

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \implies (\nabla v, \nabla u) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует, что контур Γ является линией *наискорейшего спуска* для функции $u(x, y)$. Последняя убывает вдоль контура Γ в обе стороны от точки z_0 , которая называется *седловой* точкой функции $u(x, y)$ (рис. 6.1).

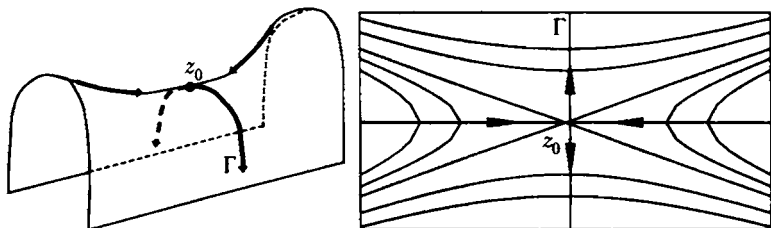


Рис. 6.1. Топография вещественной части функции $w(z)$ вблизи седловой точки $z = z_0$. Стрелками показано направления, в которых $u(z) = \text{Re } w(z)$ убывает

Идея метода перевала состоит в деформировании контура интегрирования γ так, чтобы основной вклад в интеграл вдоль деформированного контура набирался на как можно более коротком отрезке, т. е. вдоль линии наискорейшего спуска. Будем рассматривать только такие деформации в области аналитичности функции $w(x)$, при которых концы контура интегрирования остаются неподвижными. Контур γ' , получающиеся при таких деформациях, называют эквивалентными, поскольку

величина интеграла (6.7) не зависит от γ' . Контур γ' называется *минимаксным контуром*, если на нем достигается

$$\min_{\gamma' \in D} \max_{z \in \gamma'} |e^{\nu w(z)}| = \min_{\gamma' \in D} \max_{z \in \gamma'} e^{\nu u(z, y_0)} = e^{\nu u(z_0, y_0)},$$

где D — множество эквивалентных контуров γ' . Другими словами, из всех эквивалентных контуров γ' выбирается тот, который проходит через седловую точку z_0 функции $u(x, y)$ и совпадает в окрестности z_0 с контуром Γ . При этом функция $u(x, y)$ должна иметь в точке z_0 не только локальный, но и глобальный максимум на контуре γ' .

Если минимаксный (перевальный) контур существует, то z_0 называется *точкой перевала* для интеграла (6.7). К сожалению, общего алгоритма поиска перевального контура не существует. Это сложная топологическая задача. Облегчить ее решение можно, если соблюдать следующие три правила:

1. Нарисовать линии уровня функции $u(x, y)$ (как на топографической карте, рис. 6.1).
2. Выбрать такой путь от начальной до конечной точки контура интегрирования, чтобы максимальное вдоль пути значение $u(x, y)$ было как можно меньше. (Представьте, что вы путешественник, боящийся высоты, а $u(x, y)$ — высота в точке x, y над уровнем моря.)
3. Вблизи точки с максимальным вдоль выбранного пути значением $u(x, y)$ провести контур вдоль линии наискорейшего спуска. (Чтобы как можно более короткий отрезок вашего пути проходил на большой высоте u .)

В результате интеграл сведется к эталонному интегралу.

Рассмотрим два простейших случая:

1. Существует перевальный контур, и в стационарной точке z_0 выполняется условие на старшие производные $|\nu^{(n-2)/2} w''(z_0)| \gg |w^{(n)}(z_0)|$, тогда можно ограничиться разложением $w(z)$ в окрестности точки z_0 до квадратичных членов:

$$w(z) = w(z_0) + \frac{w''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \dots$$

Основной (экспоненциально большой) вклад в интеграл набирается вдоль контура Γ . Чтобы оценить этот вклад, заменим переменную z на вещественную вдоль контура Γ переменную $s = e^{-i\psi}(z - z_0)$ и запишем вторую производную в виде $w''(z_0) = \rho e^{i\theta}$. Тогда старший член асимптотического по $\frac{1}{\nu}$ разложения интеграла есть

$$\begin{aligned} g(\nu) &\sim \phi(z_0) e^{\nu w(z_0)} \int_{\gamma'} ds e^{i\psi} \exp\left(\frac{\nu}{2} \rho s^2 e^{2i\psi + i\theta}\right) \sim \\ &\sim \phi(z_0) e^{\nu w(z_0)} e^{i\psi^*} \int_{\Gamma} \exp\left(-\frac{\nu}{2} \rho s^2\right) ds. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Направление наискорейшего спуска определяется условием $\exp(2i\psi + i\theta) = -1$, откуда $\psi_{1,2} = \frac{\pm\pi - \theta}{2}$ являются углами между направлениями касательных к Γ в точке z_0 и положительным направлением вещественной оси. Фаза ψ^* принимает то из значений $\psi_{1,2}$, которое соответствует направлению интегрирования вдоль контура γ' в точке z_0 . Последний интеграл в (6.8) является интегралом Лапласа (6.4), поэтому $g(\nu)$ асимптотически равен

$$g(\nu) \sim \phi(z_0) e^{\nu w(z_0)} \exp(i\psi^*) \sqrt{\frac{2\pi}{\nu |w''(z_0)|}}. \quad (6.9)$$

Следует отметить, что перевальный контур может проходить через несколько точек перевала z_i , в которых значения $\operatorname{Re} w(z_i)$ совпадают. В этом случае надо просуммировать вклады от каждой точки перевала.

II. Перевального контура не существует. Контур интегрирования можно деформировать так, чтобы максимальное значение $u(x, y)$ вдоль него находилось в начальной (или конечной) точке z_1 контура γ . Если выполняется условие на старшие производные $|\nu^{n-1} w'(z_1)| \gg |w^{(n)}(z_1)|$, то можно ограничиться разложением $w(z)$ до линейных членов в окрестности точки z_1 :

$$w(z) = w(z_1) + w'(z_1)(z - z_1) + \dots$$

Из точки z_1 выходит одна линия наискорейшего спуска $L \in \Omega$, вдоль которой $\operatorname{Im} w(z) = \operatorname{Im} w(z_1)$. Заменим переменную z на переменную $s = e^{-i\psi}(z - z_1)$, вещественную вдоль линии наискорейшего спуска L . Запишем производную в виде $w'(z_1) = -\rho \exp(-i\theta)$ и деформируем контур γ так, чтобы он совпадал с L вблизи точки z_1 . Тогда старший член асимптотического по $\frac{1}{\nu}$ разложения функции $g(\nu)$ имеет вид

$$g(\nu) \sim \phi(z_1) e^{\nu w(z_1)} \int_L ds e^{i\psi} \exp(-\nu \rho s e^{i(\psi - \theta)}) \sim -\frac{\phi(z_1) \exp(\nu w(z_1))}{\nu w'(z_1)}, \quad (6.10)$$

где направление наискорейшего спуска определяется равенством $\psi = \theta$. Если максимальное значение $u(x, y)$ находится в конечной точке z_2 контура γ , то аналогичными рассуждениями получим, что старший член асимптотического по $\frac{1}{\nu}$ разложения функции $g(\nu)$ имеет вид (6.10), в котором z_1 надо заменить на z_2 , а знак минус перед дробью — на знак плюс.

6.5. Метод усреднения

Если невозмущенная система с n степенями свободы совершает движение в ограниченной области фазового пространства, то иногда можно перейти к переменным действие—угол, в которых дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\phi} = \omega(I); \quad I = (I_1, I_2, \dots, I_n), \quad \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n). \quad (6.11)$$

В невозмущенной системе I — набор интегралов движения, а переменные ϕ меняются в интервале $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$. Возмущенные уравнения содержат в правых частях добавку, пропорциональную малому параметру ε :

$$\dot{I} = \varepsilon g(I, \phi, \varepsilon), \quad \dot{\phi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \phi, \varepsilon), \quad (6.12)$$

где f и g являются 2π -периодическими функциями каждой из переменных ϕ_i . Поскольку переменные I меняются медленно (вследствие малости параметра ε), то *возмущенную систему* можно заменить гораздо более простой *усредненной системой* для медленных переменных $J(t) = I(t) + O(\varepsilon)$:

$$\dot{J} = \varepsilon G(J), \quad G(J) = \frac{\oint g(J, \phi, 0) d\phi}{\oint d\phi}. \quad (6.13)$$

При переходе от уравнений (6.12) к усредненным уравнениям (6.13) проводится процедура усреднения по периодам колебаний функций g . Эта процедура корректна при $n = 1$. В случае нескольких степеней свободы усреднение по ϕ может стать неприменимым, если в системе имеются резонансы, т. е. частоты ω_i — компоненты вектора ω в формуле (6.11) удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^n N_i \omega_i = 0,$$

где N_i — целые числа.

Пример: Дана возмущенная одномерная система с постоянной частотой ω

$$\dot{I} = \varepsilon(a + b \cos \phi), \quad \dot{\phi} = \omega.$$

Она приводит к усредненному уравнению

$$\dot{J} = \varepsilon a,$$

которое имеет решение $J(t) = J_0 + \varepsilon at$ (рис. 6.2). В этом случае мы знаем точное решение $I(t) = \varepsilon at + \frac{\varepsilon b \sin \omega t}{\omega}$ и можем убедиться, что решение усредненного уравнения не уходит от точного решения, если $\omega \neq 0$: $|J(t) - I(t)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon$.

В гамильтоновой системе переменные ϕ играют роль обобщенных координат, а I — обобщенных импульсов, так что уравнения всегда имеют вид

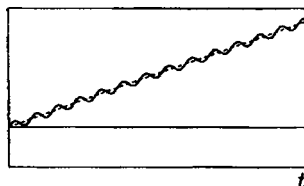


Рис. 6.2. Графики зависимости от времени переменных $I(t)$ и медленной переменной $J(t)$ (— $I(t)$; --- $J(t)$)

Усредняя по ϕ производную $\frac{\partial H}{\partial \phi}$, получаем $\dot{J} = 0$. Это означает, что эволюции медленных переменных не происходит (J — *адиабатические инварианты*). Главная трудность применения метода усреднения в общем случае — выбор подходящих переменных I , которые являются интегралами движения невозмущенной системы.

Теория асимптотических рядов и асимптотические методы вычисления интегралов детально разобраны в книгах [МУ72, Фед87, СФСШ76, Эрд62, Олв90, Коп66, ДБ61, Хед65]. Метод усреднения по высокочастотным колебаниям изложен в книгах [БМ74, Арн78, Коу72, Най76].

6.6. Примеры

163. Найти асимптотику Γ -функции Эйлера при $x \rightarrow +\infty$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

Вывести уточненную формулу Стирлинга, содержащую два члена асимптотического разложения.

Решение. Перепишем интеграл в виде

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t + (x-1) \ln t) dt.$$

Стоящая множителем при большом параметре x функция $\ln t$ неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$, поэтому ни одна из асимптотических формул (6.3)–(6.5) неприменима. Дело в том, что точка максимума t_0 подынтегрального выражения зависит от большого параметра $t_0 = x - 1$. В этом случае необходимо сделать такую замену переменной (*остановить* точку максимума), чтобы в новых переменных точка максимума не зависела от x : $t = x\tau$, тогда

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{\infty} \exp(x(\ln \tau - \tau)) d\tau.$$

Максимум функции $f(\tau) = \ln \tau - \tau$ достигается при $\tau_0 = 1$ внутри интервала интегрирования, поэтому главный член асимптотики дается формулой (6.4). Чтобы получить следующий член асимптотического разложения, необходимо разложить функцию $f(\tau)$ в ряд по $\xi = \tau - 1$ до четвертого члена включительно:

$$f(\xi) = -1 - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} + O(\xi^5).$$

Подставим это разложение в интеграл и сделаем замену $\xi = z\sqrt{\frac{2}{x}}$:

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2x} x^x e^{-x} \int_{-\sqrt{x/2}}^{\infty} dz \exp\left(-z^2 + \frac{2\sqrt{2}z^3}{3\sqrt{x}} - \frac{z^4}{x} + z^2 O\left(\frac{z^3}{x^{3/2}}\right)\right).$$

При $x \rightarrow \infty$ можно разложить экспоненциальную функцию в ряд по членам, содержащим степени x в знаменателе, а пределы интегрирования с экспоненциальной точностью расширить до бесконечности:

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2x} x^x e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}z^3}{3\sqrt{x}} + \frac{4z^6}{9x} - \frac{z^4}{x} + O(x^{-3/2})\right).$$

В результате получаем уточненную формулу Стирлинга:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \sqrt{\frac{2}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(\Gamma(1/2) + \frac{4\Gamma(7/2)}{9x} - \frac{\Gamma(5/2)}{x} + O(x^{-2})\right) \sim \\ &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{1}{12x} + O(x^{-2})\right). \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что члены, пропорциональные $x^{-3/2}$, содержат нечетные степени переменной интегрирования z , поэтому обращаются в нуль при интегрировании в бесконечных пределах. ►

164. Найти асимптотику интеграла

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu f(x)} \phi(x) dx$$

при $\nu \rightarrow +\infty$, если $f'(c) = f''(c) = 0$, $\phi(c) \neq 0$, $f'''(c) \neq 0$ и нет других стационарных точек.

Решение. Поскольку вторая производная в стационарной точке $x = c$ обращается в нуль, разложение показателя экспоненты в ряд по $\xi = x - c$ начинается с кубического члена:

$$i\nu f(x) = i\nu \left[f(c) + \frac{1}{6} f'''(c) \xi^3 + O(\xi^4) \right].$$

При $\nu \rightarrow \infty$ функцию $\phi(x)$ можно вынести в точке c из-под знака интеграла. Получившийся эталонный интеграл

$$\begin{aligned}
 g(\nu) &\sim \phi(c) e^{i\nu f(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{i\nu}{6} f'''(c) \xi^3 \right) d\xi = \\
 &= 2\phi(c) e^{i\nu f(c)} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp \left(\frac{i\nu}{6} |f'''(c)| \xi^3 \right) d\xi
 \end{aligned}$$

с помощью комплексной замены переменной интегрирования $\frac{\nu |f'''(c)| \xi^3}{6} = it$ сводится к Γ -функции. Контур интегрирования по ξ вблизи стационарной точки $\xi = 0$ деформируем в комплексной плоскости так, чтобы новая переменная интегрирования была вещественной

$$d\xi = \frac{e^{i\pi/6}}{3} \left[\frac{6}{\nu |f'''(c)|} \right]^{1/3} \frac{dt}{t^{2/3}}.$$

В результате получаем главный член асимптотического разложения:

$$g(\nu) \sim \frac{2}{3} \phi(c) e^{i\nu f(c)} \cos \frac{\pi}{6} \left(\frac{6}{\nu |f'''(c)|} \right)^{1/3} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right).$$

165. Найти асимптотику функции Эйри при $x \rightarrow +\infty$

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{t^3}{3} + xt \right) \right] dt.$$

Решение. Заменой переменной $t = \sqrt{x}z$ интеграл приводится к виду

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{\gamma} \exp \{ x^{3/2} w(z) \} dz, \quad w(z) = i \left(\frac{z^3}{3} + z \right),$$

где контур интегрирования γ идет вдоль вещественной оси. Записывая переменную интегрирования в виде $z = Re^{i\theta}$, видим, что интеграл сходится при $R \rightarrow \infty$ вдоль луча $\theta = \text{const}$, если выполняется условие $\operatorname{Re} w(z) \rightarrow \frac{R^3 \cdot \operatorname{Re} ie^{i3\theta}}{3} < 0$. Откуда находим сектора сходимости на бесконечности: $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$, которые заштрихованы на рис. 6.3.

Точки перевала $z_{1,2} = \pm i$ находятся из условия $\frac{dw}{dz} = i(z^2 + 1) = 0$. В обеих точках $\operatorname{Im} w(z_{1,2}) = 0$, поэтому для нахождения минимаксного контура достаточно построить линии нулевого уровня мнимой части фазы. Уравнение $\operatorname{Im} w(z' + iz'') = 0$ имеет три решения $z' = 0$ и $z' = \pm \sqrt{3(z''^2 - 1)}$, которые изображены на рис. 6.3. Точки пересечения линий нулевого уровня совпадают со стационарными $z_{1,2} = \pm i$.

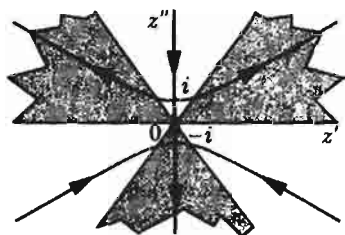


Рис. 6.3. Секторы сходимости интегрального представления функции Эйри при $z \rightarrow \infty$. В плоскости комплексного переменного z имеется три линии $\text{Im } w = 0$: прямая $\text{Re } z = 0$ и две ветви гиперболы. Направление убывания $\text{Re } w$ указано стрелками

Вдоль этих линий между точками пересечения вещественная часть фазы изменяется монотонно.

Контур интегрирования можно деформировать в верхнюю ветвь гиперболы. Максимальное значение $\text{Re } w(z)$ вдоль такого контура достигается в точке $z_1 = i$ и никакой деформацией контура не может быть уменьшено. Концы выбранного нами контура остаются в секторе сходимости, а сам контур проходит через точку перевала $z_1 = i$ вдоль линии наискорейшего спуска: $\text{Re } w$ вблизи $z = i$ убывает вдоль верхней ветви гиперболы и возрастает вдоль прямой $\text{Re } z = 0$. Вблизи точки перевала разложение $w(z)$ по $\zeta = z - i$ имеет вид

$$w(\zeta) = -\frac{2}{3} - \zeta^2 + O(\zeta^3),$$

и для вычисления интеграла можно применить метод Лапласа. Поэтому главный член асимптотического разложения интеграла по $x^{-3/2}$ можно получить по формуле (6.4).

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{2x^{1/4}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$$

166. Найти асимптотику Γ -функции комплексного переменного

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt$$

при $|z| \rightarrow +\infty$, $\theta = |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Сделаем замену переменной интегрирования $t = z\tau$, чтобы остановить стационарную точку:

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1} \int_0^{e^{-i\theta}\infty} \exp(z(\ln \tau - \tau)) d\tau.$$

Поскольку $\text{Re } z > 0$, то конечная точка интегрирования находится в правой полуплоскости комплексной переменной τ на бесконечности. Подынтегральное выражение обращается в нуль на обоих краях интервала.

Контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он проходил через стационарную точку $\tau_0 = 1$. Поэтому перевальный контур существует.

Контур наискорейшего спуска задается уравнением

$$\operatorname{Im} z(\ln \tau - \tau) = \operatorname{Im} z(\ln \tau_0 - \tau_0) = -\operatorname{Im} z$$

и имеет сложную форму. Однако вблизи точки перевала направление наискорейшего спуска в комплексной плоскости τ легко находится по второй производной функции $\frac{z d^2(\ln \tau - \tau)}{d\tau^2} = -z$ в точке перевала $\tau_0 = 1$ и составляет угол $-\frac{\theta}{2}$ с положительным направлением вещественной оси:

$$z(\ln \tau - \tau) = -z - \frac{|z|\xi^2}{2} + |z|O(\xi^3), \quad \xi = (\tau - 1)e^{i\theta/2}.$$

Откуда, заменяя пределы интегрирования на бесконечные, при $|z| \rightarrow \infty$ находим асимптотику Γ -функции

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \sim \left(\frac{z}{e}\right)^z \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|z|\xi^2}{2}\right) e^{-i\theta/2} d\xi \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z. \quad \blacktriangleright$$

167. Вывести усредненные по периоду осцилляций уравнения для медленных переменных слабо нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.14)$$

Решение. Запишем решение невозмущенной системы в виде

$$x = I \cos \phi, \quad \dot{x} = -I\omega_0 \sin \phi, \quad \phi \equiv \omega_0 t + \vartheta$$

и будем рассматривать эти соотношения как переход к новым переменным действие—угол (I, ϑ) для возмущенной системы (преобразование Боголюбова—Крылова). Считая переменные (I, ϑ) медленно зависящими от времени, продифференцируем функцию $x(t) = I \cos \phi$:

$$\dot{x} = \dot{I} \cos \phi - I(\omega_0 + \dot{\vartheta}) \sin \phi.$$

Поскольку $\dot{x} = -I\omega_0 \sin \phi$, получаем первое уравнение на медленные переменные:

$$\dot{I} \cos \phi = I \dot{\vartheta} \sin \phi. \quad (6.15)$$

Дифференцируя $\dot{x}(t) = -I\omega_0 \sin \phi$ и подставляя в уравнение (6.14), получаем второе уравнение на медленные переменные:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0 (\dot{I} \sin \phi + I \dot{\vartheta} \cos \phi) = -\varepsilon f(I \cos \phi, -I\omega_0 \sin \phi). \quad (6.16)$$

Систему (6.15), (6.16) можно разрешить относительно новых неизвестных функций

$$\dot{I} = \frac{\varepsilon \sin \phi}{\omega_0} f(I \cos \phi, -I\omega_0 \sin \phi), \quad \dot{\vartheta} = \frac{\varepsilon \cos \phi}{\omega_0 I} f(I \cos \phi, -I\omega_0 \sin \phi).$$

Усредняя по быстрой переменной ϕ и обозначая медленные переменные в усредненных уравнениях за $J(t)$, $\theta(t)$, получаем уравнения Боголюбова—Крылова.

$$\dot{J} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} G(J), \quad G(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(J \cos \phi, -J\omega_0 \sin \phi) \sin \phi \, d\phi, \quad (6.17)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega_0 J} F(J), \quad F(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(J \cos \phi, -J\omega_0 \sin \phi) \cos \phi \, d\phi. \quad (6.18)$$

Правые части усредненных уравнений содержат фурье-компоненты вынуждающей силы. ►

168. Найти и исследовать на устойчивость предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$.

Решение. Усредняя вынуждающую силу $f(x, \dot{x}) = -(1 - x^2)\dot{x}$ по периоду, получаем согласно формуле (6.17)

$$\dot{J} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} G(J) = \frac{\varepsilon}{2} J \left(1 - \frac{J^2}{4} \right).$$

Это уравнение первого порядка имеет три стационарные точки, в которых $\dot{J} = 0$, а именно $J = 0$ и $J = \pm 2$. Первая из них при $\varepsilon > 0$ неустойчива, а две других устойчивы. Устойчивая стационарная точка соответствует предельному циклу в исходном уравнении второго порядка. Уравнение Ван-дер-Поля описывает установление автоколебательного режима в генераторе. ►

169. Найти зависимость от времени усредненной амплитуды линейного осциллятора при резонансе с внешней силой $f(t) = f_0 \cos \omega_0 t$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Решение. Перейдем к медленным переменным I , ϑ

$$x = I \cos \phi, \quad \dot{x} = -I\omega_0 \sin \phi, \quad \phi \equiv \omega_0 t + \vartheta.$$

При точном резонансе явную зависимость внешней силы от времени можно выразить через быструю фазу осциллятора ϕ в виде $f(t) = f_0 \cos(\phi - \vartheta)$. Усредняя вынуждающую силу по периоду, получаем согласно формулам (6.17), (6.18) уравнения для усредненных переменных (J , θ):

$$\dot{J} = -\frac{f_0}{2\omega_0} \sin \theta, \quad \dot{\theta} = -\frac{f_0}{2\omega_0} \cos \theta.$$

Уравнение на θ имеет одну устойчивую стационарную точку $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Средняя амплитуда колебаний нарастает линейно по времени: $J(t) = \frac{f_0 t}{2\omega_0}$. Этот результат совпадает с асимптотикой точного решения на больших временах: $x = \frac{f_0 t \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}$. ►

170. Найти зависимость от времени усредненной амплитуды линейного осциллятора при параметрическом резонансе $\Omega = 2\omega_0$, когда собственная частота изменяется по закону $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \epsilon \sin \Omega t)$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \epsilon \sin \Omega t)x = 0.$$

Решение. Перейдем к медленным переменным I, ϑ :

$$x = I \cos \phi, \quad \dot{x} = -I\omega_0 \sin \phi, \quad \phi \equiv \omega_0 t + \vartheta.$$

При параметрическом резонансе член, описывающий возмущение, можно записать в виде $-2\epsilon\omega_0^2 x \cos(\phi - \vartheta) \sin(\phi - \vartheta)$. Откуда, согласно формулам (6.17), (6.18), получаем уравнения для усредненных переменных (J, θ) :

$$\dot{J} = \frac{\epsilon\omega_0}{4} J \cos 2\theta, \quad \dot{\theta} = -\frac{\epsilon\omega_0}{4} \sin 2\theta.$$

Уравнение на θ имеет две устойчивые стационарные точки $\theta = 0$, либо $\theta = \pi$ (бистабильность). Средняя амплитуда колебаний меняется в обоих случаях экспоненциально $J(t) = J_0 \exp\left(\frac{\epsilon\omega_0 t}{4}\right)$. ►

171. Найти зависимость от времени амплитуды колебаний осциллятора с малым кубическим затуханием

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x}^3 + \omega_0^2 x = 0.$$

Решение. Усредненное уравнение (6.17)

$$\dot{J} = \frac{\epsilon}{\omega_0} G(J), \quad G(J) = -J^3 \omega_0^3 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \sin^4 \phi = -\frac{3}{8} J^3 \omega_0^3$$

легко интегрируется. Усредненная амплитуда колебаний затухает по следующему закону:

$$J(t) = \frac{J_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} J_0^2 \omega_0^2 t}}. \quad \blacktriangleright$$

172. Найти нелинейный сдвиг частоты ангармонического осциллятора (уравнение Дюффинга)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon x^3.$$

Решение. Усреднение по формуле (6.17) дает $\dot{J} = 0$, что является следствием гамильтоновости системы. Усредняя по формуле (6.18), получаем уравнение на усредненную фазу

$$\dot{\theta} = \frac{3\epsilon J^2}{8\omega_0}.$$

Величина $\dot{\theta}$ называется нелинейным сдвигом частоты $\omega_0 \rightarrow \omega_{NL} = \omega_0 + \frac{3\epsilon J^2}{8\omega_0}$ и пропорциональна квадрату амплитуды колебаний:

$$x = J \cos(\omega_{NL} t).$$

6.7. Задачи

173. Найти асимптотическое разложение интегралов Френеля при $x \rightarrow +\infty$

$$F_1(x) = \int_x^\infty \cos(\theta^2) d\theta, \quad F_2(x) = \int_x^\infty \sin(\theta^2) d\theta.$$

174. Найти асимптотическое разложение интеграла при $a \rightarrow \infty$

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{dx e^{-x}}{x^2 + a^2}.$$

175. Найти асимптотическое разложение интеграла при $\nu \rightarrow +\infty$, $a = \text{const}$

$$F(\nu, a) = \int_0^\infty \frac{dx e^{-\nu x}}{x + a}.$$

176. Найти асимптотику интеграла при $n \rightarrow +\infty$

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

177. Найти асимптотическое разложение функции ошибок при $x \rightarrow +\infty$

$$\text{Erfc } x = \int_x^\infty \exp(-t^2) dt.$$

178. Найти асимптотическое разложение интегральной показательной функции при $x \rightarrow +\infty$

$$E_n(x) = \int_x^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t^n} dt.$$

179. Найти асимптотику интеграла при $\alpha \rightarrow +\infty$

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{\alpha}{t}\right) dt.$$

Указание: Сделать замену переменной $t = \tau \alpha^{1/3}$.

180. Найти асимптотику полиномов Лежандра для $x > 1$ при $l \rightarrow +\infty$

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos t\right)^l dt.$$

181. Найти асимптотику модифицированной функции Бесселя при $x \rightarrow +\infty$

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\theta \exp(x \cos \theta) d\theta.$$

182. Найти асимптотику функции Макдональда при $x > 0$ и $\nu \rightarrow +\infty$

$$K_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\nu t - x \operatorname{ch} t) dt.$$

183. Найти асимптотику функции $K_{\nu}\left(\frac{\nu}{\operatorname{sh} \alpha}\right)$ при $\nu \rightarrow \infty$ и фиксированном $\alpha > 0$.

184. Найти асимптотику интеграла Френеля при $x \rightarrow +\infty$

$$\Phi(x) = \int_x^{\infty} \exp(t^2) dt.$$

185. Найти главный член асимптотики функции Эйри при $x \rightarrow -\infty$

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right] dt.$$

Указание: Сделать замену $t = \tau \sqrt{-x}$.

186. Найти асимптотику функции Бесселя целого порядка при $n = \text{const}$ и $x \rightarrow +\infty$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin \phi - in\phi) d\phi.$$

187. Найти асимптотику функции Бесселя $J_n(n)$ при $n \rightarrow +\infty$.

Указание: Использовать результат задачи 164.

188. Найти асимптотику функции Бесселя $J_n\left(\frac{n}{\cos \beta}\right)$ при $n \rightarrow +\infty$ и фиксированном $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

189. Найти секторы сходимости на бесконечности в комплексной плоскости следующих интегралов

$$F_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx; \quad F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix^3) dx; \quad F_3 = \int_{\gamma} \exp(x^n) dx,$$

$n > 0$ — целое.

190. Качественно изобразить на комплексной плоскости линии уровня вещественных и мнимых частей функций

(а) $w(z) = z$;

(б) $w(z) = z^2 - 1$;

(в) $w(z) = z^3$;

(г) $w(z) = \ln z$;

(д) $w(z) = \ln(z^2 - 1)$;

(е) $w(z) = e^z$.

191. Найти стационарные точки z_0 функций

$$w_1(z) = z^2 - 1; \quad w_2(z) = z^3; \quad w_3(z) = \ln(z^2 + 1).$$

В каких направлениях от стационарных точек функции $\operatorname{Re} w(z)$ убывают, а в каких возрастают?

192. Доказать тождество

$$\operatorname{Ai}(x) + \omega \operatorname{Ai}(\omega x) + \omega^2 \operatorname{Ai}(\omega^2 x) = 0,$$

где $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$, для функций Эйри

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right] dt.$$

193. Найти асимптотику интеграла

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{t^3}{3} + xt \right) \right] \frac{t^2 dt}{1+t^2}$$

при $x \rightarrow +\infty$ и сравнить с результатом задачи 165.

Указание: Учесть вклад вычета в полюсе $t = i$ при деформации исходного контура интегрирования в перевальный контур (см. рис. 6.3).

194. Найти асимптотику полиномов Лежандра при $l \rightarrow \infty$, используя интегральное представление Шлефли

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l 2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - \cos \theta)^{l+1}} dz,$$

где контур C обходит полюс $z = \cos \theta$ в положительном направлении.

195. Найти закон затухания амплитуды колебаний осциллятора с вязким трением

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

196. Найти закон затухания амплитуды колебаний осциллятора с сухим трением

$$\ddot{x} + 2\gamma \operatorname{sign}(\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0.$$

197. Найти нелинейный сдвиг частоты маятника

$$l\ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0$$

с малой амплитудой колебаний α .

198. Найти и исследовать на устойчивость предельный цикл уравнения

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - |x|) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

6.8. Ответы

173. При $x \rightarrow +\infty$

$$F_1 \sim - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{2\Gamma(1/2)} x^{-2n-1} \sin \left(x^2 - n \frac{\pi}{2} \right),$$

$$F_2 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{2\Gamma(1/2)} x^{-2n-1} \cos \left(x^2 - n \frac{\pi}{2} \right).$$

174. При $a \rightarrow \infty$

$$F(a) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{a^{2n+2}}.$$

175. При $\nu \rightarrow +\infty$ и фиксированном a

$$F(\nu, a) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(\nu a)^{n+1}}.$$

176. При $n \rightarrow +\infty$

$$S_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} (1 + O(n^{-1})).$$

177. При $x \rightarrow +\infty$

$$\operatorname{Erfc} x \sim \frac{\exp(-x^2)}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} (-x^2)^{-n}.$$

178. При $x \rightarrow +\infty$

$$E_n \sim \frac{\exp(-x)}{x^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)} (-x)^{-m}.$$

179. При $\alpha \rightarrow +\infty$

$$F(\alpha) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \exp\left(-\frac{3}{2} \alpha^{2/3}\right) (1 + O(\alpha^{-2/3})).$$

180. При $l \rightarrow +\infty$ и фиксированном $x > 1$

$$P_l(x) \sim \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{l+1/2}}{\sqrt{2\pi l} (x^2 - 1)^{1/4}} (1 + O(l^{-1})).$$

181. При $x \rightarrow \infty$ и фиксированном n

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} (1 + O(x^{-1})).$$

182. При $\nu \rightarrow \infty$ и фиксированном $x > 0$

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \left(\frac{2\nu}{xe}\right)^\nu (1 + O(\nu^{-1})).$$

183. При $\nu \rightarrow \infty$ и фиксированном $\alpha > 0$

$$K_\nu\left(\frac{\nu}{\operatorname{sh} \alpha}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi \operatorname{th} \alpha}{2\nu}} \exp(\nu(\alpha - \operatorname{cth} \alpha)) (1 + O(\nu^{-1})).$$

184. При $x \rightarrow +\infty$

$$\Phi(x) \sim \frac{ie^{ix^2}}{2x} (1 + O(x^{-2})).$$

185. При $x \rightarrow -\infty$

$$\operatorname{Ai}(x) \sim \frac{1}{|x|^{1/4} \sqrt{\pi}} \cos \left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) (1 + O(|x|^{-3/2})).$$

186. При $x \rightarrow +\infty$ и фиксированном n

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot (1 + O(x^{-1})).$$

187. При $n \rightarrow +\infty$

$$J_n(n) \sim \frac{\Gamma(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{n} \right)^{1/3} (1 + O(n^{-1/3})).$$

188. При $n \rightarrow +\infty$ и фиксированном β

$$J_n \left(\frac{n}{\cos \beta} \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{tg} \beta}} \cos \left\{ n (\beta - \operatorname{tg} \beta) + \frac{\pi}{4} \right\} (1 + O(n^{-1})).$$

189. Секторы сходимости интегралов в комплексной плоскости переменной $x = |x|e^{i\theta}$

$$F_1: \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right];$$

$$F_2: \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right];$$

$$F_3: \quad q \frac{2\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} < \theta < q \frac{2\pi}{n} + \frac{3\pi}{2n}, \quad q - \text{целое.}$$

190. *Указание:* Записать комплексную переменную в виде $z = x + iy$ и найти уравнения кривых на плоскости (x, y) из $\operatorname{Re} w(z) = \operatorname{const}$ или $\operatorname{Im} w(z) = \operatorname{const}$. Обратить внимание на нули и особенности функций $w(z)$.

191. Все функции имеют одну стационарную точку $z_0 = 0$. Функции $\operatorname{Re} w_1(z)$ и $\operatorname{Re} w_3(z)$ возрастают вдоль вещественной оси и убывают вдоль мнимой оси от седловой точки. Функция $\operatorname{Re} w_2(z)$ возрастает вдоль направлений $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, а убывает вдоль направлений $\theta = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$ от стационарной точки, где θ — аргумент $z = |z|e^{i\theta}$.

192. *Указание:* Сделать замену переменной в интегральном представлении функции Эйри: $t \rightarrow \frac{t}{w}$ во втором слагаемом тождества и $t \rightarrow tw$ в третьем слагаемом. Преобразовать сумму интегралов в один контурный интеграл (см. рис. 6.3).

193. При $x \rightarrow +\infty$

$$F(x) \sim -\frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{3} - x \right) + O \left(\exp \left(-\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right).$$

194. При $l \rightarrow \infty$ и фиксированном θ

$$P_l(\cos \theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi l \sin \theta}} \sin \left[\theta \left(l + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \right] (1 + O(l^{-1}));$$

$$\theta l \gg 1, \quad (\pi - \theta)l \gg 1.$$

195. Усредненная амплитуда осциллятора уменьшается по закону

$$J(t) = J(0) \exp(-\gamma t).$$

196. Усредненная амплитуда осциллятора уменьшается по закону

$$J(t) = J(0) - \frac{4\gamma t}{\pi\omega_0}, \quad \text{при } 0 < t < \frac{\pi\omega_0 J(0)}{4\gamma}.$$

197. Частота колебаний маятника равна

$$\omega_{NL} = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{a^2}{16} \right),$$

где a — амплитуда малых колебаний.

198. Уравнение на усредненную амплитуду колебаний имеет вид

$$\dot{J} = \frac{\varepsilon J}{2} \left(1 - \frac{4J}{3\pi} \right).$$

При $\varepsilon > 0$ это уравнение имеет одну устойчивую стационарную точку $J = \frac{3\pi}{4}$.

Метод функций Грина

7.1. Функции Грина

1. Метод функций Грина позволяет решать неоднородные линейные дифференциальные уравнения с произвольными правыми частями. Функция Грина первого рода $G(x, x')$, $x, x' \in D \subset \mathbb{R}^n$ краевой задачи

$$\mathcal{L}u = f, \quad Bu|_{x \in S} = 0, \quad (7.1)$$

где $\mathcal{L}$ и B — некоторые линейные дифференциальные операторы, удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}G(x, x') = \delta(x - x') \quad (7.2)$$

и граничному условию $BG(x, x')|_{x \in S} = 0$. Область D и ее граница S схематически изображены на рис. 7.1. Решение задачи (7.1) выражается интегралом Дюамеля

$$u(x) = \int_D G(x, x') f(x') dx'.$$

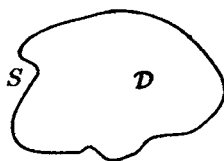


Рис. 7.1. Область определения краевой задачи

Из разложений прямого и обратного оператора по проекторам на подпространства собственных функций $|n\rangle$

$$\mathcal{L} = \sum_n \lambda_n |n\rangle \langle n|, \quad \mathcal{L}^{-1} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} |n\rangle \langle n|, \quad \lambda_n \neq 0 \quad (7.3)$$

видно, что функция Грина — это интегральное ядро обратного оператора $G(x, x') = \langle x | \mathcal{L}^{-1} | x' \rangle$. Отсюда же выводится уравнение (7.2). Функция Грина существует и единственна, если спектральная задача

$$\mathcal{L}|n\rangle = \lambda_n |n\rangle, \quad B|n\rangle|_{x \in S} = 0 \quad (7.4)$$

не имеет нулевого собственного значения. Из разложения (7.3) также следует, что функция Грина самосопряженного оператора ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$, см. главу 1) подчиняется *принципу взаимности*

$$G(x, x') = G^*(x', x).$$

Чтобы найти функцию Грина дифференциального уравнения, следует придерживаться следующих правил. Пусть $\mathcal{L}$ — обыкновенный дифференциальный оператор N -го порядка. Проинтегрируем (7.2) по бесконечно малой окрестности точки x' и найдем скачок $(N-1)$ -й производной от G в точке $x = x'$. Остается выполнить три шага:

1. Решить однородное уравнение.
2. Записать решение в областях $x < x'$ и $x > x'$ в виде двух различных линейных комбинаций решений однородного уравнения, содержащих $2N$ неизвестных коэффициентов.
3. Найти эти коэффициенты, используя N краевых условий, $N-1$ условие непрерывности производных порядков $0, 1, \dots, N-2$ и одно условие на скачок производной порядка $N-1$ при $x = x'$.

Функция Грина представляется, вообще говоря, разными формулами при $x < x'$ и $x > x'$. Если функция Грина симметрична, т. е. $G(x, x') = G(x', x)$, эти формулы отличаются только тем, что в них меняются местами x и x' . Для сокращения записи вместо x, x' будет использоваться обозначение $x_< = \min(x, x'), x_> = \max(x, x')$.

2. Если задача (7.4) имеет нетривиальные решения $|i\rangle$, $i = 1, \dots, k$, с $\lambda_i = 0$ (так называемые *нулевые моды*), то неоднородная задача (7.1) разрешима, когда ее правая часть f ортогональна нулевым модам задачи

$$\mathcal{L}^\dagger v = 0, \quad B^\dagger v|_{x \in S} = 0, \quad (7.5)$$

где $\mathcal{L}^\dagger$ — оператор, сопряженный к $\mathcal{L}$: $(v, \mathcal{L}u) = (\mathcal{L}^\dagger v, u)$, а $B^\dagger$ — сопряженный оператор граничных условий. Для разрешимых неоднородных задач используется *обобщенная (модифицированная) функция Грина*, которая вместо (7.2) удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}G(x, x') = \delta(x - x') - \sum_{i=1}^k u_i(x)v_i^*(x'), \quad (7.6)$$

где нулевые моды u_i и v_i прямой и сопряженной задачи взаимно ортогональны и нормированы условием

$$\int_D v_i^*(x)u_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Обобщенная функция Грина определяется единственным образом, если потребовать ее ортогональности к нулевым модам однородной сопряженной задачи (7.5):

$$\int_D v_i^*(x)G(x, x') dx = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7.7)$$

Разложение по проекторам в подпространстве, ортогональном нулевым модам, записывается как $\mathcal{L}^{-1} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} |n\rangle \langle n|$, где $\sum_n = \sum_{n=k+1}^{\infty}$ означает суммирование по ненулевым модам.

Чтобы найти обобщенную функцию Грина обыкновенного дифференциального уравнения с нулевыми модами, надо сначала их нормировать. В шагах 1, 2 к решению однородного уравнения надо добавить частное решение уравнения (7.6) без δ -функции. В шаге 3 для нахождения неопределенных коэффициентов не хватает k условий, поскольку каждая нулевая мода удовлетворяет одновременно двум граничным условиям. Поэтому следует добавить k требований ортогональности (7.7). Решение запишется как

$$u(x) = \int_D G(x, x') f(x') dx' + \sum_{i=1}^k c_i u_i(x),$$

где c_i — произвольные коэффициенты.

3. Когда вместо (7.1) надо исследовать задачу с неоднородными граничными условиями

$$\mathcal{L}u = 0, \quad Bu|_{x \in S} = g, \quad (7.8)$$

тогда требуется найти функцию Грина второго рода $G_s(x, x')$. Решение задачи (7.8) записывается в виде интеграла по границе S области D :

$$u(x) = \int_S G_s(x, x') g(x') dx', \quad x \in D.$$

Решение линейной задачи с отличной от нуля правой частью и ненулевыми граничными условиями

$$\mathcal{L}u = f, \quad Bu|_{x \in S} = g$$

можно искать в виде суммы решений двух задач (7.1) и (7.8). Получается сумма объемного интеграла по D с функцией f и поверхностного по S с функцией g .

Функции Грина первого и второго рода связаны. Их связь для конкретного уравнения находится с помощью соответствующей формулы Грина, для вывода которой надо рассмотреть разность скалярных произведений $(u, \mathcal{L}v) - (\mathcal{L}u, v)$ и свести ее к поверхностному интегралу.

4. Назовем фундаментальным решением любое решение уравнения (7.2), не обязательно удовлетворяющее граничным условиям. Фундаментальное решение определено с точностью до любого решения однородного уравнения. Вид особенности фундаментального решения уравнения Пуассона

$$\Delta g(r, r') = \delta(r - r')$$

можно найти интегрированием по $\mathbf{r}$ вблизи точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Для размерности $n = 1, 2, 3$ получится

Размерность	$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$
1	$\frac{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' }{2}$
2	$\frac{\ln \mathbf{r} - \mathbf{r}' }{2\pi}$
3	$-\frac{1}{4\pi \mathbf{r} - \mathbf{r}' }$

Функцию Грина первого рода $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ можно построить по фундаментальному решению $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, если добавить линейную комбинацию решений однородного уравнения, не имеющих особенностей при $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, и потребовать выполнения граничных условий. Реально найти такую комбинацию удастся, когда область $\mathcal{D}$ симметрична. В трехмерном случае иногда помогает метод изображений, а в двумерном также метод конформных преобразований. Применение метода изображений основано на преобразовании инверсии $\mathbf{r}' \rightarrow \frac{R^2}{r}$ уравнения Лапласа (см. задачу 203) относительно сферы радиуса R , если $\mathcal{D}$ — шар радиуса R , или отражения относительно плоскости, если $\mathcal{D}$ — полупространство. В двумерном случае уравнение Лапласа ковариантно относительно конформных преобразований. Конформные преобразования полезны, если с их помощью удастся отобразить область на более простую, для которой функцию Грина легче построить.

Для эллиптического оператора Гельмгольца $\mathcal{L} = \Delta - k^2$ или оператора Лапласа $\mathcal{L} = \Delta$ разность интегралов по объему выражается через интеграл по поверхности следующей формулой Грина:

$$(v, \mathcal{L}u) - (\mathcal{L}^\dagger v, u) = - \int_S \left(v^* \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v^*}{\partial n} u \right) dS, \quad (7.9)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает производную по внутренней нормали. Формула выводится из тождества $v \Delta u - u \Delta v = \operatorname{div}(v \nabla u - u \nabla v)$ с помощью преобразования объемного интеграла в поверхностный.

Возьмем в качестве $v(\mathbf{x})$ функцию $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, которая подчиняется уравнению (7.2), а в качестве $u(\mathbf{x})$ — решение задачи (7.8) и воспользуемся формулой Грина (7.9). Теперь поменяем обозначения $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, применим принцип взаимности и получим

$$u(\mathbf{x}) = \int_S \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial u(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} u(\mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'. \quad (7.10)$$

Отсюда находится функция Грина второго рода для разных граничных условий. Для задачи Дирихле $u(x)|_{x \in S} = g(x)$ ($B = 1$) функцию Грина первого рода надо выбрать удовлетворяющей граничному условию

$$G(x, x')|_{x \in S} = 0.$$

Функция Грина второго рода (потенциал двойного слоя) получится из формулы

$$G_s(x, x') = -\frac{\partial}{\partial n'} G(x, x') \Big|_{x' \in S}.$$

Для задачи Неймана $\frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_{x \in S} = g(x)$ ($B = \frac{\partial}{\partial n}$) функцию Грина первого рода надо выбрать удовлетворяющей граничному условию

$$\frac{\partial G(x, x')}{\partial n} \Big|_{x \in S} = 0.$$

Функция Грина второго рода (потенциал простого слоя) получится из формулы

$$G_s(x, x') = G(x, x')|_{x' \in S}.$$

5. Для оператора параболического типа, например, оператора теплопроводности $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$, можно ввести две функции Грина. В безграничной по координатам области функция Грина первого рода убывает на бесконечности и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \mathcal{L}G(r, t; r', t') &= \delta(r - r')\delta(t - t'), \\ G(r, t; r', t') &\rightarrow 0 \quad \text{при } |r - r'| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Функция G позволяет решать задачу

$$\mathcal{L}u = f(r, t), \quad u(r, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow -\infty.$$

Решение задачи Коши с начальными условиями

$$\mathcal{L}u = 0, \quad u(r, 0) = \phi(r)$$

выражается через функцию Грина второго рода G_s , которая стремится к δ -функции в начальный момент

$$\mathcal{L}G_s(r, r', t) = 0, \quad G_s(r, r', t) \rightarrow \delta(r - r') \quad \text{при } t \rightarrow +0.$$

6. Для оператора $\mathcal{L}$ гиперболического типа, например, $\mathcal{L} = \square$, существует несколько разных функций Грина. Нами будет использоваться только запаздывающая функция Грина, определяемая из решения волнового уравнения

$$\square G = \delta(r - r')\delta(t - t'), \quad \square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (7.11)$$

Запаздывающая функция обращается в нуль при $t < t'$ и убывает на бесконечности вместе со своими первыми производными

$$G(r, t; r', t') = 0, \quad t < t'; \quad G(r, t; r', t') \rightarrow 0, \quad |r - r'| \rightarrow \infty.$$

Если коэффициенты дифференциального уравнения постоянны, то функцию Грина можно найти с помощью преобразования Фурье. При выполнении обратного преобразования может возникнуть трудность, если полюс функции Грина в ω, k -представлении попадает на контур интегрирования. Правила обхода полюсов находятся из физических соображений. Для задачи Коши с начальными условиями вместо преобразования Фурье можно использовать преобразование Лапласа.

7.2. Непрерывный спектр

Мы будем рассматривать в основном дифференциальные операторы, действующие в $L^2(\Omega)$ — в пространстве квадратично-интегрируемых функций аргумента $x \in \Omega$. Величина λ называется собственным значением оператора A , если существует решение $\psi_\lambda(x)$ уравнения

$$A\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x),$$

принадлежащее $L^2(\Omega)$. Это решение называется собственной функцией. Принято говорить, что λ — собственные значения дискретного спектра и что все такие λ образуют дискретный спектр σ_p . Для самосопряженного оператора $A = A^\dagger$, действующего в $L^2(\Omega)$, где $\Omega = \mathcal{D}$ — какая-нибудь конечная область пространства, имеет место утверждение: собственные значения A образуют дискретный набор $\sigma_p = \{\lambda_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ и соответствующие собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Для большинства дифференциальных операторов, применяемых в физике (например, операторов Штурма—Лиувилля и Лапласа), множество собственных функций образует полный набор в $L^2(\Omega)$. Из них можно построить ортонормированный базис, выбирая и нормируя подходящие линейные комбинации в вырожденных случаях. При этом оператор A можно представить в каноническом виде (7.3)

$$A = \sum_n \lambda_n |n\rangle \langle n|.$$

Если $A(x, x')$ — ядро интегрального оператора

$$(A\psi)(x) = \int_{\Omega} A(x, x')\psi(x') dx',$$

то его можно разложить по собственным функциям

$$\begin{aligned} A(x, x') &= \langle x | A | x' \rangle = \sum_n \lambda_n \psi_n(x) \psi_n^*(x'), \\ \psi_n(x) &= \langle x | n \rangle, \quad \psi_n^*(x') = \langle n | x' \rangle. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Такое представление оператора называется *спектральным разложением*.

Если же Ω — некомпактная область, то (7.12) может быть уже неверно и должно быть модифицировано, поскольку у оператора A может быть непрерывный спектр. Пусть A по-прежнему самосопряжен. Мы говорим, что интервал (a, b) вещественной оси принадлежит *непрерывному спектру* σ_c , если для всех $\lambda \in \sigma_c = (a, b)$ существуют решения $\psi_\lambda(x)$ уравнения

$$A\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x),$$

не принадлежащие $L^2(\Omega)$, но такие, что любая их суперпозиция вида

$$\Psi(x) = \int_a^b a(\lambda)\psi_\lambda(x) d\lambda, \quad a(\lambda) \in L^2(a, b)$$

уже лежит в $L^2(\Omega)$. Говоря на языке квантовой механики, из волновых функций непрерывного спектра можно построить нормируемые волновые пакеты, сколь угодно близкие какой-нибудь данной $\psi_\lambda(x)$ в сколь угодно большой области пространства. Например, функция

$$a(\lambda) = \frac{\varepsilon}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \varepsilon^2}$$

с малым, но конечным ε имеет конечную норму, и нормируемый пакет $\Psi(x)$ в области с линейным размером $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ будет мало ($\sim \varepsilon$) отличаться от функции $\psi_{\lambda_0}(x)$.

Собственные функции непрерывного спектра самосопряженного оператора A взаимно ортогональны:

$$(\psi_\lambda, \psi_{\lambda'}) = \int_{\Omega} dx \psi_\lambda^*(x) \psi_{\lambda'}(x) = 0, \quad \lambda \neq \lambda',$$

и вместе с функциями дискретного спектра образуют полный набор: любая $f \in L^2(\Omega)$ может быть представлена в виде линейной суперпозиции

$$f(x) = \sum_n a_n \psi_n(x) + \int_{\sigma_c} d\lambda a(\lambda) \psi_\lambda(x). \quad (7.13)$$

Для функций непрерывного спектра принято выбирать нормировку «на δ -функцию»

$$\int_{\Omega} dx \psi_\lambda^*(x) \psi_{\lambda_0}(x) = \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (7.14)$$

Умножим скалярно обе части (7.13) на $\psi_{\lambda_0}(x)$. В результате для коэффициентов $a(\lambda)$ находим

$$a(\lambda) = \int_{\Omega} f(x) \psi_\lambda^*(x) dx. \quad (7.15)$$

Заметим, что изменение нормировки, т. е. появление коэффициента $C(\lambda)$ при δ -функции в (7.14), повлечет за собой появление коэффициента $\frac{1}{C(\lambda)}$ в правой части (7.15).

Будем считать, что выбрана нормировка (7.14). Тогда спектральное разложение ядра $A(x, x')$ принимает вид

$$A(x, x') = \sum_n \lambda_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') + \int_{\sigma_c} d\lambda \lambda \psi_\lambda(x) \psi_\lambda^*(x'), \quad (7.16)$$

где суммирование производится по дискретному спектру σ_p , интегрирование — по непрерывному. В формуле (7.16) подразумевается, что собственные значения непрерывного спектра оператора A невырождены. Если же имеется вырождение, то в каждом собственном подпространстве с собственными значениями λ можно выбрать ортонормированный в смысле (7.14) базис $\psi_\lambda^{(j)}(x)$. Спектральное разложение при этом дополняется суммированием по всем собственным функциям, принадлежащим данному собственному значению λ

$$A(x, x') = \sum_n \lambda_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') + \int_{\sigma_c} d\lambda \lambda \sum_j \psi_\lambda^{(j)}(x) \psi_\lambda^{(j)*}(x'). \quad (7.17)$$

Возможность вырождения собственных значений дискретного спектра учитывается в (7.16), (7.17) тем, что некоторые λ_n в первом слагаемом могут совпадать.

7.3. Резольвента

Резольвентой $\hat{R}_z$ данного самосопряженного оператора $\hat{H}$ называется следующий оператор, зависящий от комплексной переменной z как от параметра

$$\hat{R}_z = (z - \hat{H})^{-1}.$$

Из определения следует уравнение на интегральное ядро $R_z(x, x')$ оператора $\hat{R}_z$

$$(z - \hat{H})R_z(x, x') = \delta(x - x').$$

Собственные функции $\psi_\lambda(x)$ у $\hat{H}$ и $\hat{R}_z$, очевидно, одни и те же, а собственные значения тривиально пересчитываются. В итоге мы получаем спектральное разложение для $R_z(x, x')$:

$$R_z(x, x') = \sum_n \frac{1}{z - \lambda_n} \psi_n(x) \psi_n^*(x') + \int_{\sigma_c} \frac{d\lambda}{z - \lambda} \sum_j \psi_\lambda^{(j)}(x) \psi_\lambda^{(j)*}(x'). \quad (7.18)$$

При $z = 0$ резольвента с точностью до знака переходит в функцию Грина. Видно, что в резольвенте $R_z(x, x')$ заключена вся информация о спектре оператора $\hat{H}$. Как аналитическая функция переменной $z \in \mathbb{C}$ резольвента

определена в плоскости с разрезом вдоль участка вещественной оси, соответствующим непрерывному спектру, и полюсами, соответствующими дискретному спектру оператора $\hat{H}$ (рис. 7.2). Вычет в полюсе $z = \lambda_n$ резольвенты $R_z(x, x')$, как следует из (7.18), равен

$$\text{Res } R_z = \sum_j \psi_{nj}(x) \psi_{nj}^*(x'),$$

где $\psi_{nj}(x)$ — собственные функции: $\hat{H} \psi_{nj} = \lambda_n \psi_{nj}$, $j = 1, \dots, \kappa_n$, где κ_n — кратность вырождения собственного числа λ_n .

Скачок резольвенты на разрезе может быть найден с помощью формулы

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{z + i\epsilon} - \frac{1}{z - i\epsilon} \right) = -2\pi i \delta(z)$$

и равен

$$R_z|_{z=\lambda_0+i0} - R_z|_{z=\lambda_0-i0} = -2\pi i \sum_j \psi_{\lambda_0}^{(j)}(x) \psi_{\lambda_0}^{(j)}(x'). \quad (7.19)$$

Это соотношение позволяет по известной резольвенте найти нормированные согласно (7.14) собственные функции непрерывного спектра с точностью до унитарного поворота в их собственном подпространстве. Такой поворот оставляет инвариантной билинейную форму

$$\sum_j \psi_{\lambda_0}^{(j)}(x) \psi_{\lambda_0}^{(j)}(x').$$

Таким образом, знание особенностей резольвенты как функции своего комплексного параметра z эквивалентно знанию собственных значений и собственных функций как дискретного, так и непрерывного спектра.

Метод функций Грина разобран в книгах [Соб66, МУ72, МФ58]. Понятие резольвенты и свойства функций непрерывного спектра описаны в [Рих82].

7.4. Примеры

199. Найти функцию Грина и выписать решение неоднородного уравнения $u'' = f(x)$, если $u(0) = u(1) = 0$, $x \in [0, 1]$.

Решение. Решение однородного уравнения — линейная функция. Функцию Грина сразу ищем в виде, удовлетворяющем граничным условиям

$$G(x, x') = \begin{cases} Ax, & \text{если } x < x'; \\ B(x-1), & \text{если } x > x'. \end{cases}$$

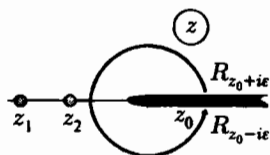


Рис. 7.2. Комплексная плоскость спектрального параметра z с полюсами в точках дискретного спектра и разрезом, соответствующим непрерывному спектру

Здесь $0 \leq x \leq 1$, $0 < x' < 1$. Условия непрерывности функции и единичного скачка производной дают систему двух уравнений для коэффициентов A, B

$$Ax' - B(x' - 1) = 0, \quad B - A = 1.$$

Ответ удобно выразить через переменные $x_>, x_<$: $G(x, x') = x_< (x_> - 1)$. ►

200. Доказать, что функция Грина уравнения $\mathcal{L}_r u(r) = f(r)$ с оператором

$$\mathcal{L}_r = \frac{d^2}{dr^2} + k^2(r)$$

и граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$ представима в виде

$$G(r, r') = \frac{\chi_1(r_<)\chi_2(r_>)}{W(r')}, \quad W(r) = \begin{vmatrix} \chi_1(r) & \chi_2(r) \\ \chi_1'(r) & \chi_2'(r) \end{vmatrix}, \quad (7.20)$$

если нулевые моды отсутствуют. Здесь функции $\chi_i(r)$ — линейно независимые решения однородного уравнения

$$\mathcal{L}_r \chi_i(r) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \chi_1(0) = \chi_2(1) = 0.$$

Решение. Поскольку χ_1 удовлетворяет левому граничному условию, а χ_2 — правому, можно сразу искать функцию Грина в виде

$$G(r, r') = \begin{cases} A\chi_1(r), & \text{если } r < r'; \\ B\chi_2(r), & \text{если } r > r'. \end{cases}$$

Граничные условия выполнены автоматически, а требования непрерывности при $r = r'$ дают систему уравнений на коэффициенты A, B

$$A\chi_1(r') - B\chi_2(r') = 0, \quad B\chi_2'(r') - A\chi_1'(r') = 1.$$

Отсутствие нулевой моды означает, что $\chi_1 \neq \chi_2$. Определитель системы совпадает с вронскианом (7.20) фундаментальной системы решений в точке $r = r'$, а поэтому отличен от нуля. В данном случае вронскиан $W(r')$ не зависит от r' .

Если граничные условия не разделяются на правое и левое, то формула (7.20) уже дает не функцию Грина $G(r, r')$, а только фундаментальное решение $g(r, r')$. Фундаментальное решение можно превратить в функцию Грина, прибавив линейную комбинацию решений однородного уравнения, а граничные условия позволят определить коэффициенты.

Приведем формулу для функции Грина, когда нулевые моды отсутствуют. Пусть вместо нулевых условий на функцию $u(r)$ в задаче заданы однородные граничные условия общего вида $B_1 u = 0$, $B_2 u = 0$, где $B_{1,2}$ — операторы граничных условий, представляющие собой линейные комбинации значений функции и первой производной на левой и правой границах. Функция Грина строится по фундаментальному решению

с помощью формулы

$$G(r, r') = \frac{Z(r, r')}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} B_1 \chi_1 & B_1 \chi_2 \\ B_2 \chi_1 & B_2 \chi_2 \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} g(r, r') & \chi_1(r) & \chi_2(r) \\ B_1 g & B_1 \chi_1 & B_1 \chi_2 \\ B_2 g & B_2 \chi_1 & B_2 \chi_2 \end{vmatrix}.$$

Действительно, формула дает сумму фундаментального решения $g(r, r')$ и линейной комбинации функций $\chi_{1,2}(r)$, не имеющих особенностей при $r = r'$. При действии операторов B_1 или B_2 на определитель Z получается определитель с парой совпадающих строк, поэтому $B_{1,2}Z = 0$. Значит $G(r, r')$ удовлетворяет уравнению и краевым условиям^{*)}. ►

201. Найти обобщенную функцию Грина однородной краевой задачи $L = \frac{d^2}{dx^2}$, $u'(0) = u'(1) = 0$.

Решение. Нулевая мода в данном случае — постоянное решение, если его нормировать, то $u_0(x) = 1$. Поэтому функция Грина удовлетворяет уравнению

$$G''(x, x') = \delta(x - x') - 1. \quad (7.21)$$

Решение уравнения без δ -функции есть $-\frac{x^2}{2}$, поэтому ищем G в виде

$$G(x, x') = -\frac{x^2}{2} + \begin{cases} Ax + B, & \text{если } x < x'; \\ Cx + D, & \text{если } x > x'. \end{cases}$$

Граничные условия позволяют найти два коэффициента $A = 0$, $C = 1$. Сшивка при $x = x'$ дает только одно условие $B = x' + D$. Недостающее условие возникает из требования ортогональности нулевой моде

$$\int_0^1 dx G(x, x') = -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx + \int_0^{x'} B dx + \int_{x'}^1 (x + D) dx = 0,$$

откуда найдем $B = x' - \frac{x'^2}{2} - \frac{1}{3}$, $D = -\frac{x'^2}{2} - \frac{1}{3}$, а

$$G(x, x') = -\frac{1}{3} - \frac{x_>^2 + x_<^2}{2} + x_>. \quad \blacktriangleright$$

202. При каких условиях разрешима неоднородная задача $u'' = f(x)$, $u'(0) = a$, $u'(1) = b$? Выписать решение.

Решение. Умножим уравнение на нулевую моду $u_0(x) \equiv 1$ и проинтегрируем от 0 до 1. Получаем условие разрешимости

$$b - a - \int_0^1 f(x) dx = 0, \quad (7.22)$$

^{*)} Как обобщить данную формулу на уравнение N -го порядка и на оператор с нулевыми модами указано в справочнике [Кам76].

т. е. условие ортогональности нулевой моде сопряженной однородной задачи.

Наглядно можно понять алгебраический смысл получившегося условия, если вместо дифференциального рассмотреть разностное уравнение, как бы подготовив дискретную модель для численного решения. Для этого приблизим первую производную разностной схемой $u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$, а вторую — схемой

$$u''(x) \approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Тогда расширенная матрица системы $(N+1) \times (N+2)$ примет вид

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & ah \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & f(h)h^2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & f(2h)h^2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & f(3h)h^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & f(1-h)h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & -bh \end{array} \right).$$

Первая и последняя строки соответствуют граничным условиям, а остальные отвечают дифференциальному уравнению. Вертикальная черта отделяет матрицу системы от столбца правых частей. Как нетрудно заметить, сумма всех строк матрицы системы равна нулю, а значит, обращается в нуль определитель, и нуль является собственным значением. Собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению, есть дискретный аналог нулевой моды. Для разрешимости необходимо, чтобы сумма элементов последнего столбца тоже обращалась в нуль

$$h(a-b) + h^2 \sum_{k=1}^{N-1} f(kh) = 0.$$

Тогда ранг расширенной матрицы системы N совпадает с рангом матрицы системы. Отсюда при $N \rightarrow \infty$ и получается условие (7.22).

Если бы были наложены условия не на производную, а на функцию $u(0) = a$, $u(1) = b$, то в первой строке пропала бы вторая, а в последней строке — предпоследняя единица. Тогда матрица системы была бы невырожденной, нулевые моды бы исчезли, а краевая задача стала бы разрешимой при произвольных a , b , $f(x)$.

Чтобы выписать решение неоднородной задачи, нужно найти какую-нибудь простую функцию, удовлетворяющую граничным условиям $U'(0) = a$, $U'(1) = b$. Выберем, например, $U(x) = \frac{ax + (b-a)x^2}{2}$. Будем искать решение в виде $u(x) = v(x) + U(x)$. Тогда функция $v(x)$ удовлетворяет уравнению $v'' = f(x) + a - b$ и нулевым граничным условиям на производную $v'(0) = v'(1) = 0$. Задача сводится к предыдущей, а решение

запишется как

$$u(x) = \int_0^1 G(x, x') f(x') dx' + ax + \frac{(b-a)x^2}{2} + C,$$

где произвольная константа C — коэффициент при нулевой моде. Мы не написали $a - b$ под знаком интеграла, воспользовавшись условием ортогональности модифицированной функции Грина и нулевой моды.

Если бы мы выбрали другую функцию $U(x)$, получилось бы решение

$$u(x) = \int_0^1 G(x, x') [f(x') - U''(x')] dx' + U(x) + C, \quad (7.23)$$

которое совпадает с предыдущим с точностью до нулевой моды. Последнее можно показать интегрированием по частям. Проверим, что (7.23) является решением задачи. Для этого продифференцируем (7.23) дважды и воспользуемся уравнением на функцию Грина (7.21), получится

$$u''(x) = f(x) - \int_0^1 [f(x') - U''(x')] dx'.$$

Из условия разрешимости (7.22) следует, что интеграл в правой части этого выражения равен нулю. ►

203. Показать, что если $\phi(r)$ — решение трехмерного уравнения Лапласа, то и $\psi(r) = \frac{\phi(r/r^2)}{r}$ — также решение.

Решение. В сферических координатах

$$\Delta_r \psi(r) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\Delta_\Omega}{r^2} \right] \psi(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\Delta_\Omega}{r^2} \right] \phi\left(\frac{r}{r^2}\right).$$

Сделаем замену $\xi = \frac{r}{r^2}$, так что $\xi = \frac{1}{r}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \xi^4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi^3 \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$\phi\left(\frac{r}{r^2}\right) = \phi\left(\frac{1}{r}, \theta, \varphi\right) = \phi(\xi, \theta, \varphi)$. Тогда

$$\Delta_r \psi(r) = \xi^5 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\Delta_\Omega}{\xi^2} \right] \phi(\xi, \theta, \varphi) = \xi^5 \Delta_\xi \phi(\xi) = 0. \quad \blacktriangleright$$

204. Найти функцию Грина двумерного уравнения Пуассона $\Delta u = f(r)$ в круге радиуса R , $u|_{r=R} = 0$. Получить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге с граничным условием $u|_{r=R} = A(\varphi)$, где φ — угол. Выразить решение в виде контурного интеграла в плоскости комплексного переменного.

Решение. Функцию первого рода найдем методом изображений, поместив заряженную «нить» противоположного знака в точке инверсии $r'_* = \frac{R^2}{r}$ и добавив подходящую константу. Тогда

$$G(r, \varphi; r' \varphi') = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2 - 2rr' \cos \psi + r'^2}{r^2 r'^2 / R^2 - 2rr' \cos \psi + R^2}; \quad \psi = \varphi - \varphi',$$

так что $G|_{r=R} = 0$, независимо от r', φ' . Функция второго рода находится дифференцированием

$$G_s(r, \varphi, \varphi') = \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos \psi + r^2}.$$

Решение задачи Дирихле дается формулой Пуассона

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi')} A(\varphi') d\varphi'. \quad (7.24)$$

Задача «Найти аналитическую в круге функцию, вещественная часть которой принимает на границе круга значение $f(z)$ », решается с помощью формулы Шварца

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} f(\zeta) + iC, \quad (7.25)$$

вещественная часть которой сводится к (7.24) с помощью замены $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = Re^{i\varphi'}$. Тогда $|\zeta - z|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi$ дает знаменатель функции Грина, а $\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{\operatorname{Re}(\zeta + z)}{\zeta - z}$ — саму функцию Грина G_s . Гармоническая функция $u(z)$ есть вещественная часть аналитической функции $w(z)$. ►

205. Труба радиуса R и бесконечной длины помещена в грунт на глубину h и поддерживается при постоянной температуре T_0 . Найти распределение температуры, если на поверхности земли $T = 0$.

Решение. Распределение температуры подчиняется уравнению Лапласа $\Delta T = 0$. Поскольку T не зависит от координаты вдоль трубы, область, в которой предстоит решить уравнение Лапласа, — двумерная (рис. 7.3). Воспользуемся методом конформных преобразований. При помощи дробно-линейной функции

$$\zeta = \frac{z - c}{z + c}, \quad z = x + iy \quad (7.26)$$

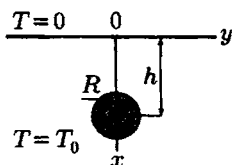


Рис. 7.3. Двумерная область к задаче 205

можно отобразить в кольцо рассматриваемую область. Прямая $z = iy$ перейдет в единичную окружность $|\zeta|^2 = 1$, если c — действительное число. Поверхность трубы также перейдет в окружность $|\zeta|^2 = a^2$ радиуса

$a = \sqrt{\frac{h-c}{h+c}} < 1$, если $c = \sqrt{h^2 - R^2}$. Это можно проверить, подставив $z = h + Re^{i\varphi}$ в дробно-линейное преобразование (7.26). Двумерное уравнение Лапласа ковариантно относительно конформных преобразований, поэтому в новых переменных температура также удовлетворяет уравнению Лапласа. Условия на границах кольца останутся теми же

$$T|_{|\zeta|=1} = 0, \quad T|_{|\zeta|=a} = T_0.$$

Поскольку граничные условия не зависят от угла φ в полярных координатах, задача может быть сведена к одномерной. Двумерное уравнение Лапласа имеет два решения, не зависящих от угла: $\ln |\zeta|$ и 1. Их комбинация, удовлетворяющая граничным условиям, имеет вид

$$T(\zeta) = T_0 \frac{\ln |\zeta|}{\ln a}.$$

Возвращаясь к исходным переменным $\zeta = \frac{x+iy-c}{x+iy+c}$, находим решение задачи:

$$T(x, y) = \frac{T_0}{2} \frac{\ln \frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}}{\ln \frac{h+c}{h-c}}.$$

206. Найти функцию Грина трехмерного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = f(\mathbf{r}),$$

удовлетворяющую условию излучения Зоммерфельда (сходящаяся волна, приходящая из бесконечности, отсутствует) $u|_{r \rightarrow \infty} \sim \frac{e^{ik_0 r}}{r}$.

Решение. Коэффициенты оператора не зависят от $\mathbf{r}$, поэтому уравнение

$$(\Delta + k_0^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

можно свести к алгебраическому с помощью преобразования Фурье по переменной $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$:

$$(k_0^2 - k^2)G_k = 1.$$

Функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ зависит только от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, поэтому равна $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0)$ и находится с помощью обратного преобразования:

$$G(\mathbf{r}, 0) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k_0^2 - k^2}.$$

Интегрирование удобно проделать в сферической системе координат, выбрав ось z вдоль вектора $\mathbf{r}$. Интегрирование по φ дает 2π , после интегрирования по θ остается однократный интеграл

$$G(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{ir} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k e^{i k r}}{k_0^2 - k^2} dk.$$

Полюсы подынтегральной функции лежат на контуре интегрирования, поэтому надо выбрать правило их обхода, исходя из граничных условий. Чтобы получить функцию, удовлетворяющую условию излучения, надо оставить расходящуюся волну и отбросить сходящуюся. Поскольку r — положительная величина, замкнуть контур следует сверху. Чтобы интеграл сводился к вычету в точке $k = k_0$, выбираем контур, указанный на рис. 7.4. Окончательно (после замены $r \rightarrow r - r'$) имеем

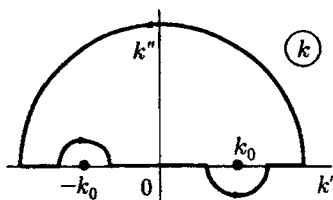


Рис. 7.4. Контур интегрирования для уравнения Гельмгольца

$$G^{(+)}(r, r') = -\frac{e^{ik_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}.$$

Такая функция Грина в виде расходящейся сферической волны используется, например, в задачах дифракции и теории рассеяния (см. задачу 237). ►

207. Найти функции Грина трехмерного уравнения теплопроводности $u_t = \Delta u$ и нестационарного свободного уравнения Шрёдингера $i u_t = -\frac{\Delta u}{2}$.

Решение. Поскольку коэффициенты уравнений постоянны, функция Грина может зависеть только от разностей времен и координат. Тогда уравнения для функций Грина можно записать в виде

$$G_t - \Delta G = \delta(r)\delta(t), \quad iG_t + \frac{1}{2} \Delta G = \delta(r)\delta(t),$$

а в окончательном ответе вернуть исходные аргументы, т. е. выполнить замену $r \rightarrow r - r'$, $t \rightarrow t - t'$.

Преобразование Фурье

$$u_{k\omega} = \int u(r, t) e^{i\omega t - ikr} dr dt, \quad u(r, t) = \int u_{k\omega} e^{-i\omega t + ikr} \frac{dk d\omega}{(2\pi)^4}$$

приводит уравнения к виду

$$(-i\omega + k^2)G_{k\omega} = 1, \quad \left(\omega - \frac{k^2}{2}\right)G_{k\omega} = 1.$$

Обратное преобразование Фурье для уравнения теплопроводности можно выполнить, интегрируя в плоскости комплексного переменного ω . При $t < 0$ контур следует замкнуть в верхней полуплоскости, чтобы исчезал интеграл по бесконечно удаленной полуокружности. Единственный полюс подынтегральной функции расположен вне области, которую охватывает контур, поэтому при $t < 0$ функция Грина обращается в нуль.

При $t > 0$ контур замыкаем в нижней полуплоскости (рис. 7.5). Интеграл выражается через вычет

$$G_k(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + k^2} = -i \operatorname{Res}_{\omega=-ik^2} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + k^2} = e^{-k^2 t}.$$

Преобразование по k сводится к вычислению гауссового интеграла и дает

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4t} \right].$$

В случае уравнения Шрёдингера полюс попадает на вещественную ось, поэтому для сходимости интеграла следует сместить контур интегрирования с вещественной оси (выбрать правило обхода полюса). Дополнительным соображением, позволяющим выбрать из двух возможностей, может служить принцип причинности — условие обращения функции Грина в нуль при $t < 0$. Тогда при $t > 0$ контур выбирается согласно рис. 7.5, а интеграл равен

$$G_k(t) = -i \operatorname{Res}_{\omega=k^2/2} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - k^2/2} = -ie^{-ik^2 t/2}.$$

После обратного преобразования по k получится запаздывающая функция Грина

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) = \frac{\theta(t)}{(2\pi i t)^{3/2}} \exp \left[\frac{i(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{2t} \right], \quad (7.27)$$

которая описывает распыление волнового пакета, локализованного в начальный момент. Запаздывающая функция Грина позволяет решить задачу Коши с начальными условиями.

Для решения задачи Коши можно вместо преобразования Фурье выполнить преобразование Лапласа по времени

$$\left(ip + \frac{k^2}{2} \right) G_{pk} = 1, \quad G_{pk} = \int_0^\infty G_k(t) e^{-pt} dt.$$

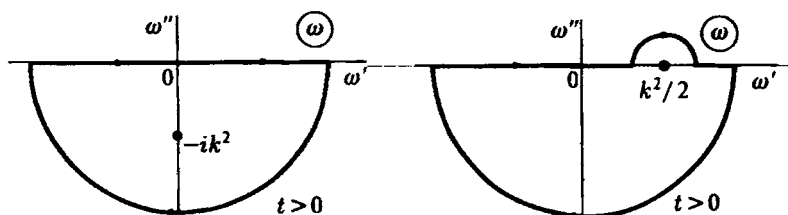


Рис. 7.5. Контур интегрирования для уравнений теплопроводности (слева) и Шрёдингера (справа)

Обратное преобразование Лапласа определяется контурным интегралом

$$G_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint G_{pk} e^{pt} dp.$$

При $t > 0$ правило обхода полюса определено однозначно: все полюсы в плоскости комплексного переменного p надо обходить справа. В результате также получается запаздывающая функция Грина (7.27).

В некоторых физических задачах требуется функция, обращающаяся в нуль при $t > 0$. Для ее получения полюс надо обходить снизу, и получается так называемая опережающая функция Грина $G^{(-)} \propto \theta(-t)$. ►

208. Найти функцию Грина $G(x, x', t)$ одномерного уравнения Фоккера—Планка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (xu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = g(x).$$

Решение. Решение задачи Коши

$$G_t = G + xG_x + \frac{1}{2} G_{xx}, \quad G(x, x', 0) = \delta(x - x') \quad (7.28)$$

для функции Грина второго рода G ищем в виде гауссовой функции

$$G = C(t) \exp \left[-\frac{(x - a(t))^2}{2D(t)} \right]. \quad (7.29)$$

Уравнение Фоккера—Планка сохраняет нормировку (число частиц)

$$\int G(x, x', t) dx = 1,$$

откуда находится $C(t) = (2\pi D(t))^{-1/2}$. Подставляя (7.29) в (7.28) и приравнявая коэффициенты при x , x^2 , получим обыкновенные дифференциальные уравнения для среднего $a(t)$ и дисперсии $D(t)$

$$\dot{a} = -a, \quad \dot{D} = 1 - 2D.$$

Начальные условия $a(0) = x'$, $D(0) = 0$ должны обеспечить предельный переход в δ -функцию при $t \rightarrow +0$. Найдем

$$G(x, x', t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp \left[-(x - x'e^{-t})^2 / (1 - e^{-2t}) \right]}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}.$$

В пределе $t \ll 1$ ответ переходит в функцию Грина диффузионного процесса:

На больших временах $t \gg 1$ функция Грина перестает зависеть от координаты x' :

$$G(x, x', t) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}.$$

Уравнение Фоккера—Планка описывает случайное блуждание частиц, и такой вид асимптотики на больших временах означает, что после нескольких столкновений броуновская частица «забывает» начальные условия.

Данную задачу также можно решить с помощью преобразования Фурье по координате, которое понижает порядок уравнения со второго до первого. Получившееся уравнение первого порядка с частными производными можно решить методом характеристик (см. главу 2). ►

209. Найти функцию Грина одномерного волнового уравнения

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow -\infty.$$

Решение. После преобразования Фурье по координате и времени получим функцию Грина в ω, k -представлении

$$G_{kw} = \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

Проведем обратное преобразование Фурье по ω . Обходя полюсы сверху из соображений причинности, получаем

$$G_k(t) = \theta(t) \frac{ic}{2k} (e^{-ikct} - e^{ikct}).$$

После обратного преобразования по k имеем

$$G(x, t; 0, 0) = \frac{c}{2} [\theta(x + ct) - \theta(x - ct)] \theta(t). \quad (7.30)$$

Значит, локальное возмущение в точке x' , действовавшее в момент времени t' , оказывает влияние только внутри интервала $x' - c(t - t') < x < x' + c(t - t')$ из-за конечной скорости c распространения возмущения (область влияния). ►

210. Показать, что решение задачи Коши

$$\square u = 0, \quad u(\mathbf{r}, 0) = \varphi(\mathbf{r}), \quad u_t(\mathbf{r}, 0) = \psi(\mathbf{r}) \quad (7.31)$$

для волнового уравнения выражается через функцию Грина по формуле

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \int \left[\frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) \varphi(\mathbf{r}') + G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) \psi(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}'.$$

Решение. Волновое уравнение имеет второй порядок по времени, поэтому задача Коши для него содержит два начальных условия — на функцию и первую производную. Следовательно, имеется пара функций Грина второго рода $G_s^{(1)}$ и $G_s^{(2)}$, а решение дается формулой

$$u(r, t) = \int G_s^{(1)}(r, r', t) \varphi(r') dr' + \int G_s^{(2)}(r, r', t) \psi(r') dr'. \quad (7.32)$$

Найдем связь функций $G_s^{(1)}$, $G_s^{(2)}$ с функцией Грина первого рода, которая подчиняется уравнению

$$\square G(r, t; r', t') = \delta(r - r') \delta(t - t') \quad (7.33)$$

и стремится к нулю вместе со своими первыми производными при $t \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow \infty$. Для этого умножим уравнение (7.33) на $u(r, t)$ и вычтем из него уравнение (7.31), умноженное на $G(r, t; r', t')$, а затем проинтегрируем по r по всему пространству и по t в пределах от 0 до ∞ при $t' > 0$:

$$\begin{aligned} u(r', t') &= \int dr dt (u \square G - G \square u) = \\ &= \int dr \int dt \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \int dt \int dr \operatorname{div} (u \nabla G - G \nabla u). \end{aligned}$$

Интеграл от дивергенции преобразуется в силу теоремы Гаусса в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль. В первом слагаемом интеграл по t берется, причем из-за убывания G и G_t при $t \rightarrow \infty$ остается вклад только нижнего предела $t = 0$:

$$u(r', t') = \frac{1}{c^2} \int dr \left[-\frac{\partial G}{\partial t} \varphi(r) + G \psi(r) \right] \Big|_{t=0}.$$

Меня обозначения переменных $r \leftrightarrow r'$, $t \leftrightarrow t'$ и переходя от дифференцирования функции Грина по t' к дифференцированию по t ($\frac{\partial}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t}$), находим

$$u(r, t) = \frac{1}{c^2} \int dr' \left[\frac{\partial G}{\partial t}(r, t; r', 0) \varphi(r') + G(r, t; r', 0) \psi(r') \right].$$

Сравнивая с формулой (7.32), получаем искомую связь:

$$G_s^{(1)}(r, r', t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} G(r, t; r', 0), \quad G_s^{(2)}(r, r', t) = \frac{1}{c^2} G(r, t; r', 0). \quad \blacktriangleright$$

211. Зная функцию Грина одномерного волнового уравнения (задача 209), решить задачу Коши

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = 0; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Решение. Решение задачи Коши можно записать в виде суммы двух интегралов (задача 210)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_s^{(1)}(x, x', t) \varphi(x') dx' + \int_{-\infty}^{\infty} G_s^{(2)}(x, x', t) \psi(x') dx'. \quad (7.34)$$

Воспользуемся выражением (7.30) для функции Грина одномерного уравнения, тогда получится

$$G_s^{(1)}(x, x', t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} G(x, t; x', 0) = \frac{1}{2} [\delta(x - x' + ct) + \delta(x - x' - ct)],$$

$$G_s^{(2)}(x, x', t) = \frac{1}{c^2} G(x, t; x', 0) = \frac{1}{2} [\theta(x - x' + ct) - \theta(x - x' - ct)].$$

Отсюда следует формула Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x') dx'. \quad (7.35)$$

Решение в точке x определяется значениями функций φ в точках $x' = x \pm ct$ и ψ на интервале $x' \in (x - ct, x + ct)$, который называется *областью зависимости*. ►

212. Построить функции Грина второго рода и выписать решение задачи Коши для трехмерного волнового уравнения. Показать, что решение $u(\mathbf{r}, t)$ в точке $\mathbf{r}$ полностью определяется значениями функций

$$\phi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}, 0), \quad \psi(\mathbf{r}) = u_t(\mathbf{r}, 0)$$

и нормальной производной $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ на сфере радиуса ct с центром в точке $\mathbf{r}$ (принцип Гюйгенса).

Решение. Пользуясь функцией Грина первого рода (задача 246) и результатом задачи 210, находим функции Грина второго рода

$$G_s^{(1)} = -\frac{\delta'(\rho - ct)}{4\pi\rho}, \quad G_s^{(2)} = \frac{\delta(\rho - ct)}{4\pi\rho c},$$

где $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Решение задачи Коши для волнового уравнения

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \left[-\frac{\delta'(\rho - ct)}{\rho} \varphi(\mathbf{r}') + \frac{\delta(\rho - ct)}{\rho c} \psi(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}'$$

можно переписать через функционал M , действующий на функциях трех переменных $\mu(\mathbf{r})$ и обозначающий усреднение по единичной сфере

$$M[\mu(\mathbf{r})] = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \mu(\mathbf{r} + c\xi) d^2 S_\xi.$$

Получается формула Кирхгофа

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (tM[\varphi]) + tM[\psi].$$

213. Найти убывающую на бесконечности функцию Грина уравнения Гельмгольца

$$(\Delta_D - q^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (7.36)$$

где Δ_D — лапласиан в D -мерном пространстве,

Решение. С помощью преобразования Фурье найдем

$$G(\mathbf{x}, 0) = - \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}}}{k^2 + q^2}.$$

Знаменатель можно записать как

$$\frac{1}{k^2 + q^2} = \int_0^\infty dt e^{-(k^2 + q^2)t}$$

и поменять порядок интегрирования. Внутренний D -кратный интеграл является гауссовым и вычисляется по формуле

$$\int d^D \mathbf{y} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{y}, A\mathbf{y}) + i(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \right\} = \frac{(2\pi)^{D/2}}{(\det A)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{b}, A^{-1}\mathbf{b}) \right\},$$

где A — матрица $D \times D$, а $\mathbf{b}$ — D -мерный вектор, получается

$$\int d^D \mathbf{k} e^{-k^2 t + i \mathbf{k} \mathbf{x}} = \left(\frac{\pi}{t} \right)^{D/2} e^{-\mathbf{x}^2 / 4t}.$$

Остается вычислить интеграл по t , который сводится к интегральному представлению функции Макдональда (П.31)

$$G(\mathbf{x}, 0) = -\frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty ds s^{D/2-2} e^{-s^2/4 - q^2/s} = -\frac{q^\alpha}{(2\pi)^{D/2}} \frac{K_\alpha(q|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|^\alpha},$$

где $\alpha = \frac{D}{2} - 1$, $s = \frac{1}{t}$. Отсюда

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{q^\alpha}{(2\pi)^{D/2}} \frac{K_\alpha(q|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^\alpha}.$$

Рассмотрим частные случаи. Если $D = 2$, то $\alpha = 0$, а поведение функции Макдональда порядка 0 при малых значениях аргумента логарифмическое (П.33)

$$G(\mathbf{r}, 0) \sim \frac{1}{2\pi} \ln r,$$

что согласуется с общей таблицей особенностей фундаментального решения (с. 165). При $D > 2$ получим для $q|x| \ll 1$

$$G(r, 0) \sim -\frac{\Gamma(\alpha)}{4\pi^{D/2}r^{D-2}}.$$

В частности,

$$G(r, 0) \sim \begin{cases} -\frac{1}{4}\pi r, & D = 3; \\ -\frac{1}{4}\pi^2 r^2, & D = 4. \end{cases}$$

При нечетных размерностях $D = 3, 5, \dots$ функция K_α выражается через элементарные функции.

Рассмотрим подробнее частный случай $D = 4$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Если в качестве первой координаты подставить $x_0 \rightarrow it$ (совершить поворот на $\frac{\pi}{2}$ в комплексной плоскости x_0), а вместо q записать m , то из (7.36) получится уравнение Клейна—Гордона—Фока

$$(\square + m^2)G(x, 0) = -\delta(x),$$

которое описывает движение релятивистской бесспиновой частицы массы m .

Функция Грина (называемая *фейнмановской*) сведется к виду

$$G(x, 0) = -\frac{mK_1(mz)}{4\pi^2 z}, \quad z = \sqrt{r^2 - t^2},$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $c = 1$. Когда интервал пространственноподобный ($r^2 > t^2$), z — действительное число и функция g убывает экспоненциально в области $r > t$: $K_1(mz) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2mz}} e^{-mz}$. Если же интервал времениподобный ($r^2 < t^2$), то величина $z \simeq i\sqrt{t^2 - r^2}$ — чисто мнимая, а функция G осциллирует (рис. 7.6). В нерелятивистском пределе $r^2 \ll t^2$, $mt \gg 1$ можно разложить $z \simeq i(t - \frac{r^2}{2t})$ в аргументе функции Макдональда и получить

$$G(x, 0) \simeq \frac{m}{2(2\pi i t)^{3/2}} e^{-im(t - r^2/2t)}.$$

С точностью до постоянного множителя получилась функция Грина уравнения Шрёдингера (7.27). ▶

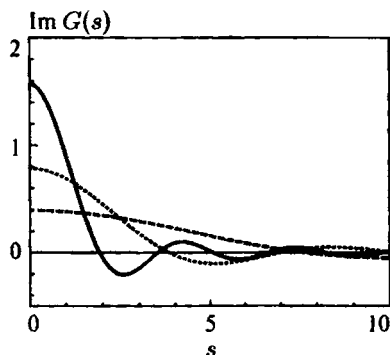


Рис. 7.6. Мнимая часть фейнмановской функции Грина в зависимости от величины $s = \sqrt{t^2 - r^2}$ времениподобного интервала для трех разных масс: --- m ; — $2m$; — $4m$

214. Найти непрерывный спектр оператора $A = -\frac{id}{dx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Чтобы показать, что собственная функция $u(x) = \exp(i\lambda x)$ оператора $A = -\frac{id}{dx}$ принадлежит непрерывному спектру, убедимся, что $Au = \lambda u$. Остается построить приближенную нормированную собственную функцию $\tilde{u}$ и убедиться, что норма $\|A\tilde{u} - \lambda\tilde{u}\|$ стремится к нулю. Выберем приближенную функцию в виде волнового пакета, например $\tilde{u}(x) = \alpha(x) \exp(i\lambda x)$, $\alpha(x) = \varepsilon^{1/4} \pi^{-1/4} \exp(-\frac{\varepsilon x^2}{2})$, где $\|\alpha\| = 1$. Найдем

$$\|A\tilde{u} - \lambda\tilde{u}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha'^2(x) dx = \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, непрерывный спектр совпадает со всей вещественной осью $\mathbb{R}$. ►

215. Найти резольвенту оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$.

Решение. Уравнение

$$\left(z + \frac{d^2}{dx^2}\right) R_z(x, x') = \delta(x - x')$$

с нулевыми граничными условиями на бесконечности имеет решение

$$R_z(x, x') = \frac{1}{2i\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|x-x'|}.$$

При этом подразумевается главная ветвь функции $\sqrt{z}$: $\operatorname{Im} \sqrt{z} > 0$. Резольвента аналитична во всей z -плоскости с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = \{z \in \mathbb{R}, z > 0\}$. Скачок на разрезе определяется значениями квадратного корня из $z = k^2 \pm i\varepsilon$ на берегах разреза

$$k > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{k^2 + i\varepsilon} = k, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{k^2 - i\varepsilon} = -k$$

и равен

$$R_{k^2+i0} - R_{k^2-i0} = \frac{1}{i k} \cos k(x - x') = -\frac{i}{k} (\cos kx \cos kx' + \sin kx \sin kx').$$

Сравнивая с (7.19), мы получаем, что оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$ имеет только непрерывный спектр $z = k^2 > 0$, каждое собственное значение двукратно вырождено и возможный, нормированный согласно (7.14) базис в двумерном собственном подпространстве, соответствующем собственным значениям $z = k^2$, состоит из пары функций

$$\psi_k^{(1)}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{2\pi k}}, \quad \psi_k^{(2)}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{2\pi k}}. \quad \blacktriangleright$$

216. Найти резольвенту радиального оператора

$$\mathcal{L}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$$

на пространстве со скалярным произведением $(v, u) = \int r dr v^*(r) u(r)$.

Решение. Резольвента подчиняется уравнению

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + z \right) g_z^0(r, r') = \frac{\delta(r - r')}{r},$$

откуда интегрированием по $r dr$ получается, что скачок производной при $r = r'$ равен $\frac{1}{r'}$. Два линейно независимых решения — это $\chi_1(r) = J_0(kr)$, удовлетворяющее условию регулярности при $kr \rightarrow 0$, и $\chi_2(r) = J_0(kr) + iY_0(kr)$, переходящее в расходящуюся цилиндрическую волну при $kr \rightarrow \infty$, где $k = \sqrt{z}$.

Асимптотику второго решения можно проверить, пользуясь определением функции Неймана

$$Y_0(x) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}, \quad (7.37)$$

получится

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \quad Y_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\chi_2(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi i k r}} e^{i k r}.$$

Вронскиан можно найти из асимптотики при $r \rightarrow \infty$: $W(r') = \frac{2i}{\pi r'}$. Действуя аналогично задаче (200), получим резольвенту

$$g_z^0(r, r') = \frac{\pi}{2i} J_0(kr_{<}) [J_0(kr_{>}) + iY_0(kr_{>})].$$

Ветвь $\sqrt{z}$ в плоскости z , разрезанной по $\mathbb{R}_+$, выбираем из условия $\sqrt{1} = +1$ на верхнем берегу разреза. При переходе через разрез четная функция $J_0(x)$ не меняется, а скачок Y_0 находится из формулы $J_\nu(-x) = e^{i\pi\nu} J_\nu(x)$ и определения (7.37):

$$Y_0(+x) - Y_0(-x) = -2iJ_0(x).$$

Сравнивая выражение

$$g_{k^2+i\epsilon}^0 - g_{k^2-i\epsilon}^0 = -i\pi J_0(kr) J_0(kr')$$

с (7.19), найдем собственные функции непрерывного спектра

$$\psi_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(kr).$$

Подчеркнем, что эти функции нормируются условием

$$\int \psi_k^*(r) \psi_k(r) r dr = \delta(k^2 - k'^2).$$

217. Найти резольвенту оператора $-\Delta$ в трех измерениях в сферических координатах и построить сферически симметричную нормированную собственную функцию.

Решение. Уравнение

$$(z + \Delta) R_z(r, r') = \delta(r - r')$$

решается преобразованием Фурье, потому что это уравнение Гельмгольца с граничными условиями $R_z \rightarrow 0$ при $\text{Im} \sqrt{z} > 0$ и $r \rightarrow \infty$ (задача 206). Получается

$$R_z(r, r') = -\frac{e^{i\sqrt{z}|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}.$$

Резольвента определена в плоскости с разрезом вдоль $\mathbb{R}_+$.

Можно разложить резольвенту в ряд по сферическим гармоникам

$$R_z(r, r') = \sum_{l,m} g^{lm}(r, r') Y_{lm}(n) Y_{lm}^*(n'),$$

где $n = \frac{r}{r}$, $n' = \frac{r'}{r'}$ — единичные векторы. Нас интересует только коэффициент при $Y_{00}^2 = \frac{1}{4\pi}$, который находится интегрированием по всем четырем углам в сферических координатах $n = (\theta, \varphi)$, $n' = (\theta', \varphi')$. Перейдем к интегрированию по углу ψ между векторами n и n'

$$g_z^{00}(r, r') = 2\pi \int_0^\pi d\psi \sin \psi R_z(|r - r'|),$$

а затем к переменной $t = |r - r'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi$

$$g_z^{00}(r, r') = -\frac{1}{4\pi rr'} \int_{(r-r')^2}^{(r+r')^2} dt \frac{e^{i\sqrt{z}t}}{\sqrt{t}} = -\frac{e^{i\sqrt{z}(r+r')} - e^{i\sqrt{z}|r-r'|}}{2\pi r' i \sqrt{z}} = -\frac{e^{i\sqrt{z}r} \sin \sqrt{z}r' - e^{i\sqrt{z}r'} \sin \sqrt{z}r}{\pi r r' \sqrt{z}}.$$

Функция g_z^{00} аналитична в плоскости z , разрезанной вдоль положительной вещественной полуоси $\mathbb{R}_+$. Скачок на разрезе $z = k^2$

$$g_{k^2+i0}^{00} - g_{k^2-i0}^{00} = -\frac{e^{ikr} \sin kr' - e^{-ikr} \sin kr'}{k r r'} = -\frac{2i \sin kr \sin kr'}{k r r'}$$

приравниваем к $-2\pi i \psi_k(r) \psi_k(r')$. Так можно найти сферически симметричные собственные функции непрерывного спектра

$$\psi_k(r) = \frac{\sin kr}{r\sqrt{\pi k}} Y_{00}(n).$$

Подчеркнем, что эти функции нормируются условием

$$\int \psi_k^*(\mathbf{r}) \psi_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta(k^2 - k'^2),$$

где интеграл берется по всему трехмерному пространству. ►

218. Найти значение резольвенты $R_z(x, x')$ оператора

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + G[\delta(x+a) + \delta(x-a)],$$

при $x = 0$ и $x' = 0$. Как ведет себя $R_z(0, 0)$ при $Ga \gg 1$?

Решение. Резольвента удовлетворяет уравнению

$$(z - \hat{H})R_z(x, x') = \delta(x - x')$$

и может быть представлена в виде (7.20)

$$R_z(x, x') = \frac{v(x_<)u(x_>)}{W},$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — решения однородной задачи

$$(z - \hat{H})u(x) = (z - \hat{H})v(x) = 0$$

с асимптотическими условиями: $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ и $v(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $W = v(x)u'(x) - u(x)v'(x)$ — их вронскиан.

В интервалах $x < -a$, $x > a$ и $-a < x < a$ однородная задача выглядит просто:

$$\left(z + \frac{d^2}{dx^2}\right)u(x) = \left(z + \frac{d^2}{dx^2}\right)v(x) = 0$$

и их решения являются там линейными суперпозициями экспонент $e^{\pm iz\sqrt{z}}$. Как функции параметра z они однозначны в комплексной плоскости с разрезом от $z = 0$ до бесконечно удаленной точки. Асимптотическим условиям при $x \rightarrow \pm\infty$ можно удовлетворить, если мнимая часть $\sqrt{z}$ знакопостоянна. Это так, если разрез проведен вдоль $\mathbb{R}_+$.

Выберем в комплексной плоскости такую ветвь $\sqrt{z}$, что $\text{Im } \sqrt{z} > 0$, тогда

$$u(x) = e^{iz\sqrt{z}}, \quad x > a; \quad v(x) = e^{-iz\sqrt{z}}, \quad x < -a.$$

Значения $u(x)$ и $v(x)$ при $-a < x < a$ (коэффициенты в линейных комбинациях экспонент $e^{\pm iz\sqrt{z}}$) определяются из требования непрерывности этих функций при $x = \pm a$ и скачков производной

$$\begin{aligned}u'(a+0) - u'(a-0) &= Gu(a), \\v'(-a+0) - v'(-a-0) &= Gv(-a).\end{aligned}$$

В результате для $-a < x < a$ получим

$$\begin{aligned}u(x) &= \left(1 + \frac{iG}{2\sqrt{z}}\right) e^{iz\sqrt{z}} - \frac{iG}{2\sqrt{z}} e^{-iz\sqrt{z}+2ia\sqrt{z}}, \\v(x) &= \left(1 + \frac{iG}{2\sqrt{z}}\right) e^{-iz\sqrt{z}} - \frac{iG}{2\sqrt{z}} e^{iz\sqrt{z}+2ia\sqrt{z}},\end{aligned}$$

и вронскиан

$$W = 2i\sqrt{z} \left[1 + \frac{iG}{2\sqrt{z}} (1 - e^{2ia\sqrt{z}})\right] \left[1 + \frac{iG}{2\sqrt{z}} (1 + e^{2ia\sqrt{z}})\right].$$

Отсюда следует, что искомое значение резольвенты равно

$$R_z(0, 0) = -\frac{i}{2\sqrt{z}} \frac{2\sqrt{z} + iG(1 - e^{2ia\sqrt{z}})}{2\sqrt{z} + iG(1 + e^{2ia\sqrt{z}})}.$$

Функция $R_z(0, 0)$ имеет точку ветвления при $z = 0$, и ее скачок на разрезе $\mathbb{R}_+$ определяет точные собственные функции $\hat{H}$, принадлежащие непрерывному спектру. Пусть теперь $Ga \gg 1$, а $z \sim \frac{1}{a^2}$. В ведущем приближении по $(Ga)^{-1}$ резольвента имеет вид

$$R_z(0, 0) \approx -\frac{i}{2\sqrt{z}} \frac{1 - e^{2ia\sqrt{z}}}{1 + e^{2ia\sqrt{z}}},$$

а особенностями в таком приближенном выражении оказываются полюсы на вещественной оси в точках, соответствующих значениям квадратного корня

$$\sqrt{z_n} = \frac{\pi(2n+1)}{2a}.$$

Учет следующих порядков по $(Ga)^{-1}$ дает для полюсов значения с ненулевой мнимой частью

$$\sqrt{z_n} \approx \frac{\pi(2n+1)}{2a} - \frac{\pi(2n+1)}{2Ga^2} + \frac{\pi(2n+1)}{2G^2a^3} - i \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4G^2a^3} + \dots \quad (7.38)$$

Мы видим, что знак мнимой части *не соответствует* выбранной ветви функции $\sqrt{z}$, и резольвента для тех z , для которых мы ее строили, полюсов *не имеет*. Можно сказать, что ее полюсы лежат на другом листе римановой поверхности квадратного корня $\sqrt{z}$. Тем не менее, при $Ga \gg 1$ эти «нефизические» полюсы лежат близко к разрезу, то есть к нашему листу римановой поверхности $\sqrt{z}$, и это дает основания для полюсной аппроксимации $R_z(x, x')$. Таким образом, для z из верхней полуплоскости резольвента может быть приближенно представлена в виде суммы полюсных вкладов в точках (7.38).

Положения таких полюсов обычно интерпретируют как комплексные энергии распадающихся квазистационарных состояний, энергии которых имеют малую мнимую часть. Квазистационарные состояния используются для описания распада радиоактивных ядер и нестабильных частиц [БЗП71]. Пользоваться, однако, полюсным приближением нужно с осторожностью, потому что, строго говоря, квазистационарные состояния принадлежат непрерывному спектру. В частности, если определить собственные функции $\tilde{\psi}_n(x)$ с комплексными энергиями через вычеты резольвенты в таких полюсах, то они окажутся экспоненциально растущими при $|x| \rightarrow \infty$. Это, впрочем, не означает, что их нельзя использовать ни в каких задачах. В ограниченной области пространства волновая функция распадающегося состояния может быть представлена как линейная суперпозиция таких ненормируемых собственных функций с комплексными энергиями. При этом необходимо, чтобы размер этой области был меньше, чем характерный обратный показатель экспоненциального роста функции $\tilde{\psi}_n(x)$.

7.5. Задачи

219. Найти функцию Грина оператора $L = \frac{d}{dx} + 1$, действующего на пространстве функций $u(x)$, $x \in [0, 1]$, с периодическим граничным условием $u(0) = u(1)$.

220. Найти функцию Грина и выписать решение неоднородного уравнения $u'' = f(x)$, если:

(а) $u(-1) = u(1) = 0$, $x \in [-1, 1]$;

(б) $u(0) = u'(1) = 0$, $x \in [0, 1]$.

221. Найти функцию Грина уравнения третьего порядка $u''' = f(x)$, если $u(0) = u(1) = 0$, $u'(0) = u'(1)$.

222. Построить функцию Грина задач с граничными условиями:

(а) $\frac{dG}{dx} + kG = \delta(x - x')$, $G(x, x') = 0$ при $x < x'$;

(б) $\frac{d^2G}{dx^2} + k^2G = \delta(x - x')$, $G(x, x') = 0$ при $x > x'$.

223. Построить функцию Грина для оператора

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}, \quad u(0) = 0, \quad u(\infty) < \infty, \quad 0 \leq x < \infty.$$

224. Найти функцию Грина следующих краевых задач для уравнения колебаний струны $u'' + k^2u = f(x)$, $x \in [0, 1]$:

(а) $u(0) = u(1) = 0$;

(б) $u'(0) = u'(1) = 0$;

(в) $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$.

225. Найти функцию Грина уравнения $u'' - k^2 u = f(x)$ с граничными условиями:

- (а) $u(0) = 0$, функция $u(x)$ ограничена при $x \rightarrow +\infty$ на полуоси $x \geq 0$;
 (б) $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

226. Используя функцию Грина из задачи (б), получить решение уравнения

$$\psi'' + k^2 \psi = f(x), \quad \operatorname{Im} k = 0$$

с граничным условием $\psi \rightarrow e^{ikx}$ при $x \rightarrow +\infty$; $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

227. Найти функцию Грина уравнения

$$u'' + \frac{1}{x} u' - \frac{m^2}{x^2} u = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

с граничными условиями: $u(x)$ ограничена при $x \rightarrow 0$, $u(1) = 0$. Почему функция получается несимметричной: $G(x, x') \neq G(x', x)$?

228. Найти обобщенную функцию Грина для операторов:

(а) $L = \frac{d^2}{dx^2}, \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1);$

(б) $L = \frac{d^2}{dx^2} + \pi^2, \quad u(0) = u(1) = 0;$

(в) $L = \frac{d^2}{dx^2} + \pi^2, \quad u'(0) = u'(1) = 0;$

(г) $L = \frac{d^2}{dx^2} - 1, \quad u(0) = u'(0), \quad u(1) = u'(1).$

229. Как будет выражаться через обобщенную функцию Грина решение неоднородных уравнений с неоднородными граничными условиями:

(а) $Lu = f(x), \quad u(0) = a, \quad u(1) = b, \quad L = \frac{d^2}{dx^2} + \pi^2;$

(б) $Ly = f(x), \quad u(0) - u'(0) = a, \quad u(1) - u'(1) = b, \quad L = \frac{d^2}{dx^2} - 1?$

При каких условиях на $f(x)$ уравнения имеют решения?

230. Найти функцию Грина трехмерного уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y, z)$ в полупространстве $z > 0$ с граничным условием $u(x, y, 0) = 0$.

231. Найти функцию Грина уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y, z)$ в области $x > 0, y > 0$ с граничным условием $u(0, y \geq 0, z) = u(x \geq 0, 0, z) = 0$.

232. Найти функцию Грина уравнения Гельмгольца

$$\Delta u - k^2 u = f(x, y, z)$$

в полупространстве $z > 0$ с граничным условием $u(x, y, 0) = 0$.

233. Найти функцию Грина уравнения Пуассона внутри полусферы $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $z > 0$ с нулевым граничным условием $G(x^2 + y^2 + z^2 = R^2) = G(z = 0) = 0$.

234. Показать, что двумерное уравнение Лапласа ковариантно относительно преобразования инверсии $r \rightarrow \xi = \frac{1}{r}$.

235. Используя функцию Грина из задачи 204, решить задачу Дирихле $u|_S = \sin 2\varphi$ в круге $r \leq R$.

236. Найти решение задачи Неймана для уравнения Пуассона в полупространстве $z > 0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z) \right|_{z=0} = g(x, y).$$

237. С помощью функции Грина трехмерного уравнения Шрёдингера

$$\frac{1}{2}(\Delta + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

вывести интегральное уравнение для волновой функции $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$ с асимптотическим поведением на бесконечности: плоская плюс расходящаяся волна (основное уравнение теории рассеяния). Потенциал предполагается убывающим $U(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

238. Доказать, что функция Грина уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ позволяет получить оператор эволюции (функцию Грина второго рода) по формуле

$$G_s(x - x', t) = G(x, t; x', 0).$$

239. Найти функцию Грина $G_s(x - x', t)$ уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье: по времени, по координате, по обоим переменным.

240. Начальное распределение температуры гауссово:

$$u(x, 0) = \frac{\exp(-x^2/2a^2)}{a\sqrt{2\pi}}.$$

Как оно будет эволюционировать по времени?

241. Найти функцию Грина уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ с граничными условиями $u(t, 0) = 0$, $u(t, \infty) = 0$.

242. Найти решение задачи Коши $u(x, 0) = x^5$, $u(0, t) = 0$ для уравнения теплопроводности в области $x \geq 0$, $t \geq 0$.

^{*)} Преобразование инверсии — только одно из целой группы конформных преобразований [ЛШ87], оставляющих гармоническую функцию гармонической.

243. Построить временную функцию Грина задачи Коши к уравнению Шрёдингера для одномерного гармонического осциллятора

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}, \quad \hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x}.$$

244. Найти функцию Грина неоднородного двумерного волнового уравнения.

245. Найти функции Грина второго рода двумерного волнового уравнения.

246. Определить запаздывающую функцию Грина трехмерного волнового уравнения (7.11).

247. Точечный заряд движется по закону $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$. Пользуясь функцией Грина, найти скалярный потенциал во всем пространстве (потенциал Лиенара—Вихерта).

248. Показать, что решение неоднородного волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$ может быть получено из решения задачи Коши для вспомогательной функции $v(x, t; \tau)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad v(x, \tau; \tau) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t}(x, t; \tau) \right|_{t=\tau} = f(x, \tau),$$

где $0 \leq \tau \leq t$ — параметр, с помощью формулы

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau.$$

249. Найти непрерывный спектр следующих операторов, определенных на всей вещественной оси:

(а) $A = x;$

(б) $A = -\frac{d^2}{dx^2};$

(в) $A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2.$

250. Найти непрерывный спектр бесконечной матрицы, у которой элементы над и под главной диагональю равны единице, а остальные элементы — нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

7.6. Ответы

$$219. G(x, x') = \begin{cases} \frac{e^{-(x-x')}}{e-1}, & \text{если } x < x'; \\ \frac{e^{1-(x-x')}}{e-1}, & \text{если } x > x'. \end{cases}$$

$$220. (a) G(x, x') = \frac{(x_{<} + 1)(x_{>} - 1)}{2},$$

$$u(x) = \frac{x-1}{2} \int_0^x (x'+1)f(x') dx' + \frac{x+1}{2} \int_x^1 (x'-1)f(x') dx'.$$

$$(b) G(x, x') = -\min(x, x') = -x_{<}, \quad u(x) = -\int_0^x x' f(x') dx' - x \int_x^1 f(x') dx'.$$

$$221. G(x, x') = \frac{1}{2} x_{<} (x_{>} - 1)(x - x').$$

$$222. (a) G(x, x') = \theta(x - x') e^{-k(x-x')}.$$

$$(b) G(x, x') = -\theta(x' - x) \sin \frac{k(x-x')}{k}.$$

$$223. G(x, x') = -\frac{x_{<}^2}{3x_{>}}.$$

$$224. (a) G(x, x') = \frac{\sin kx_{<} \sin k(x_{>} - 1)}{k \sin k}, \quad k \neq \pi n, n=0, 1, \dots$$

$$(b) G(x, x') = \frac{\cos kx_{<} \cos k(x_{>} - 1)}{k \sin k}, \quad k \neq \pi n, n=0, 1, \dots$$

$$(b) G(x, x') = \frac{\cos k(x_{>} - x_{<} - 1/2)}{2k \sin(k/2)}, \quad k \neq 2\pi n, n=0, 1, \dots$$

$$225. (a) G(x, x') = -\frac{1}{k} \exp(-kx_{>}) \operatorname{sh} kx_{<}, \quad k \neq 0.$$

$$(b) G(x, x') = -\frac{1}{2k} \exp(-k(x_{>} - x_{<})) = -\frac{1}{2k} \exp(-k|x - x'|), \quad k \neq 0.$$

$$226. \psi(x) = e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin k(x - x') f(x') dx'.$$

$$227. G(x, x') = \begin{cases} \left(\frac{x'}{2m}\right) x_{<}^m (x_{>}^m - x_{>}^{-m}), & m > 0; \\ x' \ln x_{>}, & m = 0. \end{cases}$$

$$228. (a) G(x, x') = -\frac{1}{2}(x_> - x_<)^2 + \frac{1}{2}(x_> - x_<) - \frac{1}{12}.$$

$$(b) G(x, x') = \frac{x_> \cos \pi x_> \sin \pi x_< + x_< \cos \pi x_< \sin \pi x_>}{2\pi^2} - \frac{\sin \pi x_> \sin \pi x_<}{2\pi^2} - \frac{\sin \pi x_< \cos \pi x_>}{2\pi^2}.$$

$$(b) G(x, x') = -\frac{x_> \sin \pi x_> \cos \pi x_< + x_< \sin \pi x_< \cos \pi x_>}{2\pi^2} - \frac{\cos \pi x_> \cos \pi x_<}{2\pi^2} + \frac{\sin \pi x_< \cos \pi x_<}{\pi}.$$

$$(r) G(x, x') = \alpha e^{x+x'} [2\alpha e^2 - (x+x')] - \alpha \operatorname{ch}(x-x') - \frac{1}{2} e^{-|x-x'|},$$

$$\alpha = \frac{1}{e^2 - 1}.$$

$$229. (a) u(x) = a(1-x) + bx + \int_0^1 G(x, x') [f(x') + \pi^2 (a(1-x') + bx')] dx' + C \sin \pi x,$$

$$\pi(a+b) = \int_0^1 \sin \pi x f(x) dx.$$

$$(b) u(x) = b(1+x) - ax + \int_0^1 G(x, x') [f(x') + ax' - b(1+x')] dx' + Ce^x,$$

$$a - be = \int_0^1 e^x f(x) dx.$$

$$230. G(x, y, z; x', y', z') = F(z') - F(-z');$$

$$F(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

$$231. G(x, y, z; x', y', z') = F(x', y') - F(-x', y') - F(x', -y') + F(-x', -y');$$

$$F(x', y') = -\frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

$$232. G(x, y, z; x', y', z') = F(x, y, x; x', y', z') - F(x, y, x; x', y', -z');$$

$$F(x, y, x; x', y', z') = -\frac{\exp \left(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right)}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

$$233. G(r, \theta, \varphi; r', \theta', \varphi') = F(r, r', \psi) - F(r, r', \tilde{\psi}) - \frac{R}{r'} F\left(r, \frac{R^2}{r'}, \psi\right) + \\ + \frac{R}{r'} F\left(r, \frac{R^2}{r'}, \tilde{\psi}\right);$$

$$F(r, r', \psi) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}};$$

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'),$$

$$\cos\tilde{\psi} = -\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

$$234. \Delta_r = \xi^4 \Delta_\xi.$$

$$235. u(r, \varphi) = r^2 \sin \frac{2\varphi}{R^2}.$$

$$236. u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{g(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}.$$

$$237. \psi^{(+)}(r) = \exp(ikr) - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\exp(ik|r-r'|)}{|r-r'|} U(r') \psi^{(+)}(r') dr'.$$

238. Указание: Начальное условие $u(x, 0) = \phi(x)$ можно перенести в правую часть уравнения, получится $u_t = u_{xx} + \phi(x)\delta(t)$.

$$239. G(x, t; x', 0) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4t}\right] \rightarrow \delta(x-x'), \quad t \rightarrow +0.$$

240. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^2 + 2t} \exp\left(-\frac{x^2}{2(a^2 + 2t)}\right)$. Дисперсия при распылении гауссового пакета растет линейно со временем $\sigma^2(t) = a^2 + 2t$.

$$241. G(x, t; x', 0) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4t}} \right].$$

$$242. u(x, t) = x^5 + 20x^3t + 60xt^2.$$

$$243. G(x, t; x', 0) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{2\pi i}} \sqrt{\operatorname{ctg}\omega t} \exp\left[i \frac{\omega(x\cos\omega t - x')^2}{\sin 2\omega t}\right].$$

$$244. G(r, t; r', t') = \frac{c}{2\pi} \frac{\theta(ct - \rho)}{\sqrt{c^2\tau^2 - \rho^2}}.$$

$$245. G_s^{(1)}(r, r', t) = \frac{c}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}, \quad G_s^{(2)}(r, r', t) = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}.$$

Решение дается формулой Пуассона

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{\varphi(r') d^2r'}{\sqrt{c^2t^2 - (r-r')^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{\psi(r') d^2r'}{\sqrt{c^2t^2 - (r-r')^2}}.$$

$$246. G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{c}{4\pi\rho} \delta(\rho - c\tau), \quad \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad \tau = t - t'.$$

$$247. \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - 1/c \dot{R}(t')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R}(t'), \quad t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

248. Указание: По формуле Даламбера (7.35) найдем решение вспомогательной задачи

$$v(x, t; \tau) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(x', \tau) dx'.$$

Дифференцируя по t и x функцию $u(x, t)$, покажите, что она удовлетворяет неоднородному волновому уравнению.

249. (а) Непрерывный спектр совпадает со всей вещественной осью.
 (б) Непрерывный спектр $\lambda \geq 0$.
 (в) Непрерывного спектра нет. Собственные функции дискретного спектра — полиномы Эрмита — образуют полный набор.
250. Непрерывный спектр на отрезке $-2 \leq \lambda \leq 2$.

Интегральные уравнения

8.1. Уравнения Фредгольма

Уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла, называются интегральными. Как было показано в предыдущей главе, линейное дифференциальное уравнение

$$L\psi(x) = U(x)\psi(x) + g(x)$$

с дифференциальным оператором L , действующим на определенном классе функций $\psi(x)$, $x \in \Omega$, и линейными граничными условиями может быть сведено к интегральному уравнению

$$\psi(x) = \int_{\Omega} G(x, x') U(x') \psi(x') dx' + f(x). \quad (8.1)$$

Здесь $G(x, x')$ — функция Грина оператора L ,

$$f(x) = \int_{\Omega} G(x, x') g(x') dx' + r(x),$$

$r(x)$ — вклад от неоднородных граничных условий.

Уравнением *Фредгольма первого рода* называется уравнение

$$0 = \int_{\Omega} K(x, x') \psi(x') dx' + f(x). \quad (8.2)$$

Уравнение вида

$$\psi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, x') \psi(x') dx' + f(x) \quad (8.3)$$

называется уравнением *Фредгольма второго рода*. В этом уравнении λ — спектральный параметр.

Если ядро $\tilde{K}(x, x')$ интегрального оператора в (8.3), (8.2) удовлетворяет условию

$$\tilde{K}(x, x') = \begin{cases} K(x, x') & \text{при } x' \leq x; \\ 0 & \text{при } x' > x, \end{cases}$$

то интегральные уравнения называют *уравнениями Вольтерра* соответственно 1-го и 2-го рода:

$$0 = \int_{x' \leq x} K(x, x') \psi(x') dx' + f(x), \quad (8.4)$$

$$\psi(x) = \lambda \int_{x' \leq x} K(x, x') \psi(x') dx' + f(x). \quad (8.5)$$

Уравнение (8.3) (а также (8.5)) может быть записано в обозначениях бра и кет:

$$(1 - \lambda \hat{K})|\psi\rangle = |f\rangle. \quad (8.6)$$

Здесь $\hat{K}$ — интегральный оператор, имеющий ядро $K(x, x')$.

Уравнение (8.6) разрешимо, если существует обратный оператор к $A = 1 - \lambda \hat{K}$, называемый резольвентой. В этом случае решение (8.6) записывается в виде

$$|\psi\rangle = \hat{R}|f\rangle, \quad \hat{R} = (1 - \lambda \hat{K})^{-1}. \quad (8.7)$$

Явное выражение для резольвенты может быть представлено в виде ряда по λ (разложение Неймана, оно же — метод последовательных приближений):

$$\hat{R} = 1 + \lambda \hat{K} + \lambda^2 \hat{K}^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{K}^n. \quad (8.8)$$

Здесь $\hat{K}^n$ также интегральный оператор, его ядро называют *повторным*. Ядро задается формулой:

$$K_n(x, x') = \int_{\Omega} dx_1 \int_{\Omega} dx_2 \dots \int_{\Omega} dx_{n-1} K(x, x_1) K(x_1, x_2) \dots K(x_{n-1}, x').$$

Если $\int_{\Omega} |K(x, x')| dx' < M$, то ряд $\psi = \sum \lambda^n \hat{K}^n f$ равномерно сходится в круге радиуса $|\lambda| \leq \frac{1}{M}$. В частности, это означает, что однородное уравнение

$$(1 - \lambda \hat{K})|\psi\rangle = 0 \quad (8.9)$$

имеет только тривиальное решение $|\psi\rangle = 0$. При этом решение (8.7) является единственным.

8.2. Вырожденные ядра

В другом важном случае — *вырожденных* ядер, когда

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^N \psi_n(x) \tilde{\psi}_n(y), \quad (8.10)$$

решение уравнения Фредгольма (8.3) сводится к чисто алгебраической процедуре.

Функции $\{\psi_n(x)\}$, а также $\{\tilde{\psi}_n(y)\}$ можно считать линейно независимыми (в противном случае вначале необходимо выразить все линейно зависимые функции через линейно независимые).

Для нахождения решения уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$\psi(x) = \lambda \sum_{n=1}^N \psi_n(x) \int_{\Omega} \tilde{\psi}_n(y) \psi(y) dy + f(x) \quad (8.11)$$

рассмотрим разность $\varphi(x) = \psi(x) - f(x)$. Если разложить эту разность по функциям $\psi_n(x)$,

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{n=1}^N C_n \psi_n(x),$$

то из (8.11) видно, что на коэффициенты C_n получается система линейных алгебраических уравнений

$$C_n - \lambda \sum_{l=1}^N M_{nl} C_l = f_n, \quad (8.12)$$

где $f_l = \int_{\Omega} \tilde{\psi}_l(y) f(y) dy \equiv \langle \tilde{\psi}_l | f \rangle$, $M_{nl} = \int_{\Omega} \tilde{\psi}_n(y) \psi_l(y) dy \equiv \langle \tilde{\psi}_n | \psi_l \rangle$.

Решение уравнений (8.12) может быть, например, найдено с помощью правила Крамера. Если $\det(1 - \lambda M) \neq 0$, то

$$C = (1 - \lambda M)^{-1} f.$$

Здесь C, f — векторы с компонентами C_n и f_n . Если $\det(1 - \lambda M) = 0$, то матрица $L = 1 - \lambda M$ не имеет обратной и решение уравнений (8.12) разрешимо не для всех f . Для разрешимости необходимо найти решение сопряженной задачи для оператора L :

$$\langle \tilde{C} | L = 0, \quad (8.13)$$

где $\langle \tilde{C} |$ — строка. Число линейно независимых решений $\langle \tilde{C}^r |$ этой системы равно $N - q$, где q — ранг матрицы L .

Условие разрешимости уравнения

$$(1 - \lambda M) | C \rangle = | f \rangle \quad (8.14)$$

состоит в ортогональности правой части ко всем векторам сопряженной задачи (8.13):

$$\langle \tilde{C}^r | f \rangle = 0. \quad (8.15)$$

Это условие является необходимым и достаточным. В этом случае решение уравнения (8.15) определено с точностью до $N - q$ констант A_r :

$$|C\rangle = \sum_{r=1}^{N-q} A_r |C^r\rangle + (1 - \lambda M)^{-1} |f_\perp\rangle. \quad (8.16)$$

Здесь $|f_\perp\rangle = P_\perp |f\rangle$, $P_\perp = 1 - \sum_{r=1}^{N-q} |C^r\rangle \langle \tilde{C}^r|$ — поперечный к векторам $|C^r\rangle$ проектор, а вектора $|C^a\rangle$ и $\langle \tilde{C}^b|$ предполагаются взаимно-ортогональными: $\langle \tilde{C}^b | C^a \rangle = \delta_{ab}$.

Сформулированные выше утверждения представляют собой теорему (альтернатива Фредгольма), которая в общем случае гласит:

- Уравнение (8.5) имеет единственное решение, если однородное уравнение (8.9) имеет только тривиальное решение $|\psi\rangle = 0$. При этом сопряженное к (8.9) уравнение имеет также только тривиальное решение.
- Если однородное уравнение (8.9) имеет n линейно независимых решений, то сопряженное к (8.9) уравнение имеет ровно столько же линейно независимых решений $\langle \tilde{\psi}_k|$, а для разрешимости уравнения (8.5) необходимо и достаточно, чтобы $\langle \tilde{\psi}_k | f \rangle = 0$ для каждого $k = 1, \dots, n$. При выполнении этого условия общее решение записывается в виде (8.16).

8.3. Теорема Гильберта—Шмидта

Для симметричных операторов $K(x, y) = K(y, x)$, удовлетворяющих условию интегрируемости модуля $K(x, y)$ в квадрате

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 dx dy < +\infty,$$

справедлива *теорема Гильберта—Шмидта*: Если $f(x)$ представима через ядро $K(x, y)$,

$$f(x) = \int_{\Omega} K(x, y) g(y) dy,$$

то эта функция может быть разложена в ряд по собственным функциям $|\psi_n\rangle$ интегрального оператора $\tilde{K}$, $(1 - \lambda_n \tilde{K})|\psi_n\rangle = 0$:

$$f(x) = \sum_n f_n \psi_n(x) \quad \text{или} \quad |f\rangle = \sum_n f_n |\psi_n\rangle,$$

где $f_n = \langle \psi_n | f \rangle$.

Используя эту теорему, можно установить, что ядро $K(x, y)$ может быть представимо в виде (билинейная формула):

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \psi_n(x) \psi_n^*(y), \quad (8.17)$$

или соответственно

$$\hat{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (8.18)$$

Пример: Доказать, что для интегральных операторов вида

$$\hat{K}\psi = \int K(x, y) \rho(y) \psi(y) dy,$$

где $\rho(x) \geq 0$ — вещественное и $K(x, y) = K^*(y, x)$, собственные функции с различными собственными значениями взаимно ортогональны с весом $\rho(x)$:

$$\int \psi_n^*(x) \psi_m(x) \rho(x) dx = \delta_{nm}.$$

Решение. Собственные функции $\psi_n(x)$ и $\psi_m(x)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \int K(x, y) \rho(y) \psi_n(y) dy &= \mu_n \psi_n(x), \\ \int K(x, y) \rho(y) \psi_m(y) dy &= \mu_m \psi_m(x). \end{aligned}$$

Сначала покажем, что все собственные значения $\mu_n \equiv \lambda_n^{-1}$ — вещественные. Умножим обе части, например, первого равенства на $\rho(x) \psi_n^*(x)$ и проинтегрируем по x . Слева получится выражение

$$\int K(x, y) \rho(y) \rho(x) \psi_n(y) \psi_n^*(x) dx dy,$$

вещественное в силу симметрии $K(x, y) = K^*(y, x)$ (проверяется комплексным сопряжением и заменой переменных интегрирования $x \leftrightarrow y$). Вещественность правой части эквивалентна вещественности собственного значения. Далее, умножим первое равенство на $\rho(x) \psi_m^*(x)$, второе — на $\rho(x) \psi_n^*(x)$ и проинтегрируем по x . Левые части окажутся комплексно сопряженными друг другу в силу той же симметрии ядра $K(x, y)$. Условие же комплексной сопряженности правых частей, вместе с вещественностью μ_n и μ_m , даст:

$$(\mu_n - \mu_m) \int \rho(x) \psi_n(x) \psi_m^*(x) dx = 0.$$

Отсюда и следует при $\mu_n \neq \mu_m$ ортогональность $\psi_n(x)$ и $\psi_m(x)$ с весом $\rho(x)$. ►

Применение теоремы Гильберта—Шмидта, в частности билинейной формулы, оказывается весьма важным для решения спектральной задачи для оператора Штурма—Лиувилля

$$L\psi = -\rho^{-1} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\psi}{dx} \right) + q(x)\psi = \lambda\psi \quad (8.19)$$

с однородными граничными условиями и некоторыми функциями $\rho(x)$ и $q(x)$. В этом случае уравнение (8.19) посредством функции Грина может быть представлено в виде интегрального уравнения

$$\psi(x) = \lambda \int_{\Omega} G(x, y) \rho(y) \psi(y) dy,$$

где функция Грина является симметричной: $G(x, y) = G(y, x)$. Отсюда, используя теорему Гильберта—Шмидта, можно показать, что собственные функции для оператора Гильберта—Шмидта ортогональны с весом $\rho(x)$. При этом собственные функции образуют полный набор.

Пример: Определить весовые функции для: а) функций Бесселя $J_n(x)$; б) полиномов Лагерра; в) полиномов Эрмита, исходя из дифференциальных уравнений, их определяющих.

Решение. а) Уравнение Бесселя может быть переписано в виде задачи на собственные значения:

$$\left(x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} + x^2 \right) J_n(x) = n^2 J_n(x),$$

так что весовая функция $\rho(x) = \frac{1}{x}$. В целом соотношение ортогональности выглядит так:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} J_n(x) J_m(x) = 0, \quad m \neq n.$$

б) Уравнение для полиномов Лагерра переписывается в виде:

$$e^x x^{-m} \frac{d}{dx} e^{-x} x^{m+1} \frac{d}{dx} L_n^m(x) = -n L_n^m(x)$$

и $\rho(x) = e^{-x} x^m$.

в) Уравнение, определяющее полиномы Эрмита, переписывается в виде:

$$e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} \frac{d}{dx} H_n = -2n H_n,$$

так что $\rho(x) = e^{-x^2}$. ►

8.4. Обратная задача для оператора Шредингера

Под *обратной* задачей для оператора Шрёдингера

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

с $U(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ понимается задача восстановления потенциала по данным рассеяния, т. е. асимптотическим состояниям для спектральной задачи для оператора L :

$$L\Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) \Psi = -k^2 \Psi. \quad (8.20)$$

Оператор L , как известно, относится к самосопряженным операторам. Его спектр чисто действителен: $\text{Im } k^2 = 0$. Непрерывный спектр оператора Шрёдингера лежит при $k^2 > 0$, дискретному спектру отвечают состояния с отрицательными энергиями $E_n = k_n^2 < 0$.

8.4.1. Прямая задача рассеяния

Для любых двух решений (8.20) Ψ_1 и Ψ_2 вронскиан

$$W\{\Psi_1, \Psi_2\} = \Psi_1 \Psi_{2x} - \Psi_{1x} \Psi_2 \quad (8.21)$$

не зависит от x . Причем функции Ψ_1 и Ψ_2 линейно независимы, если вронскиан между ними отличен от нуля. Для определения данных рассеяния среди решений из непрерывного спектра удобно рассмотреть специальный класс решений — *функции Йоста*, определяемые через асимптотики при $|x| \rightarrow \infty$:

$$\psi(x, k) \rightarrow e^{ikx} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (8.22)$$

$$\Phi(x, k) \rightarrow e^{-ikx} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (8.23)$$

Определенные таким образом функции ψ и ψ^* очевидно линейно независимы, образуя при заданном k^2 полный базис решений. Поэтому Φ и Φ^* могут быть разложены по ψ и ψ^* :

$$\Phi(x, k) = a(k)\psi^*(x, k) + b(k)\psi(x, k), \quad (8.24)$$

$$\Phi^*(x, k) = b^*(k)\psi^*(x, k) + a^*(k)\psi(x, k), \quad (8.25)$$

или в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^* \\ \psi \end{pmatrix} \equiv \hat{S} \begin{pmatrix} \psi^* \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Из (8.24) и (8.25) с помощью (8.21) следует, что

$$a(k) = \frac{1}{2ik} W(\Phi, \psi), \quad b(k) = -\frac{1}{2ik} W(\Phi, \psi^*), \quad (8.26)$$

а также определитель матрицы перехода (или матрицы рассеяния) $\hat{S}$ равен единице:

$$\det \hat{S} = |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (8.27)$$

Последнее соответствует обычному закону сохранения:

$$|r|^2 + |d|^2 = 1,$$

где $r = \frac{b}{a}$ — коэффициент отражения, а $d = \frac{1}{a}$ — коэффициент прохождения. Из (8.24) и (8.25) следует также, что при $\text{Im } k = 0$

$$a(k) = a^*(-k), \quad b(k) = b^*(-k). \quad (8.28)$$

В силу определения (8.22), (8.23) функции Йоста ψ и Φ аналитически продолжимы в верхнюю полуплоскость k ($\text{Im } k > 0$), соответственно ψ^* и Φ^* аналитичны в нижней полуплоскости (см. задачу 257). Поэтому функция $a(k)$ согласно (8.26) аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость. Поскольку при $k \rightarrow \infty$ $\psi \rightarrow e^{ikx}$, $\Phi \rightarrow e^{-ikx}$, функция $a(k)$ при $k \rightarrow \infty$ стремится к единице. Точки верхней полуплоскости, где $a(k_n) = 0$, соответствуют дискретному спектру. Вронскиан в этих точках согласно (8.26) равен нулю, т.е. функции Φ и ψ линейно зависимы: $\Phi(k_n) = C_n \psi(k_n)$. С другой стороны, это есть решение уравнения (8.20), затухающее как при $x \rightarrow \infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$ (по определению функции Йоста (8.22) и (8.23)). Таким образом, данное решение описывает связанное состояние, а нули функции $a(k)$ $k_n = ix_n$ расположены на мнимой оси.

Совокупность величин $a(k)$, $b(k)$, κ_n и C_n образуют полный набор данных рассеяния для оператора L .

8.4.2. Уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко

Для решения обратной задачи, т.е. восстановления потенциала $U(x)$ по данным рассеяния, существенную роль играют аналитические свойства функций Йоста ψ и Φ . Поскольку ψ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость $\text{Im } k > 0$ (см. задачу 257), то функция $\psi(x, k)$ может быть представлена в виде

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \int_z^\infty K(x, y) e^{iky} dy, \quad (8.29)$$

где $K(x, y)$ — некоторое действительное ядро. Из этого представления сразу следует, что ψ аналитична при $\text{Im } k > 0$. Это представление называют *треугольным*.

Подставим (8.29) в уравнение (8.20). В результате дифференцирования получим:

$$\begin{aligned} U(x) e^{ikx} - \frac{\partial}{\partial x} [K(x, x) e^{ikx}] - \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \Big|_{y=x} e^{ikx} + \\ + \int_z^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) e^{iky} dy = -(U(x) + k^2) \int_z^\infty K(x, y) e^{iky} dy. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем интеграле $-k^2 e^{iky} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{iky}$ и интегрируя дважды по частям, найдем, что

$$\int_x^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) + U(x) K(x, y) \right] e^{iky} dy + \\ + \left[U(x) - 2 \frac{d}{dx} K(x, x) \right] e^{ikx} = 0.$$

Это равенство должно быть выполнено при всех k . Поскольку функции e^{iky} при различных значениях y линейно независимы, то это равенство удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) + U(x) K(x, y) = 0, \quad (8.30)$$

$$U(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (8.31)$$

Полученное уравнение (8.30) с граничным условием (8.31) представляет собой так называемую *задачу Гурса*, которая при условии

$$K(x, x+y) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

однозначно разрешима.

К этому следует добавить, что формула (8.31), связывающая ядро $K(x, y)$ с потенциалом $U(x)$, следует также из асимптотического разложения треугольного представления при $k \rightarrow \infty$ с последующим применением формулы (8.45) задачи 258.

Перейдем теперь к выводу уравнений обратной задачи, определяющих связь ядра $K(x, y)$ с данными рассеяния. Исходим из соотношения (8.24), которое поделим на $a(k)$, затем вычтем из правой и левой частей их асимптотическое (при $k \rightarrow \infty$) значение $-e^{ikx}$, умножим далее на e^{iky} ($y \geq x$) и проинтегрируем по k от $-\infty$ до ∞ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Phi(x, k)}{a(k)} - e^{-ikx} \right] e^{iky} dk = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_x^\infty K(x, s) e^{ik(y-s)} ds + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ik(x+y)} dk + \int_x^\infty K(x, s) \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ik(y+s)} dk. \quad (8.32)$$

При $y > x$ подынтегральная функция в левой части равенства стремится к нулю с ростом мнимой части k , поэтому контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости. Интеграл равен сумме вычетов в нулях функции $a(k)$.

Если $a(k)$ не имеет нулей, т. е. связанные состояния отсутствуют, то интеграл слева тождественно равен нулю. В результате получим

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_x^\infty K(x, s) F(s+y) ds = 0, \quad (8.33)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ikx} dk.$$

Это уравнение и есть искомое уравнение обратной задачи рассеяния, называемое часто *уравнением Гельфанда—Левитана—Марченко (ГЛМ)*.

Если $a(k)$ имеет нули, то левая часть (8.32) равна сумме вычетов

$$2\pi i \sum_n \frac{\Phi(x, i\kappa_n)}{a'(i\kappa_n)} e^{-\kappa_n x}. \quad (8.34)$$

В точках $k = i\kappa_n$ функции Φ и ψ связаны $\Phi(x, i\kappa_n) = C_n \psi(x, i\kappa_n)$. Для ψ справедливо представление (8.29) через ядро $K(x, y)$. Группируя все члены в уравнении, окончательно убеждаемся, что уравнение ГЛМ имеет ту же форму, только в F возникает дополнительная сумма, отвечающая дискретному спектру оператора L :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ikx} dk - \sum_n \frac{iC_n}{a'(i\kappa_n)} e^{-\kappa_n x}. \quad (8.35)$$

Если продолжить первое из равенств (8.28) на комплексные k ,

$$a(k) = a^*(-k^*),$$

то функция $a(k)$ при мнимых $k = i\kappa$ чисто действительна: $a(i\kappa) = a^*(i\kappa)$. Отсюда следует, что производная $a'(i\kappa)$ чисто мнимая, так что коэффициент $M_n^2 = -\frac{iC_n}{a'(i\kappa_n)}$ действителен. Более того, этот коэффициент положителен (см. задачу 279). Уравнение (8.33) позволяет найти ядро $K(x, y)$, а вместе с тем и $U(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$ по данным рассеяния $a(k)$, $b(k)$, κ_n и C_n .

Обратимся теперь к простейшим решениям уравнения ГЛМ, когда в ядре $F(x)$ отсутствует интегральный член. Для таких решений коэффициент $r(k) = 0$. Соответствующие потенциалы называются безотражательными, они полностью задаются набором $\{\kappa_n\}$ — дискретным спектром оператора L — и величинами M_n^2 .

Пусть $F(x)$ определяется одним значением κ :

$$F(x) = M^2 e^{-\kappa x}.$$

Подставляя это значение в уравнение ГЛМ, убеждаемся, что зависимость ядра $K(x, y)$ от y полностью определяется:

$$K(x, y) = \psi_0(x) e^{-\kappa y}. \quad (8.36)$$

Легко видеть, что в силу (8.30) функция $\psi_0(x)$ есть собственная функция дискретного спектра, для нее

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right) \psi_0(x) = \kappa^2 \psi_0(x).$$

Подставляя (8.36) в уравнение ГЛМ (8.33) и интегрируя, находим, что

$$\psi_0(x) = -\frac{M^2 e^{-\kappa x}}{1 + \frac{M^2}{2\kappa} e^{-2\kappa x}} = -\frac{\sqrt{2\kappa} M}{2} \operatorname{ch}^{-1} \kappa(x - q),$$

где

$$q = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{M^2}{2\kappa}.$$

Соответствующий потенциал

$$U(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) = \frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - q)}. \quad (8.37)$$

Этот потенциал является простейшим безотражательным потенциалом. В нем только одно связанное состояние с $E = -\kappa^2$.

Традиционные методы решения интегральных уравнений разобраны в книгах [Пет65, Соб66б, Сми74с]. Методы решения обратной задачи рассеяния для операторов Шрёдингера обсуждаются в книгах [ЗМНП80, Мар77, Нью89].

8.5. Примеры

251. Решить уравнение

$$u(x) = \int_0^x s \ln \left(\frac{s}{x} \right) u(s) ds + \frac{x^4}{16}. \quad (8.38)$$

Решение. Дифференцируя уравнение (8.38) последовательно два раза, получим

$$u'(x) = -\frac{1}{x} \int_0^x s u(s) ds + \frac{x^3}{4},$$

$$u''(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x s u(s) ds - u(x) + \frac{3x^2}{4},$$

откуда следует дифференциальное уравнение

$$u'' + \frac{1}{x}u' + u = x^2$$

с граничным условием $u(0) = u'(0) = 0$, которое следует из (8.38). Фундаментальная система решений состоит из функций Бесселя J_0 и Неймана Y_0 нулевого порядка. Для решения неоднородного уравнения построим функцию Грина, обращающуюся в нуль при $x = 0$,

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{Y_0(y)J_0(x)\Theta(y-x) + J_0(y)Y_0(x)\Theta(x-y)}{W\{J_0(x), Y_0(x)\}} = \\ &= \frac{\pi}{2} [Y_0(y)J_0(x)\Theta(y-x) + J_0(y)Y_0(x)\Theta(x-y)], \end{aligned}$$

где вронскиан равен

$$W\{J_0(y), Y_0(y)\} = J_0 Y_0' - J_0' Y_0 = \frac{2}{\pi y} \quad (8.39)$$

(см. задачу 140). Теперь можно выписать решение

$$u(x) = \int_0^{\infty} G(x, y) y^2 dy.$$

Если воспользоваться рекуррентными соотношениями для цилиндрических функций (П.18) и проинтегрировать по частям два раза, решение $u(x)$ можно записать явно:

$$u(x) = x^2 - 4 + 4J_0(x). \quad \blacktriangleright$$

252. Метод определителей Фредгольма позволяет найти резольвенту по формуле

$$R(x, y; \lambda) = \frac{\Delta(x, y; \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \Delta(\lambda) \neq 0,$$

где определитель Фредгольма $\Delta(\lambda)$ и минор Фредгольма $\Delta(x, y; \lambda)$ находятся как суммы рядов

$$\begin{aligned} \Delta(x, y; \lambda) &= K(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n B_n(x, y), \\ \Delta(\lambda) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n C_n. \end{aligned}$$

Функции $B_n(x, y)$ и коэффициенты C_n в свою очередь определяются рекуррентными формулами

$$B_n(x, y) = C_n K(x, y) - n \int_0^1 K(x, t) B_{n-1}(t, y) dt,$$

$$C_n = \int_0^1 B_{n-1}(x, x) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $C_0 = 1$, $B_0(x, y) = K(x, y)$.

Найти методом определителей Фредгольма резольвенту ядра $K(x, y) = x^2y - xy^2$.

Решение. Последовательно получаем $C_0 = 1$, $B_0(x, y) = x^2y - xy^2$, $C_1 = 0$,

$$B_1(x, y) = xy \left[-\frac{x+y}{4} + \frac{1}{5} + \frac{xy}{3} \right],$$

$C_2 = \frac{1}{120}$, $B_2 = 0$, а значит, обращаются в нуль все последующие коэффициенты C_n и функции B_n . Причиной обрывания ряда является специальный вид ядра $K(x, y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$ (покажите, что для таких ядер справедливо соотношение

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, y) K(y, z) K(z, t) dy dz = \frac{1}{2} K(x, t) \int_0^1 \int_0^1 K(z, y) K(y, z) dy dz,$$

с помощью которого можно выразить все повторные ядра через первое и второе).

$$R(x, y; \lambda) = \frac{x^2y - xy^2 - \lambda xy \left(\frac{1}{3} + \frac{xy}{3} - \frac{x+y}{4} \right)}{1 + \frac{\lambda^2}{240}}.$$

253. Решить спектральную задачу для уравнений с ненормируемым ядром:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \int_0^\infty \sin(xy) \phi(y) dy.$$

Решение. Обозначим синус-преобразование Фурье функции $\phi(y)$:

$$\Phi(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xy) \phi(y) dy.$$

Применяя синус-преобразование к обеим частям исходного уравнения, получаем

$$\Phi(x) = \lambda \phi(x),$$

откуда

$$\phi(x) = \lambda \Phi(x) = \lambda^2 \phi(x).$$

Значит у оператора только два собственных значения $\lambda = \pm 1$, а собственные функции имеют вид

$$\phi(x) = g(x) + \lambda G(x),$$

где $g(x)$ — произвольная функция, для которой существует образ $G(x)$ при синус-преобразовании Фурье, например,

$$\phi(x) = \exp(-ax) \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad a > 0. \quad \blacktriangleright$$

254. Найти собственные функции, убывающие на бесконечности быстрее любой степени, и собственные значения интегрального уравнения

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \phi(y) dy = \phi(x)$$

с ядром Килсона—Сторера

$$K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\alpha^2)}} \exp \left[-\frac{(x-\alpha y)^2}{1-\alpha^2} \right], \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (8.40)$$

Решение. Применяя преобразование Фурье к обеим частям исходного уравнения, получаем функциональное уравнение на фурье-образ $\Phi(k)$ функции $\phi(x)$

$$\Phi(k) = \lambda \Phi(k\alpha) \exp \left(-(1-\alpha^2) \frac{k^2}{4} \right).$$

Функция $g(k) = \Phi(k) \exp \left(\frac{k^2}{4} \right)$ растягивается в λ раз при растяжении ее аргумента в α раз:

$$g(k) = \lambda g(k\alpha),$$

откуда $g(k) = k^\nu$ — степенная функция, а значит,

$$\Phi_\nu(k) = k^\nu \exp \left(-\frac{k^2}{4} \right), \quad \lambda = \alpha^{-\nu}.$$

Если $\nu > -1$ не целое, собственная функция $\phi(x)$ убывает на бесконечности степенным образом. При целых $\nu = n$ можно явно выполнить обратное преобразование Фурье, в результате получаем

$$\phi_n(x) = H_n(x) \exp(-x^2), \quad \lambda_n = \alpha^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где H_n — полиномы Эрмита. $\blacktriangleright$

255. Найти собственные функции преобразования Фурье

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \exp(ixy) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \phi(x).$$

Решение. Обозначим преобразование Фурье функции $\phi(y)$:

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) \phi(y) dy.$$

Применяя преобразование к обеим частям исходного уравнения, получаем

$$\Phi(x) = \lambda \phi(-x),$$

откуда

$$\phi(x) = \lambda \Phi(x) = \lambda^2 \phi(-x) = \lambda^3 \Phi(-x) = \lambda^4 \phi(x).$$

Значит у оператора четыре собственных значения $\lambda = \pm i, \pm 1$, а собственные функции имеют вид

$$\phi(x) = g(x) + \lambda G(x) + \lambda^2 g(-x) + \lambda^3 G(-x),$$

где $g(x)$ — произвольная функция, для которой существует образ $G(x)$ при преобразовании Фурье, например,

$$\phi_n(x) = H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Это собственные функции задачи о квантовомеханическом осцилляторе. Заметим, что уравнение Шрёдингера осциллятора

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - x^2\psi = 2E\psi$$

переводится преобразованием Фурье в то же уравнение. Четные функции соответствуют собственным значениям $\lambda = \pm 1$, а нечетные — $\lambda = \pm i$. ►

256. Найти решения $f(y)$ уравнений Урысона:

$$(a) \quad 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) f(y) y dy = x(|x|+1) e^{-|x|};$$

$$(б) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) f(y) (1+y^2) dy = 1.$$

Решение. (а) Вспомним, что если $f(\omega)$ — фурье-образ функции $f(x)$, то фурье-образ функции $xf(x)$ равен $if'(\omega)$. Выполняя преобразование Фурье, получаем

$$2if'(\omega)f(\omega) = 4i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}.$$

Чтобы $f(x)$ была ограниченной, необходимо, чтобы ее фурье-образ стремился к нулю при $\omega \rightarrow \pm\infty$, что позволяет найти константу интегрирования. Таким образом

$$f(\omega) = \pm \frac{2}{1 + \omega^2}, \quad f(x) = \pm e^{-|x|}.$$

Решение. (б) Выполняя преобразование Фурье, получаем

$$f^2(\omega) - f''(\omega)f(\omega) = 2\pi\delta(\omega).$$

Стремящееся к нулю при $\omega \rightarrow \pm\infty$ решение этого уравнения имеет вид

$$f(\omega) = \pm \sqrt{\pi} e^{-|\omega|}.$$

Откуда

$$f(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+x^2)}.$$

257. Показать, что функции Йоста $\psi(x, k)$ и $\Phi(x, k)$ аналитически продолжаемы в верхнюю полуплоскость k ($\text{Im } k > 0$).

Решение. Вначале для свободного оператора Шрёдингера $\frac{d^2}{dx^2} + k^2$ определим функцию Грина G как решение уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)G = \delta(x - x').$$

Полагая $G(x - x') = 0$ при $x > x'$, легко находим, что

$$G(x - x') = \begin{cases} -\frac{1}{k} \sin k(x - x') & \text{при } x' > x; \\ 0 & \text{при } x > x'. \end{cases} \quad (8.41)$$

С помощью функции Грина уравнение для функции ψ превращается в уравнение Вольтерра

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin k(x - x') U(x', k) \psi(x', k) dx'. \quad (8.42)$$

Рассмотрим функцию $\chi(x, k) = \psi(x, k) \exp(-ikx)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\chi(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty [1 - \exp(2ik(x' - x))] U(x') \chi(x', k) dx'. \quad (8.43)$$

При вещественных k , по предположению, решение уравнения (8.42) существует, т. е. интеграл в (8.43) сходится. При выходе в верхнюю

полуплоскость его сходимости улучшится, откуда и следует аналитичность функции $\chi(x, k)$ и, соответственно, функции $\psi(x, k)$. Аналогичным образом можно показать, что функция $\Phi(x, k)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость. ►

258. Найти связь между асимптотикой функции Йоста $\psi(x, k)$ при больших k и потенциалом $U(x)$.

Решение. Из (8.43) следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$\chi(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty U(x') dx' + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad (8.44)$$

таким образом,

$$\frac{d}{dx} \lim_{k \rightarrow \infty} 2ik\chi(x, k) = -U(x). \quad (8.45)$$

259. Найти общий вид безотражательного потенциала с дискретными уровнями $k_n = i\kappa_n$ ($n = 1, \dots, N$).

Решение. В этом случае $a(k)$ имеет N нулей в точках $k = i\kappa_n$, а $r(k)$ тождественно равно нулю, поэтому F задается в виде дискретной суммы

$$F(x+y) = \sum_n M_n^2 \exp[-\kappa_n(x+y)].$$

Зависимость ядра $K(x, y)$ от y имеет вид^{*)}

$$K(x, y) = \sum_n \psi_n(x) e^{-\kappa_n y}.$$

Простые вычисления для $\psi_n(x)$ дают следующую линейную систему алгебраических уравнений:

$$\psi_n(x) + M_n^2 e^{-\kappa_n x} + M_n^2 \sum_{m=1}^N \frac{\psi_m(x) \exp[-(\kappa_n + \kappa_m)x]}{\kappa_n + \kappa_m} = 0, \quad (8.46)$$

или в матричной форме

$$\sum_{m=1}^N A_{nm} \psi_m = -M_n^2 e^{-\kappa_n x},$$

где

$$A_{nm} = \delta_{nm} + M_n^2 \frac{\exp[-(\kappa_n + \kappa_m)x]}{\kappa_n + \kappa_m}.$$

^{*)} В этом случае об уравнении (8.33) говорят как об уравнении с вырожденным ядром.

Решение (8.46) находится по *правилу Крамера*

$$\psi_n(x) = \frac{\det B_n(x)}{\det A(x)},$$

где матрица $B_n(x)$ получается из матрицы $A(x)$ заменой n -го столбца на столбец $(-M_n^2 e^{-\kappa_n x})$. Заметим теперь, что потенциал $U(x)$ (8.31) определяется только $K(x, x)$, т. е.

$$\sum_{n=1}^N \psi_n(x) e^{-\kappa_n x} = \frac{\sum_{n=1}^N \det B_n e^{-\kappa_n x}}{\det A(x)}.$$

Нетрудно убедиться, что $\sum_{n=1}^N \det B_n e^{-\kappa_n x} = \frac{d(\det A)}{dx}$, для чего достаточно заметить, что производная от определителя есть сумма определителей, в n -м из которых n -й столбец заменен на его производную $-M_n^2 \exp[-(\kappa_n + \kappa_m)x]$. Таким образом,

$$U(x) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A. \quad \blacktriangleright$$

260. Найти выражение для малых потенциалов $U(x)$ в отсутствии дискретного спектра через амплитуду коэффициента отражения $r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$ (первое борновское приближение).

Решение. В отсутствии дискретного спектра

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ikx} dx.$$

Для малых потенциалов в уравнении (8.33) следует пренебречь интегральным членом. В результате

$$K(x, x) \approx -F(2x)$$

или для потенциала

$$U(x) = -2 \frac{d}{dx} F(2x) = -\frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) k e^{2ikx} dk. \quad \blacktriangleright$$

261. Восстановить амплитуду прохождения $d(k)$ (или $a(k)$) по ее модулю при $\text{Im } k = 0$ и положению дискретного спектра $k_n = i\kappa_n$.

Решение. В силу свойства $a(k)$: $a(k) = a^*(-k)$ при $\text{Im } k = 0$ функция может быть представлена в виде

$$a(k) = \tilde{a}(k) \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n},$$

где $\tilde{a}(k)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости без нулей, имеющая предельное при $k \rightarrow \infty$ значение, равное единице.

Рассмотрим функцию $\ln \tilde{a}(k)$ и выпишем для нее одно из соотношений Крамерса—Кронига

$$\arg \tilde{a}(k) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\tilde{a}(k')|}{k' - k} dk'.$$

Очевидно, что для $\text{Im } k = 0$ выполняется равенство $\ln |\tilde{a}(k)| = \ln |a(k)|$. Поскольку функция $\ln |\tilde{a}(k)|$ четная, интеграл преобразуется к виду

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\tilde{a}(k')|}{k' - k} dk' = -\frac{2}{k} \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\ln |\tilde{a}(k')|}{1 - k'^2/k^2} dk'.$$

Таким образом,

$$\arg a(k) = \frac{1}{i} \sum_n \left[\ln \left(1 - \frac{i\kappa_n}{k} \right) - \ln \left(1 + \frac{i\kappa_n}{k} \right) \right] + \frac{2}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{\ln |\tilde{a}(k')|}{1 - k'^2/k^2} dk'. \quad \blacktriangleright$$

8.6. Задачи

262. Используя разложение (8.17), найти выражение для ядра резольвенты $R(x, y) = (1 - \lambda K)^{-1}$.

263. Решение уравнения Вольтерра II рода

$$\phi(x) - \int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = f(x) \quad (8.47)$$

можно записать через резольвенту интегрального оператора $R(x, y)$

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x R(x, y) f(y) dy. \quad (8.48)$$

(а) Показать, что резольвента подчиняется интегральному уравнению

$$R(x, y) = K(x, y) + \int_y^x K(x, t) R(t, y) dt. \quad (8.49)$$

(б) Показать, что резольвента представляется в виде суммы

$$R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, y) \quad (8.50)$$

повторных ядер

$$K_1(x, y) \equiv K(x, y), \quad K_{n+1}(x, y) = \int_y^x K(x, t) K_n(t, y) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

264. С помощью формулы (8.50) найти резольвенты следующих ядер уравнения Вольтерра:

- (а) $K(x, y) = 1$;
- (б) $K(x, y) = \lambda(x - y)$, $\lambda > 0$;
- (в) $K(x, y) = \exp(x - y)$;
- (г) $K(x, y) = \lambda \exp(x^2 - y^2)$;
- (д) $K(x, y) = \frac{\lambda \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} y}$.

265. С помощью преобразования Лапласа найти резольвенты следующих разностных ядер уравнения Вольтерра:

- (а) $K(x, y) = \sin(x - y)$;
- (б) $K(x, y) = \operatorname{sh}(x - y)$;
- (в) $K(x, y) = \operatorname{ch}(x - y)$.

266. Пусть $u(x)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\widehat{L}u(x) = \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f_0(x) \quad (8.51)$$

с начальными условиями $u(0) = C_0$, $u'(0) = C_1$. Здесь $p(x)$, $q(x)$ предполагаются аналитическими функциями.

(а) Свести (8.51) к интегральному уравнению Вольтерра на функцию $\phi(x) = u''(x)$.

(б) Показать, что если известна функция Грина уравнения (8.51), удовлетворяющая уравнению

$$\widehat{L}G(x, y) = \delta(x - y)$$

с граничным условием $G \equiv 0$ при $x < y$, то резольвента ядра $K(x, y) = -p(x) - q(x)(x - y)$ при $x > y$ выражается формулой

$$R(x, y) = \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2}.$$

(в) Методом сведения к дифференциальному уравнению найти резольвенту уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = \frac{2}{x^2}(x - y).$$

267. Показать, что для разностного степенного ядра

$$K(x, s) = a_0(x) + a_1(x)(x - s) + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x - s)^{n-1}$$

резольвента дается выражением

$$R(x, s) = \frac{\partial^n g}{\partial x^n},$$

где функция $g(x, s)$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^n g}{\partial x^n} - \left[a_0(x) \frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}} + a_1(x) \frac{\partial^{n-2} g}{\partial x^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x)g \right] = \delta(x - s)$$

с нулевыми граничными условиями на бесконечности.

268. Решить уравнение с неограниченным ядром (уравнение Абеля)

$$\int_0^x \frac{\phi(s)}{\sqrt{x-s}} ds = x.$$

269. Решение уравнения Фредгольма II рода^{*)}

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\phi(y) dy = f(x) \quad (8.52)$$

можно записать через резольвенту $R(x, y; \lambda)$

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 R(x, y; \lambda) f(y) dy.$$

^{*)} В случае произвольных конечных пределов интегрирования уравнение Фредгольма сводится к виду (8.52) линейной заменой независимой переменной.

(а) Показать, что резольвента подчиняется интегральному уравнению

$$R(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_0^1 K(x, t) R(t, y; \lambda) dt.$$

(б) Показать, что резольвенту можно записать в виде ряда Неймана

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, y), \quad (8.53)$$

где повторные ядра находятся из рекуррентных соотношений

$$K_1(x, y) \equiv K(x, y), \quad K_{n+1}(x, y) = \int_0^1 K(x, t) K_n(t, y) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

(в) Показать, что произвольное повторное ядро подчиняется формуле

$$K_n(x, y) = \int_0^1 K_m(x, t) K_{n-m}(t, y) dt, \quad n = 2, 3, \dots$$

(г) Показать, что для фредгольмова ядра, для которого

$$\|K\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx dy < \infty,$$

радиус сходимости ряда Неймана (8.53) дается неравенством $|\lambda| < \frac{1}{\|K\|}$.

270. С помощью прямого суммирования ряда Неймана (8.53) найти резольвенты следующих ядер уравнения Фредгольма:

(а) $K(x, y) = 1$;

(б) $K(x, y) = \exp(x - y)$;

(в) $K(x, y) = xy$.

271. Найти решение уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами:

(а) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - s^2) \phi(s) ds = \phi(x) + x^2$;

(б) $\int_{-1}^1 x^2 s^2 \phi(s) ds = \phi(x) + x^2$;

$$(в) \quad \phi(x) - \lambda \int_0^1 (1+x^2 y^2) \phi(y) dy = x^3;$$

$$(г) \quad \phi(x) - \lambda \int_0^1 \exp(x-y)(1+xy)\phi(y) dy = \exp(x).$$

272. Показать, что если известна функция Грина $G(x, y)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \widehat{L}u &= p_0(x)u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \dots + p_n(x)u = f_0(x), \\ V_k(u) &= \alpha_k^{(0)}u(0) + \alpha_k^{(1)}u'(0) + \dots + \alpha_k + \\ &+ \beta_k^{(0)}u(1) + \beta_k^{(1)}u'(1) + \dots + \beta_k^{(n-1)}u^{(n-1)}(1) = 0, \end{aligned}$$

где $\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}$ — константы, $k=1, 2, \dots, n$, то уравнение Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, y)u(y) dy + f(x)$$

сводится к задаче на собственные значения

$$\widehat{L}u = \lambda u + f_0(x), \quad V_k(u) = 0,$$

если $V_k(f) = 0$. Как связаны функции $f(x)$ и $f_0(x)$?

273. Путем сведения к дифференциальным уравнениям решить уравнения Фредгольма:

$$(а) \quad \phi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, x')\phi(x') dx' = x^2 - x, \quad K(x, x') = x_<(x_> - 1), \quad \lambda > 0;$$

$$(б) \quad \phi(x) + \int_{-1}^1 |x-s|\phi(s) ds = \frac{x^3}{3} - x.$$

274. Найти решение уравнения с ненормируемым ядром:

$$\phi(x) = e^{-x} + \lambda \int_0^{\infty} \cos(2xs)\phi(s) ds.$$

275. Решить спектральную задачу для уравнений с ненормируемым ядром:

$$\phi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x-y|)\phi(y) dy.$$

276. Решить задачу Коши с начальным условием $u(x,0)=2\exp(-x^2)x^2$ для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu u(x,t) + \nu \int_{-\infty}^{\infty} K(x,s)u(s,t) ds$$

с ядром Килсона—Сторера (8.40).

277. Найти решения $\phi(s)$ уравнений Урысона:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s)\phi(x-s) ds = e^{-x^2};$$

$$(б) \int_0^x \phi(s)\phi(x-s) ds = \sin x.$$

278. Найти все решения уравнений Гаммерштейна с вырожденным ядром:

$$(a) \phi(x) = \int_0^1 xs\phi^2(s) ds + \frac{3}{4}x;$$

$$(б) \phi(x) = \int_0^x \frac{\cos^2 s}{\cos x} \phi^2(s) ds + \frac{1}{\cos x}, \quad x \in (0, 1).$$

279. Показать, что в ядре $F(x+y)$, определенном формулой (8.35), коэффициент

$$M_n^2 = \frac{-iC_n}{a'(i\kappa_n)}$$

положителен.

280. Для потенциала $U(x) = \frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2 \kappa x}$ с помощью треугольного представления найти собственные функции непрерывного спектра.

281. Найти коэффициент прохождения $d(k) = \frac{1}{a(k)}$ для потенциала $U(x) = \frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2 \kappa x}$.

282. Для безотражательных потенциалов показать, что ядро треугольного представления $K(x,y)$ выражается в виде

$$K(x,y) = \sum \psi_n(x)e^{-\kappa_n y},$$

где $\psi_n(x)$ есть собственная функция n -го дискретного уровня.

8.7. Ответы

$$262. R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \psi_n(x) \psi_n^*(y).$$

263. (а) *Указание:* Подставим решение (8.48) в уравнение Вольтерра (8.47) и, меняя порядок интегрирования, получим уравнение на резольвенту (8.49).

$$264. (a) R(x, y) = \exp(x - y).$$

$$(б) R(x, y) = \sqrt{\lambda} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}(x - y).$$

$$(в) R(x, y) = \exp 2(x - y).$$

$$(г) R(x, y) = \lambda \exp [\lambda(x - y) + x^2 - y^2].$$

$$(д) R(x, y) = \lambda \exp [\lambda(x - y)] \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} y}.$$

$$265. (a) R(x, y) = x - y.$$

$$(б) R(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \sqrt{2}(x - y).$$

$$(в) R(x, y) = \exp \left(\frac{x - y}{2} \right) \left(\operatorname{ch} \tau + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sh} \tau \right), \quad \tau = \frac{\sqrt{5}(x - y)}{2}.$$

266. (а) Дифференциальное уравнение сводится к уравнению Вольтерра (8.47) с ядром $K(x, y) = -p(x) - q(x)(x - y)$ и правой частью

$$f(x) = f_0(x) - p(x)C_1 - q(x)(C_1x + C_0).$$

$$(в) R(x, y) = \frac{2}{3y} \left(1 - \frac{y^3}{x^3} \right).$$

268. *Указание:* Уравнение Абеля решается с помощью преобразования Абеля. Переобозначить $x \rightarrow t$, умножить на $\frac{1}{\sqrt{x-t}}$, проинтегрировать по dt в пределах от 0 до x , поменять порядок интегрирования и воспользоваться тем, что $\int_0^x dt (x-t)^{-1/2} (t-s)^{-1/2} = \pi$.

$$\phi(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\pi}.$$

$$270. (a) R(x, y; \lambda) = \frac{1}{(1 - \lambda)}.$$

$$(б) R(x, y; \lambda) = \frac{\exp(x - y)}{(1 - \lambda)}.$$

$$(в) R(x, y; \lambda) = \frac{xy}{(1 - \lambda/3)}.$$

271. (а) *Указание:* Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром сводится к системе алгебраических уравнений.

$$\phi(x) = -x^2 + \frac{\sqrt{\pi}/2}{\sqrt{\pi}/2 - 1} \exp(-x^2).$$

$$(б) \phi(x) = -\frac{5x^2}{3}.$$

$$(в) \phi(x) = x^3 + \frac{\lambda/6(1-\lambda/2)}{\Delta} x^2 + \frac{\lambda/4(1+\lambda/45)}{\Delta},$$

$$\Delta = \frac{1}{45} (4\lambda^2 - 54\lambda + 45) \neq 0.$$

$$(г) \phi(x) = \exp(x) \left[1 + \frac{\lambda}{\Delta} \left(1 - \frac{\lambda}{12} + \frac{x}{2} \right) \right], \quad \Delta = 1 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{\lambda^2}{12} \neq 0.$$

$$272. f(x) = \int_0^1 G(x, y) f_0(y) dy.$$

273. (а) Ядро $K(x, x')$ служит функцией Грина краевой задачи (а):

$$u'' = f_0(x), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

а функция $f(x)$ удовлетворяет тем же граничным условиям. Значит уравнение Фредгольма эквивалентно краевой задаче

$$\phi'' + \lambda\phi = f''(x) = 2, \quad \phi(0) = \phi(1) = 0.$$

Функция Грина такой краевой задачи построена в (а).

$$\phi(x) = \frac{2}{k^2} \left[1 - \cos kx - \frac{1 - \cos k}{\sin k} \sin kx \right], \quad k = \sqrt{\lambda} \neq \pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (б) *Указание:* Уравнение сводится к дифференциальному $\phi'' + 2\phi = 2x$ с граничными условиями $\phi'(-1) + \phi'(1) = 0$, $\phi(0) + \phi(1) = \phi'(-1) - \phi'(1)$. Решение имеет вид

$$\phi(x) = x - \frac{\sin \sqrt{2}x}{\sqrt{2} \cos \sqrt{2}}.$$

$$274. \phi(x) = \frac{\exp(-x) + \lambda/(1+4x^2)}{1 - \pi\lambda^2/4}, \quad \lambda \neq \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

275. У оператора нет собственных функций в классе $L^2(-\infty, \infty)$. Имеются решения на классе ненормируемых, но ограниченных функций:

$$\lambda = \frac{1+k^2}{2}, \quad \phi(x) = \exp(ikx).$$

Здесь $\operatorname{Im} k = 0$, иначе решение не будет ограниченным на всей оси. Всякое действительное $\lambda \geq \frac{1}{2}$ является собственным значением.

276. *Указание:* Разделить переменные x и t и воспользоваться методом Фурье: разложить решение по найденным в задаче 254 собственным функциям.

$$u(x, t) = \left[1 + (-1 + 2x^2) \exp(-\nu t(1 - \alpha^2)) \right] \exp(-x^2).$$

277. (а) *Указание:* Уравнение Фредгольма—Урысона типа свертки решается преобразованием Фурье.

$$\phi(x) = \pm \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp(-2x^2).$$

(б) *Указание:* Выполнить преобразование Лапласа и решить получившееся уравнение. Обратное преобразование дается контурным интегралом

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\exp(\lambda x)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} d\lambda, \quad (8.54)$$

где контур C охватывает точки ветвления $\pm i$. Деформируем его так, чтобы он проходил вдоль берегов разреза (рис. 8.1). После замены $\lambda = i \sin \varphi$ (8.54) превращается в интегральное представление Бесселя.

$$\phi(x) = \pm J_0(x).$$

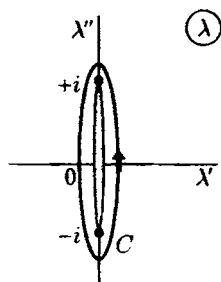


Рис. 8.1. Контур интегрирования для обратного преобразования Лапласа можно замкнуть и деформировать в контур C . Разрез, соединяющий точки ветвления подынтегральной функции, заштрихован

278. (а) *Указание:* Воспользовавшись тем же приемом, что и в задаче (а), можно свести задачу к квадратному уравнению. Ответ имеет вид

$$\phi_1(x) = x, \quad \phi_2(x) = 3x.$$

(б)
$$\phi(x) = \frac{1}{(1-x)} \cos x.$$

279. *Указание:* Воспользоваться формулой теории возмущений для сдвига энергии $\delta E = -\langle \psi | \delta U | \psi \rangle$ для оператора Шрёдингера.

280. $\psi(k, x) = e^{ikx} \frac{ix \tanh x + k}{ix + k}.$

281. $a(k) = \frac{(k - ix)}{(k + ix)}.$

Группы и представления

9.1. Группы

Группой называется множество элементов $G = \{a, b, c, \dots\}$ с бинарной операцией. Бинарной операцией называется отображение, сопоставляющее двум элементам $g_1, g_2 \in G$ элемент $g_3 \in G$, который называется «произведением» g_1 и g_2 , а обозначается как $g_3 = g_1 g_2$. Причем выполняются следующие условия:

- (а) $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность);
- (б) существует такой элемент 1 , что $1a = a1 = a$ для любого $a \in G$ (существование единицы);
- (в) для всякого элемента $a \in G$ существует такой элемент $a^{-1} \in G$, что $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ (существование обратного элемента).

Группа, состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной*. Мощность $|G|$ множества элементов группы G называется *порядком группы* G . Подмножество H элементов группы G , само являющееся группой, называется *подгруппой* группы G . Если для любых элементов $g_1, g_2 \in G$ имеет место равенство $g_1 g_2 = g_2 g_1$, то такая группа называется *абелевой* или *коммутативной*. *Порядком (периодом) элемента* x называется такое наименьшее натуральное число n , что $x^n = 1$, если такое n найдется.

Отображение $G \rightarrow H$ элементов группы G на элементы группы H называется *гомоморфизмом* группы G на группу H , если оно сохраняет операцию, т. е. из $g_1 \rightarrow h_1$ и $g_2 \rightarrow h_2$ следует, что $g_1 g_2 \rightarrow h_1 h_2$. Гомоморфизм группы G на группу H , являющийся взаимно однозначным отображением, называется *изоморфизмом* группы G и группы H . Пусть дана группа G и подгруппа H . Множество элементов вида hx , где h — любой элемент из H , а x — фиксированный элемент из G , называется *правым смежным классом* по H и обозначается Hx . Аналогично, множество элементов вида xh , где опять h — любой элемент из H , называется *левым смежным классом* xH по подгруппе H . Кардинальное число (мощность множества) r различных смежных классов называется *индексом подгруппы* H в группе G и обозначается $r = |G:H|$. Пусть $H, Hx_2, \dots, Hx_r$ — множество смежных классов, которые не пересекаются и исчерпывают всю группу, что обозначается как $G = H + Hx_2 + \dots + Hx_r$.

Будем говорить, что элемент x группы G сопряжен с элементом y , если найдется такой $z \in G$, что $y = z^{-1}xz$. Множество элементов, сопряженных с x , называется *классом сопряженных элементов* σ , содержащим x . Подгруппа H группы G называется *инвариантной подгруппой* или *нормальным делителем*, если $x^{-1}Hx = H$ для всех $x \in G$. Это обозначается $H \triangleleft G$.

Пусть $T \triangleleft G$ и $G = T + Tx_2 + \dots + Tx_r$. В качестве элементов новой группы $\bar{G}$ возьмем смежные классы Tx_i . Определим произведение в $\bar{G}$ формулой $(Tx_i)(Tx_j) = Tx_k$, если $x_i x_j \in Tx_k$ в G . Проверим, что произведение определено однозначно. Пусть $t_1 x_i \in Tx_i$ и $t_2 x_j \in Tx_j$. Тогда $t_1 x_i t_2 x_j = t_1 x_i t_2 x_i^{-1} \cdot x_i x_j = t_3 x_i x_j$, так как $T \triangleleft G$. Но если $x_i x_j \in Tx_k$, то $t_3 x_i x_j \in Tx_k$. Таким образом, все произведения элементов из Tx_i на элементы из Tx_j попадают в тот же смежный класс Tx_k . Группа $\bar{G}$ называется *фактор-группой* G по T и обозначается $\bar{G} = \frac{G}{T}$.

9.2. Представления

Будем называть *представлением* группы G любой гомоморфизм α группы G в некоторую группу W . *Матричным* представлением степени (размерности) n группы G над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется гомоморфизм $T: g \rightarrow T(g)$ группы G в подгруппу группы $GL(n, \mathbb{C})$, где $GL(n, \mathbb{C})$ — группа невырожденных матриц размерности n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Представление называется *точным*, если отображение α — изоморфизм. Матричное представление является точным, если из $T(g) = E$, где E — единичная матрица, следует, что g — единичный элемент.

Примерами матричного представления конечной группы могут служить единичное и регулярное представления. *Единичное* (тривиальное) представление получается, если все элементы группы отображаются в единицу, которая рассматривается как матрица размера 1×1 . Пусть $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ — конечная группа порядка n , а V — n -мерное векторное пространство с базисом $v_1, \dots, v_n$. Для того, чтобы определить еще одно матричное представление $T(g)$, поступим следующим образом: для каждого i , $1 \leq i \leq n$ существует такое однозначно определенное число j , $1 \leq j \leq n$, что $gg_i = g_j$. Тогда положим $T(g)v_i = v_j$. Таким образом, $T(g)$ — матрица преобразования пространства V в базисе $v_1, \dots, v_n$, переводящая i -й базисный вектор v_i в j -й базисный вектор v_j . Элемент в (j, i) -й клетке этой матрицы равен 1, а остальные элементы i -го столбца и j -й строки матрицы $T(g)$ равны нулю. Отображение $g \rightarrow T(g)$ и называется *регулярным* представлением группы G .

Будем говорить, что два представления T и T' *эквивалентны*, если существует такая матрица $S \in GL(n, \mathbb{C})$, что $T'(g) = S^{-1}T(g)S$ для любого $g \in G$. Матричное представление $U: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ называется *приводимым*, если оно эквивалентно представлению T вида

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & V(g) \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

где $T_j(g)$ матрица $r_j \times r_j$ ($j=1,2$), $r_1 + r_2 = n$. В противном случае представление называется *неприводимым*. Если $V(g)$ — нулевая матрица, то представление называется *вполне приводимым*. *Характером* $\chi(g)$ представления Q группы G называется след G : $\chi(g) = \text{Tr} Q(g)$. Характер неприводимого представления называется соответственно *неприводимым характером*.

Число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов в G . Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ — множество классов сопряженных элементов, $D^{(1)}(g), \dots, D^{(s)}(g)$ — матрицы всех неприводимых неэквивалентных представлений, $\chi^1(g), \dots, \chi^s(g)$ — все неприводимые неэквивалентные характеры группы G . Тогда справедливо соотношение ортогональности неприводимых представлений

$$\sum_{g \in G} D_{ij}^{(\alpha)*}(g) D_{kl}^{(\beta)}(g) = \frac{|G|}{n_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (9.2)$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, s, \quad i, j = 1, \dots, n_\alpha, \quad k, l = 1, \dots, n_\beta,$$

где n_α — размерность представления $D^{(\alpha)}(g)$, s — количество различных неприводимых представлений группы G .

Рассмотрим какое-нибудь представление, тогда характеры элементов $\chi(g')$, входящих в один класс сопряженных элементов $g' \in \sigma'$, равны между собой, что можно записать в виде $\chi(g') = \chi(\sigma')$. Напишем таблицу характеров группы G

	σ_1	...	σ_s
$\chi^1(g)$	χ_1^1	...	χ_s^1
...	...	...	...
$\chi^s(g)$	χ_1^s	...	χ_s^s

Для строк этой таблицы справедливо соотношение ортогональности характеров, являющееся следствием (9.2):

$$\sum_{i=1}^s h_i \chi^{a*}(\sigma_i) \chi^b(\sigma_i) = |G| \delta_{ab}, \quad (9.3)$$

где h_i — число элементов в классе σ_i . При этом столбцы таблицы (которую можно рассматривать как квадратную матрицу) также ортогональны между собой, т. е.

$$\sum_{\alpha=1}^s \chi^{a*}(\sigma_i) \chi^a(\sigma_j) = \frac{|G|}{h_i} \delta_{ij}. \quad (9.4)$$

Поскольку характер единичного элемента группы равен размерности представления $\chi^{(\alpha)}(1) = n_\alpha$, то для n_α справедлива формула

$$\sum_{\alpha=1}^s n_{\alpha}^2 = |G|, \quad (9.5)$$

связывающая размерности представлений и порядок группы.

Произвольное представление $T(g)$ конечной группы G можно разложить в прямую сумму неприводимых представлений $T(g) = c_1 T^{(1)}(g) \oplus c_2 T^{(2)}(g) \oplus \dots \oplus c_s T^{(s)}(g)$. Числа c_{α} показывают, сколько раз неприводимое представление $T^{(\alpha)}$ встречается в $T(g)$. Другими словами, существует базис, в котором матрица приводится к блочно-диагональному виду, причем блок $T^{(1)}(g)$ встречается c_1 раз, блок $T^{(2)}(g)$ — c_2 раз и т. д. Коэффициенты разложения c_{α} находятся с помощью соотношения ортогональности характеров (9.3):

$$c_{\alpha} = \frac{1}{|G|} \sum_i h_i \chi^*(\sigma_i) \chi^{\alpha}(\sigma_i) = \langle \chi^*(g) \chi^{\alpha}(g) \rangle.$$

Здесь $\chi(g)$ — характер представления $T(g)$, а $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по группе.

Основы теории групп и представлений изложены с доказательствами в [Хол62, Сми74а].

9.3. Примеры

283. Построить изоморфизм группы симметрий треугольника D_3 и группы подстановок трех элементов:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. Занумеруем вершины треугольника против часовой стрелки цифрами 1, 2, 3 (рис. 9.1). Пусть p поворот на 120° против часовой стрелки, c — поворот, переставляющий вершины 1 и 3 и оставляющей вершину 2 на месте. Тогда

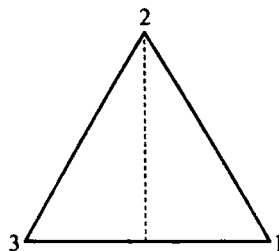


Рис. 9.1. Нумерация вершин треугольника

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & p^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & c &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ pc &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & p^2c &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & 1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что построенное отображение является изоморфизмом. ►

284. Доказать, что два левых (правых) смежных класса группы G по H или не пересекаются, или совпадают.

Решение. Если Hx и Hu не имеют общих элементов, то нечего доказывать. Поэтому пусть $z \in Hx$ и $z \in Hu$. Тогда $z = h_1x = h_2u$. Отсюда $x = h_1^{-1}h_2u$ и $hx = hh_1^{-1}h_2u = h'u$. Поэтому $Hx \subseteq Hu$. Аналогично $Hu \subseteq Hx$. Значит, $Hx = Hu$. ►

285. Пусть G — конечная группа, H — подгруппа группы G . Доказать, что $|G| = |H| \cdot |G:H|$.

Решение. $G = H + Hx_2 + \dots + Hx_r$, смежные классы Hx_i и Hx_j содержат одинаковое число элементов, равное $|H|$, а число r различных смежных классов и есть $|G:H|$. ►

286.

(а) Пусть $C_G(x)$ — множество элементов группы G , перестановочных с $x \in G$. Доказать, что тогда $C_G(x)$ — подгруппа группы G .

(б) Пусть C_i некоторый класс сопряженных элементов, $x \in C_i$. Тогда мощность $|C_i|$ множества элементов в классе C_i равна индексу $|G:C_G(x)|$ подгруппы $C_G(x)$.

Решение. Пусть $C = C_G(x)$ и элементы, сопряженные с x с помощью $g_1, g_2 \in G$, равны, т. е. $g_1^{-1}xg_1 = g_2^{-1}xg_2$. Обозначим $c = g_1g_2^{-1}$, тогда

$$c^{-1}xc = g_2g_1^{-1}xg_1g_2^{-1} = x \Rightarrow xc = cx.$$

Значит $c \in C \Rightarrow Cg_1 = Cg_2$, т. е. g_1, g_2 лежат в одном правом смежном классе G по C .

Пусть g_1, g_2 лежат в одном правом смежном классе группы G по подгруппе C , т. е.

$$Cg_1 = Cg_2 \Rightarrow c = g_1g_2^{-1} \in C.$$

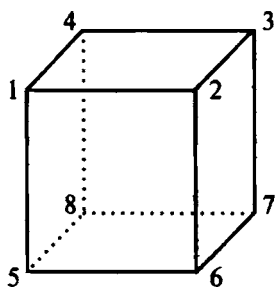
Тогда

$$x = c^{-1}xc = (g_1g_2^{-1})^{-1}xg_1g_2^{-1} \Rightarrow g_1^{-1}xg_1 = g_2^{-1}xg_2,$$

т. е. элементы, сопряженные x с помощью g_1, g_2 , равны. Таким образом, число различных элементов, сопряженных с элементом x , равно числу правых смежных классов группы G по подгруппе C . ►

287. Найти порядок группы симметрий куба.

Решение. Пронумеруем вершины куба. Симметриями, порождающими группу, являются два вращения вокруг осей третьего и четвертого порядка (рис. 9.2) и отражение.



$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

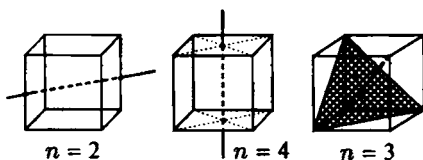


Рис. 9.2. Элементы симметрии куба: оси второго, третьего и четвертого порядков

Элементы a и b порождают группу G_1 , отображающие каждую вершину в любую другую. Это видно из диаграммы

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{a} 6 \xrightarrow{a} 7 \xrightarrow{a} 8.$$

Здесь $i \xrightarrow{x} j$ означает, что элемент x переводит i в j . Элементы, оставляющие 1 на месте, образуют подгруппу H_1 группы G_1 , и мы можем разложить G_1 по H_1 :

$$G = H_1 + H_1x_2 + H_1x_3 + H_1x_4 + H_1x_5 + H_1x_6 + H_1x_7 + H_1x_8.$$

Поскольку все элементы класса H_1x_i переводят 1 в вершину i , а вершин всего 8, то здесь выписаны все смежные классы по H_1 и $|G_1 : H_1| = 8$. Очевидно, что $H_1 = \{e, b, b^2\}$, где e — тождественное отображение. Поэтому $|G_1| = |H_1| \cdot |G : H_1| = 3 \cdot 8 = 24$. Отображение c не содержится в G_1 , но так как $c^2 = 1$, $ca = ac$, $cb = a^2ba^2c$, мы видим, что $G = G_1 + G_1c$, поэтому $|G| = 48$. ►

288. Показать, что подгруппа индекса 2 — инвариантная подгруппа.

Решение. Если $G = H + Hx$, то $G = H + xH$. Следовательно, $Hx = xH$. ►

289. Показать, что:

(а) характер является функцией класса сопряженных элементов, т. е. характеры сопряженных элементов равны;

(б) эквивалентные представления имеют равные характеры.

Решение. Если A — матрица $n \times n$, то ее характеристический многочлен равен

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n [\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n],$$

где $a_1 = \text{Tr} A$. Пусть T — невырожденная матрица, тогда $|T^{-1}AT - \lambda E| = |T^{-1}(A - \lambda E)T| = |T^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |T| = |A - \lambda E|$. Таким образом, матрицы A и $T^{-1}AT$ имеют один и тот же характеристический многочлен и тем более один и тот же след. Поэтому матрицы $T(g_1^{-1}gg_1) = T^{-1}(g_1)T(g)T(g_1)$ и $T(g)$ имеют равные следы, т. е.

$$\chi(g_1^{-1}gg_1) = \chi(g).$$

290. Показать, что всякое представление конечной группы эквивалентно унитарному (представление унитарно, если его матрицы унитарны).

Решение. Пусть $T(g)$, $g \in G$ — комплексное представление степени n конечной группы G и пусть $g_1 = 1, g_2, \dots, g_l$ — элементы группы G . Тогда

$$M = E + T^\dagger(g_2)T(g_2) + \dots + T^\dagger(g_l)T(g_l)$$

— положительно определенная эрмитова матрица, так как каждое слагаемое в отдельности есть положительно определенная эрмитова матрица.

Заметим, что для любого $g \in G$

$$\begin{aligned} T^\dagger(g)MT(g) &= \sum_{i=1}^l T^\dagger(g)T^\dagger(g_i)T(g_i)T(g) = \\ &= \sum_{i=1}^l T^\dagger(g_i g)T(g_i g) = \sum_{i=1}^l T^\dagger(g_i)T(g_i) = M. \end{aligned} \quad (9.6)$$

В курсе линейной алгебры доказывается, что для любой положительно определенной эрмитовой матрицы M существует такая невырожденная матрица C , что $C^\dagger MC = E$. Отсюда получаем $M = (C^{-1})^\dagger C^{-1}$. Подставляя это выражение для M в тождество (9.6), получаем

$$T^\dagger(g)(C^{-1})^\dagger C^{-1}T(g) = (C^{-1})^\dagger C^{-1},$$

откуда

$$(C^{-1}T(g)C)^\dagger (C^{-1}T(g)C) = E,$$

поэтому представление $T'(g) = C^{-1}T(g)C$ унитарно. ►

291. Написать таблицу характеров группы D_3 .

Решение. Группа D_3 имеет три класса сопряженных элементов:

$$\sigma_1 = \{1\}, \quad \sigma_2 = \{p, p^2\}, \quad \sigma_3 = \{c, pc, p^2c\}.$$

Поэтому существует три неприводимых представления группы S_3 размерности n_1 , n_2 и n_3 . Пользуясь формулой (9.5), получаем

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = |D_3| = 6.$$

Это равенство выполняется только, если $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$. Группа S_3 имеет два одномерных представления, которые можно отождествить с их характеристиками:

- тривиальное представление $\chi^1(g) = 1$ — гомоморфизм группы S_3 на группу, состоящую из одного элемента;
- представление $\chi^2(g) = \pm 1$ — гомоморфизм группы S_3 на группу $\{1, -1\}$, ядром которого является подгруппа, порожденная поворотом на $\frac{2\pi}{3}$. Т.е., если p — поворот на $\frac{2\pi}{3}$, то $1, p, p^2 \rightarrow 1$, а $c, pc, p^2c \rightarrow -1$.

Из ортогональности столбцов таблицы характеров (9.3) получим

	σ_1	σ_2	σ_3
χ^1	1	1	1
χ^2	1	1	-1
χ^3	2	-1	0

9.4. Задачи

292. Показать, что в любой группе $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ и вообще

$$(a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}.$$

293. Показать, что a и a^{-1} — элементы равных порядков.

294. Показать, что если элементы x и y сопряжены, то они имеют равные порядки.

295. Показать, что элементы ab и ba имеют равные порядки.

296. Показать, что преобразования симметрии равностороннего треугольника образуют группу. Построить таблицу умножения. Найти подгруппы.

297. Пусть G — группа, H — подгруппа G . Доказать, что множество правых смежных классов равномощно множеству левых смежных классов.

298. Показать, что

- элемент x группы G сопряжен сам с собой;
- если x сопряжен с y , то y сопряжен с x ;
- если x сопряжен с y , а y сопряжен с z , то x сопряжен с z ;

(г) группа G есть объединение непересекающихся классов сопряженных элементов:

$$G = C_1 + \dots + C_s.$$

299. Показать, что единственной конечной группой с двумя классами сопряженных элементов является группа порядка 2.

300. Показать, что в группе преобразований пространства повороты на угол φ вокруг двух осей сопряжены, если в группе существует преобразование, переводящее одну ось в другую.

301. Показать, что повороты вокруг одной и той же оси OO' на углы φ и $-\varphi$ сопряжены, если:

- (а) имеется ось второго порядка, перпендикулярная OO' ;
- (б) имеется зеркальная плоскость, проходящая через ось OO' .

302. Найти классы сопряженных элементов для следующих групп симметрии:

- (а) равностороннего треугольника;
- (б) квадрата;
- (в) правильного тетраэдра.

303. Подгруппа H в G инвариантна тогда и только тогда, когда каждый левый смежный класс Hx есть также и правый смежный класс xH .

304. Пусть H — гомоморфный образ группы G . Рассмотрим множество T элементов $t \in G$, отображающихся на единицу группы H . Показать, что T — инвариантная подгруппа в G .

305. Показать, что группа симметрий куба гомоморфна группе подстановок трех символов.

306. Доказать, что если порядок конечной группы не простое число, то группа имеет нетривиальные*) подгруппы.

307. Множество элементов $Z(G)$, перестановочных со всеми элементами группы G , называется *центром* группы G . Доказать, что если $\frac{G}{Z(G)}$ — циклическая группа, то G — абелева группа.

308. Доказать, что все неприводимые представления абелевой группы одномерны.

309. Пусть G — группа симметрии квадрата.

(а) Показать, что эта группа порождается двумя элементами симметрии a и b , которые удовлетворяют соотношениям $a^4 = 1$, $b^2 = 1$, $(ab)^2 = 1$.

*) Тривиальными подгруппами называют единицу группы и саму группу.

(б) Пусть матрицы $T(a)$ и $T(b)$ такие, что

$$[T(a)]^4 = E, \quad [T(b)]^2 = E, \quad [T(a)T(b)]^2 = E. \quad (9.7)$$

Тогда, очевидно, отображение $a^i b^j \rightarrow [T(a)]^i [T(b)]^j$ задает представление группы G . Привести примеры матриц, которые удовлетворяют условиям (9.7).

310. Пусть $T(G)$ — представление конечной группы матрицами над $\mathbb{C}$. Показать, что тогда:

(а) характер $\chi(g)$ равен сумме корней из единицы;

(б) $\chi(g^{-1}) = \chi(g)^*$.

311. Показать, что представление фактор-группы $\frac{G}{H}$ ($H \triangleleft G$) является и представлением G .

312. Разложить трехмерное представление группы S_3 , матрицы которого получаются из единичной перестановками строк, на неприводимые представления.

313. Задать регулярное представление группы S_3 .

314. Разложить регулярное представление группы S_3 на неприводимые.

9.5. Ответы

295. Указание: Они сопряжены.

296. Воспользуемся обозначениями задачи 283. Тогда таблица умножения группы треугольника имеет следующий вид:

	1	p	p^2	c	pc	p^2c
1	1	p	p^2	c	pc	p^2c
p	p	p^2	1	pc	p^2c	c
p^2	p^2	1	p	p^2c	c	pc
c	c	p^2c	pc	1	p^2	p
pc	pc	c	p^2c	p	1	p^2
p^2c	p^2c	pc	c	p^2	p	1

В группе треугольника имеется четыре подгруппы, отличных от единичной и всей группы: $H_1 = \{1, p, p^2\}$, $H_2 = \{1, c\}$, $H_3 = \{1, pc\}$, $H_4 = \{1, p^2c\}$.

297. Указание: Классу gH ставим в соответствие $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.

299. *Указание:* Пусть $\sigma_1 = 1$ и σ_2 — классы сопряженных элементов группы G . Тогда $G = \sigma_1 + \sigma_2$. Если $|G| = n$ и $|\sigma_2| = m$, то $n = 1 + m$, причем m делит нацело n (задача (6)).
305. *Указание:* Пусть x, y, z — три прямые, соединяющие центры противоположных граней куба. Тогда симметрии куба индуцируют группу подстановок множества (x, y, z) .
306. *Указание:* Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. Рассмотрите подгруппу, состоящую из всех степеней элемента g : $1, g, g^2, \dots$.
308. *Указание:* Рассмотрим векторное пространство V , на котором абелева группа G реализована как группа линейных преобразований. Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$, тогда подпространство собственных векторов элемента g , отвечающих некоторому собственному значению λ , является G -инвариантным подпространством, а значит совпадает с V . Преобразованию g соответствует матрица, пропорциональная единичной.
309. (б) Приведем пример точного неприводимого матричного представления группы квадрата:

$$T(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(ab) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$312. \quad T(g) = T^{(1)}(g) \oplus T^{(3)}(g).$$

$$313. \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$314. \quad T(g) = T^{(1)}(g) \oplus T^{(2)}(g) \oplus 2T^{(3)}(g).$$

Непрерывные группы

10.1. Группы и алгебры Ли

Рассмотрим группу линейных преобразований, элементы матриц которых являются аналитическими функциями вещественных параметров. Пусть $g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ — элемент нашей группы G . Параметры $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ выбираются таким образом, что существует взаимно-однозначное соответствие между окрестностью начала координат в r -мерном пространстве параметров и окрестностью единичного элемента группы. Причем нулевому набору параметров соответствует единица группы. Если

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)g(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r) = g(\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_r),$$

то

$$\alpha''_k = \phi_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r), \quad k = 1, \dots, r.$$

Если функции ϕ_k бесконечно дифференцируемы по всем аргументам, то такие группы принадлежат к классу *групп Ли*. Число параметров r называется *размерностью* группы G .

Алгеброй Ли называется линейное пространство L , снабженное операцией, называемой скобкой Ли (коммутированием) и обозначаемой $[x, y]$, для которой выполняются следующие условия ($x, y, z \in L, a \in \mathbb{C}$):

- 1) $[ax + y, z] = a[x, z] + [y, z]$ (линейность);
- 2) $[x, y] = -[y, x]$ (антисимметричность);
- 3) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ (тождество Якоби).

Примерами скобок Ли могут служить операции коммутирования квадратных матриц, скобки Пуассона и векторное произведение векторов из $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим матричную реализацию группы G линейных преобразований, имеющую матричные элементы $g_{ik} = g_{ik}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Введем в рассмотрение производные от этих матриц по параметрам α_i в точке нуль, т. е. рассмотрим матрицы I_i с элементами

$$(I_i)_{ik} = \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha_i} \right)_{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0}.$$

Матрицы I_i называются *инфинитезимальными операторами (генераторами)* группы G . Коммутатор $[I_k, I_s] = I_k I_s - I_s I_k$ является линейной комбинацией матриц I_l

$$[I_k, I_s] = \sum_l c_{ksl} I_l.$$

Линейная оболочка генераторов группы образует алгебру Ли L , поскольку введенный коммутатор удовлетворяет свойствам 1–3 скобки Ли. Эта алгебра называется *алгеброй Ли* группы Ли. Коэффициенты c_{ksl} называются *структурными константами* алгебры Ли L группы Ли G .

Группу Ли можно восстановить по ее алгебре Ли однозначно, если группа Ли связна и односвязна (многообразие называется односвязным, если каждая замкнутая кривая может быть непрерывно стянута в точку). Так, для восстановления однопараметрической группы справедливо *экспоненциальное отображение*:

$$\exp(\theta I) = 1 + \theta I + \frac{1}{2!} \theta^2 I^2 + \dots$$

10.2. Представления группы вращений

Представлением группы Ли G называется гомоморфизм G в группу преобразований $T(g)$ линейного пространства V . Представление группы Ли в векторном пространстве V называется *приводимым*, если V содержит инвариантное относительно G подпространство, отличное от V и нулевого подпространства.

Линейное пространство представления может быть и бесконечномерным, например, гильбертовым, или таким пространством, пополнение которого — гильбертово пространство. Обозначим $\mathcal{F}$ пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, заданных на сфере. Каждому элементу $g \in SO(3)$ поставим в соответствие линейное преобразование

$$T(g): f(x) \rightarrow f'(x) = f(g^{-1}x), \quad (10.1)$$

отображающее пространство $\mathcal{F}$ на себя. Формула (10.1) определяет *действие элемента группы на функцию*. Если за преобразованием $T(g_1)$ следует новое преобразование $T(g_2)$, а именно

$$T(g_2): f'(x) \rightarrow f''(x) = f'(g_2^{-1}x),$$

то результатом будет композиция

$$T(g_2)T(g_1): f(x) \rightarrow f''(x) = f'(g_2^{-1}x) = f(g_1^{-1}(g_2^{-1}x)) = f((g_2 g_1)^{-1}x).$$

Таким образом, $T(g_2)T(g_1) = T(g_2 g_1)$. Поэтому соответствие $g \rightarrow T(g)$ является представлением группы $SO(3)$ на бесконечномерном пространстве функций.

Для определения неприводимых представлений группы вращений $SO(3)$ достаточно рассмотреть ее алгебру $so(3)$, генераторы которой (см. задачу (а)) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma,$$

где J_α — с точностью до множителя i инфинитезимальные операторы поворота вокруг оси α . В квантовой механике оператор J называют оператором момента. Поскольку по алгебре Ли может быть восстановлена группа, то для выделения неприводимых представлений достаточно рассмотреть соответствующие представления алгебры. Эта задача сводится к нахождению спектра оператора момента J^2 и его собственных векторов. Каждое неприводимое представление задается собственным значением $j(j+1)$ оператора J^2 . Размерность неприводимого представления равна $2j+1$ — числу (при заданном j) возможных проекций момента на ось квантования (z).

Пусть V и U — конечномерные векторные пространства над полем $\mathbb{C}$ размерности m и n соответственно. Пусть $\{v_i\}$ и $\{u_i\}$ — базисы пространств V и U соответственно. Для любых $v \in V$, $u \in U$ рассмотрим множество конечных сумм формальных произведений вида $v \otimes u$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} v \otimes (u' + u'') &= v \otimes u' + v \otimes u'', \\ (v' + v'') \otimes u &= v' \otimes u + v'' \otimes u, \\ \lambda(v \otimes u) &= (\lambda v) \otimes u = v \otimes (\lambda u), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Построенное таким образом множество является векторным пространством, натянутым на $m \times n$ базисных векторов $v_i \otimes u_j = w_{ij}$, где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Оно называется *тензорным произведением* пространств V и U и обозначается $W = V \otimes U$. Если V и U — пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то скалярное произведение в $V \otimes U$ может быть определено формулой

$$(v_1 \otimes u_1, v_2 \otimes u_2) = (v_1, v_2)(u_1, u_2).$$

Введем понятие *тензорного (прямого) произведения* матриц. Пусть имеется две квадратные матрицы $T = \|t_{ij}\|$ и $R = \|r_{ij}\|$ порядка n и m соответственно. Прямым произведением матрицы T на матрицу R является квадратная матрица порядка $n \times m$, имеющая следующий вид:

$$T \otimes R = \begin{pmatrix} t_{11}R & t_{12}R & \dots & t_{1n}R \\ t_{21}R & t_{22}R & \dots & t_{2n}R \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1}R & t_{n2}R & \dots & t_{nn}R \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\text{Tr}(T \otimes R) = \text{Tr} T \cdot \text{Tr} R$.

Пусть заданы представления $T(g)$ и $T'(g)$ группы G , $g \in G$, т. е. каждому элементу g группы G соответствует линейный оператор $T(g)$

пространства V и линейный оператор $T''(g)$ пространства U , причем $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$ и $T''(g_1 g_2) = T''(g_1)T''(g_2)$ для любых элементов g_1 и g_2 из G . Определим *тензорное (прямое) произведение* представлений группы. Выберем базисы пространства V и пространства U : $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$. Пусть в этих базисах оператору $T(g)$ соответствует матрица $D(g)$, а оператору $T''(g)$ соответствует матрица $D'(g)$, т. е.:

$$T(g)v_i = \sum_{j=1}^n D_{ji}(g)v_j, \quad T''(g)u_k = \sum_{l=1}^m D'_{lk}(g)u_l.$$

Определим линейные операторы $T''(g)$, действующие в пространстве $V \otimes U$ формулой:

$$\begin{aligned} T''(g)(v_i \otimes u_k) &= T(g)v_i \otimes T'(g)u_k = \\ &= \sum_j D_{ji}(g)v_j \otimes \sum_l D'_{lk}(g)u_l = \sum_{j,l} D_{ji}(g)D'_{lk}(g)(v_j \otimes u_l). \end{aligned}$$

Легко проверить, что матрица, соответствующая оператору $T''(g)$, есть прямое произведение матриц $D(g) \otimes D'(g)$. Это и есть прямое (тензорное) произведение представлений группы. Прямое произведение представлений может быть разложено на неприводимые представления (задача Клебша—Гордана). Для группы $SO(3)$ эта задача соответствует квантово-механической задаче сложения моментов.

Пусть $D^{(j_1)}$ и $D^{(j_2)}$ — два неприводимых представления группы вращения со значениями момента j_1 и j_2 соответственно. Тогда прямое произведение представлений $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ разлагается на неприводимые представления в виде (см. задачу 334):

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} \oplus D^{(j_1+j_2-1)} \oplus \dots \oplus D^{(|j_1-j_2|)}. \quad (10.2)$$

Это и есть разложение Клебша—Гордана для группы $SO(3)$.

Из разложения (10.2) следует, что базисы представлений $D^{(J)}: |JM\rangle$ ($-J \leq M \leq J$), могут быть разложены по базису прямого произведения представлений $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$:

$$|JM, j_1 j_2\rangle = \sum_{m_1+m_2=M} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle.$$

Коэффициенты разложения $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM}$ называются коэффициентами Клебша—Гордана.

Пусть имеется матричное представление размерности n группы G , т. е. каждому элементу g группы соответствует матрица $D_{ik}(g)$. Набор чисел $T = T_{i_1 i_2 \dots i_r}, T_{i_1 i_2 \dots i_r} \in \mathbb{C}$, $i_k = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, r$, называется *тензором ранга r относительно группы G* , если T преобразуется по закону:

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = D_{i_1 k_1}(g) D_{i_2 k_2}(g) \dots D_{i_r k_r}(g) T_{k_1 k_2 \dots k_r}. \quad (10.3)$$

(Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.) Числа $T_{i_1 i_2 \dots i_r}$ называются *компонентами (координатами)* тензора. Множество всех тензоров данного ранга r образуют векторное пространство размерности n^r . Тензор T называется *инвариантным* относительно действия группы G , если его компоненты не меняются под действием преобразований из группы G . Заметим, что инвариантный тензор имеет столько независимых компонент, сколько раз входит единичное представление в разложение тензорного произведения представлений группы.

Важным свойством тензоров является тот факт, что операция перестановки индексов коммутирует с действием группы G . Пусть S_r — группа подстановок r символов. Эта группа состоит из элементов вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ i_1 & i_2 & \dots & i_r \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Каждая перестановка определяет линейное преобразование пространства тензоров ранга r в соответствии с формулой $\sigma T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = T_{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r}} = T_{\alpha_{\sigma(1)} \dots \alpha_{\sigma(r)}}$. Эти линейные преобразования, соответствующие группе S_r , коммутируют с действием группы G . Тензор $T = T_{i_1 i_2 \dots i_r}$ называется симметричным, если $sT = T$ для любой подстановки $s \in S_r$, и кососимметричным, если для нечетных подстановок s выполняется $sT = -T$, а для четных $sT = T$. Таким образом, симметричные тензоры являются собственными векторами любой подстановки из S_r , отвечающими собственному значению 1. Поэтому симметричные тензоры образуют инвариантное относительно G подпространство. Аналогично, множество всех кососимметричных тензоров является G -инвариантным подпространством.

Если G — группа вращений $SO(3)$, $T_{i_1 i_2 \dots i_r}$ — тензоры n -го ранга, заданные в трехмерном евклидовом пространстве (точнее говоря, они — элементы пространства $R^3 \otimes \dots \otimes R^3$), то $D(g)$ в законе преобразования (10.3) есть стандартное представление группы вращений, отвечающее неприводимому представлению с моментом $j=1$. В этом случае $D_{i_1 k_1}^{(1)} D_{i_2 k_2}^{(1)} \dots D_{i_r k_r}^{(1)}$ в (10.3) есть тензорное произведение неприводимых представлений с $j=1$. Это произведение может быть разложено по неприводимым представлениям. Каждое из неприводимых представлений для данного тензора n -го ранга будет выделять его инвариантную часть. Например, тензор второго ранга a_{ik} может быть представлен в виде

$$a_{ik} = \frac{1}{2} \left(a_{ik} + a_{ki} - \frac{2}{3} a_{ll} \delta_{ik} \right) + \frac{1}{2} (a_{ik} - a_{ki}) + \frac{1}{3} a_{ll} \delta_{ik}. \quad (10.5)$$

Каждый член в этой сумме есть инвариантный тензор относительно группы вращений $SO(3)$. Первое слагаемое в (10.5) имеет нулевой след и соответственно 5 независимых компонент. Этот тензор соответствует моменту $J=2$. Второе слагаемое отвечает вектору (момент $J=1$), а последнее — скаляру ($J=0$).

По теории групп Ли можно отослать читателя к книгам [Кир78, Рих84, ДНФ79]. Некоторые вопросы теории групп, имеющие приложение к атомной и молекулярной физике, рассмотрены в [ЛЛ174].

10.3. Примеры

315. Рассмотрим однопараметрическую группу $G = g(\theta)$. Параметр θ выберем таким образом, что

$$g(\theta_1)g(\theta_2) = g(\theta_1 + \theta_2), \quad (10.6)$$

$$g(0) = E. \quad (10.7)$$

Пусть $I_\theta = \left(\frac{dg}{d\theta}\right)_{\theta=0}$ — инфинитезимальная матрица, соответствующая параметру θ . Показать, что тогда

$$g(\theta) = \exp(I_\theta \theta). \quad (10.8)$$

Решение. Продифференцируем обе части равенства (10.6) по θ_1 и положим затем $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta$. Получим $\frac{dg}{d\theta} = I_\theta g(\theta)$. Эти уравнения имеют единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (10.7). ►

316. Пусть $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — матрица, соответствующая повороту вокруг оси вращения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на угол $\theta = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}$. Показать, что тогда

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(I_1 \alpha_1 + I_2 \alpha_2 + I_3 \alpha_3),$$

где I_1, I_2, I_3 — инфинитезимальные матрицы группы $SO(3)$.

Решение. Рассмотрим однопараметрическую группу поворотов вокруг оси, направленной по вектору α . Воспользуемся формулой (10.8)

$$g(\theta) = \exp(I_\theta \theta) = \exp \theta \sum_{j=1}^3 I_j \frac{d\alpha_j}{d\theta} \bigg|_{\theta=0}.$$

Здесь

$$\alpha_1 = \theta \cos(\widehat{Ox, \alpha}), \quad \alpha_2 = \theta \cos(\widehat{Oy, \alpha}), \quad \alpha_3 = \theta \cos(\widehat{Oz, \alpha}).$$

Поэтому

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(I_1 \alpha_1 + I_2 \alpha_2 + I_3 \alpha_3). \quad \blacktriangleright$$

317. Найти инфинитезимальные матрицы:

(а) группы вращений $SO(3)$, параметризованной как указано в задаче 316.

(б) специальной унитарной группы $SU(2)$, состоящей из матриц вида

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\varphi} \sin \eta \\ -e^{-i\varphi} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix}, \quad -\pi \leq \eta, \xi, \varphi \leq \pi.$$

Решение. (а) В качестве параметров группы $SO(3)$ возьмем три составляющие $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вектора α , направленного по оси вращения и равного по длине углу поворота:

$$g(\alpha_1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$I_1 = \left. \frac{\partial g(\alpha_1, 0, 0)}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. (б) Унитарные унимодулярные матрицы 2-го порядка имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\varphi} \sin \eta \\ -e^{-i\varphi} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix}$$

и зависят от трех вещественных параметров ξ, η, φ . В качестве двух генераторов можно выбрать производные

$$X_\xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3,$$

$$X_\eta = \frac{\partial U}{\partial \eta}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2.$$

Поскольку $U(\xi, \eta, \varphi)$ не зависит от φ при $\eta=0$, в качестве третьего генератора можно взять

$$X_\varphi = \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1. \quad \blacktriangleright$$

318. Построить гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$.

Решение. Матрицы из $SU(2)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix},$$

где α и β — произвольные комплексные числа, подчиняющиеся только условию $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$. Группа $SU(2)$ всех таких матриц — это группа линейных преобразований

$$u = \alpha u' + \beta v', \quad v = -\beta^* u' + \alpha^* v', \quad (10.9)$$

оставляющих инвариантной форму $uu^* + vv^*$. С помощью комплексных переменных можно определить три действительных переменные

$$x_1 = u^*v + v^*u, \quad x_2 = -i(u^*v - v^*u), \quad x_3 = uu^* - vv^*. \quad (10.10)$$

При этом

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (u^*u + v^*v)^2. \quad (10.11)$$

Линейное преобразование (10.9), примененное к (10.10), индуцирует линейное преобразование переменных x_1, x_2, x_3 , принадлежащее в силу равенства (10.11) ортогональной группе $SO(3)$.

Выпишем это линейное преобразование:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{2*} - \beta^2 - \beta^{2*})x'_1 + \\ &\quad + \frac{i}{2}(-\alpha^2 + \alpha^{2*} - \beta^2 + \beta^{2*})x'_2 + (-\alpha\beta - \alpha^*\beta^*)x'_3, \\ x_2 &= \frac{i}{2}(\alpha^2 - \alpha^{2*} - \beta^2 + \beta^{2*})x'_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{2*} + \beta^2 + \beta^{2*})x'_2 + i(-\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)x'_3, \\ x_3 &= (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)x'_1 + i(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)x'_2 + (\alpha\alpha^* - \beta\beta^*)x'_3. \end{aligned}$$

Это отображение не точно, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

представляются единицей группы $SO(3)$. ►

319. Показать, что трехмерное евклидово пространство, где скобкой Ли служит операция векторного умножения, есть алгебра Ли. Какой группе соответствует данная алгебра Ли?

Решение. $\mathbb{R}^3$ есть линейное пространство, в котором задано векторное произведение: $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \in \mathbb{R}^3$. Векторное произведение удовлетворяет всем свойствам скобок Ли. Поэтому $\mathbb{R}^3$ есть алгебра Ли, ее размерность равна 3. Для восстановления группы Ли по ее алгебре достаточно заметить, что любому вектору можно поставить во взаимно-однозначное соответствие антисимметричную матрицу 3×3 :

$$\mathbf{a} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -a_3 \\ -a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & -a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mathbb{R}^3$ изоморфно алгебре антисимметричных матриц 3×3 , причем в этом случае векторное произведение переходит в коммутатор матриц. В качестве базисных векторов в алгебре можно взять единичные вектора, которые, как легко видеть, соответствуют генераторам I_1, I_2, I_3 —

инфинитезимальным матрицам поворота (найлены в задаче (а)). Отсюда следует, что соответствующая группа есть группа ортогональных матриц 3×3 , которая представляет собой стандартное представление группы вращений $SO(3)$. Данное представление $D^{(1)}$ неприводимо, соответствует моменту $j = 1$. ►

320. Пусть $f(\theta, \varphi)$ — функция, заданная на сфере единичного радиуса, g — поворот на угол α вокруг оси Oz , которому соответствует матрица $T(g)$. Найти $I_3 f(\theta, \varphi)$, где I_3 — генератор поворота вокруг оси z .

Решение. Поскольку $T(g)f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi - \alpha)$, то

$$T(g)f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) - \alpha \frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} + \dots \Rightarrow I_3 f(\theta, \varphi) = -\frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}. \quad \blacktriangleright$$

321. Пусть A_1, A_2, A_3 — антиэрмитовы матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_2 A_1 &= A_3, & A_2 A_3 - A_3 A_2 &= A_1, \\ A_3 A_1 - A_1 A_3 &= A_2. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Рассмотрим линейные комбинации

$$H_+ = iA_1 - A_2, \quad H_- = iA_1 + A_2, \quad H_3 = iA_3.$$

(а) Показать, что

$$[H_+, H_-] = 2H_3, \quad [H_{\pm}, H_3] = \mp H_{\pm}.$$

(б) Пусть v_{λ} — собственный вектор матрицы H_3 , соответствующий собственному значению λ . Показать, что $H_+ v_{\lambda}$ — собственный вектор H_3 , соответствующий собственному значению $\lambda + 1$, а $H_- v_{\lambda}$ — собственный вектор H_3 , соответствующий собственному значению $\lambda - 1$. Найти норму векторов $H_{\pm} v_{\lambda}$, если $\|v_{\lambda}\| = 1$.

Решение. (а) Коммутационное соотношение получается прямым вычислением.

Решение. (б) Пусть $H_3 v_{\lambda} = \lambda v_{\lambda}$ — собственный вектор матрицы H_3 , отвечающий собственному значению λ . Тогда, согласно коммутационному соотношению $H_{\pm}$ с H_3 ,

$$H_3 H_{\pm} v_{\lambda} = H_{\pm} (H_3 \pm 1) v_{\lambda} = (\lambda \pm 1) H_{\pm} v_{\lambda}.$$

Значит, H_+ , H_- — соответственно повышающий и понижающий операторы. Таким образом,

$$H_+ v_{\lambda} = \beta_{\lambda} v_{\lambda+1}, \quad H_- v_{\lambda} = \alpha_{\lambda} v_{\lambda-1},$$

где числа α_{λ} и β_{λ} определяются условиями нормировки $|v_{\lambda}| = 1$ для всех λ . Найдем числа α_{λ} и β_{λ} . Так как матрицы H_+ и H_- эрмитово сопряжены,

$$\begin{aligned}(H_+ v_\lambda, v_{\lambda+1}) &= \beta_\lambda (v_{\lambda+1}, v_{\lambda+1}) = \beta_\lambda, \\ (v_\lambda, H_- v_{\lambda+1}) &= \alpha_{\lambda+1} (v_\lambda, v_\lambda) = \alpha_{\lambda+1},\end{aligned}$$

поэтому

$$\beta_\lambda = \alpha_{\lambda+1}. \quad (10.13)$$

Три генератора группы A_1, A_2, A_3 образуют замкнутую алгебру. Из них можно построить оператор, который коммутирует со всеми генераторами группы (*оператор Казимира*) $C = -(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$. Выразим оператор Казимира через матрицы H :

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{2} (H_+ H_- + H_- H_+) + H_3^2 = \\ &= H_3^2 + H_- H_+ + H_3 = H_3^2 + H_+ H_- - H_3.\end{aligned} \quad (10.14)$$

Пусть J максимальное собственное значение оператора H_3 , т. е. $H_+ v_J = 0$, тогда из (10.14) получим

$$(v_J, C v_J) = J(J+1).$$

Выберем среди собственных векторов H_3 те, которые одновременно являются собственными векторами оператора C с собственными значениями $J(J+1)$. Они получаются из v_J с помощью многократного действия оператора H_- .

Пусть λ — собственное значение, которое меньше J . Тогда

$$\begin{aligned}H_+ v_{\lambda-1} &= \frac{1}{\alpha_\lambda} H_+ H_- v_\lambda = \frac{1}{\alpha_\lambda} (H_- H_+ + 2H_3) v_\lambda = \\ &= \frac{1}{\alpha_\lambda} (\alpha_{\lambda+1} \beta_\lambda + 2\lambda) v_\lambda = \beta_{\lambda-1} v_\lambda.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (10.13), получаем

$$\beta_\lambda^2 + 2\lambda = \beta_{\lambda-1}^2. \quad (10.15)$$

Если $\lambda = J$, то $H_+ v_\lambda = 0$ и, следовательно, $\beta_{J-1}^2 = 2J$. Используя (10.15), по индукции легко получить $\beta_\lambda^2 = J(J+1) - \lambda(\lambda+1)$. Отсюда по (10.13) имеем $\alpha_\lambda^2 = J(J+1) - \lambda(\lambda-1)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}H_3 v_\lambda &= \lambda v_\lambda, \\ H_- v_\lambda &= \sqrt{J(J+1) - \lambda(\lambda-1)} v_{\lambda-1}, \\ H_+ v_\lambda &= \sqrt{J(J+1) - \lambda(\lambda+1)} v_{\lambda+1}.\end{aligned}$$

►

322. Доказать, что все собственные значения матрицы H_3 суть целые или полуцелые числа: $-j, -j+1, \dots, j-1, j$.

Решение. Действуя последовательно степенями понижающего оператора H_- на собственный вектор старшего веса v_J , получаем набор собственных векторов $v_J, v_{J-1}, \dots$. Последним вектором в этом наборе будет вектор v_{-J} , так как $H_- v_{-J} = 0$. Число всех собственных векторов в представлении с данным J равно $2J+1$. Значит, J — целое или полуцелое число. ►

323. Найти коэффициенты Клебша—Гордана

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} = \langle j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle,$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle, \quad |jm\rangle \equiv |jm, j_1 j_2\rangle$$

для $j_1 = 1, j_2 = 2, j = 1, m = 0$.

Решение. Начнем с вектора с максимально возможным при $j = 1$ значением $m = 1$ (вектора *старшего веса*), который разложим по возможным состояниям с моментами j_1 и j_2 , используя соотношение $m = m_1 + m_2$,

$$|1\ 1\rangle = \alpha|1\ 0\rangle|2\ 1\rangle + \beta|1\ 1\rangle|2\ 0\rangle + \gamma|1\ -1\rangle|2\ 2\rangle, \quad (10.16)$$

где коэффициенты α, β, γ надлежит найти. Обозначим буквой V пространство с базисом

$$|1\ -1\rangle, |1\ 0\rangle, |1\ 1\rangle,$$

а U — пространство с базисом

$$|2\ -2\rangle, |2\ -1\rangle, |2\ 0\rangle, |2\ 1\rangle, |2\ 2\rangle.$$

Тогда повышающий оператор J_+ , действующий в пространстве $V \otimes U$, можно записать как

$$J_+ = J_+^1 \otimes E^2 + E^1 \otimes J_+^2,$$

где E^1, E^2 — единичные операторы, а J_+^1, J_+^2 — повышающие операторы, действующие в пространствах V, U .

Подействуем на обе части (10.16) повышающим оператором J_+ и воспользуемся формулой для его матричных элементов

$$J_{\pm}|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j\ m \pm 1\rangle.$$

Получится

$$0 = \sqrt{2}\alpha|1\ 1\rangle|2\ 1\rangle + 2\alpha|1\ 0\rangle|2\ 2\rangle + \sqrt{6}\beta|1\ 1\rangle|2\ 1\rangle + \sqrt{2}\gamma|1\ 0\rangle|2\ 2\rangle,$$

откуда найдем

$$\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{6} = 0, \quad 2\alpha + \gamma\sqrt{2} = 0.$$

Третье соотношение дается нормировкой $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, откуда $\alpha = \sqrt{\frac{3}{10}}, \beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \gamma = -\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Теперь подействуем на вектор старшего веса (10.16) понижающим оператором и приведем подобные члены. Получится разложение

$$\sqrt{2}|1\ 0\rangle = (\alpha\sqrt{2} + 2\gamma)|1\ -1\rangle|2\ 1\rangle + (\alpha\sqrt{6} + \beta\sqrt{2})|1\ 0\rangle|2\ 0\rangle + \beta\sqrt{6}|1\ 1\rangle|2\ -1\rangle.$$

В итоге найдем все три искомого коэффициента Клебша—Гордана

$$C_{1-121}^{10} = C_{112-1}^{10} = -\sqrt{\frac{3}{10}}, \quad C_{1020}^{10} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

324. Сколько независимых компонент у тензора 2-го ранга, инвариантного относительно действия группы G , если G является группой симметрий треугольника?

Решение. Заметим, что симметрии треугольника образуют подгруппу группы собственных вращений трехмерного пространства. Далее, воспользовавшись тем, что повороту на угол φ соответствует характер $1 + 2 \cos \varphi$, и тем, что след тензорного произведения матриц равен произведению следов сомножителей, можно вычислить характер представления группы треугольника. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — классы сопряженных элементов группы треугольника, как в задаче 291, тогда

	σ_1	σ_2	σ_3
χ	9	0	1

Кратность вхождения единичного представления равна двум, значит имеется две независимые компоненты.

325. Показать, что операция перестановки индексов коммутирует с действием группы G на пространстве тензоров ранга r .

Решение. Этот факт устанавливается непосредственной проверкой. Пусть элементу g из G соответствует матрица D_{ij} , тогда

$$\begin{aligned} (\sigma T')_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} &= T'_{\alpha_{\sigma(1)} \alpha_{\sigma(2)} \dots \alpha_{\sigma(r)}} = D_{\alpha_{\sigma(1)} k_{\sigma(1)}} \dots D_{\alpha_{\sigma(r)} k_{\sigma(r)}} T_{k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(r)}} = \\ &= D_{\alpha_1 k_1} \dots D_{\alpha_r k_r} (\sigma T)_{k_1 \dots k_r} = (\sigma T)'_{\alpha_1 \dots \alpha_r}. \end{aligned}$$

326. Какова размерность подпространства симметричных тензоров 3-го ранга?

Решение. Для компонент симметричных тензоров 3-го ранга выполняются равенства: $S_{ijk} = S_{jki} = S_{kij} = S_{jik} = S_{kji} = S_{ikj}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$. Легко видеть, что имеется 17 независимых условий на компоненты. Поскольку размерность пространства тензоров 3-го ранга равна 27, то подпространство симметричных тензоров имеет размерность 10.

327. Представление D^* конечной группы G получается из данного D путем простого комплексного сопряжения. (Если D^* и D совпадают, то D называют вещественным представлением.) Рассмотрим прямое произведение $D = D^{(\alpha)*} \otimes D^{(\beta)}$ неприводимых представлений группы G . Доказать, что в разложении D на неприводимые тождественное представление может встретиться только в том случае, если $D^{(\alpha)} = D^{(\beta)}$.

Решение. Разложим прямое произведение двух неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений: $D = \bigoplus_{\lambda} c_{\lambda} D^{(\lambda)}$.

Найдем, сколько раз встречается тривиальное представление в D . Для этого умножим характер $\chi(g) = \chi^{(\alpha)*}(g)\chi^{(\beta)}(g)$ представления D на характер тривиального представления $\chi^{(1)*}(g) = 1$ и просуммируем по группе:

$$c_1 = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi^{(1)*}(g) \chi^{(\alpha)*}(g) \chi^{(\beta)}(g) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Последнее равенство получается в силу формулы (9.3). ►

10.4. Задачи

328. Образуют ли непрерывную группу:

- (а) повороты на плоскости;
- (б) растяжения и сдвиги на плоскости;
- (в) преобразования Лоренца;
- (г) дробно-линейные преобразования комплексной плоскости

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}.$$

329. Какова размерность следующих матричных групп Ли, если это:

- (а) полная линейная группа $GL(n, \mathbb{C})$;
- (б) унимодулярная группа $SL(n, \mathbb{C})$, включающая все матрицы, определитель которых равен 1;
- (в) унитарная группа $U(n, \mathbb{C})$;
- (г) ортогональная группа $O(n, \mathbb{R})$;
- (д) группа вращений $SO(3)$.

330. Проверить, что для генераторов группы $SO(3)$, параметризованной как в задаче 316, справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$I_1 I_2 - I_2 I_1 = I_3, \quad I_2 I_3 - I_3 I_2 = I_1, \quad I_3 I_1 - I_1 I_3 = I_2.$$

331. Пусть $f(\theta, \varphi)$ — функция, заданная на сфере единичного радиуса, g — поворот на угол α вокруг оси Oz , которому соответствует матрица $T(g)$.

- (а) Пусть $f = Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Как действует iI_3 на f ?
- (б) Рассмотрим векторное пространство, натянутое на векторы

$$Y_{l,-l}, Y_{l,-l+1}, \dots, Y_{ll}.$$

Найти в этом базисе матрицу $D(g)$, соответствующую повороту на угол α вокруг оси Oz .

332. Показать, что повороты на один и тот же угол вокруг различных осей входят в один и тот же класс сопряженных элементов группы $SO(3)$.

333. Найти характер $2l+1$ -мерного представления группы $SO(3)$ (из задачи (6)).

334. Пусть $D^{(j)}$ и $D^{(j')}$ — неприводимые представления группы $SO(3)$. Доказать, что

$$D^{(j)} \otimes D^{(j')} = D^{(j+j')} \oplus D^{(j+j'-1)} \oplus \dots \oplus D^{(|j-j'|)}$$

(разложение Клебша—Гордана).

335. Найти коэффициенты Клебша—Гордана для разложения $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)}$ на неприводимые представления.

336. Сколько независимых компонент у тензора 2-го ранга, инвариантного относительно действия группы G , если $G = SO(3)$?

337. Сколько независимых компонент у тензора 3-го ранга, инвариантного относительно действия группы G , если а) $G = SO(3)$; б) G является группой симметрий треугольника?

338. Разложить тензор 2-го ранга на неприводимые части относительно действия группы $G = SO(3)$.

339. Пусть $\mathcal{F}$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ в $\mathbb{R}^3$. Для каждой матрицы вращения $T(g)$, $g \in SO(3)$ положим $(gf)(x) = f(T^{-1}(g)x)$. Построить генераторы этого представления.

340. Рассмотрим множество однородных полиномов степени n вида

$$\sum_{k+l+m=n} a_{klm} x^k y^l z^m, \quad k, l, m \geq 0.$$

Все полиномы образуют векторное пространство.

(а) Найти размерность этого пространства.

(б) Найти размерность подпространства гармонических полиномов (т. е. полиномов, удовлетворяющих уравнению Лапласа).

(в) Показать, что представление группы $SO(3)$ на пространстве гармонических полиномов является неприводимым.

341. Движение в вещественном двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ состоит из вращений $T \in SO(2)$ и сдвигов. Обозначим группу движений плоскости M_2 . Пусть $g = g_{\xi, \eta, \theta}$ — элемент группы M_2 , задающий следующее отображение плоскости на себя:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta + \xi \\ x \sin \theta + y \cos \theta + \eta \end{pmatrix}.$$

Напишем соответствие между элементами M_2 и матрицами 3×3 :

$$g \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \xi \\ \sin \theta & \cos \theta & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Проверить, что (10.17) является представлением группы M_2 .

342. Пусть $\mathcal{F}$ обозначает пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных для всех x и y . Представление группы M_2 из задачи 341 на $\mathcal{F}$ получается путем преобразования каждой функции $f(x, y)$ в функцию

$$(gf)(x, y) = f((x - \xi) \cos \theta + (y - \eta) \sin \theta - (x - \xi) \sin \theta + (y - \eta) \cos \theta).$$

(а) Показать, что для инфинитезимальных операторов группы $L_{1,2,3}$ справедливы равенства

$$L_1 = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad L_2 = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad L_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

(б) Найти $[L_1, L_2]$, $[L_1, L_3]$, $[L_2, L_3]$.

(в) Пусть r и φ — полярные координаты плоскости x, y , $L^\pm = L_1 \pm iL_2$. Убедиться, что

$$\begin{aligned} L^\pm &= -e^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_3 &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ L^+ L^- &= L^- L^+ = \Delta. \end{aligned}$$

(г) Проверить, что Δ коммутирует со всеми операторами L_1, L_2, L_3 .

343. Рассмотрим множество функций

$$\Psi_m(x, y) = e^{im\varphi} J_m(\alpha r),$$

где $J_m(\alpha r)$ — функция Бесселя порядка m ($\alpha \neq 0$). Показать, что на пространстве $\mathcal{F}$, базисом которого являются функции Ψ_m с целыми m , осуществляется неприводимое бесконечномерное представление группы M_2 .

10.5. Ответы

328. (г) Да, если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

329. (а) $2n^2$ вещественных переменных.

(б) $2n^2 - 2$.

(в) n^2 .

(г) $\frac{n(n-1)}{2}$.

(д) 3.

331. (а) $iI_3 f = m f$.

(б) $D(g) = \exp(I_3 \alpha) =$

$$= \exp \begin{pmatrix} i\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i(l-1)\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & i(l-2)\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i(l-3)\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -i\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i(l-1)\alpha} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(l-2)\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(l-3)\alpha} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}.$$

333. $\chi^{(l)}(\varphi) = \frac{\sin(l+1/2)\varphi}{\sin(\varphi/2)}$.

334. Указание: Воспользоваться тем, что для каждого $g \in SO(3)$

$$\text{Tr}(D^{(j)} \otimes D^{(j')}) = \text{Tr} D^{(j)} \text{Tr} D^{(j')}.$$

335. Разложение представления $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)}$ на неприводимые представления эквивалентно задаче о сложении двух спинов $S_1 = \frac{1}{2}$ и $S_2 = \frac{1}{2}$. В разложении присутствуют только два мультиплет с $S = 1$ (триплет, когда спины параллельны) и $S = 0$ (синглет с антипараллельными спинами):

$$D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}.$$

Коэффициенты Клебша—Гордана есть коэффициенты в разложении волновых функций. Для $S = 1$

$$\begin{aligned} |11\rangle &= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_2, \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_2 + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_2 \right), \\ |1-1\rangle &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_2. \end{aligned}$$

Для $S=0$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle_2 - \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_2 \right).$$

336. Одна компонента.

337. а) Одна компонента. б) Четыре компоненты.

338. $D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(0)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(2)}$, представление $D^{(2)}$ реализуется на подпространстве симметричных бесследовых тензоров ранга 2, $D^{(1)}$ — на подпространстве кососимметрических тензоров, $D^{(0)}$ — на тензорах вида $s\delta_{ij}$, где s — число.

339. $L_1 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$

340. (а) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$

(б) $2n+1.$

(в) Указание: Воспользовавшись формулой Родрига (П.37), получим

$$r^n Y_{nm}(\theta, \varphi) \propto r^n e^{im\varphi} (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{n+m} (\cos^2 \theta - 1)^n,$$

$$m = -n, -n+1, \dots, n.$$

Переходя к декартовым координатам

$$r \cos \theta = z, \quad r \sin \theta e^{i\varphi} = x + iy, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

можно установить, что $r^n Y_{nm}$ является однородным полиномом степени n . Любое ограниченное решение уравнения

$$\Delta r^n f(\theta, \varphi) = 0 = r^{n-2} (n(n+1) + \Delta_\Omega) f$$

для функции f , где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа, можно записать в виде линейной комбинации сферических гармоник $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Поэтому линейная оболочка полиномов $r^n Y_{nm}$, $m = -n, -n+1, \dots, n$ совпадает со всем пространством гармонических полиномов.

342. (б) $[L_1, L_2] = 0, \quad [L_1, L_3] = -L_2, \quad [L_2, L_3] = L_1.$

343. Указание: Пространство $\mathcal{F}$ должно преобразовываться само в себя под действием каждого из операторов L_1, L_2, L_3 . Заметим, что

$$L_3 \Psi_m = -im \Psi_m, \quad L^+ \Psi_m = -\alpha \Psi_{m+1}, \quad L^- \Psi_m = \alpha \Psi_{m-1}.$$

Это следует из рекуррентных соотношений $J_{m+1}(z) = -J'_m(z) + \frac{mJ_m(z)}{z}$, $J_{m-1}(z) = J'_m(z) + \frac{mJ_m(z)}{z}$. Поскольку L_1, L_2, L_3 — линейные комбинации операторов L^+, L^-, L_3 , получаем, что пространство $\mathcal{F}$

переходит в себя под действием группы M_2 . Действуя оператором L^+ на функцию Ψ_m для любого m , получаем необрывающийся ряд, поэтому представление бесконечномерно. Для доказательства неприводимости надо воспользоваться тем, что множество функций $\{c\Psi_m\}$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, исчерпывает все собственные векторы оператора L_3 в пространстве $\mathcal{F}$, и тем, что в любом M_2 -инвариантном подпространстве содержится собственный вектор L_3 . Далее, действуя операторами L^+ и L^- , получим весь набор функций Ψ_m , $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Применения теории групп в физике

11.1. Гармонические колебания молекул

В классической механике гамильтониан молекулы, состоящей из n атомов с массами M_l , $l=1, \dots, n$, в гармоническом приближении имеет вид

$$H = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{(p_l^\alpha)^2}{2M_l} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \sum_{l, m=1}^n V_{lm}^{\alpha, \beta} q_l^\alpha q_m^\beta. \quad (11.1)$$

Здесь q_l^α — α -компонента малого смещения атома относительно положения равновесия в некоторой декартовой системе координат, p_l^α — сопряженный импульс, а $V_{lm}^{\alpha, \beta}$ — постоянные коэффициенты. В дальнейшем для упрощения записи будем объединять индекс декартовой компоненты α и номер атома l в один индекс k , меняющийся от 1 до $3n$ ($k=3(l-1)+\alpha$). Уравнения движения

$$M_k \ddot{q}_k = - \sum_{j=1}^{3n} V_{kj} q_j \quad (11.2)$$

определяют набор собственных частот ω_k^2 и *собственных мод* (нормальных колебаний) $a_k^{(s)}$. Будем искать решение уравнений (11.2) в виде $q_k = a_k \cos(\omega t + \delta)$. Подставляя эти зависимости в (11.2), получаем систему алгебраических уравнений на коэффициенты a_k :

$$\omega^2 M_k a_k = \sum_{j=1}^{3n} V_{kj} a_j.$$

В терминах амплитуд $b_k = \sqrt{M_k} a_k$ задача определения нормальных колебаний системы сводится к задаче о диагонализации эрмитовой матрицы B_{kj} :

$$\omega^2 b_k = \sum_{j=1}^{3n} B_{kj} b_j, \quad B_{kj} = \frac{V_{kj}}{\sqrt{M_k M_j}}. \quad (11.3)$$

Симметрии нашей системы — это перестановки атомов с одинаковыми массами, повороты и отражения векторов малых смещений атомов,

сохраняющие вид гамильтониана (11.1). Иначе говоря, группа симметрии молекулы — это некоторая подгруппа прямого произведения группы S_n перестановок n атомов и n экземпляров группы несобственных вращений $O(3)$ (поворотов и отражений):

$$S_n \times O(3) \times \dots \times O(3).$$

Любой ее элемент можно представить в виде прямого произведения простых перестановок T пары атомов и линейных преобразований $R \in O(3)$ — поворотов и отражений координат b_j каждого атома. Напомним, что перестановка номеров k и l в любой матрице B осуществляется линейным преобразованием

$$B \rightarrow T_{(kl)}^{-1} B T_{(kl)}, \quad T_{(kl)}^2 = E, \quad (11.4)$$

где матрица $T_{(kl)}$ получается из единичной перестановкой k -ого и l -ого столбцов. При действии на данный вектор b_j матрица $T_{(kl)}$ переставляет его k -ю и l -ю компоненты. Таким образом, в пространстве компонент $3n$ -мерных векторов-амплитуд $b = (b_1, \dots, b_{3n})$ действует линейное представление группы симметрии молекулы, причем перестановкам атомов соответствуют преобразования T , а поворотам и отражениям — преобразования R .

Симметрия системы относительно перестановки одинаковых атомов T , поворотов и отражений R или их комбинаций Q означает, что

$$B = Q^{-1} B Q \Rightarrow [B, Q] = 0, \quad (11.5)$$

где Q — любая матрица из представления группы симметрии, осуществляющая перестановки, повороты и отражения компонент $3n$ -мерных векторов амплитуд. Это представление (мы будем называть его *исходным*) чаще всего является приводимым. С другой стороны, равенство (11.5) означает, что если b — собственный вектор матрицы B , то и Qb — тоже собственный вектор, соответствующий тому же собственному значению. Следовательно, любое подпространство V_m собственных векторов, соответствующих собственному значению ω_m^2

$$\omega_m^2 b_i^\alpha = \sum_{j=1}^{3n} B_{ij} b_j^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad b^\alpha \in V_m,$$

будет инвариантно относительно действия операторов Q :

$$Q b^\alpha = \sum_{\beta=1}^k q_{\alpha\beta} b^\beta, \quad b^\alpha, b^\beta \in V_m.$$

Это означает, что операторы Q будут осуществлять в V_m некоторое k -мерное представление группы симметрии, а $q_{\alpha\beta}$ будут матрицами этого представления. Как правило, такое представление является неприводимым. Если оно оказывается приводимым, то говорят о случайном

вырождении, которое свидетельствует о том, что система обладает более высокой симметрией, чем мы предполагали. Итак, разбивая исходное представление группы симметрии на неприводимые, мы можем определить размерности собственных подпространств, т. е. кратности вырождения собственных частот колебаний молекулы.

Если нормальные моды колебаний использовать в качестве базиса в $3n$ -мерном пространстве векторов амплитуд, то гамильтониан системы в таких переменных приобретает вид диагональной квадратичной формы. Иными словами, он становится суммой гамильтонианов, каждый из которых зависит от амплитуды только одной нормальной моды. Переходя к квантовомеханическому рассмотрению, заметим, что можно произвести квантование сразу в базисе нормальных колебаний. Тогда структура уровней и вид волновых функций станет очевидным: система представляет собой совокупность независимых линейных осцилляторов. Собственные функции ее гамильтониана являются произведениями стационарных волновых функций каждого из осцилляторов. Если у k осцилляторов совпадают частоты, то это приводит к k -кратному вырождению колебаний классической системы. Таким образом, с помощью теории групп можно найти кратности вырождения колебательных уровней молекулы. Для этого с помощью теории характеров надо разложить по неприводимым исходное представление группы симметрии нашей системы в пространстве $3n$ -мерных векторов амплитуд.

Заметим, что матрицы преобразования, отвечающие симметрии молекулы, действуют на векторы малых смещений атомов из равновесных положений. Энергия, соответствующая данному смещению атома, зависит в общем случае от направления вектора смещения. Поэтому преобразования симметрии должны сохранять относительную ориентацию атомов, т. е. группа симметрии молекулы является подгруппой группы движений (изометрий) трехмерного пространства. Исходное же представление возникает, когда мы рассматриваем действие элементов g этой подгруппы на векторы амплитуд атомных смещений.

Характер $\chi_i(g)$ исходного представления, где преобразование g — поворот, или отражение, или их суперпозиция, является суммой характеров 3-мерных векторных представлений в подпространствах векторов малых смещений отдельных атомов, не перемещающихся при преобразовании g . В трехмерном векторном V (псевдовекторном PV) представлениях матрица поворота $R_V(\theta) = R_{PV}(\theta) = R(\theta)$ на угол θ вокруг оси z и матрицы отражения $R_V(\sigma)$, $R_{PV}(\sigma)$ относительно плоскости xy имеют вид

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_V(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_{PV}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку все повороты на данный угол вокруг любой оси принадлежат одному классу сопряженных элементов, характер поворота на угол θ вокруг произвольной оси симметрии равен

$$\chi_i(\theta) = N_C \cdot \chi(R_V(\theta)), \quad \chi(R_V(\theta)) = 1 + 2\cos\theta,$$

где N_C — число атомов, не перемещающихся при повороте молекулы на угол θ вокруг оси симметрии (число атомов, лежащих на этой оси). Характер отражения относительно произвольной плоскости равен

$$\chi_i(\sigma) = N_P \cdot \chi(R_V(\sigma)), \quad \chi(R_V(\sigma)) = 1,$$

где N_P — число атомов, не перемещающихся при отражении молекулы относительно плоскости симметрии (число атомов, лежащих на этой плоскости). Характер поворота вокруг произвольной оси, сопровождающийся отражением относительно перпендикулярной плоскости, *зеркального поворота* равен

$$\chi_i(\sigma\theta) = N_S \cdot \chi(R_V(\sigma)R(\theta)), \quad \chi(R_V(\sigma)R(\theta)) = 2\cos\theta - 1,$$

где N_S — число атомов, лежащих на пересечении оси и плоскости ($N_S = 0, 1$).

Следует помнить, что для свободной молекулы из n атомов в трехмерном пространстве имеются степени свободы, соответствующие движению молекулы как целого: три степени свободы соответствуют трансляции, а три — повороту молекулы как целого^{*)}. Им соответствуют 6 нормальных мод с нулевой частотой — нулевых мод. Удобно с самого начала исключить эти степени свободы, оставив только колебательные. Исходное $3n$ -мерное представление $D_i(g)$ группы симметрии нашей системы раскладывается в прямую сумму 6-мерного представления $D_0(g)$ в подпространстве нулевых мод и $(3n-6)$ -мерного представления $D_{osc}(g)$ в подпространстве, ортогональном нулевым модам $D_i = D_0 \oplus D_{osc}$. Чтобы найти характер $\chi_{osc}(g)$ представления в таком *колебательном* подпространстве, нужно вычесть из характера $\chi_i(g)$ исходного представления характер $\chi_0(g)$ 6-мерного представления, который определяется только трансформационными свойствами нулевых мод (трансляций и вращений молекулы как целого), но не их явным видом.

Трансляция задается трехмерным вектором, а вращение — трехмерным псевдовектором, причем и тот, и другой инвариантны относительно перестановки T номеров атомов. Значит, действие элемента RT группы симметрии молекулы на нулевую моду совпадает с действием одного линейного преобразования R . Следовательно, характер $\chi_0(g)$ равен сумме характеров трехмерных векторного V и псевдовекторного PV представлений. Характер поворота на угол θ вокруг произвольной оси равен

$$\chi_0(\theta) = \chi(R_V(\theta)) + \chi(R_{PV}(\theta)) = 2(1 + 2\cos\theta).$$

^{*)} Для линейной молекулы — ротатора — имеется всего две вращательные степени свободы, а значит 5 нулевых мод.

Характер отражения относительно произвольной плоскости равен

$$\chi_0(\sigma) = \chi(R_V(\sigma)) + \chi(R_{PV}(\sigma)) = 0.$$

Характер поворота вокруг произвольной оси, сопровождающийся отражением относительно перпендикулярной плоскости, равен

$$\chi_0(\sigma\theta) = \chi(R_V(\sigma)R_V(\theta)) + \chi(R_{PV}(\sigma)R_{PV}(\theta)) = 0.$$

11.2. Расщепление уровней

В квантовой механике встречаются группы унитарных преобразований в линейном пространстве векторов-состояний. Рассмотрим гамильтониан вида

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

где $\hat{H}_0$ — основной гамильтониан, а $\hat{V}$ — возмущение. Пусть гамильтониан $\hat{H}_0$ обладает группой симметрии G , т.е. $\hat{H}_0$ коммутирует с каждым из операторов представления этой группы (см. главу 8). Тогда в любом d -мерном собственном подпространстве $\hat{H}_0$ действует d -мерное неприводимое представление группы G .

Рассмотрим какое-нибудь одно такое подпространство, причем пусть $d > 1$. Тогда мы говорим, что соответствующее собственное значение E оператора $\hat{H}_0$ d -кратно вырождено вследствие симметрии системы. Если симметрия $\hat{V}$ ниже, чем симметрия основного гамильтониана $\hat{H}_0$, то возмущение частично снимает вырождение. Действительно, в этом случае группа симметрии F полного гамильтониана $\hat{H}$ является подгруппой группы G . В результате некоторые неприводимые представления группы G становятся приводимыми представлениями подгруппы F , что приводит к расщеплению соответствующих вырожденных уровней E на подуровни E_j . Каждый из E_j является собственным значением оператора $\hat{H}$ в собственном подпространстве, в котором действует неприводимое представление группы F .

Пример: Пусть $\|\hat{V}\| \rightarrow 0$, тогда мы можем учесть $\hat{V}$ по теории возмущений. Для этого в начале найдем собственные функции оператора $\hat{H}_0$, принадлежащие d -мерному собственному подпространству, и выберем в этом подпространстве некоторый базис $\{\psi_n\}$:

$$\hat{H}_0\psi_n = E\psi_n, \quad n = 1, 2, \dots, d. \quad (11.6)$$

Из функций ψ_n всегда можно построить такие линейные комбинации, чтобы

$$(\Psi_i, \hat{V}\Psi_j) = \Delta E_j \delta_{ij}, \quad \Psi_j = \sum_{n=1}^d \alpha_{jn} \psi_n.$$

Значения ΔE_j определяются из *секулярного* уравнения

$$|V_{mn} - \Delta E \delta_{mn}| = 0,$$

где $V_{mn} = (\psi_m, \hat{V} \psi_n)$ — матричные элементы оператора возмущения в базисе $\{\psi_n\}$. Подставляя Ψ_j в уравнение Шрёдингера, получаем собственные значения оператора $\hat{H}$ с точностью до линейных по $\|\hat{V}\|$ членов включительно:

$$(\hat{H}_0 + \hat{V}) \Psi_j = (E + \Delta E_j) \Psi_j. \quad (11.7)$$

Поправки к энергии ΔE_j являются собственными значениями матрицы V_{mn} . Заметим, что собственные функции оператора $\hat{H}$ при $\|\hat{V}\| \rightarrow 0$ стремятся к Ψ_j .

Частичное вырождение тем не менее может остаться. Поскольку оператор $\hat{V}$ коммутирует с операторами группы симметрии F полного гамильтониана, то в подпространстве функций ψ_j , $j = 1, 2, \dots, d$ матрица V_{mn} коммутирует с операторами исходного d -мерного представления группы симметрии F . Формально задача становится эквивалентной задаче о линейных колебаниях молекулы с d степенями свободы, рассмотренной в предыдущей главе. Поэтому кратности вырождения получившихся подуровней E_j можно найти как размерности неприводимых представлений в разложении исходного представления группы F . Известным примером в квантовой механике является вырождение уровней атома в электрическом поле по знаку проекции M углового момента J .

11.3. Правила отбора

В квантовой механике часто требуется найти матричный элемент оператора $O_{fi} \equiv \langle f | \hat{O} | i \rangle$. Многие матричные элементы вычислять не надо, потому что они обращаются в нуль благодаря симметрии системы. Правила, по которым можно заранее определить, какие из матричных элементов обращаются в нуль, называются *правилами отбора*. В квантовой механике квадрат матричного элемента оператора $\hat{V}$ (11.7) пропорционален вероятности перехода. Если $V_{fi} = 0$, говорят, что переход из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ запрещен.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$ состояний квантовой системы действует представление группы G : элементу $g \in G$ соответствует унитарное преобразование $U(g)$. Говорят, что набор операторов $\{\hat{O}_i\}$, действующих в $\mathcal{L}$, преобразуется по представлению Φ группы G , если

$$\widetilde{\hat{O}}_j = U(g) \hat{O}_j U^{-1}(g) = \Phi_{jk}(g) \hat{O}_k. \quad (11.8)$$

Такие операторы называются *тензорными* по отношению к группе G .

Пусть $U(R)$ — унитарный оператор в гильбертовом пространстве, отвечающий оператору поворота R трехмерного пространства ($\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$

или $\tau'_\alpha = R_{\alpha\beta}\tau_\beta$). По определению, преобразованные волновые функции есть

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}') = U(R)\psi(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r}'). \quad (11.9)$$

Опуская штрихи, запишем эти равенства в виде

$$U(R)\psi(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r}), \quad U^{-1}(R)\psi(\mathbf{r}) = \psi(R\mathbf{r}). \quad (11.10)$$

Для любых состояний $\tilde{\psi}$ и $\tilde{f}$, которые получены из ψ и f под действием оператора $U(R)$, имеем

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \tilde{f}^*(\mathbf{r}) \tau_\alpha \tilde{\psi}(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r} f^*(R^{-1}\mathbf{r}) \tau_\alpha \psi(R^{-1}\mathbf{r}) = \\ &= \int d\mathbf{r} f^*(\mathbf{r}) (R\mathbf{r})_\alpha \psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Здесь мы использовали замену переменных $R^{-1}\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ и инвариантность меры интегрирования при поворотах. Таким образом, мы доказали, что трансформационные свойства операторов τ_α совпадают с трансформационными свойствами соответствующего матричного элемента

$$\langle \tilde{f} | \tau_\alpha | \tilde{\psi} \rangle = R_{\alpha\beta} \langle f | \tau_\beta | \psi \rangle. \quad (11.12)$$

Для других операторов это свойство доказывается аналогично.

Пример: Пусть $G = SO(3)$ — группа вращений трехмерного пространства. Неприводимые представления этой группы имеют размерность $2l+1$ ($l=0, 1, 2, \dots$), где l в физической литературе называется орбитальным моментом. Тогда:

- (а) лапласиан Δ инвариантен относительно вращений, т. е. преобразуется по тождественному представлению ($l=0$);
- (б) тройка операторов τ_α ($\alpha=1, 2, 3$) — компонент радиус-вектора $\mathbf{r}$ — преобразуется по неприводимому представлению с орбитальным моментом $l=1$;
- (в) тройка операторов — проекций углового момента $l_\alpha = -i[\mathbf{r} \times \nabla]_\alpha$ — также преобразуется по представлению с $l=1$;
- (г) пятерка операторов — компонент тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta} = r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}r^2$ преобразуется по неприводимому представлению с $l=2$.

Рассмотрим теперь два набора волновых функций: $\{\psi_n\}$ и $\{\phi_n\}$, преобразующихся по неприводимым представлениям V и W группы G :

$$U(g)\psi_n = V_{nm}\psi_m, \quad U(g)\phi_n = W_{nm}\phi_m, \quad (11.13)$$

и набор операторов $\{\hat{O}_j\}$, преобразующихся по неприводимому представлению (11.8). Тогда справедливо следующее утверждение: для того, чтобы матричный элемент $M_{nm}^j = \langle \psi_n | \hat{O}_j | \phi_m \rangle$ был отличен от нуля, необходимо, чтобы в разложении прямого произведения представлений

$V^* \otimes \Phi \otimes W$ в прямую сумму неприводимых хотя бы один раз встретилось тождественное представление. Для доказательства рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} M_{nm}^j &= \langle \psi_n | U^{-1}(g) U(g) \hat{O}_j U^{-1}(g) U(g) | \phi_m \rangle = \\ &= \langle U(g) \psi_n | U(g) \hat{O}_j U^{-1}(g) | U(g) \phi_m \rangle, \end{aligned}$$

при выводе которого мы использовали унитарность оператора $U(g)$. Учитывая трансформационные свойства ψ_n , ϕ_m (11.13) и $\hat{O}_j$ (11.8), получаем

$$M_{nm}^j = V_{nn'}^*(g) \Phi_{jj'}(g) W_{mm'}(g) M_{n'm'}^{j'} \equiv T_{nn',mm'}^{jj'}(g) M_{n'm'}^{j'}. \quad (11.14)$$

Это равенство справедливо для произвольного элемента g из группы G , а матричный элемент M_{nm}^j в этом равенстве никак от g не зависит. Матрицы $T_{nn',mm'}^{jj'}(g)$ образуют представление группы G , являющееся прямым произведением неприводимых представлений V^* , Φ и W . Разложим это представление в прямую сумму неприводимых

$$T(g) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} D^{(\lambda)}(g)$$

и просуммируем обе части равенства (11.14) по элементам g группы G . При этом сумма матриц $D^{\lambda}(g)$, соответствующих неприводимому представлению, отличному от тождественного, дает нуль. Это является следствием соотношения ортогональности неприводимых представлений (9.2). Отсюда следует, что матричный элемент M_{nm}^j может быть отличен от нуля, только если в разложении прямого произведения представлений $T = V^* \otimes \Phi \otimes W$ в прямую сумму неприводимых присутствует тождественное представление.

Согласно результату задачи 327, правило отбора можно переформулировать так: чтобы матричный элемент $\langle \psi_n | \hat{O}_j | \phi_m \rangle$ был отличен от нуля, необходимо (но недостаточно!), чтобы в разложении прямого произведения представлений $\Phi \otimes W$ на неприводимые хотя бы один раз встретилось V . Заметим, что доказанное утверждение есть следствие только трансформационных свойств волновых функций и операторов, а также инвариантности меры.

Если оператор $\hat{O}$ преобразуется по приводимому представлению, то следует разбить его на неприводимые составляющие и установить переходы, разрешенные для каждой неприводимой компоненты отдельно.

Многочисленные примеры использования теории групп в разнообразных физических задачах можно найти в книгах [ПТ67, МУ72, ЛЛ74, РФ70].

11.4. Примеры

344. Найти кратности вырождения собственных мод малых колебаний «молекулы», состоящей из трех одинаковых «атомов», которые могут двигаться только вдоль окружности (рис. 11.1). Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 p_j^2 + \frac{k}{2} \sum_{j=1}^3 (x_j - x_{j-1})^2, \quad x_3 \equiv x_0, \quad (11.15)$$

где x_j — отклонение j -го атома от положения равновесия, p_j — сопряженный импульс.

Решение. Группа симметрии системы совпадает с группой $D_3 = S_3$ симметрии равностороннего треугольника. Она разбивается на три класса сопряженных элементов: e — единичный элемент, σ_2 — циклические перестановки всех трех атомов (содержит 2 элемента), σ_3 — перестановки пары атомов (содержит 3 элемента). Имеется 3 неэквивалентных неприводимых представления этой группы, и соответствующая таблица характеров приведена в решении задачи 291. Поскольку в данном случае движение каждого атома одномерно, то исходное представление группы D_3 действует в трехмерном пространстве векторов-амплитуд. Чтобы найти вырождение по частотам, разложим исходное представление на неприводимые. Для этого найдем характер этого представления. Он равен числу векторов-амплитуд атомов, не подвергающихся изменению при действии данного элемента группы:

$$\chi(e) = 3, \quad \chi(\sigma_2) = 0, \quad \chi(\sigma_3) = 1.$$

Разложим характер в сумму неприводимых характеров

$$\chi(g) = \sum_l c_l \chi_l(g),$$

где $\chi_l(g)$ — характер элемента g в l -м неприводимом представлении, а c_l — кратность вхождения представления в разложение. Воспользовавшись ортогональностью характеров, найдем коэффициенты c_l : $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$. Таким образом, исходное представление разлагается на одно единичное и одно двумерное неприводимые представления. Это означает, что система имеет две собственные частоты, одна из которых двукратно вырождена. Найдем эти частоты. Собственным для тождественного представления является вектор-амплитуда, не меняющаяся при любых

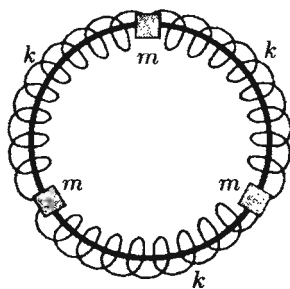


Рис. 11.1. Массы на кольце, моделирующие «молекулу» с треугольной симметрией

групповых преобразованиях, т. е. перестановках атомов. Это, очевидно, $b^t = (1, 1, 1)$.

Из уравнений движения

$$\begin{aligned} -\frac{m}{k}\omega^2 b_1 &= -2b_1 + b_2 + b_3, \\ -\frac{m}{k}\omega^2 b_2 &= b_1 - 2b_2 + b_3, \\ -\frac{m}{k}\omega^2 b_3 &= b_1 + b_2 - 2b_3 \end{aligned} \quad (11.16)$$

находим, что собственная частота моды b^t равна нулю (однородная трансляция вдоль окружности не требует сжатия пружин). Ортогональное дополнение к b^t образует двумерное собственное подпространство. Выберем в нем какой-нибудь вектор, например $b^d = (0, 1, -1)$, и подставим в (11.16). В результате получим выражение для второй частоты:

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Правильность нахождения частоты симметричного колебания легко проверить, заметив, что при таком движении неподвижными остаются атом и середина противоположной «пружины», поэтому жесткость «пружины», действующей на массу m , составляет $3k$. ►

345. То же для системы из четырех одинаковых атомов, расположенных в равновесии в вершинах квадрата. Гамильтониан получается из (11.15) заменой верхнего предела суммирования по j на 4 и периодического граничного условия на $x_4 \equiv x_0$.

Решение. Группа симметрии системы совпадает с группой D_4 симметрии квадрата. Последняя состоит из 8 элементов и содержит 5 классов сопряженных элементов: e — единичный элемент, σ_2 — поворот вокруг центра на 180° , σ_3 — отражения относительно двух диагоналей, σ_4 — отражения относительно двух прямых, проходящих через середины противоположных сторон квадрата, σ_5 — повороты вокруг центра на 90° и 270° . Размерности неприводимых представлений можно найти из условия (9.5). Только одна сумма пяти квадратов дает число 8, именно $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8$. Так что имеется 4 одномерных представления E, A_2, A_3, A_4 и одно двумерное представление B . Соответствующая таблица характеров имеет вид

	e	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
E	1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1	1
A_3	1	1	1	-1	-1
A_4	1	1	-1	1	-1
B	2	-2	0	0	0

Характер четырехмерного исходного представления $T(g)$ в пространстве векторов-амплитуд:

$$\chi(e)=4, \quad \chi(\sigma_2)=0, \quad \chi(\sigma_3)=2, \quad \chi(\sigma_4)=0, \quad \chi(\sigma_5)=0.$$

Воспользуемся ортогональностью характеров неприводимых представлений и с помощью усреднения по группе найдем коэффициенты разложения исходного представления по неприводимым:

$$T = E \oplus A_3 \oplus B.$$

Это означает, что имеется две невырожденные и одна двукратно вырожденная частоты колебаний. Частота, соответствующая тождественному представлению, как и в предыдущей задаче, равна нулю: $b^t = (1, 1, 1, 1)$, $\omega^t = 0$. Для определения нормальных мод, преобразующихся по представлениям A_3, B , воспользуемся тем, что оператор

$$P_R = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(R)*}(g) T(g) = \langle \chi^{(R)*}(g) T(g) \rangle$$

является с точностью до численного множителя проектором на инвариантное подпространство, соответствующее неприводимым представлениям $R = E, A_3$ или B , если последнее встречается в разложении $T(g)$ по неприводимым ровно один раз. Усреднение проводится здесь по всем элементам группы, а $\chi^{(R)}(g)$ обозначает характер представления $R(g)$ ¹⁾.

В нашем случае неприводимые представления A_3 и B встречаются ровно по одному разу. Проще всего построить проектор на подпространство, преобразующееся по представлению B . Для этого, как это видно из таблицы неприводимых характеров, нужно знать явный вид матриц исходного представления T только для двух элементов e и σ_2 :

$$P_B = \frac{1}{8} (2T(e) - 2T(\sigma_2)),$$

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Действуя последовательно оператором P_B на базисные векторы исходного представления (достаточно первых двух), получаем, что подпространство, преобразующееся по представлению B , является двумерным пространством с базисом:

$$b = (1, 0, -1, 0), \quad b' = (0, 1, 0, -1).$$

¹⁾ Если одно неприводимое представление встречается более одного раза, то P_R проектирует в прямую сумму подпространств, в которых действуют представления $R(g)$.

Подставляя b или b' в уравнения движения

$$\begin{aligned} -\frac{m}{k}\omega^2 b_1 &= -2b_1 + b_2 + b_4, \\ -\frac{m}{k}\omega^2 b_2 &= b_1 - 2b_2 + b_3, \\ -\frac{m}{k}\omega^2 b_3 &= b_2 - 2b_3 + b_4, \\ -\frac{m}{k}\omega^2 b_4 &= b_1 + b_3 - 2b_4, \end{aligned} \quad (11.17)$$

получаем выражение $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ для собственной частоты двукратно вырожденного колебания системы.

Вектор b^a , преобразующийся по представлению A_3 , однозначно определяется условием ортогональности к векторам b^t , b , b' :

$$b^a = (1, -1, 1, -1).$$

Частота, соответствующая этой моде, вычисляется аналогично ω_2 и равна $\omega_3 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$. ▶

346. Найти кратности вырождения нормальных колебаний молекулы воды H_2O , которую можно схематически представить себе в виде равностороннего треугольника (рис. 11.2).

Решение. В случае молекулы H_2O группа симметрии C_{2v} состоит из четырех элементов: единичного e , поворота r на 180° вокруг оси l , отражения ξ_1 относительно плоскости молекулы и отражения ξ_2 относительно плоскости, перпендикулярной плоскости молекулы и проходящей через ось l (см. рис. 11.2). Группа, очевидно, абелева, и каждый элемент образует класс сам по себе. Следовательно, имеются 4 одномерных неприводимых представления с таблицей характеров:

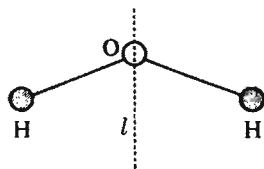


Рис. 11.2. Молекула H_2O

	e	r	ξ_1	ξ_2
χ_E	1	1	1	1
χ_A	1	1	-1	-1
χ_B	1	-1	1	-1
χ_C	1	-1	-1	1

Буква E здесь и ниже обозначает тождественное представление. Из одномерности неприводимых представлений следует, что все частоты колебаний невырожденные. Исходное представление Φ_i в пространстве размерности $3n = 9$ имеет следующие значения характера:

$$\chi_i(e) = 9, \quad \chi_i(r) = 1 + 2\cos\pi = -1, \quad \chi_i(\xi_1) = 3, \quad \chi_i(\xi_2) = 1.$$

Вычитая из них значения характера представления в подпространстве нулевых мод (поступательное движение и вращение молекулы как целого), для характера представления Φ в колебательном подпространстве с размерностью $3n - 6 = 3$ получим:

$$\begin{aligned}\chi(e) &= 9 - 6 = 3, & \chi(r) &= -1 - (-2) = 1, \\ \chi(\xi_1) &= 3, & \chi(\xi_2) &= 1.\end{aligned}$$

Используя ортогональность характеров неприводимых представлений, находим разложение Φ в прямую сумму $\Phi = 2E \oplus B$. Все три частоты в этом случае невырожденные. Равенство единице характера элемента ξ_1 в представлениях E и B означает, что во всех трех нормальных модах атомы колеблются в плоскости треугольника (рис. 11.3).

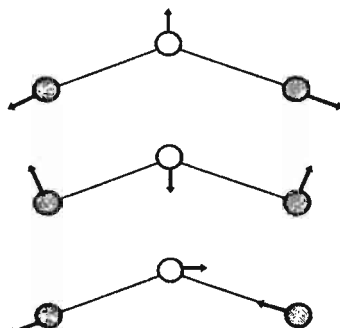


Рис. 11.3. Нормальные колебания молекулы H_2O

347. Определить кратности вырождения нормальных колебаний линейной молекулы углекислого газа CO_2 (рис. 11.4).

Решение. Линейная молекула CO_2 имеет две вращательные степени свободы, поэтому число колебательных степеней свободы равно $3n - 5 = 4$. Группа симметрии $D_{\infty v}$ является прямым произведением $C_i \otimes C_{\infty v}$ группы инверсии и группы $C_{\infty v}$, которая содержит непрерывную группу вращений вокруг оси молекулы и отражения в плоскостях, проходящих через ось молекулы. Это приводит к двукратному вырождению частоты колебаний, нарушающих прямолинейность молекулы: колебания в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через ось молекулы, одинаковы. Что касается движений вдоль оси, то в этом трехмерном подпространстве действует представление Φ фактор-группы $\frac{D_{\infty h}}{C_{\infty v}} = C_i$ группы симметрии, состоящей из двух элементов: единичного и инверсии i относительно положения атома углерода. Из таблицы характеров этой группы



Рис. 11.4. Линейная молекула CO_2

	e	i
χ_E	1	1
χ_{E^*}	1	-1

следует разложение нашего исходного представления отклонений атомов от равновесия вдоль оси молекулы, характер которого равен $\chi(e) = 3$,

$\chi(i) = -1^*$, на неприводимые

$$\Phi = E \oplus 2E^*,$$

соответствующее симметричному (E) и антисимметричному (E^*) нормальным колебаниям и сдвигу молекулы как целого (E^*). ►

348. *Определить кратности вырождения нормальных колебаний молекулы аммиака NH_3 , представляющей собой пирамиду с равносторонним треугольником в основании, в вершинах которого находятся атомы водорода.*

Решение. Группа симметрии C_{3v} молекулы состоит из 6 элементов, распадающихся на три класса: единичный e ; 2 поворота τ на 120° и 240° вокруг вертикальной оси, проходящей через атом N; 3 отражения σ относительно плоскостей, перпендикулярных основанию и проходящих через атом N и один из атомов H. Таблица характеров этой группы приведена в решении задачи 291. Исходное представление Φ в пространстве размерности $4n = 12$ имеет следующий характер:

$$\chi_i(e) = 12, \quad \chi_i(\tau) = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{3} = 0, \quad \chi(\sigma) = 2.$$

Вычитая из них характеры представления в подпространстве нулевых мод, для характеров представления Φ в колебательном подпространстве размерности $4n - 6 = 6$ получим:

$$\chi(e) = 12 - 6 = 6, \quad \chi(\tau) = 0, \quad \chi(\sigma) = 2.$$

Разлагая на неприводимые представления, получаем (в обозначениях задачи 291)

$$\Phi = 2T^{(1)} \oplus 2T^{(3)}.$$

Таким образом, имеется две невырожденные и две двукратно вырожденные частоты колебаний. ►

349. *Атом с полным моментом $J = 1$ помещен в вершину тетраэдра с основанием в виде равностороннего треугольника, образованного атомами другого сорта (см. рис. 11.5). Учитывая влияние этих атомов, найти кратности вырождений и разбиение по подуровням состояний с разными проекциями момента на ось симметрии (высота h).*

Решение. Группа симметрии F системы состоит из единицы, двух поворотов на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ вокруг высоты h тетраэдра (один класс r, r^2) и трех отражений относительно плоскостей, проходящих через эту высоту и одну из вершин треугольника основания (класс $\sigma, \sigma\tau, \sigma\tau^2$). Эта группа изоморфна группе S_3 перестановок трех элементов, ее таблица характеров вычислена в решении задачи 291. Основной гамильтониан инвариантен

* Инверсию всегда можно представить виде поворота вокруг оси на 180° и отражения в плоскости, перпендикулярной этой оси. В нашем случае $\chi(i) = -1$, а не -3 , поскольку рассматривается одномерное движение.

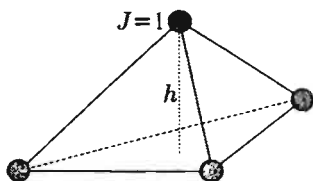


Рис. 11.5. Атом в поле, создаваемом тремя атомами другого сорта, расположенными в вершинах правильного треугольника

относительно полной группы вращений $O(3)$, исходное состояние имело степень вырождения $2J+1=3$. В нем действовало трехмерное представление группы $O(3)$. Группа F является подгруппой $O(3)$. Характер исходного представления можно найти, пользуясь трансформационными свойствами функций $Y_{J,m}(\theta, \varphi)$, где θ и φ — углы в сферической системе координат с осью h вдоль высоты тетраэдра:

$$U(r)Y_{J,m}(\theta, \varphi) = Y_{J,m}\left(\theta, \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = e^{-im\frac{2\pi}{3}} Y_{J,m}(\theta, \varphi), \quad (11.18)$$

$$U(\sigma)Y_{J,m}(\theta, \varphi) = Y_{J,m}(\theta, -\varphi) = Y_{J,-m}(\theta, \varphi).$$

Откуда для $J=1$

$$\chi(e)=3, \quad \chi(r) = \sum_{m=-1}^1 e^{im\frac{2\pi}{3}} = 0, \quad \chi(\sigma) = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1. \quad (11.19)$$

Используя ортогональность характеров неприводимых представлений, получаем

$$D = T^{(1)} \oplus T^{(3)}, \quad (11.20)$$

где $T^{(1)}$ — тривиальное, а $T^{(3)}$ — двумерное неприводимое представление группы S_3 . Таким образом, исходный трехкратно вырожденный уровень расщепится на два подуровня, один из которых невырожденный, а другой — двукратно вырожденный. Волновая функция, преобразующаяся по тождественному представлению, инвариантна относительно поворотов. Отсюда следует, что ей соответствует проекция момента на ось симметрии, равная нулю (нет φ -зависимости):

$$\Psi_I = Y_{1,0}. \quad (11.21)$$

Волновые функции двукратно вырожденного подуровня ортогональны к подуровню (11.21), поэтому они являются линейными комбинациями состояний с проекциями моментов ± 1 на ось симметрии. ►

350. Атом с полным угловым моментом $J=2$ находится в центре равностороннего треугольника, образованного одинаковыми атомами другого сорта. Рассматривая их влияние как возмущение, найти, на сколько подуровней и какой кратности расщепится исходный пятикратно вырожденный уровень.

Решение. По сравнению с предыдущей задачей появляется дополнительная образующая группы симметрии F — отражение $\tilde{\sigma}$ относительно плоскости треугольника, $\tilde{\sigma}^2 = e$. Этот элемент группы образует класс сам по себе, так как коммутирует с каждым элементом группы. Количество элементов группы F удваивается ($|F| = 12$), так как для любого элемента группы существует парный, умноженный на $\tilde{\sigma}$. Отсюда следует, что наряду с классами сопряженных элементов r и σ появляются классы r' и σ' — результат умножения на $\tilde{\sigma}$. Так как $\tilde{\sigma}$ коммутирует со всеми элементами F , то в любом представлении $T(\tilde{\sigma}) = \pm I$, где I — единичная матрица. Количество неприводимых представлений также удваивается по сравнению с предыдущей задачей. Рассматривая таблицу характеров как матрицу, мы получим таблицу характеров как тензорное произведение матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и матрицы характеров группы D_3 :

	e	r	σ	$\tilde{\sigma}$	r'	σ'
χ_E	1	1	1	1	1	1
χ_A	1	1	-1	1	1	-1
χ_B	2	-1	0	2	-1	0
$\chi_{E'}$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_{A'}$	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi_{B'}$	2	-1	0	-2	1	0
χ_D	5	-1	1	1	1	1

Внизу таблицы выписаны характеры исходного представления D , которые можно получить, если в качестве базиса в 5-мерном пространстве состояний с полным моментом $J=2$ выбрать, например, Y_{Jm} , с проекцией момента на ось симметрии третьего порядка $m = -2, -1, 0, 1, 2$, и воспользоваться трансформационными свойствами (11.18), а также

$$\begin{aligned} U(\tilde{\sigma})Y_{Jm}(\theta, \varphi) &= U(\tilde{\sigma})Y_{Jm}(-\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{Jm}(\theta, \varphi), \\ U(r') &= U(\tilde{\sigma})U(r), \quad U(\sigma') = U(\tilde{\sigma})U(\sigma). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Заметим, что относительно преобразований группы вращений состояние с моментом 2 преобразуется как следующие функции единичного вектора $n = (n_x, n_y, n_z)$:

$$n_+^2, \quad n_+ n_z, \quad n_z^2 - \frac{1}{3}, \quad n_- n_z, \quad n_-^2, \quad (11.23)$$

где $n_{\pm} = n_x \pm i n_y$.

Соотношение (9.3) ортогональности характеров неприводимых представлений дает разложение

$$D = E \oplus B \oplus B'. \quad (11.24)$$

Таким образом, исходный уровень расщепился на три подуровня: один невырожден, а два — двукратно вырождены. ►

351. Найти правила отбора по четности операторов электрического $\mathbf{d}$ и магнитного $\mathbf{m}$ дипольных моментов.

Решение. Группа инверсии $G = \{e, P\}$, $P^2 = e$ имеет только одномерные неприводимые представления, поэтому функции состояний $\langle f |$ и $| i \rangle$ могут быть либо четными, либо нечетными, т. е. преобразуются по одномерным представлениям $D_i(P)$, $D_f(P) = \pm 1$. Так как электрический дипольный момент меняет знак при инверсии, а магнитный не меняет, то $D_d = -1$, $D_m = 1$. Прямое произведение представлений содержит тривиальное представление $D_f \otimes D_0 \otimes D_i = 1$, если $D_f D_i = -1$ для $\mathbf{d}$ или $D_f D_i = 1$ для $\mathbf{m}$. Матричный элемент d_{fi} (m_{fi}) может быть отличен от нуля, а переходы разрешены, если состояния $\langle f |$ и $| i \rangle$ имеют противоположную (одинаковую) четность. ►

352. Найти правила отбора оператора электрического дипольного момента $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$:

- (а) по полному орбитальному моменту L .
- (б) по проекции орбитального момента M .

Решение. (а) Оператор электрического дипольного момента представляет собой вектор, поэтому преобразуется по трехмерному неприводимому представлению D_J группы $SO(3)$, с $J=1$. Обозначим через L момент начального состояния, а через L' — момент конечного, тогда при $L \geq 1$ разложение

$$D = D_{L'}^* \otimes D_1 \otimes D_L = D_{L'}^* (D_{L-1} \oplus D_L \oplus D_{L+1})$$

содержит тривиальное представление только при

$$L' = L, L \pm 1; \quad L \geq 1.$$

Если же $L=0$, то $D_1 \otimes D_0 = D_1$, поэтому $D = D_{L'}^* \otimes D_1$ содержит тривиальное представление только при $L' = 1$. Поэтому матричный элемент между двумя S -состояниями обращается в нуль. Заметим, что в атоме водорода, содержащем один электрон, переход в состояние с $L' = L$ запрещен по четности.

Решение. (б) Вращения вокруг направления оси квантования z образуют абелеву группу $SO(2)$, все неприводимые представления которой одномерны: $D_M = \exp(iM\varphi)$. Поэтому произведение $D = D_{M'}^* \otimes D_m \otimes D_M$ содержит тривиальное, если $M' = M + m$. Матричный элемент проекции дипольного момента на ось квантования d_z отличен от нуля, если $M' = M$, а для $M' = M \pm 1$ отличны от нуля матричные элементы операторов $d_{\pm} = d_x \pm i d_y$, которые преобразуются по представлениям $D_{\pm 1}$ соответственно. ►

11.5. Задачи

353. Показать, что матричные элементы скалярного оператора между состояниями, преобразующимися по различным неприводимым представлениям, обращаются в нуль.

354. Доказать, что в разложении прямого произведения двух разных неприводимых представлений на неприводимые нет тривиального представления.

355. Найти правила отбора для векторного оператора при наличии симметрии D_3 .

11.6. Ответы

353. *Указание:* Использовать соотношения ортогональности характеров.

355. Запрещены переходы между состояниями, преобразующимися по разным одномерным представлениям.

Сводка формул по специальным функциям

П.1. Г-функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dz z^{x-1} e^{-z}, \quad (\text{П.1})$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (\text{П.2})$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \quad (\text{П.3})$$

П.2. Гипергеометрические функции

П.2.1. Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1$

Дифференциальное уравнение для ${}_2F_1(a, b; c; x)$:

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0. \quad (\text{П.4})$$

Разложение в степенной ряд возле $x=0$:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (\text{П.5})$$

Преобразование Эйлера:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{x}{x-1}\right). \quad (\text{П.6})$$

Интегральное представление:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dt \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a}. \quad (\text{П.7})$$

П.2.2. Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$

Дифференциальное уравнение для ${}_1F_1(a; c; x)$:

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0. \quad (\text{П.8})$$

Разложение в степенной ряд возле $x=0$:

$${}_1F_1(a; c; x) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (\text{П.9})$$

Второе решение:

$$y = x^{1-c} {}_1F_1(a-c+1; 2-c; x). \quad (\text{П.10})$$

Преобразование Куммера:

$${}_1F_1(a; c; x) = e^x {}_1F_1(c-a; c; -x). \quad (\text{П.11})$$

Интегральное представление:

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{xt}, \quad (\text{П.12})$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0.$$

Асимптотическое поведение:

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a; c; x) &\simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c}, & x \rightarrow +\infty, \\ {}_1F_1(a; c; x) &\simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a}, & x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

П.3. Цилиндрические функции

П.3.1. Функции Бесселя J_ν и Неймана Y_ν

Дифференциальное уравнение для $J_\nu(x)$:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (\text{П.14})$$

Разложение в степенной ряд возле $x=0$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n+\nu+1)}. \quad (\text{П.15})$$

Выражение через гипергеометрическую функцию:

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-ix} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2ix\right). \quad (\text{П.16})$$

Рекуррентное соотношение:

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x). \quad (\text{П.17})$$

Формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dx} J_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \\ \frac{d}{dx} (x^{\pm \nu} J_\nu(x)) &= \pm x^{\pm \nu} J_{\nu \mp 1}(x). \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Интегральные представления:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{dz}{z^{\nu+1}} \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{iz \sin \varphi - i\nu \varphi} - \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \int_0^{\infty} dt e^{-x \operatorname{sh} t - \nu t}. \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^{2\nu}(\varphi) \cos(x \sin(\varphi)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 dt e^{izt} (1-t^2)^{\nu-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

В первом интегральном представлении интегрирование идет по контуру, начинающемуся и заканчивающемуся в $-\infty$, обходящему точку $z=0$ в положительном направлении (рис. П.1). В интегральном представлении Шлефли (П.19) при целом ν остается только первое слагаемое. В интеграле Пуассона (П.20) $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$.

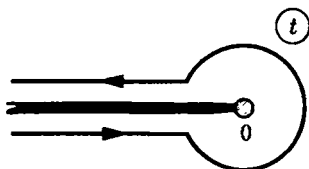


Рис. П.1. Контур интегрирования, обходящий разрез $t \in (-\infty, 0]$ в положительном направлении

Второе решение:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi \nu} [J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)]. \quad (\text{П.21})$$

Асимптотическое поведение:

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.22})$$

Случай полуцелого индекса:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (\text{П.23})$$

П.3.2. Функции Бесселя целого порядка J_n

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (\text{П.24})$$

Производящая функция:

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(x). \quad (\text{П.25})$$

Соотношения ортогональности:

$$\int_0^1 dx x J_k(\gamma_n x) J_k(\gamma_m x) = \frac{\delta_{nm}}{2} \left(\frac{dJ_k(\gamma_m)}{d\gamma_m} \right)^2, \quad J_k(\gamma_m) = 0, \quad (\text{П.26})$$

$$\int_0^1 dx x J_k(\lambda_n x) J_k(\lambda_m x) = \frac{\delta_{nm}}{2} \left(1 - \frac{k^2}{\lambda_m^2} \right) J_k^2(\lambda_m), \quad \frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m} = 0.$$

П.3.3. Модифицированная функция Бесселя I_ν и функция Макдональда K_ν

Дифференциальное уравнение для $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$:

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0. \quad (\text{П.27})$$

Разложение в степенной ряд возле $x=0$:

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n+\nu+1)}. \quad (\text{П.28})$$

Выражение через обычные функции Бесселя:

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ix). \quad (\text{П.29})$$

Выражение для K_ν через I_ν , $I_{-\nu}$:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2 \sin \pi \nu}. \quad (\text{П.30})$$

Интегральные представления:

$$I_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 dt e^{-xt} (1-t^2)^{\nu-1/2}, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2},$$

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty dt e^{-x \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} \nu t, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad (\text{П.31})$$

$$K_\nu(2\sqrt{pq}) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu/2} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-px-q/x} dx, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Re} q > 0.$$

Асимптотическое поведение:

$$I_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi x}{2}} e^x, \quad K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.32})$$

$$I_\nu(x) \simeq \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad K_0(x) \simeq -\ln x, \quad x \rightarrow +0; \quad (\text{П.33})$$

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad x \rightarrow +0, \quad \nu \neq 0. \quad (\text{П.34})$$

П.4. Ортогональные полиномы

П.4.1. Полиномы Лежандра P_l и присоединенные функции Лежандра P_l^m

Дифференциальное уравнение для $P_l(x)$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0. \quad (\text{П.35})$$

Дифференциальное уравнение для $P_l^m(x)$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0. \quad (\text{П.36})$$

Формулы Родрига:

$$P_l(x) \equiv P_l^0(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l,$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Первые 3 полинома:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}. \quad (\text{П.37})$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}. \quad (\text{П.38})$$

Рекуррентное соотношение:

$$x(2l+1)P_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x). \quad (\text{П.39})$$

Формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} (2l+1)P_l(x) &= \frac{d}{dx} P_{l+1}(x) - \frac{d}{dx} P_{l-1}(x), \\ lP_l(x) &= x \frac{d}{dx} P_l(x) - \frac{d}{dx} P_{l-1}(x). \end{aligned} \quad (\text{П.40})$$

Производящие функции:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), & r < 1; \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(x), & r > 1; \end{cases} \quad -1 < x < 1. \quad (\text{П.41})$$

Интегральные представления:

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0+)} \frac{dz z^{-l-1}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}, \quad (\text{П.42})$$

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^l. \quad (\text{П.43})$$

В формуле (П.42) интегрирование идет по замкнутому контуру вокруг точки $z=0$ в положительном направлении.

Асимптотическое поведение:

$$P_l(\cos \theta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{\sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \theta}}, \quad l |\sin \theta| \gg 1. \quad (\text{П.44})$$

Сферические гармоники Y_{lm}

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta). \quad (\text{П.45})$$

Дифференциальные уравнения для Y_{lm} :

$$\Delta_\Omega Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}, \quad i \frac{d}{d\varphi} Y_{lm} = -mY_{lm}, \quad (\text{П.46})$$

где Δ_Ω — угловая часть трехмерного оператора Лапласа в сферических координатах.

Соотношение ортогональности:

$$\int \sin \theta \, d\theta \, d\varphi Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{П.47})$$

Соотношение полноты:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(n) Y_{lm}^*(n') = \delta(n - n'). \quad (\text{П.48})$$

П.4.2. Полиномы Эрмита H_n

Дифференциальное уравнение для $H_n(x)$:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \quad (\text{П.49})$$

Формула Родрига:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (\text{П.50})$$

Первые 3 полинома:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2. \quad (\text{П.51})$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}. \quad (\text{П.52})$$

Соотношение полноты:

$$\frac{e^{-(x^2 + x'^2)/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(x')}{2^n n!} = \delta(x - x'). \quad (\text{П.53})$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \quad (\text{П.54})$$

Формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \quad (\text{П.55})$$

Производящая функция:

$$\exp(2xz - z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x). \quad (\text{П.56})$$

Интегральные представления:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{2^{n+1} e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dz z^n e^{-z^2} \cos\left(2xz - \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-t^2} dt. \end{aligned} \quad (\text{П.57})$$

П.4.3. Полиномы Лагерра L_n^ν

Дифференциальное уравнение для $L_n^\nu(x)$:

$$x y'' + (\nu + 1 - x) y' + n y = 0. \quad (\text{П.58})$$

Формула Родрига:^{*)}

$$L_n^\nu(x) = \frac{x^{-\nu} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{n+\nu}. \quad (\text{П.59})$$

Первые 3 полинома:

$$\begin{aligned} L_0^\nu(x) &= 1, \quad L_1^\nu(x) = \nu + 1 - x, \\ L_2^\nu(x) &= \frac{(\nu + 1)(\nu + 2)}{2} - (\nu + 2)x + \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{П.60})$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^\nu L_m^\nu(x) L_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{n!} \delta_{mn}. \quad (\text{П.61})$$

Соотношение полноты:

$$(xx')^{\nu/2} e^{-(x+x')/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^\nu(x) L_n^\nu(x')}{\Gamma(n + \nu + 1)} = \delta(x - x'). \quad (\text{П.62})$$

Рекуррентное соотношение:

$$(n + 1) L_{n+1}^\nu(x) - (2n + \nu + 1 - x) L_n^\nu(x) + (n + \nu) L_{n-1}^\nu(x) = 0. \quad (\text{П.63})$$

Формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} L_n^\nu(x) &= n L_n^\nu(x) - (n + \nu) L_{n-1}^\nu(x), \\ \frac{d}{dx} L_n^\nu(x) &= -L_{n-1}^{\nu+1}(x). \end{aligned} \quad (\text{П.64})$$

^{*)} В книге [ЛЛ74] обобщенные полиномы Лагерра определены иначе.

Производящая функция:

$$(1-z)^{-\nu-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^{\nu}(x). \quad (\text{П.65})$$

Интегральное представление:

$$\begin{aligned} L_n^{\nu}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\nu} \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int^{(0+)} \frac{(1-t)^{n+\nu}}{t^n} e^{tz} \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (\text{П.66})$$

Здесь интегрирование идет по замкнутому контуру вокруг точки $t=0$ в положительном направлении.

Литература

- [АС79] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
- [Арн78] *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [Арн84] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
- [Арн89] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [Арн97] *Арнольд В. И.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Фазис, 1997.
- [Арс84] *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
- [Арф70] *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.
- [БЗП71] *Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяния, реакции, распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
- [БЭ73] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. СМБ. М.: Наука, 1973.
- [БЭ74] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. II: Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. СМБ. М.: Наука, 1974.
- [БЭ67] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. III: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. СМБ. М.: Наука, 1967.
- [Биц78] *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1978.
- [БК77] *Бицадзе А. В., Калинин Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977.
- [БК98] *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Задачи по математической физике. М.: Изд-во Московского университета, 1998.

- [БМ74] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [БСТ87] Буда́к Б. М., Самарский А. А., Тихоно́в А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1987.
- [ВдВ38] Ван-дер-Варден Б. Л. Метод теории групп в квантовой механике. Харьков: Изд-во ХГУ, 1938.
- [Виг61] Вигнер Е. Теория групп. М.: ИЛ, 1961.
- [Вла88] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
- [Год71] Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
- [ГР71] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
- [ДБ61] Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961.
- [ДНФ79] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
- [ЗМНП80] Захаров В. Е., Манакоев С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [ЗР66] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
- [КА84] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Мир, 1984.
- [Кам66] Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
- [Кам76] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
- [Кир78] Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
- [КФ72] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [КГС62] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962.
- [Коп66] Копсон Э. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.

- [Кос77] Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
- [Коу72] Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
- [КГ51] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951.
- [Кур64] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [ЛШ87] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
- [ЛЛ74] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [ЛЛ88] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
- [ЛСУ55] Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955.
- [Люб58] Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение к физике. М.: ГИФМЛ, 1958.
- [Люб86] Любарский Г. Я. Теория групп и физика. М.: Наука, 1986.
- [Мар77] Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977.
- [Мес79] Мессиа А. Квантовая механика. М.: Наука, 1979.
- [Мих68] Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968.
- [МФ58] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. I. ИЛ, М., 1958.
- [МФ60] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. II. М.: ИЛ, 1960.
- [Мус63] Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1963.
- [МУ72] Мэтьюз Дж., Уокер Д. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1972.
- [Най76] Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
- [Нью89] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. Мир, М., 1989 (перевод: Newell A. C. Solitons in Mathematics and physics. SIAM, 1985).
- [Олв90] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

- [ПТ67] *Петрашень М. И., Трифонов Е. А.* Применения теории групп в квантовой механике. М.: Наука, 1967.
- [Пет61] *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях в частных производных. М.: Наука, 1961.
- [Пет65] *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.
- [ПБМ81] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
- [ПБМ83] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
- [ПБМ86] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
- [Рих82] *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1982.
- [Рих84] *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1984.
- [РФ70] *Румер Ю. Б., Фет А. И.* Теория унитарной симметрии. М.: Наука, 1970.
- [СФШ76] *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976.
- [Сми74а] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 1. М.: Наука, 1974.
- [Сми74б] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1974.
- [Сми74с] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 1. М.: Наука, 1974.
- [Сми81] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981.
- [Сми76] *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1976.
- [Соб66] *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
- [ТС72] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
- [Три57] *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.

- [Уиз77] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [Фед87] *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. СМБ. М.: Наука, 1987.
- [Хам66] *Хамермеш М.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Мир, 1966.
- [Хед65] *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов. М.: Мир, 1965.
- [Хол62] *Холл М.* Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
- [ЭД83] *Эллиот Дж., Добер П.* Симметрия в физике. М.: Мир, 1983.
- [Эрд62] *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.
- [ЯЭЛ77] *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977.

Колоколов Игорь Валентинович
Кузнецов Евгений Александрович
Мильштейн Александр Ильич
Подивилов Евгений Вадимович
Черных Александр Иванович
Шапиро Давид Абрамович
Шапиро Елена Геннадьевна

Задачи по математическим методам физики

Группа подготовки издания:

Директор — Доминго Марин Рикой

Заместители директора — Наталья Финогенова, Ирина Макеева

Компьютерный дизайн — Виктор Романов

Верстка — Наталия Бекетова

Редакционно-корректорские работы — Елена Кудряшова, Анна Шабалина

Обработка графики — Елена Ефремова

Обработка текста — Анна Тюрина, Андрей Стулов

Техническая поддержка — Наталия Аринчева

Издательство «Эдиториал УРСС» 113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, к. п.
Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Гигиенический сертификат на выпуск книжной
продукции № 77.ФЦ.8.953.П.270.3.99 от 30.03.99 г. Подписано к печати 20.03.2000 г.
Формат 60 × 84/16 Тираж 1000 экз. Печ. л. 18. Зак. № 82

Отпечатано в ТОО «Типография ПЭМ». 121471, г. Москва, Можайское шоссе, 25